

ОБЩЕСТВО
ТАЖИМ ХИРМОСИ
И ПЛАСТИЧНОСТИ



22.25
Т 35
УДК 539.3

Теребушко О. И. Основы теории упругости и пластичности. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. — 320 с.

В учебнике излагаются теория напряжений и деформаций, основные соотношения, принципы и теоремы теории упругости, постановка и методы решения задач теории упругости, плоская задача теории упругости в декартовых и полярных координатах, теория изгиба и устойчивости тонких пластин (прямоугольных и круглых в плане), приближенные методы решения задач теории упругости (вариационные методы, метод сеток, метод конечных элементов), основы теории тонких упругих (безмоментных и пологих) оболочек, основы теории пластичности. Большое внимание уделено приложениям, рассмотрено большое количество задач. В конце каждой главы приведены вопросы для самопроверки и задачи для тренировки, к части из которых даны решения.

Учебник предназначен для студентов строительных специальностей, но может быть также использован в качестве учебного пособия и студентами других специальностей.

Табл. 6. Илл. 113. Библ. 30 назв.

Рецензенты:
кафедра строительной механики Всесоюзного заочного инженерно-строительного института;
доктор технических наук А. С. Вольмир

Т 1703040000—143
053(02)—84 79—84

© Издательство «Наука»,
Главная редакция
физико-математической
литературы, 1984

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Введение	7
Глава 1. Теория напряжений и деформаций	13
§ 1. Напряженное состояние в точке тела	13
§ 2. Напряжения на наклонной площадке. Главные напряжения	15
§ 3. Наибольшие касательные напряжения	20
§ 4. Дифференциальные уравнения равновесия	22
§ 5. Статические условия на поверхности тела	25
§ 6. Компоненты перемещений и компоненты деформаций	25
§ 7. Деформации в точке тела. Главные деформации	28
§ 8. Условия совместности деформаций Сен-Венана	31
Вопросы для самопроверки и задачи	33
Глава 2. Основные соотношения и теоремы теории упругости	38
§ 9. Обобщенный закон Гука для изотропного и анизотропного тела	38
§ 10. Потенциальная энергия деформации. Формулы Кастильяно и Грина	41
§ 11. Основные принципы	43
Вопросы для самопроверки	49
Глава 3. Постановка и методы решения задач теории упругости	51
§ 12. Сводка основных уравнений, постановка задач теории упругости	51
§ 13. Решение задач теории упругости в перемещениях (уравнения Ляме)	54
§ 14. Решение задач теории упругости в напряжениях (уравнения Бельтрами — Митчелла)	55
§ 15. Единственность решения	56
§ 16. Полуобратный метод Сен-Венана. Задача Сен-Венана. Принцип Сен-Венана	58
Вопросы для самопроверки	63
Глава 4. Плоская задача в декартовых координатах	64
§ 17. Плоская деформация и обобщенное плоское напряженное состояние	64
§ 18. Основные уравнения плоской задачи в декартовых координатах	67
§ 19. Функция напряжений Эри	68
§ 20. Решение плоской задачи в полиномах	71
§ 21. Изгиб консоли силой, приложенной на конце	75

§ 22. Изгиб прямоугольной полосы на двух опорах под равномерно распределенной нагрузкой	77
§ 23. Треугольная подпорная стенка	81
§ 24. Решение плоской задачи при помощи рядов Фурье	84
Вопросы для самопроверки и задачи	86
Глава 5. Плоская задача в полярных координатах	83
§ 25. Основные уравнения плоской задачи в полярных координатах	88
§ 26. Осесимметричные задачи	95
§ 27. Другие задачи в полярных координатах	102
Вопросы для самопроверки и задачи	117
Глава 6. Основные уравнения теории плоских пластин	120
§ 28. Исходные допущения. Классификация пластин	120
§ 29. Деформации, кривизны, усилия в гибких пластинах	122
§ 30. Уравнения совместности деформаций и равновесия	126
§ 31. Основные дифференциальные уравнения теории пластин	129
§ 32. Граничные условия	131
§ 33. Уравнения равновесия гибких пластин в перемещениях	134
§ 34. Потенциальная энергия изогнутой пластины	136
§ 35. Уравнения осесимметричного изгиба круглых пластин	138
Вопросы для самопроверки	145
Глава 7. Некоторые задачи изгиба и устойчивости пластин	146
§ 36. Цилиндрический изгиб пластин	146
§ 37. Чистый изгиб пластин	150
§ 38. Поперечный изгиб свободно опертых прямоугольных пластин (решение Навье)	152
§ 39. Изгиб прямоугольных пластин, две стороны которых свободно оперты, а две другие имеют произвольные граничные условия (решение М. Леви)	158
§ 40. Изгиб прямоугольных пластин, защемленных по всему контуру (решение С. П. Тимошенко)	162
§ 41. Изгиб ортотропных прямоугольных пластин	168
§ 42. Осесимметричный изгиб жестких круглых сплошных и кольцевых пластин	171
§ 43. Некоторые задачи устойчивости прямоугольных пластин	177
Вопросы для самопроверки и задачи	182
Глава 8. Приближенные методы решения задач прикладной теории упругости	189
§ 44. Вводные замечания. Основные понятия вариационного исчисления	189
§ 45. Метод Рунца	191
§ 46. Метод Бубнова — Галеркина	197
§ 47. Метод Канторовича — Власова	202
§ 48. Конечно-разностный метод (метод сеток)	206
§ 49. Метод конечных элементов	217
Вопросы для самопроверки и задачи	228
Глава 9. Основы расчета тонких упругих оболочек	231
§ 50. Основные понятия. Некоторые сведения о геометрии оболочек	231

§ 51. Деформации и изменения кривизн срединной поверхности	235
§ 52. Усилия и моменты в сечениях тонкой оболочки	236
§ 53. Безмоментная теория оболочек	239
§ 54. Приближенная теория краевого эффекта круговых цилиндрических оболочек	244
§ 55. Осесимметричное нагружение оболочки типа купола	248
§ 56. Пологие оболочки. Основные уравнения пологих оболочек в усилиях, перемещениях и смешанной форме	254
§ 57. Изгиб пологой оболочки поперечной нагрузкой	259
Вопросы для самопроверки	266
Глава 10. Основы теории пластичности	269
§ 58. Механические свойства материалов при одноосном растяжении и сжатии. Задачи, решаемые в теории пластичности	269
§ 59. Интенсивность напряжений и интенсивность деформаций. Критерии пластичности	272
§ 60. Теория малых упруго-пластических деформаций	280
§ 61. Решение задач упруго-пластического деформирования в перемещениях. Метод упругих решений	287
§ 62. Теория течения	290
§ 63. Простейшие задачи теории пластичности	294
§ 64. Плоское деформированное состояние	305
§ 65. Теория предельного равновесия	307
Вопросы для самопроверки и задачи	313
Список литературы	318

ПРЕДИСЛОВИЕ

В основу учебника положены лекции, читавшиеся автором в течение ряда лет студентам строительной специальности Всесоюзного заочного политехнического института.

При составлении учебника принималось во внимание то, что студенты изучают «Основы теории упругости и пластичности» после изучения ими курса «Сопротивление материалов» и поэтому с основными понятиями теории напряженного и деформированного состояния уже знакомы.

В первых пяти главах учебника рассматриваются общие вопросы теории упругости (теория напряжений и деформаций, основные соотношения и теоремы, постановка и методы решения задач теории упругости, плоская задача в декартовых координатах, плоская задача в полярных координатах). В шестой и седьмой главах излагаются основные уравнения теории тонких пластин (гибких и жестких) и некоторые задачи изгиба и устойчивости пластин. Восьмая глава учебника посвящена рассмотрению приближенных методов решения задач прикладной теории упругости (вариационных, конечных разностей, конечных элементов). В девятой главе рассматриваются основы расчета тонких упругих оболочек, причем основное внимание уделено вопросам расчета безмоментных и пологих оболочек. В десятой главе изучаются основы теории пластичности. Здесь рассмотрена и теория расчета конструкций по предельному состоянию.

В учебнике несколько увеличен по сравнению с обычно принятым удельный вес тех разделов теории упругости и пластичности, где рассматриваются прикладные вопросы. Так, например, более подробно излагаются основные уравнения теории пластин (не только жестких, но и гибких) и некоторые задачи изгиба пластин, в том числе и изгиб защемленной по всем краям пластины (решение С. П. Тимошенко). Даются краткие сведения о методе конечных элементов. Приведен пример решения задачи об изгибе пластины.

В конце каждой главы помещены вопросы для самопроверки и задачи. Часть задач снабжена решениями, остальные — ответами.

Автор благодарит А. С. Вольмира, Н. В. Колкунова и П. И. Перлина за ценные замечания, сделанные ими при внимательном просмотре рукописи.

ВВЕДЕНИЕ

Теория упругости и пластичности представляет собой один из основных разделов механики твердого деформируемого тела — совокупности дисциплин, изучающих напряженное и деформированное состояние твердых тел; сюда входят также теория ползучести, сопротивление материалов, строительная механика.

Задачи, которые решаются в различных разделах механики твердого деформируемого тела, сходны между собой и заключаются в установлении связи между внешними нагрузками и поведением деформируемого тела.

Различие между этими разделами механики состоит, во-первых, в рассматриваемых объектах (так, например, в курсе сопротивления материалов рассматривается главным образом брус, в теории упругости помимо бруса изучаются напряженное и деформированное состояния пластин, оболочек, массива, а в строительной механике объектами изучения являются системы, состоящие из стержней (фермы), балок (рамы), пластин и оболочек); во-вторых, в принимаемых допущениях (теории упругости, пластичности и ползучести отличаются друг от друга тем, что в них принимаются различные физические законы, устанавливающие связь между напряжениями и деформациями, но не вводятся каких-либо деформационных гипотез, а в сопротивлении материалов физический закон тот же, что и в теории упругости (закон Гука), но, кроме того, принимается дополнительно ряд допущений — гипотеза плоских сечений, ненадавливания волокон и т. д.); в-третьих, в методах, используемых для решения задач (в теории упругости приходится решать существенно более сложные уравнения, чем в сопротивлении материалов, и для их решения приходится прибегать к более сложным математическим методам).

Часто теорию упругости (это относится и к теории пластичности) подразделяют на математическую теорию упругости и прикладную теорию упругости.

Математическая теория упругости не использует никаких деформационных гипотез, а получаемые уравнения решают-

ся либо точными, либо такими приближенными методами, которые позволяют безгранично увеличивать степень приближения к точному решению. Поэтому можно считать результаты, получаемые при решении задач математической теории упругости, эталоном для оценки точности различных приближенных теорий и методов решения сходных задач.

Прикладная теория упругости отличается от математической тем, что для решения задач помимо закона Гука применяются некоторые дополнительные гипотезы деформационного характера (гипотеза плоских сечений для стержней, прямых нормалей для тонких пластин и оболочек и т. п.). При решении задач прикладной теории упругости наряду с точными методами решения соответствующих уравнений могут применяться и приближенные методы. Между прикладной теорией упругости, тесно связанной с запросами практики, и сопротивлением материалов нет четкой границы. Некоторые, наиболее простые задачи, относящиеся к этому разделу, рассматриваются также и в курсах сопротивления материалов.

Вместе с тем можно отметить также взаимное проникновение как рассматриваемых объектов (пластины, оболочки), так и используемых методов при решении задач (вариационные, численные, метод конечных элементов и др.) из теории упругости в строительную механику и наоборот. Поэтому нельзя установить также четкие границы между теорией упругости и строительной механикой.

Сказанное в значительной мере относится не только к теории упругости, но и к теории пластичности. Здесь также отсутствует четкая граница между теорией пластичности и сопротивлением материалов или строительной механикой. Так, например, задача оценки предельного состояния при изгибе или кручении бруса может рассматриваться не только в теории пластичности, но и в курсах сопротивления материалов и строительной механики.

Таким образом, значение теории упругости состоит, во-первых, в получении точных решений для тех задач, которые могут решаться и решаются иными методами в других разделах механики деформируемого твердого тела (сопротивление материалов, строительная механика); во-вторых, в постановке и решении таких важных для практики задач, которые не могут решаться методами сопротивления материалов (задач о напряженном и деформированном состоянии пластин, оболочек, массива, о концентрации напряжений около отверстий, о напряженном состоянии вблизи точек кон-

такта двух тел — контактные задачи, о распространении волн в упругой среде и т. п.); в-третьих, в том, что теория упругости обеспечивает развитие таких дисциплин, как сопротивление материалов и строительная механика, за счет расширения круга рассматриваемых в этих дисциплинах задач и использования новых методов решения.

Рассмотрим основные гипотезы, используемые в теории упругости.

1. *Гипотеза о сплошности деформируемого тела.* Согласно этой гипотезе твердое тело имеет непрерывную структуру и свойство непрерывности относится к любому сколь угодно малому объему тела. Это допущение позволяет утверждать, что напряжения, деформации, перемещения являются непрерывными функциями координат точек тела, и для исследования напряженного и деформированного состояния тела можно использовать анализ бесконечно малых. Гипотеза о сплошности используется не только в теории упругости, но и в механике сплошных сред (механике твердых, жидких и газообразных сред).

2. *Гипотеза о физической однородности.* Согласно ей все физические характеристики тела (модули упругости, коэффициенты Пуассона, плотности и т. п.) не зависят от координат точек тела.

3. *Гипотеза о естественном ненапряженном состоянии.* Суть этой гипотезы заключается в том, что при отсутствии внешних нагрузок напряжения во всех точках тела считаются равными нулю. В действительности в теле могут быть начальные напряжения и в некоторых случаях даже значительные (например, остаточные напряжения после сварки). Эти самоуравновешенные напряжения, имеющиеся в теле, не могут быть определены чисто теоретическим путем, если неизвестна предыстория их возникновения. Теория упругости позволяет определить лишь добавочные напряжения, которые возникают вследствие деформаций, вызванных действием приложенных внешних нагрузок.

4. *Гипотеза, согласно которой материал тела является идеально упругим* (форма и размеры тела полностью восстанавливаются после устранения причин, вызвавших деформацию), *а между деформациями и напряжениями существует линейная зависимость (закон Гука).*

Теория упругости, базирующаяся на линейной зависимости между напряжениями и деформациями и линейной связи между деформациями и перемещениями, называется *линейной или классической теорией упругости.*

В линейной теории упругости все перемещения точек тела считаются настолько малыми, что это позволяет не учитывать их влияние на взаимное расположение нагрузок и расстояния от них до любых точек тела. В связи с этим уравнения равновесия относятся к недеформированному телу.

Все излагаемые в данной книге вопросы теории упругости (кроме задачи изгиба пластин) рассматриваются в линейной постановке.

Математическая теория упругости как наука сложилась в первой половине XIX века в основном благодаря трудам французских инженеров и ученых Навье, Коши, Лямэ, Клапейрона, Сен-Венана.

Впервые уравнения равновесия упругого твердого тела в предположении дискретного молекулярного строения тела были получены Навье. В современной форме несколько позже эти уравнения вывел Коши, исходя из гипотезы о сплошном и однородном строении твердого тела. Он впервые ввел в уравнения теории упругости две упругие постоянные.

Лямэ и Клапейрон развили теорию Навье применительно к строительному делу. Ими был написан получивший высокую оценку специалистов мемуар о внутреннем равновесии твердых тел, решена задача о напряжениях и деформациях толстостенной трубы при осесимметричном нагружении (задача Лямэ).

Значительный вклад в развитие теории упругости принадлежит Сен-Венану (1797—1886). Им предложен новый подход для решения задач теории упругости (полуобратный метод Сен-Венана). С помощью этого метода им были решены важные задачи об изгибе и кручении бруса некруглого поперечного сечения. Ему принадлежат исследования по колебаниям, удару, теории пластичности.

Первые исследования по теории изгиба пластинок принадлежат Софи Жермен (1811—1816) и Навье (1820). Дальнейшее развитие теории изгиба пластин получила в трудах Кирхгофа (1850).

Важную роль в развитии теории упругости сыграли работы русских и советских ученых. Фундаментальные результаты в развитии принципа возможных перемещений, вариационных принципов механики, теории удара, а также интегрирования уравнений динамики принадлежат М. В. Остроградскому. А. В. Гадолиным была решена важная для практики артиллерийского дела задача о напряженном состоянии составных слоистых труб, подвергающихся действию внутреннего давления (развитие задачи Лямэ). Х. С. Головиным

впервые исследовано напряженное состояние бруса большой кривизны методами теории упругости.

Существенное продвижение в решении плоской задачи теории упругости связано с трудами советских ученых Г. В. Колосова и Н. И. Muskhelishvili, которые впервые применили метод, основанный на использовании функций комплексного переменного.

И. Г. Бубновым решен ряд задач об изгибе жестких и гибких пластин с учетом влияния закрепления торцов от тангенциальных смещений. Им же предложен новый эффективный метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений.

Основополагающие исследования по теории пластин и оболочек, колебаниям стержней с учетом влияния деформаций сдвига, по удару груза по балке были выполнены С. П. Тимошенко. Многие задачи решены предложенным им энергетическим методом.

Б. Г. Галеркину принадлежит большой цикл исследований по теории изгиба тонких пластин, толстых плит и теории оболочек. Для вывода уравнений теории оболочек он, по-видимому, впервые применил уравнения трехмерной теории упругости.

П. Ф. Папковичем впервые предложено решение задач теории упругости в перемещениях в форме гармонических функций, а также исследованы общие теоремы устойчивости упругих систем, решен большой цикл задач об изгибе пластин при различных граничных условиях.

Большой вклад в развитие общей теории оболочек внес В. З. Власов. Им исследовались общие уравнения теории оболочек, разработаны техническая теория оболочек, полубезмоментная теория оболочек, предложена новая теория изгиба и кручения тонкостенных стержней открытого профиля. Ему принадлежит заслуга развития нового вариационного метода применительно к решению задач изгиба и устойчивости оболочек. Исследования В. З. Власова положили начало созданию новой научной дисциплины — строительной механики оболочек.

Применение тонких гибких пластин и оболочек в качестве несущих элементов конструкций в технике дало толчок к развитию нелинейной теории оболочек.

Первые попытки формулирования теорий пластичности относятся к началу 70-х годов прошлого века. В работах Сен-Венана, Леви, Мизеса были впервые сформулированы основные гипотезы и получены дифференциальные уравне-

ния так называемой теории течения. Основные гипотезы теории малых упруго-пластических деформаций и соответствующие уравнения упруго-пластического равновесия предложены Генки (1923—1924). Дальнейшее развитие теории малых упруго-пластических деформаций получила в работах А. А. Ильюшина. Им сформулирована и доказана теорема о простом нагружении и показано, что в случае простого нагружения результаты решения по теориям пластического течения и малых упруго-пластических деформаций совпадают. Для решения дифференциальных уравнений упруго-пластического равновесия А. А. Ильюшиным предложен метод упругих решений.

Дальнейшее развитие теории пластичности связано с описанием процессов, происходящих при сложном нагружении упруго-пластического упрочняющегося материала. Одно из направлений в развитии теории пластичности при сложном нагружении базируется на сформулированном А. А. Ильюшиным постулате изотропии; основой второго направления является постулат Дракера о неотрицательности работы внешних сил в замкнутом цикле пластического нагружения.

В настоящей книге изложение вопросов пластичности ограничивается рассмотрением случая простого нагружения.

Глава 1

ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ

§ 1. Напряженное состояние в точке тела

Пусть твердое упругое тело находится под действием поверхностных сил, определенным образом распределенных по поверхности тела, и объемных сил (силы тяжести, инерционные и т. п.), распределенных по всему объему тела. Тогда в теле возникнут напряжения.

Напряжением называют интенсивность внутренних усилий, т. е. усилие, приходящееся на единицу площади сечения. Для исследования напряженного состояния в точке O тела вырежем около этой точки элементарный параллелепипед, ребра которого равны dx , dy , dz (рис. 1.1).

Если через ΔP обозначить внутреннее усилие, действующее на элементарную площадку (например, $BCC'B'$), то численно напряжение p определяется как отношение элементарного внутреннего усилия ΔP к площади элементарной площадки ΔF при $\Delta F \rightarrow 0$, т. е.

$$p = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F}.$$

Если грани вырезанного элементарного параллелепипеда бесконечно уменьшать, то параллелепипед стягивается в точку и p будет характеризовать величину полного напряжения в точке O на площадке, перпендикулярной к оси y . Это напряжение можно разложить на нормальную к площадке составляющую σ_y и касательную τ . При этом τ в свою очередь можно разложить на направления, параллельные осям x и z : τ_{xy} , τ_{zy} .

Таким же образом можно получить на других гранях бесконечно малого параллелепипеда нормальные напряжения σ_x , σ_z и составляющие касательных напряжений τ_{yx} , τ_{zx} , τ_{xz} , τ_{yz} . Чтобы не загромождать рис. 1.1, эти составляющие на других гранях параллелепипеда не показаны.

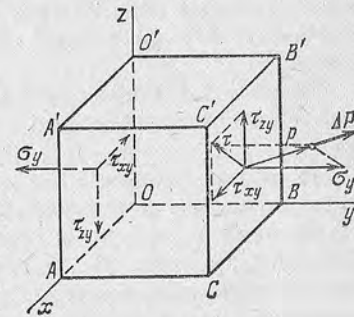


Рис. 1.1.

Для нормальных напряжений вводим один индекс ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$), показывающий направление нормального напряжения. Для касательных напряжений введем два индекса ($\tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$). Первый индекс указывает направление касательного напряжения, а второй — к какой оси перпендикулярна площадка. Например, τ_{xy} означает, что площадка, к которой относится касательное напряжение, перпендикулярна к оси y , а направлено касательное напряжение параллельно оси x .

Положительными считаются растягивающие напряжения. Для граней элементарного параллелепипеда $ACC'A', BCC'B', A'C'B'O'$ направление растягивающих напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ совпадает с положительным направлением осей x, y, z . Для противоположных граней $OBV'O', OAA'O', OACB$ направление растягивающих (т. е. положительных) напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ совпадает с отрицательным направлением осей x, y, z .

За положительные направления касательных напряжений принимаются положительные направления осей x, y, z для тех граней, где растягивающие напряжения действуют в направлении положительных осей x, y, z (т. е. для граней $ACC'A', BCC'B', A'C'B'O'$). Для тех граней, где направление растягивающих напряжений совпадает с отрицательным направлением осей x, y, z (грани $OBV'O', OAA'O', OACB$), положительные касательные напряжения направлены также в сторону отрицательных значений соответствующих координат.

На рис. 1.1 показаны для примера положительные направления напряжений $\sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{zy}$ на гранях $BCC'B'$ и $OAA'O'$.

На грани элементарного параллелепипеда, вырезанного около точки O , действуют три нормальные составляющие напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ и шесть касательных составляющих $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{yx}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$. В соответствии с законом парности касательных напряжений, доказательство которого приводится в курсах сопротивления материалов, касательные напряжения с одинаковыми индексами, действующие на двух взаимно перпендикулярных площадках, равны друг другу по величине, т. е.

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}.$$

Таким образом, с учетом закона парности касательных напряжений напряженное состояние в точке тела характеризуется шестью компонентами напряжения по координат-

ным осям. Эти составляющие напряжения являются функциями координат точки O , т. е.

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y, z), \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y, z), \quad \dots, \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y, z).$$

§ 2. Напряжения на наклонной площадке.

Главные напряжения

Для определения напряжений на площадке, наклоненной определенным образом по отношению к координатной системе xOy и проходящей через точку O , вырежем около этой точки элементарный четырехгранник $OABC$ (рис. 1.2). Грани OAB, OBC, OAC этого четырехгранника совпадают с координатными плоскостями xOy, yOz, xOz . Наклон грани ABC определяется величинами направляющих косинусов нормали ν к грани ABC . Обозначим косинусы углов между координатными осями x, y, z и направлением нормали ν соответственно через l, m, n :

$$\cos(\nu, \hat{x}) = l, \quad \cos(\nu, \hat{y}) = m,$$

$$\cos(\nu, \hat{z}) = n.$$

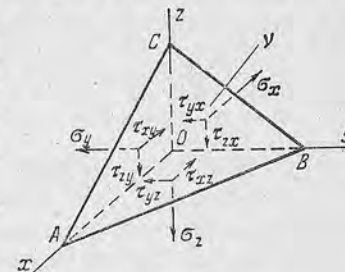


Рис. 1.2.

По мере уменьшения размеров вырезанного элементарного четырехгранника наклонная грань ABC приближается к точке O , в которой исследуется напряженное состояние, и в пределе проходит через эту точку. Поскольку напряжения изменяются непрерывно, то в пределе напряжения на грани ABC будут равны напряжениям на наклонной площадке, параллельной ABC и проходящей через точку O .

Пусть нам известны составляющие напряжений, действующих по граням, совпадающим с координатными плоскостями. Найдем напряжение p_ν , действующее на наклонной грани ABC .

Полное напряжение p_ν разложим на составляющие p_x, p_y, p_z , параллельные координатным осям. Если площадь грани ABC (см. рис. 1.2) обозначить через dF , то площади граней OBC, OAC и OAB будут соответственно равны ldF, mdF и ndF , где, как уже отмечалось, l, m, n — направляющие косинусы нормали ν к площадке ABC .

Так как мы рассматриваем бесконечно малый тетраэдр, то объемной силой как бесконечно малой более высокого

порядка, чем силы, действующие на грани, можно пренебречь при составлении условий равновесия тетраэдра. Из условий равновесия тетраэдра получим

$$\begin{aligned} p_x &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n, \\ p_y &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n, \\ p_z &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Уравнения (1.1) позволяют вычислить составляющие полного напряжения p_v на наклонной площадке, проходящей через данную точку, по известным значениям $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ составляющих напряжений в этой точке и направляющим косинусам нормали к площадке l, m, n .

Составляющие p_x, p_y, p_z образуют с нормалью v к наклонной площадке углы, косинусы которых соответственно равны l, m, n . Поэтому нормальное к площадке напряжение σ_v через проекции p_x, p_y, p_z полного напряжения p_v можно определить по формуле $\sigma_v = p_x l + p_y m + p_z n$, или

$$\sigma_v = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{xz} ln + 2\tau_{yz} mn. \quad (1.2)$$

Касательное напряжение на наклонной площадке τ_v найдем из очевидного равенства $\tau_v^2 = p_v^2 - \sigma_v^2$, где $p_v^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$, а σ_v определяется выражением (1.2). Поскольку p_x, p_y, p_z определяются через $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \dots, \tau_{yz}$, то и касательное напряжение τ_v также может быть определено через компоненты напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{yz}$.

Следовательно, на любой наклонной площадке, проходящей через данную точку O , нормальное и касательное напряжения могут быть выражены через известные напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{yz}$ или, иначе говоря, эти напряжения полностью характеризуют напряженное состояние в данной точке тела, они являются элементами так называемого *тензора напряжений*.

Дадим определение нового понятия тензорной величины. Если для каждой прямоугольной системы координат $Oxyz$ имеется совокупность векторов R_x, R_y, R_z , преобразующихся в векторы $R_{x'}, R_{y'}, R_{z'}$, отвечающие другой системе координат $Ox'y'z'$, по формулам

$$\begin{aligned} R_{x'} &= R_x \cos(\widehat{x, x'}) + R_y \cos(\widehat{y, x'}) + R_z \cos(\widehat{z, x'}), \\ R_{y'} &= R_x \cos(\widehat{x, y'}) + R_y \cos(\widehat{y, y'}) + R_z \cos(\widehat{z, y'}), \\ R_{z'} &= R_x \cos(\widehat{x, z'}) + R_y \cos(\widehat{y, z'}) + R_z \cos(\widehat{z, z'}), \end{aligned}$$

то совокупность этих трех векторов определяет новую величину, называемую тензором.

Можно показать*), что векторы полных напряжений, действующих по площадкам, перпендикулярным к осям x, y, z в системе $Oxyz$, преобразуются в векторы полных напряжений, действующих по площадкам, перпендикулярным к осям x', y', z' в системе $Ox'y'z'$, повернутой относительно системы $Oxyz$, по приведенным выше формулам. Это доказывает, что напряжение в точке является тензором. Тензор напряжения представляется матрицей

$$T_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}.$$

В матрице в каждой строке составляющие (компоненты) тензора имеют одинаковое направление, а в каждом столбце — относятся к одной и той же площадке. Нормальные напряжения располагаются по главной диагонали матрицы. Из закона парности касательных напряжений следует, что матрица симметрична относительно главной диагонали. Такой тензор называется *симметричным*.

Напряженное состояние в точке характеризуется тензором напряжения, а напряженное состояние в теле — совокупностью тензоров напряжений, образующих тензорное поле.

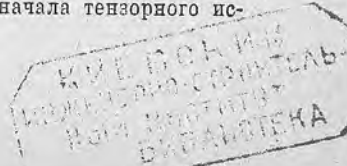
Перейдем теперь к определению величин главных напряжений и положений главных площадок. *Главными* называются такие площадки, на которых касательные напряжения равны нулю. Нормальные напряжения, действующие на главных площадках, называются *главными напряжениями*.

Пусть площадка с нормалью v является главной. Действующее на этой площадке нормальное напряжение σ является главным напряжением. В этом случае полное напряжение равно нормальному и, следовательно, направлено по нормали к рассматриваемой площадке, т. е. $p_v = \sigma$. Составляющие полного напряжения по осям x, y, z равны $p_x = \sigma l, p_y = \sigma m, p_z = \sigma n$.

Используя уравнения (1.1), получим

$$\begin{aligned} \sigma l &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n, \\ \sigma m &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n, \\ \sigma n &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n. \end{aligned} \quad (1.3)$$

*) Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. — М.—Л.: ГОНТИ, 1938.



Система однородных относительно l, m, n уравнений (1.3) может быть преобразована к виду

$$\begin{aligned}(\sigma_x - \sigma)l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n &= 0, \\ \tau_{yx}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{yz}n &= 0, \\ \tau_{zx}l + \tau_{zy}m + (\sigma_z - \sigma)n &= 0.\end{aligned}\quad (1.4)$$

Для того чтобы система (1.4) имела отличные от нуля решения, необходимо, чтобы определитель этой системы был равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0. \quad (1.5)$$

Определитель третьего порядка (1.5) можно записать в виде кубического уравнения:

$$\sigma^3 - I_{1\sigma}\sigma^2 + I_{2\sigma}\sigma + I_{3\sigma} = 0, \quad (1.6)$$

где σ — искомые главные напряжения, а через $I_{1\sigma}, I_{2\sigma}, I_{3\sigma}$ обозначены следующие коэффициенты:

$$I_{1\sigma} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z,$$

$$I_{2\sigma} = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2,$$

$$I_{3\sigma} = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2.$$

Для решения кубического уравнения (1.6) используем следующую подстановку:

$$\sigma = x + 1/3 I_{1\sigma}. \quad (1.7)$$

Тогда уравнение (1.6) примет вид

$$x^3 + 3px + 2q = 0, \quad (1.8)$$

где

$$p = \frac{1}{3} \left(I_{2\sigma} - \frac{1}{3} I_{1\sigma}^2 \right),$$

$$q = -\frac{1}{27} I_{1\sigma}^3 + \frac{1}{6} I_{1\sigma} I_{2\sigma} - \frac{1}{2} I_{3\sigma}.$$

Все три корня кубического уравнения (1.8) действительны в том случае, когда дискриминант отрицателен:

$$\Delta = p^3 + q^2 < 0.$$

Если подставить соответствующие числовые значения коэффициентов $I_{1\sigma}, I_{2\sigma}, I_{3\sigma}$ в выражения для p и q и затем вычислить Δ , то можно убедиться в том, что дискриминант Δ всегда отрицателен. Это следует также и из физических со-

ображений — главные напряжения могут быть только действительными величинами.

При $\Delta < 0$ для решения кубического уравнения применяют так называемый тригонометрический метод.

При этом корни уравнения (1.8) представляются следующим образом:

$$x_1 = 2\sqrt{|p|} \cos \varphi, \quad x_2 = 2\sqrt{|p|} \cos (\varphi + 120^\circ),$$

$$x_3 = 2\sqrt{|p|} \cos (\varphi - 120^\circ),$$

где $|p|$ — абсолютное значение коэффициента p , а

$$\varphi = \frac{1}{3} \arccos \frac{-q}{|p|^{3/2}}.$$

Для последующего определения главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ найденные значения корней x_1, x_2, x_3 подставляются в выражение (1.7).

Так как для каждой точки тела имеются только три главные площадки и соответственно три главных напряжения, то эти напряжения не зависят от выбора исходной системы координат и, следовательно, коэффициенты $I_{1\sigma}, I_{2\sigma}, I_{3\sigma}$ также не зависят от выбора системы координат. Коэффициенты $I_{1\sigma}, I_{2\sigma}, I_{3\sigma}$ называют *первым, вторым и третьим инвариантами тензора напряжений*. Их можно выразить через главные напряжения:

$$I_{1\sigma} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad I_{2\sigma} = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1,$$

$$I_{3\sigma} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

Если в результате решения кубического уравнения (1.6) найдены главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, то, подставив каждое из найденных значений в любые два уравнения (1.4) и используя геометрическое соотношение $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, можем определить направляющие косинусы соответствующих главных площадок.

Для главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ получим соответствующие значения направляющих косинусов $l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2; l_3, m_3, n_3$, которые и определяют положение главных площадок. Можно показать, что главные площадки ортогональны друг к другу, т. е. удовлетворяются условия ортогональности площадок $l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j = 0$, где $i, j = 1, 2, 3$, причем $i \neq j$.

То, что главные площадки являются взаимно перпендикулярными, следует также и из закона парности касательных напряжений — касательные напряжения на всех глав-

ных площадках могут быть равны нулю только в том случае, если эти площадки взаимно ортогональны.

До сих пор рассматривался общий случай трехосного напряженного состояния, когда все три главных напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ отличны от нуля. Частным случаем является такой, когда одно из главных напряжений равно нулю. Такое напряженное состояние называется *двухосным*. Для того чтобы одно из главных напряжений равнялось нулю, необходимо, чтобы третий инвариант $I_{3\sigma}$ был равен нулю. Тогда кубическое уравнение (1.6) превращается в квадратное:

$$\sigma^2 - I_{1\sigma}\sigma + I_{2\sigma} = 0.$$

Если не только третий, но и второй инвариант равен нулю, то при этом два главных напряжения равны нулю. Такое напряженное состояние называется *одноосным*.

Обычно принято нумеровать главные напряжения в порядке убывания их значений: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

§ 3. Наибольшие касательные напряжения

Совместим оси координат x, y, z с направлениями ранее найденных главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Проведем произвольную площадку ABC с площадью dF и нормалью ν (рис. 1.3). Пусть полное напряжение, действующее на этой площадке, равно p_ν , его составляющие по осям x, y, z равны p_x, p_y, p_z , а нормальное и касательное напряжения на площадке dF равны σ_ν и τ_ν . Имеем очевидные равенства

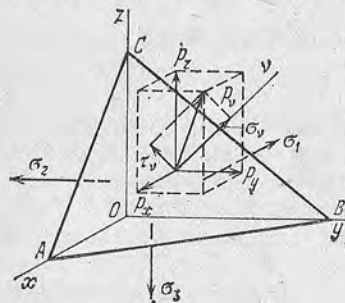


Рис. 1.3.

$$p_\nu^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2, \quad (1.9)$$

$$p_\nu^2 = \sigma_\nu^2 + \tau_\nu^2. \quad (1.10)$$

С другой стороны, из (1.1) имеем

$$p_x = \sigma_1 l, \quad p_y = \sigma_2 m, \quad p_z = \sigma_3 n.$$

После подстановки выражений для p_x, p_y, p_z в (1.9) получим

$$p_\nu^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2. \quad (1.11)$$

Проектируя p_x, p_y, p_z на направление ν , получим выраже-

ние для σ_ν :

$$\sigma_\nu = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2. \quad (1.12)$$

Далее, подставив выражения (1.11), (1.12) в (1.10), найдем выражение для касательного напряжения τ_ν :

$$\tau_\nu^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2. \quad (1.13)$$

Подставив равенство $n^2 = 1 - l^2 - m^2$, полученное из геометрического соотношения $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, в (1.13), получим следующее выражение для τ_ν^2 :

$$\tau_\nu^2 = (\sigma_1^2 - \sigma_3^2) l^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2) m^2 + \sigma_3^2 - [(\sigma_1 - \sigma_3) l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) m^2 + \sigma_3]^2. \quad (1.14)$$

Таким образом, величина касательного напряжения τ_ν зависит от двух независимых переменных l и m . Для определения экстремума этой величины необходимо взять частные производные от τ_ν по l и m и приравнять их нулю:

$$\frac{\partial (\tau_\nu)^2}{\partial l} = 2l \{ \sigma_1^2 - \sigma_3^2 - 2(\sigma_1 - \sigma_3) [(\sigma_1 - \sigma_3) l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) m^2 + \sigma_3] \} = 0,$$

$$\frac{\partial (\tau_\nu)^2}{\partial m} = 2m \{ \sigma_2^2 - \sigma_3^2 - 2(\sigma_2 - \sigma_3) [(\sigma_1 - \sigma_3) l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) m^2 + \sigma_3] \} = 0.$$

После сокращения первого уравнения на $(\sigma_1 - \sigma_3)$, а второго на $(\sigma_2 - \sigma_3)$ получим следующую систему уравнений для нахождения значений l, m, n , удовлетворяющих условию экстремума касательного напряжения τ_ν :

$$\begin{aligned} l \{ \sigma_1 - \sigma_3 - 2[(\sigma_1 - \sigma_3) l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) m^2] \} &= 0, \\ m \{ \sigma_2 - \sigma_3 - 2[(\sigma_1 - \sigma_3) l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) m^2] \} &= 0, \\ l^2 + m^2 + n^2 - 1 &= 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Условиям $l = m = 0$ и $n = 1$ соответствуют главные площадки, на которых касательные напряжения равны нулю. Если же $l \neq 0$, а $m = 0$, то второе уравнение удовлетворяется при любом значении l , а первое — удовлетворяется при условии

$$\sigma_1 - \sigma_3 - 2(\sigma_1 - \sigma_3) l^2 = 0,$$

откуда $2l^2 = 1$, а $l = \pm 1/\sqrt{2}$. Тогда из третьего уравнения (1.15) для n получим $n = \pm 1/\sqrt{2}$. Аналогично можно получить при $l = 0$ и $m \neq 0$ из первого уравнения $m = \pm 1/\sqrt{2}$ и из третьего также $n = \pm 1/\sqrt{2}$.

В итоге для углов, характеризующих направление площадок экстремальных касательных напряжений, получим таблицу 1.1.

Первые три строчки таблицы соответствуют направлениям нормалей γ , совпадающих с главными осями координат.

Таблица 1.1

l	m	n
0	0	± 1
0	± 1	0
± 1	0	0
0	$\pm \sqrt{1/2}$	$\pm \sqrt{1/2}$
$\pm \sqrt{1/2}$	0	$\pm \sqrt{1/2}$
$\pm \sqrt{1/2}$	$\pm \sqrt{1/2}$	0

Остальные три строчки соответствуют площадкам, проходящим через одну из главных осей и делящим угол между двумя другими пополам. Таким образом, оказывается, что площадки экстремальных касательных напряжений составляют с главными площадками угол, равный $\pm 45^\circ$. Подставляя в выражение (1.14) для τ_v^2 значения l, m, n , обращающие его в экстремум, получим следующие экстремальные значения касательных напряжений:

$$\tau_v^{\max} = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_v^{\max} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_v^{\max} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Так как $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, то $\tau_{\max} = \pm(\sigma_1 - \sigma_3)/2$.

§ 4. Дифференциальные уравнения равновесия

Рассмотрим равновесие элементарного параллелепипеда, вырезанного из тела, находящегося в напряженном состоянии под действием внешних нагрузок (рис. 1.4). Размеры ребер параллелепипеда dx, dy, dz . Учитывая принятое ранее допущение о сплошности и однородности материала, мы можем полагать, что и напряжения внутри тела от одной точки к другой будут изменяться непрерывно. Если на гранях параллелепипеда, совпадающих с координатными плоскостями, будут действовать напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$, то на грани, отстоящей на расстоянии dx от координатной плоскости yz , будут действовать напряжения

$$\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx, \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx, \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} dx,$$

на грани, отстоящей от координатной плоскости zx на расстоянии dy , — напряжения

$$\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy, \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy, \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} dy$$

и, наконец, на грани, отстоящей от координатной плоскости xy на расстоянии dz , напряжения будут

$$\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz, \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz, \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} dz.$$

Обозначим проекции объемной силы, приходящейся на единицу объема тела, через X, Y, Z .

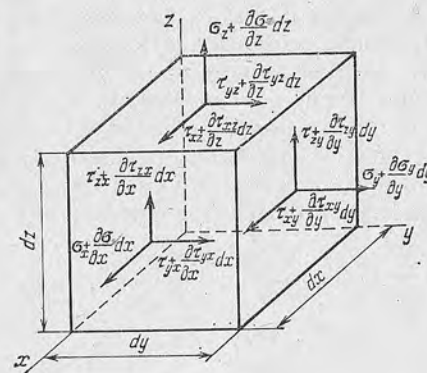


Рис. 1.4.

Для твердого тела можно записать шесть уравнений равновесия: три уравнения — условия равновесия сил, действующих в направлении трех осей координат x, y, z , и три — условия равновесия моментов относительно этих осей.

Проектируя все силы на ось x (см. рис. 1.4), будем иметь

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx dz + \\ & + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \right) dx dy - \sigma_x dy dz - \tau_{xy} dx dz - \\ & - \tau_{xz} dx dy + X dx dy dz = 0. \end{aligned}$$

Аналогично можно получить сумму проекций всех сил на оси y и z . После сокращения получим следующую систему

дифференциальных уравнений равновесия:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0.\end{aligned}\quad (1.16)$$

Первое из уравнений (1.16) представляет собой условие равновесия всех сил, действующих на элементарный параллелепипед в направлении оси x , второе — в направлении оси y и третье — в направлении оси z . Эта система дифференциальных уравнений носит название *уравнений Навье — Коши*.

Условия равновесия моментов относительно осей x, y, z для выделенного элементарного параллелепипеда приводят к упоминавшимся уже соотношениям $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ закона парности касательных напряжений.

Часто задачи теории упругости решаются в предположении, что объемные силы отсутствуют ($X = Y = Z = 0$). При этом система уравнений (1.16) приобретает вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0.\end{aligned}\quad (1.17)$$

Как уже отмечалось выше, в силу закона парности (взаимности) касательных напряжений в уравнениях (1.16) или (1.17) имеется не девять, а шесть независимых составляющих, характеризующих напряженное состояние в точке тела.

Условия равновесия дают три дифференциальных уравнения для определения шести неизвестных составляющих напряжения как функций координат точки.

Поскольку уравнений равновесия недостаточно для определения из них напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$, то задача теории упругости является статически неопределимой, и для ее решения помимо уравнений равновесия внутри тела и условий на поверхности необходимо иметь еще дополнительные уравнения, устанавливающие зависимость между дефор-

мациями (*уравнения совместности деформаций*). Уравнения равновесия на поверхности и уравнения совместности деформаций будут рассмотрены в следующих параграфах.

§ 5. Статические условия на поверхности тела

Естественно, что напряженное состояние в точке тела с координатами x, y, z зависит от того, какие внешние нагрузки приложены к поверхности тела. Поэтому напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ должны удовлетворять не только условиям равновесия для точек внутри тела, но и условиям равновесия на поверхности.

Рассмотрим условия равновесия на поверхности тела. Они могут быть получены из ранее рассмотренной системы уравнений (1.1) для определения составляющих p_x, p_y, p_z напряжения на наклонной площадке. Если предположить, что элементарная площадка dF поверхности тела имеет нормаль ν с направляющими косинусами l, m, n , а поверхностные силы, отнесенные к единице площади поверхности тела, имеют составляющие $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$, то, заменяя в уравнении (1.1) p_x, p_y, p_z соответственно на $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n - \bar{X} &= 0, \\ \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n - \bar{Y} &= 0, \\ \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n - \bar{Z} &= 0.\end{aligned}\quad (1.18)$$

Система уравнений (1.18) определяет статические условия равновесия на поверхности тела. Искомые напряжения должны удовлетворять уравнениям (1.17) и (1.18).

§ 6. Компоненты перемещений и компоненты деформаций

Для исследования деформаций вырежем из тела элементарный параллелепипед $ABCD, A_1B_1C_1D_1$, ребра которого равны dx, dy, dz (рис. 1.5, а), и совместим начало координат с вершиной A . В результате деформации тела выделенный параллелепипед переместится в новое положение. При этом произойдет изменение длин ребер и искажение углов между ребрами, прямых до деформации.

Новое положение параллелепипеда $A'B'C'D', A'_1B'_1C'_1D'_1$ без искажения углов между ребрами показано на рис. 1.5, а. Спроектируем первоначальное положение грани $ABCD$ и

новое положение этой грани $A'B'C'D'$ на координатную плоскость xAy (рис. 1.5, б). При этом линейные перемещения точки A в направлении осей x и y обозначим соответственно через u и v . Линейное перемещение точки C в направлении оси x равно $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$, а в направлении оси y равно

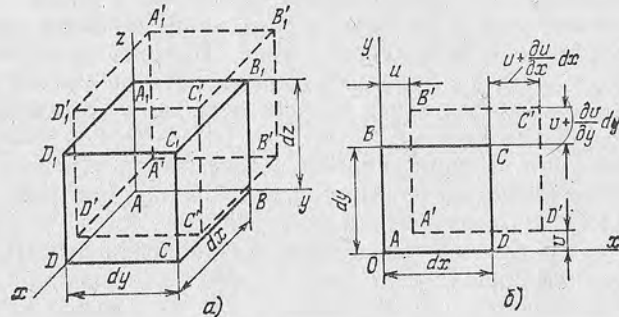


Рис. 1.5.

$v + \frac{\partial v}{\partial y} dy$. При этом ребро AD , которое до деформации имело длину dx , получит приращение длины, равное $\frac{\partial u}{\partial x} dx$, а ребро AB , которое до деформации имело длину dy , получит приращение $\frac{\partial v}{\partial y} dy$.

Относительной линейной деформацией в точке по данному направлению называется отношение изменения длины бесконечно малого линейного элемента к его первоначальной длине.

Относительная линейная деформация ϵ_x в направлении оси x равна отношению приращения длины ребра $\frac{\partial u}{\partial x} dx$ к его первоначальной длине dx , т. е.

$$\epsilon_x = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Аналогично получим $\epsilon_y = \partial v / \partial y$. Рассматривая проекции других граней на координатные плоскости, таким же образом можно получить выражение для линейной деформации в направлении оси z , а именно $\epsilon_z = \partial w / \partial z$, где w — линейное перемещение точки A в направлении оси z .

На рис. 1.6 показано искажение первоначально прямоугольной грани $ABCD$ в результате угловой деформации. При этом точка D перемещается в точку D' и величина перемещения равна $\frac{\partial v}{\partial x} dx$, а точка B перемещается в B' и величина отрезка BB' равна $\frac{\partial u}{\partial y} dy$.

Угловой деформацией γ называется величина искажения прямого угла, т. е. $\gamma = \pi/2 - \angle B'AD' = \angle BAB' + \angle DAD'$, где углы $\angle BAB'$ и $\angle DAD'$ измеряются в радианах. Так как эти углы очень малы, то их величину можно заменить тангенсами этих углов, т. е. принять

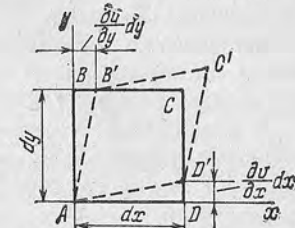


Рис. 1.6.

$$\angle BAB' \approx \frac{BB'}{AB} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\angle DAD' \approx \frac{DD'}{AD} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Таким образом, угловая деформация в плоскости xAy равна

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Аналогично можно получить угловые деформации в плоскости xAz и yAz :

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Запишем выражения для шести компонент относительных линейных и угловых деформаций:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Дифференциальные зависимости (1.19) были получены Коши. Эти выражения для компонент деформации получены в предположении малости перемещений (линейных и угловых).

вых). Предполагается, что квадраты первых производных перемещений малы по сравнению с линейными и угловыми деформациями, а линейные и угловые деформации малы по сравнению с единицей. Если перемещения u, v, w разложить в ряд Тейлора и отбросить нелинейные слагаемые, оставив только линейные члены, то из рассмотрения оставшейся линейной части можно получить приведенные выше выражения Коши (1.19) для компонент деформации.

В нелинейной теории упругости помимо линейных учитываются также и квадратичные члены разложения перемещений в ряд Тейлора.

§ 7. Деформации в точке тела. Главные деформации

Для исследования деформации в точке O в произвольном направлении проведем элементарный вектор $\vec{OA}$ (рис. 1.7), имеющий направляющие косинусы l, m, n , где $l = dx/dr$, $m = dy/dr$, $n = dz/dr$. Пусть в результате деформации век-

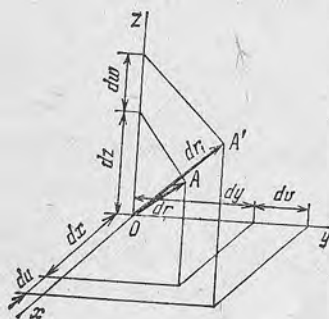


Рис. 1.7.

тор $\vec{OA}$ изменил свою длину и направление. Точка A переместится в точку A' . При этом длина вектора станет dr_1 . Направляющие косинусы нового вектора будут

$l_1 = \frac{dx + du}{dr_1}$, $m_1 = \frac{dy + dv}{dr_1}$, $n_1 = \frac{dz + dw}{dr_1}$. Для направляющих косинусов l, m, n и l_1, m_1, n_1 справедливы соотношения

$$\begin{aligned} l^2 + m^2 + n^2 &= 1, \\ l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 &= 1. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Проекции полного перемещения точки A на оси x, y, z обозначены через du, dv, dw . При этом для них можно записать как для полных дифференциалов следующие выражения:

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz, \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz, \\ dw &= \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Для направляющих косинусов вектора $\vec{OA'}$ можно записать выражение (1.20) в следующем виде:

$$\left(\frac{dx + du}{dr_1}\right)^2 + \left(\frac{dy + dv}{dr_1}\right)^2 + \left(\frac{dz + dw}{dr_1}\right)^2 = 1, \quad (1.22)$$

или

$$\left(\frac{dx + du}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dy + dv}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dz + dw}{dr}\right)^2 = \left(\frac{dr_1}{dr}\right)^2.$$

Подставляя (1.21) в (1.22) после преобразований, пренебрегая квадратами первых производных перемещений и их произведениями по сравнению с линейными и угловыми деформациями, получим следующее выражение:

$$\left(\frac{dr_1}{dr}\right)^2 = 1 + 2[\epsilon_x l^2 + \epsilon_y m^2 + \epsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{xz} ln + \gamma_{yz} mn]. \quad (1.23)$$

Относительная деформация линейного элемента dr определяется выражением $\epsilon = \frac{dr_1 - dr}{dr} = \frac{dr_1}{dr} - 1$. Отсюда $\frac{dr_1}{dr} = 1 + \epsilon$, а $\left(\frac{dr_1}{dr}\right)^2 = 1 + 2\epsilon + \epsilon^2$.

Так как ϵ — малая величина, то квадратом этой величины по сравнению с ϵ можно пренебречь. Поэтому можно записать

$$\left(\frac{dr_1}{dr}\right)^2 = 1 + 2\epsilon. \quad (1.24)$$

Сравнивая правые части (1.23) и (1.24), получим для ϵ следующее выражение:

$$\epsilon = \epsilon_x l^2 + \epsilon_y m^2 + \epsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{xz} ln + \gamma_{yz} mn. \quad (1.25)$$

Выражение (1.25) устанавливает зависимость между относительной деформацией ϵ в направлении, определяемом направляющими косинусами l, m, n , и относительными линейными и угловыми деформациями в системе координат x, y, z .

Сравнивая полученное выражение (1.25) для деформации в точке A в произвольном направлении, определяемом направляющими косинусами l, m, n , с выражением (1.2) для нормального напряжения σ_v к произвольной площадке, имеющей нормаль v с направляющими косинусами l, m, n , замечаем сходство полученных выражений (1.2) и (1.25).

Выражения (1.2) и (1.25) имеют одинаковую структуру. Нормальным напряжениям $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ в выражении (1.2) соответствуют линейные относительные деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ в выражении (1.25), а касательным напряжениям $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ в выражении (1.2) — половины соответствующих угловых деформаций, т. е. $1/2\gamma_{xy}, 1/2\gamma_{yz}, 1/2\gamma_{zx}$, в выражении (1.25). Формальная аналогия между выражениями (1.2) и (1.25) распространяется и на другие соотношения теории напряжений и теории деформаций.

Тензор деформаций T_d имеет такой же вид, что и тензор напряжений T_n :

$$T_d = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 1/2\gamma_{xy} & 1/2\gamma_{xz} \\ 1/2\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 1/2\gamma_{yz} \\ 1/2\gamma_{zx} & 1/2\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

Введение коэффициента $1/2$ перед величинами деформаций сдвига необходимо с формальной точки зрения для того, чтобы преобразования от системы координат x, y, z к системе координат x', y', z' происходили по тем формулам, которые соответствуют определению понятия тензора. Тензор деформаций T_d , так же как и тензор напряжений T_n , является симметричным тензором.

Перейдем к определению главных деформаций и соответствующих им главных осей деформаций. *Главными осями деформации* называются такие три взаимно ортогональные прямые, проходящие через точку тела, которые совпадают по направлению с линейными элементами, испытывающими при деформации только изменение длин. Деформации этих элементов называют *главными деформациями* в точке тела. Сдвиги в главных осях деформации равны нулю.

Получим уравнение для определения главных деформаций, используя аналогию между соотношениями для напряжений и для деформаций.

Поскольку исходные уравнения для определения нормального напряжения по произвольной площадке (1.2) и линейной деформации в произвольном направлении (1.25) имеют одинаковую структуру, то и окончательные выражения для главных напряжений σ и главных деформаций λ должны иметь одинаковый вид (с учетом замены τ_{xy} на $1/2\gamma_{xy}$ и т. д.).

Так, вместо системы уравнений (1.4) будем иметь

$$\begin{aligned} 2(\varepsilon_x - \lambda)l + \gamma_{xy}m + \gamma_{xz}n &= 0, \\ \gamma_{xy}l + 2(\varepsilon_y - \lambda)m + \gamma_{yz}n &= 0, \\ \gamma_{xz}l + \gamma_{yz}m + 2(\varepsilon_z - \lambda)n &= 0. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Условием нетривиальности решения системы однородных уравнений (1.26) является равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов при l, m, n , т. е.

$$\begin{vmatrix} 2(\varepsilon_x - \lambda) & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & 2(\varepsilon_y - \lambda) & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & 2(\varepsilon_z - \lambda) \end{vmatrix} = 0. \quad (1.27)$$

Раскрывая определитель, получим кубическое уравнение относительно λ , аналогичное уравнению (1.6):

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0, \quad (1.28)$$

где

$$I_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x - 1/4(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) = \\ &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z + 1/4\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx} - 1/4(\varepsilon_x\gamma_{yz}^2 + \varepsilon_y\gamma_{xz}^2 + \varepsilon_z\gamma_{xy}^2) = \\ &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{aligned}$$

Все корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ уравнения (1.28) являются действительными и равны главным деформациям.

Для определения направляющих косинусов главных осей деформации необходимо найденные корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ поочередно подставить в уравнения (1.26) и, кроме того, использовать условие (1.20).

§ 8. Условия совместности деформаций Сен-Венана

Шесть компонент деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$, определяемые уравнениями Коши (1.19), зависят от трех компонент перемещения u, v, w .

Если заданы функции перемещений u, v, w , то все шесть составляющих деформации однозначно определяются уравнениями (1.19). Однако, если мы произвольно зададим шесть функций деформаций, то при определении функций перемещений будет иметь место произвол.

В самом деле, допустим, что заданы шесть произвольных функций $\varepsilon_x(x, y, z), \varepsilon_y(x, y, z), \dots, \gamma_{yz}(x, y, z)$. Интегрируя первые три уравнения, мы получим выражения для функций u, v, w . Однако, если найденные функции подставить в последние три уравнения Коши, то мы получим функции, в общем случае не совпадающие с заданными $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$. Таким образом, задавать произвольно шесть функций дефор-

маций нельзя. Необходимо при задании функций для компонент деформаций удовлетворять также дополнительным связям между этими деформациями.

Сен-Венаном получено шесть таких дополнительных связей между деформациями. Эти шесть уравнений можно разбить на две группы. В первую группу входят уравнения, устанавливающие связи между деформациями ε и γ , относящимися к одной плоскости, а во вторую — связи между деформациями в разных плоскостях.

Если продифференцировать ε_x дважды по y , ε_y — дважды по x , а γ_{xy} — по x и y , то получим

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}.$$

Отсюда получим первую зависимость между деформациями:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Аналогично можно получить две другие зависимости I группы связей:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}.$$

Для получения зависимостей II группы составим производные

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}, \quad \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z},$$

$$\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Заметим, что $\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}.$

Отсюда следует, что

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right).$$

Аналогично могут быть получены и другие две зависимости:

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right),$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right).$$

Выпишем сводку всех шести уравнений совместности деформаций Сен-Венана:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= 0, \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 0, \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 0, \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Уравнения (1.29) называют *уравнениями совместности деформаций* или *уравнениями неразрывности*. Физический смысл этих уравнений состоит в том, что при произвольном задании шести функций деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ без соблюдения зависимостей (1.29) тело, сплошное и непрерывное до деформации, перестает быть сплошным и непрерывным. В теле появляются разрывы, так как заданные деформации произвольны, они не совместны.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ И ЗАДАЧИ

1. Что называется напряжениями?
2. Какие виды напряжений различают и как они направлены по отношению к площадке, выделенной в точке тела?
3. Какие напряжения σ и τ принимаются за положительные?
4. В чем состоит закон парности касательных напряжений?
5. Что представляет собой тензор напряжений?
6. Какие составляющие напряжения характеризуют напряженное состояние в точке тела?
7. Как определяются составляющие p_x, p_y, p_z полного напряжения p , действующего на наклонной площадке с направляющими косинусами l, m, n ?
8. Какой вид имеет кубическое уравнение для определения главных напряжений?
9. Может ли кубическое уравнение для определения главных напряжений наряду с действительными иметь и мнимые корни?
10. Что представляют собой коэффициенты кубического уравнения для определения главных напряжений?

З. О. И. Теребушко

11. Каким напряженным состояниям соответствуют условия равенства нулю третьего инварианта ($I_{3\sigma} = 0$), третьего и второго ($I_{2\sigma} = I_{3\sigma} = 0$)?

12. Как определяется нормальное напряжение на произвольной площадке σ_v через главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$?

13. Как определяется касательное напряжение на произвольной площадке τ_v через главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$?

14. Как определяются величины максимальных касательных напряжений и направление соответствующих площадок?

15. Выведите дифференциальные уравнения равновесия элемента упругого тела (уравнения Навье — Коши).

16. Выведите уравнения равновесия на поверхности тела.

17. Как записываются компоненты линейных и угловых деформаций (уравнения Коши)?

18. Как записывается тензор деформаций T_d ?

19. Как вычисляется деформация ε в направлении, определяемом косинусами l, m, n , через известные деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$?

20. Как определяются главные деформации?

21. Каков физический смысл условий совместности деформаций Сен-Венана?

22. На какие две группы можно разбить шесть уравнений совместности деформаций?

23. Задача. Определить нормальное σ_v , касательное τ_v и полное p_v напряжения на наклонной площадке с направляющими косинусами $l = \sqrt{3}/2, m = 1/2, n = 0$, если известно, что $\sigma_x = 40$ МПа, $\sigma_y = -30$ МПа, $\sigma_z = 60$ МПа, $\tau_{xy} = 20$ МПа, $\tau_{xz} = -20$ МПа, $\tau_{yz} = 0$.

Решение. $p_v^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$, где $p_x = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 20 \cdot \frac{1}{2} = 44,6$ МПа, $p_y = \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 30 \cdot \frac{1}{2} = 2,3$ МПа, $p_z = \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n = -20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -17,3$ МПа, $p_v^2 = 44,6^2 + 2,3^2 + (-17,3)^2 = 2294$ (МПа)², $p_v = 47,9$ МПа, $\sigma_v = p_x l + p_y m + p_z n = 44,6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2,3 \cdot \frac{1}{2} = 39,8$ МПа, $\tau_v^2 = p_v^2 - \sigma_v^2 = 2294 - 39,8^2 = 710$ (МПа)², $\tau_v = 26,6$ МПа.

Ответ. $\sigma_v = 39,8$ МПа, $\tau_v = 26,6$ МПа, $p_v = 47,9$ МПа.

24. Задача. Определить главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и направления главных площадок, если напряженное состояние в точке задано следующими значениями компонент напряжения: $\sigma_x = 10$ МПа, $\sigma_y = -20$ МПа, $\sigma_z = 30$ МПа, $\tau_{xy} = 20$ МПа, $\tau_{yz} = 30$ МПа, $\tau_{zx} = 40$ МПа.

Решение.

1. Определяем инварианты $I_{1\sigma}, I_{2\sigma}, I_{3\sigma}$:

$$I_{1\sigma} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 20 \text{ МПа}, I_{2\sigma} = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = -34 \cdot 10^2 \text{ (МПа)}^2, I_{3\sigma} = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = 53 \cdot 10^3 \text{ (МПа)}^3,$$

2. Определяем коэффициенты p и q уравнения (1.8):

$$p = \frac{1}{3} \left(I_{2\sigma} - \frac{1}{3} I_{1\sigma}^2 \right) = -11,7777 \cdot 10^2, q = -\frac{1}{27} I_{1\sigma}^3 + \frac{1}{6} I_{1\sigma} I_{2\sigma} - \frac{1}{2} I_{3\sigma} = -38,12962 \cdot 10^3, \Delta = p^3 + q^2 = (-1633,734 + 1453,867) \cdot 10^6;$$

$\Delta < 0$ — все три корня действительные.

3. Вычисляем корни уравнения (1.8): x_1, x_2, x_3 и главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$:

$$\cos 3\varphi = -\frac{q}{|p|^{3/2}} = 0,943347, \varphi = \frac{19^\circ 23'}{3} = 6^\circ 28', \sqrt{|p|} = 34,31875,$$

$$2\sqrt{|p|} = 68,63751, \cos \varphi = 0,99364, \cos(\varphi + 120^\circ) = -0,59436, \cos(\varphi - 120^\circ) = -0,39928; x_1 = 2\sqrt{|p|} \cdot \cos \varphi = 68,20097, x_2 = 2\sqrt{|p|} \cdot \cos(\varphi + 120^\circ) = -40,79539, x_3 = 2\sqrt{|p|} \cdot \cos(\varphi - 120^\circ) = -27,40558.$$

Вычисляем $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ по формуле $\sigma = x + \frac{1}{3} I_{1\sigma}$:

$$\sigma_1 = 68,20097 + \frac{20}{3} = 74,87 \text{ МПа}, \sigma_2 = -40,79539 + \frac{20}{3} = -27,40558 \text{ МПа}, \sigma_3 = -27,40558 + \frac{20}{3} = -34,13 \text{ МПа}.$$

Проверка. $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = I_{1\sigma} = 20$ МПа, $\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 = I_{2\sigma} = -34 \cdot 10^2$ (МПа)², $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = I_{3\sigma} = 53 \cdot 10^3$ (МПа)³.

4. Определяем направляющие косинусы главных площадок. Для этого в два из трех уравнений (1.4) подставляем поочередно найденные значения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, а в качестве третьего используем геометрическое равенство $l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1$, где $i = 1, 2, 3$. Первая система уравнений для определения l_i, m_i, n_i имеет вид

$$(10 - 74,87) l_1 + 20 m_1 + 40 n_1 = 0,$$

$$20 l_1 - (20 + 74,87) m_1 + 30 n_1 = 0,$$

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1.$$

Решение этой системы уравнений приводит к следующим значениям l_i, m_i, n_i : $l_1 = 0,567525, m_1 = 0,354619, n_1 = 0,743073$.

Аналогично определяются направляющие косинусы двух других главных площадок. Результаты решения сведем в таблицу 1.2.

Таблица 1.2

σ l, m, n	$\sigma_1 = 74,87$ МПа	$\sigma_2 = -27,40$ МПа	$\sigma_3 = -34,13$ МПа
l_i	0,567525	0,821073	0,060981
m_i	0,354619	-0,175902	-0,918045
n_i	0,743073	-0,543042	0,391744

Для проверки правильности найденных значений направляющих косинусов используем условие ортогональности главных площадок, т. е. $l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j = 0$ при $i \neq j$.

25. Задача. Определить полное p_v , нормальное σ_v и касательное τ_v напряжения на площадке с направляющими косинусами $l = 1/2$, $m = 1/2$, $n = \sqrt{2}/2$, если известно, что $\sigma_x = 10$ МПа, $\sigma_y = -20$ МПа, $\sigma_z = 30$ МПа, $\tau_{xy} = 0$, $\tau_{xz} = 10$ МПа, $\tau_{yz} = -10$ МПа.

Ответ. $p_v = 29,8$ МПа, $\sigma_v = 12,5$ МПа, $\tau_v = 27,0$ МПа.

26. Задача. Определить нормальное σ_v и касательное τ_v напряжения на площадке, равнонаклоненной к направлениям главных напряжений $\sigma_1 = 30$ МПа, $\sigma_2 = 10$ МПа, $\sigma_3 = -20$ МПа.

Ответ. $\sigma_v = 6,7$ МПа, $\tau_v = 20,5$ МПа, $p_v = 21,6$ МПа.

27. Задача. Определить главные напряжения σ_1 , σ_2 , σ_3 , если напряженное состояние в точке задано следующими значениями составляющих напряжений: $\sigma_x = 20$ МПа, $\sigma_y = 15$ МПа, $\sigma_z = 30$ МПа, $\tau_{xy} = -10$ МПа, $\tau_{xz} = 20$ МПа, $\tau_{yz} = 0$.

Ответ. $\sigma_1 = 46,86$ МПа, $\sigma_2 = 18,14$ МПа, $\sigma_3 = 0$.

28. Задача. Определить главные напряжения σ_1 , σ_2 , σ_3 , если напряженное состояние в точке задано следующими значениями напряжений: $\sigma_x = 20$ МПа, $\sigma_y = 15$ МПа, $\sigma_z = 60$ МПа, $\tau_{xy} = 10$ МПа, $\tau_{xz} = 20$ МПа, $\tau_{yz} = -10$ МПа.

Ответ. $\sigma_1 = 68,86$ МПа, $\sigma_2 = 26,14$ МПа, $\sigma_3 = 0$.

29. Задача. Напряженное состояние в точке характеризуется следующими значениями составляющих напряжений: $\sigma_x = 20$ МПа, $\sigma_y = 80$ МПа, $\sigma_z = 0$, $\tau_{xy} = 40$ МПа, $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$. Доказать, что это напряженное состояние является одноосным.

30. Задача. Определить главные напряжения σ_1 , σ_2 , σ_3 и направления главных площадок, если напряженное состояние в точке задано следующими значениями составляющих напряжений: $\sigma_x = 40$ МПа, $\sigma_y = \sigma_z = 0$, $\tau_{xy} = 30$ МПа, $\tau_{xz} = 10$ МПа, $\tau_{yz} = 15$ МПа.

Решение.

1. Определим величины инвариантов $I_{1\sigma}$, $I_{2\sigma}$, $I_{3\sigma}$:

$$I_{1\sigma} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 40 \text{ МПа}, \quad I_{2\sigma} = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 = -1225 (\text{МПа})^2, \quad I_{3\sigma} = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = 0.$$

Равенство нулю инварианта $I_{3\sigma}$ указывает на то, что напряженное состояние в заданной точке является двухосным. Уравнение (1.6) получит вид

$$\sigma^2 - I_{1\sigma} \sigma + I_{2\sigma} = 0, \quad \text{или} \quad \sigma^2 - 40\sigma - 1225 = 0.$$

2. Решая квадратное уравнение, получим $\sigma_1 = 60,31$ МПа, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -20,31$ МПа.

3. Определяем направляющие косинусы l_1 , l_2 , l_3 площадки с главным напряжением $\sigma_1 = 60,31$ МПа. Система уравнений (1.4) примет следующий вид:

$$-20,31l_1 + 30m_1 + 10n_1 = 0,$$

$$30l_1 - 60,31m_1 + 15n_1 = 0,$$

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1.$$

Решая эту систему уравнений, находим $l_1 = 0,8377$, $m_1 = 0,4810$, $n_1 = 0,2585$.

Аналогично, для площадок с главными напряжениями $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -20,31$ МПа получим направляющие косинусы l_2 , m_2 , n_2 и l_3 , m_3 , n_3 . Значения направляющих косинусов для главных площадок помещены в таблице 1.3.

Таблица 1.3

σ	$\sigma_1 = 60,31$ МПа	$\sigma_2 = 0$	$\sigma_3 = -20,31$ МПа
l, m, n			
l_i	0,8377	-0,42857	-0,3384
m_i	0,4810	0,28571	0,82886
n_i	0,2585	0,85714	-0,4455

Для проверки правильности найденных значений направляющих косинусов подставим их в уравнение $l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j = 0$, где $i \neq j$.

31. Задача. Определить главные напряжения σ_1 , σ_2 , σ_3 и направления главных площадок, если напряженное состояние в точке задано следующими значениями компонент напряжения: $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 10$ МПа, $\sigma_z = -40$ МПа, $\tau_{xy} = 5$ МПа, $\tau_{yz} = 0$, $\tau_{zx} = 10$ МПа.

Ответ. Ответ дан таблицей 1.4.

Таблица 1.4

σ	$\sigma_1 = 12,386$ МПа	$\sigma_2 = 0$	$\sigma_3 = -42,386$ МПа
l, m, n			
l_i	0,429301	0,87287	-0,232039
m_i	0,899581	-0,436435	0,022147
n_i	0,081947	0,218217	0,972449

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И ТЕОРЕМЫ
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ§ 9. Обобщенный закон Гука для изотропного
и анизотропного тела

Закон Гука — физический закон, который устанавливает для большинства конструкционных материалов линейную зависимость между напряжениями и деформациями. Следует иметь в виду, что материалы подчиняются закону Гука лишь в определенном диапазоне величин действующих напряжений, если напряжения не превышают определенной величины, называемой *пределом пропорциональности* ($\sigma_{пк}$).

Классическая теория упругости построена в предположении справедливости закона Гука. При этом предполагается, что тело однородно, но в общем случае может обладать различными упругими свойствами в разных направлениях. Такое тело, упругие свойства которого неодинаковы в различных направлениях, называется *анизотропным*, в отличие от *изотропного* тела, у которого упругие свойства в любых направлениях одинаковы.

В самом общем виде связь между деформациями и напряжениями в анизотропном теле можно записать в виде следующей системы линейных зависимостей:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{14}\tau_{yz} + a_{15}\tau_{zx} + a_{16}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= a_{21}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z + a_{24}\tau_{yz} + a_{25}\tau_{zx} + a_{26}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_z &= a_{31}\sigma_x + a_{32}\sigma_y + a_{33}\sigma_z + a_{34}\tau_{yz} + a_{35}\tau_{zx} + a_{36}\tau_{xy}, \\ \gamma_{yz} &= a_{41}\sigma_x + \dots + a_{44}\tau_{yz} + a_{45}\tau_{zx} + a_{46}\tau_{xy}, \\ \gamma_{zx} &= a_{51}\sigma_x + \dots + a_{55}\tau_{zx} + a_{56}\tau_{xy}, \\ \gamma_{xy} &= a_{61}\sigma_x + \dots + a_{66}\tau_{xy}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Коэффициенты a_{ij} в системе уравнений (2.1) характеризуют податливость упругого тела. Чем больше величина этих коэффициентов, тем больше будут деформации при одних и тех же напряжениях.

Система уравнений (2.1), выражающая закон Гука для анизотропного тела, может быть записана в матричной

форме:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ \cdot & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ \cdot & \cdot & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{55} & a_{56} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Из 36 упругих постоянных a_{ij} независимыми являются только 21. Матрица коэффициентов a_{ij} симметрична относительно главной диагонали, т. е. имеют место равенства $a_{ij} = a_{ji}$.

Если тело обладает тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии упругих свойств, то такое тело называют *ортогонально-ортотропным* или просто *ортотропным*. Для ортотропного тела число упругих постоянных снижается до 9. В случае ортотропного тела линейные деформации тела ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$) зависят только от нормальных напряжений ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$) и не зависят от касательных напряжений ($\tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$). При этом угловые деформации ($\gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$) пропорциональны соответствующим касательным напряжениям ($\tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$) и не зависят от величины нормальных напряжений.

Уравнения обобщенного закона Гука распадаются на две независимые группы:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z, \\ \varepsilon_y &= a_{21}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z, \\ \varepsilon_z &= a_{31}\sigma_x + a_{32}\sigma_y + a_{33}\sigma_z, \\ \gamma_{yz} &= a_{44}\tau_{yz}, \quad \gamma_{zx} = a_{55}\tau_{zx}, \quad \gamma_{xy} = a_{66}\tau_{xy}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В матричной форме выражения (2.3) запишутся в виде

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \cdot & a_{22} & a_{23} \\ \cdot & \cdot & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & a_{55} & 0 \\ 0 & 0 & a_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Для ортотропного тела упругие коэффициенты имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1/E_1, \quad a_{22} = 1/E_2, \quad a_{33} = 1/E_3, \\ a_{12} &= a_{21} = -\mu_{21}/E_2 = -\mu_{12}/E_1, \\ a_{13} &= a_{31} = -\mu_{31}/E_3 = -\mu_{13}/E_1, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$a_{23} = a_{32} = -\mu_{32}/E_3 = -\mu_{23}/E_2, \\ a_{44} = 1/G_{23}, a_{55} = 1/G_{13}, a_{66} = 1/G_{12}.$$

Здесь E_1, E_2, E_3 — модули упругости в направлении координатных осей x, y, z соответственно, $\mu_{12}, \mu_{21}, \mu_{13}, \mu_{31}, \mu_{23}, \mu_{32}$ — коэффициенты Пуассона. Например, коэффициент μ_{12} характеризует величину поперечной деформации в направлении оси y от напряжений σ_x , а μ_{21} — величину деформаций в направлении оси x от напряжений σ_y . Поскольку матрица коэффициентов a_{ij} симметрична и $a_{ij} = a_{ji}$, то коэффициенты Пуассона μ_{ij} и модули упругости E_i, E_j для ортотропного тела связаны дополнительными равенствами

$$\mu_{ij}E_j = \mu_{ji}E_i. \quad (2.6)$$

Через G_{ij} обозначены модули сдвига в соответствующих плоскостях.

Учитывая равенства (2.5), обобщенный закон Гука для ортотропного тела можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_1} - \mu_{21} \frac{\sigma_y}{E_2} - \mu_{31} \frac{\sigma_z}{E_3}, \\ \varepsilon_y &= -\mu_{12} \frac{\sigma_x}{E_1} + \frac{\sigma_y}{E_2} - \mu_{32} \frac{\sigma_z}{E_3}, \\ \varepsilon_z &= -\mu_{13} \frac{\sigma_x}{E_1} - \mu_{23} \frac{\sigma_y}{E_2} + \frac{\sigma_z}{E_3}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G_{23}}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G_{31}}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{12}}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Как уже ранее было отмечено, материалы, упругие свойства которых не зависят от направления, называются *изотропными*. В этом случае будет минимальное количество упругих постоянных, характеризующих упругие свойства такого тела. Таких упругих постоянных будет три — нормальный модуль упругости E (модуль Юнга), модуль сдвига G и коэффициент Пуассона μ . Между этими тремя упругими постоянными имеется следующая зависимость:

$$G = E/[2(1 + \mu)].$$

Таким образом, независимыми будут только две из трех упругих постоянных. Для изотропного тела обобщенный за-

кон Гука имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} &= \frac{2(1 + \mu)}{E} \tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu (\sigma_x + \sigma_z)], & \gamma_{yz} &= \frac{2(1 + \mu)}{E} \tau_{yz}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{xz} &= \frac{2(1 + \mu)}{E} \tau_{xz}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Установим связь между объемной деформацией и суммой нормальных напряжений $S = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$. Объемной деформацией называют отношение изменения бесконечно малого объема тела Δdv , вызванного деформацией, к первоначальному объему dv , т. е. $\Delta = \Delta dv/dv$. Пренебрегая бесконечно малыми более высокого порядка, можно получить для Δ выражение $\Delta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$. Таким образом, объемная деформация есть первый инвариант тензора деформации. Она не зависит от выбора направления осей координат.

Суммируя первые три уравнения (2.8), установим следующую зависимость между объемной деформацией Δ и суммой нормальных напряжений S :

$$\Delta = \frac{1 - 2\mu}{E} S. \quad (2.9)$$

Уравнения обобщенного закона Гука (2.8) разрешены относительно деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$. Если эти уравнения разрешить относительно нормальных напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, введя упругие постоянные Ляме G и λ , то можно получить иную форму обобщенного закона Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G\varepsilon_x + \lambda\Delta, & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= 2G\varepsilon_y + \lambda\Delta, & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= 2G\varepsilon_z + \lambda\Delta, & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx} \end{aligned} \quad (2.10)$$

где G — модуль сдвига, а $\lambda = 2\mu G/(1 - 2\mu)$.

§ 10. Потенциальная энергия деформации. Формулы Кастильяно и Грина

Рассмотрим элементарный параллелепипед с ребрами dx, dy, dz , по граням которого действуют внутренние усилия $\sigma_x dy dz, \sigma_y dx dz, \dots, \tau_{xy} dy dz$ (рис. 2.1). Потенциальная энергия численно равна работе внутренних усилий на перемещениях, вызванных действием этих усилий, отнесенной

к единице объема:

$$\bar{w} = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx} + \tau_{xy} \gamma_{xy}). \quad (2.11)$$

Используя выражение для обобщенного закона Гука (2.8), представим выражение для $\bar{w}$ через напряжения:

$$\bar{w} = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\mu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) + \frac{1}{2G} (\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2). \quad (2.12)$$

Из выражения (2.12) следует, что в любой точке тела потенциальная энергия положительна.

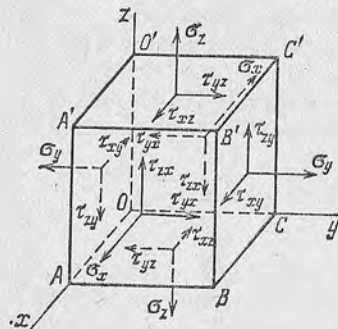


Рис. 2.1.

Потенциальная энергия для всего тела может быть получена интегрированием выражений (2.11) или (2.12) по всему объему тела:

$$W = \int_V \bar{w} dx dy dz. \quad (2.13)$$

Если взять частные производные от выражения для удельной потенциальной энергии (2.12) по напряжениям, то

мы получим соответствующие деформации.

В самом деле, $\frac{\partial \bar{w}}{\partial \sigma_x} = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu}{E} (\sigma_y + \sigma_z) = \varepsilon_x$.

Аналогично можно получить выражения и для остальных деформаций

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \sigma_x} &= \varepsilon_x, & \frac{\partial \bar{w}}{\partial \sigma_y} &= \varepsilon_y, & \frac{\partial \bar{w}}{\partial \sigma_z} &= \varepsilon_z, \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau_{yz}} &= \gamma_{yz}, & \frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau_{zx}} &= \gamma_{zx}, & \frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau_{xy}} &= \gamma_{xy}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Выражения (2.14) называются *формулами Кастильяно*.

Потенциальную энергию $\bar{w}$ можно выразить через деформации. Для этого необходимо воспользоваться выражениями закона Гука в форме Лямэ (2.10) и подставить их в (2.11).

После преобразований можно получить

$$\bar{w} = \frac{1}{2} [(2G\varepsilon_x^2 + \lambda\Delta\varepsilon_x) + (2G\varepsilon_y^2 + \lambda\Delta\varepsilon_y) + (2G\varepsilon_z^2 + \lambda\Delta\varepsilon_z) + G(\gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 + \gamma_{xy}^2)]. \quad (2.15)$$

Определив частные производные от выражения (2.15) по деформациям $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \dots, \gamma_{xy}$, получим соответствующие напряжения.

Например, возьмем частную производную $\partial \bar{w} / \partial \varepsilon_x$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \varepsilon_x} &= \frac{1}{2} [4G\varepsilon_x + \lambda(2\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + \lambda\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_z] = \\ &= 2G\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z). \end{aligned}$$

Так как $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \Delta$, то правая часть полученного равенства, как следует из (2.10), равна σ_x и $\partial \bar{w} / \partial \varepsilon_x = \sigma_x$.

Аналогично могут быть получены частные производные от $\bar{w}$ по другим составляющим деформаций $\varepsilon_y, \varepsilon_z, \dots, \gamma_{xy}$.

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \varepsilon_x} &= \sigma_x, & \frac{\partial \bar{w}}{\partial \varepsilon_y} &= \sigma_y, & \frac{\partial \bar{w}}{\partial \varepsilon_z} &= \sigma_z, \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial \gamma_{yz}} &= \tau_{yz}, & \frac{\partial \bar{w}}{\partial \gamma_{zx}} &= \tau_{zx}, & \frac{\partial \bar{w}}{\partial \gamma_{xy}} &= \tau_{xy}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Выражения (2.16) представляют собой так называемые *формулы Грина*.

§ 11. Основные принципы

1. *Принцип взаимности (теорема Бетти)*. Пусть на тело действуют две системы поверхностных сил $\bar{X}_v^I, \bar{Y}_v^I, \bar{Z}_v^I$ и $\bar{X}_v^{II}, \bar{Y}_v^{II}, \bar{Z}_v^{II}$. Напряжения, деформации и перемещения, соответствующие действию каждой из систем нагрузок, обозначим соответственно $\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z, \tau'_{yz}, \tau'_{zx}, \tau'_{xy}, \varepsilon'_x, \varepsilon'_y, \varepsilon'_z, \gamma'_{yz}, \gamma'_{zx}, \gamma'_{xy}, u', v', w'$ при действии первой системы сил и $\sigma''_x, \sigma''_y, \sigma''_z, \tau''_{yz}, \tau''_{zx}, \tau''_{xy}, \varepsilon''_x, \varepsilon''_y, \varepsilon''_z, \gamma''_{yz}, \gamma''_{zx}, \gamma''_{xy}, u'', v'', w''$ при действии второй системы сил.

Работу внутренних усилий, вызванных действием первой системы сил, на перемещениях, вызванных второй системой сил, обозначим A_{12} . Эта работа внутренних сил запишется

в виде

$$A_{12} = \int_V (\sigma'_x \epsilon''_x + \sigma'_y \epsilon''_y + \sigma'_z \epsilon''_z + \tau'_{yz} \gamma''_{yz} + \tau'_{zx} \gamma''_{zx} + \tau'_{xy} \gamma''_{xy}) dx dy dz. \quad (2.17)$$

Аналогично запишем выражение для работы внутренних усилий, вызванных действием второй системы сил, на перемещениях, вызванных действием первой системы сил:

$$A_{21} = \int_V (\sigma''_x \epsilon'_x + \sigma''_y \epsilon'_y + \sigma''_z \epsilon'_z + \tau''_{yz} \gamma'_{yz} + \tau''_{zx} \gamma'_{zx} + \tau''_{xy} \gamma'_{xy}) dx dy dz. \quad (2.18)$$

Докажем, что в случае справедливости закона Гука, т. е. тогда, когда между напряжениями и деформациями имеет место линейная зависимость, $A_{12} = A_{21}$.

Если в (2.17) и (2.18) вместо деформаций подставить соответствующие им выражения из (2.8), то нетрудно показать, что подинтегральные функции в (2.17) и (2.18) будут одинаковы.

В самом деле, после подстановки в (2.17) выражений для деформаций получим

$$\begin{aligned} & \sigma'_x \epsilon''_x + \sigma'_y \epsilon''_y + \sigma'_z \epsilon''_z + \tau'_{yz} \gamma''_{yz} + \tau'_{zx} \gamma''_{zx} + \tau'_{xy} \gamma''_{xy} = \\ &= \frac{1}{E} \{ \sigma'_x \sigma''_x + \sigma'_y \sigma''_y + \sigma'_z \sigma''_z - \mu [\sigma'_x (\sigma''_y + \sigma''_z) + \sigma'_y (\sigma''_x + \sigma''_z) + \\ &+ \sigma'_z (\sigma''_x + \sigma''_y)] \} + \frac{2(1+\mu)}{E} [\tau'_{yz} \tau''_{yz} + \tau'_{zx} \tau''_{zx} + \tau'_{xy} \tau''_{xy}]. \end{aligned}$$

После подстановки (2.8) в подинтегральное выражение (2.18) будем иметь

$$\begin{aligned} & \sigma''_x \epsilon'_x + \sigma''_y \epsilon'_y + \sigma''_z \epsilon'_z + \tau''_{yz} \gamma'_{yz} + \tau''_{zx} \gamma'_{zx} + \tau''_{xy} \gamma'_{xy} = \\ &= \frac{1}{E} \{ \sigma''_x \sigma'_x + \sigma''_y \sigma'_y + \sigma''_z \sigma'_z - \mu [\sigma''_x (\sigma'_y + \sigma'_z) + \sigma''_y (\sigma'_x + \sigma'_z) + \\ &+ \sigma''_z (\sigma'_x + \sigma'_y)] \} + \frac{2(1+\mu)}{E} [\tau''_{yz} \tau'_{yz} + \tau''_{zx} \tau'_{zx} + \tau''_{xy} \tau'_{xy}]. \end{aligned}$$

Сравнивая правые части полученных равенств, убеждаемся в том, что правые части этих равенств одинаковы. От-

сюда следует, что и левые части должны быть равны, т. е. $A_{12} = A_{21}$, или

$$\begin{aligned} & \int_V (\sigma'_x \epsilon''_x + \sigma'_y \epsilon''_y + \sigma'_z \epsilon''_z + \tau'_{yz} \gamma''_{yz} + \tau'_{zx} \gamma''_{zx} + \tau'_{xy} \gamma''_{xy}) dx dy dz = \\ &= \int_V (\sigma''_x \epsilon'_x + \sigma''_y \epsilon'_y + \sigma''_z \epsilon'_z + \tau''_{yz} \gamma'_{yz} + \tau''_{zx} \gamma'_{zx} + \tau''_{xy} \gamma'_{xy}) dx dy dz. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Итак, мы доказали, что для упругого тела, следующего закону Гука, работа усилий, вызванных действием сил первого состояния, на перемещениях, вызванных действием сил второго состояния, равна работе усилий, вызванных действием сил второго состояния, на перемещениях, вызванных действием сил первого состояния.

Это и есть так называемый *принцип взаимности работ* или *теорема Бетти*. Этот принцип распространяется в равной мере как на работу внутренних усилий, так и на работу внешних нагрузок.

Следует отметить, что теорема Бетти о взаимности работ может быть подобным же образом доказана и для любого анизотропного тела, для которого обобщенный закон Гука в самом общем виде может быть представлен выражениями (2.2).

Принцип взаимности работ — один из основных принципов классической линейной теории упругости.

2. *Начало возможных перемещений Лагранжа*. Применительно к твердым телам начало возможных перемещений сформулировано Лагранжем в его «Аналитической механике» (1788 г.). К упругим телам (стержневой системе) этот принцип впервые был применен Пуассоном в 1833 г. Подобно тому, как для твердых тел начало возможных перемещений позволяет получить уравнения равновесия твердого тела, так и для упругих тел начало возможных перемещений может заменить уравнения равновесия тела.

Согласно началу возможных перемещений работа всех внешних сил, действующих на упругое тело, находящееся в равновесии, на любом возможном перемещении равна приращению потенциальной энергии.

Под возможными перемещениями δu , δv , δw понимают такие, которые совместимы с условиями закрепления тела на границах и условиями неразрывности внутри тела.

Работа внешних сил на этих перемещениях равна

$$\delta A = \int_V (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w) dx dy dz + \int_S (\bar{X}\delta u + \bar{Y}\delta v + \bar{Z}\delta w) dS.$$

Первый интеграл представляет собой работу объемных сил, а второй — поверхностных внешних сил.

Работа внутренних упругих сил на возможных перемещениях равна изменению потенциальной энергии

$$\delta W = \int_V (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dx dy dz,$$

где $\delta \epsilon_x = \partial \delta u / \partial x$, $\delta \epsilon_y = \partial \delta v / \partial y$, $\delta \epsilon_z = \partial \delta w / \partial z$, $\delta \gamma_{yz} = \partial \delta v / \partial z + \partial \delta w / \partial y$, ...

При этом предполагается, что напряжения (σ_x , σ_y , σ_z , ...) не изменяются в процессе варьирования перемещений, а возможные перемещения достаточно малы.

Так как все внутренние и внешние силы считаются неизменными при вычислении работы на любых возможных перемещениях, то значок δ можно вынести за знак интеграла.

Тогда будем иметь

$$\delta \left[\int_V \bar{w} dx dy dz - \int_V (Xu + Yv + Zw) dx dy dz - \int_S (\bar{X}u + \bar{Y}v + \bar{Z}w) dS \right] = 0. \quad (2.20)$$

Первый интеграл в скобках представляет потенциальную энергию деформации, а второй — потенциальную энергию внешних объемных сил, действующих на тело, если принять потенциал этих сил равным нулю при $u = v = w = 0$. Таким образом, все выражение в скобках есть полная потенциальная энергия системы, а выражение (2.20) указывает, что в случае равновесия тела возможные перемещения должны быть такими, чтобы полная потенциальная энергия системы имела экстремальное значение. Если равновесие устойчивое, то потенциальная энергия системы будет минимальной.

Отметим, что начало возможных перемещений может применяться и к упругим телам, не следующим закону Гука.

3. *Начало виртуальных изменений напряженного состояния (принцип Кастильяно).* Виртуальными изменениями на-

пряженного состояния называются такие, при которых будут справедливы уравнения равновесия для каждой точки внутри тела и на его поверхности. Используя уравнения (1.14), (1.16), будем иметь для точек внутри тела

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \delta \sigma_x + \frac{\partial}{\partial y} \delta \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \delta \tau_{xz} + \delta X &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \delta \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial y} \delta \sigma_y + \frac{\partial}{\partial z} \delta \tau_{yz} + \delta Y &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \delta \tau_{zx} + \frac{\partial}{\partial y} \delta \tau_{zy} + \frac{\partial}{\partial z} \delta \sigma_z + \delta Z &= 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

и для точек на поверхности тела

$$\begin{aligned} \delta \sigma_x l + \delta \tau_{xy} m + \delta \tau_{xz} n &= \delta \bar{X}, \\ \delta \tau_{yx} l + \delta \sigma_y m + \delta \tau_{yz} n &= \delta \bar{Y}, \\ \delta \tau_{zx} l + \delta \tau_{zy} m + \delta \sigma_z n &= \delta \bar{Z}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Здесь через $\delta \sigma_x$, $\delta \sigma_y$, $\delta \sigma_z$, $\delta \tau_{yz}$, $\delta \tau_{zx}$, $\delta \tau_{xy}$ обозначены виртуальные изменения напряжения, а через δX , δY , δZ и $\delta \bar{X}$, $\delta \bar{Y}$, $\delta \bar{Z}$ — виртуальные изменения внешних сил, объемных и поверхностных.

При всяком виртуальном изменении напряженного состояния тела сумма работ приращений всех внешних сил $\delta \bar{X}$, $\delta \bar{Y}$, $\delta \bar{Z}$, δX , δY , δZ , производимых на перемещениях, статически соответствующих этим силам (т. е. на действительных перемещениях тела), равна приращению потенциальной энергии тела.

В случае отсутствия объемных сил ($X = Y = Z = 0$) начало виртуальных изменений напряженного состояния запишется в следующем виде:

$$\int_S (u \delta \bar{X} + v \delta \bar{Y} + w \delta \bar{Z}) dS = \delta W. \quad (2.23)$$

Здесь u , v , w — действительные перемещения точек тела. В правой части равенства (2.23) стоит приращение потенциальной энергии тела, обусловленное изменениями напряжений, совместимых с условиями равновесия. Для единицы объема приращение потенциальной энергии составит

$$\begin{aligned} \delta \bar{w} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial \sigma_x} \delta \sigma_x + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \sigma_y} \delta \sigma_y + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \sigma_z} \delta \sigma_z + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau_{yz}} \delta \tau_{yz} + \\ + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau_{zx}} \delta \tau_{zx} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau_{xy}} \delta \tau_{xy} \end{aligned}$$

Принимая во внимание формулы Кастильяно (2.14), справедливые для материалов, подчиняющихся закону Гука, будем иметь

$$\delta \bar{W} = \varepsilon_x \delta \sigma_x + \varepsilon_y \delta \sigma_y + \varepsilon_z \delta \sigma_z + \gamma_{yz} \delta \tau_{yz} + \gamma_{zx} \delta \tau_{zx} + \gamma_{xy} \delta \tau_{xy}. \quad (2.24)$$

Если выражение (2.24) проинтегрировать по всему объему и принять во внимание (2.21) и (2.22), то можно доказать справедливость (2.23)*.

Таким образом, из сказанного следует, что начало виртуальных изменений напряженного состояния можно применять только к таким упругим телам, которые следуют закону Гука.

4. *Начало наименьшей работы.* При рассмотрении начала виртуальных изменений напряженного состояния изменениям подвергались как внутренние усилия, так и внешние нагрузки. Накладывалось только условие, чтобы эти изменения напряженного состояния удовлетворяли уравнениям равновесия на поверхности и внутри тела. Допустим теперь, что внешние нагрузки не изменяются, а изменяется только напряженное состояние внутри тела. Тогда, поскольку $\delta \bar{X} = \delta \bar{Y} = \delta \bar{Z} = 0$, вместо (2.22) запишем

$$\begin{aligned} \delta \sigma_x l + \delta \tau_{xy} m + \delta \tau_{xz} n &= 0, \\ \delta \tau_{yx} l + \delta \sigma_y m + \delta \tau_{yz} n &= 0, \\ \delta \tau_{zx} l + \delta \tau_{zy} m + \delta \sigma_z n &= 0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Так как левая часть равенства (2.23) при этом будет равна нулю, то оказывается, что

$$\delta W = 0. \quad (2.26)$$

Это означает, что из всех напряженных состояний, статически соответствующих заданным внешним нагрузкам тела, действительное напряженное состояние должно удовлетворять условию (2.26), т. е. обращать приращение потенциальной энергии в нуль. Можно показать, что действительное напряженное состояние тела обращает потенциальную энергию тела в минимум.

Уравнение (2.26) выражает так называемое *начало наименьшей работы*. Так же, как и принцип Кастильяно, нача-

*) Подробное доказательство принципа Кастильяно приведено в книге: Лейбензон Л. С. Краткий курс теории упругости. — М.: Гостехиздат, 1942.

ло наименьшей работы применимо к телам, следующим закону Гука.

Следует отметить, что начало наименьшей работы может применяться и в том случае, если внешние силы (реакции связей) подвергаются изменениям, но перемещения соответствующих точек приложения этих сил равны нулю. В этом случае работа этих внешних сил будет равна нулю и левая часть уравнения (2.23) также будет равна нулю. В такой форме начало наименьшей работы может использоваться для определения реакций в статически неопределимых системах (имеющих «лишние» связи). Уравнениями для определения этих «лишних» связей будут

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{X}} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{Y}} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{Z}} = 0. \quad (2.27)$$

При этом предварительно потенциальную энергию необходимо выразить через неизвестные реакции связей $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$.

Сравнивая начало возможных перемещений Лагранжа и начало виртуальных изменений напряженного состояния упругого тела Кастильяно, следует отметить, что первое заменяет собой уравнения равновесия (внутри тела и на его границах), а второе — уравнения совместности деформаций.

При использовании начала возможных перемещений при выборе функций для перемещений или деформаций необходимо соблюдать условия неразрывности внутри тела и геометрические граничные условия на поверхности.

При решении задач теории упругости с использованием начала виртуальных изменений напряженного состояния необходимо учитывать, что выбираемые функции напряжений и их вариации ($\delta \sigma_x$, $\delta \sigma_y$, ..., $\delta \tau_{xy}$) должны удовлетворять условиям равновесия внутри тела и статическим граничным условиям на поверхности.

Многие методы решения задач прикладной теории упругости, например, такие, как прямые вариационные методы, о которых более подробно будет сказано далее, в основе своей опираются на принципы Лагранжа и Кастильяно.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие тела называются изотропными и какие анизотропными?
2. Какое количество упругих постоянных имеется в уравнении закона Гука для анизотропного тела в самом общем виде?
3. Какие тела называют ортотропными?
4. Напишите уравнения закона Гука для ортотропного тела.
5. Напишите уравнения обобщенного закона Гука для изотропного тела.

6. Как записываются уравнения обобщенного закона Гука в форме Лямэ?

7. Как выражаются упругие постоянные Лямэ G , λ через модуль упругости E и коэффициент Пуассона μ ?

8. Как выражается потенциальная энергия деформации упругого тела через напряжения?

9. Как выражается потенциальная энергия деформации упругого тела через деформации?

10. Как записываются формулы Кастильяно?

11. Какие зависимости устанавливают формулы Грина?

12. Сформулируйте принцип взаимности работ (теорему Бетти).

13. Как формулируется начало возможных перемещений Лагранжа применительно к упругим телам?

14. Как формулируется начало виртуальных изменений напряженного состояния (*принцип Кастильяно*)?

15. Как формулируется начало наименьшей работы?

16. Как можно использовать начало наименьшей работы для определения реакций «лишних связей» в статически неопределимых системах?

ПОСТАНОВКА И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 12. Сводка основных уравнений, постановка задач теории упругости

В предыдущих главах были рассмотрены статические условия (условия равновесия) внутри и на поверхности тела (уравнения (1.16), (1.18)), геометрические уравнения, устанавливающие связь между деформациями и перемещениями (уравнения Коши (1.19)) и между деформациями (условия неразрывности Сен-Венана (1.29)), и, наконец, физические уравнения, устанавливающие связь между напряжениями и деформациями в точке тела (обобщенный закон Гука, уравнения (2.8) и (2.10)). Составим сводку основных уравнений теории упругости.

1. Статические уравнения.

а) Дифференциальные уравнения равновесия внутри тела (уравнения Навье):

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0;$$

б) статические граничные условия:

$$\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n - \bar{X} = 0,$$

$$\tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n - \bar{Y} = 0,$$

$$\tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n - \bar{Z} = 0.$$

2. Геометрические уравнения.

а) Связь между деформациями и перемещениями (уравнения Коши):

$$\epsilon_x = \partial u / \partial x, \quad \gamma_{xy} = \partial v / \partial x + \partial u / \partial y,$$

$$\epsilon_y = \partial v / \partial y, \quad \gamma_{yz} = \partial w / \partial y + \partial v / \partial z,$$

$$\epsilon_z = \partial w / \partial z, \quad \gamma_{zx} = \partial w / \partial x + \partial u / \partial z;$$

б) уравнения неразрывности деформаций (тождества Сен-Венана):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= 0, \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right] &= 0, \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right] &= 0, \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right] &= 0.\end{aligned}$$

3. Физические уравнения.

а) Обобщенный закон Гука для изотропного тела:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu (\sigma_x + \sigma_z)], & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G}, & G &= \frac{E}{2(1+\mu)}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G};\end{aligned}$$

б) обобщенный закон Гука в форме Ляме:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2G\varepsilon_x + \lambda\Delta, & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= 2G\varepsilon_y + \lambda\Delta, & \tau_{xz} &= G\gamma_{xz}, \\ \sigma_z &= 2G\varepsilon_z + \lambda\Delta, & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz},\end{aligned}$$

где $\Delta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$, $\lambda = 2\mu G/(1-2\mu)$.

Итак, исходные основные уравнения теории упругости, статические, геометрические и физические, заданы приведенными выше соотношениями.

Рассмотрим возможные постановки задач в теории упругости.

1. *Прямая постановка задач теории упругости.* В случае так называемой *прямой* постановки задачи теории упругости предполагается, что на границах тела заданы внешние на-

грузки, и если учитывается действие массовых сил, то задаются и массовые силы (инерционные, тяжести) для точек внутри тела. По заданным внешним нагрузкам требуется определить перемещения, деформации и напряжения для точек внутри и на поверхности тела.

В некоторых случаях на границах тела задаются не усилия, а перемещения. В этом случае по заданным перемещениям границ тела требуется определить перемещения, деформации и напряжения для всех внутренних точек тела и напряжения и деформации на поверхности.

Возможна также прямая постановка задачи при задании на части границ тела внешних нагрузок, а на другой части — перемещений (*смешанная форма граничных условий*). В этом случае, как и в предыдущих, по заданным условиям на границах тела требуется определить перемещения, деформации и напряжения точек внутри тела.

Таким образом, при прямой постановке задачи теории упругости требуется определить три компоненты перемещений (u, v, w), шесть компонент деформаций ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots, \gamma_{xy}$) и шесть компонент напряжений ($\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xy}$) как функций координат точек тела. Для решения этой задачи могут быть использованы приведенные выше системы статических, геометрических и физических уравнений теории упругости.

Для определения 15 неизвестных функций имеется 15 основных уравнений (3 уравнения равновесия, 6 уравнений — соотношения Коши и 6 уравнений закона Гука). Кроме того, найденные напряжения, перемещения и деформации должны удовлетворять статическим условиям на границах тела и условиям совместности деформаций.

Решение такой задачи представляет очень большие трудности, и в общем виде решить ее пока не удастся.

2. *Обратная постановка задач теории упругости.* Возможна *обратная* постановка задачи теории упругости, когда задаются напряжения, деформации или перемещения для всех внутренних точек тел как функции координат точек, а требуется определить условия на границах тела, которым соответствует заданное напряженное и деформированное состояние тела.

Решение задачи теории упругости в обратной постановке значительно проще. Особенно просто эта задача решается, если задано внутреннее поле перемещений. В самом деле, если перемещения u, v, w заданы как функции координат точек тела (включая и точки на поверхности тела), то, используя уравнения Коши, находим деформации, а затем

из обобщенного закона Гука в форме Лямэ определяем напряжения. Внешние нагрузки (объемные и поверхностные) после этого без труда определяются из уравнений равновесия для точек внутри тела и на поверхности.

§ 13. Решение задач теории упругости в перемещениях (уравнения Лямэ)

Для решения задач теории упругости в перемещениях необходимо уравнения равновесия для точек внутри тела (уравнения Навье) представить в перемещениях. С этой целью выразим напряжения через деформации в форме Лямэ, а деформации представим через перемещения по уравнениям Коши.

Для напряжения σ_x будем иметь

$$\sigma_x = 2G\epsilon_x + \lambda\Delta = 2G \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right).$$

Аналогичные выражения можно записать также для σ_y и σ_z . Касательные напряжения τ_{yz} , τ_{zx} , τ_{xy} также представим через перемещения:

$$\tau_{yz} = G \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \tau_{zx} = G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad \tau_{xy} = G \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

После подстановки полученных выражений для напряжений в уравнения равновесия и выполнения необходимых преобразований получим

$$\begin{aligned} \nabla^2 u + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \Delta}{\partial x} &= -\frac{X}{G}, & \nabla^2 v + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \Delta}{\partial y} &= -\frac{Y}{G}, \\ \nabla^2 w + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \Delta}{\partial z} &= -\frac{Z}{G}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В уравнениях (3.1) значком ∇^2 (читается «набла-два») обозначен дифференциальный оператор Лапласа

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

а через Δ , как и прежде, относительное изменение объема, т. е.

$$\Delta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

В результате интегрирования уравнений равновесия в перемещениях (уравнений Лямэ) могут быть получены пере-

мещения u , v , w как функции координат x , y , z . При этом полученные функции перемещений должны удовлетворять как дифференциальным уравнениям (3.1), так и граничным условиям (статическим и геометрическим). Что же касается условий совместности деформаций, то при решении задачи теории упругости в перемещениях эти уравнения удовлетворяются тождественно.

§ 14. Решение задач теории упругости в напряжениях (уравнения Бельтрами—Митчелла)

При решении задач теории упругости в напряжениях необходимо отыскивать такие функции напряжений, которые бы не только удовлетворяли уравнениям равновесия (уравнениям Навье), статическим граничным условиям, но также и условиям совместности деформаций. В связи с этим уравнения совместности деформаций Сен-Венана необходимо представить в напряжениях.

Уравнения совместности деформаций, выраженные через напряжения, называются *уравнениями Бельтрами—Митчелла*.

Для получения уравнений Бельтрами—Митчелла необходимо деформации ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z , γ_{xy} , γ_{xz} , γ_{yz} выразить через напряжения по уравнениям обобщенного закона Гука, подставить эти выражения в уравнения неразрывности Сен-Венана. Затем, используя уравнения равновесия, после преобразований можно получить следующую систему шести уравнений Бельтрами—Митчелла:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} &= 0, & \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} &= 0, \\ \nabla^2 \sigma_y + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} &= 0, & \nabla^2 \tau_{xz} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial z} &= 0, \\ \nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} &= 0, & \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $S = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$.

Уравнения (3.2) заменяют уравнения совместности деформаций Сен-Венана. Решение задачи теории упругости в напряжениях сводится, таким образом, к интегрированию системы девяти уравнений — шести уравнений Бельтрами—Митчелла и трех уравнений равновесия Навье (1.16). Найденные функции напряжений должны удовлетворять систе-

мам уравнений (1.16) и (3.2), а также статическим условиям на границах тела (1.18).

После того как будут найдены функции напряжений, из уравнений обобщенного закона Гука можно определить все деформации, а далее интегрированием функций деформаций (уравнений Коши) можно получить и функции перемещений, удовлетворяющие заданным геометрическим граничным условиям.

Несмотря на то, что общий план решения задач теории упругости в перемещениях или напряжениях достаточно ясен, реализация этого плана представляет весьма большие трудности, и в общем виде решить эти уравнения пока не представляется возможным. Лишь для простейших случаев удается получить решение задачи теории упругости, однако эти решения задач в самой общей постановке представляют очень большую ценность. Точные решения задач теории упругости являются своеобразным эталоном, с которым можно сравнивать приближенные решения, полученные в результате введения определенных дополнительных деформационных гипотез.

✓ § 15. Единственность решения

Пусть тело находится под действием системы объемных сил X, Y, Z , а граничные условия на одной части поверхности заданы поверхностными силами $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$, а на другой — перемещениями $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$. Допустим, что мы нашли такую систему перемещений u', v', w' , деформаций $\epsilon'_x, \epsilon'_y, \dots, \gamma'_{zx}$, напряжений $\sigma'_x, \sigma'_y, \dots, \tau'_{zx}$, которые удовлетворяют всем уравнениям теории упругости внутри тела и условиям на поверхности.

Покажем, что найденное решение задачи линейной теории упругости будет единственным.

Предположим, что заданным объемным силам X, Y, Z и условиям на поверхности отвечает еще одно решение. При этом перемещения, деформации и напряжения этого решения обозначим $u'', v'', w'', \epsilon''_x, \epsilon''_y, \dots, \gamma''_{zx}, \sigma''_x, \sigma''_y, \dots, \tau''_{zx}$. Теперь, используя принцип суперпозиции, справедливый в линейной теории упругости, построим третье решение как разность первого и второго, т. е. перемещения, деформации и напряжения этого решения будут равны $u' - u'', v' - v'', w' - w'', \epsilon'_x - \epsilon''_x, \epsilon'_y - \epsilon''_y, \dots, \gamma'_{zx} - \gamma''_{zx}, \sigma'_x - \sigma''_x, \sigma'_y - \sigma''_y, \dots, \tau'_{zx} - \tau''_{zx}$. При этом уравнения равновесия для внутрен-

них точек тела будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\sigma'_x - \sigma''_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau'_{xy} - \tau''_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(\tau'_{xz} - \tau''_{xz})}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial(\tau'_{yx} - \tau''_{yx})}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma'_y - \sigma''_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau'_{yz} - \tau''_{yz})}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial(\tau'_{zx} - \tau''_{zx})}{\partial x} + \frac{\partial(\tau'_{zy} - \tau''_{zy})}{\partial y} + \frac{\partial(\sigma'_z - \sigma''_z)}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

а для той части поверхности, где приложены силы $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$, придем к следующим однородным уравнениям:

$$\begin{aligned} (\sigma'_x - \sigma''_x)l + (\tau'_{xy} - \tau''_{xy})m + (\tau'_{xz} - \tau''_{xz})n &= 0, \\ (\tau'_{yx} - \tau''_{yx})l + (\sigma'_y - \sigma''_y)m + (\tau'_{yz} - \tau''_{yz})n &= 0, \\ (\tau'_{zx} - \tau''_{zx})l + (\tau'_{zy} - \tau''_{zy})m + (\sigma'_z - \sigma''_z)n &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для части поверхности, где заданы перемещения, получим

$$u' - u'' = 0, \quad v' - v'' = 0, \quad w' - w'' = 0. \quad (3.5)$$

Третье решение, равное разности двух решений, удовлетворяющих всем уравнениям теории упругости, можно трактовать как решение задачи линейной теории упругости рассматриваемого тела при условии, что объемные и поверхностные силы отсутствуют, а перемещения $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ на границах тела равны нулю.

При этих условиях работа внешних сил равна нулю, а следовательно, должна быть равна нулю и потенциальная энергия деформации $W = \int \int \int \bar{w} dx dy dz$. Ранее было отмечено, что удельная потенциальная энергия $\bar{w}$ всегда положительна. Поэтому потенциальная энергия тела W может быть равна нулю только в том случае, если $\bar{w} = 0$. Отсюда следует, что все компоненты деформаций и напряжений, относящихся к третьему решению, равны нулю, т. е.

$$\epsilon'_x = \epsilon''_x, \dots, \gamma'_{zx} = \gamma''_{zx}, \quad \sigma'_x = \sigma''_x, \dots, \tau'_{zx} = \tau''_{zx}.$$

Это и доказывает единственность решения задач линейной теории упругости.

Что касается перемещений, то они могут отличаться на величину, характеризующую перемещение твердого тела в том случае, когда на поверхности тела заданы только силы, а перемещения точек тела не заданы.

Теорема о единственности решения была доказана Кирхгофом.

§ 16. Полуобратный метод Сен-Венана. Задача Сен-Венана. Принцип Сен-Венана

Как уже отмечалось, решение задач теории упругости в прямой постановке (в перемещениях либо напряжениях) представляет очень большие сложности и общих методов решения задач в такой постановке пока не существует. Обратная постановка задач часто не соответствует потребностям практики, так как жизнь обычно ставит задачи в прямой постановке. При этом известны граничные условия, и требуется определить поле напряжений, деформаций и перемещений, соответствующих заданным граничным условиям.

Сен-Венаном был предложен так называемый полуобратный метод (1853 г.), суть которого состоит в том, что при решении задачи теории упругости задаются частью компонент перемещений и частью компонент напряжений, а недостающие компоненты определяются из уравнений теории упругости так, чтобы удовлетворялись все уравнения теории упругости и граничные условия. Этим методом Сен-Венан решил задачи о кручении бруса некруглого сечения и об изгибе бруса.

Заметим, что, несмотря на то, что в полуобратном методе частью компонент перемещений и напряжений можно задаваться, однако, поскольку все компоненты напряжений и перемещений в конечном счете удовлетворяют всем уравнениям теории упругости, полученное решение является точным решением задачи.

Конечно, полуобратный метод не является общим. Он требует определенной интуиции для того, чтобы удачно задались частью компонент перемещений и напряжений. Однако этот метод может быть полезен при решении некоторых задач теории упругости.

В качестве примера применения полуобратного метода Сен-Венана рассмотрим решение задачи о кручении бруса постоянного сечения произвольной формы.

В отличие от бруса круглого сечения, при кручении бруса произвольной формы сечения имеет место деформация сечений, т. е. гипотеза плоских сечений становится несправедливой. Сен-Венан решает задачу о кручении бруса в предположении, что деформация сечения ничем не стеснена, т. е. перемещения w вдоль оси бруса не зависят от координаты z . При этом нормальные напряжения $\sigma_z = 0$. Кроме того, считаются равными нулю компоненты напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$.

Тогда, полагая объемные силы отсутствующими, из (1.17) получим следующие уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (3.6)$$

Из первых двух уравнений (3.6) следует, что напряжения τ_{xz}, τ_{yz} не зависят от координаты z , т. е. распределение касательных напряжений по сечению для всех сечений бруса одинаково.

Введем функцию напряжений φ , через которую напряжения τ_{xz}, τ_{yz} представляются в виде

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (3.7)$$

При этом третье уравнение равновесия удовлетворяется тождественно:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0.$$

Теперь обратимся к уравнениям совместности деформаций в форме Бельтрами — Митчелла (3.2). При принятых ранее предположениях относительно составляющих напряжения $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$ первые четыре уравнения системы (3.2) удовлетворяются при любых выражениях функции φ , а последние два уравнения получают следующий вид:

$$\nabla^2 \tau_{xz} = 0, \quad \nabla^2 \tau_{yz} = 0. \quad (3.8)$$

После подстановки (3.7) в (3.8) получим

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (3.9)$$

Следовательно, выражение в скобках $\partial^2 \varphi / \partial x^2 + \partial^2 \varphi / \partial y^2$ является величиной постоянной, т. е.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = C, \quad (3.10)$$

Так как боковая поверхность бруса свободна от внешних нагрузок (скручивающий момент приложен к торцам бруса), то проекция касательных напряжений на нормаль к контуру должна быть равна нулю, иными словами, касательные напряжения у контура должны быть направлены по касательной к контуру. Это условие можно записать в виде $\frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = 0$, или

$$\frac{d\varphi}{ds} = 0. \quad (3.11)$$

Это означает, что функция напряжений φ всюду на контуре имеет одинаковое значение. В частности, для бруса сплошного, поперечного сечения можно принимать его равным нулю.

Таким образом, задача о кручении бруса сводится к отысканию такой функции напряжений φ , которая бы удовлетворяла уравнению (3.10) и всюду на контуре была бы равна нулю.

К торцовым сечениям приложены скручивающие брус моменты M_K в виде распределенных по поверхности торца бруса касательных напряжений. Следовательно, на торце бруса статические граничные условия запишутся в виде

$$\tau_{xz} = \pm \bar{X}, \quad \tau_{yz} = \pm \bar{Y}.$$

Принимая во внимание выражения (3.7) для τ_{xz} и τ_{yz} , после преобразований можно получить

$$M_K = 2 \iint \varphi \, dx \, dy. \quad (3.12)$$

Рассмотрим случай, когда сечение бруса представляет собой эллипс, уравнение которого $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$, где a — размер большой полуоси, а b — малой полуоси эллипса.

Примем для φ выражение вида

$$\varphi = m \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right). \quad (3.13)$$

Всюду на контуре $\varphi = 0$. При подстановке (3.13) в (3.10) получим $2m(1/a^2 + 1/b^2) = C$, откуда $m = C \frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)}$. Следовательно, выражение для φ примет вид

$$\varphi = C \frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right). \quad (3.14)$$

Из (3.12) найдем выражение для C через скручивающий момент M_K :

$$C = - \frac{2M_K(a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^3}. \quad (3.15)$$

Теперь для φ окончательно получим

$$\varphi = - \frac{M_K}{\pi a b} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right), \quad (3.16)$$

а касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} будут равны

$$\tau_{xz} = - \frac{2M_K}{\pi a b^3} y, \quad \tau_{yz} = \frac{2M_K}{\pi a^3 b} x. \quad (3.17)$$

Наибольшее касательное напряжение имеет место на конце малой полуоси сечения, при $y = b$

$$\tau_{\max} = 2M_K/(\pi a b^2).$$

Для определения относительного угла закручивания сечения θ и деформации w необходимо рассмотреть связь перемещений с напряжениями. Так как $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$, то из закона Гука следует, что $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$.

Из закона Гука для сдвига, полагая $\tau_{xy} = 0$, имеем

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (3.18)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\tau_{yz}}{G}.$$

При кручении ось бруса z остается неподвижной и сечения поворачиваются относительно этой оси так, чтобы удовлетворялись уравнения (3.18). Прямая, точки которой при кручении бруса остаются неподвижными, называется *осью кручения*. Следовательно, ось бруса z является осью кручения.

Если для перемещений u и v принять выражения вида $u = -\theta yz$, $v = \theta xz$, то первое из уравнений (3.18) будет удовлетворяться, а из двух последних получим

$$-\theta y + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \quad \theta x + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\tau_{yz}}{G},$$

или

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\tau_{xz}}{G} + \theta y, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\tau_{yz}}{G} - \theta x. \quad (3.19)$$

Если второе из уравнений (3.18) продифференцировать по y , а третье — по x и затем вычесть из первого результата второй, то получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} = \frac{1}{G} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \right). \quad (3.20)$$

При принятых для u и v выражениях левая часть равенства (3.20) равна -2θ , а правая, принимая во внимание (3.7), равна $\frac{1}{G} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)$. Таким образом, из (3.20),

учитывая выражение (3.10), получим

$$-2G\theta = C, \quad (3.21)$$

а относительный угол поворота сечений θ равен $\theta = -C/2G$.

В рассматриваемой задаче о кручении бруса эллиптического сечения выражение для θ имеет вид

$$\theta = \frac{M_K(a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^3 G}. \quad (3.22)$$

Подставляя (3.17) и (3.22) в (3.19), можно после интегрирования получить следующее выражение для w :

$$w = \frac{M_K(b^2 - a^2)}{\pi a^3 b^3 G} xy. \quad (3.23)$$

Решение задачи о кручении бруса эллиптической формы сечения получено в предположении, что внешние нагрузки $\bar{X}$, $\bar{Y}$ распределены по торцам бруса по тому же закону, что и τ_{xz} , τ_{yz} , т. е. согласно уравнениям (3.17), а деформация сечений не стеснена.

Распределение напряжений и деформаций для внутренних точек тела при достаточном удалении их от границ тела слабо зависит от характера распределения внешней нагрузки на границах тела. Таким образом, если на некоторой части поверхности тела изменить закон распределения внешней нагрузки так, что видоизмененная нагрузка будет статически эквивалентна прежней, то такое изменение приведет лишь к изменению напряженного и деформированного состояния в области тела, прилегающей к нагруженному участку, т. е. местных напряжений. Напряженное и деформированное состояние тела вдали от места нагружения при этом почти не изменяется. Это утверждение получило наименование *принципа Сен-Венана*.

Таким образом, полученное решение задачи о кручении бруса эллиптического сечения согласно принципу Сен-Венана справедливо для сечений, достаточно удаленных от торцов, при любом распределении внешних нагрузок $\bar{X}$, $\bar{Y}$ по торцу бруса.

Другим примером использования принципа Сен-Венана является задача о растяжении бруса силами, приложенными к его торцам. В этом случае закон распределения напряжений по сечению бруса на достаточном удалении от торцов не зависит от того, каким образом распределяется

приложенная по торцу сечения нагрузка, лишь бы величина равнодействующей нагрузки и точки ее приложения не изменялись (рис. 3.1).

Принцип Сен-Венана имеет большое значение в решении многих задач прикладной теории упругости. Он позволяет

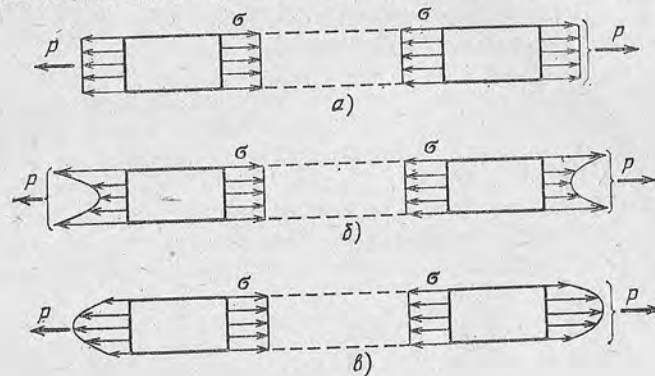


Рис. 3.1.

при решении некоторых задач удовлетворять граничным условиям не в каждой точке торцового сечения, а лишь в интегральном смысле, т. е. в смысле удовлетворения условиям статики для тела в целом.

Однако следует иметь в виду, что в некоторых случаях принцип Сен-Венана неприменим. В тонкостенных конструкциях (пластины, оболочки, тонкостенные стержни) могут иметь место случаи, когда статически эквивалентные изменения внешних нагрузок на торцах тонкостенного стержня приводят не к местным изменениям напряжений и деформаций, а изменяют напряженное и деформированное состояние всего тонкостенного стержня.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что означает прямая постановка задачи теории упругости?
2. Что означает обратная постановка задачи теории упругости?
3. Каков план решения задачи теории упругости в перемещениях?
4. Каков план решения задачи теории упругости в напряжениях?
5. В чем смысл полубратного метода Сен-Венана решения задачи теории упругости?
6. В чем смысл принципа Сен-Венана и каково его значение для решения задач теории упругости?

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

§ 17. Плоская деформация и обобщенное плоское напряженное состояние

Тело находится в условиях *плоской деформации*, если перемещения всех его точек параллельны одной и той же плоскости (плоскости деформации) и не зависят от координаты в направлении по нормали к плоскости деформации.

Если за плоскость деформации принять плоскость xu , то при плоской деформации перемещения u, v зависят только от координат x, y , а перемещение w всюду в теле равно нулю.

При этом

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Соответственно, нулю оказываются равными напряжения τ_{xz} и τ_{yz} . Что же касается нормального напряжения σ_z , то оно определяется из равенства $\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y)]$, откуда $\sigma_z = \mu (\sigma_x + \sigma_y)$.

Таким образом, в случае плоской деформации решение задачи теории упругости существенно упрощается, так как от трехмерной задачи мы переходим к двумерной. В самом деле, поскольку $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$, а следовательно, и $\tau_{xz} = \tau_{yz} = \partial \sigma_z / \partial z = 0$, а также $Z = 0$, то из трех уравнений равновесия Навье (1.16) остаются только первые два, а из шести условий совместности деформаций Сен-Венана (1.29) — только одно первое. Все остальные уравнения удовлетворяются тождественно. Задача сводится к отысканию напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ из уравнений теории упругости, удовлетворяющих граничным условиям. Затем во вторую очередь определяется напряжение $\sigma_z = \mu (\sigma_x + \sigma_y)$.

Рассмотрим случай, когда может иметь место плоская деформация.

Пусть длинное цилиндрическое тело (ось z направлена параллельно образующей) нагружено внешними силами, не зависящими от координаты z и нормальными к этому направлению. При этом полагаем, что составляющие объемных

сил Z отсутствуют. В этом случае при достаточном удалении от концов цилиндра можно считать, что напряжения и деформации в сечении цилиндра не будут зависеть от координаты z .

Строго говоря, для обеспечения плоской деформации помимо нагрузки на боковую поверхность цилиндрического

тела необходимо к его торцам приложить напряжения σ_z , определяемые из выражения $\sigma_z = \mu (\sigma_x + \sigma_y)$. Если торцы свободны от нагрузки, то условия, не-

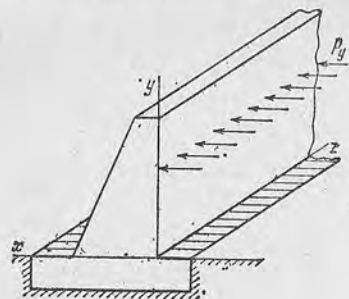


Рис. 4.1.

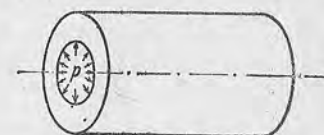


Рис. 4.2.

обходимые для обеспечения плоской деформации, нарушаются. Однако и в этом случае для сечений, достаточно удаленных от торцов, можно с достаточной точностью полагать деформированное и напряженное состояние соответствующим условиям плоской деформации.

В случае расчета подпорной стенки (рис. 4.1), имеющей большую длину в направлении оси z и нагруженной давлением, величина которого не зависит от координаты z , можно считать, что ее сечения находятся в условиях плоской деформации. К такого рода задачам можно отнести также расчет длинных толстостенных труб, находящихся под действием радиального давления, не изменяющегося по длине трубы (рис. 4.2).

Аналогичные упрощения при решении общей задачи теории упругости можно получить и в том случае, когда цилиндрическое тело имеет не большую, а, напротив, очень малую длину, т. е. представляет собой тонкую пластинку. Совместим координатную плоскость xu со срединной плоскостью пластинки, т. е. плоскостью, которая всюду делит толщину h пластинки пополам (рис. 4.3). Пусть по боковой поверхности пластинки распределены напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, которые сводятся к погонным усилиям p_x, p_y, t_{xy} , приложенным к контуру срединной плоскости.

Основания пластинки $z = \pm h/2$ считаем свободными от нагрузки, т. е. при $z = \pm h/2$ $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Кроме того, на пластинку действуют объемные силы, компонента которых Z всюду равна нулю.

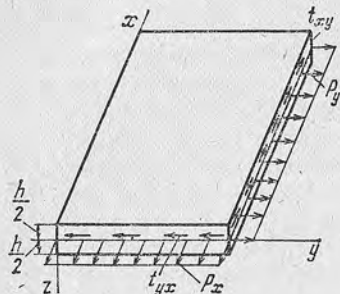


Рис. 4.3.

При этом на основаниях пластинки не только $\sigma_z = 0$, но и ее производная по z : $\partial\sigma_z/\partial z = 0$, что следует из уравнения равновесия при $z = \pm h/2$:

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} = 0.$$

Поэтому для рассматриваемой пластинки можно с достаточным основанием полагать, что σ_z всюду равняется нулю.

Для остальных напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} будем рассматривать их средние значения по толщине пластинки, т. е.

$$\bar{\sigma}_x = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz, \quad \bar{\sigma}_y = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz, \\ \bar{\tau}_{xy} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz.$$

Если каждый член первых двух уравнений равновесия Навье умножить на dz и затем проинтегрировать от $z = -h/2$ до $z = +h/2$, то, учитывая, что

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} dz = \left[\tau_{xz} \right]_{-h/2}^{h/2} = 0, \\ \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} dz = \left[\tau_{yz} \right]_{-h/2}^{h/2} = 0,$$

получим следующую систему уравнений равновесия в средних напряжениях:

$$\frac{\partial\bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial\bar{\tau}_{xy}}{\partial y} + \bar{X} = 0, \quad \frac{\partial\bar{\tau}_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\bar{\sigma}_y}{\partial y} + \bar{Y} = 0.$$

Здесь через $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ обозначены средние по толщине пластинки значения составляющих объемных сил X и

Y , т. е.

$$\bar{X} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} X dz, \quad \bar{Y} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} Y dz.$$

Напряженное состояние пластинки, при котором $\sigma_z = 0$ повсюду, а τ_{xz} и τ_{yz} обращаются в нуль на основаниях, называют обобщенным *плоским напряженным состоянием*.

Как в случае плоской деформации, так и в случае обобщенного плоского напряженного состояния решение плоской задачи сводится к определению трех составляющих напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} и трех составляющих деформации ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} из одних и тех же уравнений равновесия и совместности деформаций.

Связь между деформациями и напряжениями определяется уравнениями обобщенного закона Гука. В случае обобщенного плоского напряженного состояния эти уравнения имеют вид

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu\sigma_y), \quad \epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu\sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}.$$

Здесь и далее в случае обобщенного плоского напряженного состояния средние напряжения, деформации, компоненты перемещений и объемных сил, входящие в уравнения, более не будем отмечать черточкой сверху.

В случае плоской деформации

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad \epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)], \\ \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}.$$

Учитывая, что $\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$, для ϵ_x и ϵ_y после упрощений получим следующие выражения:

$$\epsilon_x = \frac{1-\mu^2}{E} \left[\sigma_x - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_y \right], \quad \epsilon_y = \frac{1-\mu^2}{E} \left[\sigma_y - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_x \right].$$

§ 18. Основные уравнения плоской задачи в декартовых координатах

В случае плоской задачи все основные уравнения теории упругости, рассмотренные ранее, существенно упрощаются.

Как при плоском напряженном состоянии, так и при плоской деформации $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. При плоском напряжен-

ном состоянии $\sigma_z = 0$, а при плоской деформации σ_z не зависит от координаты z , и, следовательно, в обоих случаях $\partial\sigma_z/\partial z = 0$.

Поэтому из трех уравнений равновесия (1.14) остается два:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + X = 0, \quad \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + Y = 0. \quad (4.1)$$

Если объемные силы X, Y отсутствуют, то уравнения равновесия упрощаются:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} = 0. \quad (4.2)$$

Уравнения равновесия на поверхности тела запишутся в виде

$$\sigma_x l + \tau_{xy} m - \bar{X} = 0, \quad \tau_{yx} l + \sigma_y m - \bar{Y} = 0. \quad (4.3)$$

В случае плоской задачи из шести соотношений Коши остаются только три:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4.4)$$

К группе геометрических уравнений относятся также уравнения совместности деформаций (уравнения неразрывности) Сен-Венана. В случае плоской задачи из шести уравнений неразрывности остается только одно:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (4.5)$$

Остальные пять уравнений неразрывности обращаются в тождества.

Наконец, физические уравнения в случае плоского напряженного состояния ($\sigma_z = 0$) запишем в виде

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y), \quad \epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x), \\ \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}. \quad (4.6)$$

§ 19. Функция напряжений Эри

Решение плоской задачи теории упругости в декартовых координатах сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений равновесия (4.2) и совместности де-

формаций (4.5) при удовлетворении граничным условиям (4.3).

Уравнения (4.2) представлены в напряжениях. Для решения задачи в напряжениях необходимо и уравнение (4.5) представить в напряжениях, воспользовавшись уравнениями закона Гука (4.6).

Подставив выражения для деформаций (4.6) в (4.5), после преобразований получим уравнение совместности деформаций, выраженное через напряжения:

$$\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - 2(1+\mu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (4.7)$$

Далее выразим $\partial^2 \tau_{xy} / \partial x \partial y$ из уравнений равновесия (4.2) в виде $\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}$ и подставим эти выражения в уравнение (4.7). Тогда уравнение совместности деформаций получит следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + (1+\mu) \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) = 0,$$

а после сокращений

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0, \quad (4.8)$$

или

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0, \quad (4.9)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа.

Теперь решение плоской задачи сводится к отысканию таких напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, которые бы удовлетворяли системе уравнений равновесия (4.2), гармоническому уравнению (4.9) и граничным условиям (4.3).

Для решения плоской задачи в напряжениях удобно ввести так называемую функцию напряжений φ , через которую напряжения могут быть выражены следующим образом:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (4.10)$$

В этом случае уравнения равновесия (4.2) удовлетворяются тождественно, а уравнение совместности деформаций

(4.9) после подстановки в него (4.10) приобретает вид

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0, \quad (4.11)$$

где через $\nabla^2 \nabla^2$ обозначен бигармонический оператор

$$\nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4};$$

уравнение (4.11) называется *бигармоническим уравнением плоской задачи*.

При использовании функции напряжений φ (функции Эри)*) решение плоской задачи заключается в отыскании такого выражения этой функции, которое бы удовлетворяло уравнению (4.11) и граничным условиям, записанным через функцию φ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} l - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} m - \bar{X} &= 0, \\ -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} l + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} m - \bar{Y} &= 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Следует отметить, что уравнение совместности деформаций, выраженное через напряжения (4.8), (4.9) или функцию напряжений (4.11), имеет такой же вид и в случае плоской деформации.

Если рассматривается плоская задача теории упругости с учетом действия объемных сил, то уравнения равновесия имеют вид (4.1). Тогда, полагая, что объемные силы имеют потенциал U , так что $X = -\partial U / \partial x$, а $Y = -\partial U / \partial y$, через функцию напряжений представляют разности между напряжениями и потенциалом объемных сил, т. е.

$$(\sigma_x - U) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad (\sigma_y - U) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

При этом уравнения равновесия (4.1) будут также превращаться в тождества.

Уравнение совместности деформаций, выраженное через функцию напряжений φ и потенциал U , можно представить следующим образом:

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi + (1 - \mu) \nabla^2 U = 0. \quad (4.13)$$

*) Функция φ впервые была введена при исследовании интенсивности света в 1862 г. английским астрономом Джорджем Бидделлом Эри и впоследствии стала называться его именем.

§ 20. Решение плоской задачи в полиномах

Считаем, что объемные силы отсутствуют и основным уравнением плоской задачи является бигармоническое уравнение

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0.$$

Будем представлять функцию напряжений φ в полиномах различной степени и проверять условия, при которых эти полиномы удовлетворяют бигармоническому уравнению.

1. Пусть функция φ представляется полиномом второй степени

$$\varphi_2 = \frac{a_2}{2} x^2 + b_2 xy + \frac{c_2}{2} y^2. \quad (4.14)$$

Легко заметить, что функция φ удовлетворяет бигармоническому уравнению при любых значениях коэффициентов a_2, b_2, c_2 .

В самом деле, дифференцируя φ_2 по x и y , имеем

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = 0, \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0.$$

Таким образом, полином второй степени действительно удовлетворяет бигармоническому уравнению при любых значениях постоянных a_2, b_2, c_2 . Найдем выражения для напряжений по функции φ_2 :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = c_2, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = a_2, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -b_2.$$

Полученные выражения для напряжений показывают, что в случае, если функция напряжений представлена полиномом второй степени, все напряжения оказываются постоянными и равными коэффициентам a_2, b_2, c_2 полинома.

Этот случай может иметь место тогда, когда пластинка нагружена по контуру постоянными равномерно распределенными усилиями (нормальными и касательными).

В случае действия растягивающих или сжимающих усилий в направлении оси x $p_x = c_2$, а $a_2 = b_2 = 0$. В случае двустороннего растяжения или сжатия $p_x = c_2$, $p_y = a_2$, а $b_2 = 0$. Наконец, в случае чистого сдвига $a_2 = c_2 = 0$, а $\tau_{xy} = -b_2$.

2. Рассмотрим теперь случай, когда функция φ выражается полиномом третьей степени

$$\varphi_3 = \frac{a_3}{6} x^3 + \frac{b_3}{2} x^2 y + \frac{c_3}{2} x y^2 + \frac{d_3}{6} y^3. \quad (4.15)$$

Так же, как и в предыдущем случае, непосредственной подстановкой выражения φ_3 в бигармоническое уравнение можно показать, что функция φ_3 удовлетворяет бигармоническому уравнению при любых значениях коэффициентов a_3, b_3, c_3, d_3 .

Найдем выражения для напряжений, соответствующих функции φ_3 :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = c_3 x + d_3 y, & \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = a_3 x + b_3 y, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -(b_3 x + c_3 y). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Рассмотрим, каким условиям нагружения пластины соответствуют частные случаи, когда один из коэффициентов полинома (4.15) не равен нулю, а остальные равны нулю.

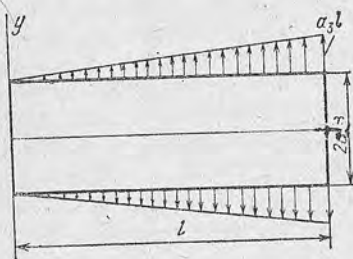


Рис. 4.4.

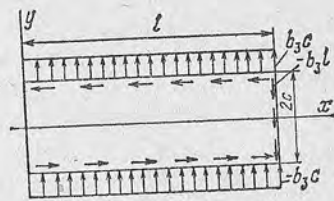


Рис. 4.5.

Пусть, например, $a_3 \neq 0$, а $b_3 = c_3 = d_3 = 0$. Тогда, как следует из (4.16), $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$, $\sigma_y = a_3 x$. Этот случай соответствует нагружению верхней и нижней кромок пластины распределенными нормальными усилиями, изменяющимися по линейному закону (рис. 4.4). При этом напряжение σ_y не зависит от координаты y , а зависит только от координаты x .

Другой пример соответствует случаю, когда $b_3 \neq 0$, а $a_3 = c_3 = d_3 = 0$. При этом $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = b_3 y$, а $\tau_{xy} = -b_3 x$. По верхней кромке действует растягивающее напряжение

$\sigma_y = b_3 c$ и касательное напряжение, изменяющееся от 0 до $\tau_{xy} = -b_3 l$. По нижней кромке действует сжимающее напряжение $\sigma_y = -b_3 c$ и касательное напряжение, изменяющееся от 0 до $\tau_{xy} = -b_3 l$, а на правом торце ($x = l$) приложены равномерно распределенные по кромке касательные напряжения $\tau_{xy} = -b_3 l$ (рис. 4.5). Нетрудно заметить, что пластина, изображенная на рис. 4.5, находится в равновесии и граничные условия удовлетворяются в каждой точке.

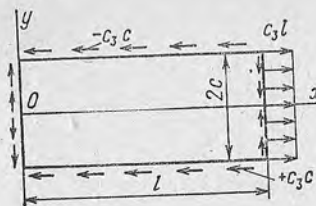


Рис. 4.6.

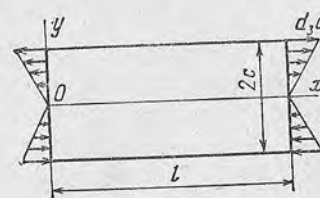


Рис. 4.7.

Рассмотрим также случай, когда $c_3 \neq 0$, а остальные коэффициенты равны нулю.

При этом $\sigma_x = c_3 x$ не зависит от координаты y , $\sigma_y = 0$, а $\tau_{xy} = -c_3 y$ и не зависит от координаты x . Граничные условия показаны на рис. 4.6. К правой торцевой кромке приложены равномерно распределенные растягивающие напряжения $\sigma_x = c_3 l$ и касательные напряжения τ_{yx} , изменяющиеся по линейному закону от нуля до значений $\pm c_3 c$, а к левой — касательные напряжения τ_{yx} . Верхняя и нижняя кромки нагружены одинаковыми равномерно распределенными по длине пластины напряжениями $\tau_{xy} = \mp c_3 c$.

Наконец, примем, что $d_3 \neq 0$, а остальные коэффициенты равны нулю. В этом случае $\sigma_x = d_3 y$, $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$. Нормальные напряжения распределены по высоте полосы по линейному закону. Такой же закон распределения нормальных усилий будет иметь место и на торцах. Нормальные напряжения не зависят от координаты x . Это — случай чистого изгиба пластины в своей плоскости. Распределение усилий по торцам пластины показано на рис. 4.7.

3. Ранее мы рассматривали полиномы второй и третьей степеней. Пусть теперь φ выражается полиномом четвертой степени

$$\varphi_4 = \frac{a_4}{12} x^4 + \frac{b_4}{6} x^3 y + \frac{c_4}{2} x^2 y^2 + \frac{d_4}{6} x y^3 + \frac{e_4}{12} y^4. \quad (4.17)$$

Полином (4.17) удовлетворяет бигармоническому уравнению не при любых значениях коэффициентов. Если подставить (4.17) в бигармоническое уравнение, то получим следующее соотношение, связывающее коэффициенты полинома:

$$a_4 + 2c_4 + e_4 = 0. \quad (4.18)$$

Остальные коэффициенты (b_4 и d_4), входящие в выражение (4.17), могут быть произвольными.

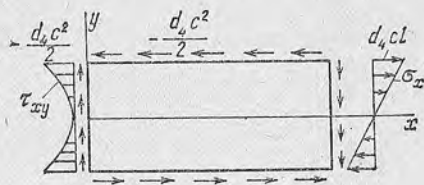


Рис. 4.8.

Если принять все коэффициенты, входящие в выражение (4.17), кроме d_4 , равными нулю, т. е. считать, что $\varphi_4 = \frac{d_4}{6}xy^3$, то бигармоническое уравнение будет удовлетворяться при любом значении коэффициента d_4 . При таком задании функции напряжений

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial y^2} = d_4 xy, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x^2} = 0, \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x \partial y} = -\frac{d_4}{2}y^2.$$

Нормальные напряжения σ_x зависят линейно как от координаты x , так и от координаты y . Касательные напряжения не зависят от координаты x , а по координате y изменяются по закону параболы. Такому виду функции напряжений соответствуют статические граничные условия, показанные на рис. 4.8. На левой кромке действуют только касательные напряжения, изменяющиеся по параболе. По верхней и нижней кромкам действуют только постоянные по величине касательные напряжения, равные $\tau_{xy} = -d_4 c^2 / 2$, а по правому торцу действуют как касательные усилия, распределяющиеся по параболе, так и нормальные, изменяющиеся по линейному закону.

Если принять, что все коэффициенты полинома (4.17), кроме b_4 , равны нулю, то мы получим условия нагружения,

аналогичные тем, которые были рассмотрены ранее, но картина нагружения будет повернута на 90° . В этом случае $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = b_4 xy$, $\tau_{xy} = -\frac{b_4}{2}x^2$.

Возможно применение полиномов и более высокого порядка.

§ 21. Изгиб консоли силой, приложенной на конце

Рассмотрим задачу об изгибе консоли длиной l , высотой $2c$ и толщиной, равной 1, нагруженной силой P , приложенной на конце (рис. 4.9). Решение задачи получим, если используем принцип суперпозиции и представим функцию φ в виде суммы рассмотренных ранее полиномов четвертой и второй степеней:

$$\varphi = \varphi_4 + \varphi_2 = \frac{d_4}{6}xy^3 + b_2 xy. \quad (4.19)$$

Функция напряжений в виде (4.19), как следует из предыдущего, удовлетворяет основному уравнению плоской задачи. Запишем выражения для напряжений

$$\sigma_x = d_4 xy, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{d_4}{2}y^2 - b_2.$$

Для того чтобы функция (4.19) удовлетворяла граничным условиям, необходимо потребовать, во-первых, чтобы касательные напряжения на верхней и нижней кромках полосы были равны нулю и, во-вторых, чтобы равнодействующая касательных усилий на левой кромке ($x=0$) была равна приложенной силе P .

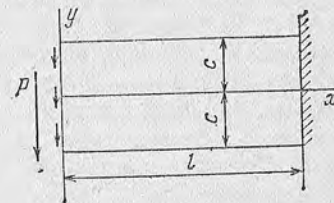


Рис. 4.9.

Первое условие удовлетворяется, если мы потребуем, чтобы τ_{xy} при $y = \pm c$ было равно нулю:

$$-\frac{d_4}{2}c^2 - b_2 = 0, \quad \text{откуда} \quad b_2 = -\frac{d_4}{2}c^2.$$

Второе условие удовлетворяется, если мы проинтегрируем выражение для τ_{xy} по высоте полосы и приравняем

результат интегрирования силе P :

$$\begin{aligned} \int_{-c}^c \tau_{xy} dy &= - \int_{-c}^c \left(\frac{d_4}{2} y^2 + b_2 \right) dy = \\ &= - \int_{-c}^c \left(\frac{d_4}{2} y^2 - \frac{d_4}{2} c^2 \right) dy = \frac{2}{3} d_4 c^3 = P. \end{aligned}$$

Отсюда $d_4 = \frac{3}{2} \frac{P}{c^3}$, а $b_2 = -\frac{3}{4} \frac{P}{c}$.

Подставив найденные значения коэффициентов полинома в (4.19), получим

$$\varphi = \frac{P}{4c^3} xy^3 - \frac{3}{4} \frac{P}{c} xy. \quad (4.20)$$

Теперь найдем выражения для напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} :

$$\sigma_x = \frac{3}{2} \frac{P}{c^3} xy, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \frac{3}{4} \frac{P}{c} \left[1 - \left(\frac{y}{c} \right)^2 \right]. \quad (4.21)$$

Из приведенных выражений для напряжений видно, что они совпадают с теми, которые известны из курса сопротивления материалов.

В самом деле, выражение для нормальных напряжений σ_x можно представить в следующем виде: $\sigma_x = \frac{M(x)}{I_z} y$, где $M(x) = Px$, а $I_z = 2c^3/3$ для полосы, имеющей толщину, равную 1. Выражение для касательных напряжений также полностью согласуется с известной формулой Журавского для касательных напряжений при изгибе балки. Касательные напряжения по высоте сечения распределяются по параболе. Следовательно, и приложенная на торце балки сила P тоже должна быть распределена по высоте сечения по параболе.

Используя уравнения закона Гука, найдем выражения для деформаций ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} :

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{3P}{2Ec^3} xy, \quad \epsilon_y = -\mu \frac{3P}{2Ec^3} xy, \\ \gamma_{xy} &= \frac{3(1+\mu)}{2E} \frac{P}{c} \left[1 - \left(\frac{y}{c} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Далее, проинтегрировав уравнения Коши, можно получить и выражения для перемещений u , v . Постоянные ин-

тегрирования могут быть получены из условия закрепления консоли. При этом оказывается, что гипотеза плоских сечений не подтверждается. Плоские (до деформации) сечения в результате деформации сдвига перестают быть плоскими.

Таким образом, для консоли, нагруженной на конце силой P , распределение нормальных и касательных напряжений по высоте сечения соответствует тому, которое известно из курса сопротивления материалов, если сила P распределена на торце по параболе, а заделанный конец не имеет стеснений для деформаций. Если же в заделке имеются стеснения для перемещений u и v , то закон для нормальных и касательных напряжений в сечениях полосы изменится. Однако это изменение согласно принципу Сен-Венана будет захватывать область вблизи заделки, а в сечениях вдали от заделки напряжения по-прежнему будут характеризоваться выражениями (4.21).

§ 22. Изгиб прямоугольной полосы на двух опорах под равномерно распределенной нагрузкой

Рассмотрим задачу об изгибе полосы длиной $2l$, высотой $2c$ и толщиной, равной 1, нагруженной равномерно распределенной по длине нагрузкой интенсивностью q (рис. 4.10). Будем полагать, что полоса свободно опирается по краям. На боковые кромки действуют реактивные усилия, равные ql , а продольная сила и момент на этих кромках равны нулю.

Таким образом, граничные условия для полосы можно записать в следующем виде:

- а) для верхней кромки ($y = c$) $\tau_{xy} = 0$, $\sigma_y = -q$;
- б) для нижней кромки ($y = -c$) $\tau_{xy} = 0$, $\sigma_y = 0$;
- в) для боковых кромок ($x = 0$, $x = 2l$)

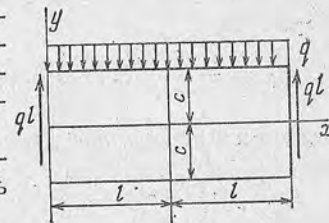


Рис. 4.10.

$$N_x = \int_{-c}^c \sigma_x dy = 0, \quad M_z = \int_{-c}^c \sigma_x y dy = 0.$$

Граничные условия для боковых кромок записаны в интегральной форме на основании принципа Сен-Венана, согласно которому характер распределения статически экви-

валентных нагрузок оказывает влияние на величину и распределение напряжений в ограниченной области тела вблизи места приложения внешних нагрузок.

Для рассматриваемой задачи в случае отсутствия объемных сил уравнения равновесия и совместности деформаций через напряжения запишем в виде (4.1) и (4.9), т. е.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (4.22)$$

Следуя Н. И. Безухову, вначале предположим, что напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} определяются известными выражениями из курса сопротивления материалов. Затем, подставив эти выражения в уравнения равновесия и совместности деформаций (4.22), потребуем, чтобы эти уравнения удовлетворялись. Из условий на кромках полосы определим произвольные постоянные интегрирования.

Итак, в первом приближении представим, что

$$\sigma_x = \frac{M(x)}{I_z} y = -\frac{qlx - qx^2/2}{I_z} y, \quad \sigma_y = 0,$$

$$\tau_{xy} = \frac{QS}{I_z \cdot 1} = \frac{(ql - qx) \frac{c^2}{2} \left[1 - \left(\frac{y}{c} \right)^2 \right]}{I_z}.$$

Учитывая, что $I_z = 2/3 c^3$, для σ_x и τ_{xy} получим следующие выражения:

$$\sigma_x = -\frac{3}{2} \frac{q}{c^3} \left(l - \frac{x}{2} \right) xy, \quad \tau_{xy} = -\frac{3q}{4c^3} (l - x) (c^2 - y^2).$$

Возьмем производные от σ_x , τ_{xy} , σ_y :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{3q}{2c^3} (l - x) y, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = \frac{3q}{2c^3} (l - x) y,$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \frac{3q}{4c^3} (c^2 - y^2), \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0.$$

Подставляя полученные выражения в первое и второе уравнения равновесия (4.22), находим, что первое уравнение удовлетворяется, а второе уравнение не удовлетворяется.

Однако первое уравнение будет удовлетворяться и в том случае, если выражение для σ_x будет содержать еще некоторую функцию от y , т. е. напряжение σ_x можно представить в виде двух слагаемых, первое из которых — выражение, известное из курса сопротивления материалов, а вто-

рое — неизвестная функция от y :

$$\sigma_x = -\frac{3q}{2c^3} \left(l - \frac{x}{2} \right) xy + f_1(y). \quad (4.23)$$

Из второго уравнения равновесия находим выражение для $\partial \sigma_y / \partial y$:

$$\frac{3q}{4c^3} (c^2 - y^2) + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad \text{откуда} \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\frac{3q}{4c^3} (c^2 - y^2).$$

Проинтегрируем последнее выражение и найдем

$$\sigma_y = -\frac{3q}{4c^3} \left(c^2 y - \frac{y^3}{3} \right) + f_2(x). \quad (4.24)$$

Для определения неизвестной функции $f_2(x)$ воспользуемся граничными условиями для σ_y на верхней и нижней кромках. При $y = c$ $\sigma_y = -q$, т. е.

$$-\frac{3q}{4c^3} \left(c^3 - \frac{c^3}{3} \right) + f_2(x) = -q,$$

откуда $f_2(x) = -q/2$.

Проверим выполнение второго граничного условия на нижней кромке. При $y = -c$ $\sigma_y = 0$, т. е.

$$-\frac{3q}{4c^3} \left(-c^3 + \frac{c^3}{3} \right) + f_2(x) = 0.$$

Действительно, если вместо $f_2(x)$ подставить полученное ранее значение $-q/2$, то условие на нижней кромке также удовлетворяется.

Подставим найденные значения σ_y и σ_x в уравнение совместности деформаций (третье уравнение (4.22)). Для этого сначала определим вторые производные от σ_x и σ_y по x и y :

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = \frac{3q}{2c^3} y, \quad \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} = f_1''(y),$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = \frac{3q}{2c^3} y.$$

После подстановки найденных производных в (4.22) будем иметь $\frac{3q}{c^3} y + f_1''(y) = 0$, откуда $f_1''(y) = -\frac{3q}{c^3} y$.

В результате двойного интегрирования получим функцию $f_1(y)$:

$$f_1(y) = -\frac{q}{2c^3}y^3 + C_1y + C_2.$$

Выражение для σ_x получит вид

$$\sigma_x = -\frac{3q}{2c^3}\left(l - \frac{x}{2}\right)xy - \frac{q}{2c^3}y^3 + C_1y + C_2. \quad (4.25)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 найдем из граничных условий для боковых кромок при $x=0$, $2l$:

$$\int_{-c}^c \sigma_x dy = 0, \quad \int_{-c}^c \sigma_{xy} dy = 0.$$

Первый интеграл дает $\int_{-c}^c \sigma_x dy = -\frac{q}{2c^3}\left[\frac{y^4}{4}\right]_{-c}^c + C_1\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-c}^c +$

$+ C_2|y|_{-c}^c = 0$. Четные функции y в интервале от $-c$ до

$+c$ равны нулю, следовательно, $C_2=0$.

Используя второе граничное условие, имеем

$$\int_{-c}^c \sigma_{xy} dy = \left[-\frac{q}{10c^3}y^5\right]_{-c}^c + C_1\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-c}^c = 0.$$

После сокращений для C_1 получим $C_1 = 3q/10c$. Теперь выражение для σ_x приобретает следующий вид:

$$\sigma_x = -\frac{3q}{2c^3}\left(l - \frac{x}{2}\right)xy - \frac{q}{2c^3}y^3 + \frac{3q}{10c}y. \quad (4.26)$$

Таким образом, мы убедились, что найденные значения σ_x , σ_y , τ_{xy} удовлетворяют уравнениям равновесия и совместности деформаций. Кроме того, σ_y и τ_{xy} удовлетворяют граничным условиям по верхней и нижней кромкам в каждой точке, а что касается удовлетворения граничным условиям по боковым кромкам, то τ_{xy} и σ_x удовлетворяют этим условиям в интегральном смысле. Реакция опор на боковых кромках для точного удовлетворения граничным условиям должна быть распределена по параболе. Нормальные напряжения на боковых кромках не равны нулю, но их равнодействующая и момент равны нулю.

Принимая во внимание принцип Сен-Венана, можно утверждать, что иное распределение напряжений на торцах, чем внешняя нагрузка, при условии их статической эквивалентности приведет лишь к местному перераспределению напряжений вблизи торцов. На достаточном же удалении от торцов (большем, чем высота полосы) влияние местных торцовых эффектов будет незначительным.

Сравнивая решение задачи об изгибе полосы, полученное методами теории упругости, с решением аналогичной задачи методами сопротивления материалов, замечаем, что при точном решении задачи напряжения σ_y не равны нулю, т. е. волокна падают друг на друга, и напряжения σ_y изменяются по высоте сечения по закону кубической параболы. Нормальные осевые напряжения имеют отличающийся от линейного закон распределения напряжений, однако уточнения, вносимые двумя последними членами выражения (4.26), невелики. Распределение касательных напряжений по высоте полосы (при условии, что P на торцах распределено по такому же закону) соответствует тому, которое получается из элементарной теории изгиба балок.

§ 23. Треугольная подпорная стенка

Рассмотрим задачу о напряженном состоянии подпорной стенки треугольного сечения (рис. 4.11). Предполагаем, что подпорная стенка имеет большую длину в направлении координаты z . Поэтому можно считать, что все деформации в направлении оси z равны нулю. Таким образом, подпорная стенка, нагруженная гидростатическим давлением γy , действующим на вертикальную стенку, и собственным весом материала стенки, находится в условиях плоской деформации. Через γ обозначим удельный вес жидкости, оказывающей давление на стенку, через ρ — вес единицы объема материала стенки.

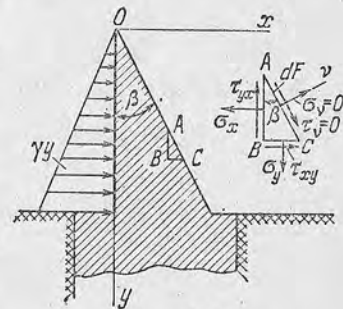


Рис. 4.11.

Примем, что стенка достаточно глубоко простирается в грунт, и поэтому граничные условия на этом участке стенки являются несущественными при рассмотрении напряженного состояния участка стенки, нагруженного гидростати-

ческим давлением. Таким образом, будем принимать во внимание только граничные условия по вертикальному и наклонному краям стенки.

На вертикальной грани ($x=0$) действует только гидростатическое давление. Граничные условия здесь будут

$$\sigma_x = -\gamma y, \quad \tau_{xy} = 0. \quad (4.27)$$

На боковой грани ($x = y \operatorname{tg} \beta$) все поверхностные силы равны нулю. Для этой грани граничные условия получим из уравнений равновесия элемента ABC , показанного на рис. 4.11. Так как $\sigma_v = \tau_v = 0$, то и проекции внешних сил на направления x и y также будут равны нулю, т. е. $\bar{X}_v = 0$,

$\bar{Y}_v = 0$. Тогда, имея в виду, что $\cos(\nu, x) = l = \cos \beta$, $\cos(\nu, y) = m = -\sin \beta$, граничные условия для боковой грани стенки будут иметь вид

$$\sigma_x l + \tau_{xy} m = 0, \quad \tau_{xy} l + \sigma_y m = 0,$$

или

$$\sigma_x \cos \beta - \tau_{xy} \sin \beta = 0, \quad (4.28)$$

$$\tau_{xy} \cos \beta - \sigma_y \sin \beta = 0. \quad (4.29)$$

Основное уравнение плоской задачи в случае учета действия объемных сил запишется в виде (4.13). В рассматриваемой задаче объемная сила $X=0$, а $Y=p$. Следовательно, потенциал объемных сил будет равен $U = -py$. Тогда $\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + U$, $\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + U$, $\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$, или, подставив вместо U записанное выше выражение, получим

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - py, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - py. \quad (4.30)$$

Примем функцию φ в виде полинома третьей степени:

$$\varphi = \frac{a_3}{6} x^3 + \frac{b_3}{2} x^2 y + \frac{c_3}{2} xy^2 + \frac{d_3}{6} y^3. \quad (4.31)$$

Этот полином имеет четыре произвольных постоянных, величины которых могут быть определены из четырех граничных условий (4.27)–(4.29). Полином третьей степени удовлетворяет основному уравнению плоской задачи.

Таким образом, если мы из граничных условий подберем коэффициенты полинома a_3, b_3, c_3, d_3 так, чтобы удов-

летворялись условия равновесия на границах, то тем самым будут удовлетворены все уравнения плоской задачи.

Выражения для напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ представим в следующем виде:

$$\sigma_x = c_3 x + d_3 y - py, \quad \sigma_y = a_3 x + b_3 y - py, \\ \tau_{xy} = -(b_3 x + c_3 y).$$

Из граничных условий (4.27) найдем значения коэффициентов c_3 и d_3 . Из условия $\tau_{xy} = 0$ получим $c_3 = 0$. Из условия $\sigma_x = -\gamma y$ получим $d_3 = p - \gamma$. После подстановки найденных значений коэффициентов в выражения для напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ получим

$$\sigma_x = -\gamma y, \quad \sigma_y = a_3 x + b_3 y - py, \quad \tau_{xy} = -b_3 x.$$

Теперь используем граничные условия (4.28), (4.29) для определения оставшихся коэффициентов a_3 и b_3 . Из (4.28), имея в виду, что $x = y \operatorname{tg} \beta$, получим

$$-\gamma y \cos \beta + b_3 y \operatorname{tg} \beta \sin \beta = 0, \quad \text{откуда } b_3 = \frac{\gamma}{\operatorname{tg}^2 \beta}.$$

Из (4.29) найдем a_3 , предварительно подставив в выражение для σ_y найденное значение коэффициента b_3 :

$$\left(a_3 y \operatorname{tg} \beta + \frac{\gamma}{\operatorname{tg}^2 \beta} y - py \right) \sin \beta + \frac{\gamma}{\operatorname{tg}^2 \beta} y \operatorname{tg} \beta \cos \beta = 0,$$

откуда

$$a_3 = \frac{p}{\operatorname{tg} \beta} - \frac{2\gamma}{\operatorname{tg}^3 \beta}.$$

После подстановки всех найденных значений коэффициентов в исходные выражения для напряжений получим

$$\sigma_x = -\gamma y, \quad \sigma_y = \left(\frac{p}{\operatorname{tg} \beta} - \frac{2\gamma}{\operatorname{tg}^3 \beta} \right) x + \left(\frac{\gamma}{\operatorname{tg}^2 \beta} - p \right) y, \quad (4.32) \\ \tau_{xy} = -\frac{\gamma}{\operatorname{tg}^2 \beta} x.$$

Выражения (4.32) для нормальных и касательных напряжений характеризуют напряженное состояние треугольной подпорной стенки. Отметим, что полученное решение является точным решением, так как оно удовлетворяет всем уравнениям равновесия как внутри, так и на границах тела и уравнениям совместности деформаций.

Выражения (4.32) показывают, что в сечении треугольной стенки $y = \text{const}$ нормальные напряжения σ_x не зависят от координаты x , а напряжения σ_y и τ_{xy} распределены по линейному закону. Элементарное решение методами сопротивления материалов для τ_{xy} дает распределение по параболе, а не линейное.

§ 24. Решение плоской задачи при помощи рядов Фурье

Для решения основного дифференциального уравнения плоской задачи можно применить метод разделения переменных, представив функцию напряжений φ в виде произведения двух функций $f(y)$ и $\psi(x)$, каждая из которых зависит только от одного аргумента. Если при этом функцию $\psi(x)$ представить в виде ряда по синусам или косинусам, то бигармоническое уравнение можно преобразовать в обычное линейное однородное дифференциальное уравнение, решение которого хорошо известно.

Такой подход к решению задачи об изгибе балки (стенки) был применен Рибьером (1899 г.), Файлоном (1903 г.) и, независимо от них, русским инженером-путейцем Белзетским (1905 г.).

Рассмотрим вначале случай, когда функция $\psi(x) = \sin \alpha x$, где $\alpha = m\pi/l$, l — длина балки, а m — целое число. Функцию напряжений φ можно записать в виде

$$\varphi = f(y) \sin \alpha x. \quad (4.33)$$

В таком виде функция φ была представлена Файлоном.

Подставив (4.33) в бигармоническое уравнение, получим следующее обыкновенное линейное однородное дифференциальное уравнение четвертого порядка:

$$f^{IV}(y) - 2\alpha^2 f''(y) + \alpha^4 f(y) = 0. \quad (4.34)$$

Как известно, общее решение уравнения (4.34) можно записать в виде

$$f(y) = C_1 \operatorname{sh} \alpha y + C_2 \operatorname{ch} \alpha y + C_3 y \operatorname{sh} \alpha y + C_4 y \operatorname{ch} \alpha y. \quad (4.35)$$

Функция (4.33) удовлетворяет условию отсутствия нормальных напряжений на торцах балки. Постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 определяются из граничных условий задачи.

Аналогичное решение может быть получено и в том случае, если функцию напряжений φ представить в виде

$$\varphi = f(y) \cos \alpha x. \quad (4.36)$$

Такое выражение для φ принимал в решении плоской задачи Рибьер.

После подстановки (4.36) в бигармоническое уравнение мы снова получим уравнение (4.34). Однако при таком задании функции φ нормальные напряжения на торцах балки не будут равными нулю.

При задании функции напряжений в виде (4.33) при $x=0, l$ $\sigma_x = 0$, $\tau_{xy} \neq 0$, $v = 0$, $u \neq 0$. Такие условия соответствуют свободно опертой по краям балке (рис. 4.12, а).

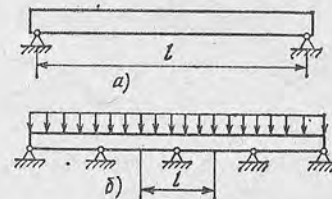


Рис. 4.12.

В случае, если функция напряжений задается в виде (4.36), то при $x=0, l$ $\sigma_x \neq 0$, $\tau_{xy} = 0$, $v \neq 0$, $u = 0$. Такие граничные условия имеют место в симметрично нагруженной многоопорной балке для участка между серединами пролета (рис. 4.12, б).

Большим преимуществом метода решения плоской задачи с помощью тригонометрических рядов по сравнению с использованием для этой цели целых полиномов является то, что с помощью тригонометрических рядов можно отыскать решение для балки, нагруженной по верхней и нижней кромкам нагрузкой, распределенной по любому произвольному закону.

Любую поперечную нагрузку, действующую по верхней и нижней кромкам, можно разложить в ряды Фурье и представить выражениями

$$q_v = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin \frac{m\pi x}{l} + \sum_{m=1}^{\infty} a'_m \cos \frac{m\pi x}{l}, \quad (4.37)$$

$$q_n = b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin \frac{m\pi x}{l} + \sum_{m=1}^{\infty} b'_m \cos \frac{m\pi x}{l}. \quad (4.38)$$

Таким образом, общую задачу можно разделить на ряд частных задач. Любая нагрузка представляется как сумма равномерно распределенной нагрузки и синусоидальных нагрузок. Применяя принцип суперпозиции, рассматриваем отдельно задачу изгиба балки от действия равномерно

распределенной нагрузки и от действия синусоидальной нагрузки. Первую задачу удобно решать с помощью полиномов, а вторую — с помощью тригонометрических рядов. Складывая ряд частных решений, мы найдем решение общей задачи.

Так, если в выражениях (4.37), (4.38) ограничиться n членами разложения, то и функцию φ также представим в виде разложения в ряд по синусам с n членами. Тогда

$$\varphi = \sum_{m=1}^n \sin \frac{m\pi x}{l} \left(C_{1m} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{l} + C_{2m} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{l} + C_{3m} y \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{l} + C_{4m} y \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{l} \right). \quad (4.39)$$

Выражение (4.39) содержит $4n$ произвольных постоянных C_{im} , которые определяются из граничных условий:

$$\text{при } y = c \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = q_v, \quad -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = t_v,$$

$$\text{при } y = -c \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = q_n, \quad -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = t_n.$$

Из вида функции для φ (4.39) следует, что на касательные усилия, приложенные к верхней и нижней кромкам

$$t_v \text{ и } t_n, \text{ должно быть наложено ограничение } \int_0^l t_v dx = 0,$$

$$\int_0^b t_n dx = 0, \text{ т. е. эти усилия на кромках должны самоуравновешиваться.}$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ И ЗАДАЧИ

- ✓ 1. Что называется плоской деформацией?
- ✓ 2. Какое напряженное состояние называется обобщенным плоским?
- ✓ 3. Как записываются уравнения равновесия в случае обобщенного плоского напряженного состояния?
- ✓ 4. Как выглядит условие неразрывности Сен-Венана в случаях плоского напряженного состояния и плоской деформации?
- ✓ 5. Какой вид приобретает условие неразрывности в случае применения функции напряжений (функции Эри)?
- ✓ 6. Как записать статические условия на границах тела через функцию напряжений?
- ✓ 7. Покажите, что при использовании функции напряжений уравнения равновесия плоской задачи удовлетворяются тождественно.

8. Как следует записать выражение для напряжений через функцию напряжений в случае действия объемных сил, потенциал которых равен U ?

9. Какой вид будет иметь основное уравнение плоской задачи в случае действия объемных сил с потенциалом U ?

✓ 10. Удовлетворяют ли основному уравнению плоской задачи следующие выражения для функций напряжения:

- 1) $\varphi = a_2 x^2$; 2) $\varphi = b_2 xy$; 3) $\varphi = c_2 y^2$; 4) $\varphi = a_3 x^3$;
- 5) $\varphi = b_3 x^2 y$; 6) $\varphi = c_3 xy^2$; 7) $\varphi = d_3 y^3$; 8) $\varphi = a_4 x^4$?

Каким граничным условиям соответствуют эти функции?

11. Удовлетворяет ли граничным условиям функция $\varphi = axy^3$? Как выражаются нормальные σ_x и касательные τ_{xy} напряжения при выборе функции φ в таком виде? Как изменяются они в зависимости от координат x и y ?

12. В каком виде выбирают функцию φ при решении задачи об изгибе консоли силой P , приложенной на конце?

13. Удовлетворяет ли основному уравнению плоской задачи функция φ , заданная в следующем виде:

$$\varphi = k_1 x^5 - 5k_1 xy^4 + k_2 x^3 y^2$$

14. При каких условиях удовлетворяет бигармоническому уравнению полином четвертой степени следующего вида:

$$\varphi = a_4 x^4 + b_4 x^3 y + c_4 x^2 y^2$$

15. Чем отличается распределение σ_x по высоте балки, лежащей на двух опорах и нагруженной распределенной по ее длине нагрузкой, полученное методами теории упругости, от элементарного решения, полученного методами сопротивления материалов?

16. В каком виде принимается функция напряжений φ при решении задачи о напряженном состоянии треугольной стенки, нагруженной гидростатическим давлением?

17. В чем преимущество применения тригонометрических рядов вместо полиномов для функции напряжений φ при решении плоской задачи?

18. Задача. Для подпорной треугольной стенки, изображенной на рис. 4.11, определить компоненты напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} для сечения при $y = 2$ м и построить эпюры напряжений. Дано: $\gamma = 10$ кН/м³, $p = 15$ кН/м², $\beta = 30^\circ$.

Ответ. $\sigma_x = -20$ кПа, $(\sigma_y)_{x=0} = 30$ кПа, $(\sigma_y)_{x=x_{\max}} = -60$ кПа, $(\tau_{xy})_{x=x_{\max}} = -35$ кПа.

Глава 5

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

§ 25. Основные уравнения плоской задачи в полярных координатах

Иногда решение плоской задачи теории упругости целесообразно выполнять не в декартовых, а в полярных координатах. Например, в случаях исследования напряженного и деформированного состояния в дисках, толстостенных трубах, около круглых отверстий в пластинах и т. п.

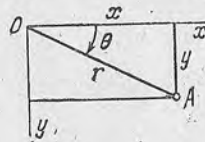


Рис. 5.1.

Установим связь между полярными и декартовыми координатами (рис. 5.1).

В декартовых координатах положение точки *A* на плоскости определяется координатами *x*, *y*, а в полярных координатах — углом θ и величиной радиуса *r*.

При этом

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \arctg \frac{y}{x}.$$

Из первого соотношения определим частные производные $\partial r / \partial x$ и $\partial r / \partial y$. Продифференцировав первое равенство сначала по *x*, а затем по *y*, получим

$$2r \frac{\partial r}{\partial x} = 2x, \text{ откуда } \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \theta,$$

$$2r \frac{\partial r}{\partial y} = 2y, \text{ откуда } \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \theta.$$

Беря частные производные по *x* и *y* от функции $\theta = \arctg (y/x)$, получим

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x} \right)}{1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2} = - \frac{\frac{y}{x^2}}{(x^2 + y^2)/x^2} = - \frac{y}{r^2},$$

т. е. $\partial \theta / \partial x = -(\sin \theta) / r$. Аналогично получим $\partial \theta / \partial y = (\cos \theta) / r$.

Таким образом, мы имеем следующую сводку формул, устанавливающих связь между полярными и декартовыми координатами, и частных производных полярных по декартовым координатам:

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \arctg \frac{y}{x}, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta, \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = - \frac{\sin \theta}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r}. \quad (5.3)$$

Рассмотрим равновесие элемента *abcd* (рис. 5.2), имеющего центральный угол $d\theta$ и ограниченного двумя дугами окружности радиуса *r* и $r + dr$. Будем предполагать, что толщина выделенного элемента равна 1. Обозначим

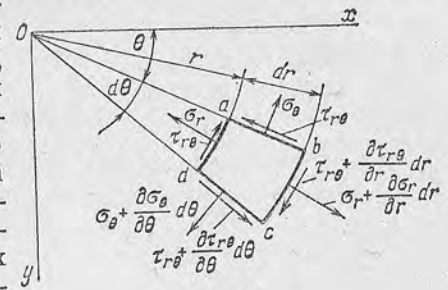


Рис. 5.2.

нормальные напряжения, действующие по граням выделенного элемента, через σ_r и σ_θ , а касательные напряжения $\tau_{r\theta}$. На рис. 5.2 показаны положительные направления нормальных и касательных напряжений в соответствии с тем правилом, которое было принято нами ранее (см. гл. 1, § 1). Считаем, что объемные силы отсутствуют.

Спроектируем все силы, действующие на грани элемента, на направление оси *r*. При этом будем полагать, что $\cos d\theta = 1$, а $\sin d\theta = d\theta$ ввиду малости угла $d\theta$. Тогда нормальные усилия, действующие по граням *ad* и *bc*, и касательные усилия, действующие по граням *ab* и *cd*, проектируются на ось *r* полной величиной, а нормальные усилия, действующие по граням *ab* и *cd*, при проектировании умножаются на угол $d\theta/2$.

Таким образом, сумма проекций всех усилий, действующих на элемент *abcd*, на направление оси *r* будет равна

$$-\sigma_r r d\theta + \left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta - \tau_{r\theta} dr + \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr - \sigma_\theta dr \frac{d\theta}{2} - \left(\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr \frac{d\theta}{2} = 0.$$

Пренебрегая малыми более высокого порядка, после сокращения получим следующее уравнение равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{r \partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0.$$

Теперь спроектируем все усилия на направление оси,

перпендикулярной к радиусу r :

$$\begin{aligned}
 & -\tau_{r\theta} d\theta + \tau_{r\theta} dr \frac{d\theta}{2} - \sigma_\theta dr + \\
 & + \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta + \\
 & + \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr \frac{d\theta}{2} + \left(\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr = 0.
 \end{aligned}$$

После сокращений и пренебрежения малыми более высокого порядка малости получим второе уравнение равновесия

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_\theta}{r \partial \theta} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} = 0.$$

Таким образом, в случае плоской задачи уравнения равновесия выделенного внутри тела элемента в полярной

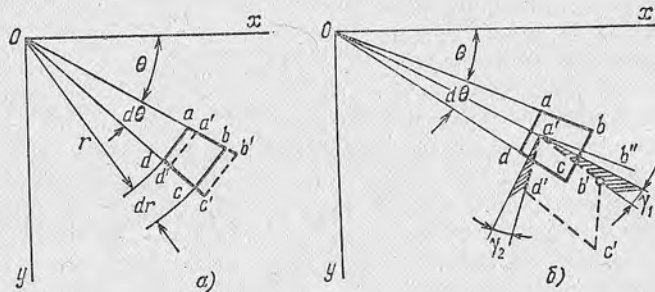


Рис. 5.3.

системе координат при отсутствии объемных сил запишутся в виде

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{r \partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_\theta}{r \partial \theta} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} = 0. \quad (5.5)$$

Рассмотрим теперь определение линейных и угловых деформаций. Перемещения в направлении радиуса r будем обозначать через u , а в направлении, перпендикулярном к радиусу r , через v .

В случае осесимметричной деформации (рис. 5.3, а) точки будут перемещаться только в радиальном направлении.

Элемент $abcd$ после деформации займет положение $a'b'c'd'$. При этом $aa' = dd' = u$, а $bb' = cc' = u + \frac{\partial u}{\partial r} dr$.

Изменение длины отрезка $ab = dr$ произойдет на величину $\frac{\partial u}{\partial r} dr$, и относительное удлинение в радиальном направлении будет $\epsilon_r = \partial u / \partial r$.

Изменение длины элемента в окружном направлении (в направлении, перпендикулярном к радиусу r) произойдет вследствие увеличения радиуса r на величину u . При этом первоначальная длина дуги элемента $\widehat{ad} = r d\theta$ изменится и станет $\widehat{a'd'} = (r + u) d\theta$. Относительное изменение длины $\epsilon_\theta = u/r$. Угловая деформация равна нулю.

В случае неосесимметричной деформации (рис. 5.3, б) наряду с перемещениями в радиальном направлении u , зависящими не только от координаты r , как это имело место при осесимметричной деформации, но и от θ , появятся также перемещения v , являющиеся функцией r и θ . Элемент $abcd$ после деформации займет положение $a'b'c'd'$. Перемещение точки a в радиальном и окружном направлениях будет соответственно u и v . Перемещение точки d в радиальном направлении будет $u + \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta$, а в окружном $v + \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta$. Перемещение точки b в радиальном направлении равно $u + \frac{\partial u}{\partial r} dr$, а в окружном $v + \frac{\partial v}{\partial r} dr$.

Относительное удлинение в радиальном направлении, как и прежде, будет равно $\epsilon_r = \frac{a'b' - ab}{ab} = \frac{\partial u}{\partial r}$, а величина удлинения в окружном направлении ϵ_θ будет определяться не только изменением радиуса на величину u , но также и разницей в перемещениях точек a и d в окружном направлении. Таким образом, полная величина деформации в окружном направлении $\epsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta}$.

Рассмотрим теперь угловую деформацию $\gamma_{r\theta}$. Величина искажения прямого угла между сторонами $a'b'$ и $a'd'$, как видно из рис. 5.3, б, состоит из суммы двух углов γ_1 и γ_2 .

Угол γ_1 равен разности углов $\widehat{b''a'b'}$ и $\widehat{a'Oa}$,

$$\widehat{b''a'b'} = \frac{\partial v}{\partial r} dr, \quad \widehat{a'Oa} = \frac{v}{r},$$

т. е. $\gamma_1 = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}$. Угол γ_2 определяется разностью радиаль-

ных перемещений точек a и d , т. е.

$$\gamma_2 = \frac{\frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta}{r d\theta} = \frac{\partial u}{r \partial \theta}.$$

Окончательно угол сдвига

$$\gamma_{r\theta} = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}.$$

Таким образом, окончательно линейные и угловые деформации в полярных координатах можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{u}{r}, \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Далее рассмотрим физические уравнения, устанавливающие связь между напряжениями и деформациями при обобщенном плоском напряженном состоянии. В полярных координатах уравнения закона Гука имеют следующий вид:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu \sigma_\theta), \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \mu \sigma_r), \quad (5.7)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{r\theta},$$

или

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_r + \mu \varepsilon_\theta), \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_\theta + \mu \varepsilon_r), \quad (5.8)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{r\theta}.$$

Таким образом, для решения плоской задачи в полярных координатах и определения напряженного и деформированного состояния упругого тела мы имеем уравнения равновесия (5.4), (5.5), геометрические уравнения (5.6) и физические уравнения (5.7) или (5.8).

Плоскую задачу можно решать либо в перемещениях, либо в напряжениях. В первом случае необходимо напряжения σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ представить через перемещения u , v и подставить в уравнения равновесия (5.4), (5.5). Если выражения для ε_r , ε_θ и $\gamma_{r\theta}$ по (5.6) подставить в (5.8), то

получим

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \mu \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \mu \frac{u}{r} \right), \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{u}{r} + \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right), \\ \tau_{r\theta} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Далее, подставив (5.9) в уравнения равновесия (5.4), (5.5), найдем выражения уравнений равновесия в перемещениях

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{r \partial \theta \partial r} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \\ - \frac{3-\mu}{2r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u}{r^2} = 0, \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{r \partial \theta \partial r} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{3-\mu}{2r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \\ + \frac{1-\mu}{2r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1-\mu}{2} \frac{v}{r^2} = 0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Решение плоской задачи в перемещениях сводится к отысканию таких функций перемещений $u(r, \theta)$, $v(r, \theta)$, которые бы удовлетворяли уравнениям равновесия (5.10), (5.11) и условиям на границах тела. При решении задачи в перемещениях условия совместности деформаций удовлетворяются тождественно.

Другой путь — решение плоской задачи в напряжениях. Подобно тому, как это было сделано при решении плоской задачи в декартовых координатах, подберем выражения для напряжений через функцию Φ в таком виде, чтобы удовлетворялись уравнения равновесия (5.4) и (5.5).

Пусть

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Если подставить (5.12) в (5.4) и (5.5), то можно легко убедиться в том, что эти уравнения превращаются в тождества.

Следовательно, выбранные выражения для напряжений σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ через функцию напряжений φ действительно удовлетворяют уравнениям равновесия плоской задачи в полярных координатах.

Для составления основного уравнения плоской задачи в полярных координатах с помощью функции напряжений воспользуемся выражениями уравнения совместности деформаций через функцию φ (бигармоническое уравнение) и преобразуем его из декартовых в полярные координаты. При этом мы воспользуемся соотношениями (5.1), (5.3).

Основное уравнение плоской задачи в декартовых координатах имеет вид

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0.$$

Так как φ есть функция от полярных координат r , θ , которые связаны с декартовыми соотношениями (5.1), (5.3), то, используя правила дифференцирования сложной функции, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} \sin \theta, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} \sin \theta \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} \sin \theta \right) \frac{\partial \theta}{\partial x}. \end{aligned}$$

После раскрытия скобок и почленного дифференцирования будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \cos^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{r \partial \theta \partial r} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\sin^2 \theta}{r} + \\ &\quad + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Аналогично можно получить выражение второй производной от функции напряжений φ по y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{r \partial \theta \partial r} \sin \theta \cos \theta + \\ &\quad + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\cos^2 \theta}{r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \cos^2 \theta, \end{aligned} \quad (5.14)$$

Складывая (5.13) и (5.14), найдем

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}. \quad (5.15)$$

Бигармоническое уравнение $\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0$ можно представить в такой записи:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (5.16)$$

Если теперь учесть, что, согласно выражению (5.15), оператор Лапласа в полярных координатах будет иметь вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

то окончательно основное уравнение плоской задачи в полярных координатах получит следующую форму записи:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (5.17)$$

Следовательно, если использовать функцию напряжений, то для решения плоской задачи в полярных координатах необходимо подобрать такое выражение функции φ , которое бы удовлетворяло уравнению (5.17) и граничным условиям. При этом уравнения равновесия будут удовлетворяться тождественно.

Перейдем к изучению конкретных задач в полярных координатах.

§ 26. Осесимметричные задачи

Вначале рассмотрим задачи, в которых распределение напряжений и перемещений не зависит от полярного угла θ . К ним относятся задачи об определении напряженного и деформированного состояния толстостенных труб, нагруженных внутренним и внешним равномерно распределенным давлением (*задача Ляме*), о чистом изгибе кривого бруса с круговой осью (*задача Головина*), о вращающихся дисках.

При этом, как уже отмечалось ранее, перемещения u зависят только от радиуса r , а перемещения v равны нулю. Относительные линейные деформации ε_r и ε_θ равны

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad \text{а } \gamma_{r\theta} = 0.$$

Уравнения равновесия (5.10), (5.11) в этом случае сводятся к одному уравнению вида

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0,$$

или

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ur) \right] = 0. \quad (5.18)$$

Результаты исследования некоторых осесимметричных задач, исходя из анализа решения уравнения (5.18), приводятся в курсах «Сопротивление материалов» (см., например, Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. — М.: Наука, 1963).

Уравнение совместности деформаций (5.17), выраженное через функцию напряжений φ с учетом того обстоятельства, что φ является только функцией r , примет следующий вид:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0, \quad (5.19)$$

или в развернутом виде

$$\frac{d^4 \varphi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \varphi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\varphi}{dr} = 0. \quad (5.20)$$

Уравнение (5.20) — обыкновенное линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами. Если использовать подстановку $r = e^t$, то его можно преобразовать к линейному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^4 \varphi}{dt^4} - 4 \frac{d^3 \varphi}{dt^3} + 4 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = 0. \quad (5.21)$$

Общий интеграл уравнения (5.21) имеет вид

$$\varphi = C_1 + C_2 t + C_3 e^{2t} + C_4 t e^{2t}.$$

Так как $t = \ln r$, то общее выражение для φ будет

$$\varphi = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r. \quad (5.22)$$

Для осесимметричной задачи из (5.12) получим

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} = \frac{C_2}{r^2} + 2C_4 \ln r + (2C_3 + C_4), \quad (5.23)$$

$$\sigma_\theta = \frac{d^2 \varphi}{dr^2} = -\frac{C_2}{r^2} + 2C_4 \ln r + (2C_3 + 3C_4). \quad (5.24)$$

Остановимся вначале на решении задачи Лямэ. Найдем выражения для напряжений σ_r и σ_θ в случае, когда длинная толстостенная труба с внутренним радиусом a и наружным b нагружена внутренним давлением p_b и наружным p_n (рис. 5.4). Поскольку в этой задаче имеется только два граничных условия: $\sigma_r = p_b$ при $r = a$ и $\sigma_r = p_n$ при $r = b$, то граничные условия позволяют определить две из трех постоянных интегрирования, а третья постоянная может быть принята любой величиной. Решение получается многозначным.

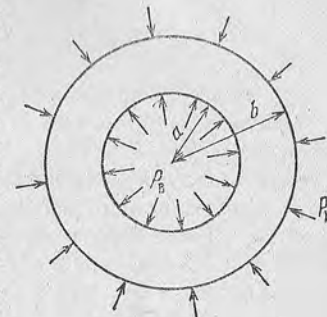


Рис. 5.4.

Многозначность решения является особенностью задач, относящихся к многосвязным контурам, сечение которых ограничено не одной, а несколькими непересекающимися кривыми. Сечение трубы ограничено двумя концентрическими окружностями, контур ее — двусвязный.

Указанные трудности в рассматриваемой задаче обходятся при решении ее в перемещениях, если используется уравнение равновесия (5.18), как это делается в курсах сопротивления материалов.

При решении задачи в напряжениях для того, чтобы обеспечить однозначность перемещений u , определяемых из выражений $\varepsilon_r = du/dr$ и $\varepsilon_\theta = u/r$, необходимо положить коэффициент C_4 в выражениях (5.23) и (5.24) равным нулю. Тогда $\sigma_r = C_2/r^2 + 2C_3$, а $\sigma_\theta = -C_2/r^2 + 2C_3$. Для заданных граничных условий для коэффициентов C_2 и C_3 получим следующие выражения:

$$C_2 = \frac{(p_n - p_b) a^2 b^2}{b^2 - a^2}, \quad C_3 = \frac{p_b a^2 - p_n b^2}{2(b^2 - a^2)}.$$

Подставив найденные значения C_2 и C_3 в выражения для σ_r и σ_θ , получим

$$\sigma_r = \frac{(p_n - p_b) a^2 b^2}{(b^2 - a^2) r^2} + \frac{p_b a^2 - p_n b^2}{b^2 - a^2}, \quad (5.25)$$

или

$$\sigma_r = -\frac{a^2}{b^2 - a^2} \left[p_n \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{r^2} \right) + p_b \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right) \right], \quad (5.26)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{(p_n - p_b) a^2 b^2}{(b^2 - a^2) r^2} + \frac{p_b a^2 - p_n b^2}{b^2 - a^2}, \quad (5.27)$$

или

$$\sigma_\theta = \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left[p_b \left(\frac{b^2}{r^2} + 1 \right) - p_n \left(\frac{b^2}{r^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) \right]. \quad (5.28)$$

Из анализа выражения (5.26) следует, что напряжение σ_r всегда отрицательно и изменяется от величины p_b при $r = a$ до p_n при $r = b$.

Что касается величины σ_θ , то она может быть как положительной, так и отрицательной. Это зависит от отношения p_b к p_n и соотношения радиусов внешней и внутренней поверхностей трубы (b/a).

Условием того, что при $r = a$ $\sigma_\theta > 0$, является неравенство $\frac{p_b}{p_n} > \frac{2b^2}{b^2 + a^2}$, а для того чтобы у внешней поверхности при $r = b$ тангенциальные напряжения были положительны, необходимо, чтобы было

$$\frac{p_b}{p_n} > \frac{a^2 + b^2}{2a^2}.$$

Если толстостенная труба находится под действием только внутреннего давления ($p_n = 0$), то σ_θ всегда положительно и уменьшается при переходе от внутренних слоев к внешним.

Как следует из (5.28), $\sigma_{\theta \max} = p_b (a^2 + b^2)/(b^2 - a^2)$ и всегда больше внутреннего давления p_b , как бы мы ни увеличивали толщину стенки ($b - a$).

Отметим, что в случае отсутствия внутреннего отверстия ($a = 0$) из формул (5.26) и (5.28) следует, что $\sigma_r = \sigma_\theta = p_n$. Это — случай равностороннего растяжения или сжатия. Таким образом, если рассматривать круглый диск с толщиной, равной 1, и по контуру диска приложить равномерно распределенное сжимающее или растягивающее усилие p_n , то диск будет находиться в условиях равностороннего растяжения или сжатия и напряжения всюду будут одинаковы и равны приложенному напряжению p_n . Если же в этом диске в центре будет отверстие с радиусом a , как бы мала ни была величина радиуса a , то напряжение по внутренней поверхности этого отверстия равно нулю и, как следует из формул (5.26) и (5.28), напряжения σ_r и σ_θ определяются

выражениями

$$\sigma_r = -p_n \frac{1 - a^2/r^2}{1 - a^2/b^2}, \quad \sigma_\theta = -p_n \frac{1 + a^2/r^2}{1 - a^2/b^2},$$

где p_n — равномерно распределенное по наружной поверхности давление.

Подробнее задача расчета толстостенных труб, определение радиальных перемещений u , способы снижения максимальных тангенциальных напряжений σ_θ в составных трубах рассматриваются в курсах по сопротивлению материалов.

Другой пример плоской задачи, в которой напряжения и деформации не зависят от полярного угла θ , — чистый изгиб кривых брусьев с круговой осевой линией*).

Рассмотрим чистый изгиб кривого бруса с круговой осевой линией радиуса r_0 (рис. 5.5). Предполагаем, что сечение бруса постоянно и представляет собой прямоугольник с шириной, равной 1. Граничные условия в случае чистого изгиба кривого бруса можно записать в следующем виде:

- 1) при $r = a$ $\sigma_r = 0$;
- 2) при $r = b$ $\sigma_r = 0$;

$$3) \int_a^b \sigma_\theta dr = 0;$$

$$4) \int_a^b \sigma_\theta r dr + M = 0.$$

Условия 3) и 4) означают, что равнодействующая нормальных усилий на торцах бруса статически эквивалентна приложенным моментам.

Из условия равенства нулю нормальных напряжений σ_r при $r = a$ и $r = b$ из (5.23) имеем

$$\frac{C_2}{a^2} + 2C_4 \ln a + 2C_3 + C_4 = 0, \quad (5.29)$$

$$\frac{C_2}{b^2} + 2C_4 \ln b + 2C_3 + C_4 = 0. \quad (5.30)$$

*) Эта задача была решена Х. С. Головиным в 1881 г.

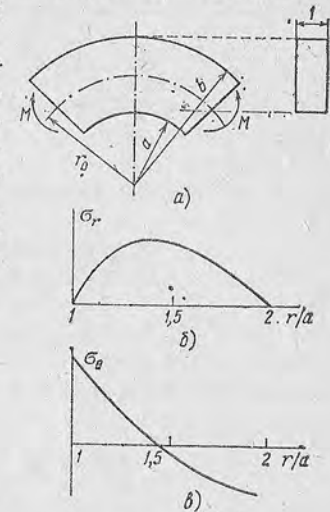


Рис. 5.5.

Граничные условия для тангенциальных напряжений σ_θ по торцам бруса представим в следующем виде:

$$\int_a^b \sigma_\theta dr = \int_a^b \frac{d^2\varphi}{dr^2} dr = \left| \frac{d\varphi}{dr} \right|_a^b = 0.$$

Продифференцировав выражение (5.22) по r , получим

$$\left| \frac{C_2}{r} + 2C_3r + 2C_4r \ln r + C_4r^2 \frac{1}{r} \right|_a^b = 0,$$

или

$$b \left(\frac{C_2}{b^2} + 2C_4 \ln b + 2C_3 + C_4 \right) - a \left(\frac{C_2}{a^2} + 2C_4 \ln a + 2C_3 + C_4 \right) = 0. \quad (5.31)$$

Если удовлетворяются условия (5.29) и (5.30), то будет удовлетворяться и условие (5.31). Из последнего граничного условия, заменив σ_θ через $d^2\varphi/dr^2$ и производя интегрирование по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_a^b \sigma_\theta r dr &= \int_a^b \frac{d^2\varphi}{dr^2} r dr = \left| \frac{d\varphi}{dr} r \right|_a^b - \int_a^b \frac{d\varphi}{dr} dr = \\ &= \left| \frac{d\varphi}{dr} r \right|_a^b - [\varphi]_a^b = -M. \end{aligned}$$

Из (5.31), (5.29) и (5.30) следует, что $\left| \frac{d\varphi}{dr} r \right|_a^b = 0$.

Следовательно, 4-е граничное условие приводит нас к следующему уравнению:

$$[\varphi]_a^b = M. \quad (5.32)$$

Если в (5.32) подставить выражение (5.22) для φ , то получим

$$C_2 \ln \frac{b}{a} + C_4 (b^2 \ln b - a^2 \ln a) + C_3 (b^2 - a^2) = M. \quad (5.33)$$

Уравнения (5.29), (5.30), (5.33) позволяют определить постоянные интегрирования C_2 , C_3 , C_4 :

$$\begin{aligned} C_2 &= -\frac{4M}{N} a^2 b^2 \ln \frac{b}{a}, \\ C_3 &= \frac{M}{N} [b^2 - a^2 + 2(b^2 \ln b - a^2 \ln a)], \\ C_4 &= -\frac{2M}{N} (b^2 - a^2), \end{aligned} \quad (5.34)$$

где $N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2b^2 \left(\ln \frac{b}{a} \right)^2$. Подставив найденные значения постоянных C_2 , C_3 , C_4 в (5.23), (5.24), получим следующие выражения для радиальных σ_r и тангенциальных σ_θ напряжений в случае чистого изгиба кривого бруса:

$$\sigma_r = -\frac{4M}{N} \left(\frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r} \right), \quad (5.35)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{4M}{N} \left(-\frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r} + b^2 - a^2 \right). \quad (5.36)$$

Касательные напряжения $\tau_{r\theta}$ в осесимметричных задачах равны нулю.

Изгибающие моменты M по торцам кривого бруса должны быть распределены по сечению по закону, устанавливаемому уравнением (5.36). Если действительный закон распределения нормальных напряжений на торцах бруса отличается от того, который определяется уравнением (5.36), то, имея в виду принцип Сен-Венана, можно утверждать, что на некотором расстоянии от торцов, большем, чем $(b-a)$, законы распределения нормальных напряжений σ_r и σ_θ будут все же соответствовать выражениям (5.35) и (5.36).

Представляет интерес сравнить точное решение задачи о чистом изгибе кривого бруса с приближенным, приводимым в курсах «Сопротивление материалов». Приближенное решение построено на основе гипотез о плоских сечениях и ненадавливании волокон друг на друга ($\sigma_r = 0$). Допущение о том, что сечения после деформации остаются плоскими, подтверждается точным решением методами теории упругости. В случае чистого изгиба кривого бруса сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и после приложения изгибающих моментов. Что же касается второго допущения, то точное решение задачи показывает, что волокна при изгибе кривого бруса взаимодействуют друг с другом в радиальном направлении. Напряжения σ_r увеличиваются по абсолютной величине от крайних волокон к середине и достигают максимального значения для волокон, расположенных несколько ближе к центру кривизны, чем нейтральный слой (рис. 5.5, б).

Тангенциальные напряжения σ_θ (рис. 5.5, в) распределяются по высоте сечения бруса не по гиперболическому закону, как это следует из элементарной теории изгиба

кривого бруса, а по более сложному закону, описываемому выражением (5.36). Однако численные значения σ_θ , полученные в результате расчета по точным формулам (5.36) и приближенным формулам теории изгиба кривого бруса, отличаются на десятые доли процента. Различие между точным и приближенным значениями напряжений σ_θ объясняется тем, что в приближенном решении не учитывается влияние радиальных напряжений σ_r . В случае, если изгибающий момент будет иметь направление, такое, как показано на рис. 5.5, волокна будут стремиться отделиться друг от друга; если же моменты M будут иметь противоположное направление, то надавливать друг на друга.

§ 27. Другие задачи в полярных координатах

1. *Клин, нагруженный в вершине сосредоточенной силой или моментом.* Примером задачи, в которой напряжения зависят не только от радиуса r , но и от полярного угла θ , является задача о бесконечном клине, который нагружен в вершине сосредоточенной сжимающей силой P (рис. 5.6).

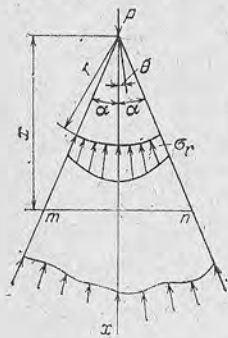


Рис. 5.6.

Предполагаем, что клин имеет толщину, равную 1, а сила P , приложенная в вершине клина, равномерно распределена по толщине. Иначе говоря, P является погонной нагрузкой, приложенной в вершине клина, и имеет размерность силы, поделенной на единицу длины.

Естественно предположить, что в клине возникают напряжения σ_r , которые обратно пропорциональны расстоянию r от вершины клина, достигают максимального значения на оси клина (при $\theta = 0$) и убывают при увеличении угла θ .

Таким образом, предполагаем, что

$$\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0, \quad \text{а} \quad \sigma_r = -k \frac{P \cos \theta}{r}. \quad (5.37)$$

Такое распределение напряжений удовлетворяет граничным условиям. На гранях клина при $\theta = \pm\alpha$ касательные $\tau_{r\theta}$ и нормальные σ_θ напряжения равны нулю.

Подберем выражение для φ таким, чтобы удовлетворялись уравнения (5.37) и основное уравнение плоской задачи в полярных координатах (5.17).

Этим условиям удовлетворяет функция напряжений такого вида:

$$\varphi = -\frac{kP}{2} r \theta \sin \theta. \quad (5.38)$$

Подставив (5.38) в формулы (5.12) для σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$, убеждаемся, что выбранная функция (5.38) соответствует предполагаемому распределению напряжений (5.37).

Проверим, удовлетворяет ли выбранная функция (5.38) основному уравнению плоской задачи в полярных координатах (5.17).

Для этого подставим (5.38) в (5.17):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(-\frac{kP}{2} r \theta \sin \theta \right) = -\frac{kP}{r} \cos \theta.$$

Далее получим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(-\frac{kP}{r} \cos \theta \right) = 0.$$

Таким образом, мы убедились, что выбранная функция напряжений φ (5.38) удовлетворяет основному уравнению плоской задачи, соответствует предполагаемому закону распределения напряжений и, следовательно, удовлетворяет граничным условиям.

Для определения неизвестного коэффициента k рассмотрим равновесие части клина, вырезанного дугой радиуса r .

Для этого спроектируем все силы, действующие на вырезанную часть клина, на направление силы P :

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \sigma_r r \cos \theta d\theta = -P.$$

Подставив вместо σ_r его выражение по (5.37), получим $\int_{-\alpha}^{\alpha} kP \cos^2 \theta d\theta = -P$, откуда для k найдем следующее значение:

$$k = \frac{1}{\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha}. \quad (5.39)$$

Теперь окончательно получим выражение для σ_r :

$$\sigma_r = -\frac{P \cos \theta}{(\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha) r}. \quad (5.40)$$

Выражение (5.40) является точным решением задачи, если усилия, действующие на основание клина, будут распределены в соответствии с формулой (5.40). В противном случае, основываясь на принципе Сен-Венана, можно утверждать, что по такому закону будут распределяться напряжения σ_r вдали от основания клина.

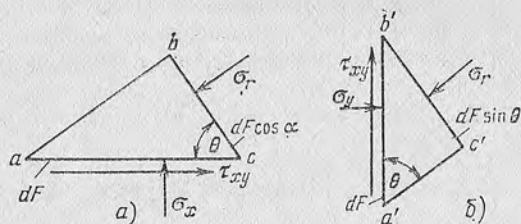


Рис. 5.7.

Для определения напряжений σ_x , σ_y и τ_{xy} вырежем треугольные элементы abc (рис. 5.7, а) и $a'b'c'$ (рис. 5.7, б). Из условия равновесия элементов abc и $a'b'c'$ найдем выражения для σ_x , σ_y , τ_{xy} :

$$\sigma_x = \sigma_r \cos^2 \theta, \quad \sigma_y = \sigma_r \sin^2 \theta, \quad \tau_{xy} = \sigma_r \sin \theta \cos \theta,$$

или

$$\sigma_x = -\frac{P \cos^3 \theta}{(\alpha + 1/2 \sin 2\alpha) r}, \quad \sigma_y = -\frac{P \sin^2 \theta \cos \theta}{(\alpha + 1/2 \sin 2\alpha) r}, \quad (5.41)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{P \sin \theta \cos^2 \theta}{(\alpha + 1/2 \sin 2\alpha) r}.$$

Проведем на расстоянии x от вершины клина сечение mn , параллельное оси y , и получим выражения для σ_x , σ_y , τ_{xy} в функции координат x , y , имея в виду, что

$$\cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \sin \theta = \frac{y}{r}, \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

Подставим эти выражения для $\cos \theta$, $\sin \theta$ и r в (5.41) и получим

$$\sigma_x = -\frac{Px^3}{(\alpha + 1/2 \sin 2\alpha) (x^2 + y^2)^2}, \quad \sigma_y = -\frac{Pxy^2}{(\alpha + 1/2 \sin 2\alpha) (x^2 + y^2)^2},$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Px^2y}{(\alpha + 1/2 \sin 2\alpha) (x^2 + y^2)^2}. \quad (5.42)$$

Рассмотрим, далее, нагружение клина в вершине сосредоточенной силой P , перпендикулярной к оси клина (рис. 5.8).

Примем, как и в предыдущем случае, для φ выражение (5.38), удовлетворяющее основному уравнению задачи и граничным условиям, а постоянную k найдем из условия равновесия отсеченной радиусом r части клина. При этом угол θ будем измерять от направления действия силы P (рис. 5.8). Тогда, проектируя все силы на направление действия силы P , будем иметь

$$\int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2+\alpha} \sigma_r r \cos \theta d\theta = -P, \quad \text{или} \quad -\int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2+\alpha} kP \cos^2 \theta d\theta = -P.$$

После преобразования для k получим

$$k = \frac{1}{\alpha - 1/2 \sin 2\alpha}.$$

Таким образом, если сила P , приложенная к вершине клина, направлена не по оси клина, а перпендикулярно к ней,

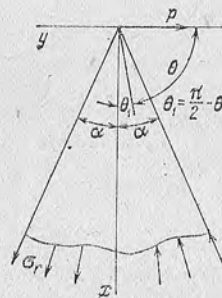


Рис. 5.8.

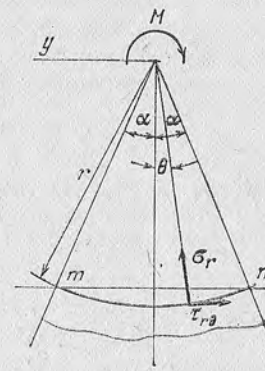


Рис. 5.9.

то формула для σ_r останется той же, что и прежде, но в знаменателе будет иное значение постоянной:

$$\sigma_r = -\frac{P \cos \theta}{(\alpha - 1/2 \sin 2\alpha) r}. \quad (5.43)$$

Для получения напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} следует воспользоваться ранее полученными соотношениями между σ_x , σ_y ,

τ_{xy} и σ_r , заменив угол θ на $\pi/2 - \theta$. При этом будем иметь

$$\sigma_x = \sigma_r \sin^2 \theta, \quad \sigma_y = \sigma_r \cos^2 \theta, \quad \tau_{xy} = \sigma_r \sin \theta \cos \theta.$$

Далее учтем, что при принятом на рис. 5.8 направлении осей x, y связь между декартовыми и полярными координатами запишется в виде

$$x = r \sin \theta, \quad y = -r \cos \theta.$$

Тогда выражения напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ в декартовых координатах можно записать следующим образом:

$$\sigma_x = \frac{Px^2y}{(\alpha - 1/2 \sin 2\alpha)(x^2 + y^2)^2}, \quad \sigma_y = \frac{Py^3}{(\alpha - 1/2 \sin 2\alpha)(x^2 + y^2)^2},$$

$$(5.44)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Pxy^2}{(\alpha - 1/2 \sin 2\alpha)(x^2 + y^2)^2}.$$

Имея решения для клина, нагруженного в вершине сосредоточенной силой, направленной по оси клина и перпендикулярно к оси, можно, комбинируя их, получить решение для произвольно направленной сосредоточенной силы P .

Рассмотрим теперь задачу об изгибе клина, нагруженного в вершине сосредоточенным моментом (рис. 5.9).

Функцию напряжений примем в виде

$$\varphi = A\theta + B \sin 2\theta. \quad (5.45)$$

Прежде всего проверим, удовлетворяет ли эта функция основному уравнению плоской задачи — уравнению (5.17). После подстановки (5.45) в (5.17) получим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(-\frac{4B}{r^2} \sin 2\theta \right) =$$

$$= -\frac{24B}{r^4} \sin 2\theta + \frac{8B}{r^4} \sin 2\theta + \frac{16B}{r^4} \sin 2\theta = 0.$$

Таким образом выбранная нами функция φ (5.45) действительно удовлетворяет основному уравнению (5.17). Произвольные постоянные в (5.45) должны быть выбраны так, чтобы они удовлетворяли граничным условиям задачи.

Граничные условия рассматриваемой задачи будут:

1) грани клина свободны от нормальных и касательных усилий

$$\theta = \pm\alpha, \quad \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0;$$

2) условие равновесия части клина, вырезанной радиусом r (рис. 5.9), запишем в виде

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \tau_{r\theta} r^2 d\theta + M = 0.$$

Нормальные усилия $\sigma_r d\theta$ относительно вершины клина момента не дают. Подставляя (5.45) в (5.12), найдем выражения для $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$:

$$\sigma_r = -\frac{4B}{r^2} \sin 2\theta, \quad \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = \frac{A + 2B \cos 2\theta}{r^2}.$$

Из первого граничного условия находим связь между A и B :

$$A + 2B \cos 2\alpha = 0, \quad \text{или} \quad A = -2B \cos 2\alpha.$$

Следовательно, для $\tau_{r\theta}$ имеем

$$\tau_{r\theta} = \frac{2B}{r^2} (\cos 2\theta - \cos 2\alpha).$$

Для определения B используем условие равновесия

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{2B}{r^2} (\cos 2\theta - \cos 2\alpha) r^2 d\theta + M = 0,$$

откуда

$$B = -\frac{M}{2(\cos 2\alpha)(\lg 2\alpha - 2\alpha)}.$$

Подставляя B в выражения для σ_r и $\tau_{r\theta}$, получим

$$\sigma_r = \frac{2M \sin 2\theta}{(\cos 2\alpha)(\lg 2\alpha - 2\alpha) r^2},$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{M(\cos 2\theta - \cos 2\alpha)}{(\cos 2\alpha)(\lg 2\alpha - 2\alpha) r^2}. \quad (5.46)$$

Подобно тому, как в задачах о сжатии и изгибе клина сосредоточенной силой, приложенной в вершине, рассматриваем момент M как погонный момент, отнесенный к единице толщины клина.

Из (5.46) следует, что σ_r и $\tau_{r\theta}$ обратно пропорциональны квадрату радиуса r . При этом σ_r достигает максимального значения в крайних волокнах клина и равно нулю на оси, а $\tau_{r\theta}$ достигает максимального значения на оси и равно нулю на гранях клина.

При нагружении клина сосредоточенными силами или моментом напряжения резко возрастают по мере прибли-

жения к вершине клина, и при $r = 0$ становятся бесконечно большими. Отсюда следует, что в некоторой области вблизи вершины клина, которую можно было бы выделить радиусом r_0 , напряжения будут превосходить предел пропорциональности и деформации будут пластическими. За пределами пластической зоны радиуса r_0 напряжения могут определяться по приведенным выше формулам (5.42), (5.44), (5.46).

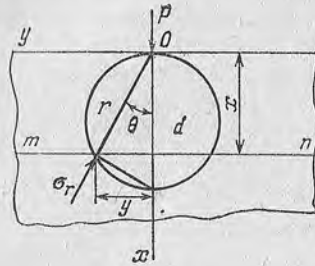


Рис. 5.10.

2. Действие сосредоточенной силы на границе полуплоскости. Если сосредоточенная сила P приложена на границе полубесконечной тонкой пластины (рис. 5.10) или равномерно распределена по прямой на границе полупространства, то задача об определении напряжений и деформаций является плоской. В первом случае будет иметь место обобщенное плоское напряженное состояние, а во втором — плоская деформация.

Такие задачи будем называть задачами о действии сосредоточенной силы на границе полуплоскости.

Пусть к прямолинейному краю пластины, имеющей толщину, равную 1, приложена сила P , направленная перпендикулярно к краю пластины и равномерно распределенная по ее толщине (рис. 5.10).

Задачу о действии сосредоточенной силы на границе полуплоскости можно рассматривать как распространение случая нагружения бесконечного клина в вершине силой P в предположении, что угол раствора клина равен π , т. е. $\alpha = \pm\pi/2$.

Следовательно, все формулы для определения напряжений в сечении клина, приведенные выше (5.40)–(5.44), будут справедливы и для определения напряжений в полуплоскости, но только нужно в них заменить α через $\pi/2$. При этом получим

$$\sigma_r = -\frac{2P \cos \theta}{\pi r}, \quad (5.47)$$

$$\sigma_x = -\frac{2Px^3}{\pi(x^2+y^2)^2}, \quad \sigma_y = -\frac{2Pxy^2}{\pi(x^2+y^2)^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{2Px^2y}{\pi(x^2+y^2)^2}. \quad (5.48)$$

Из рис. 5.10 следует, что $r/\cos \theta = d$, следовательно,

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi d}. \quad (5.49)$$

Таким образом, если провести окружность диаметром d так, чтобы она касалась прямолинейного края пластины в точке O приложения силы P , то в любой точке этой окружности нормальные напряжения σ_r будут одинаковы и вычисляются по формуле (5.49). Эти окружности называют *кругами Буссинеска*, по имени ученого, впервые решившего в 1885 г. задачу о действии сосредоточенной силы на упругое полупространство (пространственная задача теории упругости).

Задача о действии сосредоточенной силы на полуплоскость была решена Фламаном (1895). В литературе ее именуют *задачей Буссинеска — Фламана*. Рассмотрим эпюры напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} при заданном расстоянии x от границы полуплоскости. Напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} определяются формулами (5.48). При $y=0$ $\sigma_x = -2P/(\pi x)$, $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$. Распределение напряжений показано на рис. 5.11.

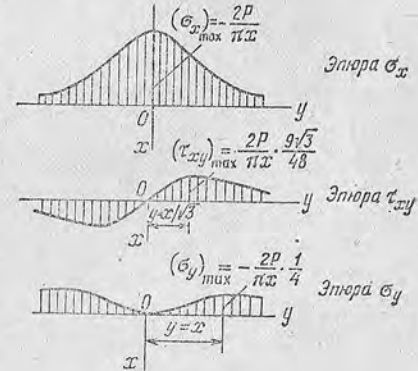


Рис. 5.11.

Если действует не одна, а несколько сил, то для определения результирующего воздействия можно использовать принцип независимости действия сил.

Если положить $P=1$, то графики, изображенные на рис. 5.11, можно рассматривать как линии влияния соответствующих напряжений (σ_x , σ_y , τ_{xy}) для точки O при заданном x .

Линиями влияния называются графики, которые показывают, как изменяются некоторые физические величины в данной точке (например, σ_x , σ_y , τ_{xy}) при перемещении единичной силы ($P=1$) вдоль оси y .

В этом случае напряжение в точке O от действия нескольких сил будет равно сумме произведений этих сил

на ординаты линии влияния под точками приложения этих сил.

Пусть на край полубесконечной пластины действует сосредоточенная сила P в точке A и равномерно распределенная нагрузка интенсивности q на участке BC (рис. 5.12, а). Напряжение σ_x в точке O_1 на расстоянии x

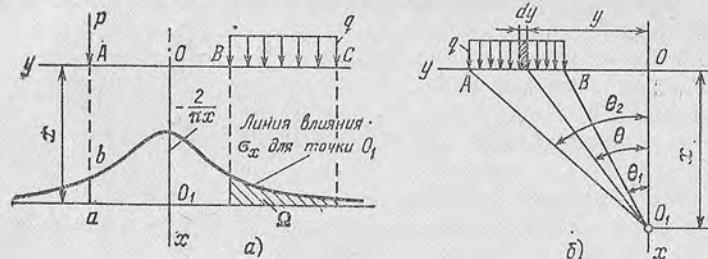


Рис. 5.12.

от границы полуплоскости можно определить с помощью линии влияния напряжения σ_x , показанной на рис. 5.12, а, следующим образом:

$$\sigma_x = P|\overline{ab}| + q\Omega,$$

где $\overline{ab}$ — ордината линии влияния σ_x под силой P , а Ω — заштрихованная площадь под линией влияния на участке BC приложения распределенной нагрузки q .

Выведем формулы для определения напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} в некоторой точке O_1 полуплоскости (отстоящей от края на расстояние x) от действия равномерно распределенной нагрузки интенсивности q на край полуплоскости (рис. 5.12, б). Участок нагружения AB ограничивается углами θ_1 и θ_2 .

Если выделить элемент длины dy участка AB , то действующая элементарная нагрузка будет $q dy$. Найдем величину радиального напряжения $d\sigma_r$ в точке O_1 от нагрузки $q dy$. Согласно (6.47) имеем $d\sigma_r = -\frac{2q dy}{\pi r} \cos \theta$. Из рис. 5.12, б следует, что $r = x/\cos \theta$. После подстановки в выражение для $d\sigma_r$ получим $d\sigma_r = -\frac{2q}{\pi x} \cos^2 \theta dy$. Так как $y = x \tan \theta$, то $dy = x d\theta/\cos^2 \theta$.

Для $d\sigma_r$ имеем

$$d\sigma_r = -\frac{2q}{\pi x} \cos^2 \theta \cdot \frac{x d\theta}{\cos^2 \theta} = -\frac{2q}{\pi} d\theta,$$

Итак, мы получили, что

$$d\sigma_r = -\frac{2q}{\pi} d\theta. \quad (5.50)$$

Теперь перейдем к определению напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} , имея в виду, что $\sigma_x = \sigma_r \cos^2 \theta$, $\sigma_y = \sigma_r \sin^2 \theta$, $\tau_{xy} = \sigma_r \sin \theta \cos \theta$. Тогда $\sigma_x = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\sigma_r \cos^2 \theta d\theta = -\frac{2q}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos^2 \theta d\theta$ и

окончательно

$$\sigma_x = -\frac{q}{\pi} \left[(\theta_2 - \theta_1) + \frac{1}{2} (\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1) \right]. \quad (5.51)$$

Аналогично получим выражения для σ_y и τ_{xy} :

$$\sigma_y = -\frac{q}{\pi} \left[(\theta_2 - \theta_1) - \frac{1}{2} (\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1) \right], \quad (5.52)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{q}{\pi} (\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1). \quad (5.53)$$

В случае, если на край полубесконечной пластины действует сосредоточенная сила P , которая наклонена под углом β к оси x (рис. 5.13), то ее нужно разложить на вертикальную и горизонтальную составляющие и определить напряжения от вертикальной и горизонтальной составляющей отдельно, а затем результаты сложить.

Напряжение σ_r в точке D , удаленной на расстоянии r от точки приложения силы P , мы найдем по формуле

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{2P \cos \beta}{\pi r} \cos \theta + \frac{2P \sin \beta}{\pi r} \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) = \\ &= -\frac{2P}{\pi r} (\cos \beta \cos \theta + \sin \beta \sin \theta) = -\frac{2P}{\pi r} \cos (\beta - \theta). \end{aligned}$$

Следовательно, при действии сосредоточенной силы под углом β к вертикали нормальное напряжение σ_r может определяться по той же формуле, что и в случае действия вертикальной силы, но угол следует отсчитывать не от вертикали (оси x), а от направления действия силы P (рис. 5.13).

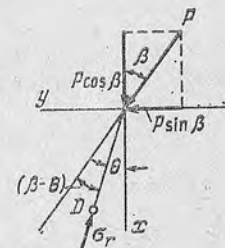


Рис. 5.13.

3. Действие двух равных и противоположно направленных по радиусу сил на круглый диск (задача Герца). Найдем напряжения, возникающие в круглом диске диаметром d от действия двух сил P , направленных по радиусу навстречу друг другу (рис. 5.14). Толщина диска равна единице и P есть интенсивность равномерно распределенных по толщине сосредоточенных сил. Принимаем, что внешняя поверхность диска свободна от напряжений.

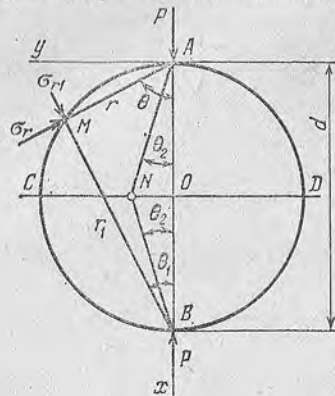


Рис. 5.14.

Если допустить, что радиальные напряжения в диске σ_r определяются так же, как и в случае действия сосредоточенной силы на полуплоскость, то в точке M на окружности по площадке, перпендикуляр-

ной к радиусу r , будет действовать напряжение

$$\sigma_r = -\frac{2P \cos \theta}{\pi r^2}$$

а по площадке, перпендикулярной к радиусу r_1 в той же точке, напряжение

$$\sigma_{r_1} = -\frac{2P \cos \theta_1}{\pi r_1^2}$$

Так как радиусы r и r_1 взаимно перпендикулярны, то

$$\cos \theta = \frac{r}{d}, \text{ а } \cos \theta_1 = \frac{r_1}{d}, \text{ или } \frac{\cos \theta}{r} = \frac{\cos \theta_1}{r_1} = \frac{1}{d}.$$

Таким образом, напряжения в точке M по двум взаимно перпендикулярным площадкам будут равны между собой: $\sigma_r = \sigma_{r_1} = -2P/(\pi d)$. Эти напряжения являются главными. Следовательно, напряженное состояние в точке M на границе кругового диска при принятом допущении о распределении напряжений в диске является всесторонним сжатием. Значит, если через точку M провести любую другую площадку, перпендикулярную к плоскости диска, то она тоже будет главной, и на ней будет действовать такое же нормальное напряжение.

Таким образом, принятое предположение о характере распределения напряжений в диске привело к тому, что

в контурных точках диска оказалось напряженное состояние, соответствующее всестороннему сжатию. Для удовлетворения граничным условиям необходимо наложить напряженное состояние, соответствующее равномерному растяжению в плоскости диска такими же напряжениями $2P/(\pi d)$. Тогда суммарные напряжения на поверхности диска будут равны нулю.

В случае действия на круговой диск равномерно распределенных по контуру растягивающих усилий, как следует из формул (5.23) и (5.24), для осесимметричной задачи постоянные C_2 и C_4 в этих формулах должны быть равны нулю (в противном случае в центре диска напряжения будут равны бесконечности), а напряжения σ_r и σ_θ оказываются постоянными и равными друг другу, т. е. $\sigma_r = \sigma_\theta = 2P/(\pi d)$.

Теперь перейдем к определению напряжений в некоторой точке, равноудаленной от точек приложения сил A и B . Обозначим AN через r_2 , а угол, образованный радиусом AN и осью x , через θ_2 . Тогда сжимающее напряжение, действующее в направлении AN , будет

$$\sigma_r = -\frac{2P \cos \theta_2}{\pi r_2^2}$$

В направлении от B к N действует такое же сжимающее напряжение. От действия двух сжимающих напряжений σ_r

в точке N возникнет напряжение $\sigma'_x = 2\sigma_r \cos^2 \theta_2 = -\frac{4P \cos^3 \theta_2}{\pi r_2^2}$.

Из $\triangle AON$ имеем $\cos \theta_2 = \frac{d/2}{\sqrt{y^2 + (d/2)^2}} = \frac{d}{\sqrt{d^2 + 4y^2}}$, а $r_2 = \sqrt{y^2 + (d/2)^2} = \frac{\sqrt{d^2 + 4y^2}}{2}$. Подставив выражения для

$\cos \theta_2$ и r_2 в выражение для σ'_x , получим

$$\sigma'_x = -\frac{8P}{\pi} \frac{d^3}{(d^2 + 4y^2)^2}$$

Если к сжимающему напряжению σ'_x добавить равномерно распределенные растягивающие напряжения $\sigma''_x = 2P/(\pi d)$, то окончательно получим следующее выражение для напряжения $\sigma_x = \sigma'_x + \sigma''_x$:

$$\sigma_x = -\frac{2P}{\pi d} \left[\frac{4d^4}{(d^2 + 4y^2)^2} - 1 \right]. \quad (5.54)$$

В точке O при $y = 0$ σ_x достигает максимального значения, равного $\sigma_x = -6P/(\pi d)$, а в точках C и D при $y = \pm d/2$ напряжение $\sigma_x = 0$. Эпюра напряжений σ_x в диаметрально сечении диска CD показана на рис. 5.15.

Результаты решения задачи о распределении напряжений в круглом диске, подвергающемся действию двух сжимающих радиальных сил, могут быть использованы для расчета на прочность цилиндрических катков. Цилиндрические катки при нагружении их равномерно распределенными погонными усилиями по образующей находятся в условиях, близких к тем, которые рассмотрены в задаче о диске.

4. *Растяжение полосы с круглым отверстием.* Рассмотрим задачу о распределении напряжений вблизи круглого отверстия с радиусом a при растяжении полосы шириной $2b$ равномерно распределенными по ширине полосы усилиями $s = \sigma h$ (рис. 5.16, а).

Будем предполагать, что $b \gg a$. Для изучения напряженного состояния вблизи отверстия вырежем из полосы круг

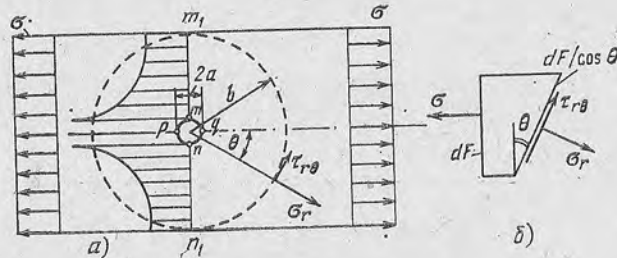


Рис. 5.16.

радиусом b . По боковой поверхности вырезанного диска будут действовать напряжения σ_r и $\tau_{r\theta}$, величины которых можно найти из условия равновесия вырезанного элемента (рис. 5.16, б).

Как известно из курса сопротивления материалов, нормальные σ_r и касательные $\tau_{r\theta}$ напряжения в наклонной

площадке растягиваемого стержня равны

$$\sigma_r = \sigma \cos^2 \theta = \frac{\sigma}{2} (1 + \cos 2\theta), \quad (5.55)$$

$$\tau_{r\theta} = -\sigma \sin \theta \cos \theta = -\frac{\sigma}{2} \sin 2\theta. \quad (5.56)$$

Таким образом, задача сводится к определению напряженного состояния круглого диска с отверстием, имеющего

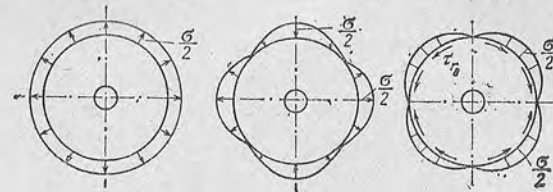


Рис. 5.17.

внешний радиус b и радиус отверстия a . По внешней боковой поверхности на диск действуют нормальные равномерно распределенные растягивающие напряжения $\sigma/2$, нормальные напряжения, изменяющиеся по закону $(\sigma/2) \cos 2\theta$ и касательные напряжения, изменяющиеся по закону $\tau_{r\theta} = -(\sigma/2) \sin 2\theta$ (рис. 5.17).

При решении задачи используем принцип суперпозиции. Напряжения, возникающие от действия равномерно распределенных по боковой поверхности растягивающих напряжений $\sigma/2$ могут быть определены по уравнениям (5.26), (5.28). Имея в виду, что внутреннее давление $p_b = 0$, а наружное давление представляет собой растягивающее напряжение $\sigma/2$, т. е. $p_a = -\sigma/2$, для σ_r и σ_θ получим

$$\sigma_r = \frac{\sigma}{2} \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{r^2} \right) = \frac{\sigma}{2} \frac{1 - a^2/r^2}{1 - a^2/b^2},$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma}{2} \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{b^2}{r^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) = \frac{\sigma}{2} \frac{1 + a^2/r^2}{1 - a^2/b^2}.$$

Выше уже было отмечено, что принимается $b \gg a$, точнее принимается $a/b = 0$. Тогда выражения для σ_r и σ_θ примут следующий вид:

$$\sigma_r = \frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right), \quad (5.57)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right). \quad (5.58)$$

Теперь рассмотрим напряженное состояние в диске с отверстием, вызванное действием напряжений $\sigma_r = (\sigma/2) \cos 2\theta$ и $\tau_{r\theta} = -(\sigma/2) \sin 2\theta$.

Для решения задачи нужно подобрать такое выражение функции напряжений φ , которое бы удовлетворяло основному уравнению плоской задачи (5.17):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0$$

и следующим граничным условиям:

$$\text{при } r = a \quad \sigma_r = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0,$$

$$\text{при } r = b \quad \sigma_r = \frac{\sigma}{2} \cos 2\theta, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\sigma}{2} \sin 2\theta.$$

Непосредственной подстановкой в уравнение (5.17) можно убедиться, что функция φ вида

$$\varphi = Ar^2 + Br^4 + C \frac{1}{r^2} + D \quad (5.59)$$

удовлетворяет основному уравнению плоской задачи.

Произвольные постоянные A, B, C, D должны быть подобраны так, чтобы удовлетворялись граничные условия. При этом примем во внимание, что напряжения σ_r и $\tau_{r\theta}$ через функцию напряжений выражаются согласно (5.12) следующим образом:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2},$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta}.$$

Тогда, подставляя вместо φ правую часть (5.59), из граничных условий получим четыре линейных алгебраических уравнения для определения постоянных A, B, C, D . Опустив преобразования, приведем окончательные выражения для постоянных A, B, C, D :

$$A = -\frac{\sigma}{4}, \quad B = 0, \quad C = -\frac{a^4}{4} \sigma, \quad D = \frac{a^2}{2} \sigma.$$

При этом функция напряжений φ будет иметь следующий вид:

$$\varphi = -\frac{\sigma}{4} r^2 - \frac{\sigma}{4} \frac{a^4}{r^2} + \frac{\sigma}{2} a^2. \quad (5.60)$$

Используя формулы (5.12), для $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ получим

$$\sigma_r = \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta, \quad (5.61)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta, \quad (5.62)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta. \quad (5.63)$$

Полное напряженное состояние в полосе может быть представлено в виде суммы напряжений, определяемых по формулам (5.57), (5.58) и (5.61)–(5.63). Тогда

$$\sigma_r = \frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta, \quad (5.64)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta, \quad (5.65)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta. \quad (5.66)$$

Если r очень велико ($r \gg a$), то напряжения $\sigma_r, \tau_{r\theta}$ приближаются к тем значениям, которые определялись выражениями (5.55), (5.56). При $r = a$ $\sigma_r = 0$, $\tau_{r\theta} = 0$, а $\sigma_\theta = \sigma - 2\sigma \cos 2\theta$.

В точках m, n (рис. 5.16, а) $\theta = \pm\pi/2$ и $\sigma_\theta = 3\sigma$. Таким образом, оказывается, что нормальные растягивающие напряжения около малого отверстия в три раза больше, чем средние растягивающие напряжения вдали от отверстия. Нормальные напряжения в сечении m, n при удалении от отверстия быстро уменьшаются. Так, при $r = 3a$ $\sigma_\theta = 1,074\sigma$, т. е. только на 7% больше, чем напряжение σ . В точках p и q ($\theta = 0, \pi$) нормальные напряжения σ_θ будут равны $\sigma_\theta = \sigma - 2\sigma = -\sigma$, т. е. в сечении pq в точках p и q действуют сжимающие напряжения, равные по величине растягивающим напряжениям σ .

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ И ЗАДАЧИ

- ✓1. Как записываются уравнения равновесия плоской задачи в полярных координатах?
- ✓2. Как в полярных координатах выражаются деформации $\epsilon_r, \epsilon_\theta, \gamma_{r\theta}$ через перемещения u и v ?
- ✓3. Каков вид уравнений закона Гука в полярных координатах?

✓ 4. Какова последовательность решения плоской задачи в перемещениях?

✓ 5. Как можно выразить напряжения σ_r , σ_θ и $\tau_{r\theta}$ через функцию напряжений $\varphi(r, \theta)$?

✓ 6. Как записывается основное уравнение плоской задачи (бигармоническое уравнение) в полярных координатах?

✓ 7. Какова последовательность решения плоской задачи в напряжениях с помощью функции напряжений?

✓ 8. Какие напряжения равны нулю в осесимметричных задачах?

9. Получите уравнение равновесия в перемещениях для осесимметричной задачи.

10. Получите уравнение совместности деформаций, выраженное через функцию напряжений φ , в случае осесимметричной деформации.

11. Определите, во сколько раз внутреннее давление в толстостенной трубе (p_n) должно быть больше наружного давления (p_n), чтобы при $b = 2a$ тангенциальные напряжения всюду были положительными.

12. Чем отличаются напряженные состояния двух одинаковых дисков, к наружному контуру которых приложены одинаковые равномерно распределенные растягивающие усилия, если один из них имеет центральное отверстие, а другой не имеет?

13. Подтверждается ли гипотеза плоских сечений при точном решении задачи о чистом изгибе бруса большой кривизны?

14. Подтверждается ли гипотеза о ненадавливании волокон друг на друга при чистом изгибе бруса большой кривизны?

15. Проверьте, удовлетворяет ли основному уравнению плоской задачи
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0$$
 функция напряжений вида $\varphi = kr\theta \sin \theta$.

16. Определите максимальную величину давления в основании клина высотой $H = 1$ м, с углом при вершине $2\alpha = 30^\circ$ и нагруженного силой $P = 10$ кН/м.

Ответ. $\sigma_{\max} = -19,5$ кПа.

17. Проверьте, удовлетворяет ли функция вида $\varphi = A\theta + B \sin 2\theta$ основному уравнению плоской задачи и запишите выражения для напряжений σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ для заданной функции φ .

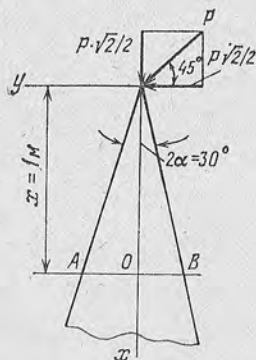


Рис. 5.18.

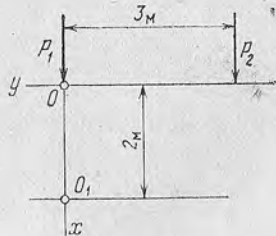


Рис. 5.19.

18. Чему равны нормальные напряжения σ_x в точках O , A , B в сечении клина на расстоянии 1 м от вершины, если угол при вершине клина равен 30° , а нагрузка $P = 10$ кН/м действует под углом 45° к вертикали (рис. 5.18)?

Ответ. Для O $\sigma_x = -14$ кПа, для A $\sigma_x = -154$ кПа, для B $\sigma_x = +126$ кПа.

19. Что такое круги Буссинеска, каким свойством они обладают?

20. Задача. Определите величину напряжения σ_x в точке O_1 полуплоскости от двух сил P_1 и P_2 , соответственно равных 100 кН/м и 200 кН/м (рис. 5.19).

Ответ. $\sigma_x = -37,9$ кПа.

21. Задача. Вычислите напряжение σ_x в точке D (рис. 5.13) с координатами $x_D = 1$ м, $y_D = 0,575$ м. Внешняя нагрузка $P = 100$ кН/м, действующая на полуплоскость, наклонена к вертикали под углом $\beta = 45^\circ$.

Ответ. $\sigma_x = -39,96$ кПа.

22. Задача. Определите напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} в точке O_1 (рис. 5.12, б) на расстоянии $x = 1$ м от края полуплоскости в случае действия равномерно распределенной нагрузки интенсивностью $q = 10$ кПа, если $\theta_1 = -45^\circ$, а $\theta_2 = +45^\circ$.

Ответ. $\sigma_x = -8,18$ кПа, $\sigma_y = -1,82$ кПа, $\tau_{xy} = 0$.

23. Задача. Чему равны максимальные напряжения в катке диаметром 0,1 м, если действующая на него погонная нагрузка составляет 1 МН/м.

Ответ. $\sigma_x^{\max} = -19$ МПа.



Глава 6

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ТЕОРИИ ТОНКИХ ПЛАСТИН

§ 28. Исходные допущения. Классификация пластин

Пластиной называют тело, имеющее форму цилиндра (или прямой призмы), высота которого значительно меньше размеров основания.

В зависимости от формы основания цилиндра (призмы) различают круглые, эллиптические, квадратные, прямоугольные, треугольные и т. п. пластины. Плоскость, которая делит высоту пластины всюду пополам, называется срединой плоскостью.

Линии пересечения срединной плоскости с боковой поверхностью образуют контур пластины.

Различают тонкие пластины и толстые плиты. В первом случае толщина пластины, по крайней мере, в 10—20 раз меньше любого из размеров пластины в плане.

Помимо общих допущений классической теории упругости, о которых говорилось выше, теория тонких пластин построена с использованием дополнительных гипотез (Кирхгофа).

Первое допущение — гипотеза прямых нормалей — аналогична гипотезе плоских сечений, широко используемой при решении задач методами сопротивления материалов.

Согласно гипотезе прямых нормалей прямолинейный элемент, нормальный к срединной поверхности, после деформации пластины остается прямолинейным и нормальным к деформированной поверхности, а его длина не изменяется.

Таким образом, нормаль к срединной поверхности в результате изгиба пластины поворачивается, оставаясь прямой.

Следует отметить, что в действительности при изгибе пластины поперечной нагрузкой в поперечных сечениях возникают касательные напряжения, которые должны вызывать деформации сдвига. Поэтому прямая нормаль вслед-

ствие этих сдвигов должна искажаться, искривляться. Однако для тонких пластин влияние сдвига весьма мало и им можно пренебречь. Влияние сдвига становится заметным лишь тогда, когда пластина имеет большую толщину, соизмеримую с размерами в плане, либо когда модуль сдвига G материала пластины во много раз меньше нормального модуля E упругости (это может быть, например, в случае трехслойных пластин, у которых средний слой имеет низкий модуль сдвига).

Результаты расчетов, основанных на гипотезе прямых нормалей для тонких пластин из изотропного материала, очень хорошо подтверждаются экспериментами.

Вторым допущением, на котором основана теория тонких пластин, является гипотеза об отсутствии нормальных напряжений на площадках, параллельных срединному слою пластин. Эта гипотеза аналогична соответствующей гипотезе ненадавливания волокон в теории изгиба бруса в курсе сопротивления материалов.

При изгибе пластин в их сечениях возникают нормальные и касательные напряжения. Нормальные и касательные напряжения, действующие в срединной плоскости, часто называют цепными напряжениями. Если пластины гибкие, то цепные напряжения, возникающие при изгибе, могут быть значительными, сравнимыми по величине с максимальными изгибными напряжениями. Напротив, если пластина жесткая, то в срединной плоскости возникают весьма небольшие цепные напряжения, величиной которых по сравнению с максимальными напряжениями от изгиба можно при расчете пренебречь.

В связи с характером напряженного состояния тонкие пластины разделяют на следующие классы:

1) жесткие пластины — такие, при изгибе которых величиной цепных напряжений можно пренебречь по сравнению с изгибными;

2) абсолютно гибкие пластины (мембраны) — такие пластины, при изгибе которых цепные напряжения играют решающую роль. При этом можно считать, что нормальные напряжения по толщине сечения не изменяются и равны тем, которые действуют в срединной поверхности;

3) пластины конечной жесткости (гибкие пластины) — такие, когда величины цепных и изгибных напряжений оказываются одинакового порядка и при расчете таких пластин на изгиб нужно учитывать действие как цепных, так и изгибных напряжений.

§ 29. Деформации, кривизны, усилия в гибких пластинах

Рассмотрим гибкую прямоугольную пластину со сторонами a , b и толщиной h в прямоугольной системе координат (рис. 6.1). Перемещения в срединной поверхности обозначим через u , v , а прогиб через w . Для гибких пластин будем полагать, что перемещения u , v малы по сравнению

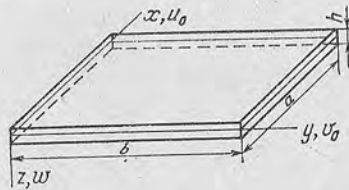


Рис. 6.1.

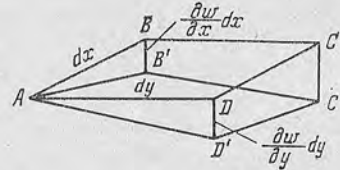


Рис. 6.2.

с толщиной пластины, а прогиб w соизмерим с ней и может быть равен и больше толщины пластины h . В этом случае деформации в срединной поверхности $\epsilon_x^0, \epsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$ зависят не только от перемещений u , v , но также и от прогиба w . Зависимость деформаций ϵ_x^0 и ϵ_y^0 от прогиба w легко определить из рис. 6.2. В самом деле, если прогиб точки A отличается от прогиба точки B , отстоящей от нее на расстоянии dx , на величину $\frac{\partial w}{\partial x} dx$, то AB' отличается по этой причине от AB на величину $\left[dx^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx\right)^2\right]^{1/2} - dx$.

Дополнительное удлинение $\Delta \epsilon_x^0$, вызванное прогибом, будет равно

$$\frac{\left[dx^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx\right)^2\right]^{1/2} - dx}{dx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2.$$

Аналогично может быть найдено дополнительное удлинение в направлении оси y , вызванное прогибом, $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$. Вместе с тем за счет влияния прогиба несколько изменяется угол сдвига — на величину $\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}$.

Таким образом, деформации срединной поверхности с учетом влияния конечных прогибов пластины выражаются

следующими формулами:

$$\epsilon_x^0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \quad \epsilon_y^0 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2,$$

$$\gamma_{xy}^0 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Кривизна срединной поверхности пластины в направлениях, параллельных осям x и y , т. е. в плоскостях xz и yz , характеризуется так же, как и кривизна оси балки при ее изгибе, величинами вторых производных $\partial^2 w / \partial x^2$ и $\partial^2 w / \partial y^2$. Если выпуклость срединной поверхности обращена в сторону положительных значений оси z (в нашем примере вниз), то при этом вторые производные будут отрицательными, а кривизна считается положительной.

Обозначим кривизны через κ_x и κ_y , тогда для кривизн получим $\kappa_x = -\partial^2 w / \partial x^2$, $\kappa_y = -\partial^2 w / \partial y^2$. Так как при изгибе пластины нормаль к срединной поверхности поворачивается одновременно как в плоскости xz , так и в плоскости yz , то элемент пластины будет испытывать кручение, величина которого измеряется смешанной второй производной $\partial^2 w / \partial x \partial y$.

Приведем окончательную сводку формул для деформаций, кривизн и кручения срединной поверхности пластины (формулы Кирхгофа):

$$\epsilon_x^0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \quad \epsilon_y^0 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2,$$

$$\gamma_{xy}^0 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (6.1)$$

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \chi = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Линейные перемещения u и v точки в слое, находящемся на расстоянии z от нейтрального, вызванные изгибом пластины, определяются в соответствии с гипотезой прямых нормалей следующими равенствами: $u'' = -z \partial w / \partial x$, $v'' = -z \partial w / \partial y$.

При этом линейные деформации ($\epsilon_x'', \epsilon_y''$) и сдвиги (γ_{xy}'') можно определить, используя формулы Коши (1.17):

$$\epsilon_x'' = \frac{\partial u''}{\partial x}, \quad \epsilon_y'' = \frac{\partial v''}{\partial y}, \quad \gamma_{xy}'' = \frac{\partial u''}{\partial y} + \frac{\partial v''}{\partial x}.$$

Тогда выражения для $\epsilon_x^n, \epsilon_y^n, \gamma_{xy}^n$ примут вид

$$\epsilon_x^n = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \epsilon_y^n = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy}^n = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

С учетом деформаций в срединной поверхности полные деформации в точке, находящейся на расстоянии z от срединной поверхности, определяются следующими формулами:

$$\epsilon_x = \epsilon_x^0 + \epsilon_x^n = \epsilon_x^0 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$\epsilon_y = \epsilon_y^0 + \epsilon_y^n = \epsilon_y^0 - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (6.2)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 + \gamma_{xy}^n = \gamma_{xy}^0 - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Перейдем к определению погонных усилий в сечении пластины. Для этого сначала выразим напряжения через деформации:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_x + \mu \epsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_y + \mu \epsilon_x),$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} = \frac{E}{1-\mu^2} \frac{1-\mu}{2} \gamma_{xy}. \quad (6.3)$$

Нормальные и касательные напряжения, вызванные изгибом пластинки $(\sigma_x^n, \sigma_y^n, \tau_{xy}^n)$, линейно изменяются по толщине пластины и вычисляются через кривизны и кручение срединной поверхности по следующим формулам:

$$\sigma_x^n = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

$$\sigma_y^n = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (6.4)$$

$$\tau_{xy}^n = -\frac{Ez}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Если проинтегрировать по толщине пластины на ширине, равной 1, нормальные напряжения, умноженные на элемент площадки $dF = 1 \times dz$, то в итоге мы получим среднее нормальное (N_x или N_y) или касательное (T) погонное усилие, т. е. усилие, приходящееся на единицу ширины пластины. Если же умножать элементарные усилия $\sigma_x^n dz$ ($\sigma_y^n dz$) или $\tau_{xy}^n dz$ на расстояние z до срединной поверхности, то в результате интегрирования получим погонные изгибающие и крутящий моменты,

Погонные усилия N_x, N_y, T , изгибающие и крутящий моменты M_x, M_y, M_{xy} выражаются следующими формулами:

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz, \quad N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz, \quad T = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz,$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x dz, \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_y dz, \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{xy} dz. \quad (6.5)$$

Положительными считаются растягивающие усилия и изгибающие моменты, соответствующие положительным кривизнам.

Если в выражения (6.5) подставить (6.3) и (6.2), то после интегрирования мы получим следующую сводку формул для погонных усилий N_x, N_y, T и изгибающих и крутящего моментов M_x, M_y, M_{xy} :

$$N_x = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\epsilon_x^0 + \mu \epsilon_y^0), \quad N_y = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\epsilon_y^0 + \mu \epsilon_x^0),$$

$$T = \frac{Eh}{1-\mu^2} \frac{1-\mu}{2} \gamma_{xy}^0,$$

$$M_x = D (\kappa_x + \mu \kappa_y) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (6.6)$$

$$M_y = D (\kappa_y + \mu \kappa_x) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

$$M_{xy} = D (1-\mu) \chi = -D (1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

В (6.6) через D обозначена величина погонной изгибной жесткости пластины, так называемая цилиндрическая жесткость

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}.$$

Деформации срединной поверхности $\epsilon_x^0, \epsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$ выражаются через перемещения формулами Кирхгофа (6.1). Эти деформации из первых трех уравнений (6.6) могут быть выражены через погонные усилия N_x, N_y, T :

$$\epsilon_x^0 = \frac{1}{Eh} (N_x - \mu N_y), \quad \epsilon_y^0 = \frac{1}{Eh} (N_y - \mu N_x),$$

$$\gamma_{xy}^0 = \frac{2(1+\mu)}{Eh} T. \quad (6.7)$$

§ 30. Уравнения совместности деформаций и равновесия

Из уравнений (6.4) для $\epsilon_x^0, \epsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$ может быть получено аналогично тому, как это было сделано ранее в гл. 1, уравнение совместности деформаций. Оно отличается от первого уравнения (1.29) наличием правой части:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x^0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y^0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^0}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (6.8)$$

Уравнение совместности деформаций (6.8) можно выразить через усилия, если воспользоваться выражениями (6.7). После подстановки (6.7) в (6.8) получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (N_x - \mu N_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (N_y - \mu N_x) - 2(1 + \mu) \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} = \\ = Eh \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]. \quad (6.9)$$

Подобно тому, как это было сделано ранее в плоской задаче теории упругости, можно напряжения выразить через функцию напряжений:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{h} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{N_y}{h} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \\ \tau_{xy} = \frac{T}{h} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (6.10)$$

После подстановки (6.10) в (6.9) уравнение совместности деформаций примет следующий вид:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]. \quad (6.11)$$

Используя, как и прежде, обозначение $\nabla^2 \nabla^2$ для бигармонического оператора, уравнение (6.11) можно записать в более компактной форме:

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]. \quad (6.12)$$

Уравнение (6.12) представляет собой уравнение совместности деформаций в задачах изгиба тонких гибких пластин.

Перейдем теперь к уравнениям равновесия гибких пластин при изгибе. На рис. 6.3 и 6.4 показаны усилия,

действующие в сечениях вырезанного элемента пластины с размерами dx и dy . На поверхности элемента действует внешнее давление q . На рис. 6.3 показаны только внутренние погонные силы — нормальные (N_x, N_y), касательные (T) и перерезывающие (Q_x, Q_y), а на рис. 6.4 — изгибающие M_x, M_y и крутящий M_{xy} моменты.

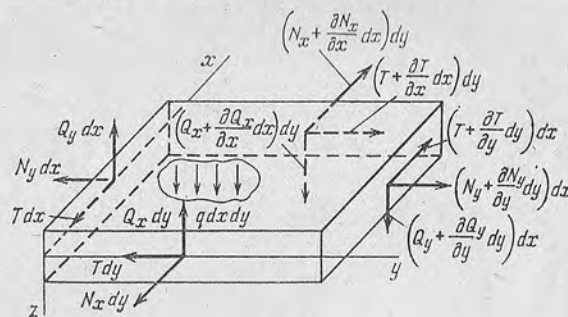


Рис. 6.3.

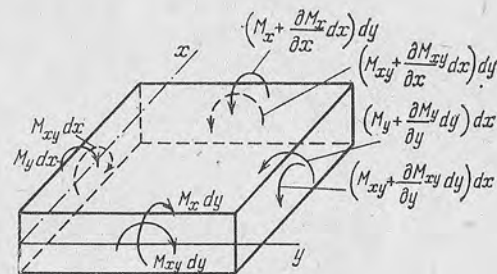


Рис. 6.4.

Рассматривая равновесие сил в направлении осей x и y , получим

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0. \quad (6.13)$$

Далее составим уравнение моментов относительно осей x и y . После сокращения на $dx dy$, пренебрегая малыми более высокого порядка, получим следующие уравнения равновесия:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0, \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0. \quad (6.14)$$

Из уравнений (6.14) следует, что, в отличие от балок, в пластинах поперечные силы зависят не только от изгибающих, но и от крутящих моментов M_{xy} .

Теперь составим уравнение равновесия всех сил, действующих на выделенный элемент пластины, спроектировав их на направление оси z . При составлении уравнения равновесия учтем также проекции усилий N_x , N_y и T , действующих в срединной поверхности.

Уравнение проекций всех сил на направление оси z будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2T \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + q = 0. \quad (6.15)$$

Если вместо Q_x и Q_y подставить соответствующие выражения из (6.14), то мы получим

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2T \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + q = 0. \quad (6.16)$$

Изгибающие и крутящий моменты можно выразить через вторые производные от прогиба, согласно (6.6), а усилия N_x , N_y , T выразить через функцию напряжений φ . Тогда уравнение равновесия (6.16) может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = \\ = \frac{q}{h} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (6.17)$$

или

$$\frac{D}{h} \nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{h} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (6.18)$$

Отметим, что так же, как и в случае плоской задачи, при использовании функции напряжений φ уравнения равновесия усилий, действующих в срединной плоскости (6.13), удовлетворяются тождественно.

Таким образом, задача изгиба тонкой гибкой пластины сводится к решению системы двух уравнений — уравнения совместности деформаций (6.12) и равновесия (6.18). Эта система уравнений впервые была получена Т. Карманом

в его докторской диссертации в 1910 г. (такая форма уравнений называется смешанной):

$$\frac{1}{E} \nabla^2 \nabla^2 \varphi = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (6.19)$$

$$\frac{D}{h} \nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{h} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

§ 31. Основные дифференциальные уравнения теории пластин

1. *Жесткие пластины.* Теория изгиба жестких пластин начинает свое развитие с работ Софи Жермен и Лагранжа задолго до появления общих уравнений Кармана, из которых уравнения равновесия жестких пластин могут быть получены как частный случай.

Для жестких пластин усилиями N_x , N_y , T можно пренебречь и полагать, что поперечная нагрузка q , действующая на пластину, уравновешивается только поперечными силами Q_x , Q_y . При этом уравнение совместности деформаций будет вообще отсутствовать, а второе уравнение системы Кармана (6.19) будет иметь более простой вид:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = q. \quad (6.20)$$

Уравнение изгиба жестких пластин (6.20) носит название *уравнения С. Жермен — Лагранжа*.

Таким образом, задача изгиба жестких пластин сводится к решению одного дифференциального уравнения (6.20) при заданных граничных условиях. На вопросе о граничных условиях в теории пластин мы остановимся специально в § 32.

2. *Гибкие пластины небольшого прогиба.* Теория изгиба гибких пластин небольшого прогиба была предложена Сен-Венаном. Особенность этой теории состоит в том, что предполагается действие больших усилий N_x , N_y , T в срединной поверхности, настолько больших, что при составлении уравнения равновесия составляющими на направление оси z от этих усилий пренебрегать нельзя. В то же время, поскольку прогибы пластины и искривления срединной поверхности считаются малыми, то правой частью в уравнении совместности деформаций можно пренебречь.

9 О. И. Теребушко

В этом случае из системы (6.19) получим

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0, \quad \frac{D}{h} \nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{h} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (6.21)$$

Теория Сен-Венана широко используется при решении задач устойчивости пластин. В этом случае усилия, действующие в срединной поверхности, велики, а прогибы и искривления определяются малыми возмущениями.

Если докритическое напряженное состояние однородно, т. е. напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} не зависят от координат срединной плоскости пластины, то уравнение совместности деформаций удовлетворяется тождественно, а второе уравнение (6.21) запишется в следующем виде:

$$\frac{D}{h} \nabla^2 \nabla^2 w = \sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\tau_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (6.22)$$

Решая уравнение (6.22), можно определять критические усилия σ_x , σ_y , τ_{xy} или их комбинации для пластины.

3. *Абсолютно гибкие пластины (мембраны).* Предполагается, что мембраны представляют собой настолько гибкие пластины, что поперечная нагрузка, действующая на них, уравновешивается только составляющими от усилий в срединной поверхности (цепных усилий). Величиной же изгибающих и крутящего моментов, равно как и поперечными силами, можно пренебречь. В то же время прогибы и искривления срединной поверхности достаточно велики, поэтому уравнение совместности деформаций имеет такой же вид, как и в системе (6.19).

Система дифференциальных уравнений изгиба мембран имеет следующий вид:

$$\frac{1}{E} \nabla^2 \nabla^2 \varphi = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{q}{h} = 0. \quad (6.23)$$

Эти уравнения были получены А. Фёпплем в 1907 г.

Рассмотрение теории изгиба жестких пластин, гибких пластин малого прогиба и абсолютно гибких пластин показывает, что теория Кармана является обобщением всех этих частных случаев и соответствующие уравнения (6.20), (6.21), (6.23) могут быть получены из общей системы уравнений Кармана (6.19) при определенных допущениях,

§ 32. Граничные условия

Рассмотрим граничные условия для гибкой прямоугольной пластины в декартовой системе координат.

Из основной системы уравнений (6.19) следует, что на каждом крае пластины должны быть заданы два условия для функции w и два условия для функции φ . В этом случае число произвольных постоянных, получающихся при интегрировании уравнений, будет равно числу граничных условий. Граничные условия для функции напряжений могут быть заданы в виде напряжений в срединной поверхности на крае пластины (τ_{xy}^0 , σ_x^0 , σ_y^0), либо в виде тангенциальных перемещений (u_0 , v_0).

В случае изгиба жестких пластин общее число граничных условий уменьшается, так как усилиями в срединной поверхности можно пренебречь. В этом случае на каждом крае пластины задается по два граничных условия для функции w .

Условия для функции прогиба w могут иметь различный вид в зависимости от характера закрепления торца. Рассмотрим некоторые из этих краевых условий.

1. *Кромка пластины свободно опирается на жесткий контур.* Так как контур жесткий, то при $x=0$ $w=0$, а условие свободного опирания соответствует равенству нулю изгибающего момента M_x на кромке:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0.$$

В направлении оси y кромки прямолинейные, поэтому $\partial^2 w / \partial y^2 = 0$ и, следовательно, $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$.

Итак, случаю свободного опирания кромки пластины $x=0$ на жесткий контур соответствуют два условия: $w=0$, $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$. Для кромки $y=0$ условию свободного опирания соответствуют

$$w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

2. *Случай жесткого защемления.* Если для кромки $x=0$ заданы условия жесткого защемления кромки пластины, то имеем $w=0$, $\partial w / \partial x = 0$, т. е. в этом случае угол поворота касательной к срединной поверхности у защемленной кромки равен нулю.

3. *Случай упруго заделанного края пластины.* Предполагаем, что контур жесткий и нормальные перемещения

на кромке отсутствуют, а поворот края пластины возможен, хотя он и не свободен, имеется упругая заделка.

В этом случае имеем

$$w = 0, \quad M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = k_1 \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Принимая во внимание, как и прежде, что на прямолинейной кромке $\partial^2 w / \partial y^2 = 0$, второе условие можно записать в виде

$$D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_1 \frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

где через k_1 обозначен коэффициент упругого защемления края. При свободном опирании $k_1 = 0$, а при жестком защемлении $k_1 = \infty$.

4. *Свободный край пластины.* Пусть при $x=0$ край пластины свободен. На первый взгляд кажется, что должны иметь место в этом случае три условия:

$$M_x = 0, \quad Q_x = 0, \quad M_{xy} = 0.$$

В таком виде граничные условия исследовались Пуассоном. Позже Кирхгоф показал, что трех условий много, так как из уравнений следует, что на каждом крае пластин для функции w должны выполняться только два, а не три условия. Этими условиями являются $M_x = 0$, $r_x = 0$, где через r_x обозначена погонная реакция на рассматриваемом свободном крае. Погонная реакция объединяет два из трех условий, рассмотренных Пуассоном:

$$r_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0.$$

Подставляя вместо Q_x и M_{xy} ранее приводившиеся выражения, получим следующие условия, соответствующие свободной кромке:

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

В этом случае, так как свободная кромка не является прямолинейной и $\partial^2 w / \partial y^2 \neq 0$, из условия $M_x = 0$ не следует, что $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$, как это имело место при свободном опирании пластины на жесткий контур.

5. *Упруго опертый край пластины.* В случае опирания кромки пластины на упругий контур граничные условия

при $x=0$ характеризуется равенствами

$$M_x = 0, \quad r_x = k_2 w,$$

где k_2 — коэффициент упругого отпора контура.

Развернув выражения для M_x и r_x , эти условия можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] + k_2 w = 0.$$

Рассмотрим некоторые примеры граничных условий, связанных с закреплением точек срединной поверхности.

Пусть, например, на кромках $x=0$, $x=a$ (см. рис. 6.1) перемещения кромок в плоскости xu ничем не стеснены. Это означает, что на этих кромках должны отсутствовать нормальные σ_x и касательные τ_{xy} напряжения. Такие граничные условия можно записать в виде $\partial^2 \varphi / \partial y^2 = 0$, $\partial^2 \varphi / \partial x \partial y = 0$ при $x=0$, $x=a$.

Другой случай, когда эти кромки жестко закреплены в направлении оси x , но допускается их скольжение вдоль оси y . В этом случае условие жесткого закрепления в направлении оси x означает, что расстояние между кромками при изгибе пластины остается неизменным, т. е. $u_{x=a} -$

$$- u_{x=0} = 0 \text{ или } \int_0^a \frac{\partial u}{\partial x} dx = 0.$$

Если выразить $\partial u / \partial x$, используя уравнения (6.1) и (6.7), через функции φ и w , то условие неподвижности кромок можно записать в следующем виде:

$$\int_0^a \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{E}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx = 0.$$

Условие свободного скольжения кромки в направлении оси y означает отсутствие касательных напряжений, т. е. $\partial^2 \varphi / \partial x \partial y = 0$.

Итак, как уже было отмечено выше, для каждой из кромок можно записать четыре граничных условия. Пусть, например, пластина свободно оперта всеми четырьмя кромками на жесткий контур и точки срединной поверхности на кромках свободно перемещаются в координатной плоскости xu . Эти граничные условия можно записать следующим образом:

на кромке отсутствуют, а поворот края пластины возможен, хотя он и не свободен, имеется упругая заделка.

В этом случае имеем

$$w = 0, \quad M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = k_1 \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Принимая во внимание, как и прежде, что на прямолинейной кромке $\partial^2 w / \partial y^2 = 0$, второе условие можно записать в виде

$$D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_1 \frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

где через k_1 обозначен коэффициент упругого защемления края. При свободном опирании $k_1 = 0$, а при жестком защемлении $k_1 = \infty$.

4. *Свободный край пластины.* Пусть при $x=0$ край пластины свободен. На первый взгляд кажется, что должны иметь место в этом случае три условия:

$$M_x = 0, \quad Q_x = 0, \quad M_{xy} = 0.$$

В таком виде граничные условия исследовались Пуассоном. Позже Кирхгоф показал, что трех условий много, так как из уравнений следует, что на каждом крае пластин для функции w должны выполняться только два, а не три условия. Этими условиями являются $M_x = 0$, $r_x = 0$, где через r_x обозначена погонная реакция на рассматриваемом свободном крае. Погонная реакция объединяет два из трех условий, рассмотренных Пуассоном:

$$r_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0.$$

Подставляя вместо Q_x и M_{xy} ранее приводившиеся выражения, получим следующие условия, соответствующие свободной кромке:

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

В этом случае, так как свободная кромка не является прямолинейной и $\partial^2 w / \partial y^2 \neq 0$, из условия $M_x = 0$ не следует, что $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$, как это имело место при свободном опирании пластины на жесткий контур.

5. *Упруго опертый край пластины.* В случае опирания кромки пластины на упругий контур граничные условия

при $x=0$ характеризуется равенствами

$$M_x = 0, \quad r_x = k_2 w,$$

где k_2 — коэффициент упругого отпора контура.

Развернув выражения для M_x и r_x , эти условия можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] + k_2 w = 0.$$

Рассмотрим некоторые примеры граничных условий, связанных с закреплением точек срединной поверхности.

Пусть, например, на кромках $x=0$, $x=a$ (см. рис. 6.1) перемещения кромок в плоскости xu ничем не стеснены. Это означает, что на этих кромках должны отсутствовать нормальные σ_x и касательные τ_{xy} напряжения. Такие граничные условия можно записать в виде $\partial^2 \varphi / \partial y^2 = 0$, $\partial^2 \varphi / \partial x \partial y = 0$ при $x=0$, $x=a$.

Другой случай, когда эти кромки жестко закреплены в направлении оси x , но допускается их скольжение вдоль оси y . В этом случае условие жесткого закрепления в направлении оси x означает, что расстояние между кромками при изгибе пластины остается неизменным, т. е. $u_{x=a} -$

$$- u_{x=0} = 0 \text{ или } \int_0^a \frac{\partial u}{\partial x} dx = 0.$$

Если выразить $\partial u / \partial x$, используя уравнения (6.1) и (6.7), через функции φ и w , то условие неподвижности кромок можно записать в следующем виде:

$$\int_0^a \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{E}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx = 0.$$

Условие свободного скольжения кромки в направлении оси y означает отсутствие касательных напряжений, т. е. $\partial^2 \varphi / \partial x \partial y = 0$.

Итак, как уже было отмечено выше, для каждой из кромок можно записать четыре граничных условия. Пусть, например, пластина свободно опирается всеми четырьмя кромками на жесткий контур и точки срединной поверхности на кромках свободно перемещаются в координатной плоскости xu . Эти граничные условия можно записать следующим образом:

при $x = 0, a$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0,$$

при $y = 0, b$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0.$$

§ 33. Уравнения равновесия гибких пластин в перемещениях

Ранее были получены уравнения совместности деформаций и равновесия гибких пластин в смешанной форме (уравнения (6.19) Кармана). Искомыми функциями координат точек при решении задачи изгиба пластин являлись функции прогиба w и напряжений φ .

В то же время все величины, характеризующие напряженное состояние при изгибе гибких пластин, могут быть выражены через перемещения u, v, w . При этом и уравнения равновесия гибкой пластины (6.13), (6.15) также можно представить через перемещения.

Если деформации $\epsilon_x^0, \epsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$ по формулам Кирхгофа (6.1) подставить в уравнения (6.6), то погонные усилия N_x, N_y, T могут быть выражены через перемещения:

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{1-\mu^2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \mu \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}, \\ N_y &= \frac{Eh}{1-\mu^2} \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \mu \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right\}, \\ T &= \frac{Eh}{1-\mu^2} \frac{1-\mu}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right]. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Далее, подставив найденные выражения N_x, N_y, T в (6.13) и (6.16), получим следующую систему трех уравнений равновесия гибких пластин в перемещениях:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \\ + \frac{\partial w}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0, \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \\ + \frac{\partial w}{\partial y} \left[\frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = 0, \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned} DV^2 \nabla^2 w = q + \frac{Eh}{1-\mu^2} \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \mu \frac{\partial v}{\partial y} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + (1-\mu) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Система уравнений (6.25)–(6.27) описывает деформированное состояние гибких пластин в предположении, что величины прогибов w достаточно велики и имеют один порядок с толщиной пластины.

Из уравнений (6.25)–(6.27), так же как из системы уравнений Кармана (6.19), можно получить как частный случай уравнения, соответствующие теориям изгиба жестких пластин (уравнение С. Жермен), гибких пластин небольшого прогиба (теория Сен-Венана), абсолютно гибких пластин (мембран).

В самом деле, если пластины жесткие и усилиями в срединной плоскости (N_x, N_y, T) можно пренебречь, то первые два уравнения системы исчезают, а в уравнении (6.27) можно положить равным нулю выражение, стоящее в фигурных скобках в правой части. Тогда из системы (6.25)–(6.27) остается только одно уравнение С. Жермен

$$DV^2 \nabla^2 w = q.$$

Если допустить, что усилия в срединной плоскости (N_x, N_y, T) достаточно велики, а перемещения w малы (теория Сен-Венана), то в уравнениях (6.25)–(6.27) можно пренебречь членами, представляющими собой произведения производных от функции прогиба. Тогда эта система примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0, \quad (6.28)$$

$$\frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad (6.29)$$

$$\begin{aligned} DV^2 \nabla^2 w = q + \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (1-\mu) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Уравнения (6.28)–(6.30) соответствуют уравнениям (6.21) теории Сен-Венана.

Для абсолютно гибких пластин характерно пренебрежение изгибной жесткостью. Полагая $D=0$, из системы уравнений (6.25)–(6.27) получим уравнения равновесия абсолютно гибких пластин (мембран) в перемещениях. Эти уравнения будут эквивалентны уравнениям (6.23) А. Фёпеля.

Таким образом, как видим, из системы уравнений (6.25)–(6.27) легко получить уравнения равновесия в перемещениях для всех рассмотренных выше частных случаев теории тонких пластин.

Задачи изгиба пластин решать в перемещениях удобнее, чем в смешанной форме, в тех случаях, когда граничные условия заданы в перемещениях.

Если задача теории упругости решается в перемещениях, то нет необходимости в использовании условий совместности деформаций. Поскольку искомыми функциями являются перемещения u , v , w , то условия совместности деформаций удовлетворяются автоматически.

§ 34. Потенциальная энергия изогнутой пластины

Полная энергия изогнутой пластины $\mathcal{E}$ складывается из потенциальной энергии деформации пластинки W и потенциала внешней нагрузки V , равного работе внешних сил A , взятой с обратным знаком:

$$\mathcal{E} = W + V = W - A. \quad (6.31)$$

Потенциальную энергию деформации в свою очередь можно рассматривать как сумму потенциальной энергии, соответствующей деформациям в срединной поверхности W_c , и потенциальной энергии изгиба W_n , т. е.

$$\mathcal{E} = W_c + W_n - A. \quad (6.32)$$

Получим выражение для потенциальной энергии срединной поверхности W_c прямоугольной пластины со сторонами a , b и толщиной h , представленное через усилия:

$$W_c = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b (N_x \epsilon_x^0 + N_y \epsilon_y^0 + T \gamma_{xy}^0) dx dy. \quad (6.33)$$

Подставив в (6.33) вместо ϵ_x^0 , ϵ_y^0 , γ_{xy}^0 соответствующие выражения (6.7), получим

$$W_c = \frac{1}{2Eh} \int_0^a \int_0^b [N_x^2 - 2\mu N_x N_y + N_y^2 + 2(1+\mu)T^2] dx dy. \quad (6.34)$$

Заменяя в (6.34) N_x , N_y , T через функцию напряжений φ по (6.10), после преобразований получим следующее выражение для энергии срединной поверхности:

$$W_c = \frac{h}{2E} \int_0^a \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1+\mu) \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy. \quad (6.35)$$

Перейдем к выражению для потенциальной энергии изгиба пластинки:

$$W_n = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b (M_x \kappa_x + M_y \kappa_y + 2M_{xy} \chi) dx dy, \quad (6.36)$$

где через M_x , M_y , M_{xy} обозначим погонные изгибающие и крутящий моменты, а κ_x , κ_y и χ — кривизны и кручение срединной поверхности.

Подставив в (6.36) вместо κ_x , κ_y , χ соответствующие выражения из (6.1) и вместо M_x , M_y , M_{xy} — из (6.6), после преобразований получим

$$W_n = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy. \quad (6.37)$$

Выражению (6.37) можно придать также и другой, часто используемый в теории пластин, вид:

$$W_n = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\mu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy. \quad (6.38)$$

Как уже отмечалось выше, потенциал внешней нагрузки выражается через работу внешних сил:

$$V = -A = - \left\{ h \int_0^b \left[p_x u + s v + \left(p_x \frac{\partial w}{\partial x} + s \frac{\partial w}{\partial y} \right) w \right] dy \right\}_{x=0}^{x=a} - \\ - \left\{ h \int_0^a \left[p_y v + s u + \left(p_y \frac{\partial w}{\partial y} + s \frac{\partial w}{\partial x} \right) w \right] dx \right\}_{y=0}^{y=b} - \\ - \int_0^a \int_0^b q w dx dy. \quad (6.39)$$

В выражении (6.39) первый член, заключенный в фигурные скобки, представляет собой работу контурных внешних нагрузок — нормальной p_x и касательной s , приложенных к границам контура $x=0$, $x=a$. При этом члены $p_x u$ и $s v$ равны работе этих нагрузок в направлении перемещений по осям x и y соответственно, а член $\left(p_x \frac{\partial w}{\partial x} + s \frac{\partial w}{\partial y} \right) w$ представляет собой работу вертикальных проекций, нормальных к срединной поверхности, на перемещениях w точек контура. Если пластина опирается на жесткий контур, то перемещения w точек контура равны нулю и эти члены выпадают. В случае, если пластина имеет свободный край либо опирается на упругий контур, в выражении для работы следует учитывать и эти члены. Второй член, заключенный в фигурные скобки в выражении (6.39), относится к работе внешних нагрузок p_y и s , приложенных к граням $y=0$, $y=b$.

Наконец, третий член представляет собой работу распределенного по поверхности пластины давления q , нормального к срединной плоскости. За положительное принимается направление давления в сторону положительных значений w (см. рис. 6.1).

§ 35. Уравнения осесимметричного изгиба круглых пластин

Рассмотрим круглую пластину радиуса R и толщиной h , подвергающуюся осесимметричному изгибу. Поскольку мы полагаем изгиб пластинки осесимметричным, то все напряжения и деформации в пластинке будут зависеть

только от одной координаты r и не будут зависеть от другой координаты θ . Направим ось z вниз, как это показано на рис. 6.5.

Если полагать, что пластинка относится к классу жестких пластин и прогибы ее достаточно малы, так что величиной $(dw/dr)^2$ по сравнению с производной du/dr можно пренебречь, то относительные деформации срединной поверхности ϵ_r^0 , ϵ_θ^0 , $\gamma_{r\theta}^0$ будут иметь такие же выражения, как и в случае плоской осесимметричной задачи в полярной системе координат:

$$\epsilon_r^0 = \frac{du}{dr}, \quad \epsilon_\theta^0 = \frac{u}{r}, \quad \gamma_{r\theta}^0 = 0. \quad (6.40)$$

В тех случаях, когда прогибы пластины достаточно велики, и величиной $(dw/dr)^2$ по сравнению с du/dr пренебрегать нельзя, радиальную деформацию ϵ_r^0 следует вычислять по формуле

$$\epsilon_r^0 = \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2. \quad (6.41)$$

Перейдем к определению главных кривизн κ_r и κ_θ в случае осесимметричного изгиба круглой пластины.

Возьмем на пластинке произвольную точку M , отстоящую от начала координат O на расстоянии r . Из точки M восстановим нормаль к кривой AB , получающейся при радиальном сечении круглой пластины. Эта нормаль пересечет ось в точке N . Касательная к кривой AB в точке M наклонена к оси r под углом $\psi = -dw/dr$. Здесь знак минус стоит потому, что при увеличении r на величину dr угол ψ получает положительное приращение $d\psi$, а прогиб — отрицательное приращение dw . Кривизна кривой AB : $\kappa_r = -\frac{d^2 w}{dr^2}$; это — кривизна срединной поверхности круглой пластины в радиальном сечении.

Величину кривизны κ_θ мы получим, исходя из следующих соображений. В силу осесимметричности рассматриваемой задачи изгиба круглой пластины прямая MN

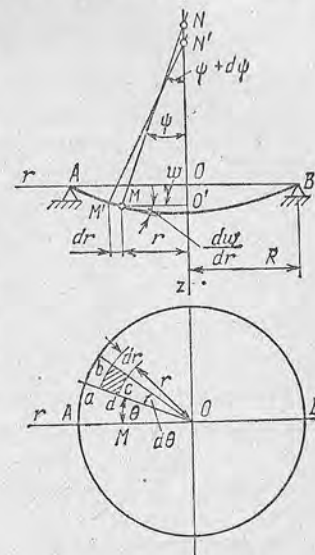


Рис. 6.5.

описывает коническую поверхность, а образующая конуса MN является вторым главным радиусом кривизны, т. е. кривизна $\kappa_\theta = 1/|MN|$, а $MN = r/\sin \psi$, или, полагая $\sin \psi = \psi$ в силу малости угла ψ , получим $\kappa_\theta = \psi/r$. Выше мы показали, что $\psi = -dw/dr$, следовательно, для κ_θ можно записать и другое выражение:

$$\kappa_\theta = -\frac{1}{r} \frac{dw}{dr}.$$

Из условия осесимметричности задачи следует, что кручение срединной поверхности χ будет равно нулю.

Выпишем сводку формул для деформаций и кривизн срединной поверхности при осесимметричном изгибе круглой пластины:

$$\epsilon_r^0 = \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2, \quad \epsilon_\theta^0 = \frac{u}{r}, \quad \gamma_{r\theta}^0 = 0, \quad (6.42)$$

$$\kappa_r = -\frac{d^2w}{dr^2}, \quad \kappa_\theta = -\frac{1}{r} \frac{dw}{dr}, \quad \chi = 0.$$

Из первых трех уравнений (6.42) можно получить уравнение совместности деформаций в следующем виде:

$$\frac{d}{dr} (r \epsilon_\theta^0) - \epsilon_r^0 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 = 0. \quad (6.43)$$

В справедливости уравнения (6.43) легко убедиться простой подстановкой выражений ϵ_r^0 и ϵ_θ^0 из (6.42).

Перейдем к выводу уравнений равновесия. Выделим из круглой пластины (см. рис. 6.5) элемент $abcd$ двумя радиальными сечениями с углом $d\theta$ между ними и двумя концентрическими сечениями, отстоящими друг от друга на расстоянии dr . Рассмотрим усилия, действующие по сторонам выделенного сечения (рис. 6.6). В радиальных сечениях ad и bc будут действовать только нормальные силы N_θ и изгибающие моменты M_θ , причем, поскольку усилия и деформации не зависят от угла θ , величины этих усилий в сечениях ad и bc будут одинаковы. В сечениях ab и dc будет действовать, помимо нормального усилия N_r и изгибающего момента M_r , также поперечная сила Q . Эти усилия являются функциями только координаты r .

Спроектируем все силы, действующие на выделенный элемент, на направление радиуса r . При этом мы получим

$$(N_r + dN_r)(r + dr)d\theta - N_r r d\theta - N_\theta dr d\theta = 0.$$

После сокращения на $dr d\theta$ и отбрасывания $dN_r dr d\theta$ как величины более высокого порядка малости уравнение равновесия сил примет вид

$$N_r - N_\theta + r \frac{dN_r}{dr} = 0, \quad (6.44)$$

или

$$\frac{d}{dr} (r N_r) - N_\theta = 0. \quad (6.45)$$

Составим уравнение моментов относительно оси, перпендикулярной к радиусу r . При этом будем иметь

$$(M_r + dM_r)(r + dr)d\theta - M_r r d\theta + Qr dr d\theta - M_\theta dr d\theta = 0.$$

После сокращения на $dr d\theta$ и отбрасывания $dM_r dr d\theta$ как

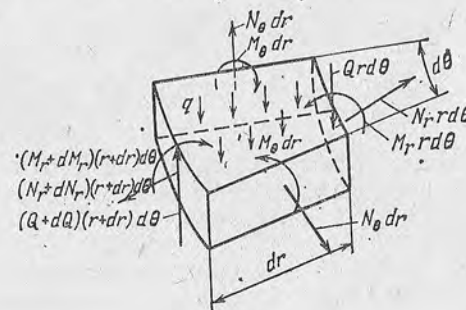


Рис. 6.6.

величины более высокого порядка малости получим следующее уравнение:

$$r \frac{dM_r}{dr} + M_r - M_\theta + Qr = 0, \quad (6.46)$$

или

$$\frac{d}{dr} (r M_r) - M_\theta = -Qr. \quad (6.47)$$

Уравнение (6.47) после сокращения r можно представить также в следующем виде:

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{1}{r} (M_r - M_\theta) = -Q. \quad (6.48)$$

Поперечная сила Q может быть определена из уравнения равновесия сил, спроектированных на ось z .

Если вырезать круглую пластинку с радиусом r и центром O из пластины, показанной на рис. 6.5, то уравнение равновесия сил на ось z можно записать для такой жесткой пластины в следующем виде:

$$Q2\pi r - \int_0^r 2\pi r q dr = 0, \quad (6.49)$$

Здесь предполагается, что поперечное давление q зависит только от координаты r .

Если полагать, что пластинка гибкая и поперечная нагрузка q уравнивается не только поперечными силами Q , но и вертикальными проекциями от цепных усилий N_r , то в уравнении равновесия (6.49) добавится еще один член:

$$Q2\pi r + N_r 2\pi r \frac{dw}{dr} - \int_0^r 2\pi r q dr = 0. \quad (6.50)$$

В дальнейшем будем полагать, что круглые пластинки — жесткие, и составляющей от цепных усилий N_r можно пренебречь. Тогда для поперечной силы Q получим выражение

$$Q = \frac{1}{r} \int_0^r q r dr. \quad (6.51)$$

Подставив выражение (6.51) в уравнение (6.47) или (6.48), получим уравнение моментов в следующем виде:

$$\frac{d}{dr}(rM_r) - M_\theta = - \int_0^r q r dr. \quad (6.52)$$

Для того чтобы представить уравнение (6.52) в перемещениях, необходимо предварительно выразить изгибающие моменты M_r и M_θ через кривизны срединной поверхности:

$$\begin{aligned} M_r &= D(\kappa_r + \mu\kappa_\theta) = -D\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\mu}{r}\frac{dw}{dr}\right), \\ M_\theta &= D(\kappa_\theta + \mu\kappa_r) = -D\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \mu\frac{d^2w}{dr^2}\right). \end{aligned} \quad (6.53)$$

Далее, подставив (6.53) в (6.52), после сокращений получим

$$D\left(r\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right) = Qr = \int_0^r q r dr, \quad (6.54)$$

После дифференцирования правой и левой частей уравнения (6.54) по r получим следующее окончательное уравнение равновесия для круглой пластины, подвергающейся осесимметричному изгибу поперечным давлением q , зависящим только от координаты r :

$$\frac{d^4w}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3w}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{dw}{dr} = \frac{q}{D}. \quad (6.55)$$

Уравнение (6.55) можно представить также и в более компактной форме:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right]\right\} = \frac{q}{D}. \quad (6.56)$$

Задача осесимметричного изгиба жестких пластин сводится к решению одного уравнения (6.56). В этом случае усилиями, действующими в срединной поверхности, можно пренебречь, и уравнения равновесия (6.45) и совместности деформаций (6.43) удовлетворяются тождественно.

При расчете гибких круглых пластин необходимо учитывать действие цепных нормальных усилий N_r и N_θ .

Если теперь ввести функцию напряжений φ так, чтобы $\sigma_r = \frac{N_r}{h} = \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}$, а $\sigma_\theta = \frac{N_\theta}{h} = \frac{d^2\varphi}{dr^2}$, то уравнение равновесия в срединной поверхности (6.45) будет удовлетворяться тождественно, а уравнение совместности деформаций (6.43) после замены

$$\epsilon_r^0 = \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_\theta) = \frac{1}{E}\left(\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} - \mu\frac{d^2\varphi}{dr^2}\right)$$

и

$$\epsilon_\theta^0 = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \mu\sigma_r) = \frac{1}{E}\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2} - \frac{\mu}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right)$$

примет следующий вид:

$$\frac{d^3\varphi}{dr^3} + \frac{1}{r}\frac{d^2\varphi}{dr^2} - \frac{1}{r^2}\frac{d\varphi}{dr} + \frac{E}{2r}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2 = 0. \quad (6.57)$$

В уравнение равновесия (6.47) следует в этом случае подставить Q из уравнения (6.50), в котором учитывается вертикальная составляющая от растягивающих усилий N_r .

При этом уравнение равновесия после преобразований и введения функции напряжений φ примет следующий вид:

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{q}{D} - \frac{h}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \frac{dw}{dr} \right). \quad (6.58)$$

Таким образом, в случае изгиба гибких круглых пластин, подвергающихся действию осесимметричного поперечного давления q , решение задачи сводится к интегрированию системы двух дифференциальных уравнений (6.57) и (6.58).

Перейдем к рассмотрению граничных условий при осесимметричном изгибе круглых пластин. В случае изгиба жестких пластин достаточно задать для края пластины два условия.

Так, например, если круглая жесткая пластина свободно опирается на жесткий контур, то граничные условия при $r=R$ будут иметь вид

$$w = 0, \quad M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right) = 0. \quad (6.59)$$

К этому в силу осесимметричности изгиба пластины добавляются два условия в центре пластины при $r=0$, если в центре нет отверстия:

$$\frac{dw}{dr} = 0 \text{ и } Q = 0, \text{ или } \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} = 0. \quad (6.60)$$

Последнее условие можно записать в более компактной форме:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] = 0. \quad (6.61)$$

В случае, если круглая пластинка жестко закреплена по контуру, то условия на контуре представятся в виде

$$w = 0, \quad \frac{dw}{dr} = 0 \text{ при } r = R.$$

В то же время условия в центре пластины при осесимметричном изгибе всегда будут иметь одинаковый вид (6.60).

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

✓ 1. Какие дополнительные допущения принимаются в теории тонких пластин?

✓ 2. На какие классы можно разделить тонкие пластины в зависимости от характера напряженного состояния?

✓ 3. Как выражаются деформации $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$ срединной поверхности гибких тонких пластин через перемещения u_0, v_0, w ?

✓ 4. Как выражаются кривизны κ_x, κ_y и кручение χ через перемещение w ?

✓ 5. Как определяются деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ для слоя пластины, отстоящего от срединного на расстоянии z ?

✓ 6. Как выражаются погонные усилия N_x, N_y, T , действующие в срединной поверхности, через деформации $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$?

✓ 7. Как выражаются погонные изгибающие M_x, M_y и крутящий M_{xy} моменты через перемещения w ?

✓ 8. Что называется цилиндрической жесткостью пластины?

✓ 9. Как записывается уравнение совместности деформаций для гибких пластин: а) через деформации, б) через функцию напряжений φ ?

✓ 10. Запишите уравнения равновесия для гибких пластин в силах.

11. Запишите систему уравнений Кармана для изгиба гибких пластин.

12. Покажите, как уравнение изгиба жестких пластин С. Жермена — Лагранжа может быть получено из системы уравнений Кармана.

13. В чем особенности теории гибких пластин малого изгиба Сен-Венана?

14. В чем особенности теории абсолютно гибких пластин (мембран)?

15. Сколько граничных условий для каждого края пластины должно быть установлено в случае изгиба пластин: а) жестких, б) гибких?

16. Как записать граничные условия для свободно опертой на жесткий контур пластины?

17. Как записать граничные условия для жестко защемленного контура пластины?

18. Как выражается потенциальная энергия срединной поверхности пластины W_0 через функцию напряжений φ ?

19. Как выражается потенциальная энергия изгиба пластины W_{II} через функцию прогиба w ?

20. Поясните составляющие члены уравнения работы внешних нагрузок (6.39).

21. Как выражаются деформации и кривизны через перемещения в случае осесимметричного изгиба круглых пластин?

22. Как записывается уравнение равновесия осесимметричного изгиба круглых жестких пластин через перемещения?

23. Какой вид имеют граничные условия в случае осесимметричного изгиба круглых пластин?

24. Какие условия для функции w вытекают из условия осесимметричной изгибной деформации в центре круглой пластины без отверстия (при $r=0$)?

10 О. И. Теребушко

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ИЗГИБА
И УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИН

§ 36. Цилиндрический изгиб пластин

Цилиндрическим изгибом называется такой изгиб пластин, когда срединная поверхность при изгибе принимает цилиндрическую форму. Такая форма поверхности получается, например, при изгибе длинной прямоугольной пластинки поперечной нагрузкой, не зависящей от координаты, в направлении длинной стороны пластинки.

Пусть мы имеем прямоугольную пластинку со сторонами a и b , причем $b \gg a$ (рис. 7.1). В этом случае на некотором удалении от коротких кромок под действием поперечной нагрузки срединная поверхность пластинки принимает форму, близкую к цилиндрической. Строго говоря, цилиндрическая форма срединной поверхности соответствует отношению $b/a = \infty$. Однако сравнительные расчеты, выполненные для пластинки с конечным отношением сторон b/a и для

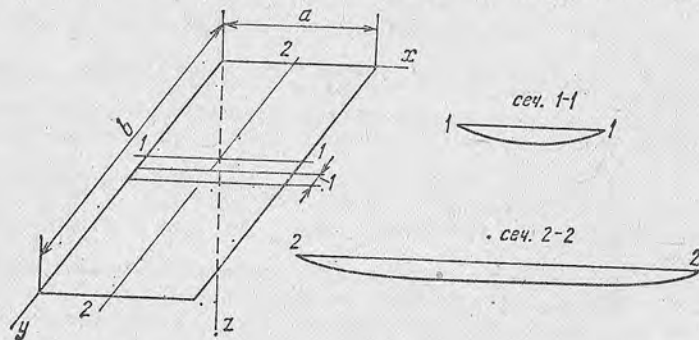


Рис. 7.1.

бесконечно длинной пластинки, показывают, что уже при отношении $b/a = 5$ величины максимальных изгибающих моментов и максимальных прогибов сравниваемых пластинок отличаются менее чем на $1/2\%$.

В случае цилиндрического изгиба пластинки напряжения, деформации и прогибы w зависят только от одной координаты x . Для исследования из длинной пластинки можно вы-

делить полосу шириной, равной 1 (см. рис. 7.1), и рассматривать изгиб этой балки-полоски с теми граничными условиями, которые имеют место на длинных сторонах пластины.

Если края пластины не закреплены и могут свободно смещаться при изгибе поперечной нагрузкой q , то уравнение изгиба балки-полоски можно получить из уравнения С. Жермен — Лагранжа (6.20):

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = q. \quad (7.1)$$

Из курса сопротивления материалов известно уравнение изгиба балки в виде $EI \frac{d^2 w}{dx^2} = M$, или $EI \frac{d^4 w}{dx^4} = q$.

Сравнивая это выражение с (7.1), отмечаем, что для балки-полоски с шириной, равной 1, роль изгибной жесткости EI играет цилиндрическая жесткость $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$. Здесь момент инерции сечения $I = 1 \cdot h^3/12$, а вместо модуля E стоит отношение $E/(1-\mu^2)$, так как полоска, выделенная из пластины, подвергающейся цилиндрическому изгибу, не может свободно деформироваться в боковом направлении ($\varepsilon_y = 0$) и, следовательно, $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E/(1-\mu^2)}$.

Рассмотрим наиболее простой случай цилиндрического изгиба жесткой пластины, свободно опертой на длинных кромках и нагруженной равномерно распределенным давлением q .

В этом случае интегрирование уравнения (7.1) при условии $q = \text{const}$ дает

$$w = \frac{q}{D} \left(\frac{x^4}{24} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 \right). \quad (7.2)$$

Принимая во внимание заданные граничные условия при $x = 0, a$

$$w = 0, \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = 0,$$

находим значения произвольных постоянных интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 :

$$C_1 = -a/2, \quad C_2 = C_4 = 0, \quad C_3 = a^3/24.$$

При этом уравнение для прогиба срединной поверхности

будет иметь следующий вид:

$$w = \frac{q}{D} \left(\frac{x^4}{24} - \frac{ax^3}{12} + \frac{a^3x}{24} \right). \quad (7.3)$$

Зная уравнение прогиба, найдем величину максимальных значений прогиба $w_{\max}$, изгибающего момента $M_{\max}$ и напряжения $\sigma_{\max}$. Максимальные значения $w_{\max}$, $M_{\max}$, $\sigma_{\max}$ будут соответствовать среднему сечению балки-полоски, т. е. $x = a/2$:

$$w_{\max} = \frac{5}{384} \frac{qa^4}{D},$$

$$M_{\max} = -D \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)_{x=a/2} = \frac{qa^2}{8},$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{h^2/6} = \frac{3}{4} q \frac{a^2}{h^2}.$$

В случае защемленных подвижных кромок граничные условия имеют вид

$$w = 0, \quad \frac{dw}{dx} = 0 \quad \text{при } x = 0, a.$$

При этом произвольные постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 оказываются равными $C_1 = -a/2, C_2 = a^2/12, C_3 = C_4 = 0$.

Уравнение прогиба балки-полоски с защемленными кромками будет

$$w = \frac{q}{D} \left(\frac{x^4}{24} - \frac{ax^3}{12} + \frac{a^2x^2}{24} \right). \quad (7.4)$$

Найдем величины изгибающих моментов и напряжений в заделке и середине балки-полоски:

$$M_{x=0} = -D \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)_{x=0} = -\frac{qa^2}{12}, \quad (\sigma_{\max})_{x=0} = \frac{qa^2}{2h^2},$$

$$M_{x=a/2} = -D \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)_{x=a/2} = \frac{qa^2}{24}, \quad (\sigma_{\max})_{x=a/2} = \frac{qa^2}{4h^2}.$$

В случае заделанных кромок максимальные изгибающие моменты и максимальные изгибные напряжения будут возникать в концевых сечениях балки-полоски. В среднем сечении напряжения и изгибающие моменты в два раза меньше, чем в заделке.

Максимальный прогиб пластины в середине пролета при $x = a/2$ равен $w_{\max} = \frac{1}{384} \frac{qa^4}{D}$.

Полученные результаты для балки-полоски с подвижными концами соответствуют результатам, известным из курса сопротивления материалов.

Более сложной является задача о цилиндрическом изгибе пластины поперечной нагрузкой при неподвижных кромках. Эта задача впервые была решена И. Г. Бубновым в 1902 г.

Пусть удлиненная пластина свободно опирается на жесткие опоры так, что кромки ее не могут смещаться. Тогда при изгибе пластины равномерно распределенным давлением q в срединной поверхности возникнут цепные усилия N_x , влияние которых следует учитывать в уравнении равновесия.

Балка-полоска шириной 1, выделенная из удлиненной пластины, показана на рис. 7.2.

Уравнение равновесия элемента балки-полоски можно получить из уравнения (6.18) предыдущей главы, принимая во внимание, что $N_x = h \partial^2 \varphi / \partial y^2 = \text{const}$ и что напряжения, деформации и перемещения зависят только от координаты x . При этом получим следующее уравнение цилиндрического изгиба пластины с закрепленными длинными кромками:

$$\frac{d^4w}{dx^4} - \frac{N_x}{D} \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{q}{D}. \quad (7.5)$$

Если ввести безразмерный параметр $u = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{N_x}{D}}$, то уравнение (7.5) можно записать в следующем виде:

$$\frac{d^4w}{dx^4} - 4 \frac{u^2}{a^2} \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{q}{D}. \quad (7.6)$$

После интегрирования линейного неоднородного уравнения (7.6) и определения четырех произвольных постоянных из заданных граничных условий $w = 0, d^2w/dx^2 = 0$ при $x = 0, a$ получим следующее выражение для w :

$$w = \frac{qa^4}{16u^4D} \left[\frac{\text{ch}(1-2x/a)}{\text{ch } u} - 1 \right] + \frac{qa^2x}{8u^2D} (a-x). \quad (7.7)$$

В уравнение (7.7) входит неизвестный параметр u , зависящий от величины цепного усилия N_x . Величина N_x , а следовательно, и параметр u могут быть найдены из условия неподвижности кромок пластины.

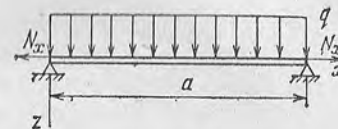


Рис. 7.2.

Удлинение выделенной полоски пластины под действием сил N_x и прогиба можно записать в следующем виде:

$$\Delta a = \frac{N_x(1-\mu^2)a}{Eh} - \frac{1}{2} \int_0^a \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx = 0. \quad (7.8)$$

Если в уравнение (7.8) подставить выражение dw/dx из (7.7), то после интегрирования и упрощений можно получить окончательное уравнение для определения параметра u . Величина параметра u зависит от упругих характеристик материала (E, μ), размеров пластины (a/h) и величины поперечного давления q .

Полное напряжение в пластинке определяется как сумма напряжений от действия изгибающего момента M и от цепного растягивающего усилия N_x :

$$\sigma = \sigma_M + \sigma_N,$$

$$\text{где } \sigma_M = \frac{M}{h^2/6} = -\frac{D \partial^2 w / \partial x^2}{h^2/6} = -\frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \sigma_N = \frac{N_x}{h}.$$

Суммарное напряжение, действующее в пластине, нелинейно зависит от поперечного давления q . Характер зависимости σ от q показан на графике рис. 7.3. При значительных величинах поперечного давления q напряжения в пластинах с неподвижными кромками оказываются значительно меньше, чем в таких же пластинах с подвижными кромками, за счет уменьшения изгибного напряжения. Максимальный прогиб в середине пластины также оказывается во много раз меньше, чем для пластины с подвижными кромками*).

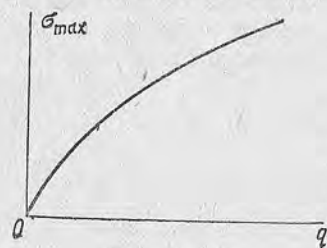


Рис. 7.3.

§ 37. Чистый изгиб пластин

Чистым изгибом стержня, как известно из курса сопротивления материалов, называют такой изгиб, при котором касательные напряжения в сечениях стержня равны нулю,

*) Подробное исследование влияния параметров пластины на напряжения и прогибы при цилиндрическом изгибе свободно опертых и защемленных пластин с неподвижными кромками можно найти в книге: Тимошенко С. П., Войновский К. Ригер С. Пластинки и оболочки. — М.: Наука, 1966.

а поперечное сечение поворачивается, оставаясь плоским и нормальным к деформированной оси.

Аналогично, чистым изгибом пластин называют такой, при котором прямая, нормальная к срединной плоскости до деформации, остается прямой и нормальной к срединной поверхности и после изгиба пластины. При этом касательные напряжения τ_{xz}, τ_{yz} равны нулю.

Чистый изгиб пластин имеет место, например, тогда, когда пластина нагружена по кромкам постоянными распределенными изгибающими моментами.

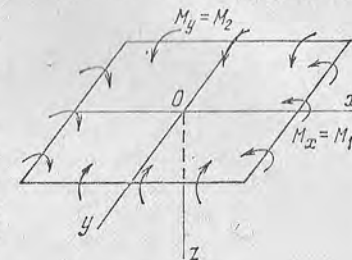


Рис. 7.4.

Рассмотрим случай чистого изгиба прямоугольной пластинки равномерно распределенными по кромкам положительно направленными изгибающими моментами $M_x = M_1$ и $M_y = M_2$ (рис. 7.4). При этом крутящие моменты в сечениях, параллельных координатным осям, возникать не будут, т. е. $M_{xy} = 0$.

Связь между изгибающими моментами и кривизнами устанавливается выражениями (6.6):

$$\begin{aligned} M_x = M_1 &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y = M_2 &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \quad (7.9)$$

Разрешая систему уравнений (7.9) относительно вторых производных $\partial^2 w / \partial x^2$ и $\partial^2 w / \partial y^2$, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{M_1 - \mu M_2}{D(1-\mu^2)}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{M_2 - \mu M_1}{D(1-\mu^2)}. \quad (7.10)$$

Интегрируя уравнения (7.10), получим

$$w = -\frac{M_1 - \mu M_2}{2D(1-\mu^2)} x^2 - \frac{M_2 - \mu M_1}{2D(1-\mu^2)} y^2 + C_1 x + C_2 y + C_3. \quad (7.11)$$

Произвольные постоянные C_1, C_2, C_3 найдем в предположении, что прогиб w отсчитывается от координатной плоскости, касательной к срединной поверхности в центре пластины (рис. 7.4). Тогда при $x=0, y=0, w=0$ и $C_3=0$.

Так как в начале координат, кроме того, будем иметь $\partial w / \partial x = \partial w / \partial y = 0$, то и $C_1 = C_2 = 0$.

Окончательно уравнение прогибов для срединной поверхности пластинки в случае чистого изгиба постоянными моментами M_1 и M_2 примет следующий вид:

$$w = -\frac{1}{2D(1-\mu^2)} [(M_1 - \mu M_2)x^2 + (M_2 - \mu M_1)y^2]. \quad (7.12)$$

Уравнение (7.12) представляет собой уравнение параболоида. Следовательно, в случае чистого изгиба постоянными моментами M_1 и M_2 пластинка изгибается по параболической поверхности.

Заметим, что при одинаковых величинах изгибающих моментов $M_1 = M_2$ и кривизны также будут одинаковы, т. е. $\partial^2 w / \partial x^2 = \partial^2 w / \partial y^2$. В этом случае срединная поверхность получит сферическую форму. В случае же различных знаков изгибающих моментов срединная поверхность приобретает форму так называемой антикластической поверхности.

§ 38. Поперечный изгиб свободно опертых прямоугольных пластин (решение Навье)

Рассмотрим поперечный изгиб свободно опертых по четырем кромкам жестких прямоугольных пластин (рис. 7.5), нагруженных произвольно распределенным по поверхности давлением $q(x, y)$.

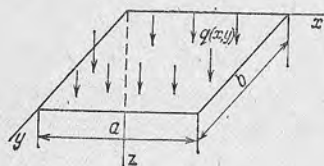


Рис. 7.5.

Уравнение изгиба жестких пластин запишем в виде

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D}. \quad (7.13)$$

Существо метода, предложенного Навье (1820 г.) для решения уравнения (7.13) в случае свободно опертых кромок, состоит в том, что функция прогиба w представляется в виде двойного тригонометрического ряда:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (7.14)$$

Каждый член ряда (7.14) удовлетворяет заданным гранич-

ным условиям

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = 0, a, \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y = 0, b.$$

Произвольную внешнюю нагрузку $q(x, y)$ можно также представить в виде двойного ряда Фурье:

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (7.15)$$

Если принять во внимание, что

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m'\pi x}{a} dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq m', \\ a/2 & \text{при } m = m', \end{cases}$$

$$\int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n'\pi y}{b} dy = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq n', \\ b/2 & \text{при } n = n', \end{cases}$$

то коэффициенты Фурье q_{mn} можно записать в форме

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (7.16)$$

Если теперь (7.14) и (7.15) подставить в уравнение (7.13), то получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \left(\frac{\pi^4 m^4}{a^4} + 2 \frac{\pi^4 m^2 n^2}{a^2 b^2} + \frac{\pi^4 n^4}{b^4} \right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{D} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

или

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{mn} \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \frac{q_{mn}}{D} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0. \quad (7.17)$$

Из уравнения (7.17) следует, что произвольный коэффициент A_{mn} будет иметь следующее выражение:

$$A_{mn} = \frac{q_{mn}}{\pi^4 D (m^2/a^2 + n^2/b^2)^2}. \quad (7.18)$$

После определения выражения (7.18) для общего члена A_{mn}

можно записать выражение прогиба в следующем виде:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{\pi^4 D (m^2/a^2 + n^2/b^2)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (7.19)$$

где q_{mn} определяется равенством (7.16).

Таким образом, в общем виде последовательность решения задачи изгиба прямоугольной пластины, свободно опертой четырьмя кромками, может быть представлена следующим образом:

1) определяются по формуле (7.16) коэффициенты Фурье разложения внешней поперечной нагрузки;

2) записывается общее выражение для прогиба по формуле (7.19);

3) определяются кривизны и кручение пластины по формулам

$$\begin{aligned} \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn} \frac{m^2}{a^2}}{\pi^2 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ \kappa_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn} \frac{n^2}{b^2}}{\pi^2 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (7.20) \\ \chi &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn} \frac{mn}{ab}}{\pi^2 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}; \end{aligned}$$

4) вычисляются максимальные изгибные нормальные и касательные напряжения в пластине по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{xi} &= -\frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_{yi} &= -\frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ \tau_{ii} &= -\frac{Eh}{2(1+\mu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

После подстановки соответствующих выражений для кривизны и кручения можно получить общие выражения для

изгибных нормальных и касательных напряжений в следующей форме:

$$\begin{aligned} \sigma_{xi} &= \frac{6}{h^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{\pi^2} \frac{m^2/a^2 + \mu n^2/b^2}{(m^2/a^2 + n^2/b^2)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ \sigma_{yi} &= \frac{6}{h^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{\pi^2} \frac{n^2/b^2 + \mu m^2/a^2}{(m^2/a^2 + n^2/b^2)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (7.21) \\ \tau_{ii} &= -\frac{6(1-\mu)}{h^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{\pi^2} \frac{mn/ab}{(m^2/a^2 + n^2/b^2)^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned}$$

Используя приведенные выше формулы, можно определять прогибы пластины и напряжения в ней для любой точки с координатами x, y . При этом необходимо производить суммирование членов двойных тригонометрических рядов.

Следует отметить, что эти ряды не всегда быстро сходятся, и для получения удовлетворительного приближения приходится брать значительное число членов ряда. Однако принципиально можно получить решение с любой степенью точности, если взять достаточно большое количество членов ряда.

Рассмотрим некоторые простейшие частные случаи решения задачи методом Навье.

Наиболее простой задачей является изгиб прямоугольной свободно опертой по краям пластины, нагруженной поперечной нагрузкой q , изменяющейся по обеим координатам по закону синуса (рис. 7.6):

$$q = q_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (7.22)$$

В этом случае прогиб w представляется одним членом ряда

$$w = A_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (7.23)$$

Здесь $m = n = 1$, и из (7.18) для A_{11} получим

$$A_{11} = \frac{q_{11}}{\pi^4 D (1/a^2 + 1/b^2)^2}. \quad (7.24)$$

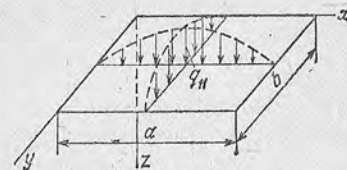


Рис. 7.6.

После подстановки (7.24) в (7.23) имеем для w выражение

$$w = \frac{q_{11}a^4}{\pi^4 D (1 + a^2/b^2)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (7.25)$$

Максимальные значения прогиба w и изгибных напряжений σ_{xi} и σ_{yi} будут соответствовать центру пластины ($x = a/2, y = b/2$):

$$\begin{aligned} w_{\max} &= \frac{q_{11}a^4}{\pi^4 D (1 + a^2/b^2)^2}, \\ \sigma_{xi} &= \frac{6}{h^2} \frac{q_{11}a^2 (1 + \mu a^2/b^2)}{\pi^2 (1 + a^2/b^2)^2}, \\ \sigma_{yi} &= \frac{6}{h^2} \frac{q_{11}a^2 (a^2/b^2 + \mu)}{\pi^2 (1 + a^2/b^2)^2}. \end{aligned}$$

Касательные напряжения в сечениях, проходящих через центр пластины, равны нулю: $\tau_{xi} = 0$.

Как следует из последней формулы (7.21), для τ_{xi} в рассматриваемом случае изгиба пластины имеем

$$\tau_{xi} = - \frac{6(1-\mu)}{h^2} \frac{q_{11}a^3}{\pi^2 b (1 + a^2/b^2)^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}.$$

При $x = a/2, y = b/2$ $\tau_{xi} = 0$. В углах пластины при $x = 0, y = 0$ или $x = 0, y = b$, а также $x = a, y = 0$ или $x = a, y = b$ касательные напряжения τ_{xi} от крутящего момента M_{xy} приобретают максимальные значения

$$\tau_{xi} = \pm \frac{6(1-\mu)}{h^2} \frac{q_{11}a^3}{\pi^2 b (1 + a^2/b^2)^2}.$$

Рассмотрим случай изгиба прямоугольной пластины равномерно распределенным по поверхности постоянным давлением q_0 .

В этом случае, разлагая q в двойной ряд Фурье, для общего члена разложения q_{mn} получим

$$q_{mn} = \frac{4q_0}{ab} \int_0^a \int_0^b \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (7.26)$$

Учитывая, что интеграл

$$\int_0^a \int_0^b \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = \frac{4ab}{\pi^2 mn}, \quad (7.27)$$

если m и n — одновременно нечетные числа, и равен нулю, если m или n , или оба вместе — четные числа, после подстановки (7.27) в (7.26) получим следующее выражение для q_{mn} :

$$q_{mn} = \frac{16q_0}{\pi^2 mn}. \quad (7.28)$$

Коэффициент A_{mn} при общем члене разложения функции прогиба w из (7.18) будет иметь следующий вид:

$$A_{mn} = \frac{16q_0}{\pi^6 D mn (m^2/a^2 + n^2/b^2)^2}, \quad (7.29)$$

а выражение для w запишем согласно (7.19):

$$w = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn (m^2/a^2 + n^2/b^2)^2}. \quad (7.30)$$

Ряд (7.30) сходится довольно быстро и уже при одном члене ряда дает удовлетворительные результаты.

Если ограничиться одним членом ряда, то для $w_{\max}$ мы получим

$$w_{\max} = \frac{16q_0 a^4}{\pi^6 D (1 + a^2/b^2)^2}. \quad (7.31)$$

Максимальные изгибные напряжения, так же как и прогиб, имеют место в центре пластины при $x = a/2, y = b/2$:

$$\sigma_{xi} = \frac{96q_0 a^2}{\pi^4 h^2} \frac{1 + \mu a^2/b^2}{(1 + a^2/b^2)^2}, \quad (7.32)$$

$$\sigma_{yi} = \frac{96q_0 a^2}{\pi^4 h^2} \frac{a^2/b^2 + \mu}{(1 + a^2/b^2)^2}. \quad (7.33)$$

Касательные напряжения от крутящего момента в центре пластины равны нулю.

Для квадратной пластины ($a = b$) выражения для максимального прогиба $w_{\max}$ и изгибных напряжений σ_{xi} , σ_{yi}

примут более простой вид:

$$w_{\max} = \frac{4q_0 a^4}{\pi^6 D} \quad (7.34)$$

$$\sigma_{xi} = \sigma_{yi} = \frac{24(1+\mu)q_0 a^2}{\pi^4 h^2} \quad (7.35)$$

§ 39. Изгиб прямоугольных пластин, две стороны которых свободно оперты, а две другие имеют произвольные граничные условия (решение М. Леви)

Рассмотрим случай изгиба прямоугольных пластинок, у которых две противоположные стороны свободно оперты, а другие две стороны имеют произвольные граничные условия. Пусть, например, стороны пластинки $x=0$, $x=a$ свободно оперты, и для этих кромок граничные условия могут быть записаны в виде

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Представим функцию прогиба w в виде ряда:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (7.36)$$

где Y_m — неизвестные функции координаты y , удовлетворяющие заданным на кромках $y=0$, b граничным условиям.

Произвольную поперечную нагрузку $q(x, y)$ также можно разложить в одинарный ряд

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (7.37)$$

где $q_m(y)$ зависит только от координаты y и определяется выражением

$$q_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} dx. \quad (7.38)$$

Если подставить выражения (7.36) и (7.37) в уравнение (7.13), то после сокращения получим обыкновенное неоднородное

родное линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка для искомой функции Y_m :

$$\frac{d^4 Y_m}{dy^4} - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{d^2 Y_m}{dy^2} + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y_m = \frac{q_m(y)}{D}. \quad (7.39)$$

Решение уравнения (7.39) представим как сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Корни характеристического уравнения будут

$$r_{1,2} = \alpha_m, \quad r_{3,4} = -\alpha_m, \quad \text{где } \alpha_m = m\pi/a.$$

Окончательно решение уравнения (7.39) можно записать в следующем виде:

$$Y_m = A_m \operatorname{ch} \alpha_m y + B_m \operatorname{sh} \alpha_m y + C_m \alpha_m y \operatorname{ch} \alpha_m y + D_m \alpha_m y \operatorname{sh} \alpha_m y + F_m(y), \quad (7.40)$$

где $F_m(y)$ — частное решение неоднородного уравнения.

Вначале рассмотрим случай поперечного изгиба прямоугольной пластины, свободно опертой всеми четырьмя сторонами и нагруженной равномерно распределенным поперечным давлением $q = q_0$.

Граничные условия задачи на кромках $y = \pm b/2$ будут $w = \partial^2 w / \partial y^2 = 0$.

Используя общее решение (7.40), найдем сначала частное решение уравнения (7.39). Для этого из (7.38) определим выражение для $q_m(y)$:

$$q_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a q_0 \sin \frac{m\pi x}{a} dx = \frac{2q_0}{a} \frac{2a}{m\pi} = \frac{4q_0}{m\pi},$$

где $m = 1, 3, 5, \dots$. Для четных значений

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} dx = 0.$$

После подстановки найденного значения $q_m(y)$ в (7.39) получим следующее выражение для $F_m(y)$, являющегося частным решением уравнения

$$F_m(y) = \frac{4q_0 a^4}{D m^5 \pi^5}. \quad (7.41)$$

Общее решение (7.40) неоднородного уравнения в этом

случае примет следующий вид:

$$Y_m = A_m \operatorname{ch}(\alpha_m y) + B_m \operatorname{sh}(\alpha_m y) + C_m \alpha_m y \operatorname{ch}(\alpha_m y) + D_m \alpha_m y \operatorname{sh}(\alpha_m y) + \frac{4q_0 a^4}{Dm^5 \pi^5}. \quad (7.42)$$

При определении произвольных постоянных $A_m \div D_m$ примем во внимание то, что при симметричной внешней нагрузке деформации, напряжения и перемещения будут представлять собой симметричные относительно оси y функции. Поэтому в выражении (7.42) коэффициенты B_m и C_m должны быть заведомо равны нулю. Остальные коэффициенты A_m и D_m найдем из заданных граничных условий

$$A_m \operatorname{ch}\left(\alpha_m \frac{b}{2}\right) + D_m \alpha_m \frac{b}{2} \operatorname{sh}\left(\alpha_m \frac{b}{2}\right) + \frac{4q_0 a^4}{Dm^5 \pi^5} = 0, \quad (7.43)$$

$$A_m \alpha_m^2 \operatorname{ch}\left(\alpha_m \frac{b}{2}\right) + 2D_m \alpha_m^2 \operatorname{ch}\left(\alpha_m \frac{b}{2}\right) + D_m \alpha_m^3 \frac{b}{2} \operatorname{sh}\left(\alpha_m \frac{b}{2}\right) = 0. \quad (7.44)$$

Решая совместно уравнения (7.43) и (7.44), найдем выражения для произвольных коэффициентов A_m и D_m :

$$A_m = -\frac{4q_0 a^4}{Dm^5 \pi^5} \frac{2 + (\alpha_m b/2) \operatorname{th}(\alpha_m b/2)}{2 \operatorname{ch}(\alpha_m b/2)}, \quad (7.45)$$

$$D_m = \frac{4q_0 a^4}{Dm^5 \pi^5} \frac{1}{2 \operatorname{ch}(\alpha_m b/2)}. \quad (7.46)$$

После подстановки найденных коэффициентов A_m и D_m в уравнение (7.42) и далее (7.36) получим следующее выражение для прогиба:

$$w = \frac{4q_0 a^4}{D\pi^5} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left\{ \frac{1}{m^5} \times \right. \\ \left. \times \left[1 + \frac{\alpha_m y \operatorname{sh}(\alpha_m y) - [2 + (\alpha_m b/2) \operatorname{th}(\alpha_m b/2)] \operatorname{ch}(\alpha_m y)}{2 \operatorname{ch}(\alpha_m b/2)} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \right\}. \quad (7.47)$$

Для квадратной пластинки имеем $b=a$, и, следовательно, $\alpha_m b/2 = \pi/2$, а $\alpha_m = \pi/a$. При вычислении прогиба w ограничимся одним членом разложения в ряде (7.47). Тогда для

w получим следующее выражение:

$$w = \frac{4q_0 a^4}{D\pi^5} \left(1 + 0,627 \frac{y}{a} \operatorname{sh} \frac{\pi y}{a} - 0,685 \operatorname{ch} \frac{\pi y}{a} \right) \sin \frac{\pi x}{a}. \quad (7.48)$$

По уравнению (7.48) подсчитаем величину максимального прогиба в центре пластинки. При $y=0$ $w_{\max} = 0,00412 q_0 a^4/D$, что отличается от точного значения менее чем на 1,5%.

Сравнение решений задачи об изгибе квадратной пластинки, свободно опертой четырьмя кромками, выполненных в первом приближении методами Навье и М. Леви, показывает, что результат второго решения несколько ближе к точному решению, чем первого. Основное же преимущество метода М. Леви состоит в том, что этот метод позволяет решать задачи с различными граничными условиями для двух противоположных кромок.

Рассмотрим решение задачи об изгибе прямоугольной пластинки, две стороны которой свободно оперты ($x=0, a$), а две другие стороны ($y=\pm b/2$) зашпелены (рис. 7.7). Пластика нагружена поперечным давлением, равномерно распределенным по поверхности, $q=q_0$.

Отличие от решения предыдущей задачи будет заключаться в том, что в соответствии с новыми граничными условиями ($w = \partial w / \partial y = 0$ при $y = \pm b/2$) иными будут выражения произвольных постоянных A_m и D_m :

$$A_m = -\frac{4q_0 a^4}{Dm^5 \pi^5} \frac{1 + \alpha_m \frac{b}{2} \operatorname{cth}\left(\alpha_m \frac{b}{2}\right)}{\operatorname{ch}\left(\alpha_m \frac{b}{2}\right) \left[1 + \alpha_m \frac{b}{2} \operatorname{cth}\left(\alpha_m \frac{b}{2}\right) - \alpha_m \frac{b}{2} \operatorname{th}\left(\alpha_m \frac{b}{2}\right) \right]}, \quad (7.49)$$

$$D_m = \frac{4q_0 a^4}{Dm^5 \pi^5} \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\alpha_m \frac{b}{2}\right) \left[1 + \alpha_m \frac{b}{2} \operatorname{cth}\left(\alpha_m \frac{b}{2}\right) - \alpha_m \frac{b}{2} \operatorname{th}\left(\alpha_m \frac{b}{2}\right) \right]}. \quad (7.50)$$

После подстановки найденных значений коэффициентов A_m , D_m в общее выражение (7.42) и далее (7.36) получим

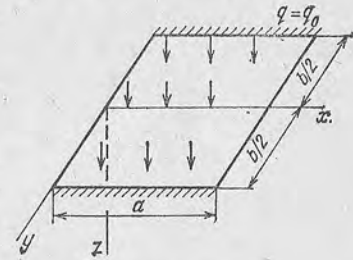


Рис. 7.7.

для функции прогиба w следующее выражение:

$$w = \frac{4q_0 a^4}{D\pi^5} \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{m^5} \times \\ \times \left[\frac{\alpha_m y \operatorname{sh}(\alpha_m y) - \left[1 + \alpha_m \frac{b}{2} \operatorname{cth}\left(\alpha_m \frac{b}{2}\right)\right] \operatorname{ch}(\alpha_m y)}{\operatorname{ch}\left(\alpha_m \frac{b}{2}\right) \left[1 + \alpha_m \frac{b}{2} \operatorname{cth}\left(\alpha_m \frac{b}{2}\right) - \alpha_m \frac{b}{2} \operatorname{th}\left(\alpha_m \frac{b}{2}\right)\right]} + 1 \right] \times \\ \times \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (7.51)$$

Для квадратной пластинки ($b=a$) $\alpha_m b/2 = \pi/2$. Если ограничиться, как и в предыдущих решениях, одним членом разложения, то

$$w = \frac{4q_0 a^4}{D\pi^5} \left(0,985 \frac{y}{a} \operatorname{sh} \frac{\pi y}{a} - 0,85 \operatorname{ch} \frac{\pi y}{a} + 1 \right) \sin \frac{\pi x}{a}.$$

Максимальный прогиб в середине пластинки будет равен

$$w_{\max} = 0,00196 \frac{q_0 a^4}{D},$$

что отличается от точного значения примерно на 2%.

Аналогичным образом решаются задачи методом М. Леви и при других граничных условиях.

§ 40. Изгиб прямоугольных пластин, защемленных по всему контуру (решение С. П. Тимошенко)

Большое значение для практики имеет решение задачи о поперечном изгибе пластины, все стороны которой жестко защемлены. Впервые эта задача решалась Б. М. Кояловичем (им получены первые численные результаты в 1902 г.), затем обстоятельно исследовалась И. Г. Бубновым (1912—1914 гг.), а также Генки, Надаи, С. П. Тимошенко и другими учеными.

Рассмотрим задачу об изгибе прямоугольной пластинки, защемленной по всему контуру, подвергающейся действию равномерно распределенного поперечного давления.

В решении задачи будем следовать методу, предложенному С. П. Тимошенко. Сначала рассмотрим изгиб пластинки, свободно опертой по кромкам и нагруженной распре-

ленными по двум противоположным кромкам моментами (рис. 7.8).

Дифференциальное уравнение срединной поверхности такой пластины будет иметь вид

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0. \quad (7.52)$$

Граничные условия на кромках $x=0, a$ будут $w = \partial^2 w / \partial x^2 = 0$, а на других двух кромках $y = \pm b/2$

$$w = 0, \quad -D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f_1(x).$$

Будем полагать, что пластинка нагружена симметрично относительно осей, проходящих через ее середину.

Решение уравнения (7.52) будем искать в виде однопериодического тригонометрического ряда:

$$w_1 = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (7.53)$$

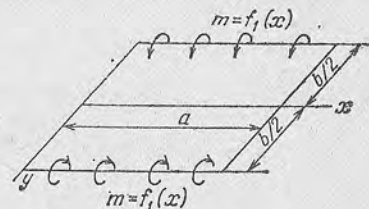


Рис. 7.8.

После подстановки (7.53) в (7.52) получим однородное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^4 Y_m}{dy^4} - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{d^2 Y_m}{dy^2} + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y_m = 0, \quad (7.54)$$

решение которого имеет вид

$$Y_m = A_m \operatorname{ch}(\alpha_m y) + B_m \operatorname{sh}(\alpha_m y) + C_m \alpha_m y \operatorname{ch}(\alpha_m y) + \\ + D_m \alpha_m y \operatorname{sh}(\alpha_m y), \quad (7.55)$$

где $\alpha_m = m\pi/a$.

Так как по условию распределенные по кромкам моменты симметричны относительно оси x , то и функция прогиба w будет также симметричной относительно этой оси. Следовательно, несимметричные члены из уравнения (7.55) должны исчезнуть, и $B_m = C_m = 0$. Коэффициенты A_m и D_m найдем из граничных условий по кромкам $y = \pm b/2$.

Предварительно представим функцию $f_1(x)$ в виде ряда:

$$f_1(x) = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (7.56)$$

где E_m определяется равенством

$$E_m = \frac{2}{a} \int_0^a f_1(x) \sin \frac{m\pi x}{a} dx. \quad (7.57)$$

Из первого граничного условия находим связь между A_m и D_m :

$$A_m = -D_m \alpha_m \frac{b}{2} \operatorname{th} \left(\alpha_m \frac{b}{2} \right). \quad (7.58)$$

Тогда Y_m можно записать в виде

$$Y_m = D_m \left[\alpha_m y \operatorname{sh} (\alpha_m y) - \alpha_m \frac{b}{2} \operatorname{th} \left(\alpha_m \frac{b}{2} \right) \operatorname{ch} (\alpha_m y) \right]. \quad (7.59)$$

Из второго граничного условия на кромках $y = \pm b/2$ имеем $-D \frac{\partial^2 Y_m}{\partial y^2} = E_m$ и после подстановки (7.59) получим следующее выражение для коэффициента D_m :

$$D_m = -\frac{E_m a^2}{2Dm^2 \pi^2 \operatorname{ch} (\alpha_m b/2)}. \quad (7.60)$$

Если допустить, что функции $f_1(x)$ симметричны относительно оси, проходящей через центр пластины, то функция w будет также симметричной относительно этой оси, а следовательно, m будут нечетны. После подстановки (7.60) в (7.59) и далее (7.53) получим следующее выражение для прогиба w_1 :

$$w_1 = \frac{a^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{E_m \sin (m\pi x/a)}{m^2 \operatorname{ch} (\alpha_m b/2)} \left[\alpha_m \frac{b}{2} \operatorname{th} \left(\alpha_m \frac{b}{2} \right) \operatorname{ch} (\alpha_m y) - \alpha_m y \operatorname{sh} (\alpha_m y) \right]. \quad (7.61)$$

Максимальный прогиб в центре пластины будет при $x = a/2$ и $y = 0$:

$$w_{1\max} = \frac{a^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{E_m \alpha_m \frac{b}{2} \operatorname{sh} \left(\alpha_m \frac{b}{2} \right)}{m^2 \operatorname{ch}^2 \left(\alpha_m \frac{b}{2} \right)} (-1)^{(m-1)/2}. \quad (7.62)$$

В выражении (7.62) $\sin (m\pi/2)$ заменен через $(-1)^{(m-1)/2}$.

Если перенести начало координат в центр пластины, то в выражении для прогиба (7.61) следует заменить $\sin (m\pi x/a)$ через $(-1)^{(m-1)/2} \cos (m\pi x/a)$. При этом выражение для прогиба w_1 запишем в виде

$$w_1 = \frac{a^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5,\dots} (-1)^{(m-1)/2} \frac{E_m \cos (m\pi x/a)}{m^2 \operatorname{ch} (\alpha_m b/2)} \left[\alpha_m \frac{b}{2} \operatorname{th} \left(\alpha_m \frac{b}{2} \right) \times \right. \\ \left. \times \operatorname{ch} (\alpha_m y) - \alpha_m y \operatorname{sh} (\alpha_m y) \right]. \quad (7.63)$$

Найдем углы наклона касательной к срединной поверхности $(\partial w_1 / \partial y)_{y=b/2}$ и $(\partial w_1 / \partial x)_{x=a/2}$ на кромках пластины.

Дифференцируя уравнение (7.63) по y и по x , получим

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)_{y=b/2} = -\frac{a}{2\pi D} \times \\ \times \sum_{m=1,3,5,\dots} (-1)^{(m-1)/2} \frac{E_m \cos \frac{m\pi x}{a}}{m} \left[\operatorname{th} \left(\alpha_m \frac{b}{2} \right) + \frac{\alpha_m b/2}{\operatorname{ch}^2 (\alpha_m b/2)} \right], \quad (7.64)$$

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)_{x=a/2} = -\frac{1}{4D} \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{E_m}{\operatorname{ch}^2 (\alpha_m b/2)} \left[b \operatorname{sh} \left(\alpha_m \frac{b}{2} \right) \operatorname{ch} (\alpha_m y) - \right. \\ \left. - 2y \operatorname{ch} \left(\alpha_m \frac{b}{2} \right) \operatorname{sh} (\alpha_m y) \right]. \quad (7.65)$$

Выражение, стоящее в скобках в (7.65), представляет собой четную функцию от y и равно нулю при $y = \pm b/2$. Эту функцию можно представить рядом

$$\sum_{k=1,3,5,\dots} A_k \cos \frac{k\pi y}{b}, \quad (7.66)$$

коэффициенты которого

$$A_k = \frac{16ka(-1)^{(k-1)/2} b^2}{m^3 \pi^2} \frac{1}{a^2 (b^2/a^2 + k^2/m^2)^2} \operatorname{ch}^2 \left(\alpha_m \frac{b}{2} \right). \quad (7.67)$$

Таким образом, производную $(\partial w_1 / \partial x)_{x=a/2}$ окончательно

представим в виде

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)_{x=a/2} = -\frac{4b^2}{\pi^2 Da} \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{E_m}{m^3} \sum_{k=1,3,5,\dots} \frac{k(-1)^{(k-1)/2}}{(b^2/a^2 + k^2/m^2)^2} \cos \frac{k\pi y}{b}. \quad (7.68)$$

Таким образом, при нагружении прямоугольной пластинки, свободно опертой по кромкам, распределенными моментами $f_1(x)$, углы наклона касательных на кромках определяются уравнениями (7.64) и (7.68).

Так же можно определить углы наклона касательных на кромках, вызванные действием моментов, распределенных по другим двум кромкам пластины:

$$f_2(y) = \sum_{m=1,3,5,\dots} (-1)^{(m-1)/2} F_m \cos \frac{m\pi y}{b}. \quad (7.69)$$

Поступая подобно тому, как было описано ранее, можно определить выражение для функции w_2 , а затем найти углы наклона касательных на кромках пластины $(\partial w_2/\partial x)_{x=a/2}$ и $(\partial w_2/\partial y)_{y=b}$. При одновременном действии распределенных моментов $f_1(x)$ и $f_2(y)$ прогибы пластины и углы поворота кромок будут определяться наложением двух решений.

Пластинку, нагруженную равномерно распределенным по поверхности давлением q_0 и защемленную по кромкам, можно рассматривать как свободно опертую по кромкам, но дополнительно нагруженную такими распределенными моментами $f_1(x)$ и $f_2(y)$, что углы поворота на кромках от совместного действия поперечной нагрузки q_0 и распределенных моментов $f_1(x)$ и $f_2(y)$ будут равны нулю.

Это условие позволяет определить коэффициенты E_m и F_m .

Запишем это условие в следующем виде:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial x}\right)_{x=a/2} &= 0, \\ \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{y=b/2} &= 0. \end{aligned} \quad (7.70)$$

В (7.70) через w_0 обозначена функция прогиба для пластинки, свободно опертой по четырем кромкам и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой. Принимая во внимание, что начало координат перенесено в центр пласти-

ны, выражение для прогиба (7.47) получит следующий вид:

$$w_0 = \frac{4q_0 a^4}{D\pi^5} \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^5} \cos \frac{m\pi x}{a} \times \left[1 - \frac{2 + (\alpha_m b/2) \operatorname{th}(\alpha_m b/2)}{2 \operatorname{ch}(\alpha_m b/2)} \operatorname{ch}(\alpha_m y) + \frac{\alpha_m}{2 \operatorname{ch}(\alpha_m b/2)} y \operatorname{sh}(\alpha_m y) \right]. \quad (7.71)$$

Определив коэффициенты E_m и F_m путем решения системы уравнений, определяемых условиями (7.70), найдем общие выражения для прогибов w_1 и w_2 , а затем и $w = w_0 + w_1 + w_2$.

Достоинство метода, предложенного С. П. Тимошенко, заключается в его общности. Мы рассмотрели наиболее простой случай, когда распределенные моменты, действующие на пластину, обладают симметрией. Однако, если рассмотреть, кроме того, случай антисимметричного действия

Таблица 7.1

b/a	$x=0, y=0$	M_x $x=a/2, y=0$	M_y $x=0, y=b/2$	M_x $x=0, y=0$	M_y $x=0, y=0$
1,0	0,00126 × × $q_0 a^4/D$	-0,0513 × × $q_0 a^2$	-0,0513 × × $q_0 a^2$	0,0231 × × $q_0 a^2$	0,0231 × × $q_0 a^2$
1,1	0,00150	-0,0581	-0,0533	0,0264	0,0231
1,2	0,00172	-0,0639	-0,0554	0,0299	0,0228
1,3	0,00191	-0,0687	-0,0563	0,0327	0,0222
1,4	0,00207	-0,0726	-0,0568	0,0349	0,0212
1,5	0,00220	-0,0757	-0,0570	0,0368	0,0203
1,6	0,00230	-0,0780	-0,0571	0,0381	0,0193
1,7	0,00238	-0,0799	-0,0571	0,0392	0,0182
1,8	0,00245	-0,0812	-0,0571	0,0401	0,0174
1,9	0,00249	-0,0822	-0,0571	0,0407	0,0165
2,0	0,00254	-0,0829	-0,0571	0,0412	0,0158
∞	0,00260	-0,0833	-0,0571	0,0417	0,0125

распределенных моментов ($M_{x=a/2}(x) = -M_{x=-a/2}(x)$), то, комбинируя симметричный и антисимметричный случаи, можно получить любое распределение моментов по торцам пластины.

После определения выражения для прогиба w можно вычислить значения прогибов и изгибающих моментов в заданных точках.

В таблице 7.1 приведены значения прогибов и изгибающих моментов равномерно нагруженной прямоугольной пластины, защемленной по контуру*).

Как видно из таблицы 7.1, при поперечном изгибе жестко защемленной по всем кромкам пластины максимальный прогиб возникает в центре, а наибольший изгибающий момент — в середине длинной защемленной кромки. При удлинении пластины $b/a > 2$ расчет можно производить, как для бесконечно длинной пластины, рассматривая изгиб балки-полоски с защемленными концами.

§ 41. Изгиб ортотропных прямоугольных пластин

Прежде всего составим дифференциальное уравнение изгиба жестких пластин, выполненных из ортотропного материала. Будем полагать, что оси ортотропии материала совпадают с направлением осей x и y .

Связь между напряжениями и деформациями в плоскости xy , как следует из (2.7), выражается уравнениями

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_1} - \mu_{21} \frac{\sigma_y}{E_2}, \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_2} - \mu_{12} \frac{\sigma_x}{E_1}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad (7.72)$$

где E_1, E_2 — модули упругости материала в направлении осей x и y , μ_{21}, μ_{12} — коэффициенты Пуассона, причем между ними имеется следующая зависимость (2.6): $\mu_{21}E_1 = \mu_{12}E_2$, G — модуль сдвига.

Разрешая уравнения (7.72) относительно напряжений, получим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E'_1(\varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y), \\ \sigma_y &= E'_2(\varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x), \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \end{aligned} \quad (7.73)$$

где через E'_1, E'_2 обозначено $E'_1 = \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}$, $E'_2 = \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}$.

При выводе дифференциального уравнения изгиба ортотропных пластин будем принимать те же допущения, что и в теории изотропных пластин, т. е. будем полагать, что при изгибе нормаль к срединной поверхности только поворачивается, оставаясь прямой, а нормальными напряжениями в

*) Таблица 7.1 заимствована из книги: Тимошенко С. П., Войтовский-Кригер С. Пластинки и оболочки. — М.: Наука, 1966, с. 229.

направлении оси z пластины можно пренебречь. В этом случае в слое, отстоящем от срединной поверхности на расстояние z , между деформациями $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$, кривизнами κ_x, κ_y и кручением χ будут иметь место те же зависимости, какие ранее были получены для изотропных пластин:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= z\kappa_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = z\kappa_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \gamma_{xy} &= 2z\chi = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (7.74)$$

Принимая во внимание (7.73) и (7.74), получим выражения для изгибающих моментов M_x, M_y и крутящего момента M_{xy} :

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = -\frac{E'_1 h^3}{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \\ &= -\left(D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz = -\frac{E'_2 h^3}{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \\ &= -\left(D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (7.75) \\ M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = -2G \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -2D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

В (7.75) приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{E'_1 h^3}{12}, \quad D_y = \frac{E'_2 h^3}{12}, \\ D_{21} &= \frac{\mu_{21} E'_1 h^3}{12} = D_{12} = \frac{\mu_{12} E'_2 h^3}{12} = D_{11}, \quad D_{xy} = G \frac{h^3}{12}. \end{aligned}$$

Составляя уравнение равновесия жестких пластин, мы пренебрегаем составляющими проекций от цепных усилий на направление оси z . При этом из уравнения (6.16)

получим

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q. \quad (7.76)$$

После подстановки выражений (7.75) в уравнение (7.76) получим следующее дифференциальное уравнение изгиба ортотропных пластин:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_1 + 2D_{xy}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q. \quad (7.77)$$

Рассмотрим случай изгиба ортотропной пластинки, свободно опирающейся на жесткий контур (задача Навье), нагруженной равномерно распределенным давлением $q = q_0$.

При этом прогиб представим двойным тригонометрическим рядом $w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$, а поперечную нагрузку q разложим также в двойной тригонометрический ряд

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

где

$$q_{mn} = \frac{4q_0}{ab} \int_0^a \int_0^b \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = \frac{16q_0}{\pi^2 mn},$$

Поступая так же, как и прежде при решении задачи изгиба изотропных пластин, получим общее выражение для члена A_{mn} :

$$A_{mn} = \frac{16q_0}{\pi^6 mn \left[D_x \frac{m^4}{a^4} + 2(D_1 + 2D_{xy}) \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} + D_y \frac{n^4}{b^4} \right]}. \quad (7.78)$$

Общее выражение для прогиба, учитывая полученное выражение для A_{mn} , будет иметь следующий вид:

$$w = \frac{16q_0}{\pi^6} \times \sum_{m=1,3,\dots} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[D_x \frac{m^4}{a^4} + 2(D_1 + 2D_{xy}) \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} + D_y \frac{n^4}{b^4} \right]}. \quad (7.79)$$

Имея общее выражение для прогиба в виде ряда (7.79), ограничиваясь при вычислениях конечным числом членов ряда, далее можно определить прогибы, изгибающие и крутящие моменты и соответствующие им нормальные и касательные напряжения.

Если ограничиться одним членом ряда ($m = n = 1$), то

$$w_{\max} = \frac{16q_0 a^4}{\pi^6 \left[D_x + 2(D_1 + 2D_{xy}) \frac{a^2}{b^2} + D_y \frac{a^4}{b^4} \right]}, \quad (7.80)$$

а для изгибных напряжений получим формулы, подобные (7.32), (7.33):

$$\sigma_{xi}^{\max} = \frac{96q_0 a^2 \left(D_x + D_1 \frac{a^2}{b^2} \right)}{\pi^4 h^2 \left[D_x + 2(D_1 + 2D_{xy}) \frac{a^2}{b^2} + D_y \frac{a^4}{b^4} \right]}, \quad (7.81)$$

$$\sigma_{yi}^{\max} = \frac{96q_0 a^2 \left(D_y \frac{a^2}{b^2} + D_1 \right)}{\pi^4 h^2 \left[D_x + 2(D_1 + 2D_{xy}) \frac{a^2}{b^2} + D_y \frac{a^4}{b^4} \right]}. \quad (7.82)$$

§ 42. Осесимметричный изгиб жестких круглых сплошных и кольцевых пластин

Рассмотрим изгиб круглой жесткой пластины радиусом R , нагруженной постоянным поперечным давлением $q = q_0$. Из уравнения (6.54) после интегрирования правой части будем иметь

$$D \left(r \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = \frac{q_0 r^2}{2}. \quad (7.83)$$

Сократив правую и левую части на r и произведя в левой части некоторые преобразования, получим следующее уравнение изгиба круглой пластины:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{q_0 r}{2D}. \quad (7.84)$$

Произведем три последовательных интегрирования уравнения (7.84). Первое интегрирование дает

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) = \frac{q_0 r^2}{4D} + C_1. \quad (7.85)$$

Умножив левую и правую части (7.85) на r , после второго интегрирования получим

$$r \frac{dw}{dr} = \frac{q_0 r^4}{16D} + C_1 \frac{r^2}{2} + C_2. \quad (7.86)$$

Сократив (7.86) на r и произведя последнее интегрирование, получим следующее выражение для функции прогиба w :

$$w = \frac{q_0 r^4}{64D} + C_1 \frac{r^2}{4} + C_2 \ln \frac{r}{R} + C_3. \quad (7.87)$$

Для определения произвольных постоянных C_1 , C_2 , C_3 необходимо использовать граничные условия.

Рассмотрим два случая граничных условий:

1) края пластины жестко защемлены; при этом на контуре ($r=R$) $w=0$ и $dw/dr=0$, а в центре ($r=0$) $dw/dr=0$;

2) края пластины свободно оперты на жесткий контур; при этом на контуре ($r=R$) $w=0$, $\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} = 0$, а в центре пластины ($r=0$) $dw/dr=0$.

Найдем постоянные C_1 , C_2 , C_3 для жестко защемленной на контуре пластины.

Для угла наклона касательной $\Psi = dw/dr$ имеем следующее выражение:

$$\Psi = \frac{dw}{dr} = \frac{q_0 r^3}{16D} + C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r}. \quad (7.88)$$

Приравняв dw/dr нулю при $r=0$, получим $C_2=0$. Приравняв это же выражение нулю при $r=R$, имеем $C_1 = -q_0 R^2/(8D)$.

После подстановки найденных значений C_1 и C_2 в (7.87) из условия $w=0$ при $r=R$ найдем значение C_3 :

$$C_3 = \frac{q_0 R^4}{64D}.$$

Окончательное выражение для функции прогиба пластины, защемленной по контуру, примет следующий вид:

$$w = \frac{q_0 R^4}{64D} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^2. \quad (7.89)$$

Максимальный прогиб пластинки будет в центре при $r=0$:

$$w_{\max} = \frac{q_0 R^4}{64D}. \quad (7.90)$$

Найдем выражения для изгибающих моментов M_r и M_θ , воспользовавшись формулами (6.53):

$$M_r = \frac{q_0 R^2}{16} \left[(1+\mu) - (3+\mu) \frac{r^2}{R^2} \right], \quad (7.91)$$

$$M_\theta = \frac{q_0 R^2}{16} \left[(1+\mu) - (1+3\mu) \frac{r^2}{R^2} \right]. \quad (7.92)$$

В защемленной кромке пластины изгибающие моменты получают следующие значения:

$$(M_r)_{r=R} = -\frac{q_0 R^2}{8}, \quad (M_\theta)_{r=R} = -\mu \frac{q_0 R^2}{8}. \quad (7.93)$$

В центре пластины изгибающие моменты M_r и M_θ одинаковы:

$$(M_r)_{r=0} = (M_\theta)_{r=0} = (1+\mu) \frac{q_0 R^2}{16}. \quad (7.94)$$

Из сравнения (7.93) и (7.94) видно, что для защемленной круглой, так же как и для защемленной квадратной пластины, наибольшие изгибающие моменты действуют в заделке.

Найдем произвольные постоянные в уравнении прогиба w (7.87) для случая свободно опертой по контуру пластинки.

Как и прежде, из условия $(dw/dr)_{r=0}=0$ находим $C_2=0$. Далее определяем C_1 из условия равенства нулю момента M_r на кромках пластины:

$$\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right)_{r=R} = 0.$$

После вычислений получим для C_1 следующее выражение:

$$C_1 = -\frac{3+\mu}{1+\mu} \frac{q_0 R^2}{8D}.$$

Наконец, C_3 находим из условия равенства нулю прогиба на кромках пластины, т. е. $(w)_{r=R}=0$:

$$\frac{q_0 R^4}{64D} - \frac{3+\mu}{1+\mu} \frac{q_0 R^2 r^2}{32D} + C_3 = 0,$$

откуда для C_3 получим

$$C_3 = \frac{q_0 R^4}{64D} \frac{5+\mu}{1+\mu}.$$

Окончательно уравнение прогиба для свободно опертой пластинки запишем в следующем виде:

$$w = \frac{q_0 R^4}{64D} \left(\frac{5+\mu}{1+\mu} - \frac{6+2\mu}{1+\mu} \frac{r^2}{R^2} + \frac{r^4}{R^4} \right). \quad (7.95)$$

Максимальный прогиб будет в центре пластины, и он равен

$$w_{\max} = \frac{q_0 R^4}{64D} \frac{5+\mu}{1+\mu}. \quad (7.96)$$

Сравнивая (7.96) с (7.90), видим, что максимальный прогиб свободно опертой пластины в $\frac{5+\mu}{1+\mu}$ раз больше, чем для защемленной пластины. При $\mu=0,3$ максимальный прогиб свободно опертой пластины в 4,07 раза больше, чем защемленной.

Используя для определения M_r и M_θ выражения (6.53), получим

$$M_r = \frac{q_0 R^2}{16} (3+\mu) \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad (7.97)$$

$$M_\theta = \frac{q_0 R^2}{16} \left[(3+\mu) - (1+3\mu) \frac{r^2}{R^2} \right]. \quad (7.98)$$

Для центра пластины получаем изгибающие моменты

$$(M_r)_{r=0} = (M_\theta)_{r=0} = \frac{q_0 R^2}{16} (3+\mu). \quad (7.99)$$

Отмечаем, что максимальный изгибающий момент в свободно опертой пластинке больше изгибающих моментов как в центре, так и в заделке защемленной пластины. Следовательно, защемление круглой пластины по сравнению со свободным опиранием приводит к значительному снижению максимальных прогибов и максимальных изгибающих моментов.

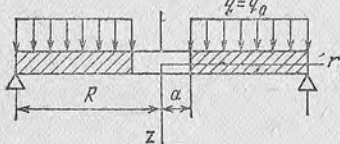


Рис. 7.9.

Перейдем к решению задач изгиба кольцевых пластин. Пусть кольцевая пластинка с внешним радиусом R и внутренним радиусом a свободно опирается по внешнему контуру, нагружена равномерно распределенным по поверхности кольца давлением $q=q_0$ и имеет свободный от нагрузок внутренний контур (рис. 7.9).

Дифференциальное уравнение изгиба для такой пластины ранее нами рассматривалось (6.56) и имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{q_0}{D}. \quad (7.100)$$

В результате последовательного четырехкратного интегрирования уравнения (7.100) получим для w следующее выражение:

$$w = \frac{q_0 r^4}{64D} + C_1 r^2 \ln \frac{r}{R} + C_2 r^2 + C_3 \ln \frac{r}{R} + C_4. \quad (7.101)$$

Входящие в уравнение (7.101) произвольные постоянные найдем из граничных условий. В нашем случае граничные условия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{при } r=a \quad & M_r = 0, \quad Q = 0, \\ \text{при } r=R \quad & M_r = 0, \quad w = 0. \end{aligned}$$

Принимая во внимание уравнения (6.53) и (6.61), эти условия мы запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{при } r=a \quad & \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} = 0, \\ & \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (7.102)$$

$$\text{при } r=R \quad \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} = 0, \quad w = 0.$$

Подставив в (7.102) вместо w найденное выше выражение (7.101), получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} &= \frac{q_0 r^2}{16D} (3+\mu) + \\ &+ C_1 \left[2(1+\mu) \ln \frac{r}{R} + (3+\mu) \right] + 2(1+\mu) C_2 - \frac{C_3}{r^2} (1-\mu), \\ \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] &= \frac{q_0 r}{2D} + \frac{4C_1}{r}. \end{aligned}$$

Теперь граничные условия рассматриваемой задачи можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{q_0 a^2}{16D} (3 + \mu) + C_1 \left[2(1 + \mu) \ln \frac{a}{R} + (3 + \mu) \right] + \\ + 2(1 + \mu) C_2 - C_3 \frac{(1 - \mu)}{a^2} = 0, \\ \frac{q_0 a}{2D} + 4 \frac{C_1}{a} = 0, \end{aligned}$$

Подставляя $a = R$ и принимая во внимание, что $\ln \frac{R}{R} = \ln 1 = 0$, получим

$$\frac{q_0 R^2}{16D} (3 + \mu) + C_1 (3 + \mu) + 2(1 + \mu) C_2 - \frac{C_3}{R^2} (1 - \mu) = 0, \quad (7.103)$$

$$\frac{q_0 R^4}{64D} + C_2 R^2 + C_4 = 0.$$

Таким образом, для определения постоянных $C_1, \dots, C_4$ мы получили из граничных условий систему четырех уравнений (7.103). Разрешая систему уравнений (7.103) относительно постоянных $C_1, \dots, C_4$, получим

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{q_0 R^2}{8D} \beta^2, \\ C_2 &= -\frac{q_0 R^2}{32D} \frac{1}{1 + \mu} [(3 + \mu)(1 - \beta^2) + k], \\ C_3 &= -\frac{q_0 R^4}{16D} \frac{1}{1 - \mu} [(3 + \mu)\beta^2 + k], \\ C_4 &= \frac{q_0 R^4}{32D} \frac{1}{1 + \mu} \left[(3 + \mu)(1 - \beta^2) + k - \frac{1 + \mu}{2} \right], \end{aligned} \quad (7.104)$$

где через β и k обозначено

$$\beta = \frac{a}{R}, \quad k = \frac{4\beta^4}{1 - \beta^2} (1 + \mu) \ln \beta.$$

Прогиб w на внутренней кромке при $r = a$ получается из уравнения (7.101):

$$w_{\max} = \frac{q_0 R^4 \beta^4}{64D} + C_1 R^2 \beta^2 \ln \beta + C_2 R^2 \beta^2 + C_3 \ln \beta + C_4,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 вычисляются по (7.104).

Далее, используя известные уравнения для определения изгибающих моментов M_r и M_θ (6.53), можно определить их величины для произвольного сечения:

$$\begin{aligned} M_r &= \frac{q_0 r^2}{16D} (3 + \mu) + C_1 \left[2(1 + \mu) \ln \frac{r}{R} + (3 + \mu) \right] + \\ &+ 2(1 + \mu) C_2 - \frac{C_3}{r^2} (1 - \mu). \end{aligned} \quad (7.105)$$

Эта величина при $r = a$ и при $r = R$ равна, как уже ранее отмечалось, нулю. Для определения максимального значения M_r последуем эту функцию на максимум:

$$\frac{dM_r}{dr} = \frac{q_0 r}{16D} (3 + \mu) + C_1 \frac{2(1 + \mu)}{r} + 2 \frac{C_3}{r^3} (1 - \mu) = 0,$$

откуда

$$\frac{q_0 r^4}{16D} (3 + \mu) + 2(1 + \mu) C_1 r^2 + 2(1 - \mu) C_3 = 0.$$

Решая это биквадратное уравнение, можно определить значение r , которому соответствует экстремум изгибающего момента M_r .

Мы рассмотрели случай изгиба кольцевой пластины, нагруженной равномерным давлением, когда внешний контур свободно оперт, а внутренний свободен от нагрузок. Однако приведенное выше уравнение (7.101) справедливо для любых граничных условий. Поэтому при решении задач изгиба кольцевых пластин с другими граничными условиями следует определить для заданных граничных условий постоянные $C_1 - C_4$ так же, как это было сделано в рассмотренном нами случае.

§ 43. Некоторые задачи устойчивости прямоугольных пластин

Рассмотрим устойчивость прямоугольной пластинки, свободно опирающейся на жесткие опоры. Будем полагать в общем случае, что на кромках пластинки действуют равномерно распределенные по ним погонные усилия N_x, N_y (рис. 7.10).

При решении задач устойчивости пластин, как это уже отмечалось ранее, используется теория Сен-Венана. В соответствии с этой теорией полагают, что в срединной поверхности действуют значительные усилия, а прогиб w мал.

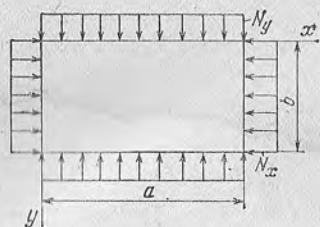


Рис. 7.10.

Если принять, что на кромках действуют одновременно усилия N_x и N_y , то из (6.22) получим уравнение для исследования устойчивости пластины в следующем виде:

$$D\nabla^2\nabla^2 w = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (7.106)$$

В случае свободно опертых кромок граничные условия можно записать в виде

$$x = 0, a, \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

$$y = 0, b, \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Представим прогиб двойным тригонометрическим рядом, каждый член которого удовлетворяет граничным условиям:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (7.107)$$

Если подставить выражение (7.107) в (7.106), то получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \pi^2 \left[D\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + N_x \frac{m^2}{a^2} + N_y \frac{n^2}{b^2} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0.$$

Для того чтобы это равенство было справедливым при любых значениях x, y , требуется выполнение следующего условия:

$$D\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + N_x \frac{m^2}{a^2} + N_y \frac{n^2}{b^2} = 0. \quad (7.108)$$

Как видно из уравнения (7.108), выпучивание пластин может происходить при различных сочетаниях сжимающих усилий N_x и N_y в зависимости от количества полуwave m , n в направлениях осей x и y .

Пусть пластина сжимается только усилиями N_x . Тогда для определения N_x получим

$$N_x = -\frac{D\pi^2 a^2}{m^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2. \quad (7.109)$$

Однако нас интересует наименьшее значение N_x , которому будет соответствовать $n=1$. Поэтому для N_x можно записать

$$N_x = -\frac{\pi^2 D}{b^2} \left(m \frac{b}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2, \quad (7.110)$$

или, полагая $N_x = -\sigma_x h$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$, для критического напряжения $(\sigma_x)_{кр}$ получим следующее выражение:

$$(\sigma_x)_{кр} = \frac{0,9E}{(b/h)^2} \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2. \quad (7.111)$$

Введем обозначения $\sigma_0 = \frac{0,9E}{(b/h)^2}$, $k = \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2$. Тогда $(\sigma_x)_{кр}$ примет следующий вид:

$$(\sigma_x)_{кр} = k\sigma_0; \quad (7.112)$$

σ_0 представляет собой критическое напряжение балки-полоски длиной b со свободно опертыми краями, а коэффициент k зависит от отношения сторон a/b и количества полуwave, образующихся при выпучивании в направлении оси x .

На рис. 7.11 показана зависимость коэффициента k от m и a/b . Как видно из рис. 7.11, $k_{min} = 4$. При $a/b < 1$, $m = 1$, $k = (b/a + a/b)^2 > 4$. При $a/b > 1$, например, 2, 3 и т. д., пластина при выпучивании разбивается на «квадратные» (или близкие к ним) волны, т. е. образующиеся выпучины имеют одинаковую длину полуwave в направлении осей x и y .

Таким образом, для пластин, сжимаемых усилиями N_x в направлении длинной стороны ($a/b > 1$), можно принимать $k_{min} = 4$, а $(\sigma_x)_{кр} = \frac{3,6E}{(b/h)^2}$.

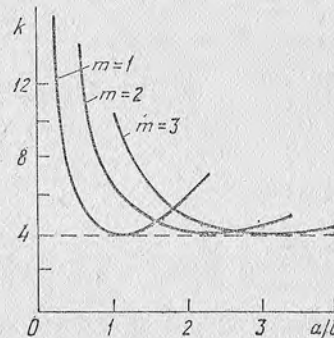


Рис. 7.11.

Перейдем к изучению устойчивости сжатых прямоугольных пластинок при иных условиях опирания. Пусть по-прежнему в направлении оси x действуют равномерно распределенные сжимающие усилия N_x (рис. 7.12), причем для растягивающих усилий N_x примем знак положительный. Тогда уравнение устойчивости запишем в виде

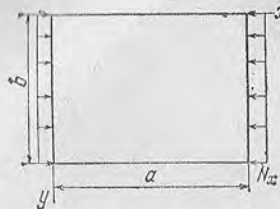


Рис. 7.12.

Предполагаем, что две стороны пластины $x=0$, $x=a$ свободно оперты, а другие две стороны имеют произвольные условия опирания.

Представляя прогиб w уравнением

$$w = f(y) \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (7.114)$$

заметим, что функция (7.114) удовлетворяет принятым граничным условиям, так как при $x=0, a$ имеем $w=0$, $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$. Подставив (7.114) в (7.113), получим обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка для функции $f(y)$:

$$f^{IV}(y) - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} f''(y) + \left(\frac{m^4 \pi^4}{a^4} + \frac{N_x m^2 \pi^2}{D a^2} \right) f(y) = 0. \quad (7.115)$$

Корни характеристического уравнения будут

$$r_{1,2} = \pm \alpha = \pm \sqrt{\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \sqrt{\frac{N_x m^2 \pi^2}{D a^2}}},$$

$$r_{3,4} = \pm \beta i = \pm \sqrt{-\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \sqrt{\frac{N_x m^2 \pi^2}{D a^2}}}.$$

Тогда решение уравнения (7.115) может быть записано в следующем виде:

$$f(y) = C_1 e^{-\alpha y} + C_2 e^{\alpha y} + C_3 \cos \beta y + C_4 \sin \beta y. \quad (7.116)$$

Постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 определяются из граничных условий на кромках $y=0, b$.

Окончательное выражение для критического напряжения $(\sigma_x)_{кр}$ можно записать в виде (7.112), но теперь k бу-

дет зависеть не только от отношения сторон a/b , но и от условий их закрепления.

Так, например, для пластинки, свободно опертой тремя кромками и свободной четвертой, коэффициент k в (7.112) можно вычислять по следующей приближенной формуле:

$$k = 0,456 + (b/a)^2. \quad (7.117)$$

В случае, если одна из боковых кромок закреплена, а другая свободна, коэффициент k при изменении a/b от 1,0 до 3,0 изменяется от 1,7 до 1,36. При дальнейшем увеличении отношения a/b коэффициент k асимптотически приближается к величине 1,33. При выполнении практических расчетов, если отношение сторон пластины $a/b \geq 1,5$, можно принимать $k = 1,33$.

В случае, если обе боковые кромки закреплены, а нагруженные свободно оперты, коэффициент k при $a/b \geq 1,5$ можно принимать равным 7,0.

Более подробные сведения о величине коэффициента k в формуле (7.112) при различных граничных условиях в зависимости от отношения сторон пластины a/b можно найти в специальной литературе по устойчивости пластинок или справочниках.

Рассмотрим также случай потери устойчивости прямоугольных пластинок при нагружении их сдвигающими усилиями, равномерно распределенными по кромкам. При этом пластина теряет устойчивость с образованием диагональных волн. Первое решение этой задачи энергетическим методом было получено С. П. Тимошенко (1915 г.), а позднее точное решение для бесконечно длинной пластины получил Саутвелл (1924 г.).

Критическое напряжение сдвига $\tau_{кр}$ определяется по формуле

$$\tau_{кр} = k \frac{0,9E}{(b/h)^2}, \quad (7.118)$$

где b — короткая сторона пластины, h — толщина, а коэффициент k в случае свободного опирания всех кромок можно вычислять по формуле

$$k = 5,35 + 4(b/a)^2, \quad (7.119)$$

а при закрепленных кромках

$$k = 8,98 + 5,6(b/a)^2. \quad (7.120)$$

Напомним, что все приведенные здесь формулы справедливы в предположении, что материал подчиняется закону Гука.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ И ЗАДАЧИ

- ✓ 1. Какой изгиб пластин называется цилиндрическим? Когда он имеет место?
- ✓ 2. Как записывается дифференциальное уравнение цилиндрического изгиба пластины с подвижными кромками?
- ✓ 3. Как записывается дифференциальное уравнение цилиндрического изгиба пластины с неподвижными кромками?
- ✓ 4. Из какого условия можно определить цепные усилия N_x в случае неподвижных кромок при цилиндрическом изгибе пластины?
- ✓ 5. Как влияет закрепление кромок на максимальные величины прогиба и изгибающего момента?
6. При каком нагружении прямоугольной пластины имеет место чистый изгиб?
7. Как получить выражение для прогиба w в случае чистого изгиба равномерно распределенными по кромкам моментами M_1 и M_2 ?
8. В каком случае при чистом изгибе пластина изгибается по сферической, параболической или антиклатической формам поверхностей?
9. В чем заключается идея Навье решения задачи изгиба свободно опертых пластин?
10. Какова последовательность решения задачи Навье при поперечной нагрузке q , распределенной по произвольному закону?
11. Как решается задача изгиба свободно опертой пластины при нагружении ее поперечной нагрузкой q , изменяющейся по синусоидальному закону?
12. Как решается задача Навье в случае равномерно распределенного по поверхности давления $q = q_0$?
13. В чем состоит идея М. Леви решения задачи изгиба пластин, две стороны которых свободно оперты, а остальные имеют произвольные условия опирания?
14. К какому уравнению сводится решение задачи М. Леви? Как отыскать решение этого уравнения?
15. Какова последовательность решения задачи М. Леви для случая изгиба свободно опертой по контуру пластины при нагружении ее равномерно распределенным давлением $q = q_0$?
16. Чем будет отличаться решение той же задачи в случае, если две стороны пластины свободно оперты, а две другие защемлены?
17. В чем идея метода С. П. Тимошенко решения задачи изгиба прямоугольной пластины, защемленной по всему контуру? Какова последовательность решения этой задачи по методу Тимошенко?
18. Каковы соотношения между напряжениями и деформациями в плоской задаче для ортотропного материала?
19. Какова зависимость между изгибающими и крутящими моментами и перемещениями w для ортотропной пластинки?
20. Запишите дифференциальное уравнение изгиба жестких ортотропных пластин.
21. Опишите последовательность решения задачи об осесимметричном изгибе круглой пластины при действии равномерно распределенного давления.

22. Чему равен прогиб в центре круглой пластины, свободно опертой по контуру?

23. Чему равен прогиб в центре круглой пластины, защемленной по контуру?

24. Какая из пластин, свободно опертая или защемленная, будет иметь большие изгибающие моменты при одинаковых размерах и нагрузке?

25. Как запишутся граничные условия задачи свободно опертой по внешнему контуру кольцевой пластины?

26. Какова последовательность решения задачи об изгибе кольцевой пластины, нагруженной равномерно распределенной поперечной нагрузкой $q = q_0$?

27. Запишите дифференциальное уравнение устойчивости прямоугольной пластинки, сжатой усилиями N_x .

28. Как определяется критическое напряжение сжатой в одном направлении свободно опертой по кромкам прямоугольной пластины?

✓ 29. Задача. На пластинку (рис. 7.13) действует распределенная поперечная нагрузка q , изменяющаяся по закону $q = q_0 \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}$.

Принимаем для w выражение $w = A \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}$. Требуется:

- 1) определить, каким граничным условиям удовлетворяет принятое выражение для w ;
- 2) из уравнения С. Жермен — Лагранжа определить коэффициент A ;
- 3) получить выражения для изгибающих и крутящих моментов;
- 4) найти величины максимальных изгибающих моментов и соответствующие им изгибные напряжения.

Решение. 1. Принятое выражение для w на границах контура пластинки при $x = \pm a/2$ и $y = \pm b/2$ удовлетворяет следующим условиям:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm \frac{a}{2},$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm \frac{b}{2}.$$

Следовательно, принятое выражение для w удовлетворяет условиям свободного опирания пластинки.

2. Подставим в уравнение С. Жермен — Лагранжа выражения для w и q :

$$DA \left(\frac{\pi^4}{a^4} + 2 \frac{\pi^4}{a^2 b^2} + \frac{\pi^4}{b^4} \right) \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} = q_0 \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}.$$

После сокращения получим для коэффициента A следующее

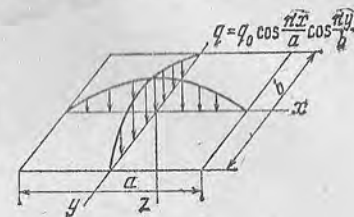


Рис. 7.13.

выражение:

$$A = \frac{q_0}{D(\pi^2/a^2 + \pi^2/b^2)^2} = \frac{q_0 a^4}{\pi^4 D(1 + a^2/b^2)^2}.$$

3. Определим

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = DA \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \mu \frac{\pi^2}{b^2} \right) \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}.$$

Используя найденное выше выражение для A , получим

$$M_x = \frac{q_0 a^2 (1 + \mu a^2/b^2)}{\pi^2 (1 + a^2/b^2)^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}.$$

Аналогично найдем

$$M_y = \frac{q_0 a^2 (a^2/b^2 + \mu)}{\pi^2 (1 + a^2/b^2)^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b},$$

$$M_{xy} = -\frac{q_0 a^3}{\pi^2 b (1 + a^2/b^2)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

4. Из полученных выражений для M_x , M_y , M_{xy} видно, что в центре пластины при $x = 0$, $y = 0$, M_x и M_y достигают максимума, а M_{xy} в центре пластины равен нулю:

$$M_x^{\max} = \frac{q_0 a^2 (1 + \mu a^2/b^2)}{\pi^2 (1 + a^2/b^2)^2}, \quad M_y^{\max} = \frac{q_0 a^2 (a^2/b^2 + \mu)}{\pi^2 (1 + a^2/b^2)^2}.$$

Максимальные изгибные напряжения для центральных сечений будут равны

$$\sigma_{x\text{н}}^{\max} = \frac{6M_x^{\max}}{h^2} = \frac{6q_0 a^2 (1 + \mu a^2/b^2)}{\pi^2 h^2 (1 + a^2/b^2)^2},$$

$$\sigma_{y\text{н}}^{\max} = \frac{6M_y^{\max}}{h^2} = \frac{6q_0 a^2 (a^2/b^2 + \mu)}{\pi^2 h^2 (1 + a^2/b^2)^2}.$$

30. Задача. На прямоугольную пластинку действует распределенная нагрузка q , изменяющаяся по закону

$$q = q_0 \left[\left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right)^2 \cos 2 \frac{\pi x}{a} \cos 2 \frac{\pi y}{b} + \cos 2 \frac{\pi x}{a} + \frac{a^4}{b^4} \cos 2 \frac{\pi y}{b} \right].$$

Принимаем для w выражение $w = A \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{b}$. Требуется:

- 1) определить, каким граничным условиям при $x = \pm a/2$ и $y = \pm b/2$ удовлетворяет принятое выражение для w ;
- 2) из уравнения С. Жермен — Лагранжа определить коэффициент A ;
- 3) получить выражения для изгибающих и крутящего моментов и вычертить их эпюры.

Решение. 1. Принятое выражение для w удовлетворяет на краях $x = \pm a/2$, $y = \pm b/2$ следующим условиям:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Равенство нулю прогибов на краях определяется после подстановки в выражение для w значений $x = \pm a/2$ и $y = \pm b/2$. Определив выражения для первых производных

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -2A \frac{\pi}{a} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{b} = -A \frac{\pi}{a} \sin 2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{b}$$

и

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -A \frac{\pi}{b} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \sin 2 \frac{\pi y}{b},$$

после подстановки в них значений $x = \pm a/2$ и $y = \pm b/2$ убеждаемся в том, что на границах пластинки углы наклона касательных к срединной поверхности равны нулю. Следовательно, принятое выражение для w удовлетворяет условиям жесткого защемления на краях.

2. Находим коэффициент A в выражении w , подставляя выражения для w и q в уравнение С. Жермен — Лагранжа:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = q,$$

$$D 4\pi^4 A \left[\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \cos 2 \frac{\pi x}{a} \cos 2 \frac{\pi y}{b} + \frac{1}{a^4} \cos 2 \frac{\pi x}{a} + \frac{1}{b^4} \cos 2 \frac{\pi y}{b} \right] =$$

$$= q_0 \left[\left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right)^2 \cos 2 \frac{\pi x}{a} \cos 2 \frac{\pi y}{b} + \cos 2 \frac{\pi x}{a} + \frac{a^4}{b^4} \cos 2 \frac{\pi y}{b} \right].$$

После сокращения получаем для A следующее выражение: $A = \frac{q_0 a^4}{4\pi^4 D}$.

3. Определяем

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right).$$

Продифференцировав дважды выражение для w по x и по y , получим для M_x и M_y следующие выражения:

$$M_x = \frac{q_0 a^2}{2\pi^2} \left(\cos 2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{b} + \mu \frac{a^2}{b^2} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos 2 \frac{\pi y}{b} \right),$$

$$M_y = \frac{q_0 a^2}{2\pi^2} \left(\frac{a^2}{b^2} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos 2 \frac{\pi y}{b} + \mu \cos 2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{b} \right).$$

Далее находим M_{xy} по формуле

$$M_{xy} = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -AD \frac{\pi^2}{ab} \sin 2 \frac{\pi x}{a} \sin 2 \frac{\pi y}{b},$$

или

$$M_{xy} = -\frac{q_0 a^2}{4\pi^2} \frac{a}{b} \sin 2\frac{\pi x}{a} \sin 2\frac{\pi y}{b}.$$

На рис. 7.14 показаны эпюры изгибающих M_x и M_y и крутящего M_{xy} моментов. Максимальные значения изгибающих моментов оказываются в центре пластины и равны соответственно

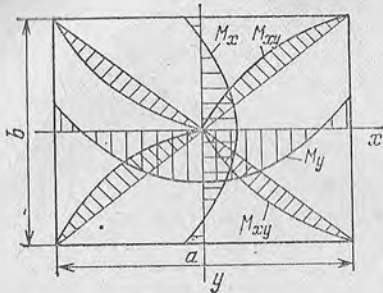


Рис. 7.14.

$$M_x^{\max} = \frac{q_0 a^2}{2\pi^2} \left(1 + \mu \frac{a^2}{b^2}\right),$$

$$M_y^{\max} = \frac{q_0 a^2}{2\pi^2} \left(\frac{a^2}{b^2} + \mu\right).$$

На защемленных краях изгибающие моменты меньше по абсолютной величине и имеют отрицательный знак. Их величины равны

$$M_x = -\frac{q_0 a^2}{2\pi^2} \mu \frac{a^2}{b^2} = -\frac{q_0 a^4}{2\pi^2 b^2} \mu \quad \text{при } x=0, y=\pm \frac{b}{2},$$

$$M_y = -\frac{q_0 a^2}{2\pi^2} \mu \quad \text{при } x=\pm \frac{a}{2}, y=0.$$

Крутящий момент M_{xy} равен нулю на краях и для сечений $x=0$ или $y=0$ и достигает максимального значения для диагональных сечений. Так, в диагональном сечении при $x=a/4, y=b/4, M_{xy}^{\max} = -q_0 a^3/(4\pi^2 b)$.

31. Задача. Прогобы w прямоугольной пластинки заданы уравнением

$$w = A \left(x^2 - \frac{a^2}{4}\right)^2 \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right)^2.$$

Требуется определить:

1) каким граничным условиям при $x=\pm a/2$ и $y=\pm b/2$ соответствует заданная форма прогиба;

2) какой поперечной нагрузке q она соответствует;

3) какова величина максимального прогиба в середине пластины.

Решение. 1. При заданной форме прогиба w на краях $x=\pm a/2$ и $y=\pm b/2, w=0$. Первые производные по x и по y от функции w на краях обращаются в нуль:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 4Ax \left(x^2 - \frac{a^2}{4}\right) \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right)^2, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 4Ay \left(x^2 - \frac{a^2}{4}\right)^2 \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right).$$

При $x=\pm a/2, y=\pm b/2, \partial w/\partial x=0$ и $\partial w/\partial y=0$.

Таким образом, пластина жестко защемлена по контуру.

2. Для определения закона изменения q следует функцию w подставить в уравнение С. Жермен — Лагранжа

$$D\nabla^2 \nabla^2 w = q.$$

После подстановки получим

$$4AD \left[3 \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right)^2 + 8 \left(3x^2 - \frac{a^2}{4}\right) \left(3y^2 - \frac{b^2}{4}\right) + 3 \left(x^2 - \frac{a^2}{4}\right)^2 \right] = q.$$

Следовательно, уравнение будет удовлетворяться при любых значениях координат x и y , если

$$q = \frac{q_0}{a^2 b^2} \left[3 \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right)^2 + 8 \left(3x^2 - \frac{a^2}{4}\right) \left(3y^2 - \frac{b^2}{4}\right) + 3 \left(x^2 - \frac{a^2}{4}\right)^2 \right].$$

3. Максимальная величина прогиба $w_{\max}$ будет при $x=y=0$, т. е. $w_{\max} = Aa^4b^4/256$, где $A = \frac{q_0}{4Da^2b^2}$, или $w_{\max} = \frac{q_0 a^2 b^2}{1024D}$.

32. Задача. Прямоугольная пластина, имеющая $b/a \gg 1$, заделана по длинной кромке (остальные кромки свободны) и нагружена равномерно распределенной по всей поверхности нагрузкой $q=q_0$ (рис. 7.15). Требуется определить:

1) величину максимального изгибающего момента $M_x^{\max}$;

2) максимальные изгибные напряжения σ_{xi} ;

3) максимальный прогиб $w_{\max}$.

Ответ. 1) $M_x^{\max} = qa^2/2$; 2) $\sigma_{xi} = 3qa^2/h^2$; 3) $w_{\max} = qa^4/(8D)$,

где $D = Eh^3/[12(1-\mu^2)]$.

33. Задача. Прямоугольная пластина (рис. 7.16) испытывает чис-

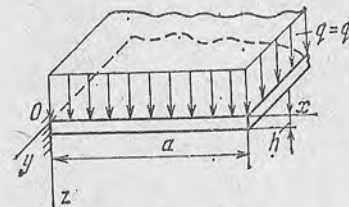


Рис. 7.15.

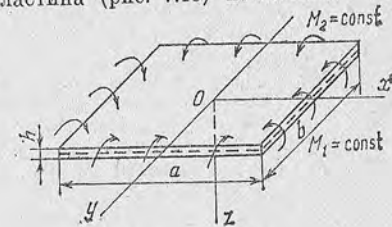


Рис. 7.16.

тый изгиб под действием равномерно распределенных моментов $M_1 = 1$ кН·м/м, $M_2 = 2$ кН·м/м. Размеры пластины $a=2$ м, $b=3$ м, $h=0,01$ м. Модуль упругости $E=2 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu=0,3$. Определить, насколько поднимутся углы пластины ($x=\pm a/2, y=\pm b/2$) по отношению к центру пластины.

Указание. При решении задачи нужно для определения w воспользоваться уравнением (7.12).

Ответ: $w_{\max} = 12,7$ см.

34. Задача. Прямоугольная пластина свободно оперта по контуру и нагружена равномерно распределенным давлением $q_0=10$ кПа. Размеры пластины в плане $a=1$ м, $b=2$ м. Пластина изготовлена из стали с $E=2 \cdot 10^5$ МПа, $\mu=0,3$. Требуется определить необходи-

мую толщину пластины из условия прочности ($[\sigma] = 100$ МПа) и жесткости ($w_{\max} = 0,01$ м).

Указание. При решении задачи необходимо воспользоваться формулами (7.31) и (7.32).

Ответ. Из условия прочности $h = 0,823$ см, из условия жесткости $h = 0,835$ см.

35. **Задача.** Прямоугольная пластинка из ортотропного материала свободно оперта по контуру и нагружена равномерно распределенным давлением $q_0 = 5$ кПа. Размеры пластины в плане $a = 2$ м, $b = 3$ м, толщина $h = 0,04$ м. Упругие постоянные материала пластины $E_1 = 3 \cdot 10^4$ МПа, $E_2 = 2 \cdot 10^4$ МПа, $G = 4 \cdot 10^3$ МПа, $\mu_{12} = 0,15$, $\mu_{21} = 0,1$. Требуется определить величины максимальных значений прогиба $w_{\max}$ и изгибных напряжений σ_{x1} и σ_{y1} .

Указание. При решении задачи следует воспользоваться формулами (7.80) — (7.82).

Ответ. $w_{\max} = 0,56$ см, $\sigma_{x1} = 8,85$ МПа, $\sigma_{y1} = 3,36$ МПа.

36. **Задача.** Определить толщину h круглой пластины радиусом $R = 1$ м, равномерно нагруженной давлением $q_0 = 10$ кПа. Пластина изготовлена из стали ($E = 2 \cdot 10^8$ кПа, $\mu = 0,3$). Толщину пластины необходимо определить из условия прочности ($[\sigma] = 10^5$ кПа) и жесткости ($[w_{\max}] = 10^{-2}$ м) для двух случаев: а) пластина свободно оперта по контуру; б) пластина жестко закреплена по контуру.

Указание. При решении задачи следует использовать формулы (7.96), (7.99) и (7.90), (7.93).

Ответ. а) Из условия прочности $h = 1,12$ см; из условия жесткости $h = 1,52$ см; б) из условия прочности $h = 0,865$ см, из условия жесткости $h = 0,945$ см.

37. **Задача.** Для круглой сплошной стальной пластины, свободно опертой по контуру, определить допускаемую внешнюю нагрузку $[q_0]$ из условия, чтобы максимальный прогиб в центре пластины не превышал допустимой величины $[w_{\max}] = 0,002$ м. Размеры пластины заданы: $R = 1$ м, $h = 0,02$ м. Для стали следует принять $E = 2 \cdot 10^8$ кПа и $\mu = 0,3$.

Ответ. $[q_0] = 4,6$ кПа.

38. **Задача.** Определить максимальный прогиб $w_{\max}$ стальной кольцевой пластины, свободно опертой по внешнему контуру ($r = R$) и имеющей свободной внутреннюю кромку ($r = a$). Заданы величина давления на пластину $q_0 = 10$ кПа, размеры пластины $R = 1$ м: $a = 0,25$ м, $h = 0,03$ м; $E = 2 \cdot 10^8$ кПа, $\mu = 0,3$.

Указание. При решении задачи следует использовать уравнения (7.101), (7.104).

Ответ. $w_{\max} = 0,00153$ м.

39. **Задача.** Прямоугольная в плане стальная ($E = 2 \cdot 10^8$ кПа, $\mu = 0,3$) пластина со сторонами $a = 2$ м, $b = 1$ м свободно оперта по контуру и нагружена сжимающими усилиями $N_x = 1$ МН/м в направлении длинной стороны. Требуется определить толщину пластины из условия потери устойчивости при сжатии.

Ответ. $h = 1,1$ см.

40. **Задача.** Определить критическое сжимающее напряжение пластины, две нагруженные стороны которой свободно оперты, третья продольная кромка закреплена, а четвертая — свободная. Задано отношение сторон пластины $a/b = 3$, отношение $b/h = 100$, $E = 2 \cdot 10^8$ кПа. Решить ту же задачу для случая, когда три стороны свободно оперты, а четвертая — свободная.

Ответ. 1) $\sigma_{кр} = 24,48$ МПа; 2) $\sigma_{кр} = 10,21$ МПа.

Глава 8

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 44. Вводные замечания. Основные понятия вариационного исчисления

Многие задачи прикладной теории упругости удается решать лишь приближенными методами, среди которых важное место занимают вариационные методы и в первую очередь те, которые основаны на применении начала возможных перемещений Лагранжа.

В связи с широким использованием вычислительных машин по-новому оцениваются возможности численных методов решения дифференциальных уравнений, таких, как конечно-разностный метод (метод сеток).

В последние годы большое количество решений задач прикладной теории упругости получено с помощью метода конечных элементов.

В настоящей главе будут рассмотрены лишь наиболее часто применяемые при решении задач прикладной теории упругости вариационные и другие приближенные методы (методы Ритца, Бубнова — Галеркина, Канторовича — Власова, сеток, конечных элементов).

Прежде чем излагать суть вариационных методов, поясним некоторые основные понятия. В инженерной практике наряду с задачами, в которых отыскивается экстремум некоторой функции $y = f(x)$, встречаются и такие, в которых необходимо отыскать экстремум такой переменной Z , которая сама зависит от выбора функции $y(x)$. Такие переменные Z называются *функционалами*.

В простейшем случае функционал Z представляется в виде интеграла $Z = \int_a^b F(x, y, y') dx$, где a, b определяют интервал изменения аргумента x .

Сравнивая функционал и функцию, можно заметить, что они являются переменными, однако первый зависит от вида функции $y(x)$, а вторая — от величины аргумента x . В одном случае, изменяя вид функции $y(x)$, т.е. варьируя функцию, мы изменяем величину функционала, а во втором — изменяя величину независимого переменного x , влияем на величину функции.

При отыскании экстремума функции мы отыскиваем такое значение аргумента x , которое сообщает функции $y(x)$ максимум или минимум.

В вариационных задачах необходимо отыскать такой вид функции $y(x)$, при котором функционал Z приобретает максимальное или минимальное значение.

Классическим примером вариационной задачи является задача о брахистохроне — линии быстрого ската, предложенная в 1696 г. И. Бернулли. Между точками A и B , не лежащими на вертикали, требуется провести линию, по которой материальная точка в минимальное время скатится из точки A в точку B (рис. 8.1). Здесь роль функционала выполняет время t перемещения из точки A в точку B , а уравнение $y(x)$ кривой, проходящей через точки A и B , — искомая функция.

Отметим, что методы решения вариационных задач, т. е. задач отыскания функций, сообщающих функционалу максимум или минимум, во многом сходны с исследованием функций на максимум и минимум.

В задачах на максимум и минимум независимому переменному x дается приращение $\Delta x = x - x_1$, равное дифференциалу dx . В вариационных задачах дается приращение (или вариация) δy искомой функции $y(x)$, равное $\delta y = y(x) - y_1(x)$.

Как в дифференциальном исчислении дифференциал функции представляет собой линейную по отношению к приращению аргумента Δx часть приращения функции, так и в вариационном исчислении вариация функционала δZ представляет собой линейную по отношению к вариации функции δy часть функционала.

Если функция $y = f(x)$ достигает экстремума внутри заданного интервала значений аргумента x , дифференциал $dy = 0$. Аналогично, если функционал достигает экстремума, то его вариация равна нулю: $\delta Z = 0$.

Перечисленные нами ранее вариационные методы решения задач относятся к так называемым *прямым вариационным методам*.

Перейдем к непосредственному рассмотрению некоторых прямых вариационных методов.

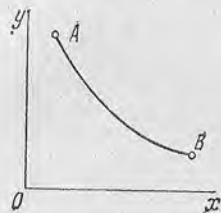


Рис. 8.1.

§ 45. Метод Ритца

Пусть вариационная задача сводится к отысканию такой функции $y(x)$, которая обращает функционал $Z = \int F(x, y, y', \dots) dx$ в экстремум.

Будем искать приближенное выражение для $y(x)$ в виде ряда n функций $\bar{y}(x) = \sum_{i=1}^n a_i y_i(x)$, где каждая из функций $y_i(x)$ удовлетворяет заданным граничным условиям для искомой функции $y(x)$, а a_i — неопределенные параметры. При этом функционал Z превращается в функцию от неопределенных параметров a_i , и условие экстремума функционала Z можно записать в виде

$$\frac{\partial Z}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial a_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial Z}{\partial a_n} = 0.$$

В итоге получается n алгебраических уравнений, из которых можно определить n неизвестных параметров.

Такой метод определения искомой функции в вариационной задаче получил наименование *метода Ритца*.

Исследование сходимости последовательности функций $\bar{y}(x)$ при увеличении числа членов ряда показывает, что при определенных условиях функция $\bar{y}(x)$ сходится к истинному выражению $y(x)$, если n стремится к бесконечности.

Обычно ограничиваются конечным числом членов ряда. При удачно подобранных выражениях функций $y_i(x)$ процесс сходится достаточно быстро и приемлемая для целей практики точность может быть получена, если ограничиться несколькими членами ряда.

В задачах теории упругости и строительной механики функционалом, имеющим экстремальные свойства, является полная энергия, а функциями, определяемыми из условия экстремума энергии, — перемещения точек упругого тела.

При этом оказывается, что метод Ритца тесно связан с вариационным принципом Лагранжа и вытекает из него. Согласно принципу Лагранжа, если упругое тело находится в равновесии, то работа всех сил (внешних и внутренних) на любом возможном перемещении равна нулю:

$$\delta \left[\int_V \int \int \bar{W} dx dy dz - \int_V \int \int (Xu + Yv + Zw) dx dy dz - \int_S \int (\bar{X}u + \bar{Y}v + \bar{Z}w) dS \right] = 0. \quad (8.1)$$

При этом все внутренние и внешние силы считаются неизменными. Первый интеграл представляет собой потенциальную энергию упругого тела, второй — работу массовых сил и третий — работу сил, приложенных к поверхности тела.

Если полную энергию тела обозначить буквой $\mathcal{E}$, то выражение (8.1) можно кратко записать в виде

$$\delta \mathcal{E} = 0. \quad (8.2)$$

Следовательно, в случае равновесия тела возможные перемещения должны быть такими, чтобы полная энергия тела имела экстремум. Устойчивому равновесию соответствует минимум энергии.

Согласно методу Ритца представим перемещения u , v , w в виде ряда функций, каждая из которых удовлетворяет геометрическим граничным условиям. Пусть, например,

$$u = \sum_k a_k \varphi_k(x, y, z), \quad v = \sum_k b_k \psi_k(x, y, z), \quad (8.3)$$

$$w = \sum_k c_k \chi_k(x, y, z)$$

где φ_k , ψ_k , χ_k — функции, удовлетворяющие граничным условиям, а a_k , b_k , c_k — произвольные параметры, подлежащие определению из условия стационарности энергии (8.2).

Потенциальная энергия деформаций $\bar{w}$ может быть представлена через перемещения u , v , w . Если в (2.15) подставить $\lambda = 2\mu G/(1-2\mu)$, $\Delta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ и заменить деформации согласно формулам Коши (1.19), то после преобразований получим для $\bar{w}$ следующее выражение:

$$\bar{w} = G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \frac{\mu}{1-2\mu} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]. \quad (8.4)$$

Теперь полная энергия системы. $\mathcal{E}$ может быть представлена как некоторая функция параметров a_k , b_k , c_k , т. е.

$$\mathcal{E} = \sum_k \mathcal{E}(a_k, b_k, c_k).$$

Из условия стационарности энергии $\delta \mathcal{E} = 0$, имея в виду, что все параметры a_k , b_k , c_k произвольны, следует, что нулю должны быть равны частные производные от энергии по

всем варьируемым параметрам a_k , b_k , c_k , т. е.

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_k} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial b_k} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial c_k} = 0. \quad (8.5)$$

В итоге мы получим столько уравнений, сколько произвольных параметров содержится в выражениях (8.3).

В качестве первого примера применения метода Ритца рассмотрим задачу об изгибе свободно опертого по концам стержня постоянной изгибной жесткости EI , длиной l , нагруженного равномерно распределенной поперечной нагрузкой q (рис. 8.2).

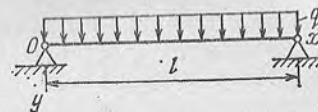


Рис. 8.2.

Для прогиба v применим выражение $v = a \sin(\pi x/l)$, которое удовлетворяет следующим заданным граничным условиям:

$$\text{при } x = 0, l \quad v = 0, \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = 0.$$

Потенциальная энергия изгиба стержня равна $W = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx$. После подстановки $v = a \sin(\pi x/l)$ в выражение для W и интегрирования получим $W = \frac{EI}{2} \frac{l}{2} a^2 \frac{\pi^4}{l^4}$.

Работа внешних сил

$$A = \int_0^l qv dx = qa \int_0^l \sin \frac{\pi x}{l} dx = 2qa \frac{l}{\pi}.$$

Окончательно для энергии $\mathcal{E}$ получим

$$\mathcal{E} = \frac{EI}{2} \frac{l}{2} a^2 \frac{\pi^4}{l^4} - 2qa \frac{l}{\pi}.$$

Далее, из условия $\partial \mathcal{E} / \partial a = 0$ получим значение параметра a — максимального прогиба стержня в середине пролета:

$$a = \frac{4ql^1}{\pi^5 EI} = 0,013073 \frac{ql^4}{EI}.$$

Сравнение с точным решением показывает, что ошибка, вызванная заменой точного выражения для прогиба v приближенным в виде полуволны синусоиды, составляет около 0,4%.

Рассмотрим применение метода Ритца к решению задач изгиба пластин. Применительно к пластинам под полной энергией $\mathcal{E}$ будем понимать $\mathcal{E} = W_c + W_n - A$, где W_c — потенциальная энергия срединной поверхности, W_n — потенциальная энергия изгиба и A — работа внешних сил.

Пусть, например, прямоугольная пластина со сторонами a, b и толщиной h свободно опирается по контуру и нагружена равномерно распределенным давлением $q = q_0$. Будем считать, что кромки пластины могут свободно смещаться в плоскости пластины. Пластину будем считать жесткой и усилия в срединной плоскости отсутствующими. Тогда потенциальная энергия есть энергия изгиба пластины

$$W_n = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\mu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy, \quad (8.6)$$

а работа внешних сил

$$A = \int_0^a \int_0^b q_0 w dx dy. \quad (8.7)$$

Полная энергия пластины $\mathcal{E}$ будет равна

$$\mathcal{E} = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\mu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy - \int_0^a \int_0^b q_0 w dx dy. \quad (8.8)$$

Представим прогиб w в виде двойного ряда:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (8.9)$$

Постоянные произвольные параметры a_{mn} должны удовлетворять условию (8.5).

Уравнений (8.5) будет столько, сколько содержится членов ряда в выражении (8.9).

Ограничимся одним членом ряда, представив прогиб в виде

$$w = a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (8.10)$$

Тогда, подставив (8.10) в (8.8), получим

$$\mathcal{E} = \frac{D}{2} \frac{ab}{4} \pi^4 a_{11}^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 - \frac{4ab}{\pi^2} q_0 a_{11}.$$

При этом принято во внимание, что

$$\int_0^a \int_0^b \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = \frac{4ab}{\pi^2},$$

$$\int_0^a \int_0^b \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{b} dx dy = \int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b} dx dy = \frac{ab}{4}.$$

Из условия (8.5) следует $\partial \mathcal{E} / \partial a_{11} = 0$, т. е.

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_{11}} = D \frac{ab}{4} \pi^4 a_{11} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 - \frac{4ab}{\pi^2} q_0 = 0,$$

откуда находим коэффициент a_{11} :

$$a_{11} = \frac{16q_0 a^4}{D\pi^6 (1 + a^2/b^2)^2}. \quad (8.11)$$

Подставляя (8.11) в (8.10), находим выражение для w :

$$w = \frac{16q_0 a^4}{D\pi^6 (1 + a^2/b^2)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (8.12)$$

Нетрудно видеть, что мы в этом случае получили решение, совпадающее с тем, которое нами раньше было найдено методом Навье.

Если решить задачу во втором приближении и принять для w функцию вида

$$w = a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + a_{13} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b}, \quad (8.13)$$

то после подстановки в (8.8) и интегрирования получим

$$\mathcal{E} = \frac{D}{2} \pi^4 \frac{ab}{4} \left[a_{11}^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 + a_{13}^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2} \right)^2 \right] - \frac{4ab}{\pi^2} q_0 \left(a_{11} + \frac{a_{13}}{3} \right).$$

Из условия (8.5) найдем коэффициенты a_{11} и a_{13} :

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial a_{11}} = D \frac{\pi^4 ab}{4} a_{11} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 - \frac{4ab}{\pi^2} q_0 = 0,$$

откуда

$$a_{11} = \frac{16q_0 a^4}{D\pi^6 (1 + a^2/b^2)^2},$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial a_{13}} = D \frac{\pi^4 ab}{4} a_{13} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2} \right)^2 - \frac{4q_0 ab}{3\pi^2} = 0,$$

откуда

$$a_{13} = \frac{16q_0 a^4}{3D\pi^6 (1 + 9a^2/b^2)^2}.$$

Для w , подставляя найденные значения a_{11} и a_{13} в (8.13), получим

$$w = \frac{16q_0 a^4}{D\pi^6} \left[\frac{\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}}{(1 + a^2/b^2)^2} + \frac{\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b}}{3(1 + 9a^2/b^2)^2} \right]. \quad (8.14)$$

Теперь для прогиба в центре пластины будем иметь

$$w_{\max} = \frac{16q_0 a^4}{D\pi^6} \left[\frac{1}{(1 + a^2/b^2)^2} - \frac{1}{3(1 + 9a^2/b^2)^2} \right].$$

Аналогично можно решать задачу методом Ритца и в более высоких приближениях, но для этого необходимо брать большее число членов в ряде (8.9).

Если задача решается в геометрически нелинейной постановке (при этом пластина считается гибкой, а ее прогибы достаточно велики, и необходимо учитывать взаимное влияние прогибов и усилий в срединной поверхности), то в уравнении энергии следует учитывать не только энергию изгиба, но и энергию срединной поверхности. Энергия срединной поверхности W_c вычисляется по уравнению (6.35). Однако для вычисления ее необходимо знать выражение функции напряжений φ .

В этом случае метод Ритца применяется в такой последовательности. Сначала, как обычно, задаются видом функции прогиба, удовлетворяющей граничным условиям. Затем подставляют выражение для w в уравнение совместности деформаций (6.19) и интегрируют его. Полученное после

интегрирования выражение φ используют для вычисления W_c по (6.35). После определения выражения полной энергии ϑ , как и прежде, используется условие (8.5) для нахождения неизвестных параметров a_{mn} . Отметим, что в случае решения геометрически нелинейной задачи в результате применения (8.5) получается система нелинейных алгебраических уравнений.

§ 46. Метод Бубнова — Галеркина

Метод Бубнова — Галеркина представляет собой некоторый приближенный метод интегрирования дифференциальных уравнений и не связан непосредственно с вариационной проблемой.

Пусть известны дифференциальное уравнение задачи вида $\Phi(x, y, y', \dots) = 0$ и краевые условия задачи. Приближенное решение ищется в виде ряда: $\bar{y} = \sum_{h=1}^n a_h \varphi_h(x)$, где функции $\varphi_h(x)$ удовлетворяют всем граничным условиям задачи при $x = x_1$ и $x = x_2$, а a_h — неопределенные параметры, которые находятся из условия

$$\int_{x_1}^{x_2} \Phi(x, y, y', \dots) \bar{y} dx = 0. \quad (8.15)$$

Здесь $\delta \bar{y} = \sum_{h=1}^n \varphi_h(x) \delta a_h$. Так как вариации δa_h произвольны, то уравнение (8.15) распадается на систему алгебраических уравнений

$$\int_{x_1}^{x_2} \Phi(x, y, y', \dots) \varphi_h(x) dx = 0, \quad (8.16)$$

из которых определяются параметры a_h . Количество уравнений равно числу неопределенных параметров a_h .

Исследования показывают, что при увеличении числа членов ряда процесс приближения $\bar{y}(x)$ к истинному решению $y(x)$ сходится.

Поясним суть метода Бубнова — Галеркина на некоторых простых примерах.

Рассмотрим задачу об изгибе стержня, нагруженного равномерно распределенной нагрузкой и свободно опертого

по краям (см. рис. 8.2). Уравнение упругой оси стержня при изгибе имеет вид

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} - q = 0. \quad (8.17)$$

Граничные условия задачи: $x=0, l, v=0, d^2 v/dx^2=0$. В качестве аппроксимирующей функции прогиба, как и прежде, примем $v=a \sin(\pi x/l)$.

Если левую часть уравнения (8.17) обозначить через X , то уравнение метода Бубнова — Галеркина запишется следующим образом:

$$\int_0^l X \delta v dx = 0.$$

В данном случае $\delta v = \delta a \sin(\pi x/l)$. Так как δa — произвольная вариация и не равна нулю, то, вынося ее из-под знака интеграла, получим

$$\int_0^l X \sin \frac{\pi x}{l} dx = 0,$$

где $X = EIa \frac{\pi^4}{l^4} \sin \frac{\pi x}{l} - q$. После интегрирования получим тот же результат, что и ранее при решении этой задачи методом Ритца, а именно $a = 4ql^4/(\pi^5 EI)$.

Перейдем от одномерной к двумерной задаче. В качестве примера такой задачи рассмотрим изгиб прямоугольной в плане пластины, свободно опертой всеми четырьмя кромками. Будем полагать, что пластина нагружена равномерно распределенным поперечным давлением $q=q_0$. Размеры пластины в направлении осей x, y равны соответственно a и b .

Дифференциальное уравнение срединной поверхности при изгибе жестких пластин имеет вид

$$X = D \nabla^2 \nabla^2 w - q = 0. \quad (8.18)$$

Для двумерной задачи уравнение метода Бубнова — Галеркина примет вид

$$\int_0^a \int_0^b X \delta w dx dy = 0. \quad (8.19)$$

Для прогиба пластины w в первом приближении, как и прежде, примем выражение $w = a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$.

Тогда $X = Da_{11} \pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} - q_0$, а $\delta w = \delta a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$.

Так как a_{11} — неопределенный параметр, δa_{11} — произвольная вариация этого параметра, то

$$\int_0^a \int_0^b \left[Da_{11} \pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} - q_0 \right] \sin \frac{\pi x}{a} \times \\ \times \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = 0.$$

После интегрирования получим

$$Da_{11} \frac{\pi^4 ab}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) - q_0 \frac{4ab}{\pi^2} = 0,$$

или

$$a_{11} = \frac{16q_0 a^4}{\pi^6 D (1 + a^2/b^2)^2}. \quad (8.20)$$

В результате решения задачи методом Бубнова — Галеркина мы получили ту же величину для параметра a_{11} , что и ранее при решении задачи методом Ритца.

Рассмотрим решение этой же задачи во втором приближении. Пусть

$$w = a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + a_{13} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b};$$

при этом

$$X = D\pi^4 \left[a_{11} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \right. \\ \left. + a_{13} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2} \right) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b} - q_0 \right], \quad (8.21)$$

$$\delta w = \delta a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \delta a_{13} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b}. \quad (8.22)$$

Подставляя (8.22) в (8.19), имеем

$$\int_0^a \int_0^b X \left(\delta a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \delta a_{13} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b} \right) dx dy = 0.$$

Учитывая, что a_{11} , a_{13} являются независимыми варьируемыми параметрами, будем иметь

$$\int_0^a \int_0^b X \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = 0, \quad (8.23)$$

$$\int_0^a \int_0^b X \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b} dx dy = 0.$$

Если в (8.23) подставить (8.21) и произвести интегрирование, то для a_{11} и a_{13} получим следующие выражения:

$$a_{11} = \frac{16q_0 a^4}{\pi^6 D (1 + a^2/b^2)^2}, \quad a_{13} = \frac{16q_0 a^4}{3\pi^6 D (1 + 9a^2/b^2)^2}.$$

Во втором приближении мы получили результат, совпадающий с тем, который был ранее получен при решении этой задачи методом Ритца.

В задачах строительной механики и теории упругости дифференциальные уравнения, которые подлежат интегрированию, часто представляют собой уравнения равновесия. Так было, например, в рассмотренных выше задачах, где методом Бубнова — Галеркина интегрировались дифференциальные уравнения упругой оси стержня и упругой срединной поверхности пластины при поперечном изгибе. Эти уравнения (8.17) и (8.18) являются уравнениями равновесия элемента стержня и элемента пластины соответственно. При этом вариация искомой функции δw представляет собой возможное перемещение, а уравнение (8.19) может трактоваться как вариационное уравнение Лагранжа при условии, что массовые силы отсутствуют, а работа поверхностных сил на возможных перемещениях равна нулю. Для того чтобы работа поверхностных сил на возможных перемещениях была равна нулю, необходимо, чтобы функции, аппроксимирующие перемещения точек тела, удовлетворяли не только геометрическим, но и статическим граничным условиям*).

В рассмотренных нами примерах решения задачи методами Ритца и Бубнова — Галеркина используются одни и те же аппроксимирующие функции прогиба, причем эти функ-

*) Подробно этот вопрос рассматривается в книге: Лейбензон Л. С. Теория упругости. Собрание трудов, т. I. — М.: АН СССР, 1951.

ции удовлетворяют всем геометрическим ($w=0$ при $x=0, a$ и $y=0, b$), а также статическим ($\partial^2 w/\partial x^2=0$ при $x=0, a$ и $\partial^2 w/\partial y^2=0$ при $y=0, b$) условиям задачи.

Поскольку и в том и в другом методе уравнение решаемой задачи в конечном счете сводится к одному и тому же вариационному уравнению Лагранжа, то, естественно, что при одинаковых аппроксимирующих прогиб функциях w результаты решения задач методом Ритца и Бубнова — Галеркина будут совпадать.

В большинстве случаев использование метода Бубнова — Галеркина при решении такого рода задач приводит к менее громоздким выкладкам, чем применение метода Ритца. Однако следует помнить, что в случае применения метода Бубнова — Галеркина в той форме, которая была нами рассмотрена, функция w обязательно должна удовлетворять как геометрическим, так и статическим граничным условиям.

В случае изгиба гибких пластин их поведение описывается двумя уравнениями — совместности деформаций и равновесия (6.19). При этом возможно применение метода Бубнова — Галеркина либо по способу П. Ф. Папковича, либо по способу В. З. Власова.

В первом случае задаются только видом аппроксимирующей функции прогиба w , удовлетворяющей соответствующим граничным условиям, а функцию напряжений φ определяют интегрированием дифференциального уравнения совместности деформаций (6.19). Затем найденную функцию φ и выбранную функцию w подставляют в уравнение равновесия и к нему уже применяют процедуру Бубнова — Галеркина, которая была описана выше.

Во втором случае (при решении задачи по способу В. З. Власова) необходимо задаваться видом обеих функций w и φ , подставлять их в уравнения (6.19) и применять процедуру Бубнова — Галеркина к обоим уравнениям. Функции φ и w должны обязательно удовлетворять всем геометрическим и статическим условиям задачи. Не останавливаясь на вопросе о сходимости процесса, отметим, что при определенных условиях ряды, которыми аппроксимируются функции w и φ , сходятся к истинному решению задачи при безграничном увеличении числа членов ряда.

Так как поведение гибких пластин описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений (6.19), то в результате применения метода Бубнова — Галеркина к интегрированию такой системы (как по способу П. Ф. Папковича, так и по способу В. З. Власова) получается система нели-

нейных алгебраических уравнений. Решение такой системы представляет значительные трудности. Поэтому на практике обычно ограничиваются небольшим количеством членов ряда для функций w и φ .

§ 47. Метод Канторовича — Власова

В 1933 г. Л. В. Канторовичем *) предложен метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла. Метод Л. В. Канторовича позволяет свести двумерную задачу к задаче одномерной. Позже, в 1946 г., В. З. Власовым **) идея метода Л. В. Канторовича применена к решению задач строительной механики пластин и оболочек. Для сведения двумерной задачи изгиба пластин и оболочек к одномерной функция прогиба представляется в виде суммы произведений функций, одна из которых по одной переменной считается известной (задается), а другая (по другой переменной) подлежит определению.

Уравнения равновесия для пластин получены им из вариационного уравнения Лагранжа — начала возможных перемещений.

Таким образом, в отличие от метода Бубнова — Галеркина, при котором интегрирование дифференциального уравнения сводится к решению системы алгебраических уравнений, по методу Канторовича — Власова интегрирование дифференциального уравнения в частных производных заменяется интегрированием системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Если задача линейная, то получается система обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим на примерах решения задач изгиба жестких пластин существо метода Канторовича — Власова и его отличие от метода Бубнова — Галеркина.

Представим прогиб пластины w в виде ряда:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \varphi_m(x), \quad (8.24)$$

где $\varphi_m(x)$ — известные функции, удовлетворяющие заданным

*) Канторович Л. В. Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла. — Изв. АН СССР, ОМЭН, 1933, № 5.

**) Власов В. З. Строительная механика тонких упругих пластинок. — ПММ, 1946, т. X, № 1.

граничным условиям на краях пластины $x=0, a$. В качестве функций $\varphi(x)$ В. З. Власов предлагает принимать так называемые балочные функции, т. е. формы собственных колебаний балки при тех же граничных условиях, что и у пластины.

Например, если пластина на краях ($x=0, a$) свободно опирается, то в качестве функций $\varphi_m(x)$ следует брать выражение $\sin \frac{m\pi x}{a}$. Тогда

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (8.25)$$

Распределенную по поверхности пластины нагрузку $q(x, y)$ также можно представить в виде ряда:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (8.26)$$

Если далее применить процедуру Бубнова к уравнению равновесия пластины, т. е.

$$\int_0^a X \sin \frac{m\pi x}{a} dx = 0,$$

где

$$\begin{aligned} X &= D \nabla^2 \nabla^2 w - q(x, y) = \\ &= D \sum_{m=1}^{\infty} \left(Y_m^{IV}(y) - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m''(y) + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y_m(y) \right) \sin \frac{m\pi x}{a} - \\ &\quad - \sum_{m=1}^{\infty} q_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}, \end{aligned}$$

то после интегрирования и сокращения получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} D \left(Y_m^{IV}(y) - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m''(y) + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y_m(y) \right) - q_m = 0. \quad (8.27)$$

Поскольку функции $Y_m(y)$ являются линейно независимыми, то из (8.27) следует

$$Y_m^{IV}(y) - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m''(y) + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y_m(y) = \frac{q_m(y)}{D}. \quad (8.28)$$

В рассмотренном нами примере оказалось, что в результате применения метода Власова мы получили уравнение (8.28), совпадающее с тем, которое нами было получено ранее по методу М. Леви (7.39). Это объясняется тем, что пример относится к случаю, когда две стороны пластины свободно оперты. Именно в этом случае функция $\varphi(x)$ может быть представлена рядом синусов. При других случаях опирания пластины, когда метод М. Леви не может быть применен, можно использовать для решения задачи метод Власова.

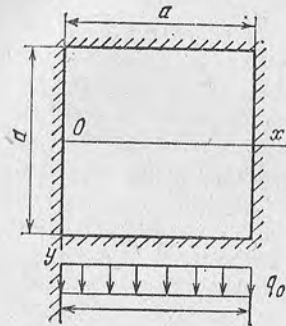


Рис. 8.3.

Рассмотрим, например, случай изгиба квадратной пластины, заделанной по контуру, равномерно распределенной поперечной нагрузкой $q(x, y) = q_0$ (рис. 8.3). Представим прогиб w в виде

$$w = Y(y)\varphi(x), \quad (8.29)$$

где

$$\varphi(x) = 1 - \cos \frac{2\pi x}{a}. \quad (8.30)$$

Функция $\varphi(x)$ удовлетворяет заданным граничным условиям: при $x=0, a$ $w = \partial w / \partial x = 0$. Если подставить функцию $\varphi(x)$ в уравнение изгиба жестких пластин, то получим

$$X = D\nabla^2 \nabla^2 w - q_0 = D \left[Y^{IV}(y) \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) + 2 \left(\frac{2\pi}{a} \right)^2 Y''(y) \cos \frac{2\pi x}{a} - Y(y) \left(\frac{2\pi}{a} \right)^4 \cos \frac{2\pi x}{a} \right] - q_0. \quad (8.31)$$

Далее, применяя процедуру Бубнова — Галеркина к уравнению (8.31), будем иметь

$$\int_0^a X \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) dx = 0. \quad (8.32)$$

Подставляя вместо X выражение (8.31) и производя интегрирование, получим следующее обыкновенное линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка с постоянными коэффициентами:

$$Y^{IV}(y) - \frac{2}{3} \left(\frac{2\pi}{a} \right)^2 Y''(y) + \frac{1}{3} \left(\frac{2\pi}{a} \right)^4 Y(y) = \frac{2}{3} \frac{q_0}{D}. \quad (8.33)$$

Введем обозначение $k^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{2\pi}{a} \right)^2$. Тогда (8.33) можно записать в виде

$$Y^{IV}(y) - 2k^2 Y''(y) + 3k^4 Y(y) = \frac{2}{3} \frac{q_0}{D}. \quad (8.34)$$

Найдем корни r_i , $i = 1, \dots, 4$, характеристического уравнения. Все четыре корня оказываются комплексными:

$$r_{1,2} = \pm \left(1,355 \frac{\pi}{a} + 0,698 \frac{\pi}{a} i \right),$$

$$r_{3,4} = \pm \left(1,355 \frac{\pi}{a} - 0,698 \frac{\pi}{a} i \right).$$

Общее решение уравнения (8.34) запишем в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$Y(y) = C_1 \operatorname{ch} \left(1,355 \frac{\pi y}{a} \right) \cos \left(0,698 \frac{\pi y}{a} \right) + C_2 \operatorname{ch} \left(1,355 \frac{\pi y}{a} \right) \sin \left(0,698 \frac{\pi y}{a} \right) + C_3 \operatorname{sh} \left(1,355 \frac{\pi y}{a} \right) \cos \left(0,698 \frac{\pi y}{a} \right) + C_4 \operatorname{sh} \left(1,355 \frac{\pi y}{a} \right) \sin \left(0,698 \frac{\pi y}{a} \right) + \frac{q_0 a^4}{8\pi^4 D}. \quad (8.35)$$

Примем во внимание то, что в силу симметрии рассматриваемой задачи функция $Y(y)$ должна быть симметричной. Тогда из (8.35) следует, что $C_2 = C_3 = 0$, и для $Y(y)$ мы получим выражение

$$Y(y) = C_1 \operatorname{ch} \left(1,355 \frac{\pi y}{a} \right) \cos \left(0,698 \frac{\pi y}{a} \right) + C_4 \operatorname{sh} \left(1,355 \frac{\pi y}{a} \right) \sin \left(0,698 \frac{\pi y}{a} \right) + \frac{q_0 a^4}{8\pi^4 D}. \quad (8.36)$$

Произвольные коэффициенты C_1 и C_4 найдем из граничных условий. При $y = \pm a/2$ $Y(y) = 0$ и $Y'(y) = 0$. Для C_1 и C_4 получим следующие значения:

$$C_1 = -0,501 \frac{q_0 a^4}{8\pi^4 D}, \quad C_4 = -0,0057 \frac{q_0 a^4}{8\pi^4 D}.$$

Подставляя найденные выражения для C_1 и C_4 в (8.36) и

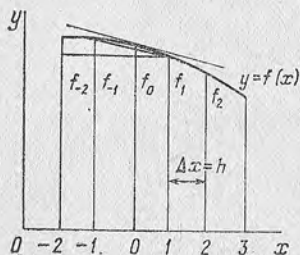
принимая во внимание (8.29) и (8.30), получим следующее выражение для функции прогиба w :

$$w = \frac{q_0 a^4}{8\pi^4 D} \left[1 - 0,501 \operatorname{ch} \left(1,355 \frac{\pi y}{a} \right) \cos \left(0,698 \frac{\pi y}{a} \right) - 0,0057 \operatorname{sh} \left(1,355 \frac{\pi y}{a} \right) \sin \left(0,698 \frac{\pi y}{a} \right) \right] \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right). \quad (8.37)$$

Максимальный прогиб в центре пластины при $x = a/2$ и $y = 0$ оказывается равным $w_{\max} = 0,00428 q_0 a^4 / D$, что отличается от точного значения менее чем на 2%.

§ 48. Конечно-разностный метод (метод сеток)

Пусть мы имеем зависимость $y = f(x)$, показанную графиком рис. 8.4. Найдем производные для точки O , представленные через конечные разности. Первую производную $f'(0)$ запишем как отношение $(f_1 - f_{-1}) / (2h)$, где $h = \Delta x$ — малое, но конечное приращение аргумента x :



$$f'_0 = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}.$$

Для промежуточных точек $(+1/2)$ и $(-1/2)$ первые производные можно записать так:

$$f'_{1/2} = \frac{f_1 - f_0}{h}, \quad f'_{-1/2} = \frac{f_0 - f_{-1}}{h}.$$

Рис. 8.4.

Тогда вторая производная для точки O будет иметь следующий вид:

$$f''_0 = \frac{f'_{1/2} - f'_{-1/2}}{h} = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}.$$

Третью производную в точке O представим через разности вторых производных в двух соседних точках $(+1)$ и (-1) :

$$f'''_0 = \frac{f''_1 - f''_{-1}}{2h},$$

где

$$f''_1 = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2}, \quad f''_{-1} = \frac{f_0 - 2f_{-1} + f_{-2}}{h^2}.$$

После подстановки значений f'_1 и f'_{-1} получим

$$f'''_0 = \frac{f_2 - 2f_1 + 2f_{-1} - f_{-2}}{2h^3}.$$

Для получения выражения четвертой производной сначала получим выражение для третьих производных в промежуточных точках $(+1/2)$ и $(-1/2)$:

$$f'''_{1/2} = \frac{f''_1 - f''_0}{h} = \frac{(f_2 - 2f_1 + f_0) - (f_1 - 2f_0 + f_{-1})}{h^3} = \frac{f_2 - 3f_1 + 3f_0 - f_{-1}}{h^3},$$

$$f'''_{-1/2} = \frac{f''_0 - f''_{-1}}{h} = \frac{(f_1 - 2f_0 + f_{-1}) - (f_0 - 2f_{-1} + f_{-2})}{h^3} = \frac{f_1 - 3f_0 + 3f_{-1} - f_{-2}}{h^3}.$$

Четвертую производную в точке O представим через разности третьих производных в точках $(+1/2)$ и $(-1/2)$:

$$f^{IV}_0 = \frac{f'''_{1/2} - f'''_{-1/2}}{h} = \frac{f_2 - 4f_1 + 6f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}}{h^4}.$$

Таким образом, мы получили для некоторой точки O выражения для первых четырех производных, представленных через значения функции $f(x)$ в соседних точках. Расстояние между соседними точками (шаг аргумента) принято равным h . Особенностью полученных выражений для производных является то, что они получены через так называемые центральные разности, через разности значений функции или ее производных справа и слева от точки O .

Выпишем сводку полученных значений производных через конечные разности:

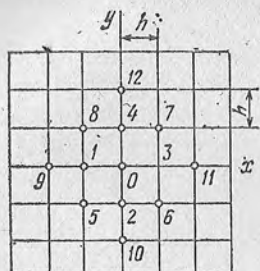
$$\begin{aligned} f'_0 &= \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}, & f''_0 &= \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}, \\ f'''_0 &= \frac{f_2 - 2f_1 + 2f_{-1} - f_{-2}}{2h^3}, \\ f^{IV}_0 &= \frac{f_2 - 4f_1 + 6f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}}{h^4}. \end{aligned} \quad (8.38)$$

Если функция зависит не от одной, а от двух переменных,

то частные производные этой функции по x и y могут быть получены так же, как это было показано выше.

Пусть $w = w(x, y)$ является функцией двух переменных. Нанесем на область вблизи точки O , для которой определяются производные, сетку с шагом h в направлении осей x и y (рис. 8.5). Шаги сетки в направлении осей x и y могут быть различными.

Вторые производные $\partial^2 w / \partial x^2$ и $\partial^2 w / \partial y^2$ можно записать через конечные разности в следующем виде:



$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_0 \approx \frac{w_3 - 2w_0 + w_1}{h^2},$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_0 \approx \frac{w_4 - 2w_0 + w_2}{h^2}.$$

Рис. 8.5.

Вторую смешанную производную $\partial^2 w / \partial x \partial y$ можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_0 \approx \frac{(\partial w / \partial y)_3 - (\partial w / \partial y)_1}{2h}, \text{ имея в виду, что}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_3 \approx \frac{w_7 - w_0}{2h}, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_1 \approx \frac{w_8 - w_5}{2h},$$

для второй смешанной производной получим следующую формулу:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_0 \approx \frac{w_7 - w_0 - w_8 + w_5}{4h^2}.$$

Получим, далее, выражения для четвертых производных

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right)_0, \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)_0 \text{ и } \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_0. \text{ Как следует из (8.38),}$$

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right)_0 \approx \frac{w_{11} - 4w_3 + 6w_0 - 4w_1 + w_9}{h^4},$$

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)_0 \approx \frac{w_{12} - 4w_4 + 6w_0 - 4w_2 + w_{10}}{h^4},$$

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_0 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_0 \approx \frac{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_4 - 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_2}{h^2}.$$

Представляем смешанную производную как вторую произ-

водную по y от второй производной по x . Для этого в выражение для f''_0 (8.38) вместо f_1, f_0 и f_{-1} подставим соответственно

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_4 \approx \frac{w_7 - 2w_4 + w_8}{h^2}, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_0 \approx \frac{w_3 - 2w_0 + w_1}{h^2},$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_2 \approx \frac{w_0 - 2w_2 + w_5}{h^2}.$$

Окончательно выражение для $\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_0$ примет следующий вид:

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_0 \approx \frac{(w_5 + w_6 + w_7 + w_8) - 2(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + 4w_0}{h^4}.$$

Приведем следующую сводку формул для частных производных от функции $w(x, y)$ в точке O :

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 \approx \frac{w_3 - w_1}{2h},$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 \approx \frac{w_4 - w_2}{2h},$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_0 \approx \frac{w_3 - 2w_0 + w_1}{h^2},$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_0 \approx \frac{w_4 - 2w_0 + w_2}{h^2},$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_0 \approx \frac{w_7 - w_0 - w_8 + w_5}{4h^2},$$

(8.39)

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right)_0 \approx \frac{w_{11} - 4w_3 + 6w_0 - 4w_1 + w_9}{h^4},$$

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)_0 \approx \frac{w_{12} - 4w_4 + 6w_0 - 4w_2 + w_{10}}{h^4},$$

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_0 \approx \frac{(w_5 + w_6 + w_7 + w_8) - 2(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + 4w_0}{h^4}.$$

Теперь, когда производные от функции w могут быть заменены приближенными выражениями через значения функции w в узловых точках по (8.39), можно дифференциальное уравнение изгиба пластин С. Жермен — Лагранжа

представить в конечно-разностной форме

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \approx \frac{1}{h^4} \{w_{11} - 4w_3 + 6w_0 - 4w_1 + w_9 +$$

$$+ w_{12} - 4w_4 + 6w_0 - 4w_2 + w_{10} + 2[w_5 + w_6 + w_7 + w_8 -$$

$$- 2(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + 4w_0\} = \frac{1}{h^4} [20w_0 - 8(w_1 + w_2 +$$

$$+ w_3 + w_4) + 2(w_5 + w_6 + w_7 + w_8) + (w_9 + w_{10} + w_{11} + w_{12})].$$

Окончательно для точки O имеем

$$20w_0 - 8(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + 2(w_5 + w_6 + w_7 + w_8) +$$

$$+ (w_9 + w_{10} + w_{11} + w_{12}) = \frac{q_0 h^4}{D}, \quad (8.40)$$

где через q_0 обозначена величина давления $q(x, y)$ в точке O .

Для каждой внутренней узловой точки мы будем иметь уравнение типа (8.40). Если внутренняя узловая точка находится на расстоянии одного шага от контурных точек, то

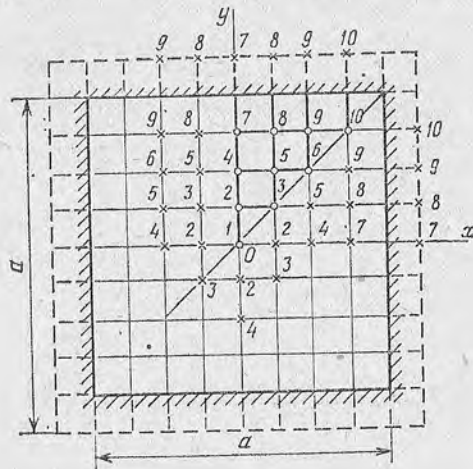


Рис. 8.6.

в уравнения равновесия помимо внутриконтурных точек войдут также законтурные точки.

Мысленно продолжаем пластину за пределы контура и принимаем, что прогибы пластины в законтурных точках

должны быть такими, чтобы удовлетворялись заданные граничные условия (рис. 8.6).

Граничные условия задачи выражаются в конечно-разностной форме. Для каждой точки контура можно записать два граничных условия. В эти уравнения помимо значений прогибов внутри контура и на контуре входят значения прогибов в законтурных точках. В итоге получается система линейных алгебраических уравнений, из которых определяются значения прогибов во всех узловых точках. Зная величины прогибов в каждой точке, можно определить, далее, через них вторые производные $\partial^2 w / \partial x^2$ и $\partial^2 w / \partial y^2$ и, следовательно, величины изгибающих моментов M_x и M_y . Точность полученных результатов решения задачи зависит от размера шага h . По мере уменьшения шага точность возрастает, но одновременно возрастает и число уравнений, которые нужно решать для определения прогибов в узловых точках. При замене производных конечными центральными разностями ошибка пропорциональна h^2 . Поэтому точность вычисления быстро возрастает с уменьшением шага. Вместе с тем примерно пропорционально $1/h^2$ возрастает число уравнений.

Современные вычислительные цифровые машины позволяют без особого труда решать большие системы линейных алгебраических уравнений. Для их решения имеются стандартные программы. Поэтому метод конечных разностей (метод сеток) получил в настоящее время широкое распространение для решения многих прикладных задач. Этот метод применяется для интегрирования не только линейных дифференциальных уравнений, но также и нелинейных. В последнем случае в результате конечно-разностной аппроксимации дифференциальных уравнений получаются системы нелинейных алгебраических уравнений.

Для сокращения количества уравнений, подлежащих решению, целесообразно использовать условия симметрии, если они имеют место.

Рассмотрим в качестве примера случай изгиба квадратной пластины, зашпеленной по кромкам и нагруженной равномерно распределенным давлением $q = q_0$. При составлении уравнений мы должны учесть симметрию как относительно осей x, y , проходящих через центр пластины, так и симметрию относительно диагоналей квадрата. Граничные условия на кромках $x = \pm a/2$ и $y = \pm a/2$ будут $w = 0$, $\partial w / \partial x = 0$, $\partial w / \partial y = 0$. Из граничных условий следует, что прогибы в узловых точках контура равны нулю, а прогибы в узловых

предконтурных и законтурных точках, симметрично расположенных относительно контура, равны друг другу.

На рис. 8.6 показана защемленная квадратная пластина со стороной квадрата, равной a . Поле пластины покрыто сеткой с шагом $h = a/8$. Принимая во внимание условия симметрии деформации пластины и условия на контуре, решение задачи сводится к определению прогибов в десяти, показанных на рис. 8.6, узловых точках.

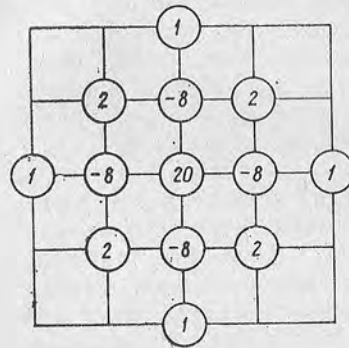


Рис. 8.7.

Для этих десяти точек необходимо составить десять уравнений типа (8.40). Как видно из уравнений (8.40), коэффициенты при прогибах в прилегающих к центральному узлу точках располагаются так, как показано на схеме рис. 8.7. Для прогибов в ближайших точках слева, справа, сверху и снизу коэффициенты равны -8 , для ближайших по диагонали точек $+2$, а для прогибов точек, отстоящих через один узел от центрального, $+1$. Коэффициент при прогибе центрального узла равен $+20$. Используя схему рис. 8.7, можно составить уравнения равновесия в конечно-разностной форме для точек $1 \div 10$ рис. 8.6.

Так, для узла 1 будем иметь

$$20w_1 - 8(w_2 + w_2 + w_2 + w_2) + 2(w_3 + w_3 + w_3 + w_3) + (w_4 + w_4 + w_4 + w_4) = \frac{q_0 a^4}{4096D}.$$

Аналогично, для узла 2 получим

$$20w_2 - 8(w_3 + w_3 + w_1 + w_1) + 2(w_2 + w_2 + w_5 + w_5) + (w_2 + w_7 + w_5 + w_5) = \frac{q_0 a^4}{4096D}.$$

Составляя подобным образом уравнения для всех остальных узловых точек, получим систему десяти линейных алгебраических уравнений, которую представим в матричной форме

w_1	$\times$	20	-32	8	4	0	0	0	0	0	0	$\frac{q_0 a^4}{4096D}$
w_2		-8	25	16	-8	4	0	1	0	0	0	.
w_3		2	-16	22	4	-16	2	0	2	0	0	.
w_4		1	-8	4	20	-16	2	-8	4	0	0	.
w_5		0	3	-8	-8	23	-8	2	-8	3	0	.
w_6		0	0	-14	2	0	20	0	4	-16	2	.
w_7		0	1	0	-8	4	0	21	-16	2	0	.
w_8		0	0	1	2	-8	2	-8	22	-8	1	.
w_9		0	0	0	0	3	-8	1	-8	23	-8	.
w_{10}		0	0	0	0	0	2	0	2	-16	22	.

В результате решения системы 10 линейных алгебраических уравнений получим следующие значения для прогибов в точках $1 \div 10$ в долях $q_0 a^4/D$:

$$\begin{aligned} w_1 &= 0,0008412; & w_2 &= 0,0007634, & w_3 &= 0,0006767, \\ w_4 &= 0,0004870; & w_5 &= 0,0004933, & w_6 &= 0,0005118, \\ w_7 &= 0,0001499, & w_8 &= 0,0001609, & w_9 &= 0,0001705, \\ w_{10} &= 0,0000517. \end{aligned}$$

Таким образом, максимальный прогиб в центре пластины оказывается равным $w_{\max} = w_1 = 0,0008412 q_0 a^4/D$, что составляет менее 70% точного значения. Это и неудивительно, так как в первом приближении была выбрана для решения очень грубая сетка 8×8 . Для получения более точного решения требуется значительно более мелкая сетка.

Метод сеток оказывается эффективным также при решении плоской задачи теории упругости. Будем исходить из основного уравнения плоской задачи $\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0$.

Вид левой части бигармонического уравнения соответствует виду левой части уравнения равновесия жестких пластин, а правая часть в отличие от уравнения С. Жермен — Лагранжа равна нулю. Для того чтобы представить основное уравнение плоской задачи в конечных разностях, можно воспользоваться выражением (8.40), заменив в левой части w на φ , а правую часть приравняв нулю. Тогда для некоторого узла O сетки будем иметь

$$20\varphi_0 - 8(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) + 2(\varphi_5 + \varphi_6 + \varphi_7 + \varphi_8) + (\varphi_9 + \varphi_{10} + \varphi_{11} + \varphi_{12}) = 0. \quad (8.41)$$

Так же, как и в рассмотренном примере изгиба жесткой пластины, при переходе к узлам, прилегающим к контуру и расположенным на контуре, в уравнение (8.41) войдут наряду с внутриконтурными и законтурные точки. Статические условия на контуре позволяют установить связь между значениями φ во внутриконтурных и законтурных точках. Для каждой точки контура можно записать два граничных условия (либо $\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$, $\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$, либо $\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$, $\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$), а для угловых точек — три ($\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$, $\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$, $\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$), так как в угловых точках сходятся две взаимно перпендикулярные площадки контура.

Решение задачи сводится к решению системы линейных уравнений, из которой определяются значения функции φ для каждой узловой точки сетки. Затем, используя известные выражения для производных через значения функции в узловых точках (8.39), определяются нормальные σ_x , σ_y и касательные τ_{xy} напряжения в каждой точке области.

Однако реализация такого плана решения наталкивается на некоторые трудности, связанные с тем, что число точек, в которых необходимо определить значение функции φ (внутриконтурных, контурных и законтурных), больше, чем суммарное число уравнений, которые можно составить для внутренних точек, и условий на контуре для напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} . В связи с тем, что напряжения являются вторыми производными от функции φ , добавление к функции φ линейного трехчлена вида $\varphi_0 = Ax + By + C$ не может повлиять на величину напряжений. Следовательно, в трех точках значение φ можно задавать произвольно, и это не изменит плоского напряженного состояния. Даже с учетом этого обстоятельства для определения φ во всех точках не хватает одного условия. Недостающее значение φ может быть задано интерполяцией значений φ в двух смежных точках, а затем уточнено последовательными приближениями. Однако такой путь решения задачи довольно громоздкий.

Задача решается достаточно просто, если воспользоваться так называемой рамной аналогией, которая позволяет определить значения функции φ во всех контурных точках через величины изгибающих моментов M , а также частных производных по направлению нормали к контуру для тех

же контурных точек через продольные усилия N в стержнях рамы.

Изложим суть рамной аналогии, следуя В. А. Киселеву *). Пусть на пластину по контуру действуют нормальные распределенные усилия q_n и касательные q_t (рис. 8.8, а). Граничные условия для верхней кромки пластины будут $\sigma_y = (\partial^2 \varphi / \partial x^2) = q_n(x)$, $\tau_{xy} = -(\partial^2 \varphi / \partial x \partial y) = q_t(x)$. Аналогично можно записать граничные условия и для других кромок. Пусть к контуру рамы такой же конфигурации и размеров,

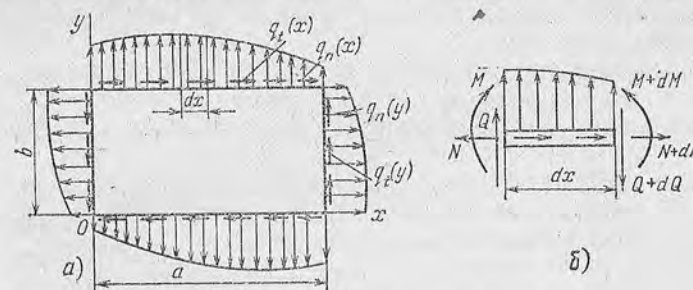


Рис. 8.8.

что и пластина, приложены те же нагрузки q_n и q_t . Если из верхнего стержня этой рамы выделить участок длиной dx (рис. 8.8, б), то из условия равновесия выделенного участка можно записать

$$q_t(x) = -\frac{dN}{dx}, \quad q_n(x) = \frac{d^2 M}{dx^2}.$$

Сравнивая эти выражения с записанными выше граничными условиями на верхней кромке, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \frac{d^2 M}{dx^2}, \text{ т. е. } \varphi = M, \\ -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = -\frac{dN}{dx}, \text{ т. е. } \frac{\partial \varphi}{\partial y} = N. \end{aligned}$$

Будем иметь в виду, что от добавления линейного трехчлена к функции φ напряженное состояние не изменится.

*) Подробное изложение рамной аналогии и примеры решения задач с использованием этой аналогии содержатся в книге: Киселев В. А. Плоская задача теории упругости. — М.: Высшая школа, 1976.

Итак, оказывается, что значения функции φ в контурных точках равны величинам изгибающих моментов в соответствующих сечениях рамы, а частная производная от функции φ по направлению нормали к контуру для рассматриваемой контурной точки равна продольной силе N в том же сечении рамы.

При этом устанавливается следующее правило знаков:

а) если считать положительными M в том случае, когда растянутое волокно расположено внутри контура, то $\varphi = M$; в противном случае, когда внутри контура находится сжатое волокно, $\varphi = -M$;

б) если в стержнях рамы действуют растягивающие усилия N , то для верхней кромки пластины $\partial\varphi/\partial y = N$, для нижней $\partial\varphi/\partial y = -N$, для правой кромки $\partial\varphi/\partial x = N$, для левой $\partial\varphi/\partial x = -N$.

Заметим, что для определения M и N в сечениях стержней может рассматриваться любая статически определимая кинематически неизменяемая рама.

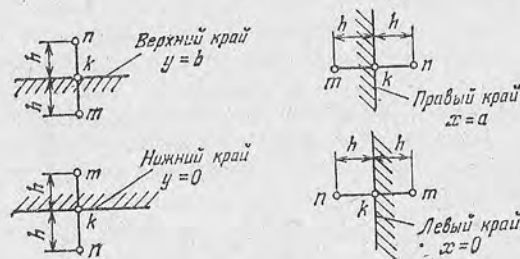


Рис. 8.9.

После того как определены значения φ и $\partial\varphi/\partial y$ или $\partial\varphi/\partial x$ в контурных точках, можно все значения в законтурных точках выразить через известные значения φ в контурных точках и частные производные от функции φ по направлению, нормальному к контуру.

На рис. 8.9 показано взаимное расположение законтурных, контурных и внутриконтурных точек около верхнего, нижнего, левого и правого краев пластины. Контурные точки обозначены буквой k , законтурные n , внутриконтурные m . Шаг сетки принят одинаковым, равным h в направлении осей x и y . Тогда имеем следующие соотношения для определения φ_n :

а) для верхнего края $y = b$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_k = \frac{\varphi_n - \varphi_m}{2h}, \text{ откуда } \varphi_n = \varphi_m + 2h\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_k;$$

б) для нижнего края $y = 0$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_k = \frac{\varphi_m - \varphi_n}{2h}, \text{ откуда } \varphi_n = \varphi_m - 2h\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_k;$$

в) для левого края $x = 0$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_k = \frac{\varphi_m - \varphi_n}{2h}, \text{ откуда } \varphi_n = \varphi_m - 2h\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_k;$$

г) для правого края $x = a$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_k = \frac{\varphi_n - \varphi_m}{2h}, \text{ откуда } \varphi_n = \varphi_m + 2h\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_k.$$

Все величины $(\partial\varphi/\partial y)_k$ и $(\partial\varphi/\partial x)_k$ определяются, как это было показано выше, из рамной аналогии. В итоге неизвестными остаются только значения φ для внутриконтурных точек, а для них можно составить столько уравнений типа (8.41), сколько имеется внутриконтурных точек.

§ 49. Метод конечных элементов *)

Метод конечных элементов можно рассматривать как один из вариантов прямых вариационных методов. Рассмотрим суть этого метода на примере изгиба жестких прямоугольных пластин.

Пусть прямоугольная пластина (рис. 8.10) испытывает изгиб под действием произвольной поперечной нагрузки. Разобьем пластину на ряд прямоугольных элементов со сторонами a и b . Связь конечных элементов между собой осуществляется в узлах. В каждом узле задаем по три перемещения (прогиб w и два угла поворота $\partial w/\partial x$ и $\partial w/\partial y$). Потребуем совместности вертикальных перемещений и углов поворота относительно местных осей x , y в узловых точках для прилегающих к узлу конечных элементов. Обобщенные перемещения в узлах конечного элемента обозначим через

*) При изложении этого параграфа использованы материалы, содержащиеся в книге: Постнов В. А., Хархурим И. Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. — Л.: Судостроение, 1974.

4. Прямоугольный конечный элемент имеет, как это показано на рис. 8.11, двенадцать обобщенных перемещений или двенадцать степеней свободы. Перемещения между узловыми точками зададим полиномом с таким числом произвольных коэффициентов, какое число степеней свободы имеет конечный элемент, т. е. в рассматриваемом примере 12.

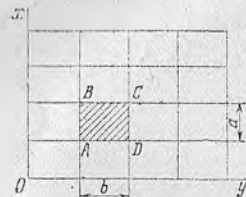


Рис. 8.10.

На рис. 8.11 показаны положительные направления векторов перемещения узловых точек $q_1 \div q_{12}$. При принятии направлении осей координат положительным направлениям углов поворота q_2, q_3, q_8, q_{11} соответствуют отрицательные производные $\partial w / \partial x$, а положительным направлениям углов поворота q_3, q_6, q_9, q_{12} соответствуют положительные производные $\partial w / \partial y$.

Если, например, элемент пластины от узла $(0, 0)$ прогибается в положительном направлении (вниз), то при этом $\partial w / \partial y > 0$ и касательная поворачивается по часовой стрелке, т. е. $q_3 = \frac{\partial w}{\partial y}(0, 0)$. В то же время положительному значению $\partial w / \partial x$ будет соответствовать вращение касательной в направлении, обратном q_2 , т. е. $q_2 = -\frac{\partial w}{\partial x}(0, 0)$.

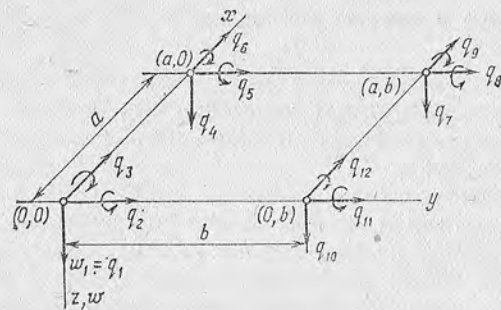


Рис. 8.11.

Таким образом, для узловых перемещений можно записать следующие выражения:

$$q_1 = w(0, 0), \quad q_2 = -\frac{\partial w}{\partial x}(0, 0), \quad q_3 = \frac{\partial w}{\partial y}(0, 0),$$

$$\begin{aligned} q_4 &= w(a, 0), & q_5 &= -\frac{\partial w}{\partial x}(a, 0), & q_6 &= \frac{\partial w}{\partial y}(a, 0), \\ q_7 &= w(a, b), & q_8 &= -\frac{\partial w}{\partial x}(a, b), & q_9 &= \frac{\partial w}{\partial y}(a, b), \\ q_{10} &= w(0, b), & q_{11} &= -\frac{\partial w}{\partial x}(0, b), & q_{12} &= \frac{\partial w}{\partial y}(0, b). \end{aligned} \quad (8.42)$$

Представим функцию $w(x, y)$ в виде суммы полиномов Эрмита:

$$\begin{aligned} w &= a_{11}\mathcal{D}_{01}(x)\mathcal{D}_{01}(y) + a_{12}\mathcal{D}_{01}(x)\mathcal{D}_{02}(y) + a_{21}\mathcal{D}_{02}(x)\mathcal{D}_{01}(y) + \\ &+ a_{22}\mathcal{D}_{02}(x)\mathcal{D}_{02}(y) + b_{11}\mathcal{D}_{11}(x)\mathcal{D}_{01}(y) + b_{12}\mathcal{D}_{11}(x)\mathcal{D}_{02}(y) + \\ &+ b_{21}\mathcal{D}_{12}(x)\mathcal{D}_{01}(y) + b_{22}\mathcal{D}_{12}(x)\mathcal{D}_{02}(y) + c_{11}\mathcal{D}_{01}(x)\mathcal{D}_{11}(y) + \\ &+ c_{12}\mathcal{D}_{01}(x)\mathcal{D}_{12}(y) + c_{21}\mathcal{D}_{02}(x)\mathcal{D}_{11}(y) + c_{22}\mathcal{D}_{02}(x)\mathcal{D}_{12}(y). \end{aligned} \quad (8.43)$$

Сокращенно функцию w можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} w &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij}\mathcal{D}_{0i}(x)\mathcal{D}_{0j}(y) + b_{ij}\mathcal{D}_{1i}(x)\mathcal{D}_{0j}(y) + \\ &+ c_{ij}\mathcal{D}_{0i}(x)\mathcal{D}_{1j}(y), \end{aligned} \quad (8.44)$$

где полиномы Эрмита $\mathcal{D}_{0i}, \mathcal{D}_{1i}$ для функций x и y записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{01}(x) &= \frac{a^3 - 3ax^2 + 2x^3}{a^3}, & \mathcal{D}_{02}(x) &= \frac{3ax^2 - 2x^3}{a^3}, \\ \mathcal{D}_{11}(x) &= \frac{a^2x - 2ax^2 + x^3}{a^2}, & \mathcal{D}_{12}(x) &= \frac{-ax^2 + x^3}{a^2}, \end{aligned}$$

а те же полиномы в функции от координаты y будут иметь такой же вид, но с заменой a на b и x на y , т. е.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{01}(y) &= \frac{b^3 - 3by^2 + 2y^3}{b^3}, & \mathcal{D}_{02}(y) &= \frac{3by^2 - 2y^3}{b^3}, \\ \mathcal{D}_{11}(y) &= \frac{b^2y - 2by^2 + y^3}{b^2}, & \mathcal{D}_{12}(y) &= \frac{-by^2 + y^3}{b^2}. \end{aligned}$$

Полиномы Эрмита обладают тем свойством, что

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{01}(0) &= 1, \text{ а } \mathcal{D}_{02}(0) = \mathcal{D}_{11}(0) = \mathcal{D}_{12}(0) = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{D}_{01}}{\partial x}(0) &= \frac{\partial \mathcal{D}_{02}}{\partial x}(0) = \frac{\partial \mathcal{D}_{12}}{\partial x}(0) = 0, \text{ а } \frac{\partial \mathcal{D}_{11}}{\partial x}(0) = 1. \end{aligned}$$

В то же время для координаты $x = a$ будем иметь

$$\mathcal{D}_{01}(a) = \mathcal{D}_{11}(a) = \mathcal{D}_{12}(a) = 0, \quad \mathcal{D}_{02}(a) = 1$$

и

$$\frac{\partial \mathcal{D}_{01}}{\partial x}(a) = \frac{\partial \mathcal{D}_{02}}{\partial x}(a) = \frac{\partial \mathcal{D}_{11}}{\partial x}(a) = 0, \text{ а } \frac{\partial \mathcal{D}_{12}}{\partial x}(a) = 1.$$

Аналогичные выражения можно получить для $\mathcal{D}_{0j}(y)$, $\mathcal{D}_{1j}(y)$ и их производных по y для $y=0$ и $y=b$. Представление функции w через полиномы Эрмита (8.43) позволяет легко выразить коэффициенты a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} через обобщенные перемещения $q_1, q_2, \dots, q_{12}$ из условий (8.42). Если в (8.42) подставить w по (8.43), то с учетом свойств полиномов Эрмита будем иметь

$$w(0, 0) = q_1 = a_{11}, \quad -\frac{\partial w}{\partial x}(0, 0) = q_2 = -b_{11},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(0, 0) = q_3 = c_{11},$$

$$w(a, 0) = q_4 = a_{21}, \quad -\frac{\partial w}{\partial x}(a, 0) = q_5 = -b_{21},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(a, 0) = q_6 = c_{21},$$

$$w(a, b) = q_7 = a_{22}, \quad -\frac{\partial w}{\partial x}(a, b) = q_8 = -b_{22},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(a, b) = q_9 = c_{22},$$

$$w(0, b) = q_{10} = a_{12}, \quad -\frac{\partial w}{\partial x}(0, b) = q_{11} = -b_{12},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(0, b) = q_{12} = c_{12}.$$

Теперь можно представить функцию прогибов срединной поверхности w для конечного элемента через узловые перемещения:

$$\begin{aligned} w = & q_1 \mathcal{D}_{01}(x) \mathcal{D}_{01}(y) - q_2 \mathcal{D}_{11}(x) \mathcal{D}_{01}(y) + q_3 \mathcal{D}_{01}(x) \mathcal{D}_{11}(y) + \\ & + q_4 \mathcal{D}_{02}(x) \mathcal{D}_{01}(y) - q_5 \mathcal{D}_{12}(x) \mathcal{D}_{01}(y) + q_6 \mathcal{D}_{02}(x) \mathcal{D}_{11}(y) + \\ & + q_7 \mathcal{D}_{02}(x) \mathcal{D}_{02}(y) - q_8 \mathcal{D}_{12}(x) \mathcal{D}_{02}(y) + q_9 \mathcal{D}_{02}(x) \mathcal{D}_{12}(y) + \\ & + q_{10} \mathcal{D}_{01}(x) \mathcal{D}_{02}(y) - q_{11} \mathcal{D}_{11}(x) \mathcal{D}_{02}(y) + q_{12} \mathcal{D}_{01}(x) \mathcal{D}_{12}(y). \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\varphi_1 = \mathcal{D}_{01}(x) \mathcal{D}_{01}(y), \quad \varphi_2 = -\mathcal{D}_{11}(x) \mathcal{D}_{01}(y),$$

$$\varphi_3 = \mathcal{D}_{01}(x) \mathcal{D}_{11}(y), \quad \varphi_4 = \mathcal{D}_{02}(x) \mathcal{D}_{01}(y),$$

$$\varphi_5 = -\mathcal{D}_{12}(x) \mathcal{D}_{01}(y), \quad \varphi_6 = \mathcal{D}_{02}(x) \mathcal{D}_{11}(y),$$

$$\varphi_7 = \mathcal{D}_{02}(x) \mathcal{D}_{02}(y), \quad \varphi_8 = -\mathcal{D}_{12}(x) \mathcal{D}_{02}(y),$$

$$\varphi_9 = \mathcal{D}_{02}(x) \mathcal{D}_{12}(y), \quad \varphi_{10} = \mathcal{D}_{01}(x) \mathcal{D}_{02}(y),$$

$$\varphi_{11} = -\mathcal{D}_{11}(x) \mathcal{D}_{02}(y), \quad \varphi_{12} = \mathcal{D}_{01}(x) \mathcal{D}_{12}(y).$$

Тогда функцию прогиба представим следующим рядом:

$$w = \sum_{i=1}^{12} q_i \varphi_i. \quad (8.45)$$

Полученное выражение для функции прогиба (8.45) обеспечивает непрерывность прогибов w и их производных $\partial w / \partial x$ и $\partial w / \partial y$ между узлами по линии контакта конечных элементов. При этом прогиб изменяется по кубической параболе вдоль линий контакта.

Теперь, когда установлена связь между перемещениями w для точки конечного элемента с координатами x, y и узловыми перемещениями q_i , получим зависимость узловых усилий R_i и перемещений q_i . Для этого воспользуемся принципом возможных перемещений.

Если узловые перемещения q_i получают приращения δq_i , то работа узловых усилий R_i на этих перемещениях будет равна приращению внутренней потенциальной энергии. Поскольку в нашем примере рассматривается изгиб жестких пластин, то рассматривать следует приращение энергии изгиба пластины:

$$\sum R_i \delta q_i = \delta W_{\Pi}. \quad (8.46)$$

Выражение для W_{Π} примем в следующей форме:

$$\begin{aligned} W_{\Pi} = & \frac{D}{2} \times \\ & \times \int_0^a \int_0^b \left\{ (\nabla^2 w)^2 + 2(1-\mu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy. \end{aligned} \quad (8.47)$$

Используя найденное ранее выражение для w (8.45), найдем

$$\nabla^2 w = \sum_{i=1}^{12} q_i \nabla^2 \varphi_i$$

и

$$(\nabla^2 w)^2 = \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^{12} q_i q_j \nabla^2 \varphi_i \nabla^2 \varphi_j$$

затем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \sum_{i=1}^{12} q_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x \partial y}$$

и

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 = \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^{12} q_i q_j \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^{12} q_i q_j \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2}.$$

Подставляя выражения для $(\nabla^2 w)^2$, $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2$ и $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$, представленные через узловые перемещения q_i и функции φ_i , в (8.47), получим следующее уравнение для энергии изгиба пластины:

$$W_{\Pi} = \frac{D}{2} \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^{12} q_i q_j \int_0^a \int_0^b \left[\nabla^2 \varphi_i \nabla^2 \varphi_j + \right. \\ \left. + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2} \right) \right] dx dy. \quad (8.48)$$

Введем обозначение

$$k_{ij} = D \int_0^a \int_0^b \left[\nabla^2 \varphi_i \nabla^2 \varphi_j + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2} \right) \right] dx dy. \quad (8.49)$$

Тогда для энергии W_{Π} получим

$$W_{\Pi} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^{12} q_i q_j k_{ij}. \quad (8.50)$$

Если (8.50) развернуть, то будем иметь

$$W_{\Pi} = \frac{1}{2} \{ q_1^2 k_{1,1} + q_2^2 k_{2,2} + \dots + q_{12}^2 k_{12,12} + 2q_1 q_2 k_{1,2} + \\ + 2q_1 q_3 k_{1,3} + \dots + 2q_{11} q_{12} k_{11,12} \}.$$

Из полученного выражения W_{Π} найдем первую вариацию

$$\delta W_{\Pi} = (q_1 k_{1,1} + q_2 k_{1,2} + \dots + q_{12} k_{1,12}) \delta q_1 + \\ + (q_1 k_{2,1} + q_2 k_{2,2} + \dots + q_{12} k_{2,12}) \delta q_2 + \dots \\ \dots + (q_1 k_{12,1} + q_2 k_{12,2} + \dots + q_{12} k_{12,12}) \delta q_{12}.$$

С другой стороны, $\sum R_i \delta q_i = R_1 \delta q_1 + R_2 \delta q_2 + \dots + R_{12} \delta q_{12}$.

Принимая во внимание уравнение (8.46), а также то, что вариации перемещений δq_i произвольны, получим следующее выражение для R_i :

$$R_i = q_1 k_{i,1} + q_2 k_{i,2} + \dots + q_{12} k_{i,12}, \quad (8.51)$$

или, иначе,

$$R_i = \sum_{j=1}^{12} q_j k_{ij}. \quad (8.52)$$

В матричной форме связь между узловыми усилиями конечного элемента и перемещениями представим в виде

$$\|R\| = \|K\| \times \|q\|, \quad (8.53)$$

где $\|R\|$ — вектор-столбец узловых усилий, $\|K\|$ — матрица жесткости конечного элемента пластины. Размерность этой матрицы в нашем случае будет 12×12 , а ее элементы $k_{i,j}$ определяются уравнением (8.49); $\|q\|$ — вектор-столбец перемещений. Коэффициенты $k_{i,j}$ матрицы жесткости представляют собой усилия в направлении i от единичного перемещения в направлении j .

Если применять метод перемещений, то для всех узловых точек необходимо составить уравнения равновесия. В уравнения равновесия войдут эквивалентные внешние силы и внутренние усилия R_i . Для определения эквивалентных внешних сил применим начало возможных перемещений. При этом приравняем работу, совершаемую узловыми эквивалентными силами P_i на возможных узловых перемещениях δq_i , работе внешней поверхностной нагрузки $q(x, y)$, действующей на конечный элемент, на перемещении δw .

Таким образом, для определения узловых сил P_i будем иметь следующее уравнение:

$$\sum_{i=1}^{12} P_i \delta q_i = \int_0^a \int_0^b q(x, y) \delta w dx dy, \quad (8.54)$$

$$\text{где } \delta w = \sum_{i=1}^{12} \varphi_i \delta q_i.$$

После подстановки выражения для δw в (8.54), принимая во внимание, что δq_i — произвольные вариации, получим

$$P_i = \int_0^a \int_0^b q(x, y) \varphi_i dx dy. \quad (8.55)$$

Найдем значения эквивалентных узловых сил для случая, когда поперечная распределенная нагрузка в пределах конечного элемента постоянна, т. е. $q(x, y) = q_0$. Тогда $P_i =$

$$= q_0 \int_0^a \int_0^b \varphi_i dx dy.$$

Для определения $\int_0^a \int_0^b \varphi_i dx dy$ найдем вначале $\int_0^a \varphi_{ij}(x) dx$.

Так,

$$\begin{aligned} \int_0^a \varphi_{01}(x) dx &= \frac{a}{2}, & \int_0^a \varphi_{02}(x) dx &= \frac{a}{2}, \\ \int_0^a \varphi_{11}(x) dx &= \frac{a^2}{12}, & \int_0^a \varphi_{12}(x) dx &= -\frac{a^2}{12}. \end{aligned}$$

Аналогичные выражения получим для $\int_0^b \varphi_{ij}(y) dy$, $\int_0^b \varphi_{01}(y) dy =$

$$= \frac{b}{2}, \int_0^b \varphi_{02}(y) dy = \frac{b}{2}, \int_0^b \varphi_{11}(y) dy = \frac{b^2}{12} \text{ и, наконец, } \int_0^b \varphi_{12}(y) dy =$$

$$= -\frac{b^2}{12}.$$

Теперь, имея в виду полученные ранее выражения для φ_i через многочлены Эрмита, найдем выражения для $\int_0^a \int_0^b \varphi_i dx dy$. После подстановки найденных выражений в (8.55) будем иметь для P_i следующие выражения:

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{q_0 ab}{4}, & P_2 &= -\frac{q_0 a^2 b}{24}, & P_3 &= \frac{q_0 ab^2}{24}, \\ P_4 &= \frac{q_0 ab}{4}, & P_5 &= \frac{q_0 a^2 b}{24}, & P_6 &= \frac{q_0 ab^2}{24}, \\ P_7 &= \frac{q_0 ab}{4}, & P_8 &= \frac{q_0 a^2 b}{24}, & P_9 &= -\frac{q_0 ab^2}{24}. \end{aligned}$$

$$P_{10} = \frac{q_0 ab}{4}, \quad P_{11} = -\frac{q_0 a^2 b}{24}, \quad P_{12} = -\frac{q_0 ab^2}{24}.$$

Эти равенства представим в более компактной форме:

$$\|P\| = \frac{q_0 ab}{4} \left\| 1, -\frac{a}{6}, \frac{b}{6}, 1, \frac{a}{6}, \frac{b}{6}, 1, \frac{a}{6}, -\frac{b}{6}, 1, -\frac{a}{6}, -\frac{b}{6} \right\|. \quad (8.56)$$

Для того чтобы определить узловые перемещения q_i , необходимо для каждого узла в соответствии с методом перемещений составить уравнения равновесия. В эти уравнения должны войти внутренние усилия R_i и эквивалентные узловые нагрузки P_i . Внутренние усилия R_i связаны уравнением (8.51) с узловыми перемещениями q_i . Полученные ранее уравнения для определения внутренних усилий R_i (8.51) и узловых сил P_i (8.55) записаны в местной системе координат, относящейся к выделенному конечному элементу. Если конечных элементов достаточно большое количество, то для определения матрицы внутренних усилий $\|R\|$ всей конструкции необходимо построить матрицу жесткости всей конструкции $\|K\|$, а для этого необходимо обеспечить переход от местной к общей системе координат. Это может быть выполнено с помощью специальных матриц перехода от местной к общей системе координат или с помощью так называемой *матрицы индексов*.

Система уравнений равновесия узловых усилий позволяет определить узловые перемещения, а зная узловые перемещения q_i , мы получаем выражение для функции прогиба w (8.45) и далее можем определить изгибающие и крутящие моменты, а также нормальные и касательные напряжения при изгибе пластины по уже известным формулам.

Покажем на простом примере изгиба жестко защемленной по контуру квадратной пластины со стороной a , нагруженной равномерно распределенным давлением $q = q_0 = \text{const}$, как применить метод конечных элементов в форме перемещений.

Пусть мы имеем квадратную пластину со стороной a , защемленную по всем четырем краям (рис. 8.12). Считаем,

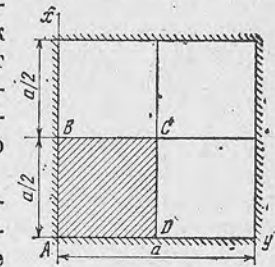


Рис. 8.12.

что пластина нагружена равномерно распределенным давлением $q = q_0$. В силу симметрии из пластины можно выделить участок $ABCD$ и рассматривать изгиб только этого участка. Выделенный участок $ABCD$ примем в качестве конечного элемента. Таким образом, вся пластина разделена на 2×2 конечных элемента. Обозначим перемещения в точке A через q_1, q_2, q_3 , в точке B — q_4, q_5, q_6 , в точке C — q_7, q_8, q_9 и в точке D — q_{10}, q_{11}, q_{12} в соответствии с рис. 8.11. При этом, учитывая граничные условия и симметричность ее деформации относительно центральных осей, заключаем, что из всех двенадцати перемещений только одно, q_7 , будет не равно нулю. Остальные перемещения равны нулю. Из условия равновесия узловых сил (внешних и внутренних) в узле C получим $R_7 = P_7$. При этом P_7 , как следует из (8.54), бу-

дет равно $P_7 = \frac{q_0 \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}{4} = \frac{q_0 a^2}{16}$, а R_7 мы найдем из уравнения (8.54), учитывая, что все перемещения q_i , кроме q_7 , равны нулю, т. е.

$$R_7 = k_{7,7} q_7.$$

Для вычисления $k_{7,7}$ воспользуемся уравнением (8.49):

$$k_{7,7} = D \int_0^{a/2} \int_0^{a/2} \left\{ (\nabla^2 \varphi_7)^2 + \right. \\ \left. + 2(1 - \mu) \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi_7}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \varphi_7}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_7}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy. \quad (8.57)$$

Функция $\varphi_7 = \mathcal{O}_{02}(x)\mathcal{O}_{02}(y)$, а выражения для $\mathcal{O}_{02}(x)$ и $\mathcal{O}_{02}(y)$ были приведены ранее. Нужно учесть, что a и b в ранее приводившихся выражениях многочленов Эрмита означают стороны выделенного конечного элемента. В рассматриваемом примере эти стороны равны $a/2$. Поэтому в выражениях для $\mathcal{O}_{02}(x)$ и $\mathcal{O}_{02}(y)$ a и b нужно заменить на $a/2$. После выполнения всех преобразований из (8.57) найдем значение $k_{7,7}$:

$$k_{7,7} = \frac{79,44D}{a^2}.$$

Далее, учитывая, что $q_7 = P_7/k_{7,7}$, находим

$$q_7 = 0,000787 \frac{qa^4}{D}.$$

Полученное в первом приближении значение прогиба в

центре квадратной защемленной пластины существенно отличается от точного значения $w_{\max} = 0,00126qa^4/D$. Для получения более точного значения необходимо каждую сторону квадрата делить не на две, а на большее количество частей. При этом объем вычислений очень быстро возрастает, и выполнить их без применения современных вычислительных машин немислимо.

Для того чтобы показать, насколько быстро сходится решение к точному при уменьшении размера конечного элемента, приведем таблицу 8.1 значений $w_{\max}$ в центре квадратной свободно опертой по кромкам пластины, нагруженной равномерно распределенным давлением *).

Таблица 8.1

Размер сетки	2×2	4×4	8×8	16×16	Точное решение
Перемещение $w_{\max} \frac{qa^4}{D}$	0,003444	0,003945	0,004040	0,004058	0,004062

Для решения различных задач прикладной теории упругости и строительной механики методом конечных элементов создано большое количество стандартных программ. Составление таких программ представляет значительные трудности, несмотря на то, что в своей основе этот метод достаточно прост и универсален.

Решать простые задачи такие, которые могут быть с успехом решены, например, традиционными вариационными методами, методом конечных элементов вряд ли целесообразно. Этот метод является весьма эффективным, когда рассматриваемый объект имеет сложные конфигурации (с вырезами, подкреплениями, сложными очертаниями контура) и граничные условия (свободный или частично свободный край, неоднородные условия закрепления и т. д.).

В последние 10—15 лет метод конечных элементов завоевал большую популярность и в настоящее время весьма широко используется при решении самых разнообразных

*) Таблица заимствована из книги: Постнов В. А., Хархурим И. Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций.— Л.: Судостроение, 1974, с. 257.

задач статик, динамики, устойчивости конструкций и их элементов.

Метод конечных элементов применяется не только при решении двумерных задач прикладной теории упругости (пластины, оболочки и конструкции, составленные из пластинчатых и оболочечных элементов), но и объемных (трехмерных) задач теории упругости. Для лучшей аппроксимации сложной формы конструкции применяются наряду с прямоугольными конечными элементами также конечные элементы других форм. Этот метод может применяться не только в форме метода перемещений, когда за неизвестные принимаются узловые перемещения и определяются они из уравнений равновесия, но и в форме метода сил, когда за неизвестные принимаются узловые внутренние усилия R_i , а определяются они из условия совместности перемещений в узловых точках.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ И ЗАДАЧИ

1. Чем отличается функционал от функции?
2. Чем отличается вариация функционала от дифференциала функции?
3. Что понимается под прямыми вариационными методами?
4. В чем суть метода Ритца?
5. Какие требования предъявляются к аппроксимирующим функциям для перемещений в методе Ритца?
6. Систему каких уравнений получают в результате использования метода Ритца?
7. В чем приближенность метода Ритца?
8. В чем заключается идея метода Бубнова — Галеркина?
9. Удовлетворяются ли уравнения равновесия при использовании метода Бубнова — Галеркина?
10. Какие требования к выбору аппроксимирующих функций для перемещений предъявляются при применении метода Бубнова — Галеркина?
11. Чем отличается метод В. З. Власова от метода Бубнова — Галеркина?
12. К каким уравнениям сводится решение задачи при применении метода В. З. Власова?
13. Как можно представить производные через конечные разности функций?
14. Каким образом дифференциальное уравнение изгиба пластины можно представить в конечно-разностном виде?
15. Как представляются граничные условия задачи в конечно-разностной форме?
16. Что такое внутриконтурные и законтурные узловые точки?
17. Какова последовательность решения задачи изгиба пластины конечно-разностным методом (методом сеток)?

18. Какое количество степеней свободы имеет прямоугольный конечный элемент, показанный на рис. 8.8?

19. Каким образом устанавливается связь между перемещением в произвольной точке конечного элемента с узловыми перемещениями q_i ?

20. Какими свойствами обладают полиномы Эрмита ϑ_{01} , ϑ_{02} , ϑ_{11} , ϑ_{12} ?

21. Как определяются узловые внутренние усилия R_i через узловые перемещения q_i и коэффициенты матрицы жесткости k_{ij} ?

22. Каков физический смысл коэффициентов k_{ij} ?

23. Как определяются эквивалентные узловые нагрузки P_i ?

24. Какова последовательность решения задачи изгиба пластины с помощью конечных элементов по методу перемещений?

25. *Задача.* Квадратная пластина со стороной a , защемленная по всему контуру, нагружена равномерно распределенным по поверхности давлением q_0 . Требуется определить максимальный, $w_{\max}$, прогиб в центре пластины методом Бубнова — Галеркина, если прогиб w аппроксимируется следующим выражением:

$$w = A \left(1 - \cos 2 \frac{\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos 2 \frac{\pi y}{a} \right).$$

Указание. 1) Необходимо проверить, удовлетворяет ли заданная функция w граничным условиям $x = 0$, a , $w = 0$, $\partial w / \partial x = 0$; $y = 0$, a , $w = 0$, $\partial w / \partial y = 0$;

2) при решении задачи следует использовать уравнения (8.18) и (8.19);

3) следует учесть, что

$$\int_0^a \cos 2 \frac{\pi x}{a} dx = 0, \quad \int_0^a \cos^2 2 \frac{\pi x}{a} dx = \frac{a}{2},$$

$$\int_0^a \int_0^a \cos^2 2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 2 \frac{\pi y}{a} dx dy = \frac{a^2}{4}.$$

Ответ. $w_{\max} = \frac{q_0 a^4}{8\pi^4 D}.$

26. *Задача.* Квадратная пластина со стороной a имеет две противоположные стороны ($x = 0$, a) свободно опертые, а две другие ($y = 0$, a) — защемленные и нагружена равномерно распределенным давлением q_0 . Требуется определить методом Бубнова — Галеркина максимальный прогиб в середине пластины, если прогиб пластины задан уравнением

$$w = A \sin \frac{\pi x}{a} \left(1 - \cos 2 \frac{\pi y}{a} \right).$$

Указание. 1) Необходимо проверить, удовлетворяет ли функция w заданным граничным условиям $x = 0$, a , $w = 0$, $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$; $y = 0$, a , $w = 0$, $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$;

- 2) при решении задачи следует использовать уравнения (8.18) и (8.19);
 3) следует учесть, что

$$\int_0^a \sin \frac{\pi x}{a} dx = \frac{2a}{\pi}, \quad \int_0^a \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx = \frac{a}{2},$$

$$\int_0^a \int_0^a \sin \frac{\pi x}{a} \cos 2 \frac{\pi y}{a} dx dy = 0, \quad \int_0^a \cos^2 2 \frac{\pi y}{a} dy = \frac{a}{2}.$$

Ответ. $w_{\max} = \frac{16}{27} \frac{q_0 a^4}{\pi^5 D}.$

§ 50. Основные понятия. Некоторые сведения о геометрии оболочек

Оболочкой принято называть тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, отстоящими друг от друга на расстоянии h , малом по сравнению с другими размерами тела и называемом *толщиной оболочки*. Мы будем рассматривать оболочки постоянной толщины ($h = \text{const}$).

Поверхность, которая делит толщину h всюду пополам, называется *срединной поверхностью*. Тонкими называют такие оболочки, для которых отношение толщины оболочки h к наименьшему радиусу кривизны поверхности $R_{\min}$ составляет величину, меньшую $1/20$, т. е. для тонких оболочек $h/R_{\min} < 1/20$. При малых значениях $h/R_{\min}$ этим отношением по сравнению с 1 в уравнениях можно пренебречь.

Теория тонких оболочек, так же как и теория тонких пластин, рассмотренных нами ранее, базируется на гипотезах Кирхгофа — Лява:

1) прямолинейный элемент, перпендикулярный к срединной поверхности, после деформации оболочки остается прямолинейным и нормальным к срединной поверхности, а длина его не изменяется;

2) нормальными напряжениями на площадках, параллельных срединной поверхности, можно пренебречь.

Геометрия оболочки определяется геометрией срединной поверхности и толщиной.

Подобно тому, как для тонких пластин принятие гипотез Кирхгофа — Лява позволяло судить о напряженном и деформированном состоянии пластин на основе знаний о деформациях, кривизнах и кручении срединной плоскости, так и для тонких оболочек, имея представление о величинах деформаций, изменении кривизны и кручении срединной поверхности, можно определить деформации и напряжения в любых точках сечения упругой оболочки.

Остановимся на некоторых основных сведениях из геометрии поверхностей, необходимых для дальнейшего изложения основ теории оболочек *).

*) Более подробные сведения по этим вопросам содержатся в курсах дифференциальной геометрии, например: Рацевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. — М.: ГИТТЛ, 1956, или Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. II, гл. V. — М.: ГИТТЛ, 1951.

Пусть мы имеем некоторую криволинейную поверхность S (рис. 9.1). Через произвольную точку этой поверхности M проведем такие две плоскости, нормальные к поверхности S , что получающиеся в пересечении плоскостей L и N с поверхностью S кривые T_1 и T_2 будут обладать экстремальными значениями кривизн по сравнению с любыми кривыми на поверхности, проведенными через ту же точку M . Направления кривых T_1 и T_2 в точке M назы-

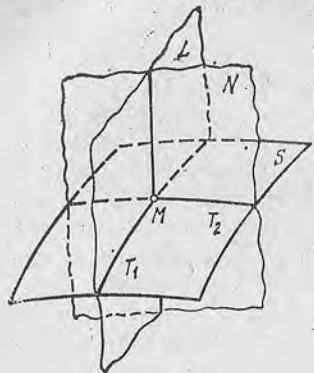


Рис. 9.1.

вают *главными направлениями*, их кривизны k_1 и k_2 называют *главными кривизнами*, а соответствующие радиусы R_1 и R_2 — *главными радиусами кривизн* поверхности в точке M .

Плоскости L и N являются ортогональными плоскостями, и соответственно главные направления в точке M ортогональны. На поверхности S (рис. 9.2) проведем сетку семейств кривых α_1 и α_2 таких, что эти кривые в каждой точке имеют касательные, совпадающие с главными направлениями. Такие кривые называют *линиями главной кривизны* поверхности. Семейства кривых α_1 и α_2 , являющиеся линиями главных кривизн, примем за координатные линии. Эти криволинейные координатные линии являются ортогональными.

В системе декартовых координат x, y, z поверхность S можно представить уравнениями

$$x = x(\alpha_1, \alpha_2), \quad y = y(\alpha_1, \alpha_2), \quad z = z(\alpha_1, \alpha_2). \quad (9.1)$$

Выберем на поверхности точку M . Радиус-вектор r , проведенный из точки O в точку M , определяет положение точки M . Вместо трех скалярных уравнений (9.1) можно за-

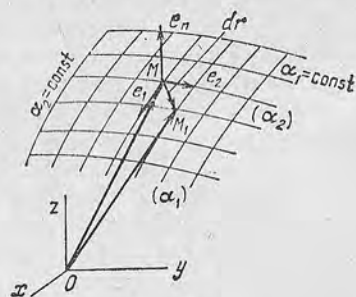


Рис. 9.2.

писать одно векторное уравнение

$$r = r(\alpha_1, \alpha_2). \quad (9.2)$$

Если из точки M на поверхности перейти в другую, близко расположенную, точку M_1 , положение которой определяется вектором r_1 , а на поверхности криволинейными координатами $\alpha_1 + \Delta\alpha_1, \alpha_2 + \Delta\alpha_2$, то расстояние на поверхности между точками M и M_1 определяется приращением вектора r :

$$\overrightarrow{MM_1} = dr = \frac{\partial r}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial r}{\partial \alpha_2} d\alpha_2. \quad (9.3)$$

Квадрат длины этого отрезка $|dr|^2$ можно определить как скалярное произведение вектора dr самого на себя:

$$|dr|^2 = ds^2 = \left| \frac{\partial r}{\partial \alpha_1} \right|^2 d\alpha_1^2 + \left| \frac{\partial r}{\partial \alpha_2} \right|^2 d\alpha_2^2. \quad (9.4)$$

В уравнении (9.4) принято во внимание, что скалярное произведение $\partial r / \partial \alpha_i$ на $\partial r / \partial \alpha_j$ равно нулю, так как эти векторы ортогональны. Если ввести обозначения $|\partial r / \partial \alpha_1| = A_1$ и $|\partial r / \partial \alpha_2| = A_2$, то уравнение (9.4) можно записать в следующей форме:

$$ds^2 = A_1^2 d\alpha_1^2 + A_2^2 d\alpha_2^2. \quad (9.5)$$

Уравнение (9.5) называют *уравнением первой квадратичной формы поверхности*, а коэффициенты A_1 и A_2 — *коэффициентами первой квадратичной формы* или *параметрами Лямэ*. Коэффициенты A_1 и A_2 в общем случае являются функциями криволинейных координат α_1, α_2 , т. е.

$$A_1 = A_1(\alpha_1, \alpha_2), \quad A_2 = A_2(\alpha_1, \alpha_2).$$

Если изменяется только одна координата, например α_1 , а $\alpha_2 = \text{const}$, то при приращении α_1 на $d\alpha_1$ имеем приращение дуги $ds_1 = A_1 d\alpha_1$. Аналогично можно получить приращение $ds_2 = A_2 d\alpha_2$. Таким образом, можно рассматривать A_1 и A_2 как длины дуг поверхности соответственно вдоль координатных линий $\alpha_2 = \text{const}$ и $\alpha_1 = \text{const}$ при приращениях $d\alpha_1 = 1$ или $d\alpha_2 = 1$.

Помимо главных кривизн k_1 и k_2 , обратных по величине соответствующим главным радиусам $k_1 = 1/R_1, k_2 = 1/R_2$, в теории поверхностей большое значение имеет понятие о так называемой *гауссовой кривизне* $\Gamma = k_1 \cdot k_2$, а также *средней кривизне* $K = (k_1 + k_2)/2$. Если поверхность двояковыпуклая, то знаки кривизн k_1 и k_2 одинаковы и гауссова кривизна $\Gamma > 0$. Это — поверхности положительной гауссо-

вой кривизны. Если поверхность выпукло-вогнутая, то знаки кривизн k_1 и k_2 разные ($\Gamma < 0$) и такие поверхности называются *поверхностями отрицательной гауссовой кривизны*. Наконец, если один из главных радиусов кривизны равен бесконечности (кривизна равна нулю), то гауссова кривизна $\Gamma = 0$. Такие поверхности называются *поверхностями нулевой гауссовой кривизны*. На рис. 9.3 показаны примеры поверхностей положительной (рис. 9.3, а), отрицательной (рис. 9.3, б) и нулевой (рис. 9.3, в) гауссовых кривизн.

Положительную гауссову кривизну имеют сферические, эллиптические, параболические поверхности. Гиперболические поверхности могут иметь как положительную, так и

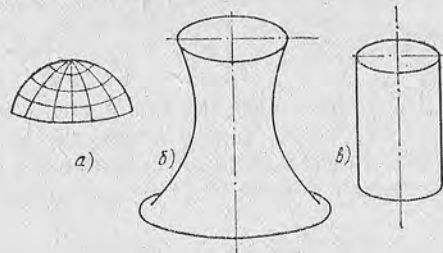


Рис. 9.3.

отрицательную гауссову кривизну. Так, поверхность, полученная в результате вращения одной из ветвей гиперболы относительно своей внутренней оси симметрии, будет иметь положительную гауссову кривизну, а поверхность, полученная в результате вращения ветвей гиперболы относительно внешней оси симметрии, — отрицательную кривизну (рис. 9.3, б).

Если срединная поверхность оболочки получена в результате вращения какой-либо кривой относительно некоторой оси, то такая оболочка называется *оболочкой вращения*. В сечении, перпендикулярном к оси вращения, образуется окружность. К таким оболочкам относятся круговые цилиндрические, конические, сферические, а также эллипсоиды, параболоиды и гиперболоиды вращения. Оболочки вращения получили широкое распространение в различных областях техники.

Поверхности нулевой гауссовой кривизны (цилиндрические, конические) являются развертывающимися поверхностями, поэтому их метрика тождественна с метрикой на плоскости. Для таких поверхностей справедлива геометрия

Евклида. Для поверхностей неразвертывающихся с ненулевой гауссовой кривизной евклидова геометрия уже не имеет места (например, для сферической поверхности).

§ 51. Деформации и изменения кривизн срединной поверхности

Рассмотрим определение деформации срединной поверхности в направлении координаты α_1 . Относительное линейное удлинение ϵ_1 состоит из трех частей. Первая часть деформации $\epsilon_1' = \frac{\partial u}{A_1 \partial \alpha_1}$ определяется изменением перемещения вдоль координатной линии $\alpha_2 = \text{const}$. Вторая составляющая (рис. 9.4) связана с перемещением точки в направлении координатной линии $\alpha_1 = \text{const}$ и изменением коэффициента первой квадратичной формы A_1 по координате α_2 . Изменение начальной длины элемента $A_1 d\alpha_1$ за счет этого фактора будет равно $\frac{v}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_1$. Таким образом, величина относительной деформации элемента $A_1 d\alpha_1$, вызванной изменением коэффициента A_1 по ко-

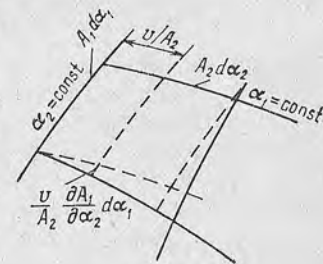


Рис. 9.4.

ординате α_2 и перемещением v , равна $\epsilon_1'' = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} v$. Наконец, третья составляющая деформации ϵ_1 связана с нормальным перемещением w : $\epsilon_1''' = w/R_1$. За положительное направление для w принято направление внешней нормали.

Окончательно деформацию ϵ_1 запишем в виде

$$\epsilon_1 = \frac{\partial u}{A_1 \partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} v + \frac{w}{R_1}. \quad (9.6)$$

Аналогично может быть получено и выражение для деформации ϵ_2 :

$$\epsilon_2 = \frac{\partial v}{A_2 \partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u + \frac{w}{R_2}. \quad (9.7)$$

Далее, без вывода запишем выражения для деформации

сдвига в срединной поверхности γ , изменения кривизн κ_1 , κ_2 и кручения χ *):

$$\gamma = \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{v}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{u}{A_1} \right), \quad (9.8)$$

$$\kappa_1 = -\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{u}{R_1} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - \frac{v}{R_2} \right), \quad (9.9)$$

$$\kappa_2 = -\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - \frac{v}{R_2} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{u}{R_1} \right), \quad (9.10)$$

$$\chi = -\frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{1}{R_1} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u \right) + \frac{1}{R_2} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} v \right). \quad (9.11)$$

Как видим, формулы (9.6)–(9.11) для деформаций, изменения кривизн и кручения в общем виде содержат члены, величина которых зависит от изменяемости коэффициентов первой квадратичной формы A_1 и A_2 . Деформации ε_1 , ε_2 и сдвиг γ по толщине оболочки изменяются линейно. Для тонкой оболочки в слое, находящемся на расстоянии z от срединного, величины $\varepsilon_1^{(z)}$, $\varepsilon_2^{(z)}$ и $\gamma^{(z)}$ определяются следующим образом:

$$\varepsilon_1^{(z)} = \varepsilon_1 + z\kappa_1, \quad \varepsilon_2^{(z)} = \varepsilon_2 + z\kappa_2, \quad \gamma^{(z)} = \gamma + 2z\chi. \quad (9.12)$$

§ 52. Усилия и моменты в сечениях тонкой оболочки

Выделим из оболочки элемент сечениями, нормальными к срединной поверхности и проходящими через координатные линии α_1 , $\alpha_1 + d\alpha_1$, α_2 , $\alpha_2 + d\alpha_2$ (рис. 9.5).

Нормальные напряжения обозначим через σ_1 и σ_2 , касательные, действующие в направлениях, параллельных срединной поверхности, — через τ_{12} и τ_{21} , касательные напряжения в направлении нормали к срединной поверхности — τ_{32} и τ_{31} .

Найдем величины погонных усилий и моментов. Обозначим нормальные погонные усилия через N_1 и N_2 . Их на-

*) Подробно вопрос о деформациях, изменениях кривизн и кручения тонкой оболочки излагается в книге: Новожиллов В. В. Теория тонких оболочек. — Л.: Судпромгиз, 1951.

правление соответствует направлениям нормальных напряжений σ_1 и σ_2 , показанных на рис. 9.5. Погонные касательные усилия обозначим через T_{12} и T_{21} , а поперечные силы — через Q_{31} и Q_{32} . Погонные изгибающие моменты, действующие в сечениях, нормальных к координатной линии α_1 , обозначим через M_1 , а действующие в сечениях, нормальных к координатной линии α_2 , — через M_2 . Наконец, крутящие моменты, являющиеся следствием неравномерного распределения по толщине оболочки касательных напряжений τ_{12} и τ_{21} , обозначим через M_{12} и M_{21} .

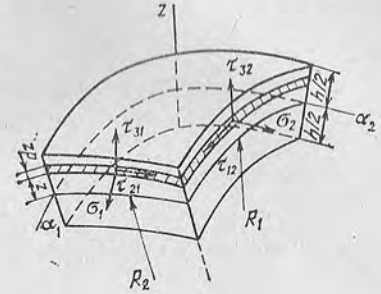


Рис. 9.5.

Положительные направления погонных усилий и моментов показаны на рис. 9.6. Для определения усилия N_1 вычислим сначала долю усилия dN_1 , приходящуюся на выделенный элемент площади dF_1 , равный $A_2 d\alpha_2 \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz$:

$$dN_1 = A_2 d\alpha_2 \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) \sigma_1 dz.$$

Для тонких оболочек величиной z/R_2 и z/R_1 по сравнению с 1 будем пренебрегать. Тогда для dN_1 получим

$$dN_1 = A_2 d\alpha_2 \sigma_1 dz.$$

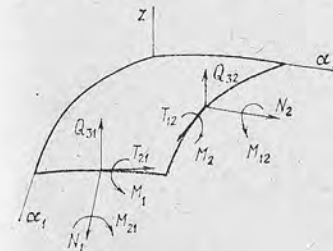


Рис. 9.6.

Нормальное усилие, приходящееся на единицу длины контура срединной поверхности, получим, если после интегрирования dN_1 по всей толщине оболочки результат разделим на длину контура срединной поверхности $A_2 d\alpha_2$:

$$N_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 dz. \quad (9.13)$$

Аналогично получим и другие усилия:

$$N_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 dz, \quad (9.14)$$

$$T_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{12} dz, \quad (9.15)$$

$$T_{21} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{21} dz, \quad (9.16)$$

$$Q_{31} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{31} dz, \quad (9.17)$$

$$Q_{32} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{32} dz. \quad (9.18)$$

Далее найдем изгибающие и крутящие моменты:

$$M_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 z dz, \quad (9.19)$$

$$M_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 z dz, \quad (9.20)$$

$$M_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{12} z dz, \quad (9.21)$$

$$M_{21} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{21} z dz. \quad (9.22)$$

Отметим, что полученные выражения для усилий и моментов совпадают с соответствующими выражениями для пластин, так как мы пренебрегли отношениями z/R_2 и z/R_1 по сравнению с единицей.

Принимая допущение о прямолинейности нормального элемента, мы тем самым пренебрегаем сдвигами в направлениях $z\alpha_1$ и $z\alpha_2$, т. е. мы должны бы пренебречь и касательными напряжениями τ_{31} и τ_{32} , а следовательно, и поперечными силами Q_{31} и Q_{32} . Однако пренебрегать поперечными силами Q_{31} и Q_{32} не следует, так как они играют существенную роль в уравнениях равновесия. Иначе говоря, первое допущение Кирхгофа — Лява следует трактовать таким образом, что при определении деформаций волокон в оболочках и пластинах пренебрегаем сдвигами, вызванными действием касательных напряжений τ_{31} и τ_{32} , но не самими напряжениями.

Принимая во внимание уравнения (9.12) и зависимости между напряжениями и деформациями закона Гука

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2), \quad \sigma_2 = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1), \quad (9.23)$$

$$\tau_{12} = \tau_{21} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma,$$

получим следующие выражения для погонных усилий и моментов:

$$N_1 = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2), \quad N_2 = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1),$$

$$T_{12} = T_{21} = T = \frac{Eh}{2(1+\mu)} \gamma, \quad M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} (\kappa_1 + \mu\kappa_2), \quad (9.24)$$

$$M_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} (\kappa_2 + \mu\kappa_1), \quad M_{12} = M_{21} = \frac{Eh^3}{12(1+\mu)} \chi.$$

Выражения для усилий и моментов (9.24) полностью совпадают с теми, которые были получены нами ранее для пластин. Это является следствием того, что мы пренебрегли всюду величинами порядка z/R по сравнению с единицей. Однако нужно иметь в виду, что выражения для деформаций, изменения кривизн и кручения, представленные через перемещения, для пластин и оболочек имеют, конечно, разный вид.

§ 53. Безмоментная теория оболочек

При определенных условиях изгибающие и крутящие моменты, возникающие в сечениях оболочки, оказываются настолько малыми, что изгибными напряжениями по сравнению с напряжениями, действующими в срединной поверхности (цепными), можно пренебречь. Как следует из формул (9.24), изгибающие и крутящие моменты становятся пренебрежимо малыми тогда, когда оболочка имеет либо очень малую толщину h , либо очень малы величины изменений кривизн κ_1 , κ_2 и кручения χ . Полагая равными нулю величины изгибающих и крутящих моментов, мы считаем тем самым, что нормальные σ_1 , σ_2 и касательные τ_{12} , τ_{21} напряжения не зависят от координаты z .

Подобное напряженное состояние называется *безмоментным*, и для его реализации на практике необходимо выполнение ряда условий.

Эти условия относятся к самой оболочке (оболочка должна иметь плавные очертания без скачкообразных изменений кривизны и толщины), к граничным условиям (условия на границе должны быть такими, чтобы реакции сводились только к силам, действующим в срединной поверхности) и, наконец, к нагрузке (нагрузка должна плавно распределяться по поверхности оболочки).

С точки зрения рационального использования материала конструкции безмоментное напряженное состояние является выгодным. Поэтому в конструкциях следует стремиться к тому, чтобы обеспечить условия, при которых может быть реализовано безмоментное напряженное состояние.

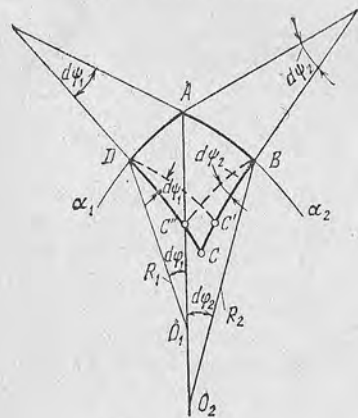


Рис. 9.7.

Во многих случаях обеспечить условия, при которых в полной мере реализуется безмоментное напряженное состояние, не удается. Однако и при этом не всегда это означает неприменимость безмоментной теории для расчета таких оболочек. Нередко большая часть оболочки находится в условиях безмоментного (или, точнее, близкого к безмоментному) напряженного состояния, и лишь небольшие области находятся в условиях смешанного напряженного состояния

(эти области часто прилегают к краям оболочки, и поэтому их называют *зонами краевого эффекта*).

Области смешанного напряженного состояния в оболочке возникают также там, где имеет место резкое изменение сечения или величины нагрузки. В подобных случаях иногда оказывается удобным рассматривать смешанное напряженное состояние оболочки как сумму безмоментного напряженного состояния всей оболочки и быстро затухающего моментного напряженного состояния в зоне краевого эффекта.

Рассмотрим уравнения равновесия безмоментной теории оболочек. Пусть мы имеем оболочку, находящуюся в безмоментном напряженном состоянии под действием распределенной по поверхности нагрузки, компоненты которой равны q_1, q_2, q_n . Выделим из оболочки элемент $ABCD$ (рис. 9.7) сечениями $\alpha_1, \alpha_1 + d\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2 + d\alpha_2$. При этом

стороны элемента вследствие изменения коэффициентов первой квадратической формы A_1 и A_2 будут изменяться. Так, AD имеет длину $A_1 d\alpha_1$, $AB - A_2 d\alpha_2$, $BC - A_1 d\alpha_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 d\alpha_1$, $DC - A_2 d\alpha_2 + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 d\alpha_2$. Угол $d\psi_1$ определяется как угол между направлениями координатных линий $\alpha_1 = \text{const}$ и $(\alpha_1 + d\alpha_1) = \text{const}$, а $d\psi_2$ — соответственно между направлениями координатных линий $\alpha_2 = \text{const}$ и $(\alpha_2 + d\alpha_2) = \text{const}$:

$$d\psi_1 = \frac{CC'}{AB} = \frac{\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 d\alpha_1}{A_2 d\alpha_2} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_1,$$

$$d\psi_2 = \frac{CC''}{AD} = \frac{\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 d\alpha_2}{A_1 d\alpha_1} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_2.$$

Углы $d\varphi_1$ и $d\varphi_2$ равны соответственно

$$d\varphi_1 = \frac{AD}{R_1} = \frac{A_1 d\alpha_1}{R_1}, \quad d\varphi_2 = \frac{AB}{R_2} = \frac{A_2 d\alpha_2}{R_2}.$$

Теперь рассмотрим усилия, действующие на стороны выделенного элемента $ABCD$ (рис. 9.8). Спроектируем все

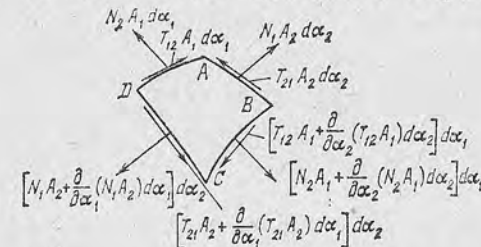


Рис. 9.8.

усилия на направление координатной линии α_1 :

$$\begin{aligned} & -N_1 A_2 d\alpha_2 + \left[N_1 A_2 + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (N_1 A_2) d\alpha_1 \right] d\alpha_2 - T_{12} A_1 d\alpha_1 + \\ & + \left[T_{12} A_1 + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (T_{12} A_1) d\alpha_2 \right] d\alpha_1 - N_2 A_1 d\alpha_1 d\psi_2 + \\ & + T_{21} A_2 d\alpha_2 d\psi_1 + q_1 A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = 0. \end{aligned}$$

После подстановки выражения для $d\psi_1, d\psi_2$ и сокращения

на $A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2$ получим первое уравнение равновесия

$$\frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (N_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (T_{12} A_1) + T_{21} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - N_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right] + q_1 = 0.$$

Аналогично можно получить и второе уравнение равновесия, спроектировав все усилия на направление координатной линии α_2 .

Для получения третьего уравнения равновесия спроектируем все силы на направление нормали к срединной поверхности оболочки:

$$-N_1 A_2 d\alpha_2 d\varphi_1 - N_2 A_1 d\alpha_1 d\varphi_2 + q_n A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = 0.$$

После подстановки выражений для $d\varphi_1$ и $d\varphi_2$ и сокращения на $A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2$ получим

$$\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} = q_n.$$

Из условия равновесия моментов относительно нормали к выделенному элементу получаем

$$T_{12} A_1 d\alpha_1 A_2 d\alpha_2 - T_{21} A_2 d\alpha_2 A_1 d\alpha_1 = 0,$$

откуда следует закон парности сдвигающих усилий

$$T_{21} = T_{12} = T.$$

Выпишем сводку уравнений равновесия для безмоментной оболочки произвольного очертания:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (N_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (T A_1) + T \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - N_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right] + q_1 &= 0, \\ \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_2} (N_2 A_1) + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (T A_2) + T \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - N_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right] + q_2 &= 0, \\ \frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} &= q_n. \end{aligned} \quad (9.25)$$

Система уравнений (9.25) содержит три неизвестных усилия N_1 , N_2 , T . Таким образом, количества уравнений равновесия достаточно для определения искомых неизвестных функций. Следовательно, задача определения напряженного состояния безмоментной оболочки является внутренне статически определимой. Для определения усилий нет на-

добности в привлечении уравнений совместности деформаций.

Перейдем к определению перемещений при безмоментном напряженном состоянии оболочек. Деформации ϵ_1 , ϵ_2 и сдвиг γ срединной поверхности можно выразить через усилия N_1 , N_2 , T по формулам закона Гука:

$$\epsilon_1 = \frac{1}{Eh} (N_1 - \mu N_2), \quad \epsilon_2 = \frac{1}{Eh} (N_2 - \mu N_1), \quad (9.26)$$

$$\gamma = \frac{2(1+\mu)}{Eh} T.$$

Далее, если учесть, что деформации ϵ_1 , ϵ_2 и сдвиг γ выражаются через перемещения u , v , w по формулам (9.6) — (9.8), то получим следующие дифференциальные уравнения для определения перемещений u , v , w :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{A_1 \partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} v + \frac{w}{R_1} &= \frac{1}{Eh} (N_1 - \mu N_2), \\ \frac{\partial v}{A_2 \partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u + \frac{w}{R_2} &= \frac{1}{Eh} (N_2 - \mu N_1), \\ \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{v}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{u}{A_1} \right) &= \frac{2(1+\mu)}{Eh} T. \end{aligned} \quad (9.27)$$

Если из (9.27) N_1 , N_2 и T , выраженные через перемещения u , v , w , подставить в уравнения (9.25), то можно получить систему уравнений равновесия для безмоментной оболочки в перемещениях. Однако в этом случае порядок системы уравнений возрастает вдвое, что соответственно увеличивает трудности решения такой системы. Поэтому проще сначала решать систему уравнений (9.25), имеющую второй порядок, а затем систему уравнений (9.27), также имеющую второй порядок.

Граничные условия на кромках оболочки должны быть такими, чтобы обеспечивалась безмоментность напряженного состояния. В связи с этим на границах оболочки можно задавать только усилия, действующие в направлениях, касательных к срединной поверхности (N_1 , N_2 , T), и задавать можно только перемещения в тангенциальных направлениях (u , v). Например, нельзя принимать равными нулю на краях оболочки нормальные перемещения w и углы поворота нормали $\partial w / \partial \alpha_1$ и $\partial w / \partial \alpha_2$, так как для заземленной на кромках оболочки изгибающие моменты не будут равными нулю, что противоречит условию безмоментности оболочки.

§ 54. Приближенная теория краевого эффекта круговых цилиндрических оболочек

Рассмотрим приближенную теорию краевого эффекта круговых цилиндрических оболочек. Пусть на край достаточно длинной цилиндрической оболочки действуют распределенные изгибающие моменты M_0 и поперечные силы Q_0 (рис. 9.9, а).

Быстрое затухание величины изгибающих моментов M_x по мере удаления от края ($x > 0$) должно сопровождаться быстрым изменением поперечных сил. В тонкой цилиндрической оболочке проекции поперечных сил на радиальное направление должны уравниваться в первую очередь

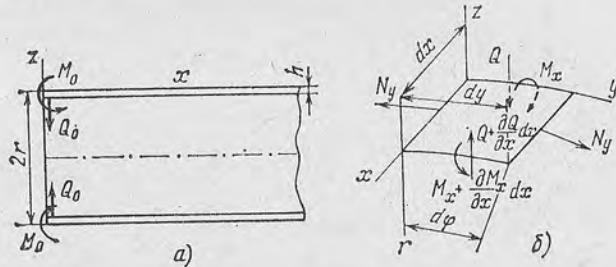


Рис. 9.9.

кольцевыми усилиями. Отсюда следует, что при действии на край цилиндрической оболочки распределенных моментов M_0 и поперечных сил Q_0 основными усилиями, возникающими в сечениях оболочки, будут следующие: изгибающие моменты M_x , поперечные силы Q_x , кольцевые усилия N_y . Остальные усилия можно считать второстепенными.

Кроме того, все силовые факторы существенно быстрее изменяются вдоль образующей x , чем вдоль криволинейной координаты y .

Поэтому при рассмотрении равновесия элемента цилиндрической оболочки, нагруженной по краю моментами M_0 и поперечными силами Q_0 , примем во внимание лишь три указанных вида усилий M_x , Q_x , N_y . На рис. 9.9, б показаны эти усилия, действующие на элемент оболочки. На рис. 9.9, а, б показаны положительные направления усилий, действующих на торец оболочки и на элемент.

Проектируя усилия, действующие на элемент оболочки, на направление оси z , получим

$$\left(Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx\right) dy - Q dy - N_y dx d\varphi = 0,$$

где $dy = r d\varphi$. После сокращения получим следующее уравнение равновесия:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{N_y}{r} = 0. \quad (9.28)$$

Запишем уравнение для моментов

$$\left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx\right) dy - M_x dy - Q dx dy = 0.$$

После сокращения получим

$$Q = \frac{\partial M_x}{\partial x}. \quad (a)$$

Согласно выражениям (6.6) для M_x и N_y имеем

$$M_x = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (б)$$

$$N_y = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\epsilon_y + \mu \epsilon_x).$$

Так как из условия $N_x = 0$ следует, что $\epsilon_x = -\mu \epsilon_y$, то $N_y = E h \epsilon_y$. В то же время, поскольку в соответствии с принятыми допущениями $\partial v / \partial y = 0$, то $\epsilon_y = w/r$. Следовательно, окончательно для N_y получим

$$N_y = \frac{Eh}{r} w. \quad (в)$$

Теперь, если в (9.28) подставить выражения для Q из (а), а затем вместо M_x подставить (б), а вместо N_y — (в), то окончательно получим уравнение равновесия в следующем виде:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{r^2} w = 0. \quad (9.29)$$

В уравнении (9.29) вместо частных производных по x мы записали полные производные по x , имея в виду, что изменением всех функций по координате y мы пренебрегаем по сравнению с изменением их по координате x .

Полученное уравнение (9.29) является приближенным уравнением краевого эффекта для круговой цилиндрической оболочки, находящейся под действием произвольной нагрузки. Однако в случае осесимметричного нагружения круговой цилиндрической оболочки это уравнение является точным, так как при этом действительно все функции изменяются только в направлении оси x .

Уравнение (9.29) представим в виде

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = 0, \quad (9.30)$$

где

$$\beta^4 = \frac{Eh}{4Dr^2} = \frac{3(1-\mu^2)}{r^2 h^2}. \quad (9.31)$$

Общее решение уравнения (9.30) имеет вид

$$w = e^{\beta x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x}(C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x). \quad (9.32)$$

Так как деформации и напряжения, вызванные действием моментов M_0 и поперечной силы Q_0 , приложенных к краю оболочки $x=0$, по физическому смыслу задачи должны носить местный характер и не могут безгранично возрастать с увеличением координаты x , то в решении (9.32) следует принять коэффициенты C_1 и C_2 равными нулю. Мы полагаем оболочку достаточно длинной и поэтому не учитываем возможность взаимного влияния краевых эффектов противоположных торцов оболочки.

Тогда решение запишем в виде

$$w = e^{-\beta x}(C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x). \quad (9.33)$$

Постоянные C_3 и C_4 найдем из граничных условий

$$M_0 = -D \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=0}, \quad Q_0 = -D \left(\frac{d^3 w}{dx^3} \right)_{x=0}.$$

Если сюда вместо w подставить его выражение из (9.33), то найдем следующие выражения для C_3 и C_4 через M_0 и Q_0 :

$$C_3 = -\frac{Q_0 + \beta M_0}{2\beta^3 D}, \quad C_4 = \frac{M_0}{2\beta^2 D}.$$

Подставив найденные выражения C_3 и C_4 в (9.33), по-

лучим следующее уравнение для w :

$$w = \frac{M_0}{2\beta^2 D} e^{-\beta x} \left[\sin \beta x - \left(\frac{Q_0}{\beta M_0} + 1 \right) \cos \beta x \right]. \quad (9.34)$$

Если принять, что угол поворота сечения на торце оболочки равен нулю, то из этого условия найдем связь между Q_0 и M_0 :

$$\left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=0} = \frac{M_0}{2\beta D} \left(2 + \frac{Q_0}{\beta M_0} \right) = 0,$$

$$\text{откуда } \frac{Q_0}{\beta M_0} = -2.$$

При этом выражение для w приобретает следующий вид:

$$w = \frac{M_0}{2\beta^2 D} e^{-\beta x} (\sin \beta x + \cos \beta x). \quad (9.35)$$

Величину реактивного момента M_0 , действующего на край оболочки, можно определить из условия, что полный прогиб оболочки w , вызванный действием внешней нагрузки и распределенных по торцу моментов M_0 , при $x=0$ равен нулю.

В качестве примера рассмотрим случай осесимметричного нагружения оболочки внутренним давлением p . Считая оболочку безмоментной, найдем, что $N_y = pr$. Поскольку перемещения u и v равны нулю, то $\varepsilon_y = \frac{w}{r}$ и $N_y = \frac{Eh}{r} w$, и окончательно для w получим

$$w = pr^2/(Eh).$$

Обозначим прогиб, вызванный действием внешней нагрузки, через w_1 , а влиянием краевого эффекта — w_{II} . Тогда условие на крае оболочки запишем в виде $w_1 + w_{II} = 0$ при $x=0$, или $\frac{pr^2}{Eh} + \frac{M_0}{2\beta^2 D} = 0$; откуда

$$M_0 = -\frac{prh}{2\sqrt{3(1-\mu^2)}}, \quad (9.36)$$

$$Q_0 = -2\beta M_0 = \frac{p\sqrt{rh}}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}. \quad (9.37)$$

Полученные знаки (для M_0 и Q_0) показывают, что для рассматриваемого примера нагружения оболочки направле-

ние момента M_0 обратно принятому на рис. 9.9, а. Для перемещения w получим окончательно следующее выражение:

$$w = \frac{pr^2}{Eh} [1 - e^{-\beta x} (\sin \beta x + \cos \beta x)], \quad (9.38)$$

Для $M_x = -D(d^2w/dx^2)$ будем иметь

$$M_x = -\frac{prh}{2\sqrt{3(1-\mu^2)}} e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x), \quad (9.39)$$

На рис. 9.10 показан характер изменения величин w/w_1 и M_x/M_0 по координате x .

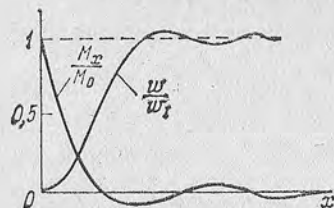


Рис. 9.10.

Величину зоны краевого эффекта x_0 , за пределами которой M_x становится и остается меньше $0,05 M_0$, найдем из условия

$$e^{-\beta x_0} (\cos \beta x_0 - \sin \beta x_0) \leq 0,05.$$

Имея в виду, что $(\cos \beta x_0 - \sin \beta x_0) \leq 1,414$, получим $e^{-\beta x_0} \leq$

$\leq 0,03536$, откуда следует, что $\beta x_0 > 3,357$, а $x_0 > 2,785\sqrt{rh}$.

§ 55. Осесимметричное нагружение оболочки типа купола

Рассмотрим случай осесимметричного нагружения оболочки вращения типа купола. В случае осесимметричного нагружения оболочки вращения касательные усилия T будут равны нулю. Следовательно, определению подлежат нормальные меридиональное N_1 и окружное N_2 усилия. Найдем эти усилия для случая, когда внешняя нагрузка определяется собственным весом купола. Обозначим величину веса купола, отнесенного к единице площади поверхности, через q . Тогда составляющие этой нагрузки q_n и q_t (рис. 9.11) будут

$$q_1 = q \sin \theta, \quad q_n = -q \cos \theta.$$

Для определения меридиональных усилий N_1 рассмотрим равновесие отсеченной оболочки KLM . На выделенную часть оболочки действует только собственный вес,

равный произведению qF , где F — площадь поверхности оболочки вращения KLM . Для определения площади поверхности оболочки обратимся к рис. 9.12. На рис. 9.12 AB представляет собой текущий радиус r в сечениях, перпендикулярных оси, BC — радиус кривизны R_2 , а $OB = OD$ — радиус кривизны R_1 . Радиусы R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны срединной поверхности оболочки вращения.

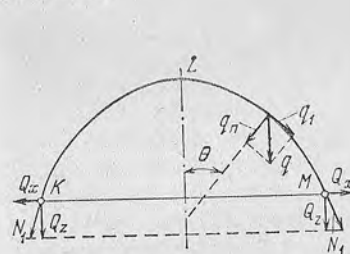


Рис. 9.11.

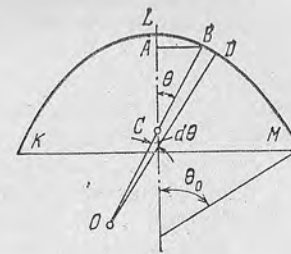


Рис. 9.12.

Дифференциал площади поверхности dF можно представить в виде $dF = 2\pi r ds$, где $ds = BD = R_1 d\theta$, а $r = AB = R_2 \sin \theta$. Тогда площадь поверхности вращения будет равна

$$F = 2\pi \int_0^\theta R_1 R_2 \sin \theta d\theta,$$

а условие равновесия отсеченной части имеет вид

$$N_1 2\pi R_2 \sin^2 \theta + 2\pi q \int_0^\theta R_1 R_2 \sin \theta d\theta = 0,$$

откуда для N_1 получим

$$N_1 = -\frac{q}{R_2 \sin^2 \theta} \int_0^\theta R_1 R_2 \sin \theta d\theta, \quad (9.40)$$

Величину второго нормального усилия N_2 получим из третьего уравнения (9.25):

$$\frac{N_2}{R_2} - \frac{q}{R_2 R_1 \sin^2 \theta} \int_0^\theta R_1 R_2 \sin \theta d\theta = -q \cos \theta,$$

откуда

$$N_2 = \frac{q}{R_1 \sin^2 \theta} \int_0^\theta R_1 R_2 \sin \theta d\theta - q R_2 \cos \theta. \quad (9.41)$$

Погонные меридиональные усилия N_1 на контуре оболочки разложим на вертикальную составляющую Q_z и горизонтальную составляющую Q_x (см. рис. 9.11). Вертикальная составляющая Q_z может быть воспринята вертикальной стенкой, на которую опирается купол, а для уравнивания поперечной составляющей Q_x оболочка по контуру должна быть подкреплена распорным кольцом. Это кольцо, нагруженное составляющими Q_x , будет растягиваться. Для того чтобы обеспечить условия безмоментного напряженного состояния, необходимо, чтобы перемещения контурных контактных точек кольца и оболочки были одинаковы. Следовательно, необходимо, чтобы кольцевые напряжения в оболочке в месте контакта с кольцом также были растягивающими.

Получим выражения для коэффициентов A_1 и A_2 первой квадратичной формы поверхности вращения.

Так как $BD = ds_1 = R_1 d\theta$, то имеем $A_1 = R_1$, а $\alpha_1 = \theta$, $ds_2 = AB d\varphi = R_2 \sin \theta d\varphi$, где φ — угол вращения кривой KLM относительно вертикальной оси z . Тогда $A_2 = R_2 \sin \theta$, а $\varphi = \alpha_2$. В случае осесимметричного нагружения оболочки вращения напряженное и деформированное состояние не будет изменяться по окружной координате φ . При этом $v = 0$, и из (9.27) получим следующие уравнения для определения перемещений u и w :

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{w}{R_1} &= \frac{1}{Eh} (N_1 - \mu N_2), \\ \frac{u}{R_1 R_2} \frac{\partial R_2}{\partial \theta} + \frac{w}{R_2} &= \frac{1}{Eh} (N_2 - \mu N_1), \end{aligned} \quad (9.42)$$

где N_1 и N_2 определяются уравнениями (9.40), (9.41).

Исключая из системы уравнений (9.42) функцию прогиба w , получим одно обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$\frac{du}{d\theta} - F_1(\theta) u + F_2(\theta) = 0, \quad (9.43)$$

где

$$F_1(\theta) = \frac{1}{R_1} \frac{dR_2}{d\theta},$$

$$F_2(\theta) = \frac{1}{Eh} [N_2 (R_2 + \mu R_1) - N_1 (\mu R_2 + R_1)].$$

Функции $F_1(\theta)$ и $F_2(\theta)$ являются известными функциями угловой координаты θ . Уравнение (9.43) может быть без труда проинтегрировано в общем виде. После определения функции u находится и функция прогиба w из второго уравнения (9.42):

$$w = \frac{R_2}{Eh} (N_2 - \mu N_1) - \frac{u}{R_1} \frac{dR_2}{d\theta}. \quad (9.44)$$

В качестве примера рассмотрим наиболее простой для расчета случай сферического купола, который находится под действием собственного веса. Для сферической оболочки $R_1 = R_2 = R_0$. Тогда из (9.40) следует, что $N_1 = -\frac{q R_0}{\sin^2 \theta} \times | -\cos \theta |_0^\theta$, или

$$N_1 = -\frac{q R_0 (1 - \cos \theta)}{1 - \cos^2 \theta} = -\frac{q R_0}{1 + \cos \theta}. \quad (9.45)$$

Для N_2 из (9.41) получим

$$N_2 = -q R_0 \left(\cos \theta - \frac{1}{1 + \cos \theta} \right). \quad (9.46)$$

Из (9.45) следует, что меридиональные усилия будут всюду сжимающими. Что же касается кольцевых усилий N_2 ,

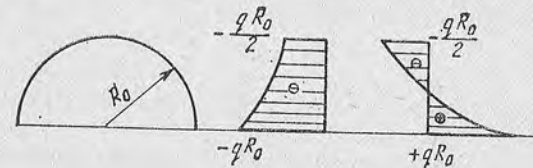


Рис. 9.13.

то они могут быть и положительными, и отрицательными. В вершине сферического купола (при $\theta = 0$) $N_1 = -q R_0 / 2$, $N_2 = -q R_0 / 2$, а у основания купола, если купол представляет собой полусферу ($\theta = \theta_0 = \pi/2$), $N_1 = -q R_0$, $N_2 = +q R_0$.

На рис. 9.13 показаны эпюры усилий N_1 и N_2 по высоте сферического купола. При значении $\theta \approx 51^\circ 40'$ N_2 меняет

знак. Круговое сечение, при котором происходит изменение знака кольцевых усилий, принято называть *швом перехода*.

Таким образом, для сферического купола, если принять $\theta_0 > 51^\circ 40'$, можно получить в основании положительные кольцевые усилия N_2 , совпадающие по знаку с кольцевыми усилиями в распорном кольце. Поскольку для сферической оболочки $R_1 = R_2 = R_0 = \text{const}$, то уравнения (9.42) примут следующий вид:

$$\frac{du}{d\theta} + w = -\frac{qR_0^2}{Eh} \left(\frac{1+\mu}{1+\cos\theta} - \mu \cos\theta \right), \quad (9.47)$$

$$w = -\frac{qR_0^2}{Eh} \left(\cos\theta - \frac{1+\mu}{1+\cos\theta} \right).$$

Исключая w , получим следующее дифференциальное уравнение для определения меридионального перемещения u :

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{qR_0^2}{Eh} \left[(1+\mu) \cos\theta - \frac{2(1+\mu)}{1+\cos\theta} \right]. \quad (9.48)$$

Принимая во внимание, что при $\theta = 0$ $u = 0$, получим

$$u = \frac{(1+\mu)qR_0^2}{Eh} \left(\sin\theta + 2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right). \quad (9.49)$$

Из (9.47) можно определить то значение угла θ , при котором w становится положительным. Этот угол оказывается равным (при $\mu = 0,25$) $43^\circ 30'$. Следовательно, если $\theta_0 > 43^\circ 30'$, то радиальные перемещения купола у его основания будут положительными и будут совпадать по знаку с радиальными перемещениями распорного кольца w_k , которые связаны с w соотношением

$$w_k = w \sin \theta_0. \quad (9.50)$$

Подберем площадь кольца Ω_k из условия (9.50), имея в виду, что w определяется уравнением (9.47), $w_k = \epsilon_k R_0 \sin \theta_0$, а $\epsilon_k = \sigma_k / E_k$. (Все величины, относящиеся к распорному кольцу, имеют индекс «к».)

Напряжение в кольце $\sigma_k = \frac{Q_x R_0 \sin \theta_0}{\Omega_k}$. Так как $Q_x = -N_1^0 \cos \theta_0$, то

$$\sigma_k = -\frac{N_1^0 R_0 \cos \theta_0 \sin \theta_0}{\Omega_k}. \quad (9.51)$$

Если, далее, вместо N_1^0 подставим выражение (9.45), то

получим

$$\sigma_k = \frac{qR_0^2 \cos \theta_0 \sin \theta_0}{(1+\cos \theta_0) \Omega_k}, \quad (9.52)$$

а для w_k будем иметь

$$w_k = \frac{\sigma_k}{E_k} R_0 \sin \theta_0 = \frac{qR_0^3 \cos \theta_0 \sin^2 \theta_0}{E_k (1+\cos \theta_0) \Omega_k}. \quad (9.53)$$

Подставим в (9.50) выражение для w из (9.47):

$$w_k = -\frac{qR_0^2}{Eh} \left(\cos \theta_0 - \frac{1+\mu}{1+\cos \theta_0} \right) \sin \theta_0. \quad (9.54)$$

Приравнявая правые части равенств (9.53) и (9.54), получим для потребной площади кольца Ω_k следующее выражение:

$$\Omega_k = \frac{EhR_0}{2E_k} \frac{\sin 2\theta_0}{(1+\mu) - \cos \theta_0 (1+\cos \theta_0)}. \quad (9.55)$$

Таким образом, если подобрать площадь распорного кольца по выражению (9.55), то мы удовлетворим требованиям безмоментности напряженного состояния в сферической оболочке, находящейся под действием собственного веса. При этом растягивающие напряжения в кольце будут определяться по формуле (9.52).

Здесь следует напомнить, что совместность радиальных перемещений оболочки и кольца в месте контакта без изгиба оболочки можно получить только в том случае, если угол θ_0 удовлетворяет неравенству $(1+\mu) - \cos \theta_0 (1+\cos \theta_0) > 0$, где μ — коэффициент Пуассона материала оболочки.

Рассмотрим в качестве примера подкрепление кольцом сферического купола с углом полураствора $\theta_0 = 60^\circ$, имеющего радиус сферы $R_0 = 10$ м, толщину $h = 1$ см и выполненного из алюминиевого сплава, для которого примем $E = 7 \cdot 10^4$ МН/м². Распорное кольцо предполагаем изготовленным из стали с модулем упругости $E_k = 2 \cdot 10^5$ МН/м². Коэффициент Пуассона примем равным $\mu = 0,3$. Для площади кольца из формулы (9.55) получим величину $\Omega_k = 271$ см². Таким образом, для обеспечения безмоментности напряженного состояния сферической оболочки требуется иметь распорное кольцо очень большого сечения, что невыгодно. Сечение кольца можно было бы уменьшить,

если бы угол θ_0 у края оболочки был больше. Для обеспечения безмоментного напряженного состояния при умеренных значениях сечения подкрепляющих колец применяют сферические куполы с плавно уменьшающимся радиусом кривизны вблизи края оболочки. При этом θ_0 оказывается достаточно большим, а площадь сечения кольца Ω_k может быть небольшой.

§ 56. Пологие оболочки. Основные уравнения пологих оболочек в усилиях, перемещениях и смешанной форме

Под пологими понимают такие оболочки, у которых стрела подъема оболочки H мала по сравнению с размерами оболочки в плане (рис. 9.14). Принято относить к пологим оболочки в тех случаях, когда отношение H к наименьшему размеру в плане составляет менее $1/5$, т. е. для пологой оболочки $H/L_{\min} \leq 1/5$. Для пологих оболочек в пределах точности технической теории оболочек можно пренебрегать разницей между геометрией поверхности оболочки и плоскости, т. е. принимать, как и для плоскости, $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Следовательно, у пологих оболочек можно считать коэффициенты первой квадратичной формы A_1 и A_2 равными единице: $A_1 = A_2 = 1$.

Для пологих оболочек можно считать, что главные радиусы кривизны R_1 и R_2 в пределах рассматриваемого участка пологой оболочки постоянны. В этом случае все выражения для деформаций, изменения кривизны и кручения срединной поверхности приобретают весьма простой вид:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1}, & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & \kappa_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, & \chi &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (9.56)$$

Выражения (9.56), за исключением двух первых для ϵ_x и ϵ_y , совпадают с аналогичными выражениями для пластин. За положительное направление для w принимается направление внешней нормали (оси z).

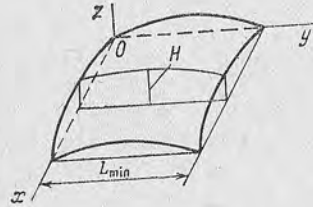


Рис. 9.14.

Как и для пластин, относительные деформации ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} не являются независимыми. Связь между деформациями определяется уравнением совместности деформаций, которое для пологих оболочек имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (9.57)$$

Уравнение совместности деформаций (9.57) для пологой оболочки отличается от уравнения (4.5) плоской задачи в декартовых координатах тем, что в правой части уравнения (9.57) имеются члены, зависящие от радиусов кривизны R_1 и R_2 , отсутствующие в уравнении (4.5).

Перейдем к рассмотрению уравнения равновесия пологой оболочки.

Проектируя силы, действующие на элемент пологой оболочки со сторонами dx и dy (рис. 9.15), на координатные оси x , y , z , получим

$$\begin{aligned} & -N_x dy + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx\right) dy - T dx + \\ & \quad + \left(T + \frac{\partial T}{\partial y} dy\right) dx + q_x dx dy = 0, \\ & -N_y dx + \left(N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y} dy\right) dx - T dy + \\ & \quad + \left(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx\right) dy + q_y dx dy = 0, \\ & -Q_{ix} dy + \left(Q_{ix} + \frac{\partial Q_{ix}}{\partial x} dx\right) dy - Q_{zy} dx + \\ & \quad + \left(Q_{zy} + \frac{\partial Q_{zy}}{\partial y} dy\right) dx - \\ & \quad - \frac{N_x dy dx}{R_1} - \frac{N_y dx dy}{R_2} + q_z dx dy = 0. \end{aligned}$$

В третьем уравнении равновесия принято во внимание, что угол между направлениями усилий N_x и $\left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx\right)$

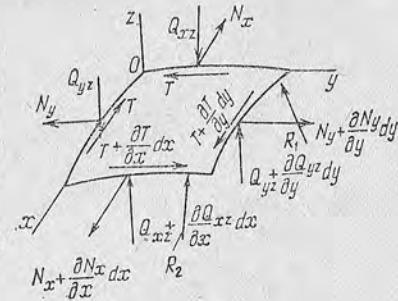


Рис. 9.15.

равен $\frac{dx}{R_1}$, а между направлениями N_y и $\left(N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y} dy\right)$ равен $\frac{dy}{R_2}$. При этом малыми второго порядка малости пренебрегаем.

После сокращений получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} + q_x &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + q_y &= 0, \\ \frac{\partial Q_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{zy}}{\partial y} - \frac{N_x}{R_1} - \frac{N_y}{R_2} + q_z &= 0. \end{aligned} \quad (9.58)$$

Обычно оболочки нагружаются распределенной нагрузкой, нормальной к срединной поверхности, и составляющие нагрузки q_x и q_y равны нулю. Будем далее полагать $q_x = q_y = 0$ и $q_z = q$. Тогда первые два уравнения равновесия в усилиях будут иметь вид

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0. \quad (9.59)$$

Уравнения (9.59) имеют такой же вид, как и уравнения равновесия плоской задачи теории упругости в декартовых координатах. Для преобразования третьего уравнения равновесия вспомним зависимости между поперечными силами и изгибающими и крутящими моментами, полученные нами ранее для пластин (6.14). Эти зависимости сохраняют такой же вид и для пологих оболочек:

$$Q_{zx} = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \quad Q_{zy} = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}. \quad (9.60)$$

После подстановки (9.60) в (9.58) получим третье уравнение равновесия в усилиях в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{N_x}{R_1} - \frac{N_y}{R_2} + q = 0. \quad (9.61)$$

Таким образом, (9.59) и (9.61) представляют собой систему уравнений равновесия пологой оболочки в усилиях.

Если воспользоваться выражениями (9.24) и (9.56), то можно перейти от уравнений равновесия в усилиях к урав-

нениям равновесия в перемещениях:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\mu}{R_2}\right) \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (9.62)$$

$$\frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \left(\frac{\mu}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad (9.63)$$

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{12} \nabla^2 \nabla^2 w + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\mu}{R_2}\right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{\mu}{R_1}\right) \frac{\partial v}{\partial y} + \\ + \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{2\mu}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2}\right) w = q. \end{aligned} \quad (9.64)$$

В (9.64) через $\nabla^2 \nabla^2$ обозначен бигармонический оператор

$$\nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

Если задача о напряженном и деформированном состоянии пологой оболочки решается в перемещениях, то необходимо отыскать такие функции перемещений u , v , w , которые бы удовлетворяли уравнениям равновесия (9.62)–(9.64) и заданным граничным условиям. В этом случае не приходится заботиться об удовлетворении уравнений совместности деформаций — они будут удовлетворяться тождественно.

Если, как это было сделано ранее при изучении плоской задачи теории упругости, ввести функцию напряжений φ , через которую напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} определяются по формулам

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y},$$

то уравнения равновесия (9.59) удовлетворяются тождественно, а уравнения равновесия (9.61) и совместности деформаций (9.57) принимают следующий вид:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = h \left(\frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) + q, \quad (9.65)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^2 \nabla^2 \varphi = -\frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (9.66)$$

Мы получили систему уравнений равновесия и совместности деформаций в смешанной форме. Эта система уравнений может быть приведена к одному разрешающему уравнению восьмого порядка относительно функции прогиба w .

Для этого необходимо к уравнению (9.65) применить оператор $\nabla^2 \nabla^2$. При этом мы получим

$$D \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 w = h \left(\frac{1}{R_1} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \nabla^2 \nabla^2 \varphi + \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla^2 \nabla^2 \varphi \right) + \nabla^2 \nabla^2 q.$$

Вместо $\nabla^2 \nabla^2 \varphi$ подставим из (9.66) соответствующее выражение $\nabla^2 \nabla^2 \varphi = -E \left(\frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$ и получим

$$D \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 w + E h \left(\frac{1}{R_1^2} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{2}{R_1 R_2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{R_2^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) = \nabla^2 \nabla^2 q. \quad (9.67)$$

Таким образом, задача об изгибе пологой оболочки, находящейся под действием произвольной нормальной к срединной поверхности нагрузки q , сводится к решению одного линейного дифференциального уравнения восьмого порядка в частных производных.

Если прогибы оболочки сравнимы с ее толщиной, то определение относительных линейных деформаций ϵ_x , ϵ_y и деформаций сдвига γ срединной поверхности должно производиться с учетом добавочных нелинейных членов $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$, $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2$ и $\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}$, как это было показано ранее для гибких пластин (6.1). При этом уравнения (9.65), (9.66) совместности деформаций и равновесия станут нелинейными и примут вид, подобный уравнениям (6.19) для пластин:

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} \nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{h} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \\ + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (9.68)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^2 \nabla^2 \varphi = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (9.69)$$

Для решения уравнений (9.68), (9.69) могут быть применены различные вариационные методы, рассмотренные в гл. 8, а также численные методы.

Подробное освещение приемов решения таких уравнений и обсуждение результатов решения различных частных при-

меров можно найти в специальных курсах по теории оболочек (например, в книге: Власов В. З. Общая теория оболочек. — М.: Гостехиздат, 1949). Мы остановимся на рассмотрении одного примера — изгиба пологой двояко выпуклой панели, прямоугольной в плане и нагруженной поперечной нагрузкой q , распределенной по произвольному закону.

§ 57. Изгиб пологой оболочки поперечной нагрузкой

Пусть на пологую оболочку, имеющую радиусы кривизн R_1 в направлении оси x и R_2 в направлении оси y , действует поперечная нагрузка q , произвольно распределенная по поверхности оболочки (рис. 9.16). В плане оболочка имеет прямоугольную форму со сторонами a и b .

Предполагаем, что оболочка по криволинейным кромкам свободно оперта, а в плоскости xu перемещения свободны в направлениях, нормальных к кромкам. Таким образом, граничные условия для оболочки можно записать в следующем виде:

$$\text{при } x = 0, \quad a \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \sigma_x = 0, \quad v = 0,$$

$$\text{при } y = 0, \quad b \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad u = 0.$$

Изгиб срединной поверхности оболочки описывается уравнением (9.67). Для решения задачи применим способ Навье, т. е. разложим искомое решение в двойной тригонометрический ряд по синусам, а внешнюю произвольную нагрузку $q(x, y)$ также разложим в двойной ряд по синусам. При этом будем иметь

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (9.70)$$

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (9.71)$$

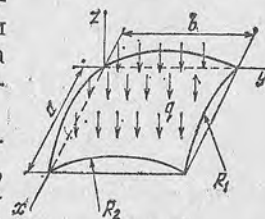


Рис. 9.16.

где коэффициенты разложения q_{mn} равны

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (9.72)$$

Выражение для прогиба (9.70) удовлетворяет условиям свободного опирания оболочки по кромкам.

Если подставить (9.70) и (9.74) в уравнение (9.67), то после некоторых преобразований можно получить следующее выражение для коэффициентов разложения A_{mn} :

$$A_{mn} = \frac{q_{mn} \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2}{D \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^4 + Eh \left(\frac{1}{R_1^2} \frac{n^4 \pi^4}{b^4} + \frac{2}{R_1 R_2} \frac{m^2 n^2 \pi^4}{a^2 b^2} + \frac{1}{R_2^2} \frac{m^4 \pi^4}{a^4} \right)}. \quad (9.73)$$

Введем обозначения $m\pi/a = \alpha_m$, $n\pi/b = \beta_n$, тогда запись выражения для коэффициентов разложения A_{mn} упростится:

$$A_{mn} = \frac{q_{mn} (\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2}{D (\alpha_m^2 + \beta_n^2)^4 + Eh \left(\frac{\beta_n^4}{R_1^2} + \frac{2\alpha_m^2 \beta_n^2}{R_1 R_2} + \frac{\alpha_m^4}{R_2^2} \right)}. \quad (9.74)$$

Коэффициенты q_{mn} определяются выражением (9.72) и могут быть вычислены, если известна функция $q(x, y)$.

Если подставить (9.70) в уравнение (9.66), то можно определить функцию напряжений φ , удовлетворяющую заданным граничным условиям на перемещения u , v и напряжения σ_x , σ_y на кромках панели.

Представим функцию напряжений φ также в виде двойного ряда по синусам:

$$\varphi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (9.75)$$

Принятое для φ выражение удовлетворяет заданным граничным условиям. При $x=0$, a $\sigma_x = \partial^2 \varphi / \partial y^2 = 0$ и $v=0$, а при $y=0$, b $\sigma_y = \partial^2 \varphi / \partial x^2 = 0$ и $u=0$.

В самом деле, если (9.70) и (9.75) подставить в выражения для ε_x и ε_y пологой оболочки, т. е.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1} = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right),$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2} = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right),$$

то для u и v после интегрирования получим ряды вида

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

$$v = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}.$$

Найденные выражения для u и v удовлетворяют заданным граничным условиям: при $x=0$, a $v=0$, а при $y=0$, b $u=0$.

Кроме того, отметим, что полученные выражения для u , v , w удовлетворяют уравнениям равновесия пологих оболочек в перемещениях (9.62), (9.63), (9.64).

Таким образом, при заданных граничных условиях угловые точки оказываются закрепленными, а остальные точки контура могут перемещаться только в направлениях, перпендикулярных к контуру в плоскости xy .

После подстановки (9.70) и (9.75) в (9.66) найдем следующие выражения для коэффициентов разложения F_{mn} :

$$F_{mn} = \frac{A_{mn} E (\beta_n^2 / R_1 + \alpha_m^2 / R_2)}{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2}. \quad (9.76)$$

После того как определены общие коэффициенты разложения функций w и φ , можно полностью определить напряженное состояние в любом сечении оболочки.

Напряжения в оболочке складываются из напряжений, вызванных изгибом (σ_x'' , σ_y'' , τ_{xy}''), и напряжений в срединной поверхности ($\sigma_x^0 = \partial^2 \varphi / \partial y^2$, $\sigma_y^0 = \partial^2 \varphi / \partial x^2$, $\tau_{xy}^0 = -\partial^2 \varphi / \partial x \partial y$).

Полные напряжения для любого сечения находим как сумму изгибных напряжений и напряжений в срединной

поверхности:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_x^n + \sigma_x^0, & \sigma_y &= \sigma_y^n + \sigma_y^0, \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}^n + \tau_{xy}^0.\end{aligned}\quad (9.77)$$

Максимальные изгибные напряжения будут определяться по тем же формулам, что и для пластин, т. е.

$$\begin{aligned}\sigma_{x \max}^n &= -\frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_{y \max}^n &= -\frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ \tau_{xy \max}^n &= -\frac{Eh}{2(1+\mu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\quad (9.78)$$

Таким образом, задача об определении напряженного состояния пологой оболочки, свободно опертой по кромкам прямоугольного плана, решается в такой последовательности:

- 1) вычисляются коэффициенты разложения q_{mn} внешней нагрузки $q(x, y)$ по формуле (9.72);
- 2) вычисляются коэффициенты разложения A_{mn} функции прогиба w по формуле (9.73) или (9.74);
- 3) вычисляются коэффициенты разложения F_{mn} функции напряжений φ по формуле (9.76);
- 4) определяются максимальные изгибные напряжения как функции координат x, y по формулам (9.78), (9.70);
- 5) определяются напряжения в срединной поверхности через функцию напряжений φ :

$$\sigma_x^0 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y^0 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy}^0 = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y},$$

где φ находится по выражению (9.75);

6) находятся максимальные суммарные напряжения по формулам (9.77).

Рассмотрим, например, случай изгиба цилиндрической оболочки со сторонами в плане a, b равномерно распределенной поперечной нагрузкой $q = q_0 = \text{const}$. Для цилиндрической оболочки $R_1 = \infty, R_2 = R$.

Коэффициенты разложения A_{mn} из (9.73) будут определяться следующим образом:

$$A_{mn} = \frac{q_{mn} \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2}{D \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^4 + \frac{Eh m^4 \pi^4}{R^2 a^4}}, \quad (9.79)$$

где q_{mn} вычисляются по (9.72). После подстановки в (9.72) $q(x, y) = q_0 = \text{const}$ и интегрирования получим

$$q_{mn} = \frac{16q_0}{\pi^2 mn}, \quad m = 1, 3, 5, \dots, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (9.80)$$

Определим прогибы w и напряжения, ограничившись лишь одним членом разложения ($m = n = 1$). При этом

$$A_{11} = \frac{16q_0 \pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2}{\pi^2 \left[D \pi^8 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^4 + \frac{Eh \pi^4}{R^2 a^4} \right]}.$$

Введем безразмерный параметр кривизны панели L :

$$L = \frac{b^2 \sqrt{12(1-\mu^2)}}{Rh}. \quad (9.81)$$

Тогда коэффициент разложения A_{11} можно представить после некоторых преобразований в следующем виде:

$$A_{11} = \frac{16q_0 a^4}{\pi^6 D \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \frac{1}{1 + \frac{L^2}{\pi^4 (a/b + b/a)^4}}. \quad (9.82)$$

Если ограничиться одним членом разложения в выражении (9.70), то

$$w = A_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (9.83)$$

и $w_{\max} = A_{11}$.

Первый множитель выражения (9.82) имеет такой же вид, что и для пластин, а второй множитель учитывает влияние кривизны панели. Так как этот множитель меньше единицы, то и прогибы цилиндрической панели будут меньше, чем прогибы пластины, имеющей такие же размеры в плане a, b и такую же толщину h , что и оболочка.

Следовательно, оболочка оказывается более жесткой на поперечный изгиб, чем пластина.

С увеличением параметра кривизны L при прочих равных условиях жесткость оболочки на поперечный изгиб возрастает.

Для определения коэффициентов разложения F_{mn} воспользуемся выражением (9.76). В нашем случае для цилиндрической оболочки, ограничиваясь одним членом разложения, получим

$$F_{11} = \frac{A_{11} E \frac{\pi^2}{a^2 R}}{\left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}\right)^2} = \frac{16 q_0 a^6 E}{\pi^8 D \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^4 R} \frac{1}{1 + \frac{L^2}{\pi^4 (a/b + b/a)^4}}. \quad (9.84)$$

Для напряжений в срединной поверхности получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \sigma_x^0 &= -\frac{\pi^2}{b^2} F_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \\ \sigma_y^0 &= -\frac{\pi^2}{a^2} F_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \\ \tau_{xy}^0 &= -\frac{\pi^2}{ab} F_{11} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}, \end{aligned} \quad (9.85)$$

где F_{11} вычисляется по формуле (9.84).

Изгибные напряжения $\sigma_x^n, \sigma_y^n, \tau_{xy}^n$ в наиболее удаленных от срединной поверхности точках будут определяться выражениями

$$\begin{aligned} \sigma_{x \max}^n &= \pm \frac{E h A_{11} \pi^2}{2(1-\mu^2) a^2} \left(1 + \mu \frac{a^2}{b^2}\right) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \\ \sigma_{y \max}^n &= \pm \frac{E h A_{11} \pi^2}{2(1-\mu^2) a^2} \left(\frac{a^2}{b^2} + \mu\right) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \\ \tau_{xy \max}^n &= \pm \frac{E h \pi^2 A_{11}}{2(1+\mu) ab} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}, \end{aligned} \quad (9.86)$$

где A_{11} вычисляется по формуле (9.82).

Пример. На стальную ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа) цилиндрическую панель с радиусом кривизны $R = 2$ м, размером сторон в плане $a = b = 1$ м и толщиной $h = 0,02$ м действует равномерно распределенная по поверхности нагрузка $q = q_0 = 10$ кПа. Считаем оболочку свободно опертой по всем четырем кромкам. Требуется определить: 1) макси-

мальный прогиб $w_{\max}$ в центре панели ($x = a/2, y = b/2$); 2) максимальные изгибные $\sigma_{x \max}^n, \sigma_{y \max}^n, \tau_{xy \max}^n$ напряжения; 3) максимальные касательные напряжения $\sigma_{x \max}^0, \sigma_{y \max}^0, \tau_{xy \max}^0$.

При решении задачи ограничимся одним членом разложения функций w и ϕ . Вычисляем коэффициент A_{11} по формуле (9.82). Для этого предварительно найдем значение параметра кривизны панели

$$L = \frac{b^2 \sqrt{12(1-\mu^2)}}{R h} = \frac{1^2 \sqrt{12(1-0,3^2)}}{2 \cdot 0,02} = 82,4$$

и изгибной жесткости

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 2^3 \cdot 10^{-6}}{12(1-0,3^2)} = 0,1465 \text{ МН} \cdot \text{м}.$$

Далее,

$$A_{11} = \frac{16 q_0 a^4}{\pi^6 D \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2} \frac{1}{1 + \frac{L^2}{\pi^4 (a/b + b/a)^4}} = \frac{16 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot 1}{\pi^6 \cdot 0,1465 \cdot 2^5} \cdot \frac{1}{1 + \frac{82,4^2}{\pi^4 \cdot 2^4}},$$

$$A_{11} = 0,532 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,0532 \text{ мм}.$$

Для пластины при тех же условиях коэффициент A_{11} оказывается значительно больше (примерно в 5,4 раза) и равен $A_{11}^{\text{пл}} = 0,285 \text{ мм}$. Далее определяем коэффициент разложения F_{11} функции напряжений ϕ по формуле (9.84):

$$F_{11} = \frac{16 q_0 a^6 E}{\pi^8 D \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^4 R} \frac{1}{1 + \frac{L^2}{\pi^4 (a/b + b/a)^4}} =$$

$$= \frac{16 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 10^5}{\pi^8 \cdot 0,1465 \cdot 2^4 \cdot 2 \left(1 + \frac{82,4^2}{\pi^4 \cdot 2^4}\right)},$$

$$F_{11} = 134,5 \text{ кН} = 0,1345 \text{ МН}.$$

Максимальный прогиб в центре панели равен коэффициенту A_{11} , т. е.

$$w_{\max} = A_{11} = 0,0532 \text{ мм}.$$

Максимальные изгибные напряжения будем вычислять по формулам (9.86). Наибольшие нормальные напряжения будут в центре пластины ($x = a/2, y = b/2$), а наибольшие касательные напряжения — в угловых точках кромок пластины. В центре пластины и на серединах кромок касательные напряжения от изгиба равны нулю. Для

квадратной в плане панели

$$\sigma_{x \max}^n = \sigma_{y \max}^n = \pm \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 0,532 \cdot 10^{-4} \pi^2}{2(1 - 0,3^2)} (1 + 0,3) = \pm 1,5 \text{ МПа},$$

$$\tau_{xy \max}^n = \pm \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \pi^2 \cdot 0,532 \cdot 10^{-4}}{2(1 + 0,3)} = \pm 0,81 \text{ МПа}.$$

Находим максимальные цепные напряжения по формулам (9.85).

Наибольшие нормальные цепные напряжения будут в центре пластины ($x = a/2$, $y = b/2$), а наибольшие касательные напряжения — в угловых точках кромок пластины:

$$\sigma_x^0 \max = -\frac{\pi^2}{b^2} F_{11} = -\frac{\pi^2}{1} 0,1345 = -1,325 \text{ МПа},$$

$$\sigma_y^0 \max = -\frac{\pi^2}{a^2} F_{11} = -\frac{\pi^2}{1} 0,1345 = -1,325 \text{ МПа},$$

$$\tau_{xy}^0 \max = \pm \frac{\pi^2}{ab} F_{11} = \pm 1,325 \text{ МПа}.$$

Как показали расчеты, выполненные в первом приближении (с учетом только одного члена разложения), изгибные и цепные напряжения оказываются для цилиндрической панели одного порядка.

Если сравнить наибольшие суммарные нормальные напряжения, действующие в центре цилиндрической панели и пластины с одинаковыми размерами, то оказывается, что суммарные напряжения в цилиндрической панели в несколько раз меньше, чем в пластине.

Следовательно, использование оболочек для восприятия поперечной нагрузки значительно выгоднее пластин, так как и напряжения и прогибы в оболочках будут значительно меньше, чем в пластинах. То же самое можно наблюдать при сравнении балок и арок, воспринимающих поперечную нагрузку.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

- ✓ 1. Что называется срединной поверхностью оболочки?
- ✓ 2. При каких условиях оболочку можно рассматривать как точную?
- ✓ 3. Сформулируйте гипотезы Кирхгофа — Лява.
- ✓ 4. Какие кривизны называются главными?
5. Что представляет собой уравнение первой квадратичной формы?
6. Что представляют собой коэффициенты A_1 и A_2 первой квадратичной формы?
7. Что называют гауссовой кривизной? Как она выражается через главные кривизны?

8. Приведите примеры поверхностей, имеющих нулевую гауссову кривизну.

9. Из каких составных частей состоит деформация ϵ_1 ?

10. Как представляются погонные усилия N_1 , N_2 , T_{12} , T_{21} , Q_1 , Q_2 через нормальные и касательные напряжения?

11. Как представляются изгибающие M_1 , M_2 и крутящие M_{12} , M_{21} моменты через нормальные и касательные напряжения?

12. Как выражаются погонные усилия N_1 , N_2 , T_{12} через деформации ϵ_1 , ϵ_2 и угол сдвига γ ?

13. Как выражаются изгибающие M_1 , M_2 и крутящий M_{12} моменты через изменения кривизн κ_1 , κ_2 и кручение χ ?

14. При каких условиях можно рассматривать напряженное состояние оболочек как безмоментное?

15. Какие зоны называются зонами краевого эффекта? В каких случаях возникают зоны краевого эффекта?

16. Как записывается система уравнений равновесия безмоментных оболочек в усилиях?

17. В чем смысл внутренней статической определенности задачи о безмоментном напряженном состоянии оболочек?

18. Какие требования предъявляются к граничным условиям в безмоментных оболочках?

19. Почему безмоментное напряженное состояние является более выгодным, чем моментное?

20. Чему равны касательные усилия T в случае осесимметричного нагружения оболочки вращения?

21. Как определяются нормальные усилия N_1 и N_2 в случае осесимметричного нагружения оболочки вращения?

22. Какими элементами конструкции могут восприниматься поперечные составляющие Q_x на контуре оболочки вращения?

23. Какой знак имеют меридиональные и кольцевые усилия в сферическом куполе, находящемся под действием собственного веса?

24. Как называется то круговое сечение, где происходит смена знака кольцевых усилий?

25. Как определяется напряжение в распорном кольце сферического купола с углом полураствора θ_0 радиусом сферы R_0 , если погонные меридиональные усилия в оболочке равны N_1^0 , а площадь сечения кольца Ω_k ?

26. Как подобрать размер сечения распорного кольца Ω_k для сферического купола из условия обеспечения безмоментности напряженного состояния оболочки?

✓ 27. Какие оболочки называются пологими?

28. Чему равны коэффициенты первой квадратичной формы A_1 и A_2 для пологой оболочки?

29. Как записываются выражения для деформаций ϵ_x и ϵ_y для пологих оболочек?

✓ 30. Сравните уравнения совместности деформаций для пологой оболочки и плоской задачи теории упругости.

31. Напишите уравнения равновесия пологой оболочки в усилиях.

32. Как получить уравнения равновесия в перемещениях?

33. Запишите систему уравнений равновесия и совместности деформаций в смешанной форме.

34. Как перейти от системы уравнений в смешанной форме к одному разрешающему уравнению относительно функции прогиба w ?

35. Как можно применить метод Навье для решения задачи об изгибе полой оболочки, свободно опертой по четырем кромкам и свободно смещающейся в плане оболочки в направлениях, нормальных к кромкам?

36. Как запишутся в этом случае граничные условия задачи?

37. Как определяется общий член разложения A_{mn} функции прогиба w ?

38. Как определяется общий член разложения q_{mn} функции поперечной нагрузки $q(x, y)$?

39. Как определяется общий член разложения F_{mn} функции напряжений φ ?

40. Как определяются изгибные напряжения в полой оболочке?

41. Как определяются цепные напряжения полой оболочки?

42. Как определяются полные напряжения в полой оболочке?

43. Какова последовательность решения задачи об определении напряженного состояния полой оболочки?

Глава 10

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

§ 58. Механические свойства материалов при одноосном растяжении и сжатии.

Задачи, решаемые в теории пластичности

Зависимость напряжений σ от относительных удлинений при растяжении образца (рис. 10.1) для большинства материалов имеет начальный участок ($\sigma \leq \sigma_{пл}$), который с достаточной степенью точности можно принимать прямолинейным. Это область, где считается справедливым закон Гука.

За прямолинейным участком следует криволинейный, для которого нарушается линейная связь между деформациями и напряжениями. При этом некоторые материалы (рис. 10.1, а) имеют четко выраженную площадку текучести, которой соответствует напряжение $\sigma_{т}$, а некоторые

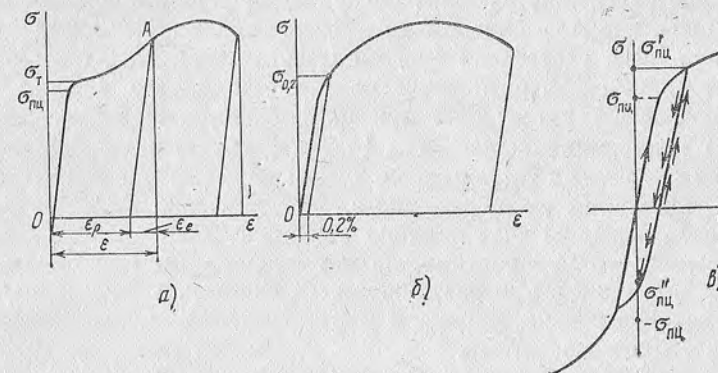


Рис. 10.1.

(рис. 10.1, б) такой площадки не имеют. В этом случае за предел текучести принимают так называемый условный предел текучести — напряжение, при котором остаточная деформация, т. е. деформация, остающаяся после снятия нагрузки, составляет 0,2% или 0,002. Условный предел текучести обозначают $\sigma_{0.2}$. В дальнейшем будем во всех случаях предел текучести обозначать $\sigma_{т}$. Точке А диаграммы растяжения образца (рис. 10.1, а) соответствует напряжение σ и полная деформация ϵ , которую в свою очередь можно

разделить на упругую деформацию ε_e и пластическую — ε_p . После разгрузки упругая деформация исчезает, а пластическая остается.

При разгрузке образца зависимость между напряжениями и деформациями носит линейный характер, причем наклон кривой $\sigma - \varepsilon$ при разгрузке равен наклону прямой в начальном участке $\sigma - \varepsilon$ при нагрузке образца. Таким образом, при разгрузке материал образца ведет себя как упругий.

Если образец после полной разгрузки снова нагрузить растяжением, то, как это видно из рис. 10.1, в, линейный участок будет продолжаться до больших значений $\sigma = \sigma'_{\text{пл}}$, чем это было в первый раз. Таким образом, при повторном нагружении образца с образованием пластических деформаций предел пропорциональности материала повышается ($\sigma'_{\text{пл}} > \sigma_{\text{пл}}$). Это явление называется *наклепом*.

Теперь представим себе, что образец после растяжения с образованием пластических деформаций не только полностью разгружается, но и нагружается усилием противоположного знака — сжатием до образования пластических деформаций в результате сжатия (рис. 10.1, в). При этом обнаруживается, что переход от упругой стадии сжатия к пластической происходит при напряжениях, меньших предела пропорциональности $\sigma_{\text{пл}}$ ($\sigma''_{\text{пл}} < \sigma_{\text{пл}}$). Это явление называется *эффектом Баушингера*. Таким образом, предварительно растянутый до образования пластических деформаций образец имеет за счет наклепа увеличенный предел пропорциональности при растяжении и уменьшенный при сжатии.

Кривые $\sigma - \varepsilon$ при растяжении и сжатии для большинства материалов весьма близки, и мы будем полагать их в дальнейшем совпадающими.

В теории упругости рассматриваются задачи, относящиеся к той области, где поведение материала соответствует первому линейному участку зависимости $\sigma - \varepsilon$. В этом случае всегда имеется однозначная связь между деформациями и напряжениями.

Если материал полностью или частично под действием внешних нагрузок находится в пластическом состоянии, то нельзя установить однозначную связь между напряжениями и деформациями. На эту зависимость будет влиять предыстория нагружения.

В самом деле, как мы уже отмечали выше, при нагружении с образованием пластических деформаций и при по-

следующей разгрузке, во-первых, изменяются пределы пропорциональности материала, а во-вторых, образуются остаточные деформации и, как следствие, могут быть остаточные напряжения. Поэтому при очередном нагружении для установления связи между деформациями и напряжениями необходимо знать всю предысторию нагружений.

Теория пластичности, в отличие от теории упругости, устанавливает связь между напряжениями и деформациями или скоростями изменения деформаций в области пластических деформаций.

В теории пластичности решается два типа задач:

1) задача об определении напряженного и деформированного состояния тела при заданных условиях на поверхности (нагрузка, перемещения) с учетом пластических деформаций материала тела;

2) задача об определении предельной (разрушающей) нагрузки для тела при заданных граничных условиях.

Естественно, что задачи теории пластичности в силу нелинейности связи между напряжениями и деформациями

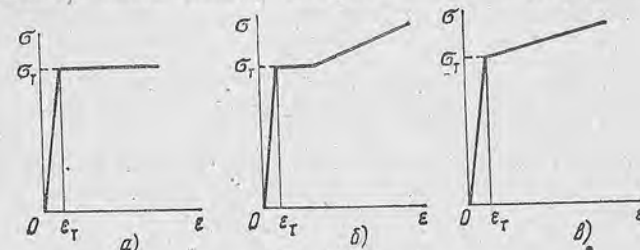


Рис. 10.2.

оказываются, как правило, более сложными, чем задачи теории упругости.

Для упрощения решения задач теории пластичности зависимость $\sigma - \varepsilon$ для реального материала аппроксимируют в виде кусочно-ломаных прямых, как это показано на рис. 10.2, а — в. Наиболее простой является аппроксимация, показанная на рис. 10.2, а, — диаграмма растяжения материала без упрочнения. Материал, упруго-пластические свойства которого характеризуются диаграммой типа 10.2, а, называется *идеальным упруго-пластическим* материалом. Диаграмму типа 10.2, в называют диаграммой с линейным упрочнением. Эти два типа диаграмм $\sigma - \varepsilon$ являются наиболее часто используемыми при решении задач теории пластичности.

При аппроксимации диаграмм растяжения материала разницей между пределом пропорциональности и пределом текучести пренебрегают. Таким образом, считают, что при $\sigma < \sigma_t$ имеют место упругие деформации, а при $\sigma > \sigma_t$ — пластические.

Когда мы имеем дело с одноосным растяжением или сжатием, то вопрос о переходе из упругого в пластическое состояние решается довольно просто. Границей перехода является напряжение $\sigma = \sigma_t$ и деформация $\varepsilon = \varepsilon_t$.

Значительно сложнее дело обстоит в том случае, когда тело находится в сложном напряженном состоянии.

Для большинства металлов коэффициент Пуассона для упругой области принимается равным $1/3$. При переходе в область пластических деформаций коэффициент Пуассона увеличивается и достигает величины $1/2$. В дальнейшем при определении деформаций в пластической области будем полагать коэффициент Пуассона равным $1/2$. При таком значении μ относительное изменение объема тела в результате пластических деформаций равно нулю, т. е. материал ведет себя как несжимаемый.

§ 59. Интенсивность напряжений и интенсивность деформаций. Критерии пластичности

В теории пластичности большое значение имеют такие понятия, как девиаторы напряжений и деформаций, интенсивности напряжений и деформаций.

Остановимся на этих понятиях. В гл. 1 мы представляли напряжение в точке и деформацию в точке в виде тензора напряжений T_n и тензора деформаций T_d .

Представим тензор напряжений T_n в виде суммы двух тензоров. Так, если напряженное состояние в точке представить в виде суммы напряженных состояний, определяемых равноосным растяжением, напряжением $\sigma_0 = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$ и действием компонент напряжений $\sigma_x - \sigma_0$, $\sigma_y - \sigma_0$, $\sigma_z - \sigma_0$, τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} , то общее напряженное состояние в тензорной форме представится в виде

$$T_n = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_0 \end{bmatrix}, \quad (10.1)$$

или $T_n = T_{\sigma_0} + D_{\sigma}$, где

$$T_{\sigma_0} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix} \quad (10.2)$$

— шаровой тензор, а

$$D_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_0 \end{bmatrix} \quad (10.3)$$

— девиатор напряжений.

Первое напряженное состояние, характеризующее действие равноосного растяжения или сжатия, приводит только к изменению объема и не изменяет формы. Второе напряженное состояние, характеризующее девиатором напряжений, напротив, не изменяет величины объема, но изменяет форму выделенного из тела элемента.

Опыты показывают, что тело может испытывать очень большие величины равноосного сжатия и оставаться при этом в упругом состоянии. Из этого следует, что за переход из упругого в пластическое состояние следует считать ответственным девиатор напряжений.

В гл. 1 было получено кубическое уравнение (1.6) для определения главных напряжений σ_1 , σ_2 , σ_3 . Там же получены выражения для инвариантов $I_{1\sigma}$, $I_{2\sigma}$, $I_{3\sigma}$, являющихся коэффициентами кубического уравнения. Если в выражения для инвариантов подставить компоненты напряжений, характеризующих девиатор напряжений D_{σ} , то первый и второй инварианты девиатора напряжений будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} I_1(D_{\sigma}) &= (\sigma_x - \sigma_0) + (\sigma_y - \sigma_0) + (\sigma_z - \sigma_0) = 0, \\ I_2(D_{\sigma}) &= (\sigma_x - \sigma_0)(\sigma_y - \sigma_0) + (\sigma_y - \sigma_0)(\sigma_z - \sigma_0) + \\ &+ (\sigma_z - \sigma_0)(\sigma_x - \sigma_0) - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = -1/6 [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \\ &+ (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]. \end{aligned}$$

Если по осям x , y , z отложить главные напряжения σ_1 , σ_2 , σ_3 , то второй инвариант девиатора напряжений (по абсолютному значению) примет выражение

$$I_2(D_{\sigma}) = 1/6 [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \quad (10.4)$$

Интенсивностью напряжений называют величину, пропор-

циональную корню квадратному из второго инварианта девиатора напряжений $\sigma_i = \sqrt{3I_2(D_\sigma)}$, т. е.

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}, \quad (10.5)$$

или, иначе,

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \quad (10.6)$$

Сравнивая выражение σ_i с выражением для приведенного напряжения по энергетической теории, отмечаем, что они равны:

$$\sigma_i = \sigma_{пр.}$$

Интенсивностью касательных напряжений τ_i называют величину, равную корню квадратному из второго инварианта девиатора напряжений, т. е.

$$\tau_i = \sqrt{I_2(D_\sigma)},$$

или

$$\tau_i = \frac{1}{\sqrt{6}} \times \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (10.7)$$

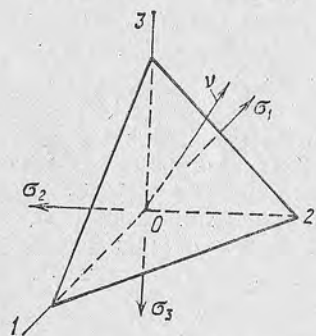


Рис. 10.3.

Между интенсивностью напряжений σ_i и интенсивностью касательных напряжений τ_i имеется следующая зависимость:

$$\sigma_i = \sqrt{3} \tau_i. \quad (10.8)$$

Интенсивность касательных напряжений τ_i с точностью до числового множителя равна касательному напряжению на площадке, равнонаклоненной к направлениям главных напряжений (рис. 10.3).

В самом деле, направление нормали v к этой площадке характеризуется следующими величинами направляющих косинусов:

$$\cos(\hat{x}, v) = \cos(\hat{y}, v) = \cos(\hat{z}, v) = 1/\sqrt{3}.$$

Полное напряжение p_v на этой площадке, называемой *октаэдрической*, будет равно

$$p_v^2 = \sigma_1^2 \cos^2(\hat{x}, v) + \sigma_2^2 \cos^2(\hat{y}, v) + \sigma_3^2 \cos^2(\hat{z}, v) = \\ = 1/3 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2),$$

а нормальное напряжение σ_v к площадке

$$\sigma_v = \sigma_1 \cos^2(\hat{x}, v) + \sigma_2 \cos^2(\hat{y}, v) + \sigma_3 \cos^2(\hat{z}, v) = \\ = 1/3 (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

Касательное напряжение на октаэдрической площадке найдем из выражения

$$\tau_{\text{окт}}^2 = p_v^2 - \sigma_v^2 = 1/3 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 1/9 (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2,$$

$$\tau_{\text{окт}}^2 = 1/9 [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2],$$

откуда

$$\tau_{\text{окт}} = 1/3 \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (10.9)$$

Следовательно, $\frac{\tau_i^2}{\tau_{\text{окт}}^2} = \frac{3}{2}$, или

$$\tau_i = \sqrt{\frac{3}{2}} \tau_{\text{окт}}, \quad \sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{\text{окт}}. \quad (10.10)$$

Таким образом, интенсивность напряжений σ_i можно интерпретировать как величину, пропорциональную октаэдрическому касательному напряжению $\tau_{\text{окт}}$.

Отметим, что интенсивность напряжений σ_i связывают также и с другими величинами. Например, В. В. Новожилов указывает на то, что интенсивность напряжений пропорциональна квадратному корню из среднего значения квадратов касательных напряжений в точке тела.

Аналогично тому, как напряженное состояние в точке тела было представлено выше, в виде суммы двух напряженных состояний, деформированное состояние в этой точке можно представить в виде суммы двух деформированных состояний — одного, определяемого равносторонним растяжением (сжатием), и второго, при котором компоненты деформаций получаются как разности действительного деформированного состояния и состояния всестороннего растяжения (сжатия).

Тензор деформаций T_d можно представить в следующем виде:

$$T_d = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & 1/2\gamma_{xy} & 1/2\gamma_{xz} \\ 1/2\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 1/2\gamma_{yz} \\ 1/2\gamma_{zx} & 1/2\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix}. \quad (10.11)$$

При всестороннем растяжении напряжениями $\sigma_0 = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$ деформации в направлении осей x, y, z будут одинаковы и равны

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = \frac{\sigma_0}{E} (1 - 2\mu).$$

Тензор деформаций, соответствующий всестороннему растяжению, обозначим через T_{ε_0} :

$$T_{\varepsilon_0} = \begin{vmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{vmatrix}. \quad (10.12)$$

Девiator деформаций представляет собой тензор следующего вида:

$$D_\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_0 & 1/2\gamma_{xy} & 1/2\gamma_{xz} \\ 1/2\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_0 & 1/2\gamma_{yz} \\ 1/2\gamma_{zx} & 1/2\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_0 \end{vmatrix}. \quad (10.13)$$

Таким образом, в общем виде тензор деформаций T_d можно представить как сумму двух тензоров — шарового тензора деформаций T_{ε_0} и девиатора деформаций D_ε :

$$T_d = T_{\varepsilon_0} + D_\varepsilon. \quad (10.14)$$

Шаровой тензор деформаций определяет изменение удельного объема в точке тела, а девиатор — изменение формы без изменения объема.

Для определения главных деформаций ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$) ранее было получено из определителя (1.27) кубическое уравнение (1.28), коэффициенты которого являются инвариантами.

Первым инвариантом этого кубического уравнения является сумма относительных линейных деформаций, равная относительному изменению удельного объема тела:

$$I_{1\varepsilon} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \Delta.$$

Вторым инвариантом является выражение вида

$$I_{2\varepsilon} = \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - 1/4 (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2). \quad (10.15)$$

Второй инвариант тензора деформаций через главные де-

формации $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ можно записать следующим образом:

$$I_{2\varepsilon} = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1. \quad (10.16)$$

Для девиатора деформаций первый инвариант равен нулю, т. е. $I_1(D_\varepsilon) = 0$, а второй инвариант $I_2(D_\varepsilon)$ мы получим из выражения (10.16), если вместо $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ подставим соответственно $\lambda_1 - \varepsilon_0, \lambda_2 - \varepsilon_0, \lambda_3 - \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)/3$:

$$I_2(D_\varepsilon) = -1/6 [(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)^2 + (\lambda_3 - \lambda_1)^2]. \quad (10.17)$$

Под *интенсивностью деформаций* ε_i понимают величину, пропорциональную корню квадратному из второго инварианта девиатора

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)^2 + (\lambda_3 - \lambda_1)^2},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — главные деформации, или, выражая ε_i через деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$, получим

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + 3/2 (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}. \quad (10.18)$$

Отметим, что интенсивность деформаций ε_i пропорциональна величине угловой деформации на октаэдрической площадке

$$\gamma_{\text{окт}} = 2/3 \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)^2 + (\lambda_3 - \lambda_1)^2},$$

таким образом, связь между интенсивностью деформаций ε_i и октаэдрической угловой деформацией $\gamma_{\text{окт}}$ выражается формулой

$$\varepsilon_i = \gamma_{\text{окт}} / \sqrt{2}. \quad (10.19)$$

Из приведенных выше выражений (10.10), (10.19), имея в виду, что в пределах упругих деформаций

$$\tau_{\text{окт}} = G \gamma_{\text{окт}},$$

получим

$$\sigma_i = 3G \varepsilon_i; \quad (10.20)$$

здесь G — модуль сдвига для упругого материала.

В итоге представления об интенсивности напряжений σ_i и деформаций ε_i можно связать с напряжениями и деформациями сдвига на октаэдрической площадке, т. е. площадке, равнонаклоненной к направлениям трех главных напряжений.

Пластические деформации, как показывают эксперименты, связаны с явлениями сдвига. Поэтому естественно, что и имеющие широкое распространение теории пластичности в основе своей имеют сравнение некоторых касательных напряжений с предельными, вызывающими появление текучести.

Основываясь на опытах Треска по истечению металлов через отверстия, Сен-Венан считал, что переход из упругого состояния в пластическое в окрестности точки происходит тогда, когда максимальное касательное напряжение в этой точке достигает некоторого постоянного значения, характерного для данного материала:

$$\tau_{\max} = \sigma_T/2, \quad (10.21)$$

или

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T. \quad (10.22)$$

Этот критерий пластичности соответствует известному из курса сопротивления материалов условию, вытекающему из теории прочности Кулона наибольших касательных напряжений.

Другой распространенный в настоящее время критерий пластичности, предложенный Мизесом (он называется также *критерием Губера — Мизеса*), определяет переход из упругого в пластическое состояние в окрестности точки при условии

$$\sigma_1 = \sigma_T, \quad (10.23)$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_T. \quad (10.24)$$

В этом случае не максимальное касательное напряжение, а октаэдрическое касательное напряжение $\tau_{\text{окт}}$ достигает некоторого постоянного для данного материала предельного значения. Критерий пластичности Губера — Мизеса соответствует известному условию энергетической теории прочности.

Хотя результаты, получающиеся по этим двум критериям пластичности, достаточно близки, однако следует отметить, что многочисленные опыты, проведенные для плоского напряженного состояния, показывают, что экспериментальные результаты лучше согласуются с критерием пластичности Губера — Мизеса.

Ранее отмечалось, что на переход из упругого в пластическое состояние величина всестороннего давления не ока-

зывает влияния. Переход в пластическое состояние зависит от девиатора напряжений, а так как этот процесс не может зависеть от выбора осей координат, то, следовательно, условие пластичности есть некоторая функция от инвариантов девиатора напряжений. В связи с тем, что $I_1(D_0) = 0$, в общем случае условие перехода в пластическое состояние можно записать в виде уравнения

$$f[I_2(D_0), I_3(D_0)] = 0. \quad (10.25)$$

Это уравнение в системе координат $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ описывает некоторую поверхность, которую называют *поверхностью текучести*.

Если принять критерий пластичности в форме Губера — Мизеса, то уравнение поверхности текучести запишется в виде

$$f[I_2(D_0)] = 0,$$

или

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2\sigma_T^2 = 0.$$

Полученное уравнение в осях $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ представляет собой цилиндр, ось которого равнонаклонена к осям $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (рис. 10.4). Если рассечь цилиндр плоскостью $\sigma_3 = 0$, то получим в сечении эллипс, уравнение которого будет

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_T^2.$$

Таким образом, критерию пластичности Губера — Мизеса соответствует поверхность текучести в форме кругового цилиндра, радиус которого в плоскости, перпендикулярной к оси, равен $\sigma_T/\sqrt{2}$.

Если принять критерий пластичности в форме Треска — Сен-Венана, т. е. $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T$, причем иметь в виду, что главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ не всегда располагаются в порядке убывания, т. е. могут иметь место следующие равенства:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \pm\sigma_T, \quad \sigma_2 - \sigma_3 = \pm\sigma_T, \quad \sigma_1 - \sigma_2 = \pm\sigma_T,$$

поверхность текучести в осях $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ представляется в виде шестигранной призмы с осью, равнонаклоненной к осям $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (рис. 10.5). Эту призму называют *призмой Кулона*.

Оси призмы Кулона и цилиндра Губера — Мизеса совпадают. Уравнение этой оси будет $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Призма Кулона оказывается вписанной в цилиндр Губера — Мизеса.

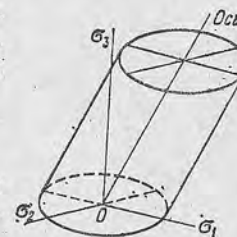


Рис. 10.4.

На рис. 10.6 показано сечение цилиндра и призмы плоскостью $\sigma_3 = 0$, т. е. для плоского напряженного состояния.

Для того чтобы воспользоваться условием пластичности Сен-Венана, необходимо заранее знать, какое из главных напряжений является максимальным, а какое — минимальным, в то время как для использования условия пластичности Мизеса вообще нет надобности в определении главных

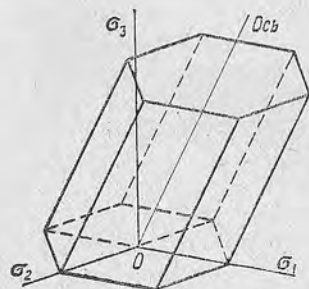


Рис. 10.5.

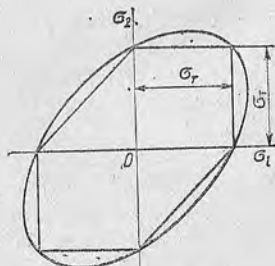


Рис. 10.6.

напряжений. Имея в виду (10.6), условие $\sigma_i = \sigma_r$ можно записать в виде

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = 2\sigma_r^2.$$

Поэтому во многих случаях использование условия пластичности Мизеса при решении задач оказывается более удобным, чем условия Сен-Венана.

§ 60. Теория малых упруго-пластических деформаций

В основе этой теории лежат гипотезы, предложенные Генки и обобщенные на случай материала с упрочнением Надаи. Развитие и обоснование теории малых упруго-пластических деформаций связано с работами А. А. Ильюшина. Поэтому часто теорию малых упруго-пластических деформаций называют *теорией пластичности Ильюшина*.

В основе деформационной теории пластичности лежит представление о том, что подобно тому, как это имеет место для упругого тела, также и для упруго-пластического тела

можно установить определенные зависимости между деформациями и напряжениями.

Укажем три основные гипотезы, на которых базируется эта теория.

1. *Гипотеза упругости объемной деформации.* Согласно этой гипотезе объемная деформация прямо пропорциональна среднему нормальному напряжению $\sigma_0 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$, где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные напряжения. При этом коэффициент пропорциональности K , связывающий объемную деформацию Δ со средним напряжением σ_0 , вычисляется при значениях μ , соответствующих упругим деформациям ($\mu = 1/4 - 1/3$):

$$\Delta = \sigma_0/K, \text{ где } K = E/[3(1 - 2\mu)].$$

Это означает, что изменение объема происходит только за счет упругих деформаций, а при пластических деформациях материал ведет себя как несжимаемый. Поэтому иначе эту гипотезу можно сформулировать так: за счет пластической деформации изменения объема не происходит.

2. *Гипотеза пропорциональности девиаторов.* Согласно этой гипотезе компоненты девиатора деформаций пропорциональны компонентам девиаторов напряжений. Связь между девиаторами напряжений и деформаций в форме, предложенной А. А. Ильюшиным, запишем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_0 &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} (\varepsilon_x - \varepsilon_0), & \tau_{xy} &= \frac{1}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \gamma_{xy}, \\ \sigma_y - \sigma_0 &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} (\varepsilon_y - \varepsilon_0), & \tau_{yz} &= \frac{1}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \gamma_{yz}, \\ \sigma_z - \sigma_0 &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} (\varepsilon_z - \varepsilon_0), & \tau_{zx} &= \frac{1}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \gamma_{zx}. \end{aligned} \quad (10.26)$$

3. *Гипотеза упрочнения.* Независимо от типа напряженного состояния для каждого материала имеется вполне определенная зависимость между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций:

$$\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i).$$

Для упругого материала эта связь выражается линейной зависимостью (10.20): $\sigma_i = 3G\varepsilon_i$.

Экспериментальная проверка приведенных здесь гипотез показывает, что они достаточно хорошо подтверждаются экспериментами.

Так, например, первая гипотеза об упругости объемной деформации проверялась многими исследователями при

очень высоких значениях всестороннего давления, и при этом обнаруживалось, что величина остаточных деформаций ничтожно мала. Большое количество экспериментов, проведенных для тонкостенных трубок, подвергавшихся совместному действию растягивающих и скручивающих усилий, показали, что третья гипотеза также подтверждается очень хорошо. Таким образом, коль скоро зависимость $\sigma_i - \varepsilon_i$ для данного материала есть вполне определенная функция, то в качестве диаграммы $\sigma_i - \varepsilon_i$ материала можно пользоваться диаграммой $\sigma - \varepsilon$ при простом растяжении. Что же касается второй гипотезы, то она также хорошо согласуется с результатами экспериментов в случае так называемого простого или мало отличающегося от простого нагружения.

Простым нагружением называют такое, при котором компоненты девиатора напряжений возрастают пропорционально какому-либо одному параметру.

А. А. Ильюшиным доказана теорема о достаточных условиях, при которых будет иметь место простое нагружение. Согласно этой теореме нагружение будет простым во всех точках тела, если все внешние нагрузки, действующие на несжимаемое тело, пропорциональны некоторому параметру, а зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций имеет вид степенной функции

$$\sigma_i = A \varepsilon_i^{\kappa}, \quad (10.27)$$

где A и κ — постоянные величины.

Выражение (10.27) достаточно точно аппроксимирует закон $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$ для большинства материалов. При $\kappa = 0$ уравнение (10.27) совпадает с условием пластичности Мизеса $\sigma_i = \text{const}$, при малых значениях κ уравнение (10.27) дает кривые с малым упрочнением $d\sigma_i/d\varepsilon_i$ и при $\kappa = 1$ — закон Гука.

Заметим, что условие (10.27) является достаточным, но не необходимым. Простое нагружение имеет место в некоторых случаях и тогда, как отмечает А. А. Ильюшин, когда зависимость σ_i от ε_i не удовлетворяет условию (10.27), если только нагрузки во времени возрастают пропорционально общему параметру.

Хотя условие пропорционального нагружения в реальных условиях осуществляется редко, однако, как показывают опыты, деформационная теория подтверждается и в тех случаях, когда имеет место некоторое отступление от закона пропорционального нагружения.

В отличие от простого, сложным нагружением мы будем называть такое, когда условие пропорциональности компонент девиатора какому-либо одному параметру при нагружении не соблюдается.

В теории пластичности очень важно различать процессы активной и пассивной деформаций. Активной деформацией называется такая, при которой каждое очередное значение интенсивности напряжений σ_i больше всех предшествующих. Если σ_i меньше хотя бы одного из предшествующих значений, то деформацию следует называть пассивной. Разгрузка является пассивной деформацией, а простое нагружение — активной деформацией.

Установим связь между интенсивностью напряжений σ_i и интенсивностью деформаций ε_i для упруго-пластического тела с линейным законом упрочнения. Диаграмма $\sigma_i - \varepsilon_i$ для такого тела представлена на рис. 10.7.

Если $\varepsilon_i < \varepsilon_T$, то, как уже отмечалось выше, $\sigma_i/\varepsilon_i = 3G$, или $\sigma_i = 3G\varepsilon_i$. В том случае, когда $\varepsilon_i > \varepsilon_T$, отношение $\sigma_i/\varepsilon_i < 3G$.

Пусть значение $\varepsilon_i > \varepsilon_T$ на рис. 10.7 соответствует отрезку $\overline{OC''}$. Значение σ_i на графике $\sigma_i - \varepsilon_i$ рис. 10.7 может быть показано отрезком $\overline{C'C''}$. Если бы деформации были упругими и в случае $\varepsilon_i > \varepsilon_T$, то напряжение σ_i измерялось бы отрезком $\overline{CC''}$, т. е. $\overline{CC''} = 3G\varepsilon_i$, а $\overline{C'C''} = \sigma_i$. Отношение отрезка $\overline{CC'}$ к отрезку $\overline{CC''}$ обозначим через ω , т. е.

$$\omega = \frac{\overline{CC'}}{\overline{CC''}} = \frac{3G\varepsilon_i - \sigma_i}{3G\varepsilon_i} = 1 - \frac{\sigma_i}{3G\varepsilon_i}. \quad (10.28)$$

Тогда можно записать

$$\sigma_i = 3G\varepsilon_i(1 - \omega). \quad (10.29)$$

Из этого же рисунка можно получить выражение для ω :

$$\omega = \frac{\overline{CC'}}{\overline{CC''}} = \frac{3G(\varepsilon_i - \varepsilon_T) - (\varepsilon_i - \varepsilon_T) \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i}}{3G\varepsilon_i} = \left(1 - \frac{1}{3G} \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i}\right) \left(1 - \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_i}\right).$$

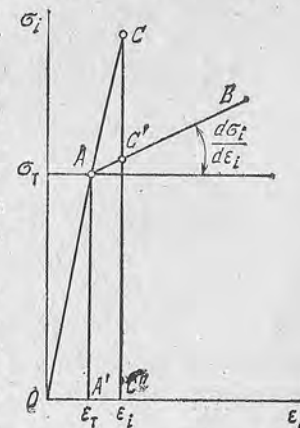


Рис. 10.7.

Вводя обозначение

$$\lambda = 1 - \frac{1}{3G} \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i}, \quad (10.30)$$

получим

$$\omega = \lambda(1 - \varepsilon_T/\varepsilon_i). \quad (10.31)$$

Таким образом, выражения (10.29)–(10.31) устанавливают связь между σ_i и ε_i в области пластических деформаций, если нам известен из диаграммы σ – ε наклон участка упрочнения $d\sigma_i/d\varepsilon_i$. Для связи компонент напряжений с компонентами деформаций воспользуемся ранее приведенными формулами (10.26).

Из формул (10.26) для $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ получим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \left(K - \frac{2}{9} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right) \Delta + \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \varepsilon_{xT}, \\ \sigma_y &= \left(K - \frac{2}{9} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right) \Delta + \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \varepsilon_{yT}, \\ \sigma_z &= \left(K - \frac{2}{9} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right) \Delta + \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \varepsilon_{zT}. \end{aligned} \quad (10.32)$$

Разрешая уравнения (10.26) относительно деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$, будем иметь

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \sigma_x - \left(\frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} - \frac{1}{3K}\right) \sigma_0, \\ \varepsilon_y &= \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \sigma_y - \left(\frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} - \frac{1}{3K}\right) \sigma_0, \\ \varepsilon_z &= \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \sigma_z - \left(\frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} - \frac{1}{3K}\right) \sigma_0. \end{aligned} \quad (10.33)$$

В приведенных формулах (10.32), (10.33) через K обозначен объемный модуль упругости, Δ — относительное изменение объема, а σ_0 — среднее нормальное напряжение.

В ряде случаев целесообразно выделить из полных составляющих деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots, \gamma_{xz}$ пластические деформации, т. е. представить полные деформации как сумму упругих и пластических:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{xe} + \varepsilon_{xp},$$

где через ε_{xe} обозначена упругая, а через ε_{xp} — пластическая

деформация. Тогда для ε_{xp} имеем

$$\varepsilon_{xp} = \varepsilon_x - \varepsilon_{xe},$$

где ε_x подставим из выражения (10.33), а

$$\varepsilon_{xe} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)],$$

т. е. получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xp} &= \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \sigma_x - \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} + \\ &\quad + \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{9K} - \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\mu}{E} (\sigma_y + \sigma_z). \end{aligned}$$

Группируя члены с σ_x и $(\sigma_y + \sigma_z)$, будем иметь

$$\varepsilon_{xp} = \left[\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} - \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{9K} \right) \right] \sigma_x - \frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} - \left(\frac{2}{9K} + \frac{2\mu}{E} \right) \right] (\sigma_y + \sigma_z).$$

Если принять во внимание, что

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)},$$

а

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)},$$

то

$$\frac{1}{E} - \frac{1}{9K} = \frac{1}{E} - \frac{1-2\mu}{3E} = \frac{1}{3G}, \quad \frac{2}{9K} + \frac{2\mu}{E} = \frac{2(1-\mu)}{3E} + \frac{2\mu}{E} = \frac{1}{3G}.$$

Тогда выражение для ε_{xp} может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xp} &= \left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} - \frac{1}{3G} \right) \left[\sigma_x - \frac{1}{2} (\sigma_y + \sigma_z) \right] = \\ &= \frac{1}{3G} \left(\frac{3G\varepsilon_i}{\sigma_i} - 1 \right) \left[\sigma_x - \frac{1}{2} (\sigma_y + \sigma_z) \right]. \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$\varphi(\sigma_i) = \frac{3G\varepsilon_i - \sigma_i}{\sigma_i}. \quad (10.34)$$

Нетрудно заметить, принимая во внимание выражение (10.28) для ω , что $\varphi(\sigma_i)$ через ω можно представить

следующим образом:

$$\varphi(\sigma_i) = \frac{\omega}{1-\omega}. \quad (10.35)$$

Таким образом, окончательно выражения для пластических деформаций запишем в следующей форме:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xp} &= \frac{\varphi(\sigma_i)}{3G} \left[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z) \right], \\ \varepsilon_{yp} &= \frac{\varphi(\sigma_i)}{3G} \left[\sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) \right], \\ \varepsilon_{zp} &= \frac{\varphi(\sigma_i)}{3G} \left[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \right]. \end{aligned} \quad (10.36)$$

Для пластических сдвигов γ_{xyp} , γ_{yzp} , γ_{zxp} получим

$$\gamma_{xyp} = \gamma_{xy} - \gamma_{xyc} = 3 \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \tau_{xy} - \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{3G\varepsilon_i - \sigma_i}{G\sigma_i} \tau_{xy}.$$

Вводя, как и прежде, выражение для функции $\varphi(\sigma_i)$ по (10.34), (10.35), имеем

$$\begin{aligned} \gamma_{xyp} &= \frac{\varphi(\sigma_i)}{G} \tau_{xy}, \quad \gamma_{yzp} = \frac{\varphi(\sigma_i)}{G} \tau_{yz}, \\ \gamma_{zxp} &= \frac{\varphi(\sigma_i)}{G} \tau_{zx}. \end{aligned} \quad (10.37)$$

Уравнения (10.36), (10.37) в теории малых упруго-пластических деформаций играют такую же роль, как и уравнения обобщенного закона Гука в теории упругости.

Подобно тому, как это имеет место в теории упругости, для решения задачи необходимы следующие три группы уравнений:

- 1) статические уравнения (дифференциальные уравнения равновесия внутри тела и условия на поверхности);
- 2) геометрические уравнения (уравнения Коши, устанавливающие связь между деформациями и перемещениями, и уравнения неразрывности деформаций Сен-Венана);
- 3) физические уравнения (уравнения, устанавливающие связь между деформациями и напряжениями).

Первые две группы уравнений остаются в теории пластичности теми же, что и в теории упругости, а третья группа уравнений представлена системами уравнений (10.32) или (10.33), или для пластических составляющих деформаций (10.36), (10.37).

§ 61. Решение задач упруго-пластического деформирования в перемещениях. Метод упругих решений

Для решения задач упруго-пластического деформирования тела в перемещениях необходимо представить уравнения равновесия тела (уравнения Навье — Коши) в перемещениях.

Уравнения равновесия в напряжениях имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0. \end{aligned} \quad (10.38)$$

Выражения (10.32) для σ_x , σ_y , σ_z и (10.26) для τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} преобразуем, приняв во внимание, что $K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$, $\sigma_i/\varepsilon_i = 3G(1-\omega)$. После несложных преобразований получим для напряжений σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} в упруго-пластической области следующие зависимости:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (\lambda + 2/3G\omega) \Delta + 2G(1-\omega) \varepsilon_x, \\ \sigma_y &= (\lambda + 2/3G\omega) \Delta + 2G(1-\omega) \varepsilon_y, \\ \sigma_z &= (\lambda + 2/3G\omega) \Delta + 2G(1-\omega) \varepsilon_z, \\ \tau_{xy} &= G(1-\omega) \gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = G(1-\omega) \gamma_{yz}, \\ \tau_{zx} &= G(1-\omega) \gamma_{zx}, \end{aligned} \quad (10.39)$$

где $\Delta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$, $\omega = 1 - \sigma_i/3G\varepsilon_i$, $\lambda = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)} = \frac{2\mu G}{1-2\mu}$ — упругий параметр Лямэ.

Деформации ε_x , ε_y , ε_z , γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} можно выразить с помощью формул Коши (1.19) через перемещения u , v , w :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned}$$

Напряжение σ_x через перемещения u , v , w запишем в виде

$$\sigma_x = \left(\lambda + \frac{2}{3} G \omega \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2G(1 - \omega) \frac{\partial u}{\partial x}.$$

После дифференцирования по x получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = & \lambda \frac{\partial \Delta}{\partial x} + 2G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \\ & + \frac{2}{3} G \omega \frac{\partial \Delta}{\partial x} - 2G \omega \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{2}{3} G \Delta - 2G \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x}. \end{aligned}$$

Для τ_{xy} и τ_{xz} имеем $\tau_{xy} = G(1 - \omega) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$, $\tau_{xz} = G(1 - \omega) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$, а их производные по y и z соответственно имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = & G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \omega G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \omega}{\partial y}, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = & G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) - \omega G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) - G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial \omega}{\partial z}. \end{aligned}$$

Если подставить найденные значения $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$, $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$ и $\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}$ в первое уравнение равновесия, то получим

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial \Delta}{\partial x} + G \frac{\partial \Delta}{\partial x} + G \nabla^2 u + X - G \omega \left[-\frac{2}{3} \frac{\partial \Delta}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right] + \left(\frac{2}{3} G \Delta - 2G \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x} - \\ - G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \omega}{\partial y} - G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0, \end{aligned}$$

$$\text{или } \nabla^2 u + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \frac{X}{G} = R_x, \text{ где } R_x = \left(\nabla^2 u + \frac{1}{3} \frac{\partial \Delta}{\partial x} \right) \omega - \\ - 2 \left(\frac{\Delta}{3} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \omega}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial \omega}{\partial z}.$$

Аналогично можно получить и другие уравнения равновесия. Таким образом, сводка уравнений равновесия в перемещениях для упруго-пластической области будет иметь сле-

дующий вид:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \frac{X}{G} &= R_x, \\ \nabla^2 v + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \frac{Y}{G} &= R_y, \\ \nabla^2 w + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \frac{Z}{G} &= R_z. \end{aligned} \quad (10.40)$$

Выражения для R_y и R_z можно получить так же, как это было сделано для R_x :

$$\begin{aligned} R_y = & \left(\nabla^2 v + \frac{1}{3} \frac{\partial \Delta}{\partial y} \right) \omega - 2 \left(\frac{\Delta}{3} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial \omega}{\partial y} + \\ & + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\partial \omega}{\partial z}, \\ R_z = & \left(\nabla^2 w + \frac{1}{3} \frac{\partial \Delta}{\partial z} \right) \omega - 2 \left(\frac{\Delta}{3} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \frac{\partial \omega}{\partial z} + \\ & + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \frac{\partial \omega}{\partial y}. \end{aligned}$$

Система уравнений равновесия (10.40) должна быть дополнена условиями на поверхности тела

$$\begin{aligned} \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n - \bar{X} &= 0, \\ \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n - \bar{Y} &= 0, \\ \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n - \bar{Z} &= 0. \end{aligned} \quad (10.41)$$

Кроме систем уравнений (10.40) и (10.41), для решения задачи должна быть также известна функциональная зависимость σ_i от ϵ_i .

Если тело подвергается активной деформации поверхностными нагрузками $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$, то для определения напряженно-деформированного состояния тела необходимо отыскать такие функции перемещений $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$, которые бы при заданной диаграмме $\sigma_i(\epsilon_i)$ материала удовлетворяли уравнениям равновесия (10.40) и условиям на поверхности (10.41).

Для отыскания решения нелинейной системы уравнений равновесия (10.40) А. А. Ильюшиным был предложен метод упругих решений *).

Метод упругих решений представляет собой метод последовательных приближений, при котором на каждом шаге

*) Ильюшин А. А. — ПММ, 1943, т. VII, № 4.

приближения решается упругая задача. В качестве первого приближения отыскивается решение системы уравнений (10.40) при условии, что правые части равны нулю ($R_x = R_y = R_z = 0$). При этом найденное решение должно, конечно, удовлетворять условиям на границе (10.41). Полученные выражения для перемещений u^1, v^1, w^1 используются для отыскания $\varepsilon_i(x, y, z)$, $\sigma_i(x, y, z)$, $\omega(x, y, z)$ и вычисления правых частей уравнений (10.40): R_x^1, R_y^1, R_z^1 . Затем отыскивается второе приближение решения системы уравнений (10.40). При отыскании второго приближения $u^2(x, y, z)$, $v^2(x, y, z)$, $w^2(x, y, z)$ правые части уравнений равновесия определены из первого приближения (R_x^1, R_y^1, R_z^1), т. е. они являются известными функциями x, y, z и могут рассматриваться как дополнительные массовые силы в упругой задаче. После отыскания функций $u^2(x, y, z)$, $v^2(x, y, z)$, $w^2(x, y, z)$, удовлетворяющих уравнениям равновесия внутри тела и на границах, снова определяются $\varepsilon_i, \sigma_i, \omega$ и вычисляются правые части уравнений равновесия второго приближения R_x^2, R_y^2, R_z^2 , которые используются далее для отыскания третьего приближения функций u^3, v^3, w^3 .

Хотя и не имеется строгого доказательства сходимости процесса последовательных приближений в общем виде для трехмерной задачи теории пластичности, однако для некоторых классов задач (пластины, оболочки) такое доказательство существует.

Метод упругих решений в различных разновидностях широко применяется для решения различных прикладных задач теории малых упруго-пластических деформаций. Обычно достаточно нескольких приближений, чтобы получить достаточно для целей практики точность.

§ 62. Теория течения

В теории течения пластическая деформация материала уподобляется течению вязкой жидкости. При этом возникает вопрос о том, как распределяются скорости течения при достижении состояния пластического течения.

В основе теории пластического течения лежат следующие гипотезы.

1. *Гипотеза упругости объемной деформации.* Эта гипотеза полностью совпадает с первой гипотезой ранее рассмотренной теории упруго-пластических деформаций. Полагают, что объемная деформация Δ прямо пропорциональна средне-

му нормальному напряжению $\sigma_0 = 1/3(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$, причем коэффициент пропорциональности K такой же, как и при упругих деформациях, т. е. $K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$. Эту гипотезу иначе можно сформулировать так: материал в пластическом состоянии несжимаем, т. е. коэффициент Пуассона $\mu = 1/2$ при пластических деформациях. Условие несжимаемости при пластических деформациях $\Delta_p = \varepsilon_{xp} + \varepsilon_{yp} + \varepsilon_{zp} = 0$ можно также записать в виде $d\Delta_p/dt = 0$. Иначе говоря, сумма скоростей пластических деформаций равна нулю: $\xi_{xp} + \xi_{yp} + \xi_{zp} = 0$, где $\xi_{xp} = d\varepsilon_{xp}/dt$, $\xi_{yp} = d\varepsilon_{yp}/dt$, $\xi_{zp} = d\varepsilon_{zp}/dt$.

2. *Ассоциированный закон течения.* Как уже отмечалось выше, переход в пластическое состояние в окрестностях точки тела определяется уравнением вида (10.25). Это уравнение в системе координат $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ описывает поверхность текучести. Если материал с упрочнением, то поверхность текучести (поверхность нагружения) $f=0$ расширяется. В каждой точке поверхности нагружения вектор приращения пластической деформации коллинеарен с вектором девиатора напряжений. Кроме того, имеют место следующие зависимости:

$$d\varepsilon_{xp} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_x}, \quad d\varepsilon_{yp} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_y}, \quad \dots, \quad d\varepsilon_{yzp} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}, \quad (10.42)$$

где $f=0$ — поверхность нагружения (пластический потенциал).

Соотношения (10.42) выражают закон течения, ассоциированный с условием пластичности $f=0$.

Если функцию f принять в соответствии с условием Мизеса, т. е.

$$f = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) - 2\sigma_0^2 = 0,$$

то для частных производных от функции f по компонентам напряжения получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} &= 4\sigma_x - 2\sigma_y - 2\sigma_z = 6(\sigma_x - \sigma_0), \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} &= 4\sigma_y - 2\sigma_x - 2\sigma_z = 6(\sigma_y - \sigma_0), \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} &= 12\tau_{xz}, \quad \text{где } \sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}, \end{aligned}$$

Будем полагать, что коэффициент $d\lambda$ включает в себя и постоянный множитель 6. Тогда (10.42) перепишем в виде

$$\begin{aligned} d\epsilon_{xp} &= d\lambda(\sigma_x - \sigma_0), & d\epsilon_{yp} &= d\lambda(\sigma_y - \sigma_0), \\ d\epsilon_{zp} &= d\lambda(\sigma_z - \sigma_0), & & \\ d\gamma_{xyp} &= 2d\lambda\tau_{xy}, & d\gamma_{yzp} &= 2d\lambda\tau_{yz}, & d\gamma_{zxp} &= 2d\lambda\tau_{zx}. \end{aligned} \quad (10.43)$$

Таким образом, при пластическом течении материала предполагается, что имеет место линейная зависимость между компонентами приращений девиаторов пластических деформаций и компонентами девиатора напряжений. Эту линейную зависимость можно трактовать также как зависимость между компонентами скоростей пластических деформаций и компонентами напряжений.

Для определения величины $d\lambda$, входящей в уравнения (10.43), запишем выражение интенсивности приращений пластических деформаций $\bar{d}\epsilon_{ip}$. Отметим, что интенсивность приращений деформаций $\bar{d}\epsilon_{ip}$, вообще говоря, не равна приращению интенсивности деформаций $d\epsilon_{ip}$.

Выражение для интенсивности приращений пластических деформаций $\bar{d}\epsilon_{ip}$ получим, если в формуле (10.18) всюду деформации заменим приращениями пластических деформаций. Тогда будет

$$\begin{aligned} \bar{d}\epsilon_{ip} &= \frac{\sqrt{2}}{3} \left[(d\epsilon_{xp} - d\epsilon_{yp})^2 + (d\epsilon_{yp} - d\epsilon_{zp})^2 + (d\epsilon_{zp} - d\epsilon_{xp})^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} (d\gamma_{xyp}^2 + d\gamma_{yzp}^2 + d\gamma_{zxp}^2) \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (10.44)$$

Подставив (10.43) в (10.44), после преобразований получим для $d\lambda$ следующее выражение:

$$d\lambda = \frac{3}{2} \frac{\bar{d}\epsilon_{ip}}{\sigma_i}.$$

Если подставить найденное выражение $d\lambda$ в (10.43), то будем иметь

$$\begin{aligned} d\epsilon_{xp} &= \frac{3}{2} \frac{\bar{d}\epsilon_{ip}}{\sigma_i} (\sigma_x - \sigma_0), \\ d\epsilon_{yp} &= \frac{3}{2} \frac{\bar{d}\epsilon_{ip}}{\sigma_i} (\sigma_y - \sigma_0), \\ &\dots \dots \dots \\ d\gamma_{yzp} &= 3 \frac{\bar{d}\epsilon_{ip}}{\sigma_i} \tau_{yz}. \end{aligned} \quad (10.45)$$

Полагая упругие деформации малыми по сравнению

с пластическими, можно пренебречь ими и в уравнениях (10.45) всюду отбросить индекс p . При этом принимается, что полные деформации равны пластическим. Кроме того, разделим левую и правую части на dt . Тогда в левой части получим компоненты скоростей деформаций $\xi_x = d\epsilon_x/dt$, $\xi_y = d\epsilon_y/dt$, ..., $\eta_{yz} = d\gamma_{yz}/dt$, а в правой — интенсивность скоростей деформаций $\xi_i = \bar{d}\epsilon_i/dt$. При этом выражения (10.45) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \xi_x &= \frac{3}{2} \frac{\xi_i}{\sigma_i} (\sigma_x - \sigma_0), \\ \xi_y &= \frac{3}{2} \frac{\xi_i}{\sigma_i} (\sigma_y - \sigma_0), \\ &\dots \dots \dots \\ \eta_{yz} &= 3 \frac{\xi_i}{\sigma_i} \tau_{yz}. \end{aligned} \quad (10.46)$$

3. *Гипотеза упрочнения.* Согласно этой гипотезе полагают, что, независимо от типа напряженного состояния, для каждого материала имеется вполне определенная функциональная зависимость между интенсивностью напряжений и интегралом от интенсивности приращений пластических деформаций, т. е.

$$\sigma_i = \Phi \left(\int \bar{d}\epsilon_{ip} \right). \quad (10.47)$$

Вид этой функции может быть получен из опытов на простое одноосное растяжение.

В теории течения статические уравнения (уравнения равновесия) и геометрические уравнения (Коши и Сен-Венана) будут иметь тот же вид, что и в теории упругости или теории малых упруго-пластических деформаций.

Теория течения отличается от теории упругости и теории упруго-пластических деформаций физическими уравнениями. В теории упруго-пластических деформаций устанавливается, как мы видели, определенная связь между деформациями и напряжениями, связь, подобная закону Гука (уравнения (10.36), (10.37)). В теории течения физические уравнения устанавливают связи между компонентами скоростей деформаций и компонентами напряжений (10.46).

Помимо указанных групп уравнений (статических, геометрических и физических), при решении задач теории пла-

стичности необходимо использовать также в случае отсутствия упрочнения материала условие пластичности, а для упрочняющегося материала — закон упрочнения.

При простом нагружении интенсивность приращения деформаций $d\bar{\epsilon}_{ip}$ равна дифференциалу интенсивности деформаций $d\epsilon_{ip}$, и поэтому физические уравнения теории упруго-пластических деформаций и теории течения совпадают. Совпадают при этом и результаты решения по обеим теориям.

В случае непростого нагружения, как показывают эксперименты, результаты расчетов по теории течения оказываются ближе к экспериментам, чем те, которые получены по теории упруго-пластических деформаций.

§ 63. Простейшие задачи теории пластичности

1. Чистый изгиб бруса. Рассмотрим чистый изгиб бруса постоянного поперечного сечения, имеющего две оси симметрии. Для определенности примем сечение в виде прямоугольника со сторонами b и h (рис. 10.8).

Задача чистого изгиба бруса в области пластических деформаций существенно упрощается, если принять допущение о том, что коэффициент Пуассона μ как в упругой, так и в пластической областях равен $1/2$. При таком допущении напряженное состояние при чистом изгибе будет одноосным и, следовательно, единственным не равным

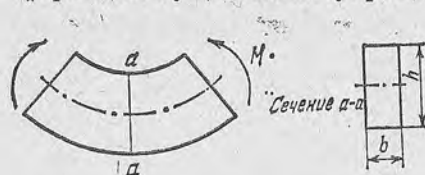


Рис. 10.8.

нулю напряжением будет нормальное напряжение σ_x вдоль волокон бруса.

Для материала бруса примем диаграмму $\sigma - \epsilon$ без упрочнения (рис. 10.2, а).

Величину изгибающего момента, при котором наибольшее напряжение достигает значения σ_T , обозначим M_T , т. е. $M_T = \sigma_T b h^2 / 6$.

Если действующий изгибающий момент M будет больше, чем M_T , то внутренняя часть сечения бруса будет находиться в упругом состоянии, а внешняя — в пластическом. Эпюра нормальных напряжений при этом будет иметь такой вид, какой показан на рис. 10.9, а. Величину c_0 , соответствующую заданному значению $M > M_T$, можно найти из условия рав-

новесия

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma y b dy = M, \quad (10.48)$$

Подсчитаем изгибающий момент от внутренних напряжений σ как статический момент площади эпюры σ , изображенной на рис. 10.9, умноженной на ширину сечения b :

$$M = \frac{2}{3} \sigma_T b c_0^2 + \sigma_T b \left(\frac{h^2}{4} - c_0^2 \right) = \sigma_T b \left(\frac{h^2}{4} - \frac{c_0^2}{3} \right),$$

$$M = \frac{\sigma_T b}{12} (3h^2 - 4c_0^2). \quad (10.49)$$

Если момент M достигает такого значения, что область пластических деформаций распространится на все сечение, то

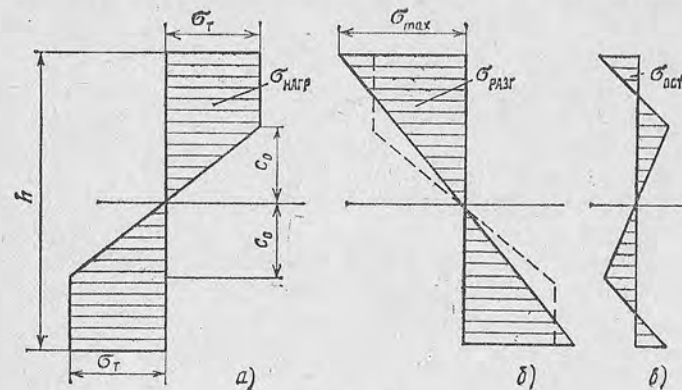


Рис. 10.9.

при принятой нами диаграмме $\sigma - \epsilon$ без упрочнения это будет означать исчерпание несущей способности бруса. Далее, деформации бруса будут расти безгранично, и поэтому такой момент мы назовем предельным. Следовательно, при $c_0 = 0$ $M = M_{пр}$:

$$M_{пр} = \frac{\sigma_T b h^2}{4} = \sigma_T W_T, \quad (10.50)$$

где $W_T = b h^2 / 4$ — пластический момент сопротивления изгибу. Как видим, пластический момент сопротивления изгибу для прямоугольного сечения в 1,5 раза больше, чем упру-

гий момент сопротивления изгибу $W = bh^2/6$. Из уравнения (10.49) можно определить положение границы между упругой и пластической зонами:

$$c_0 = \frac{h}{2} \sqrt{3 \left(1 - \frac{M}{M_{пр}}\right)}, \quad (10.51)$$

или

$$c_0 = \frac{h}{2} \sqrt{3 - 2 \frac{M}{M_T}}. \quad (10.52)$$

Сечения при чистом изгибе остаются плоскими при деформации, и величина деформаций $\varepsilon = y/\rho$, где ρ — радиус кривизны срединного слоя.

Для слоя, граничного между упругой и пластической зонами, имеем $\varepsilon = \varepsilon_T$, а $y = c_0$. Следовательно, можно записать $\varepsilon_T = c_0/\rho$. С другой стороны, $\varepsilon_T = \sigma_T/E$, а c_0 определяется формулой (10.52):

$$\frac{\sigma_T}{E} = \frac{\frac{h}{2} \sqrt{3 - 2M/M_T}}{\rho},$$

откуда

$$\rho = \frac{Eh \sqrt{3 - 2M/M_T}}{2\sigma_T} = \frac{EI_z \sqrt{3 - 2M/M_T}}{M_T}, \quad (10.53)$$

Далее найдем величину максимальной деформации при $y = h/2$:

$$\varepsilon_{\max} = \frac{h/2}{\rho} = \frac{\sigma_T}{E \sqrt{3 - 2M/M_T}}, \quad (10.54)$$

$$\varepsilon_{\max} = \frac{\varepsilon_T}{\sqrt{3 - 2M/M_T}}.$$

Таким образом, в задаче о чистом изгибе бруса в упруго-пластической области, приняв диаграмму $\sigma - \varepsilon$ без упрочнения, мы для каждого значения $M_T < M < M_{пр}$ можем определить, пользуясь формулами (10.51) или (10.52), границы между упругой и пластической областями (c_0), а также величины радиуса кривизны оси бруса по формуле (10.53) и максимальной деформации в сечении по формуле (10.54). При чистом изгибе кривизна $1/\rho$ — величина постоянная. Приняв для $1/\rho$ приближенное выражение $1/\rho = d^2y/dx^2$, легко определить и величину прогиба при чистом изгибе бруса в упруго-пластической области.

Максимальный прогиб $y_{\max}$ консольной балки длиной l , заземленной на одном конце ($y = dy/dx = 0$), получим в следующем виде:

$$y_{\max} = \frac{\sigma_T l^2}{Eh \sqrt{3 - 2M/M_T}}. \quad (10.55)$$

При $M = M_T$ выражение для $y_{\max}$ будет совпадать с известным из курса сопротивления материалов:

$$y_{\max} = \frac{M_T l^2}{2EI_z}, \quad \text{а при } M \rightarrow M_{пр} \quad y_{\max} \rightarrow \infty.$$

Теперь рассмотрим процесс разгрузки после нагружения бруса чистым изгибом при $M_T < M < M_{пр}$.

Как уже отмечалось ранее, процесс разгрузки происходит по линейному закону и прямая $\sigma_{разг} - \varepsilon_{разг}$ будет параллельна начальному участку прямой нагрузки.

Если бы все волокна при разгрузке деформировались независимо друг от друга, то в крайнем растянутом волокне остаточная деформация составила бы величину $\varepsilon_{ост} = \varepsilon_{\max} - \varepsilon_{разг}$, а волокна, находящиеся в упругой зоне, после разгрузки не должны были бы иметь остаточных деформаций. Однако в бресе волокна не могут деформироваться независимо друг от друга. Как при нагрузке, так и при разгрузке действует закон плоских сечений. Поэтому после разгрузки в сечении будут действовать остаточные напряжения. Растянутая зона после разгрузки будет испытывать сжимающие остаточные напряжения, а сжатая зона — растягивающие.

На рис. 10.9, а показана эпюра нормальных напряжений при нагрузке моментом $M_T < M < M_{пр}$, а на рис. 10.9, б — эпюра $\sigma_{разг}$ при разгрузке. Разгрузочный изгибающий момент по величине равен моменту нагрузки M и противоположен по знаку. Процесс разгрузки происходит упруго, и $\sigma_{\max} = M/W$. На рис. 10.9, в показана эпюра остаточных напряжений $\sigma_{ост}$, которая получена как разность между эпюрами напряжений $\sigma_{нагр}$ при нагружении моментом M и напряжений $\sigma_{разг}$. Эпюра остаточных напряжений $\sigma_{ост}$ является самоуравновешенной, т. е.

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ост} b dy = 0, \quad \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ост} b y dy = 0.$$

После разгрузки брус будет иметь не только остаточные напряжения, но и остаточное искривление оси. При

активным нагружением бруса изгибающим моментом $M > M_T$, кривизна $1/\rho$, как это следует из (10.53), будет равна $1/\rho = 2\sigma_T/(Eh\sqrt{3-2M/M_T})$. При разгрузке, что можно представить как упругую деформацию моментом M , но в противоположном направлении, изменение кривизны будет равно $1/\rho_{разг} = M/(EI_z)$. Остаточное искривление оси получится как разность $1/\rho_{ост} = 1/\rho - 1/\rho_{разг}$, или

$$\frac{1}{\rho_{ост}} = \frac{2\sigma_T}{Eh\sqrt{3-2M/M_T}} - \frac{M}{EI_z} \quad (10.56)$$

$$\frac{1}{\rho_{ост}} = \frac{M_T}{EI_z\sqrt{3-2M/M_T}} - \frac{M}{EI_z} \quad (10.57)$$

2. Кручение бруса круглого сечения. Задачу о кручении бруса круглого постоянного сечения также будем рассматривать в предположении, что диаграмма $\sigma - \varepsilon$ не имеет участка упрочнения.

Крутящий момент M_{KT} , при котором максимальные напряжения τ_{max} достигают предела текучести τ_T , обозначим через M_{KT} :

$$\tau_{max} = \frac{M_{KT}}{W_p} = \tau_T,$$

или

$$M_{KT} = W_p \tau_T, \quad (10.58)$$

где W_p — полярный момент сопротивления кручению, $W_p = \pi d^3/16$, $\tau_T = \sigma_T/2$, если использовать критерий текучести Сен-Венана, $\tau_T = \sigma_T/\sqrt{3}$, по критерию текучести Мизеса. Если крутящий момент $M_K < M_{KT}$, то имеет место упругое закручивание бруса. При этом для определения напряжений и деформаций используются известные формулы курса сопротивления материалов.

Рассмотрим случай, когда $M_K > M_{KT}$. По мере увеличения M_K зона пластических деформаций будет распространяться в направлении к оси бруса (рис. 10.10, а), и, когда пластические деформации распространятся на все сечение (рис. 10.10, б), крутящий момент M_K достигнет своего предельного значения. При этом значении крутящего момента будет исчерпана несущая способность бруса:

$$M_{пр} = W_T \tau_T, \quad (10.59)$$

где $W_T = \frac{\pi d^3}{12} = \frac{4}{3} W_p$. Следовательно, $M_{пр} = \frac{4}{3} M_{KT}$.

Определим границу между областью упругих и пластических деформаций r_0 при $M_{KT} < M_K < M_{пр}$. Момент от внутренних касательных усилий, равный M_K , представим как сумму моментов $M_e = \frac{\pi r_0^3}{2} \tau_T$ от касательных напряжений упругого ядра радиуса r_0 и моментов от касательных напряжений пластической зоны $M_p = \frac{4}{3} \tau_T \left(\frac{\pi d^3}{16} - \frac{\pi r_0^3}{2} \right)$.

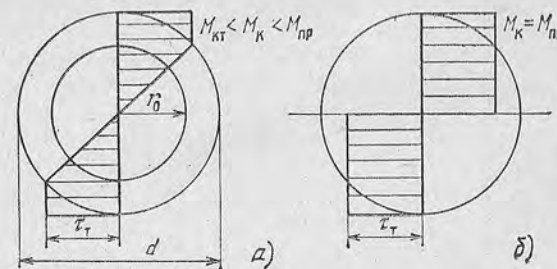


Рис. 10.10.

Из условия $M_K = M_e + M_p$ получим для r_0 следующее выражение:

$$r_0 = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi} \frac{M_{пр} - M_K}{\tau_T}}, \quad (10.60)$$

или

$$r_0 = \frac{d}{2} \sqrt[3]{3 \frac{M_{пр} - M_K}{M_{KT}}}. \quad (10.61)$$

Из (10.61) следует, что при $M_K = M_{пр}$ $r_0 = 0$, т. е. все сечение бруса будет находиться в состоянии пластических деформаций, а при $M_K = M_{KT}$ $r_0 = d/2$, т. е. в сечении бруса будут только упругие деформации.

Если после нагружения бруса крутящим моментом $M_{KT} < M_K < M_{пр}$ последует полная разгрузка, то в сечениях бруса останутся самоуравновешенные касательные напряжения. На рис. 10.11, а — б показаны эпюры касательных напряжений $\tau_{нагр}$ после нагружения моментом $M_K > M_{KT}$ (рис. 10.11, а), эпюра касательных напряжений $\tau_{разг}$ от момента разгрузки $M_{разг}$, по величине равного M_K (рис. 10.11, б). На эпюру касательных напряжений $\tau_{разг}$ от разгрузочного

момента наложена пунктиром эпюра касательных напряжений $\tau_{\text{нагр}}$. Вычитанием этих эпюр получена эпюра остаточных напряжений $\tau_{\text{ост}}$ (рис. 10.11, в).

Перейдем теперь к определению углов закручивания бруса круглого сечения при $M_{\text{кт}} < M_{\text{к}} < M_{\text{пр}}$. Как при упругих, так и при упруго-пластических деформациях сохраняется закон плоских сечений, а радиусы сечений в процессе деформаций остаются прямолинейными.

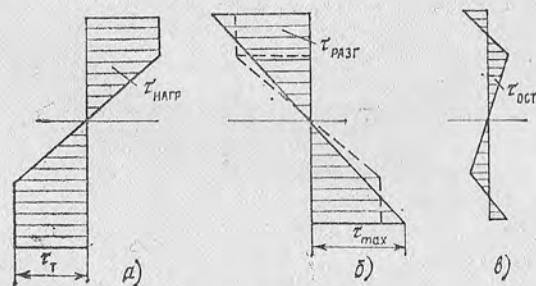


Рис. 10.11.

Так как радиусы при повороте сечений остаются прямыми, то относительный угол поворота сечения θ можно определить по углу поворота его упругого ядра, т. е.

$$\theta = \frac{M_e}{GI_e} \quad (10.62)$$

где M_e — часть крутящего момента, воспринимаемая упругим ядром, а I_e — полярный момент инерции упругого ядра, имеющего радиус r_0 , т. е.

$$M_e = \frac{\pi r_0^3}{2} \tau_t, \quad \text{а} \quad I_e = \frac{\pi r_0^4}{2}.$$

Подставив в (10.62) выражения для M_e и I_e , получим

$$\theta = \frac{\tau_t}{Gr_0}. \quad (10.63)$$

Если в (10.63) подставить выражение для r_0 из (10.61) и учесть, что $\tau_t = \frac{M_{\text{кт}}}{W_p} = \frac{M_{\text{кт}}}{\pi d^3/16}$, то после преобразований получим для относительного угла закручивания θ следующее

выражение:

$$\theta = \frac{M_{\text{кт}}}{GI_p \sqrt[3]{3} (M_{\text{пр}} - M_{\text{к}})/M_{\text{кт}}}. \quad (10.64)$$

Если $M_{\text{к}} = M_{\text{кт}}$, то из (10.64) получим величину θ_t — относительный угол закручивания, соответствующий началу образования пластических деформаций:

$$\theta_t = M_{\text{кт}}/(GI_p). \quad (10.65)$$

При устремлении $M_{\text{к}}$ к $M_{\text{пр}}$ относительный угол закручивания θ стремится к бесконечности. На рис. 10.12 показана зависимость относительного угла закручивания θ от величины приложенного крутящего момента $M_{\text{к}}$. Эта зависимость линейна, если $M_{\text{к}} < M_{\text{кт}}$, и становится нелинейной, когда $M_{\text{к}} > M_{\text{кт}}$.

Так как при разгрузке моментом $M_{\text{разг}} = M_{\text{к}}$ связь между моментом разгрузки и относительным углом закручивания линейна, то после разгрузки получается остаточный угол закручивания

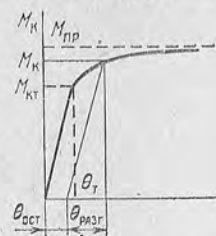


Рис. 10.12.

$$\theta_{\text{ост}} = \theta - \theta_{\text{разг}} = \frac{1}{GI_p} \left(\frac{M_{\text{кт}}}{\sqrt[3]{3} (M_{\text{пр}} - M_{\text{к}})/M_{\text{кт}}} - M_{\text{к}} \right).$$

Если обозначить отношение $M_{\text{к}}$ к $M_{\text{кт}}$ через m , т. е. $m = M_{\text{к}}/M_{\text{кт}}$, причем $1 \leq m \leq 4/3$, то для $\theta_{\text{ост}}$ запишем

$$\theta_{\text{ост}} = \frac{M_{\text{кт}}}{GI_p} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4-3m}} - m \right). \quad (10.66)$$

При изменении m в указанных пределах $\theta_{\text{ост}}$ изменяется от 0 до ∞ .

3. *Труба под внутренним давлением.* Рассмотрим задачу об упруго-пластической деформации толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления $p_{\text{в}}$. При решении этой задачи будем принимать осевую деформацию $\epsilon_z = 0$, и коэффициент $\mu = 1/2$ для упругой и пластической областей. При таком допущении мы будем иметь для продольного напряжения $\sigma_z = 1/2(\sigma_{\theta} + \sigma_r)$. При внутреннем давлении $p_{\text{в}}$ тангенциальные напряжения σ_{θ} будут положительными, а σ_r — отрицательными. Из трех главных напряжений σ_{θ} , σ_z , σ_r наибольшее значение имеет напряжение σ_{θ} и

наименьшее σ_r . Таким образом, условие пластичности $(\sigma_1 - \sigma_3)/2 = k$ можно записать в виде

$$\sigma_\theta - \sigma_r = 2k, \quad (10.67)$$

где $k = \sigma_r/2$ и $k = \sigma_r/\sqrt{3}$ в зависимости от того, какой из критериев пластичности — Сен-Венана или Мизеса — принимается при решении задачи.

Решение упругой задачи для толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего и внешнего давления, было изучено ранее в гл. 5. Из анализа выражения для σ_θ (5.28) следует, что наибольшие напряжения будут во внутренней точке. По мере увеличения внутреннего давления

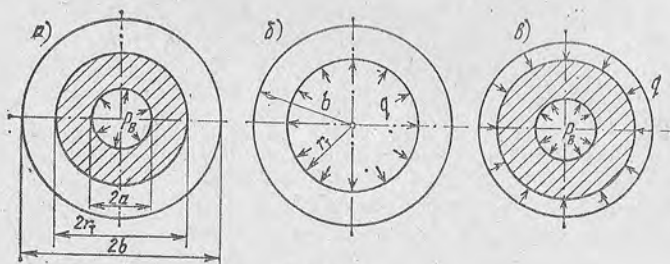


Рис. 10.13.

сначала в пластическое состояние перейдет внутренний слой. Определим величину давления, при котором появятся пластические деформации во внутреннем слое.

Для этого в условие пластичности (10.67) подставим выражения σ_r и σ_θ (5.26) и (5.28), принимая наружное давление $p_n = 0$, а внутреннее давление, соответствующее началу пластических деформаций, обозначим через p_r :

$$\frac{a^2 p_r}{b^2 - a^2} \left(\frac{b^2}{a^2} + 1 \right) + p_r = 2k.$$

Для p_r окончательно получим следующее выражение:

$$p_r = \frac{b^2 - a^2}{b^2} k. \quad (10.68)$$

Теперь рассмотрим случай, когда внутреннее давление $p_b > p_r$. При этом внутренняя часть сечения будет находиться в пластическом состоянии, а внешняя часть — в упругом. На рис. 10.13 показано сечение толстостенной трубы, находящейся в условиях упруго-пластических деформаций. Грани-

цей между пластической и упругой зонами является цилиндрическая поверхность радиуса r_r . На границе этого слоя действуют радиальные напряжения σ_r , которые мы обозначим через q . Таким образом, для внешнего слоя трубы с внутренним радиусом r_r , давлением q и внешним радиусом b (рис. 10.13, б) напряжения σ_r и σ_θ определяем по уже известным формулам (5.26), (5.28):

$$\sigma_r = -\frac{r_r^2 q}{b^2 - r_r^2} \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right), \quad \sigma_\theta = \frac{r_r^2 q}{b^2 - r_r^2} \left(\frac{b^2}{r^2} + 1 \right). \quad (10.69)$$

Величины q и r_r пока неизвестны и подлежат определению.

Рассмотрим внутренний слой, представляющий собой трубу, находящуюся под внутренним p_b и наружным q давлениями (рис. 10.13, в). Внутренний радиус этой трубы a , а внешний r_r . Эта труба полностью находится в пластическом состоянии. Таким образом, для нее помимо дифференциального уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (10.70)$$

имеет место еще и условие пластичности (10.67). После подстановки (10.67) в (10.70) имеем

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{2k}{r}. \quad (10.71)$$

После интегрирования (10.71) получим для σ_r следующее выражение:

$$\sigma_r = 2k(\ln r + C). \quad (10.72)$$

Постоянную интегрирования C найдем из условия, что при $r = a$, $\sigma_r = -p_b$, тогда $2k(\ln a + C) = -p_b$, откуда

$$C = -(\ln a + p_b/(2k)). \quad (10.73)$$

После подстановки (10.73) в (10.72) имеем

$$\sigma_r = 2k \ln \frac{r}{a} - p_b. \quad (10.74)$$

Из условия пластичности (10.67) для σ_θ получим

$$\sigma_\theta = 2k \left(\ln \frac{r}{a} + 1 \right) - p_b. \quad (10.75)$$

Итак, для упругой (внешней) зоны напряжения определяются по формулам (10.69), а для пластической (внутренней) — по (10.74), (10.75). На границе между упругой и пластиче-

ской зонами, т. е. при $r = r_T$, напряжения σ_r и σ_θ , определенные формулами для упругой ($\sigma_r^e, \sigma_\theta^e$) и пластической ($\sigma_r^p, \sigma_\theta^p$) зон, должны быть одинаковы, т. е. мы имеем следующие условия для определения неизвестных q и r_T :

$$\text{при } r = r_T \quad \sigma_r^p = -q, \quad \sigma_\theta^p = \sigma_\theta^e.$$

Из первого условия найдем q :

$$q = -\left(2k \ln \frac{r_T}{a} - p_n\right). \quad (10.76)$$

Из второго условия, подставив в (10.69) вместо q найденное выражение, получим

$$2k \left(\ln \frac{r_T}{a} + 1 \right) - p_n = \left(p_n - 2k \ln \frac{r_T}{a} \right) \frac{b^2 + r_T^2}{b^2 - r_T^2}.$$

После преобразований получим следующее уравнение, связывающее внутреннее давление p_n и радиус r_T :

$$p_n = k \left(2 \ln \frac{r_T}{a} - \frac{r_T^2}{b^2} + 1 \right). \quad (10.77)$$

Давление, соответствующее началу пластических деформаций на внутреннем слое, мы получим, если примем $r_T = a$. Тогда из (10.77) получим

$$p_T = \frac{b^2 - a^2}{b^2} k, \text{ т. е. получим выраже-}$$

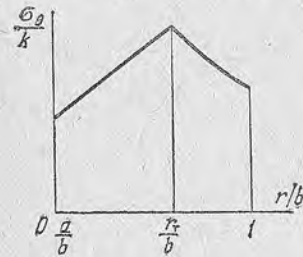


Рис. 10.14.

ние, совпадающее с (10.68). Если пластическая зона займет все сечение, то при принятой нами диаграмме $\sigma - \epsilon$ без упрочнения несущая способность толстостенной трубы будет исчерпана. Соответствующее внутреннее давление назовем предельным $p_{пр}$. Величину $p_{пр}$ можно определить из (10.77), если принять $r_T = b$:

$$p_{пр} = 2k \ln \frac{b}{a}. \quad (10.78)$$

Напряжение σ_θ в пластической зоне, как это видно из уравнения (10.75), растет с увеличением радиуса r , а в упругой области, напротив, с увеличением r напряжение падает.

Характер изменения напряжения σ_θ в пластической и упругой областях сечения толстостенной трубы показан на рис. 10.14.

Эксперименты показывают, что разрушение толстостенных труб происходит на наружной, а не на внутренней поверхности трубы, как этого можно было бы ожидать на основании результатов упругого решения.

§ 64. Плоское деформированное состояние

Задачу о плоском деформированном состоянии будем решать в предположении, что относительная деформация в направлении оси $z = 0$ и коэффициент Пуассона $\mu = 1/2$. Тогда

$$\sigma_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}. \quad (10.79)$$

Касательные напряжения $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Поскольку σ_z определяется через σ_x и σ_y по (10.79), то в случае плоской деформации подлежат определению три компоненты напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$. Эти величины, во-первых, связаны между собой известными уже из гл. 4 уравнениями равновесия, которые при отсутствии объемных сил имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad (10.80)$$

а во-вторых, они связаны условиями пластичности.

Условие пластичности $(\sigma_1 - \sigma_3)/2 = k$, где $k = \sigma_T/2$, или $k = \sigma_T/\sqrt{3}$, в зависимости от того, принимается ли критерий Сен-Венана или критерий Мизеса, мы запишем в ином виде.

Для этого представим главные напряжения σ_1 и σ_3 через напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2},$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}.$$

Тогда $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = k$. Возводя правую и левую части полученного равенства в квадрат, получим условие пластичности в следующей форме:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2. \quad (10.81)$$

Таким образом, в случае плоской задачи напряженное состояние в пластической области определяется тремя уравнениями (10.80) и (10.81).

Если угол между направлением оси x и направлением нормали к главной площадке с напряжением σ_1 обозначить через α , то напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} можно выразить через главные напряжения σ_1 и σ_3 :

$$\sigma_x = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_3 \sin^2 \alpha, \quad \sigma_y = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_3 \cos^2 \alpha,$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha.$$

Принимая во внимание, что $\cos^2 \alpha = (1 + \cos 2\alpha)/2$, а $\sin^2 \alpha = (1 - \cos 2\alpha)/2$, для напряжений σ_x и σ_y получим

$$\sigma_x = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha, \quad \sigma_y = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha, \quad (10.82)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha.$$

Далее примем во внимание, что среднее напряжение $\sigma_0 = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3 = (\sigma_x + \sigma_y)/2 = \sigma_z$, а следовательно, $\sigma_0 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$. Кроме того, $(\sigma_1 - \sigma_3)/2 = k$. Подставляя в (10.82) $(\sigma_1 + \sigma_3)/2 = \sigma_0$ и $(\sigma_1 - \sigma_3)/2 = k$, запишем

$$\sigma_x = \sigma_0 + k \cos 2\alpha, \quad \sigma_y = \sigma_0 - k \cos 2\alpha, \quad (10.83)$$

$$\tau_{xy} = k \sin 2\alpha.$$

Если площадки главных напряжений с осью x составляют угол α , то площадки максимальных касательных напряжений составляют с этой осью угол $\varphi = \alpha + \pi/4$. Следовательно, $2\alpha = 2\varphi - \pi/2$.

Теперь напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} можно представить как функции среднего напряжения σ_0 и угла φ между осью x и направлением площадки максимальных касательных напряжений площадки скольжения:

$$\sigma_x = \sigma_0 + k \sin 2\varphi, \quad \sigma_y = \sigma_0 - k \sin 2\varphi, \quad (10.84)$$

$$\tau_{xy} = -k \cos 2\varphi.$$

Полученные выражения (10.84) для σ_x , σ_y , τ_{xy} тождественно удовлетворяют условиям пластичности (10.81), в чем легко убедиться простой подстановкой (10.84) в (10.81).

Если (10.84) подставить в уравнения равновесия (10.80), то получим систему двух нелинейных дифференциальных

уравнений первого порядка в частных производных:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2k} \frac{\partial \sigma_0}{\partial x} + \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 0, \\ \frac{1}{2k} \frac{\partial \sigma_0}{\partial y} - \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (10.85)$$

К системе уравнений равновесия для решения задачи должны быть также добавлены граничные условия задачи.

В плоскости xy можно провести два семейства взаимно ортогональных линий, которые в каждой точке будут касаться площадок скольжения. Такие линии называют *линиями скольжения*.

Можно показать, что в случае плоской деформации элемент, вырезанный линиями скольжения, испытывает постоянное растяжение вдоль линий скольжения, равное σ_0 .

Система уравнений (10.85) решается обычно приближенными методами в ортогональной криволинейной системе координат s_1 , s_2 , совпадающей с линиями скольжения.

§ 65. Теория предельного равновесия

В основе расчета конструкций по предельному состоянию лежит концепция жестко-пластического тела. Если напряжения в теле меньше некоторого предельного значения, определяющего переход в пластическое состояние, то деформации тела принимаются равными нулю. Как только напряжения достигают предельного значения, деформации бесконечно растут. Диаграмма $\sigma - \epsilon$ для такого рода материала изображена на рис. 10.15. Переход в пластическое состояние определяется условием пластичности $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$. Эта функция в системе координат $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ описывает поверхность текучести. Согласно ассоциированному закону течения частные производные от функции f по координатам $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 - \partial f / \partial \sigma_1, \partial f / \partial \sigma_2, \partial f / \partial \sigma_3$ пропорциональны соответствующим скоростям деформаций $\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \dot{\xi}_3$. Если вектор $\dot{\sigma}$, построенный на компонентах $\dot{\sigma}_1, \dot{\sigma}_2, \dot{\sigma}_3$, лежит внутри области, ограниченной поверхностью $f = 0$, то деформации равны нулю, если вектор $\dot{\sigma}$ достигает поверхности $f = 0$, то деформации безгранично растут. Для жестко-пластического тела вектор напряжений σ не может выйти за пределы поверхности $f = 0$.

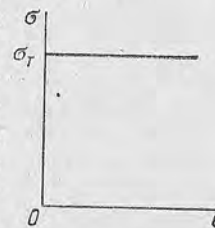


Рис. 10.15.

Для стержней и стержневых систем вместо напряжений в каждой точке сечения удобнее рассматривать интегральные для сечения характеристики — усилия Q_i . При этом под Q_i понимается продольная сила N , изгибающий момент M , крутящий момент M_k и т. п. Условие пластичности можно представить как уравнение, связывающее внутренние усилия Q_i , т. е.

$$F(Q_1, Q_2, \dots) = 0. \quad (10.86)$$

Предельное состояние для сечения стержня достигается тогда, когда вектор нагружения, построенный на координатах $Q_1, Q_2, \dots$, достигает поверхности нагружения $F = 0$, характеризующей переход всего сечения в пластическое состояние.

Пусть предельное состояние для элемента характеризуется усилиями $Q_1, Q_2, \dots$, а вектор Q , построенный на этих составляющих, своим концом касается поверхности $F = 0$ в точке M . Вектор обобщенного перемещения q и соответственно скорости перемещения $\dot{q}$ направлен по нормали к поверхности $F = 0$ в точке M , как это показано на

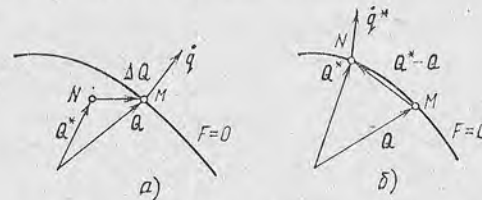


Рис. 10.16.

рис. 10.16, а. Наряду с истинным состоянием, характеризующим вектором нагружения Q , рассмотрим другое допустимое состояние, определяемое вектором Q^* (точка N на рис. 10.16, а). Для допустимого состояния имеет место неравенство $F(Q_1^*, Q_2^*, \dots) \leq 0$. Следовательно, точка N находится либо внутри, либо на поверхности нагружения. Так как поверхность $F(Q_1, Q_2) = 0$ — выпуклая, то вектор $\Delta Q = Q - Q^*$ всегда составляет с вектором обобщенного перемещения q (или вектором скорости обобщенного перемещения $\dot{q}$) острый угол. Поэтому можно утверждать, что скалярное произведение

$$((Q - Q^*), \dot{q}) > 0, \quad (10.87)$$

Если точка N находится на поверхности нагружения (рис. 10.16, б) и Q_i^* удовлетворяют условию текучести, а $\dot{q}^*$ — вектор скорости перемещения в точке N , то аналогично получим

$$((Q^* - Q), \dot{q}^*) > 0. \quad (10.88)$$

При определении предельных нагрузок, действующих на конструкцию, наиболее часто применяется кинематический метод.

Суть этого метода заключается в том, что для определения предельной нагрузки рассматриваются кинематически возможные состояния системы, совместные со статическим состоянием. Затем для кинематически возможного состояния применяется принцип возможных перемещений Лагранжа и из уравнения работ определяется предельная нагрузка.

Совместность со статическим состоянием определяется тем, что пластические усилия должны производить положительную работу.

Рассмотрим случай нагружения двухпролетной балки с одинаковыми пролетами одинаковыми силами P , приложенными в серединах пролетов (рис. 10.17).

Максимальные изгибающие моменты возникают в тех сечениях, где приложены сосредоточенные силы P . В этих сечениях в первую очередь будет достигнуто предельное состояние и образуются так называемые *пластические шарниры*. Пластический шарнир отличается от обычного шарнира тем, что изгибающий момент в пластическом шарнире равен не нулю, а предельному изгибающему моменту. Во-вторых, этот шарнир односторонний, т. е. он не препятствует повороту сечения в направлении действия нагрузки, но препятствует повороту в противоположном направлении, в направлении, соответствующем разгрузке.

Состояние, показанное на рис. 10.17, б, является кинематически невозможным, так как относительно левого шарнира происходит поворот в сторону, соответствующую разгрузке, а это несовместимо со статическим состоянием — работа

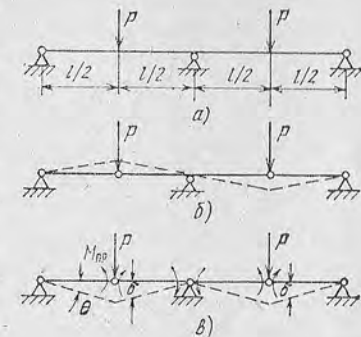


Рис. 10.17.

пластических моментов будет не положительной, а отрицательной.

Кинематически возможным для рассматриваемой схемы является состояние, показанное на рис. 10.17, в. Этому состоянию отвечает образование трех пластических шарниров, двух в пролетах и третьего на средней опоре.

Следующим этапом после установления кинематически возможного состояния является применение принципа Лагранжа.

Если обозначить через P_i обобщенные внешние нагрузки, Q_i — истинные обобщенные усилия, соответствующие предельному состоянию, а через δ_i^* и q_i^* возможные обобщенные перемещения соответственно сечений, где приложены обобщенные нагрузки P_i , и сечений, в которых образовались пластические шарниры, то, применяя принцип Лагранжа, будем иметь (вместо уравнения работ записываем уравнение мощностей, что равноценно):

$$\sum_i P_i \dot{\delta}_i^* = \sum_i Q_i \dot{q}_i^*. \quad (10.89)$$

Пусть по заданным q_i^* в соответствии с условием пластичности мы найдем усилия Q_i^* , вообще говоря, не равные истинным Q_i , которым соответствуют предельные нагрузки P_i . Усилиям Q_i^* соответствуют нагрузки P_i^* , для которых мы можем записать

$$\sum_i P_i^* \dot{\delta}_i^* = \sum_i Q_i^* \dot{q}_i^*. \quad (10.90)$$

Вычитая (10.89) из (10.90), получим

$$\sum_i P_i^* \dot{\delta}_i^* - \sum_i P_i \dot{\delta}_i^* = \sum_i (Q_i^* - Q_i) \dot{q}_i^*. \quad (10.91)$$

Так как правая часть равенства (10.91) согласно (10.88) больше нуля, то из этого следует, что нагрузки P_i^* , определенные кинематическим методом, больше истинных предельных нагрузок.

При применении кинематического метода нет необходимости в решении статически неопределимой упругой задачи. Как бы многократно статически неопределимой ни была задача в упругой области, при определении предельной нагрузки необходимо рассмотреть лишь кинематически возможные предельные состояния, а затем, применяя принцип Лагранжа, найти соответствующую предельную нагрузку. Таким

образом, определение предельной нагрузки часто оказывается значительно проще, чем определение напряженного состояния для той же статически неопределимой системы в упругой области.

Перейдем к примерам приложения кинематического метода для определения предельных нагрузок.

Рассмотрим двухпролетную балку, показанную на рис. 10.17. Для кинематически возможного состояния (рис. 10.17, в) применим принцип Лагранжа

$$2P \cdot \delta - 3M_{пр} 2\theta = 0, \quad \text{где } \theta = \frac{\delta}{l/2} = \frac{2\delta}{l}.$$

После сокращений получим $P_{пр} = 6M_{пр}/l$. Здесь $M_{пр}$ — предельный изгибающий момент в сечении балки. Для прямоугольного сечения, как это было показано ранее (10.50), $M_{пр} = \sigma_t b h^2 / 4$.

Если двухпролетная балка нагружена так, как показано на рис. 10.18, то в этом случае установить заранее точно положение пластического шарнира в левом пролете мы не можем. Предполагаем, что пластический шарнир находится на расстоянии x от левой опоры.

Положение пластического шарнира в правом пролете определяется положением точки приложения сосредоточенной силы $P = ql$.

Углы поворота оси балки $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ найдем, приняв вертикальные перемещения пластических шарниров δ_1 и δ_2 равными 1. Тогда будем иметь $\theta_1 = 1/x, \theta_2 = 1/(l-x), \theta_3 = 2/l$.

Составим уравнение Лагранжа

$$q \frac{1}{2} l + ql \cdot 1 - M_{пр} (\theta_1 + \theta_2) - M_{пр} (\theta_2 + \theta_3) - M_{пр} 2\theta_3 = 0.$$

Подставив вместо $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ найденные выше выражения, получим

$$q = \frac{2}{3} \frac{M_{пр}}{l} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{l-x} + \frac{6}{l} \right).$$

Положение пластического шарнира в левом пролете найдем из условия минимума q . Минимальное значение q будет соответствовать действительному предельному состоянию. Для всех остальных кинематически возможных состояний, как это было показано выше, получим $q^* > q_{пр}$.

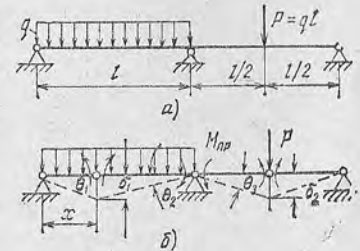


Рис. 10.18.

Следовательно, для нахождения $q_{пр}$ приравняем производную от q по x нулю. Из условия $dq/dx = 0$ получим $x = 0,414l$. Подставив найденное значение x в выражение для q , получим

$$q_{пр} = \frac{2}{3} \frac{M_{пр}}{l^2} \left(\frac{1}{0,414} + \frac{2}{0,586} + 6 \right) = 7,8856 \frac{M_{пр}}{l^2}.$$

Подобным образом решаются и другие задачи по определению предельной нагрузки для стержневой системы.

Перейдем к определению предельной нагрузки, действующей на пластину. Пусть на пластину, представляющую собой в плане многоугольник, действует сосредоточенная сила,

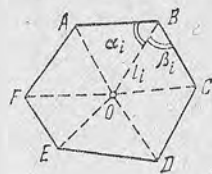


Рис. 10.19.

приложенная в точке O (рис. 10.19). Предполагаем, что пластина по кромкам свободно опирается. Несущая способность пластины исчерпывается тогда, когда по линиям, соединяющим точку O приложения силы P с вершинами многоугольника, образуются цилиндрические пластические шарниры. В предельном состоянии относительно линий OA , OB , ... будут действовать погонные изгибающие предельные моменты $m_{пр} = \sigma_T h^2/4$. При этом плоская срединная поверхность пластины превращается в пирамиду с вершиной в

точке приложения силы P .

Если через θ_i обозначить двугранный угол между гранями, примыкающими к i -му ребру пирамиды, имеющему длину l_i , то уравнение работ согласно принципу Лагранжа запишется в виде

$$P \cdot \delta = \sum m_{пр} l_i \theta_i. \quad (10.92)$$

Для двугранный угла θ_i можно записать выражение

$$\theta_i = \frac{\delta}{l_i} (\operatorname{ctg} \alpha_i + \operatorname{ctg} \beta_i). \quad (10.93)$$

Подставив (10.93) в (10.92), получим для предельной нагрузки P следующее выражение:

$$P_{пр} = m_{пр} \sum (\operatorname{ctg} \alpha_i + \operatorname{ctg} \beta_i). \quad (10.94)$$

Для квадратной плиты, нагруженной в центре, имеем

$$\alpha_i = \beta_i = 45^\circ \text{ и } \operatorname{ctg} \alpha_i = \operatorname{ctg} \beta_i = 1.$$

Тогда $P_{пр} = 4m_{пр} = \sigma_T h^2$.

Для правильного многоугольника (рис. 10.20) $\alpha_i = \beta_i = \frac{1}{2} \left(\pi - \frac{2\pi}{n} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$, поэтому $\operatorname{ctg} \alpha_i = \operatorname{ctg} \beta_i = \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$.

Тогда предельная нагрузка для пластины в форме правильного многоугольника будет равна

$$P_{пр} = 2nm_{пр} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}. \quad (10.95)$$

Предельную сосредоточенную нагрузку, действующую в центре круглой пластины, свободно опертой по контуру, получим предельным переходом из (10.95). Полагая

$n \rightarrow \infty$, имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} = \pi$, так как для малых углов $\operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \approx \frac{\pi}{n}$. Тогда

$$P_{пр} = 2\pi m_{пр}, \quad (10.96)$$

или, подставляя $m_{пр} = \sigma_T \frac{h^2}{4}$, полу-

чим $P_{пр} = \frac{\pi}{2} \sigma_T h^2$.

Предельная нагрузка для круглой пластины оказывается в $\pi/2$ раз больше, чем для квадратной.

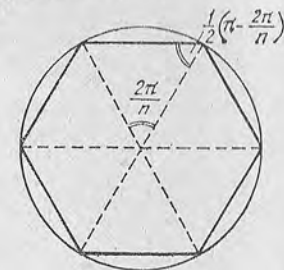


Рис. 10.20.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ И ЗАДАЧИ

1. Каков характер зависимости $\sigma - \epsilon$ при разгрузке материала?
2. Что называется условным пределом текучести $\sigma_{0,2}$?
3. Что называется наклепом материала?
4. Что называется эффектом Баушингера?
5. Какими упрощенными диаграммами $\sigma - \epsilon$ можно аппроксимировать действительную диаграмму $\sigma - \epsilon$ материала?
6. Как выглядят диаграммы $\sigma - \epsilon$ без упрочнения и с упрочнением?
7. Какие задачи решает теория пластичности?
8. Чему равен коэффициент Пуассона в пластической зоне деформаций?
9. Что понимается под шаровым тензором напряжений?
10. Как записывается девиатор напряжений?
11. Как определяется величина интенсивности напряжений σ_i ?
12. Как определяется величина интенсивности касательных напряжений τ_i ? В каком соотношении находятся σ_i и τ_i ?
13. Как интерпретируется интенсивность напряжений σ_i ?
14. Как представить тензор деформаций через шаровой тензор деформаций и девиатор деформаций?
15. Запишите выражения для шарового тензора деформаций T_{ϵ_0} и девиатора деформаций D_{ϵ} .

16. Как записываются выражения для первого и второго инвариантов девиатора деформаций?

17. Как определяется величина интенсивности деформаций ϵ_i ? Какова связь между величиной интенсивности деформаций ϵ_i и октаэдрическим сдвигом $\gamma_{\text{окт}}$?

18. Напишите зависимость между интенсивностью напряжений σ_i и интенсивностью деформаций ϵ_i в упругой области.

19. Как записывается критерий пластичности Треска — Сен-Венана?

20. Как записывается критерий пластичности Губера — Мизеса?

21. Какие три гипотезы лежат в основе теории малых упруго-пластических деформаций?

22. Что называют простым нагружением?

23. Как формулируется теорема А. А. Ильюшина о простом нагружении?

24. Какое нагружение тела называется сложным?

25. Какая деформация называется активной и какая пассивной?

26. Как записывается зависимость σ_i от ϵ_i для тела с линейным упрочнением в пластической области?

27. Какой вид имеет зависимость компонент пластических деформаций ($\epsilon_{xp}, \epsilon_{yp}, \dots, \gamma_{xpr}$) от компонент напряжения ($\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xr}$)?

28. Какие группы уравнений необходимы для решения задач теории пластичности?

29. Какие допущения принимаются при решении задачи о чистом изгибе бруса?

30. Как определяется величина изгибающего момента M_T , соответствующая началу образования пластических деформаций?

31. Как определяется величина предельного изгибающего момента $M_{пр}$, если материал бруса имеет диаграмму $\sigma - \epsilon$ без упрочнения?

32. Как определяется граница между упругой и пластической зонами (c_0) при $M_T < M < M_{пр}$?

33. Каким образом можно вычислить радиус кривизны ρ при упругопластическом чистом изгибе?

34. Как можно вычислить остаточные напряжения $\sigma_{ост}$ и остаточную кривизну $1/\rho_{ост}$ после разгрузки?

35. Как вычисляется крутящий момент $M_{кр}$, соответствующий началу пластических деформаций при кручении бруса круглого сечения?

36. Как вычисляется предельная величина крутящего момента для бруса, материал которого имеет диаграмму $\sigma - \epsilon$ без упрочнения?

37. Каким образом определяется граница (r_0) между упругим ядром и пластической зоной при $M_{кр} < M < M_{пр}$?

38. Как вычисляется относительный угол закручивания θ при упругопластическом кручении бруса?

39. Как определяются остаточные напряжения $\tau_{ост}$ и остаточный относительный угол закручивания $\theta_{ост}$ после разгрузки?

40. Какие допущения принимаются при решении задачи об упругопластической деформации толстостенной трубы, находящейся под внутренним давлением?

41. Чему равна величина внутреннего давления p_T , которому соответствует начало пластических деформаций?

42. Каким образом определяется граница (r_T) между упругой и пластической зонами в сечении толстостенной трубы при $p_n > p_T$?

43. Как вычисляется величина предельного внутреннего давления $p_{пр}$?

44. Каков характер изменения окружного напряжения σ_θ в зависимости от радиуса для упругой и пластической зон?

45. При каких допущениях решается задача о плоском деформированном состоянии?

46. Из какой системы уравнений могут быть определены компоненты напряжений в случае плоского деформированного состояния?

47. Какие дифференциальные зависимости характеризуют ассоциированный закон течения?

48. В чем заключается идея кинематического метода определения предельных нагрузок?

49. Задача. Брус (рис. 10.21) длиной 2 м, имеющий прямоугольное сечение со сторонами $b = 0,1$ м, $h = 0,2$ м, нагружен по концам изгибающими моментами $M = 0,2$ МН·м. Материал бруса — сталь с $\sigma_T = 240$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Требуется определить: 1) границу между упругой и пластической областями сечения (c_0); 2) построить эпюру нормальных напряжений σ ; 3) определить остаточные напряжения после разгрузки и построить эпюру остаточных напряжений $\sigma_{ост}$; 4) определить остаточную кривизну оси бруса и величину остаточного прогиба в его середине.



Рис. 10.21.

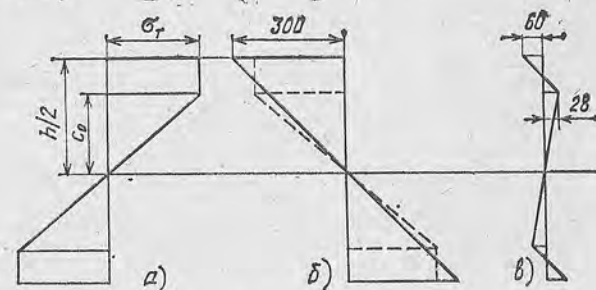


Рис. 10.22.

Решение. 1. Вычисляем момент, соответствующий началу пластических деформаций M_T :

$$M_T = \sigma_T W = \sigma_T \frac{bh^2}{6} = 240 \frac{0,1 \cdot (0,2)^2}{6} = 0,16 \text{ МН} \cdot \text{м},$$

$$M_T = 0,16 \text{ МН} \cdot \text{м}.$$

2. Определяем величину c_0 по формуле

$$c_0 = \frac{h}{2} \sqrt{3 - 2 \frac{M}{M_T}} = 0,1 \sqrt{3 - 2 \frac{0,2}{0,16}} = 0,0705 \text{ м}.$$

3. Строим эпюру нормальных напряжений σ по высоте сечения (рис. 10.22, а).

4. Определяем максимальные напряжения при разгрузке $\sigma_{\max}$ и строим эпюру разгрузочных напряжений (рис. 10.22, б):

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{0,2}{\frac{2}{3} \cdot 10^{-3}} = 300 \text{ МПа.}$$

5. Вычисляем величины остаточных напряжений в характерных точках:

а) в крайних волокнах

$$\sigma_{\text{ост}} = \sigma_{\max} - \sigma_T = 300 - 240 = 60 \text{ МПа;}$$

б) на границе упругой области

$$\sigma_{\text{ост}} = \sigma_T - \sigma_{\max} \cdot \frac{c_0}{h/2} = 240 - 300 \cdot 0,705 = 28 \text{ МПа.}$$

6. Строим эпюру остаточных напряжений $\sigma_{\text{ост}}$ (рис. 10.22, в).

7. Определяем остаточную кривизну бруса $1/\rho_{\text{ост}}$ по формуле

$$\frac{1}{\rho_{\text{ост}}} = \frac{M_T}{EI_z \sqrt{3 - 2M/M_T}} - \frac{M}{EI_z},$$

где

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,1(0,2)^3}{12} = \frac{2}{3} \cdot 10^{-4} \text{ м}^4,$$

$$\frac{1}{\rho_{\text{ост}}} = \frac{0,16}{2 \cdot 10^5 \frac{2}{3} \cdot 10^{-4} \sqrt{3 - 2 \frac{0,2}{0,16}}} - \frac{0,2}{2 \cdot 10^5 \frac{2}{3} \cdot 10^{-4}} = 2 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{м}}.$$

8. Определяем максимальный остаточный прогиб в среднем сечении бруса $f_{\text{ост}}$.

Ось представляет собой дугу окружности с центральным углом $2\theta_{\text{ост}} = l/\rho_{\text{ост}}$ (рис. 10.23). Из рисунка видно, что $f_{\text{ост}} = \rho(1 - \cos \theta_{\text{ост}})$. Принимая во внимание, что

$$1 - \cos \theta_{\text{ост}} = 2 \sin^2 \frac{\theta_{\text{ост}}}{2} \approx \frac{\theta_{\text{ост}}^2}{2},$$

получим

$$f_{\text{ост}} = \rho_{\text{ост}} \frac{\theta_{\text{ост}}^2}{2} = \rho_{\text{ост}} \frac{(l/2\rho_{\text{ост}})^2}{2} = \frac{l^2}{8\rho_{\text{ост}}},$$

$$f_{\text{ост}} = \frac{2^2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{8} = 10^{-3} \text{ м} = 1 \text{ мм.}$$

50. Задача. Брус длиной 3 м с прямоугольным поперечным сечением $b \times h = 0,2 \times 0,4$ м подвергается действию изгибающего момента M . Материал бруса — сталь с пределом текучести $\sigma_T = 240$ МПа. Определить величину изгибающего момента, при котором максимальные значения остаточных напряжений не превосходили бы 30 МПа, а также величину остаточного прогиба.

Ответ. $M = 1,44$ МН·м, $f_{\text{ост}} = 0,2$ мм.

51. Задача. Подобрать размеры бруса прямоугольного сечения ($h = 2b$) из расчета по предельному состоянию, если действующий изгибающий момент $M = 1$ МН·м, запас прочности $n = 2$, $\sigma_T = 240$ МПа. Вычислить максимальные напряжения, соответствующие заданному моменту M .

Ответ. $b = 0,203$ м, $h = 0,406$ м, $\sigma_{\max} = 171$ МПа.

52. Задача. Брус круглого сечения диаметром $d = 0,2$ м подвергается действию скручивающего момента $M_K = 0,2$ МН·м. Материал бруса — сталь с $\tau_T = \sigma_T/2 = 120$ МПа, $G = 8 \cdot 10^4$ МПа. Требуется определить величины: 1) радиуса r_0 упругой зоны сечения; 2) максимальных остаточных касательных напряжений после разгрузки $\tau_{\text{ост}}^{\max}$; 3) остаточного угла закручивания $\theta_{\text{ост}}$.

Ответ. $r_0 = 0,645 d/2 = 0,0645$ м; $\tau_{\text{ост}}^{\max} = 7$ МПа, $\theta_{\text{ост}} = 1,5 \cdot 10^{-4}$ рад/м.

53. Задача. Стальной брус с $E = 2 \times 10^5$ МПа, $\sigma_T = 240$ МПа прямоугольного сечения ($b = 0,1$ м, $h = 0,15$ м) имеет длину $l = 4$ м. Определить величину изгибающего момента M после разгрузки которого остаточный прогиб $f_{\text{ост}}$ в центральном сечении бруса составит 0,01 м.

Указание. 1) Величину остаточного прогиба $f_{\text{ост}}$ можно определить из уравнения (10.57), которое после преобразований будет иметь следующий вид:

$$f_{\text{ост}} = \frac{M_T l^2}{8EI_z} \left(\frac{1}{\sqrt{3 - 2M/M_T}} - \frac{M}{M_T} \right). \quad (*)$$

2) Уравнение (*) может быть представлено после преобразований в виде полного кубического уравнения, однако проще решать это уравнение, не освобождаясь от радикала, методом последовательных приближений или графически.

Ответ. $M = 0,1175$ МН·м.

54. Задача. Толстостенная труба с внутренним радиусом, равным a , и наружным $b = 2a$ находится под действием внутреннего давления $p_b = k = \sigma_T/2$. Требуется определить величины: 1) давления, при котором начинаются пластические деформации p_T ; 2) предельного давления $p_{\text{пр}}$; 3) радиуса r_T в долях радиуса a .

Указание. При определении r_T уравнение (10.77) целесообразно решать методом последовательных приближений.

Ответ. 1) $p_T = \frac{3}{8} \sigma_T$; 2) $p_{\text{пр}} = 0,6931 \sigma_T$; 3) $r_T = 1,2a$.

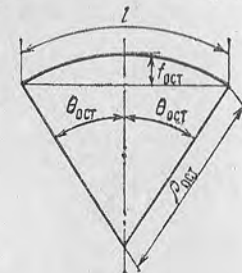


Рис. 10.23.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести.— М.: Высшая школа, 1968.— 512 с.
2. Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике.— М.: Гостехиздат, 1949.— 784 с.
3. Власов В. З. Строительная механика тонких упругих пластинок.— ПММ, 1946, т. X, № 1, с. 173—192.
4. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки.— М.: Гостехиздат, 1956.— 419 с.
5. Гвоздев А. А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия.— М.: Стройиздат, 1949.— 280 с.
6. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике/Пер. с англ.— М.: Мир, 1975.— 541 с.
7. Ильюшин А. А. Пластичность.— М.: Гостехиздат, 1948.— 376 с.
8. Канторович Л. В. Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла.— Изв. АН СССР, ОМЭН, 1933, № 5, с. 647—652.
9. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа.— М.: Физматгиз, 1962.— 528 с.
10. Киселев В. А. Плоская задача теории упругости.— М.: Высшая школа, 1976.— 151 с.
11. Клейко И. А. Теория пластического течения.— М.: МГУ, 1978.— 75 с.
12. Ключников В. Д. Математическая теория пластичности.— М.: МГУ, 1979.— 206 с.
13. Колмогоров В. Л. и др. Пластичность и разрушение.— М.: Металлургия, 1977.— 336 с.
14. Лейбензон Л. С. Краткий курс теории упругости.— М.: Гостехиздат, 1942.— 304 с.
15. Лейбензон Л. С. Собрание трудов, т. I. Теория упругости.— М.: АН СССР, 1951.— 468 с.
16. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки.— М.: Гостехиздат, 1942.— 352 с.
17. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести.— М.: Машиностроение, 1968.— 400 с.
18. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М.: АН СССР, 1935.— 450 с.
19. Новожилов В. В. Теория упругости.— М.: Судпромгиз, 1958.— 370 с.
20. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек.— М.: Судпромгиз, 1951.— 344 с.
21. Папкович П. Ф. Строительная механика корабля, т. I, ч. 2.— Л.: Судпромгиз, 1941.
22. Постнов В. А., Хархурим И. Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций.— Л.: Судостроение, 1974.— 342 с.

23. Постнов В. А. Численные методы расчета судовых конструкций.— Л.: Судостроение, 1977.— 279 с.
24. Работнов Ю. Н. Сопротивление материалов.— М.: Физматгиз, 1962.— 455 с.
25. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела.— М.: Наука, 1979.
26. Соколовский В. В. Теория пластичности.— М.: Высшая школа, 1969.— 605 с.
27. Тимошенко С. П. Курс теории упругости, ч. I, 1914.— 239 с.
28. Тимошенко С. П. Теория упругости.— М.: Гостехиздат, 1934.— 451 с.
29. Тимошенко С. П., Вольмирский-Кригер С. П. Пластинки и оболочки.— М.: Наука, 1966.— 635 с.
30. Филоненко-Бородич М. М. Теория упругости.— М.: Гостехиздат, 1947.— 300 с.

Олег Иванович Теребушко

ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
И ПЛАСТИЧНОСТИ

Редакторы П. И. Перлин, И. М. Овчинникова
Технический редактор В. Н. Кондакова
Корректоры Г. В. Подвольская, И. Я. Кришталь

ИБ № 12151

Сдано в набор 09.02.84. Подписано к печати 14.08.84.
Формат 84×108¹/₃₂. Бумага тип. № 2. Обыкновенная
гарнитура. Высокая печать. Усл. печ. л. 16,8. Усл.
кр.-отт. 16,8. Уч.-изд. л. 18,2. Тираж 16 000 экз.
Заказ № 62. Цена 85 коп.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»
630077 Новосибирск-77, Станиславского, 25