

**Министерство образования и науки Украины
Одесский государственный политехнический
университет**

Н.Г. Сурьянинов, А.Ф. Дащенко, П.А. Белоус

Теоретические основы динамики машин

Учебное пособие

**Рекомендовано Министерством образования
и науки Украины в качестве учебного пособия
для студентов механических специальностей**

Одесса ОГПУ 2000

Глава 1

Основные понятия и определения

1.1. Способы образования механических моделей с конечным числом степеней свободы

Число степеней свободы механической системы называется число независимых координат, однозначно определяющих положение всех её материальных точек. В задачах динамики положение точек системы меняется с течением времени, следовательно, координаты точек являются функциями времени.

Основная задача динамики состоит в определении этих функций или, как говорят, в определении движения системы. После этого по известным формулам сопротивления материалов определяются внутренние усилия, напряжения и деформации в элементах колеблющегося тела.

Любая реальная механическая система состоит из бесконечного числа материальных точек, связи между которыми не являются абсолютно жёсткими, поэтому число степеней свободы реальной механической системы бесконечно велико. Решение задачи о колебаниях таких систем представляет собой весьма сложную проблему. Получить точное аналитическое решение, как правило, невозможно, а часто и нецелесообразно, поэтому при переходе от реального объекта исследования к расчётной схеме приходится вводить упрощения, связанные с ограничением числа степеней свободы системы.

Можно указать *три основных способа* образования механических моделей с конечным числом степеней свободы системы.

Первый способ состоит в том, что относительно менее массивные части системы полагаются совсем невесомыми элементами (при этом они могут считаться как жёсткими, так и деформируемыми), а наиболее

массивные части принимаются за абсолютно твёрдые тела, которые, в случае их сравнительно небольших размеров, считаются материальными точками.

Например, пружина (рис. 1,а) и балка (рис. 1,б) считаются безмассовыми и упругими, а полосы (рис. 1,в) - безмассовыми и жёсткими. В качестве обобщённой координаты приняты горизонтальное (рис. 1,а) и вертикальное (рис. 1,б,в) перемещения. Все указанные модели представляют собой системы с одной степенью свободы.

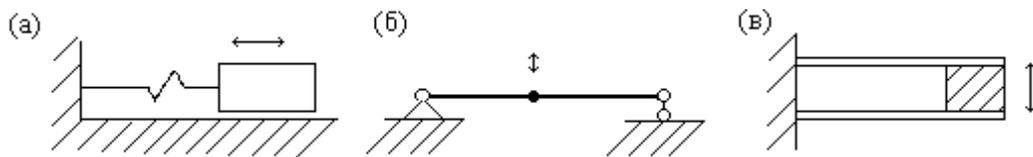


Рис. 1

Аналогичным образом можно образовывать модели с любым конечным числом степеней свободы.

Второй способ состоит в том, что распределённые по всему объёму системы свойства податливости сосредотачиваются в конечном числе точек или линий. При этом система представляется в виде совокупности упруго-сочленённых жёстких элементов.

Например, упругая балка с непрерывно распределённой массой может быть приближённо заменена рядом жёстких звеньев, соединённых упругими шарнирами, количество которых определяется требуемым уровнем точности решения задачи (рис.2).

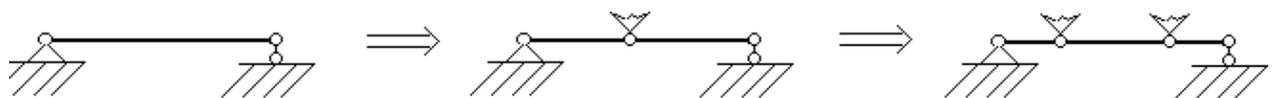


Рис. 2

Третий способ основан на некоторых предположениях об изменении конфигурации системы в процессе колебаний.

Например, для системы грузов, соединённых пружинами (рис. 3) можно принять, что отношение между перемещениями $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ неизменны во времени, а отношение $x_2/x_1 = x_3/x_1 = \beta$ заранее назначается.

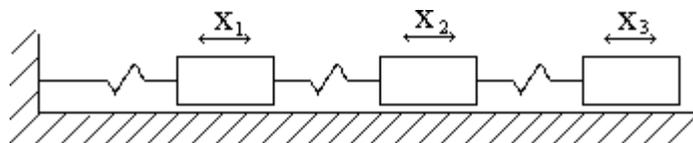


Рис. 3

В результате движение системы полностью описывается одной функцией времени, например $x_1(t)$, через которую выражаются перемещения всех точек системы. Таким образом, реальный объект приведён к механической модели с одной степенью свободы.

По этому же способу для балки на двух опорах можно принять, что форма изогнутой оси остается неизменной в любой момент, а изменяется только её масштаб. Тогда вертикальное перемещение точек балки при её колебаниях, представляющее собой функцию двух переменных, можно представить в виде

$$y(x, t) = q(t) \cdot f(x),$$

где $f(x)$ -постоянная функция формы, а $q(t)$ -переменная функция времени, являющаяся единственной неизвестной величиной задачи. Одна и та же реальная механическая система может быть приведена к модели с одной или несколькими степенями свободы любым из трёх перечисленных способов.

1.2. Классификация сил, действующих при колебаниях

При определённых допущениях все разнообразные по своей природе внешние и внутренние силы, действующие в колеблющейся системе, можно разделить на несколько характерных групп.

Обобщенные вынуждающие (возмущающие) силы - это внешние силы, являющиеся заданными функциями времени, не зависящие от движения системы, но влияющие на него. Причины возникновения этих сил весьма разнообразны. Например, при работе электродвигателя, установленного на балке или на каком-либо фундаменте, вследствие неуравновешенности ротора возникает центробежная сила инерции, вертикальная составляющая которой вызывает колебания опорной конструкции. Этот вид возбуждения колебаний называется *инерционным*. Возможны другие причины возникновения вынуждающих сил, например, периодические изменения давления в цилиндрах двигателей внутреннего сгорания или периодические изменения сил притяжения электромагнитов, питаемых источником переменного тока.

Все перечисленные случаи представляют собой силовое возбуждение вынужденных колебаний. В некоторых случаях возбуждение колебаний задаётся кинематически, например автомобиль, движущийся по неровной дороге. Такое возбуждение всегда можно заменить эквивалентным силовым возбуждением.

Весьма разнообразны законы изменения возмущающих сил во времени. Наиболее часто встречаются периодические вынуждающие силы. Особую роль здесь играет гармоническая вынуждающая сила, т.е. сила, которая изменяется во времени по закону синуса или косинуса. Такая сила возникает при работе машин с равномерно вращающимися роторами. Машин с кривошипно-шатунными механизмами также вызывают появление периодической возмущающей силы, которая, однако, не является гармонической.

Возможны также колебания, обусловленные действием непериодических вынуждающих сил, представляющих собой случайные функции времени - случайные процессы. К последним относится, например,

уже упоминавшееся воздействие неровной дороги на движущийся автомобиль.

Обобщенные позиционные силы - это силы, зависящие от положения точек системы, т.е. от обобщенных координат. Особое значение здесь имеют восстанавливающие силы, которые возникают при отклонении системы от положения равновесия. Эти силы обуславливают способность системы совершать свободные колебания. Основным типом восстанавливающих сил являются *силы упругости*. В простейшем случае линейно деформируемой системы восстанавливающая сила упругости пропорциональна отклонению системы. Свойства упругих связей при этом определяются *коэффициентом жесткости*, который представляет собой обобщенную силу, способную вызвать обобщенное единичное перемещение. Возможны случаи, когда между силой и отклонением существует нелинейная зависимость. При этом упругие свойства связей невозможно определить одним коэффициентом и приходится использовать так называемую *упругую характеристику*, уравнение которой $F=F(x)$ иллюстрируется графиком в координатах x, F . Упругая характеристика строится расчетным путём или экспериментально.

Наряду с силами упругости восстанавливающими свойствами обладают также *сила плавучести* и в определенных случаях *сила тяжести*.

Обобщенные силы трения зависят от обобщенных скоростей и направлены противоположно движению. Эти силы совершают необратимую работу, что приводит к диссипации (рассеянию) механической энергии, поэтому иногда их называют *диссипативными силами*. Обычно силы трения препятствуют движению; исключение составляют автоколебательные системы. Диссипативные свойства описываются при помощи *характеристик трения*, которые представляют собой графические зависимости вида $R = k\dot{x}$. В ряде случаев характеристика трения может быть нелинейной или разрывной.

Силы смешанного характера могут развиваться в сложных механических системах. Характерной особенностью таких сил является принципиальная невозможность их разложения на вышеперечисленные составляющие типа $F(t)$, $F(x)$, $F(\dot{x})$. В качестве примера рассмотрим параметрическую систему - маятник, на который действует вертикальная сила $F = F_0 \sin \omega t$ (рис. 4). Момент внешних сил относительно оси шарнира равен сумме моментов силы веса mg и силы F :

$$M = -(mg + F_0 \sin \omega t)\ell \sin \varphi.$$

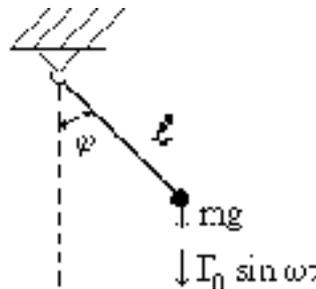


Рис. 4

Этот восстанавливающий момент M зависит не только от смещения φ , но и от времени t , причём выражение $M(\varphi, t)$ нельзя представить в виде суммы $M(\varphi) + M(t)$, т.е. невозможно выделить восстанавливающую и возмущающую составляющие общего момента. В автоколебательных системах возможно действие сил вида $F = F(x, \dot{x})$, также неразложимых на элементарные составляющие типа $F(x)$ и $F(\dot{x})$.

1.3. Классификация колебаний

Все многообразие окружающих нас колебательных процессов можно классифицировать по ряду характерных признаков.

В соответствии с законом, по которому величина, характеризующая колебательный процесс, изменяется во времени, различают *периодические* и *непериодические* колебания.

Периодические колебания подчиняются закону:

$$f(t + T) = f(t),$$

где величина T называется *периодом* колебаний. Кроме того, имеется широкий промежуточный класс *почти периодических колебаний*, для которых

$$|\varphi(t + \tau) - \varphi(t)| \leq \varepsilon,$$

где τ - почти период, а ε - сколь угодно малая величина.

Простейшими и в то же время наиболее часто встречающимися являются *гармонические колебания* (рис.5), которые описываются уравнением

$$y = A \sin(\omega t + \varphi),$$

где A - амплитуда колебаний; $\omega = \frac{2\pi}{T}$ - круговая (или циклическая, или угловая) частота; $\omega t + \varphi$ - фаза колебаний; φ - сдвиг фазы; величина, обратная периоду колебаний, называется *секундной частотой* и измеряется в герцах:

$$f = \frac{1}{T}.$$

1 Гц соответствует одному циклу изменения за 1 с.

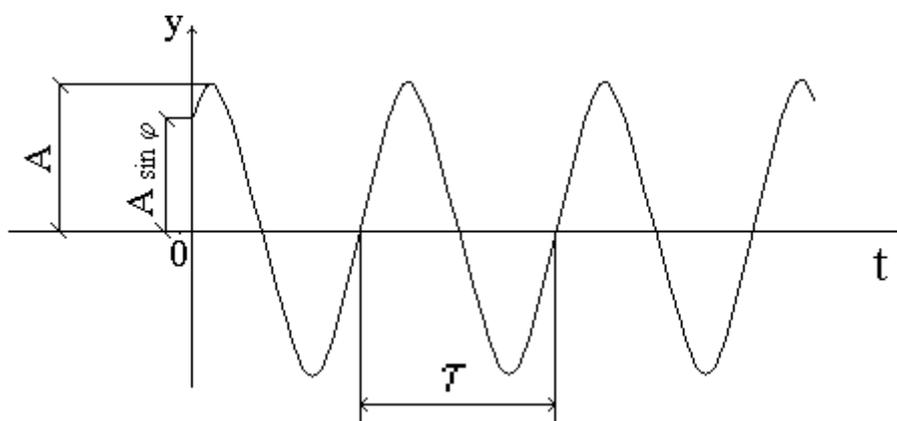


Рис. 5

Часто встречаются периодические, но негармонические колебания (рис. 6). Их всегда можно рассматривать как сумму простых гармонических колебаний. Процесс разложения периодических негармонических колебаний на простые гармонические составляющие (гармоники) называется *гармоническим анализом* и выполняется при помощи рядов Фурье.

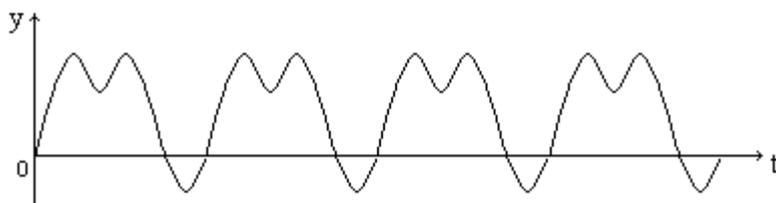


Рис. 6

Кроме того, часто встречаются следующие виды колебаний: *затухающие* (рис. 7,а), *нарастающие* (рис. 7,б), *биения* (рис. 7,в).

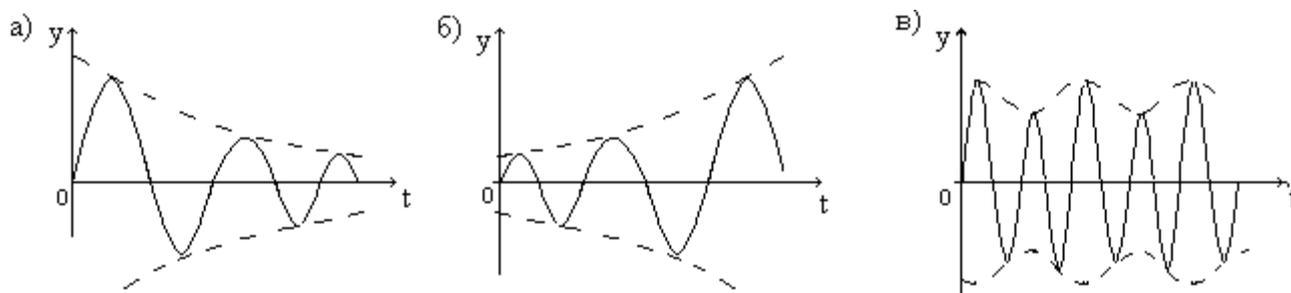


Рис. 7

Все рассмотренные (рис.7) виды колебаний происходят с постоянной частотой при монотонном изменении амплитуды. Возможны также колебания с переменной частотой и постоянной амплитудой или переменными частотой и амплитудой.

Колебания могут происходить относительно нулевого отсчетного уровня, смещённого и переменного.

По способу возбуждения различают 4 типа колебаний: свободные, вынужденные, параметрические и автоколебания.

Свободными (или собственными) называются колебания, возникающие в изолированной системе вследствие внешнего возбуждения, вызывающего у точек системы начальное отклонение от положения равновесия, и продолжающиеся затем благодаря наличию упругих внутренних сил, восстанавливающих равновесие.

Вынужденными называются колебания упругой системы, происходящие при действии на неё в течение всего процесса колебаний внешних периодически изменяющихся вынуждающих сил.

Параметрическими называются такие колебания упругой системы, в процессе которых периодически изменяются физические параметры системы - величины, характеризующие её массу или жесткость.

Автоколебаниями упругой системы называются незатухающие колебания, поддерживаемые такими внешними силами, характер взаимодействия которых определяется самим колебательным процессом.

Классификацию колебаний проводят также *по виду деформации*, возникающей в элементах колеблющейся системы. В частности, применительно к стержневым системам различают *продольные, поперечные (изгибные) и крутильные* колебания.

1.4. Методы получения дифференциальных уравнений движения

Можно выделить 3 способа составления уравнений движения. Наиболее общей формой таких уравнений являются **уравнения Лагранжа**:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial x_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

где K - кинематическая энергия системы, t - время; x_i - обобщённые координаты; \dot{x}_i - обобщённые скорости; Q_i - обобщённая сила; n - число степеней свободы системы.

Для системы с конечным числом степеней свободы из уравнений (1) можно получить важные соотношения частотного характера, которые удобны при исследовании колебательных систем определенных типов.

Так, в задачах о свободных колебаниях упругих систем без трения обобщённые силы Q_i выражаются через потенциальную энергию системы Π в виде

$$Q_i = - \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{x}_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

При этом уравнения Лагранжа принимают вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial x_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

Прямой способ. По этому способу из системы (рис. 8,а) мысленно выделяются сосредоточенные массы, и каждая из них рассматривается как свободная материальная точка, находящаяся под действием позиционных восстанавливающих сил, которые выражаются через выбранные обобщённые координаты (рис. 8,б); для каждой точки записывается соответствующее дифференциальное уравнение движения.

Обратный способ. Здесь после отделения сосредоточенных масс рассматривается оставшаяся безынерционная система жёстких и упругих связей (так называемый безмассовый скелет), которая находится под действием кинетических реакций (сил инерции) отделённых частей системы, причём эти силы инерции выражаются через обобщённые ускорения (рис. 8,в). Для безмассового (безынерционного) скелета системы формируются статические соотношения.

При анализе свободных колебаний некоторых консервативных систем с одной степенью свободы удобно применять **энергетический способ**, который основан на законе сохранения энергии, согласно которому, сумма кинетической и потенциальной энергий системы в процессе колебаний остается неизменной.

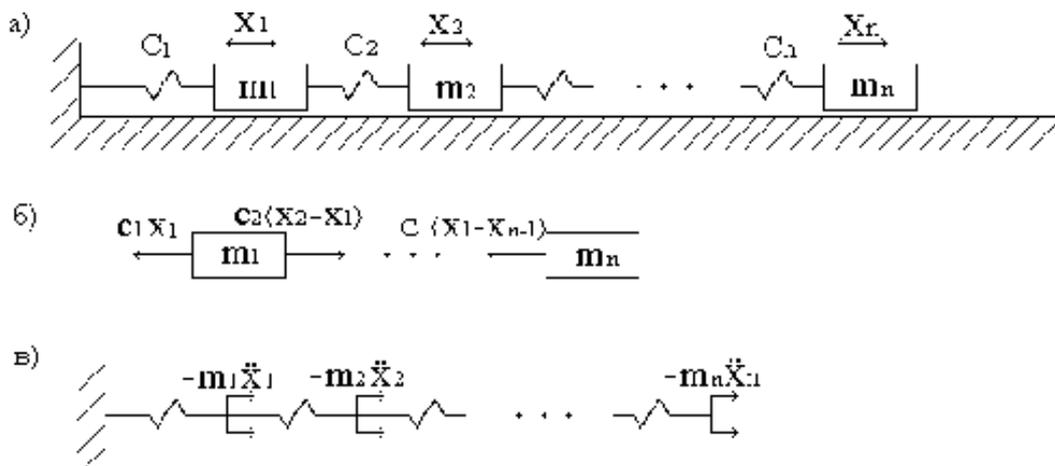


Рис. 8

Глава 2

Свободные колебания

2.1. Общие сведения о свободных колебаниях

Прежде чем перейти к строгому математическому описанию поведения различных систем при свободных колебаниях, остановимся подробно на природе их возникновения.

Известно, что в ряде случаев тело, получившее некоторое начальное возмущение, после удаления причины этого возмущения продолжает совершать колебания. Эти свободные колебания играют важнейшую роль не только в плане проверки системы на резонанс, т.е. на выявление совпадения одной из собственных частот колебаний с частотой действующих на систему постоянно вибрационных нагрузок. Дело в том, что поведение системы при свободных колебаниях характеризует её "динамическую индивидуальность", которая определяет поведение системы при всех других условиях.

Рассмотрим некоторые примеры возникновения свободных колебаний. После того как по струне рояля ударяет один из молоточков, струна некоторое время продолжает самостоятельно совершать колебания - свободные колебания. Это становится возможным, во-первых, потому, что струна имеет массу и при движении накапливает кинетическую энергию, а во-вторых, потому, что при отклонении от положения равновесия струна накапливает потенциальную энергию .

Точно так же обычный маятник может совершать колебания благодаря тому, что, во-первых, его гиря обладает массой и, во-вторых, при подъёме гири относительно своего низшего положения она накапливает потенциальную энергию.

Аналогично приведенным примерам корабли, летательные аппараты, здания, машины, люди и вообще все тела могут накапливать энергию за счёт

изменения формы. Так как все тела обладают ещё и массой, то после тех или иных начальных толчков они могут совершать свободные колебания.

Идеальным объектом исследования свободных колебаний может служить подвешенная за один конец велосипедная цепь. Пусть свободно висящая цепь первоначально находится в состоянии покоя. Свободные колебания можно вызвать, если отклонить цепь каким-либо образом, а затем отпустить или резко её ударить (но так, чтобы боковое перемещение любой точки цепи было малым по сравнению с длиной цепи). При этом можно наблюдать следующее:

1. Развитие движения во времени зависит от того, как оно началось.
2. Движение постепенно затухает.
3. При своем движении цепь не имеет какой-либо определённой формы; с течением времени форма цепи изменяется, однако в конце движения колебания часто характеризуются более или менее отчетливой формой.
4. Невозможно указать "частоту" колебаний, но с течением времени движение может принять определённую частоту.

Кажущийся хаотический характер колебаний можно упорядочить, если надлежащим образом задать *начальные условия* движения. В этом случае удаётся получить колебания цепи с неизменной формой и определённой частотой. Проще всего этого можно добиться следующим образом. Подвесим цепь к кулисному механизму (рис. 9).

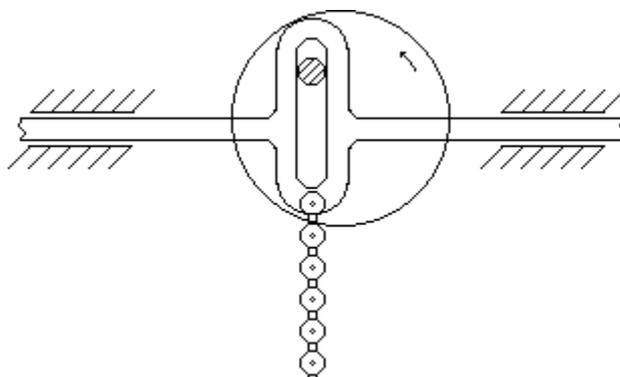


Рис. 9

При вращении кривошипа точка подвеса перемещается в горизонтальном направлении по синусоидальному (т.е. гармоническому) закону. Если при этом регулировать скорость двигателя, приводящего механизм в движение, то можно изменять частоту колебаний точки подвеса. При очень низких частотах цепь будет просто перемещаться из стороны в сторону, сохраняя более или менее вертикальное положение. Однако при возрастании частоты наступает момент, когда цепь начинает интенсивно раскачиваться с частотой, равной частоте возбуждения (рис. 10,а). Эти колебания не являются свободными, так как цепь находится под действием вибрационной нагрузки. Но если внезапно остановить двигатель, т.е. удалить внешнюю нагрузку, то последующие колебания будут свободными и при этом совершенно не такими, как при случайно заданных начальных условиях. Эти колебания будут затухать, но всё время будут сохраняться форма и частота колебаний цепи. Иначе говоря, характер движения с течением времени остаётся неизменным. Можно показать, что существует целый ряд частот начального возбуждения, для каждой из которых характер движения будет иным, но также неизменным во времени. Так, при постепенном увеличении частоты колебаний механизма можно возбудить колебания, во время которых цепь принимает форму, показанную на рис. 10,б.

После резкой остановки точки подвеса такие колебания постепенно затухают, сохраняя при этом свою частоту и форму. При еще более высоких частотах можно получить другие формы колебаний (рис. 10,в,г).

Таким образом, цепь обладает рядом форм свободных колебаний, которые называются *собственными формами*. Каждой собственной форме соответствуют определённая частота и скорость затухания колебаний.

Собственные частоты системы (разумеется, любой системы, а не только подвешенной цепи), её собственные формы и скорости затухания

являются индивидуальными характеристиками системы; они не связаны ни с какими внешними воздействиями.

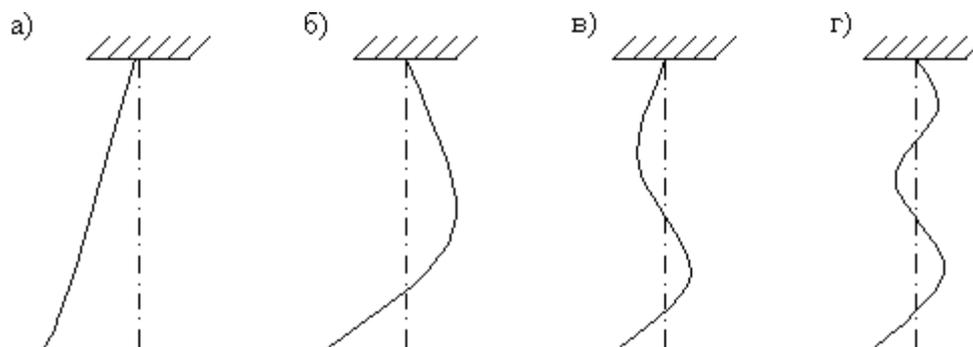


Рис. 10

Экспериментальные исследования показывают, что увеличение массы системы приводит к снижению, а увеличение жёсткости - к возрастанию всех её собственных частот. При этом различные частоты изменяются в разной степени.

Собственные формы колебаний системы обладают следующими свойствами: любая возможная конфигурация системы может быть представлена в виде суперпозиции (наложения) некоторого числа таких конфигураций, каждая из которых соответствует одной собственной форме колебаний. Таким образом, если задать системе некоторую статическую деформацию, а затем освободить систему, то возникнут свободные колебания по всем соответствующим формам; каждое из таких колебаний будет происходить с соответствующей собственной частотой независимо от остальных движений. Любая комбинация двух собственных форм колебаний также является собственной формой.

Теперь перейдём к рассмотрению такой особенности свободных колебаний, как их затухание.

Эффект затухания колебаний объясняется наличием трения; иногда его называют *демпфированием*. Звук колокола слышен в течение длительного времени после удара, так как нет значительных сил трения,

которые привели бы к рассеянию механической энергии за счёт её перехода в тепловую энергию, а рассеяние энергии за счёт излучения звуковых волн происходит весьма медленно. С другой стороны, если раскачать кузов автомобиля, а затем отпустить его, то колебания быстро затухнут. Это объясняется действием специально установленных демпферов.

Рассеяние энергии имеет место в любой колебательной системе. Известно, например, что при вибрациях самолёта часть энергии рассеивается в панелях обшивки за счёт трения в заклёпочных соединениях. Значительным демпфированием должны обладать конструкции зданий, что очень важно с точки зрения поведения здания при землетрясении.

Иногда, если это особенно желательно, можно искусственно вводить трение; так, например, на автомобилях устанавливаются демпферы колебаний. Прибор, стрелка которого безостановочно колеблется около положения, соответствующего истинному показанию, доставляет большое неудобство в работе. Поэтому, чтобы стрелка пришла в это положение достаточно быстро, вводится демпфирование. Чрезмерно сильное трение является столь же вредным, как и недостаточное трение, поскольку в этом случае стрелка перемещается в положение отсчёта слишком медленно.

Существует много способов искусственного введения трения в систему. Это может быть осуществлено, например, электрическим способом, но чаще используются чисто механические методы демпфирования. Перечислим основные из них.

1. *Вязкое трение в жидкости.* Простейшим примером является гидравлический демпфер, который состоит из поршня, перемещающегося в цилиндре; трение возникает при перетекании жидкости (часто вместо жидкости используется воздух) в тонком зазоре между поршнем и стенкой цилиндра. В некоторых других устройствах используются лопасти, движущиеся в масле или силиконовой жидкости.

2. *Материалы с высоким уровнем рассеяния энергии.* При ударе по "колоколу", изготовленному из специального сплава меди и марганца, вместо звона слышится глухой стук. В амортизирующих опорах часто используют резину; это связано с её высокими демпфирующими характеристиками. Лопатки компрессоров иногда изготавливают из волокнистых полимерных материалов, обладающих значительным внутренним трением.
3. *Демпфирующие покрытия панелей.* Существуют такие материалы, нанесение которых на поверхность металлических панелей приводит к тому, что при ударе по панели вместо характерного для металлов звука слышится глухой стук.
4. *Сухое трение, возникающее при взаимном скольжении поверхностей в процессе вибрации.* Этот способ используется, например, в некоторых компрессорах газовых турбин, где осуществлено шарнирное крепление лопаток к ротору. Кроме того, сухое трение возникает, когда в некоторые пружины с целью демпфирования вставляются пучки металлической проволоки.
5. *Слоистые конструкции.* Панели, состоящие из тонких металлических листов, разделённых тонким слоем вязкоупругого материала, обладают хорошими звукоизолирующими свойствами.
6. *Пенопластовые или резиновые прокладки.* Например, электрические лампочки, упакованные в такие прокладки, можно без всякого риска бросать с большой высоты на твёрдый пол.

Таким образом, существуют два вида демпфирования: искусственно вводимое и связанное с естественными силами трения. Если искусственно вводимое трение чаще всего допускает теоретическую оценку, то естественное трение, как правило, не поддается расчёту и должно определяться экспериментально.

Появление трения или его увеличение не приводит к заметным изменениям частоты и формы собственных колебаний. Поэтому исследование свободных колебаний вначале удобно проводить без учёта трения.

2.2. Свободные колебания системы с одной степенью свободы без трения

В большинстве упругих систем при достаточно малых перемещениях сила упругости линейно зависит от перемещения x . Если начало отсчёта смещения x выбрать так, что при $x=0$: $F=0$, то для линейной системы $F = cx$, где c - коэффициент жесткости системы.

Дифференциальное уравнение движения системы с одной степенью свободы (рис. 11,а) таково:

$$m\ddot{x} + cx = 0. \quad (4)$$

Вид дифференциального уравнения не меняется при действии на систему постоянных сил (например, сил тяжести), если смещение тела отсчитывать от положения его статического равновесия.

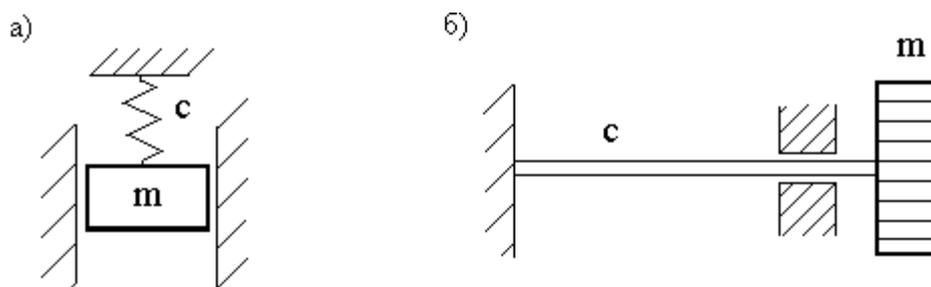


Рис. 11

Действительно, уравнение движения тела массой m (рис.11,а), находящегося под действием силы тяжести и совершающего свободные колебания, имеет вид

$$m\ddot{x} = mg - c(x + f_{ст}), \quad (5)$$

где $f_{ct} = \frac{mg}{c}$ - удлинение пружины от силы тяжести груза.

Следовательно, слагаемые mg и cf_{ct} в уравнении (5) взаимно уничтожаются, и уравнение (5) совпадает с (4).

Уравнение движения одномассовой системы, совершающей крутильные свободные колебания (рис. 11,б), записывается аналогично:

$$J\ddot{\varphi} + c\varphi = 0,$$

где φ - угол поворота тела; J - момент инерции массы m относительно продольной оси вала; c - крутильная жесткость упругой связи.

Решение уравнения (4) имеет вид

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \quad (6)$$

где $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ - угловая частота колебаний, или собственная частота; C_1

и C_2 - постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Обозначая смещение и скорость в начальный момент времени $t_0=0$ через x_0 и \dot{x}_0 соответственно, после подстановки в (6) находим

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega}. \quad (7)$$

Выражение (6) можно записать иначе:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (8)$$

где $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2}$,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{C_1}{C_2} = \frac{\omega x_0}{\dot{x}_0}.$$

Таким образом, движение груза при свободных колебаниях одномассовой системы без трения описывается синусоидальным законом с амплитудой колебаний A , периодом τ и начальной фазой φ (рис.12).

Период колебаний τ определяется из условия:

$$\omega\tau = 2\pi,$$

откуда

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}. \quad (9)$$

Число колебаний в единицу времени (техническая частота, измеряемая в герцах):

$$\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (10)$$

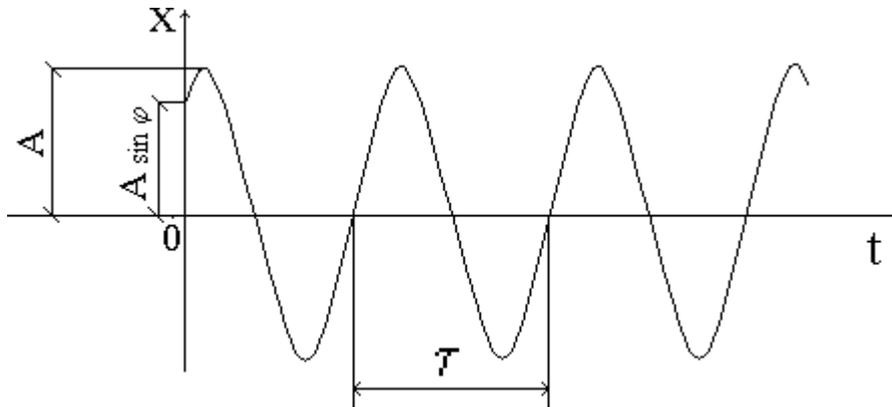


Рис. 12

В практическом отношении иногда оказывается удобным связать частоту и период колебаний со статической деформацией $f_{ст}$ упругой связи, вызванной силой, равной весу груза, $f_{ст} = \frac{mg}{c}$.

При этом справедливы формулы:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{f_{ст}}}; \quad \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{f_{ст}}}; \quad \tau = 2\pi \sqrt{\frac{f_{ст}}{g}}. \quad (11)$$

Так как величина $f_{ст}$ введена в (11) формально, то очевидна их справедливость независимо от того, совпадает или не совпадает направление силы тяжести с направлением движения груза.

Для анализа свободных колебаний удобно использовать изображение закона движения системы на фазовой плоскости, или так называемый фазовый портрет. *Фазовым портретом движения* называется графическое изображение зависимости скорости движения от смещения. Для получения фазового портрета продифференцируем выражение (8) по t :

$$\dot{x} = A\omega \cos(\omega t + \varphi) \quad (12)$$

Уравнение движения (8) и выражение (12) представляют собой уравнение фазовой траектории в параметрической форме. Исключая параметр $\omega t + \varphi$, получим

$$x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega^2} = A^2. \quad (13)$$

Уравнение (13) является уравнением эллипса с полуосями, равными A и $A\omega$ (рис. 13,а). Верхняя полуплоскость соответствует возрастанию смещения, нижняя - убыванию. Размеры эллипса зависят от начальных условий, определяющих амплитуду колебаний A .

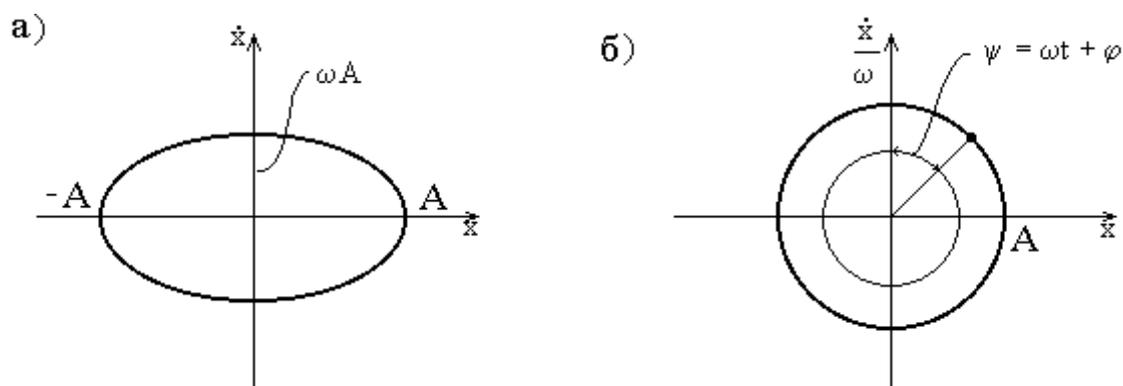


Рис. 13

Все возможные свободные колебания одномассовой системы изображаются семейством эллипсов, каждый из которых соответствует определённому уровню энергии. Чем больше амплитуда колебаний A , тем больше полная энергия системы. Если значения энергии откладывать по оси, перпендикулярной чертежу, то получится поверхность (параболоид), нижняя

точка которой соответствует нулевому энергетическому уровню. Точка, изображающая значения смещения и скорости в данный момент времени (изображающая точка), перемещается по горизонтали этой поверхности.

Если изменить масштаб построения фазовой траектории и откладывать по оси абсцисс x , а по оси ординат - \dot{x}/ω , то фазовая траектория (рис. 13,б) будет представлять собой окружность радиусом A , причём изображающая точка будет равномерно двигаться по этой окружности с угловой скоростью, равной частоте собственных колебаний ω .

При наличии рассеяния энергии изображающая точка перемещается по спирали, приближаясь к началу координат.

2.2.1. Примеры расчётов

Пример 1. К цилиндрической пружине подвешен груз массой $m = 2 \text{ кг} = 2 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}^2}{\text{м}}$. Груз может перемещаться только в вертикальном направлении. Определить частоту собственных колебаний груза без учёта и с учётом массы пружины. Средний диаметр пружины $D = 6 \text{ см}$; диаметр проволоки пружины $d = 0,6 \text{ см}$; число витков $n = 15$; плотность материала $\rho = 7,85 \frac{\text{Т}}{\text{м}^3}$; модуль сдвига $G = 8 \cdot 10^7 \text{ кПа}$.

Решение.

Жесткость пружины:

$$c = \frac{Gd^4}{8D^3n} = \frac{8 \cdot 10^7 \cdot (0,6 \cdot 10^{-2})^4}{8 \cdot (6 \cdot 10^{-2})^3 \cdot 15} = 4 \text{ кН/м}.$$

Частота собственных колебаний без учёта массы пружины :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{4000}{2}} = 44,7 \text{ с}^{-1}.$$

Приведенная масса пружины:

$$m_{,p} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot \pi D n p = \frac{1}{3} \cdot \frac{3,14 \cdot (0,6 \cdot 10^{-2})^2}{4} \cdot 3,14 \cdot 0,6 \cdot 10^{-2} \cdot 15 \cdot 7,85 \cdot 10^3 =$$

$$= 209 \cdot 10^{-3} \text{ кг} = 0,209 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}^2}{\text{м}}$$

Частота собственных колебаний с учётом массы пружины:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{c}{m + m_{,p}}} = \sqrt{\frac{4000}{2,209}} = 42,6 \text{ с}^{-1}.$$

Пример 2. Определить круговую и техническую частоту, а также период собственных колебаний сосредоточенного груза $P = 12 \text{ кН}$, приложенного на свободном конце балки, жестко заделанной другим концом. Балка представляет собой двутавр № 20 ($J_x = 1840 \text{ см}^4$) длиной $\ell = 1 \text{ м}$. Собственным весом балки пренебречь.

Решение.

Статический прогиб балки от веса сосредоточенного груза:

$$y_{\text{ст}} = \frac{P \ell^3}{3EJ_x} = \frac{12 \cdot \ell^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 1,087 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Частота собственных колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{y_{\text{ст}}}} = \sqrt{\frac{9,8}{1,087 \cdot 10^{-3}}} = 95 \text{ с}^{-1}.$$

Период колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6,28}{95} = 0,066 \text{ с}.$$

Техническая частота:

$$n = \frac{60}{T} = \frac{60}{0,066} = 909 \text{ мин}^{-1}.$$

Пример 3. К стальному стержню подвешен груз массой $m = 50 \text{ кг}$, совершающий вертикальные продольные колебания. Длина стержня $\ell = 1 \text{ м}$,

диаметр $d = 2$ см. Определить частоту и период собственных вертикальных колебаний системы без учёта и с учётом массы стержня.

Решение.

Жесткость стержня:

$$c = \frac{EA}{\ell} = \frac{E\pi d^2}{4\ell} = \frac{2 \cdot 10^8 \cdot 3,14 \cdot 0,02^2}{4 \cdot \ell} = 6,28 \cdot 10^4 \text{ кН/м} = 6,28 \cdot 10^7 \text{ Н/м}.$$

Частота собственных колебаний без учёта массы стержня:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{6,28 \cdot 10^7}{50}} = 1121 \text{ с}^{-1}.$$

Соответствующий период колебаний:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{6,28}{1121} = 0,0056 \text{ с}.$$

Приведенная масса стержня:

$$m_{,p} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi d^2}{4} \ell \rho = \frac{1}{3} \cdot \frac{3,14 \cdot 0,02^2}{4} \cdot 1 \cdot 7,85 \cdot 10^3 = 0,822 \text{ кг} = 0,822 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}^2}{\text{м}}.$$

Собственная частота колебаний с учётом массы стержня:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{c}{m + m_{,p}}} = \sqrt{\frac{6,28 \cdot 10^7}{50,822}} = 1112 \text{ с}^{-1}.$$

Соответствующий период колебаний:

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{6,28}{1112} = 0,00565 \text{ с}.$$

Пример 4.

Определить собственную частоту крутильных колебаний двухмассовой системы (рис. 14,а) при следующих данных: диаметры дисков $d_1 = 0,30$ м; $d_2 = 0,20$ м; толщины дисков $b_1 = 0,02$ м; $b_2 = 0,015$ м; диаметр вала $d_0 = 0,01$ м; длина вала $\ell = 0,8$ м.

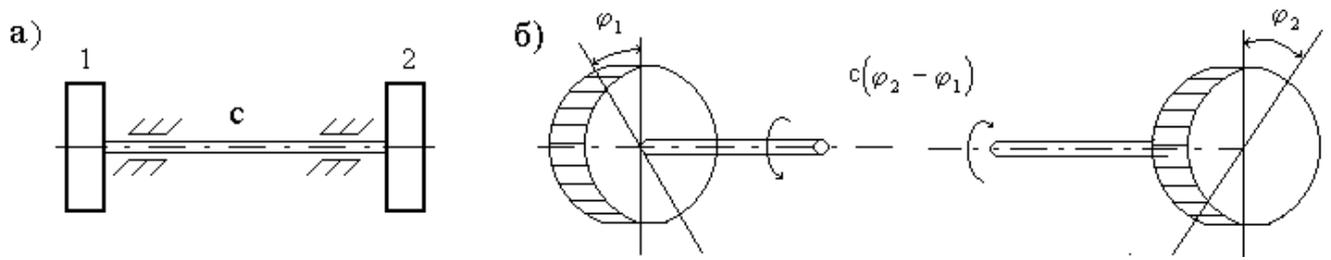


Рис. 14

Решение.

Дифференциальное уравнение свободных колебаний такой системы имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0,$$

где $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ - взаимный угол поворота дисков, $\omega = \sqrt{\frac{c(J_1 + J_2)}{J_1 \cdot J_2}}$ -

собственная частота колебаний.

Моменты инерции масс дисков:

$$J_1 = b_1 \frac{\pi d_1^4}{32} \cdot \frac{\rho}{g} = 0,02 \cdot \frac{3,14 \cdot 0,3^4}{32} \cdot \frac{78,5}{9,8} = 1,264 \cdot 10^{-4} \text{ кН} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2;$$

$$J_2 = b_2 \frac{\pi d_2^4}{32} \cdot \frac{\rho}{g} = 0,015 \cdot \frac{3,14 \cdot 0,2^4}{32} \cdot \frac{78,5}{9,8} = 0,187 \cdot 10^{-4} \text{ кН} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2.$$

Полярный момент инерции поперечного сечения вала:

$$J_p = \frac{\pi d_0^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 0,01^4}{32} = 9,81 \cdot 10^{-10} \text{ м}^4.$$

Коэффициент жесткости вала при кручении:

$$c = \frac{GJ_p}{l} = \frac{8 \cdot 10^7 \cdot 9,81 \cdot 10^{-10}}{0,8} = 9,81 \cdot 10^{-2} \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Собственная частота крутильных колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{c(J_1 + J_2)}{J_1 \cdot J_2}} = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 10^{-2} (1,264 + 0,187) \cdot 10^{-4}}{1,264 \cdot 0,187 \cdot 10^{-8}}} = 77,6 \text{ с}^{-1}.$$

2.3. Свободные колебания системы с одной степенью свободы при наличии трения

2.3.1 Вязкое трение

В этом случае возникает сопротивление движению, которое пропорционально его скорости. При этом сила сопротивления описывается выражением

$$R = k\dot{x}, \quad (14)$$

где k - коэффициент пропорциональности.

Примером системы, работающей в условиях вязкого трения, может служить гидравлический амортизатор (рис.15), который создаёт сопротивление движению поршня, зависящее не от перемещения (как это свойственно упругим связям), а от скорости и пропорционально её первой степени (14). Подобные устройства применяются, например, в конструкциях автомобильной подвески. Гидравлический амортизатор состоит из одного или нескольких цилиндров с поршнями или из камеры, в которой может вращаться крыльчатка. Цилиндры и камера наполнены амортизационной жидкостью. При движении поршней или крыльчатки эта жидкость продавливается через калиброванные отверстия; этим создаётся сопротивление, по характеру близкое к вязкому. В формуле (14) R - это сила, действующая на амортизатор, а вязкая реакция амортизатора на колеблющееся тело имеет противоположное направление.

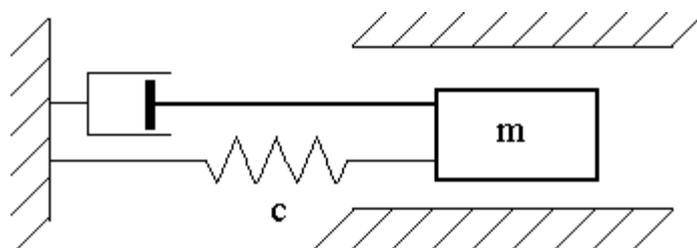


Рис. 15

Дифференциальное уравнение движения в рассматриваемом случае таково:

$$m\ddot{x} + cx + k\dot{x} = 0, \quad (15)$$

или

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (16)$$

где

$$n = \frac{k}{2m}; \omega^2 = \frac{c}{m}.$$

Для рассматриваемого линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами характеристическое уравнение имеет вид

$$s^2 + 2ns + \omega^2 = 0,$$

$$s = -n \pm i\sqrt{\omega^2 - n^2}.$$

Обозначим

$$\sqrt{\omega^2 - n^2} = \omega_1.$$

Тогда решение уравнения (16) определяется формулой

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t) \quad (17)$$

или

$$x = Ae^{-nt} \cos(\omega_1 t + \varphi), \quad (18)$$

где

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{C_1}{C_2}.$$

Следовательно, при наличии вязкого трения движение груза описывается неперiodическим законом (рис. 16).

Тем не менее часто это движение называют периодическими затухающими колебаниями, несмотря на очевидную невозможность совмещения понятий "периодические" и "затухающие".

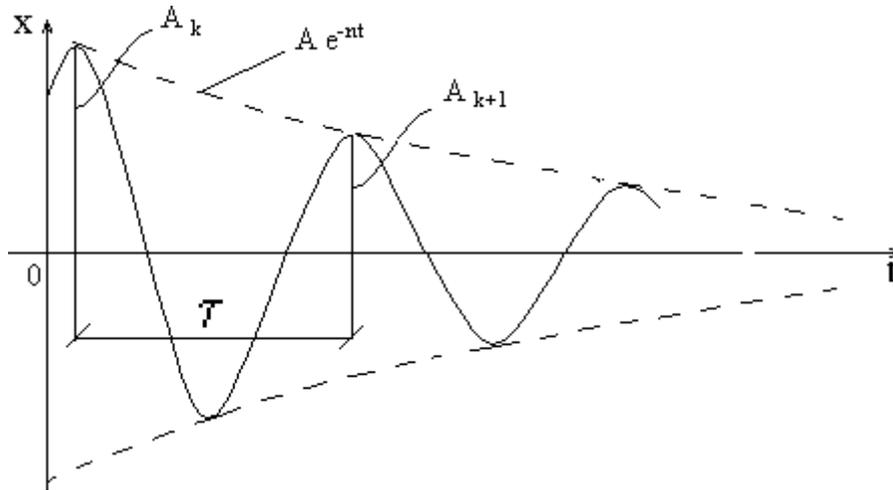


Рис. 16

Под периодом τ_1 этих колебаний понимают время между двумя максимальными смещениями:

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 + n^2}}. \quad (19)$$

Величину ω_1 называют *угловой частотой затухающих колебаний*.

Отношение двух последовательных максимальных отклонений от положения равновесия

$$\frac{A_k}{A_{k+1}} = e^{n \cdot \tau_1}. \quad (20)$$

Значит, последовательные максимальные отклонения системы от равновесного положения (амплитуды колебаний) представляют собой члены геометрической прогрессии со знаменателем, равным $e^{n \cdot \tau_1}$. Чаще рассматривают не отношение двух последовательных амплитуд, а логарифм

этого отношения, который называют *логарифмическим декрементом колебаний*:

$$\delta = \ln \frac{A_k}{A_{k+1}} = n\tau_1. \quad (21)$$

В металлических конструкциях без специально введенных элементов трения логарифмический декремент составляет обычно от нескольких сотых до десятых долей единицы.

Если колебания затухают медленно и отношение двух последовательных амплитуд A_k/A_{k+1} близко к единице, то

$$\delta = \ln \frac{A_k}{A_{k+1}} = \ln \frac{A + \Delta A/2}{A - \Delta A/2} \approx \frac{\Delta A}{A},$$

где

$$\Delta A = A_k - A_{k+1}; A = (A_k + A_{k+1})/2.$$

Таким образом, при малом затухании логарифмический декремент примерно равен отношению изменения амплитуды колебаний за период τ_1 к амплитуде A .

Так как логарифмический декремент колебаний

$$\delta = n\tau_1 = \frac{2\pi n}{\omega_1} = \frac{2\pi n}{\sqrt{\omega^2 - n^2}},$$

то

$$n^2 = \omega^2 \left(\frac{1}{2} \frac{\delta}{\pi} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{1}{2} \frac{\delta}{\pi} \right)^2 \right]^{-1}.$$

Подставляя значение n^2 в формулу для ω_1 , установим связь между величинами ω_1 , ω и δ :

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2} = \frac{\omega}{\sqrt{1 + \frac{\delta^2}{4\pi^2}}}. \quad (22)$$

Из (22) следует, что даже при значительном затухании частота ω_1 затухающих колебаний мало отличается от частоты ω собственных колебаний соответствующей системы без трения. Например, при сравнительно большом затухании, когда каждый следующий размах вдвое меньше предыдущего ($\delta = \ln 2 \approx 0,693$), частота ω_1 лишь на 0,6 % меньше, чем ω . Таким образом, можно считать, что трение практически не влияет на частоту колебаний и $\omega_1 \approx \omega$.

Определим постоянные интегрирования в решении уравнения затухающих колебаний (17). Обозначим смещение и скорость в начальный момент времени $t_0=0$ через x_0 и \dot{x}_0 соответственно. После подстановки в (17) получим

$$x_0 = C_1; \quad \dot{x}_0 = -C_1 n + C_2 \omega_1,$$

тогда

$$C_1 = x_0; \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0 + n x_0}{\omega_1},$$

и решение уравнения (16), удовлетворяющее начальным условиям, имеет вид

$$x = e^{-n \cdot t} \left(x_0 \cos \omega_1 t + \frac{\dot{x}_0 + n x_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \quad (23)$$

Пример 5. Амплитуда собственных колебаний за один период уменьшилась в два раза. Определить логарифмический декремент колебаний и изменение собственной частоты вследствие затухания.

Решение.

Логарифмический декремент колебаний:

$$\delta = nT = \ln 2 = 0,693 ;$$

$$n = \frac{0,693}{T} = \frac{0,693}{2\pi} \sqrt{\omega^2 - n^2} ,$$

откуда

$$n^2 = 0,012\omega^2 .$$

Собственная частота колебаний:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2} = \sqrt{\omega^2 - 0,012\omega^2} = 0,994\omega ,$$

т. е. изменение собственной частоты вследствие затухания составляет 0,6 %.

2.3.2. Сухое трение

Рассмотрим движение упруго закрепленного тела массой m по шероховатой поверхности. Как уже отмечалось, в этом случае говорят, что имеет место сухое трение (рис.17). Сила трения, действующая на массу m , постоянна по величине и направлена в сторону, противоположную движению. Уравнение свободных колебаний такой системы имеет вид

$$m\ddot{x} + cx \pm R_0 = 0 , \quad (24)$$

где знак плюс соответствует этапу движения, на котором скорость положительна, а знак минус - этапу движения, на котором скорость отрицательна.

Зависимость полной действующей на груз силы $F=cx \pm R_0$ от смещения x показана на рис. 18,а.

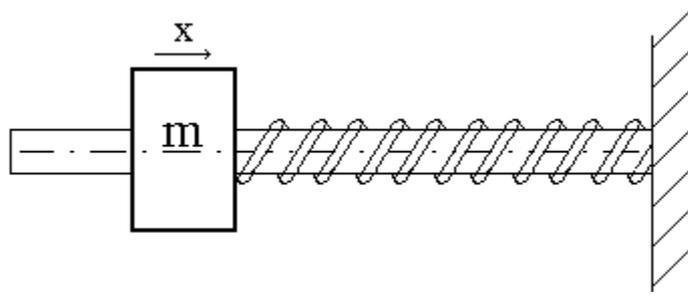


Рис. 17

Перепишем уравнение (24) в виде

$$m\ddot{x} + cx \pm R_0 \operatorname{sgn} \dot{x} = 0. \quad (25)$$

Функция $\operatorname{sgn} \dot{x}$ есть единичная функция, имеющая знак аргумента (рис. 18,б); $\operatorname{sgn} \dot{x} = 1$ при $\dot{x} > 0$; $\operatorname{sgn} \dot{x} = -1$ при $\dot{x} < 0$; $\operatorname{sgn} \dot{x} = 0$ при $\dot{x} = 0$.

Уравнение (25) содержит нелинейное слагаемое. Тем не менее можно найти решение, если рассмотреть последовательные интервалы движения, на каждом из которых скорость \dot{x} имеет постоянный знак.

Отклоним массу m в крайнее правое положение на величину A и отпустим ее без начальной скорости. В этом случае

$$x_0 = A; \dot{x}_0 = 0. \quad (26)$$

Под действием натяжения пружины на этом этапе груз движется влево ($\dot{x} < 0$) и уравнение движения

$$m\ddot{x} + cx - R_0 = 0,$$

или

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 a, \quad (27)$$

где

$$\omega^2 = \frac{c}{m}; \frac{R_0}{c} = a.$$

Коэффициент a представляет собой отклонение груза под действием максимально возможной силы трения. При отклонении массы m на величину,

меньшую или равную a , движение не начнётся, так как силы упругости пружины недостаточно для преодоления силы трения. Полоса $-a < x < a$ называется *зоной застоя*. Поэтому уравнение (27) имеет место при $A > a$.

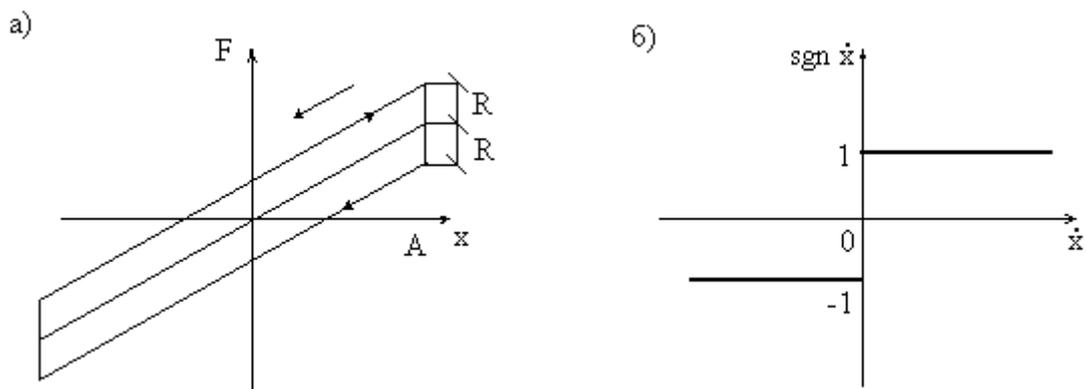


Рис. 18

Общее решение уравнения (27) имеет вид

$$x = a + C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

Определяя постоянные интегрирования из начальных условий (26) получим

$$x = a + (A - a) \cos \omega t. \tag{28}$$

Закон движения (28) справедлив до тех пор, пока $\dot{x} < 0$. Так как $\dot{x} = -\omega(A - a) \sin \omega t$, то скорость движения будет отрицательной до момента времени t_1 , определяемого из условия: $\omega t_1 = \pi$. В этот момент масса m остановится, смещение x равно

$$x = a + (A - a) \cos \pi = -(A - 2a),$$

т. е. под влиянием трения отклонение массы m уменьшилось по абсолютной величине на $2a$.

После остановки масса m начнёт двигаться вправо. Повторяя приведенные выше расчёты, можно показать, что движение слева направо также продолжается в течение времени π/ω . Максимальное отклонение вправо равно $A - 4a$. Процесс движения будет продолжаться до тех пор, пока

масса m не остановится в зоне застоя. Зависимость смещения x от времени t на каждом этапе движения представляет собой косинусоиду, смещённую по оси x на величину a или $-a$, с амплитудой, уменьшающейся по закону арифметической прогрессии (рис.18*).

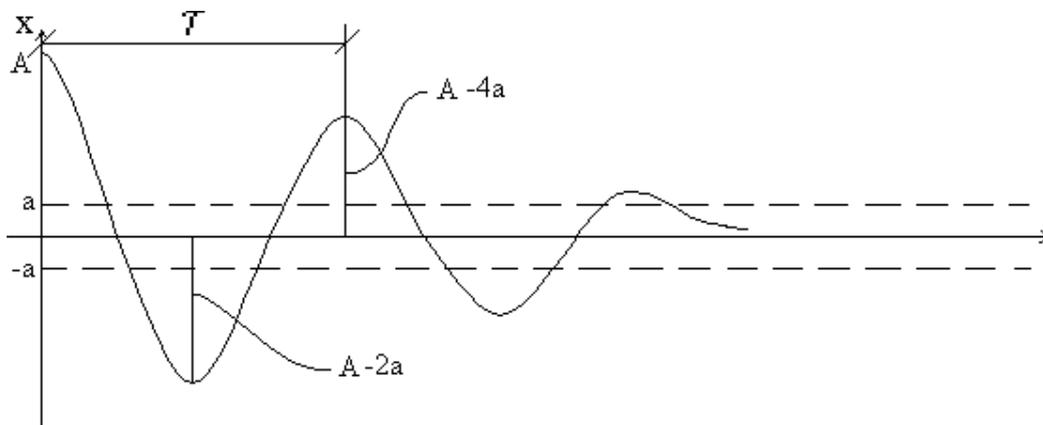


Рис. 18*

Время между двумя соседними максимумами отклонения, которое *условно* можно назвать периодом колебаний,

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Наличие сухого трения не меняет частоту колебаний.

Фазовый портрет свободных колебаний системы с сухим трением представлен на рис.19.

В координатах $X, \frac{\dot{X}}{\omega}$ гармонический закон движения изображается дугами окружностей.

Если в (27) ввести новую переменную $(X - a)$, то получится уравнение гармонических колебаний без трения. Это движение на фазовой плоскости изображается полуокружностью радиусом $(A - a)$ с центром в точке $X = a$. На втором этапе движения, когда $X > 0$, уравнение движения $\ddot{X} + \omega^2 X = -\omega^2 a$ может рассматриваться как уравнение гармонических колебаний со смещением $(X + a)$. На фазовой плоскости на втором этапе движения

получаем полуокружность с центром в точке $X = -a$. И так до тех пор, пока кривая при $X = 0$ не попадёт в зону застоя $-a < X < a$.

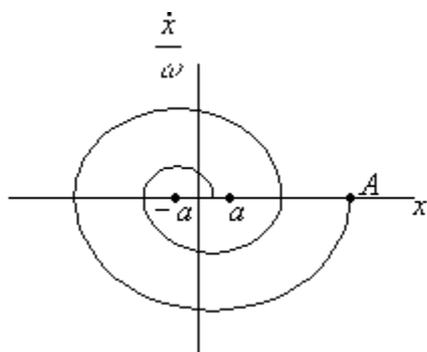


Рис. 19

2.3.3.Позиционное трение

Так называется вид трения, при котором сила трения пропорциональна смещению. Рассмотрим систему, состоящую из груза массой m , закреплённого на рессоре, листы которой собраны без предварительного натяга (рис. 20,а). Сила трения листов рессоры друг от друга пропорциональна контактному давлению, которое, в свою очередь, пропорционально смещению X . Зависимость между реакцией рессоры, действующей на груз, и смещением груза $F=f(X)$ для рассматриваемой системы представлена на рис. 20,б.

Обозначим жёсткость системы при увеличении смещения X по модулю через C_1 , а жёсткость при уменьшении абсолютного значения смещения - через C_2 . Жёсткость упругого элемента системы при отсутствии трения

$$C_0 = \frac{C_1 + C_2}{2}.$$

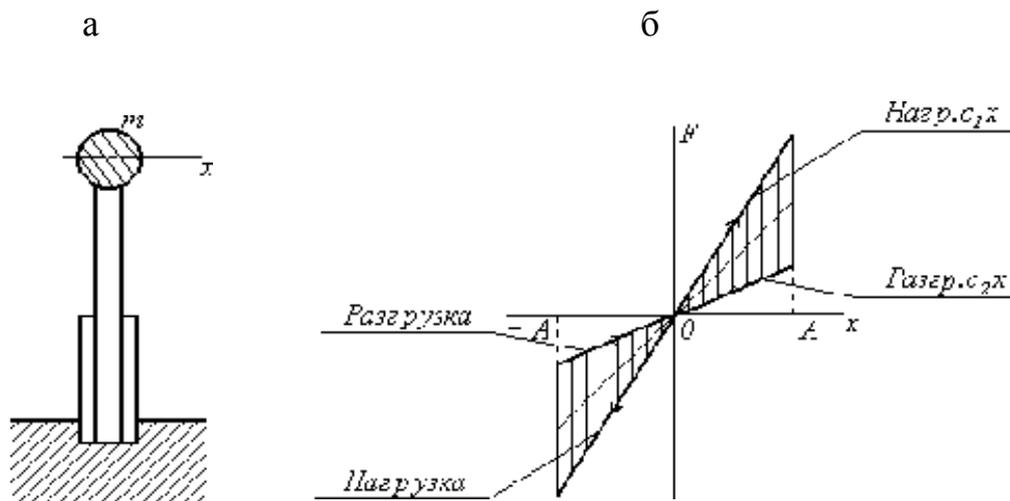


Рис. 20

На каждой четверти периода характеристика системы прямолинейна, поэтому движение массы m описывается синусоидой. При переходе через равновесное положение частота собственных колебаний меняется от $\omega_2 = \sqrt{\frac{C_2}{m}}$ до $\omega_1 = \sqrt{\frac{C_1}{m}}$. Отклоним массу m в крайнее правое положение, при этом её скорость в этот момент $\dot{X}_0 = 0$. Если груз отпустить, то он начнёт двигаться влево под действием силы упругости, уменьшенной на величину сил трения. Частота собственных колебаний груза будет ω_2 , а время движения до равновесного положения - $\tau_2/4 = \pi/2\omega_2$. Скорость груза в равновесном положении станет равной $\omega_2 A$. Дальнейшее движение (влево) определяется жёсткостью C_1 , а крайнего левого положения груз достигает через время $\tau_1/4 = \pi/2\omega_1$. Наибольшее смещение влево равно $\omega_2 A/\omega_1$.

Максимальное отклонение вправо в конце полного периода движения вычисляется по формуле

$$X_{\max}^{\text{прав.}} = A \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2},$$

следовательно, логарифмический декремент колебаний:

$$\delta = \ln \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \ln \frac{C_1}{C_2}.$$

При малом затухании, когда разность жесткостей $C_1 - C_2$ существенно меньше средней жёсткости C_0 , получим

$$\delta = \ln \frac{C_1}{C_2} = \ln \frac{C_0 + \frac{C_1 - C_2}{2}}{C_0 - \frac{C_1 - C_2}{2}} \approx \frac{C_1 - C_2}{C_0}.$$

Характер движения при позиционном трении показан на рис. 21. Из полученных формул следует, что при силе трения, пропорциональной смещению, логарифмический декремент колебаний постоянен и, следовательно, точно так же, как и при вязком трении, последовательные амплитуды составляют геометрическую прогрессию.

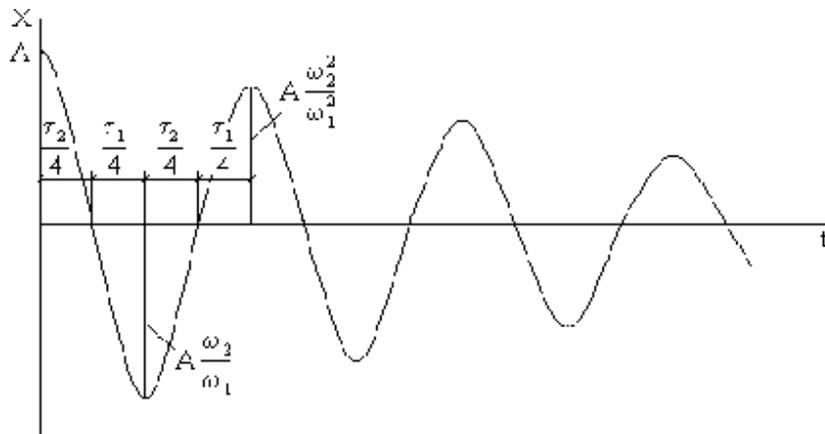


Рис. 21

Как видно из рис. 21, период рассматриваемых затухающих колебаний:

$$\tau = \frac{2\tau_2}{4} + \frac{2\tau_1}{4} = \pi \left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} \right).$$

Соответствующая этому периоду угловая частота:

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{2}{\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}}.$$

Частоты ω_1 и ω_2 определяются выражениями

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{C_1}{m}} = \sqrt{\frac{C_0}{m} \left(1 + \frac{C_1 - C_2}{2C_0} \right)} = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{\delta}{2}};$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{C_2}{m}} = \sqrt{\frac{C_0}{m} \left(1 - \frac{C_1 - C_2}{2C_0} \right)} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\delta}{2}},$$

где $\omega_0 = \sqrt{C_0/m}$ - собственная частота соответствующей системы без трения.

Тогда

$$\omega = 2\omega_0 \frac{\sqrt{1 - \delta^2/4}}{\sqrt{1 + \frac{\delta}{2}} + \sqrt{1 - \frac{\delta}{2}}}.$$

При небольших логарифмических декрементах колебаний δ это выражение отличается от собственной частоты колебаний соответствующей системы без трения на величину второго порядка малости. Поэтому подобно вязкому и сухому трению позиционное трение практически не влияет на собственную частоту колебаний.

2.4. Свободные колебания систем с конечным числом степеней свободы (общий случай)

Как уже говорилось (см. подразд. 1.4), дифференциальные уравнения движения таких систем можно получить тремя основными способами: 1) в форме уравнений Лагранжа; 2) прямым способом; 3) обратным способом.

Наиболее общий вид дифференциальных уравнений движения может быть получен в форме уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{X}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial X_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial X_j}, \quad (29)$$

где K и Π - кинетическая и потенциальная энергии соответственно; X_j и \dot{X}_j - обобщённые координаты и обобщённые скорости; $j=1,2,\dots,n$ - число степеней свободы системы.

Известно, что при малых колебаниях около положения равновесия кинетическая и потенциальная энергии выражаются через обобщённые координаты и обобщённые скорости следующим образом:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n a_{jk} \dot{X}_j \dot{X}_k; \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n C_{jk} X_j X_k, \quad (30)$$

где $C_{jk} = C_{kj}$ - инерционные коэффициенты; $C_{jk} = C_{kj}$ - квазиупругие коэффициенты, называемые также обобщёнными коэффициентами жёсткости.

Подставляя (30) в (29), получим систему однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$a_{j1} \ddot{X}_1 + a_{j2} \ddot{X}_2 + \dots + a_{jn} \ddot{X}_n + C_{j1} X_1 + C_{j2} X_2 + \dots + C_{jn} X_n = 0, \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (31)$$

Однако составление уравнений движения по схеме Лагранжа не является обязательным, потому что во многих случаях прямой или обратный способы оказываются более удобными.

Рассмотрим особенности названных способов на примере системы с двумя степенями свободы, состоящей из тел с массами m_1 и m_2 , соединённых пружинами с жесткостями C_1 и C_2 (рис. 22,а).

За обобщённые координаты примем горизонтальные перемещения X_1 и X_2 грузов, отсчитываемые от положения равновесия, в которых

отсутствуют деформации пружин. Удлинения пружин в процессе движения:

$$\Delta l_1 = X_1; \Delta l_2 = X_2 - X_1.$$

Основной способ (уравнения Лагранжа)

Кинетическая энергия рассматриваемой системы:

$$K = \frac{m_1 \dot{X}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{X}_2^2}{2}.$$

Потенциальная энергия деформации пружин:

$$П = \frac{C_1 X_1^2}{2} + \frac{C_2 (X_2 - X_1)^2}{2}.$$

Вычислим производные, необходимые для подстановки в уравнения Лагранжа:

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{X}_1} = m_1 \dot{X}_1; \frac{\partial K}{\partial \dot{X}_2} = m_2 \dot{X}_2;$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{X}_1} \right) = m_1 \ddot{X}_1; \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{X}_2} \right) = m_2 \ddot{X}_2;$$

$$\frac{\partial П}{\partial X_1} = C_1 X_1 - C_2 (X_2 - X_1); \frac{\partial П}{\partial X_2} = C_2 (X_2 - X_1).$$

Подставляя вычисленные значения в (29), получим дифференциальные уравнения движения рассматриваемой системы

$$\begin{cases} m_1 \ddot{X}_1 + C_1 X_1 - C_2 (X_2 - X_1) = 0; \\ m_2 \ddot{X}_2 + C_2 (X_2 - X_1) = 0. \end{cases} \quad (32)$$

Прямой способ

Выделяем массы m_1 и m_2 и рассматриваем их как свободные тела под действием сил упругости, определяемых удлинениями Δl_1 и Δl_2 обеих пружин (рис. 22,б):

$$\begin{aligned} N_1 &= C_1 \Delta l_1 = C_1 X_1; \\ N_2 &= C_2 \Delta l_2 = C_2 (X_2 - X_1). \end{aligned}$$

Дифференциальные уравнения движения грузов имеют вид

$$\begin{cases} m_1 \ddot{X}_1 = -N_1 + N_2; \\ m_2 \ddot{X}_2 = -N_2. \end{cases}$$

Подставляя значения N_1 и N_2 , получим

$$\begin{cases} m_1 \ddot{X}_1 + C_1 X_1 - C_2 (X_2 - X_1) = 0; \\ m_2 \ddot{X}_2 + C_2 (X_2 - X_1) = 0, \end{cases}$$

т.е. эти уравнения совпали с уравнениями (32).

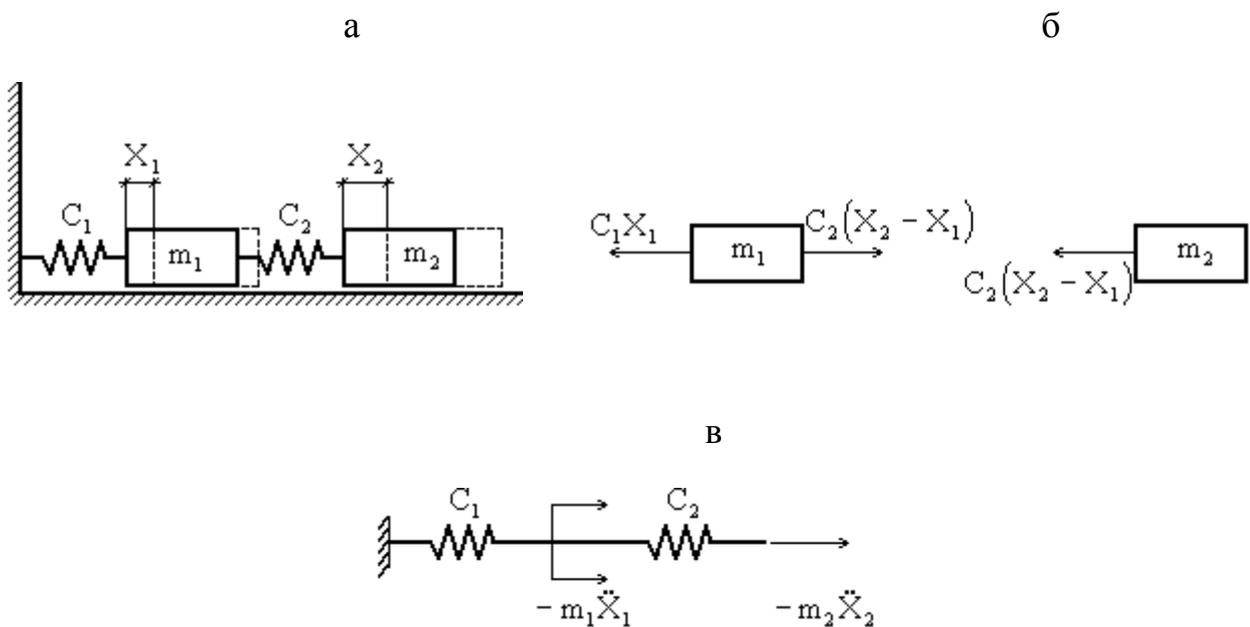


Рис. 22

Обратный способ

Отделяем грузы и рассматриваем упругий безмассовый скелет системы под действием кинетических реакций - сил инерции $-m_1 \ddot{X}_1$ и $-m_2 \ddot{X}_2$ (рис. 22,в). В этой схеме первая пружина нагружена силой $-m_1 \ddot{X}_1 - m_2 \ddot{X}_2$, а вторая - силой $-m_2 \ddot{X}_2$. Перемещение X_1 конца первой

пружины, равное её удлинению, можно записать в виде

$$X_1 = \frac{-m_1 \ddot{X}_1 - m_2 \ddot{X}_2}{C_1}.$$

Перемещение правого конца второй пружины X_2 равно сумме удлинений обеих пружин:

$$X_2 = \frac{-m_1 \ddot{X}_1 - m_2 \ddot{X}_2}{C_1} + \frac{-m_2 \ddot{X}_2}{C_2}.$$

Из этих соотношений получим

$$\begin{cases} m_1 \ddot{X}_1 + m_2 \ddot{X}_2 + C_1 X_1 = 0; \\ m_1 \ddot{X}_1 + m_2 \left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right) \ddot{X}_2 + C_2 X_2 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, совпали формы записей дифференциальных уравнений движения по основному (уравнения Лагранжа) и прямому способам, а уравнения, полученные обратным способом, отличаются от них по форме. Это связано с тем, что при нашем выборе обобщённых координат кинетическая энергия имеет каноническую форму:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s a_j \dot{X}_j^2,$$

т.е. не содержит произведений скоростей $\dot{X}_j \dot{X}_k$ при $j \neq k$. При этом каждое из уравнений Лагранжа содержит только по одному обобщённому ускорению, как и при использовании прямого способа. Если обобщённые координаты выбрать так, чтобы потенциальная энергия имела каноническую форму

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s C_j X_j^2,$$

то уравнения Лагранжа совпали бы с уравнениями, полученными обратным способом.

Сопоставляя полученные варианты записей по прямому и обратному способам, можно сделать следующее общее заключение: при составлении системы уравнений по прямому способу $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$, а при составлении по обратному способу $C_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Таким образом, пользуясь прямым способом, приходим в общем случае к системе:

$$a_{jj}\ddot{X}_j + \sum_{k=1}^s C_{jk}X_k = 0 \quad (j=1,2,\dots,s), \quad (33)$$

а применяя обратный способ - к системе:

$$\sum_{k=1}^s a_{jk}\ddot{X}_k + C_{jj}X_j = 0 \quad (j=1,2,\dots,s). \quad (34)$$

Принципиально важно, что специальным выбором обобщённых координат можно одновременно придать каноническую форму как кинетической, так и потенциальной энергии. Такие координаты ξ_i ($i=1,2,\dots,s$) называются *нормальными*, или *главными*. При этом

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s a_i \dot{\xi}_i^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s C_i \xi_i^2$$

и уравнения Лагранжа принимают вид

$$a_i \ddot{\xi}_i + C_i \xi_i = 0 \quad (i=1,2,\dots,s) \quad (35)$$

Каждое из уравнений (35) интегрируется независимо от других. Иначе говоря, при использовании нормальных координат система представляет собой как бы совокупность независимых парциальных систем с одной степенью свободы.

2.4.1. Решение уравнений движения в общем случае

Частное решение системы уравнений (31) можно записать в виде

$$X_j = A_j \sin(\omega t + \alpha), \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (36)$$

2.4.2. Решение уравнений движения для простейшей системы

Вернёмся к рассмотрению простейшей системы - с двумя степенями свободы (рис. 22,а), на примере которой проследим получение решения уравнений движения.

Будем искать решение уравнений (32) в виде

$$\begin{cases} X_1 = A_1 \sin(\omega t + \alpha); \\ X_2 = A_2 \sin(\omega t + \alpha) \end{cases} \quad (40)$$

Функции (40) не являются общим решением уравнений (32), но позволяют его построить.

Подставляя (40) в (32), получим

$$\begin{cases} m_1 A_1 \omega^2 - C_1 A_1 + C_2 (A_2 - A_1) = 0; \\ m_2 A_2 \omega^2 - C_2 (A_2 - A_1) = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (C_1 + C_2 - m_1 \omega^2) A_1 - C_2 A_2 = 0; \\ -C_2 A_1 + (C_2 - m_2 \omega^2) A_2 = 0. \end{cases} \quad (41)$$

Однородная система (41) имеет тривиальное решение $A_1 = A_2 = 0$, которое означает отсутствие колебаний и интереса не представляет. Ненулевое решение система (41) имеет тогда и только тогда, когда определитель, составленный из коэффициентов при амплитудах колебаний A_1 и A_2 , равен нулю:

$$\begin{vmatrix} C_1 + C_2 - m_1 \omega^2 & -C_2 \\ -C_2 & C_2 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Этот определитель называется частотным, а раскрывая его, получим *частотное*, или *вековое уравнение*

$$\omega^4 - \left(\frac{C_1 + C_2}{m_1} + \frac{C_2}{m_2} \right) \omega^2 + \frac{C_1 C_2}{m_1 m_2} = 0. \quad (42)$$

Это частотное уравнение всегда имеет два вещественных и положительных решения, т.е. система с двумя степенями свободы (рис. 22,а) имеет две собственные частоты:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{C_1+C_2}{m_1} + \frac{C_2}{m_2}\right)} - \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{C_1+C_2}{m_1} + \frac{C_2}{m_2}\right)^2 - \frac{C_1C_2}{m_1m_2}}; \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{C_1+C_2}{m_1} + \frac{C_2}{m_2}\right)} + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{C_1+C_2}{m_1} + \frac{C_2}{m_2}\right)^2 - \frac{C_1C_2}{m_1m_2}}.\end{aligned}\quad (43)$$

Таким образом, колебательный процесс оказывается двухчастотным и определяется функциями $\sin(\omega_1 t + \alpha_1)$ и $\sin(\omega_2 t + \alpha_2)$. Чтобы отразить в общем решении обе гармоники, усложним индексацию и запишем решение (40) несколько в ином виде

$$\begin{cases} X_1 = A_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2); \\ X_2 = A_{21} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_{22} \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \end{cases}\quad (44)$$

где у амплитуды A_{ij} индекс i означает номер координаты, а индекс j - номер частоты.

Установим связь между амплитудами A_1 и A_2 , используя любое из двух уравнений (41), например, первое:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{C_1 + C_2 - m_1 \omega^2}{C_2}.\quad (45)$$

Подставим в (45) первую собственную частоту ω_1 и перейдём к двухиндексному обозначению амплитуд (см. выше), тогда получим независящее от начальных условий отношение амплитуд первой гармоники:

$$\gamma_{21} = \frac{A_{21}}{A_{11}} = \frac{C_1 + C_2 - m_1 \omega_1^2}{C_2}.\quad (46)$$

Аналогично из того же соотношения (45) при $\omega = \omega_2$ получим для

второй гармоники:

$$\gamma_{22} = \frac{A_{22}}{A_{12}} = \frac{C_1 + C_2 - m_1 \omega_2^2}{C_2}. \quad (47)$$

Следовательно, решение (44) с учётом (46) и (47) можно переписать в виде

$$\begin{cases} X_1 = A_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2); \\ X_2 = \gamma_{21} A_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \gamma_{22} A_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2). \end{cases} \quad (48)$$

В (48) собственные частоты ω_1 и ω_2 и отношения γ_{21} и γ_{22} зависят только от параметров колебательной системы. Величины $A_{11}, A_{12}, \alpha_1, \alpha_2$ можно определить из четырёх начальных условий, выражающих значения смещений и скоростей обеих масс в начальный момент времени.

Пусть, например, при $t = 0$:

$$X_1(0) = 0; \quad X_2(0) = 0;$$

$$\dot{X}_1(0) = 0; \quad \dot{X}_2(0) = V_0,$$

т.е. движение системы вызвано мгновенным ударом по второй массе.

Из (48) получим

$$A_{11} \sin \alpha_1 + A_{12} \sin \alpha_2 = 0;$$

$$\gamma_{21} A_{11} \sin \alpha_1 + \gamma_{22} A_{12} \sin \alpha_2 = 0;$$

$$A_{11} \omega_1 \cos \alpha_1 + A_{12} \omega_2 \cos \alpha_2 = 0;$$

$$\gamma_{21} A_{11} \omega_1 \cos \alpha_1 + \gamma_{22} \omega_2 A_{12} \cos \alpha_2 = V_0.$$

Отсюда находим

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0;$$

$$A_{11} = \frac{V_0}{\omega_1} \cdot \frac{1}{\gamma_{21} - \gamma_{22}};$$

$$A_{12} = \frac{V_0}{\omega_2} \cdot \frac{1}{\gamma_{22} - \gamma_{21}}.$$

Величины $\omega_1, \omega_2, \gamma_{21}$ и γ_{22} можно вычислить по (43), (46) и (47).

Искусственным подбором начальных условий можно добиться *одночастотности колебаний*. Например, если сделать так, чтобы $A_{12} = 0$, то колебания будут описываться одной гармоникой:

$$\begin{aligned} X_1 &= A_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1); \\ X_2 &= \gamma_{21} A_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1). \end{aligned}$$

Коэффициент γ_{21} не зависит от начальных условий, поэтому рассматриваемые одночастотные колебания характеризуются вполне определённым, зависящим только от параметров системы, отношением амплитуд, которое остаётся неизменным в процессе колебаний. Это отношение определяет *первую собственную форму колебаний*.

Если начальные условия таковы, что $A_{11} = 0$, то колебания будут также одночастотными, но с частотой ω_2 :

$$\begin{aligned} X_1 &= A_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2); \\ X_2 &= \gamma_{22} A_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \end{aligned}$$

при этом отношение амплитуд γ_{22} определяет *вторую собственную форму колебаний*.

2.4.3. Ортогональность собственных форм колебаний

При колебаниях системы по первой собственной форме наибольшие отклонения равны A_{11} и A_{21} ; этим отклонениям соответствуют силы инерции $m_1 A_{11} \omega_1^2$ и $m_2 A_{21} \omega_1^2$. Аналогично при колебаниях по второй собственной форме наибольшие отклонения составляют A_{12} и A_{22} и соответствующие силы инерции равны $m_1 A_{12} \omega_2^2$ и $m_2 A_{22} \omega_2^2$.

Применим к этим двум состояниям теорему Бетти о взаимности виртуальных работ. Согласно этой теореме, работа сил первого состояния $(m_1 A_{11} \omega_1^2, m_2 A_{21} \omega_1^2)$ на перемещениях второго состояния (A_{12}, A_{22}) равна

работе сил второго состояния $(m_1 A_{12} \omega_2^2, m_2 A_{22} \omega_2^2)$ на перемещениях первого состояния (A_{11}, A_{21}) , т.е.

$$\omega_1^2 (m_1 A_{11} A_{12} + m_2 A_{21} A_{22}) = \omega_2^2 (m_1 A_{12} A_{11} + m_2 A_{22} A_{21}),$$

или

$$(\omega_2^2 - \omega_1^2)(m_1 A_{11} A_{12} + m_2 A_{21} A_{22}) = 0.$$

Так как $\omega_1^2 \neq \omega_2^2$, то должно выполняться равенство:

$$m_1 A_{11} A_{12} + m_2 A_{21} A_{22} = 0.$$

Это равенство выражает *свойство ортогональности* двух собственных форм колебаний. После деления на $A_{11} A_{12}$ условие ортогональности можно также записать в виде

$$m_1 + m_2 \gamma_{21} \gamma_{22} = 0.$$

Если известно отношение γ_{21} , определяющее первую собственную форму, то из условия ортогональности можно найти отношение γ_{22} , соответствующее второй собственной форме:

$$\gamma_{22} = -\frac{m_1}{m_2 \gamma_{21}}.$$

Обобщая всё сказанное выше, можно отметить, что для любой системы с n степенями свободы выполняется условие ортогональности любых двух собственных форм.

2.4.4. Кратные и нулевые корни частного уравнения

В некоторых случаях могут встречаться кратные корни частного уравнения, а в других случаях среди корней этого уравнения могут оказаться и нулевые.

Рассмотрим эти случаи на примере системы с двумя степенями свободы.

Из соответствующего такой системе частотного уравнения (39) следует, что при выполнении равенства

$$(a_{11}C_{22} + C_{11}a_{22} - 2a_{12}C_{12})^2 = 4(C_{11}C_{22} - C_{12}^2)(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) \quad (49)$$

два корня частотного уравнения будут равны друг другу, а при выполнении равенства

$$C_{11}C_{22} = C_{12}^2 \quad (50)$$

один из корней частотного уравнения обращается в нуль.

В качестве примера рассмотрим свободные колебания плоской системы с двумя степенями свободы (рис.23).

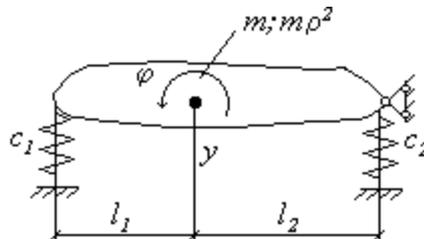


Рис. 23

Обозначим через C_1 и C_2 коэффициенты жёсткости пружин, а через m и ρ - массу и радиус инерции тела относительно оси, проходящей перпендикулярно плоскости чертежа через центр тяжести тела. За обобщённые координаты примем вертикальное перемещение центра тяжести и угол поворота тела φ . Тогда кинетическая и потенциальная энергии имеют вид

$$K = \frac{m}{2}(\dot{y}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2),$$

$$\Pi = \frac{C_1(y + l_1\varphi)^2}{2} + \frac{C_2(y - l_2\varphi)^2}{2}.$$

После вычисления соответствующих производных уравнения

Лагранжа записываются так:

$$\begin{cases} m\ddot{y} + (C_1 + C_2)y + (C_1l_1 - C_2l_2)\varphi = 0, \\ m\rho^2\ddot{\varphi} + (C_1l_1^2 + C_2l_2^2)\varphi + (C_1l_1 - C_2l_2)y = 0. \end{cases}$$

Предположим, что параметры рассматриваемой системы удовлетворяют двум простым (и практически реально осуществимым) соотношениям:

$$C_1l_1 = C_2l_2; \quad \rho^2 = l_1l_2,$$

тогда полученные дифференциальные уравнения принимают более простую форму

$$\begin{cases} m\ddot{y} + (C_1 + C_2)y = 0, \\ m\ddot{\varphi} + (C_1 + C_2)\varphi = 0. \end{cases} \quad (51)$$

Следовательно, инерционные коэффициенты и обобщённые коэффициенты жёсткости в этих уравнениях

$$\begin{aligned} a_{11} = a_{22} = m; \quad a_{12} = a_{21} = 0; \\ C_{11} = C_{22} = C_1 + C_2; \quad C_{12} = C_{21} = 0, \end{aligned}$$

и условие (49) выполняется, значит, рассматриваемая система имеет две одинаковые собственные частоты колебаний. Для выяснения этого можно было и не привлекать условие (49), так как из уравнений (51) непосредственно следует

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{m}}.$$

Вследствие независимости уравнений (51) постоянные интегрирования одного уравнения не связаны с постоянными интегрирования другого уравнения

$$\begin{aligned} y &= A_1 \sin(\omega t + \alpha_1), \\ \varphi &= A_2 \sin(\omega t + \alpha_2). \end{aligned}$$

Для определения постоянных $A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2$ служат четыре начальных условия.

Рассмотрим пример системы с одной нулевой собственной частотой (рис.24).

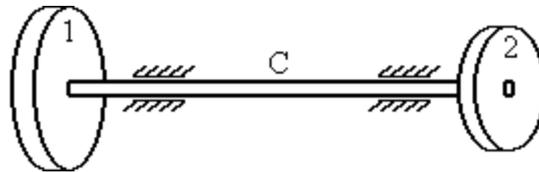


Рис. 24

Обозначим жёсткость вала на кручение через C ; моменты инерции дисков относительно продольной оси системы - через I_1 и I_2 .

В качестве обобщённых координат принимаем углы поворотов дисков φ_1 и φ_2 относительно некоторого начального положения, в котором вал не закручен.

Кинетическая и потенциальная энергии системы

$$K = \frac{I_1 \dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{I_2 \dot{\varphi}_2^2}{2};$$

$$\Pi = \frac{C(\varphi_2 - \varphi_1)^2}{2}.$$

После вычисления производных уравнения Лагранжа принимают вид

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\varphi}_1 - C(\varphi_2 - \varphi_1) = 0, \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 + C(\varphi_2 - \varphi_1) = 0. \end{cases} \quad (52)$$

Следовательно,

$$a_{11} = I_1; a_{22} = I_2; a_{12} = a_{21} = 0;$$

$$C_{11} = C_{22} = C; C_{12} = C_{21} = -C.$$

При этом выполняется условие (50) и один из корней частотного уравнения равен нулю. Действительно, подставляя значения коэффициентов

в частотное уравнение (39), получим

$$I_1 I_2 \omega^4 - (I_1 C + I_2 C) \omega^2 = 0,$$

отсюда

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{C \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}}.$$

Выясним физический смысл нулевой частоты. Особенность дифференциальных уравнений (52) состоит в том, что они допускают не только частное решение колебательного типа

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A_1 \sin(\omega t + \alpha), \\ \varphi_2 &= A_2 \sin(\omega t + \alpha), \end{aligned} \tag{53}$$

но также частное решение вида

$$\varphi_1 = \varphi_2 = C_1 + C_2 t,$$

которое описывает равномерное вращение всей системы как жёсткого целого (без закручивания вала). Этому частному решению и соответствует нулевой корень частотного уравнения.

Частному решению (53) соответствует отличная от нуля частота ω_2 , а также определённое соотношение амплитуд колебаний

$$\gamma_{21} = \frac{A_2}{A_1} = -\frac{I_1}{I_2}.$$

Таким образом, общее решение уравнений (52) представляется в виде

$$\begin{cases} \varphi_1 = A_1 \sin(\omega t + \alpha) + C_1 + C_2 t; \\ \varphi_2 = \gamma_{21} A_1 \sin(\omega t + \alpha) + C_1 + C_2 t \end{cases} \tag{54}$$

и содержит четыре постоянных интегрирования (A_1, α, C_1, C_2) , определяемых из начальных условий.

Движение, описываемое законом (54), можно рассматривать как колебания, наложенные на режим равномерного вращения. Чисто

колебательную составляющую движения легко выделить путём введения новой переменной (обобщённой координаты)

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1,$$

которая представляет собой взаимный угол поворота дисков. Тогда уравнения (52) можно переписать так:

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}_1 - \frac{C}{I_1}(\varphi_2 - \varphi_1) &= 0, \\ \varphi_2 + \frac{C}{I_2}(\varphi_2 - \varphi_1) &= 0.\end{aligned}$$

Вычитая первое уравнение из второго и обозначая $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, получим одно дифференциальное уравнение

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{C}{I_1} + \frac{C}{I_2} \right) \varphi = 0.$$

При этом колебания следуют одночастотному закону

$$\varphi = A \sin(\omega t + \alpha).$$

Можно сказать, что рассматриваемая система имеет только одну колебательную степень свободы; второй степени свободы соответствует вращение системы как жёсткого тела. Аналогично для любой системы с n степенями свободы, когда с валом связаны n дисков, число колебательных степеней свободы на единицу меньше и равно $n-1$.

2.4.5. Влияние трения на свободные колебания системы с n степенями свободы

Дифференциальные уравнения движения изменятся, если учесть, что при колебаниях возникают силы трения. Рассмотрим случай, когда силы трения линейно зависят от скоростей точек системы (вязкое трение).

Дифференциальные уравнения (31) в этом случае принимают вид

$$a_{j1}\ddot{X}_1 + a_{j2}\ddot{X}_2 + \dots + a_{jn}\ddot{X}_n + b_{j1}\dot{X}_1 + b_{j2}\dot{X}_2 + \dots + b_{jn}\dot{X}_n + C_{j1}X_1 + C_{j2}X_2 + \dots + C_{jn}X_n = 0; \quad (j=1,2,\dots,n), \quad (55)$$

или в матричной форме

$$[a]\{\ddot{X}\} + [b]\{\dot{X}\} + [C]\{X\} = 0,$$

где

$$[b] = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} - \quad (56)$$

матрица демпфирования.

Решение уравнений (55) будем искать в виде

$$X_j = A_j e^{\lambda t} \quad (j=1,2,\dots,n). \quad (57)$$

После подстановки (57) в (55) получим однородную систему алгебраических уравнений относительно амплитуд колебаний A_j , которая в матричной форме выглядит так:

$$([a]\lambda^2 + [b]\lambda + [c])\{A\} = 0. \quad (58)$$

Ненулевое решение системы (58) возможно тогда и только тогда, когда её определитель равен нулю, что приводит к частотному уравнению

$$\det([a]\lambda^2 + [b]\lambda + [c]) = 0. \quad (59)$$

Если все элементы матрицы демпфирования (56) неотрицательные, то вещественные части всех корней характеристического уравнения - отрицательные. При этом среди корней уравнения (59) могут оказаться отрицательные вещественные корни, каждому из которых, согласно (57), соответствует монотонное затухающее движение неколебательного характера. Наряду с этим, среди корней могут оказаться и комплексные сопряжённые

корни вида $\lambda = -\alpha + i\beta$; $\lambda^{\circ} = -\alpha - i\beta$ ($\alpha > 0$). Им соответствует затухающее колебательное движение, описываемое выражением

$$X_j = e^{-\lambda t} (B_j \cos \beta t + C_j \sin \beta t).$$

Общее решение задачи получится как результат наложения всех частных решений.

2.4.6. Свободные колебания стержневых систем

С изгибными свободными колебаниями многомассовых стержневых систем часто приходится сталкиваться в строительных конструкциях, а также в турбинах, где применяют валы с прямолинейной осью, несущие ряд дисков.

В качестве примера такой системы рассмотрим шарнирную балку с тремя сосредоточенными массами m_1, m_2, m_3 (рис. 25,а).

Для таких систем при составлении уравнений движения удобнее использовать обратный способ, основанный, как уже говорилось, на введении сил инерции, приложенных к безмассовому упругому "скелету" системы. При этом удобно использовать понятие единичного перемещения δ_{ik} как перемещения в направлении i , вызванного безразмерной единичной силой, действующей в направлении k (рис. 25,б).

Если на систему по k -му направлению действует сила $F_k \neq 1$ и требуется определить вызванное ею полное перемещение в i -м направлении, то вследствие пропорциональности между силой и перемещением (справедлив закон Гука) можно записать, что $y_i = F_k \delta_{ik}$. При одновременном действии сил F_1, F_2, \dots, F_n полное перемещение по i -му направлению определяется суммированием

$$y_i = \sum_{k=1}^n F_k \delta_{ik}.$$

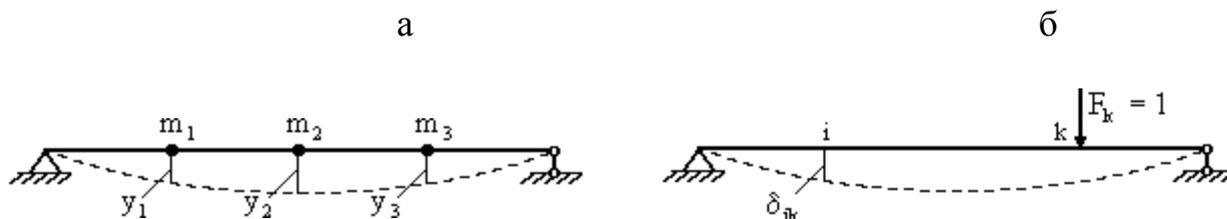


Рис. 25

Итак, рассмотрим свободные колебания балки, несущей сосредоточенные массы m_1, m_2, m_3 (рис. 25,а). Развиваемые ими силы инерции $-m_1\ddot{y}_1, -m_2\ddot{y}_2, -m_3\ddot{y}_3$ являются единственной нагрузкой на упругий "скелет" системы в процессе колебаний. Можно составить следующие выражения для перемещений точек приложения сосредоточенных масс под действием этих сил инерции:

$$\begin{cases} y_1 = -\delta_{11}m_1\ddot{y}_1 - \delta_{12}m_2\ddot{y}_2 - \delta_{13}m_3\ddot{y}_3, \\ y_2 = -\delta_{21}m_1\ddot{y}_1 - \delta_{22}m_2\ddot{y}_2 - \delta_{23}m_3\ddot{y}_3, \\ y_3 = -\delta_{31}m_1\ddot{y}_1 - \delta_{32}m_2\ddot{y}_2 - \delta_{33}m_3\ddot{y}_3. \end{cases} \quad (60)$$

Перемещения $\delta_{11}, \delta_{12} = \delta_{21}, \delta_{13} = \delta_{31}, \delta_{22}, \delta_{23} = \delta_{32}, \delta_{33}$ вычисляются, как обычно, методами О. Мора или А.Н. Верещагина от единичных сил, приложенных в местах действия сил инерции, т.е. в сечениях, где находятся сосредоточенные массы.

Система дифференциальных уравнений (60) имеет частное решение в виде

$$\begin{cases} y_1 = A_1 \sin(\omega t + \alpha), \\ y_2 = A_2 \sin(\omega t + \alpha), \\ y_3 = A_3 \sin(\omega t + \alpha). \end{cases} \quad (61)$$

Вторые производные этих перемещений по времени, т.е. ускорения, выражаются так:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = -\omega^2 A_1 \sin(\omega t + \alpha), \\ \ddot{y}_2 = -\omega^2 A_2 \sin(\omega t + \alpha), \\ \ddot{y}_3 = -\omega^2 A_3 \sin(\omega t + \alpha). \end{cases} \quad (62)$$

Подставляя (61) и (62) в систему уравнений (60) и сокращая на $\omega^2 \sin(\omega t + \alpha)$, после простейших преобразований получим

$$\begin{cases} \left(\delta_{11} m_1 - \frac{1}{\omega^2} \right) a_1 + \delta_{12} m_2 a_2 + \delta_{13} m_3 a_3 = 0, \\ \delta_{21} m_1 a_1 + \left(\delta_{22} m_2 - \frac{1}{\omega^2} \right) a_2 + \delta_{23} m_3 a_3 = 0, \\ \delta_{31} m_1 a_1 + \delta_{32} m_2 a_2 + \left(\delta_{33} m_3 - \frac{1}{\omega^2} \right) a_3 = 0. \end{cases} \quad (63)$$

Отбрасывая тривиальное решение этой системы уравнений ($a_1 = a_2 = a_3 = 0$) как не отвечающее физическому смыслу рассматриваемой задачи, будем искать ненулевое решение исходя из условия равенства нулю определителя системы (63):

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11} m_1 - \frac{1}{\omega^2} & \delta_{12} m_2 & \delta_{13} m_3 \\ \delta_{21} m_1 & \delta_{22} m_2 - \frac{1}{\omega^2} & \delta_{23} m_3 \\ \delta_{31} m_1 & \delta_{32} m_2 & \delta_{33} m_3 - \frac{1}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0. \quad (64)$$

Частотное уравнение, получаемое при раскрытии определителя (64) при числе степеней свободы системы $n=2$ и $n=3$, может быть решено строго непосредственно. При $n > 3$ получение решения может оказаться затруднительным или даже невозможным.

Если направления перемещений y_1, y_2, \dots, y_n выбраны так, что побочные перемещения δ_{ik} ($i \neq k$) обращаются в нуль, то система дифференциальных уравнений (60) и соответствующее ей уравнение частот распадается на отдельные уравнения, содержащие только главные пере-

мещения δ_{ii} . В этом случае перемещения y_1, y_2, \dots, y_n называются *главными координатами*, а соответствующие формы колебаний - *главными формами колебаний*.

Главные формы колебаний обособлены друг от друга и каждая из них происходит со своей определённой частотой, которая выражается формулой, аналогичной формуле для вычисления собственной частоты системы с одной степенью свободы

$$\omega_i = \frac{1}{\sqrt{\delta_{ii} m_i}}.$$

Выбор главных координат для систем с числом степеней свободы, большим двух, в общем случае весьма затруднителен. При $n=2$ это возможно всегда.

Для симметричных систем с симметрично расположенными массами возможны прямо симметричные и обратно симметричные формы колебаний, при которых силы инерции будут соответственно прямо симметричны и обратно симметричны. В этом случае перемещения вычисляются как групповые от парных прямо симметричных или обратно симметричных единичных сил. Побочные перемещения, связывающие прямо симметричные и обратно симметричные силы инерции, обращаются в нуль. Это также приводит к распаду частотного уравнения на два независимых уравнения, из которых одно позволяет найти частоты прямо симметричных колебаний, а другое - обратно симметричных. Так как групповые перемещения определяются от парных единичных сил, то соответствующая масса должна входить в частотные уравнения с коэффициентом 0,5.

2.4.7. Крутильные колебания валов

Рассмотрим крутильные колебания многомассовой системы (рис. 26), которая является общепринятой эквивалентной схемой для расчёта

крутильных колебаний коленчатых валов. Коленчатый вал приводится к эквивалентной схеме путём следующих замен: момент инерции заменяющего диска относительно оси вала должен быть равен моменту инерции колена относительно той же оси, при этом учитывается присоединённая масса шатуна; жёсткость на кручение участка заменяющего вала должна быть равна жёсткости на кручение соответствующего участка коленчатого вала.

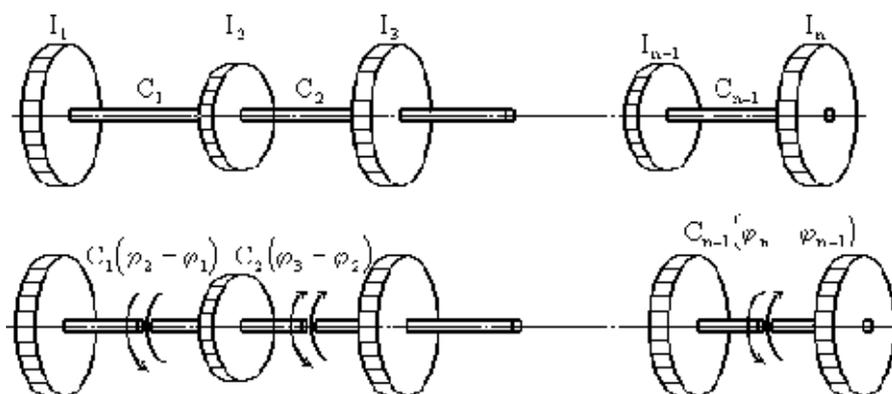


Рис. 26

Эти замены являются неплохой аппроксимацией, хотя и не обеспечивают полной эквивалентности обеих схем. Приведенный момент инерции масс колена и шатуна изменяется в процессе вращения коленчатого вала, поэтому замена колена диском с постоянным моментом инерции не является строгой. Кроме того, при действии на коленчатый вал двух противоположно направленных пар деформация будет заключаться не только в закручивании участка между парами: вследствие изгиба произойдёт закручивание и других участков.

Тем не менее экспериментальные исследования подтверждают приемлемость эквивалентной схемы при достаточно тщательном определении эквивалентных моментов инерции и особенно эквивалентных жёсткостей.

Обозначим через I_1, I_2, \dots, I_n моменты инерции масс дисков относительно продольной оси вала; C_1, C_2, \dots, C_{n-1} - коэффициенты жёсткости

Кроме того, возможно решение, описывающее упругие колебания системы

$$\begin{cases} \varphi_1 = A_1 \sin(\omega t + \alpha); \\ \varphi_2 = A_2 \sin(\omega t + \alpha); \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_n = A_n \sin(\omega t + \alpha). \end{cases} \quad (67)$$

Подставляя (67) в (65), получим

$$\begin{cases} C_1(A_2 - A_1) = -I_1\omega^2 A_1; \\ C_2(A_3 - A_2) - C_1(A_2 - A_1) = -I_2\omega^2 A_2; \\ C_3(A_4 - A_3) - C_2(A_3 - A_2) = -I_3\omega^2 A_3; \\ \dots\dots\dots \\ C_{n-1}(A_n - A_{n-1}) - C_{n-2}(A_{n-1} - A_{n-2}) = -I_{n-1}\omega^2 A_{n-1}; \\ -C_{n-1}(A_n - A_{n-1}) = -I_n\omega^2 A_n. \end{cases} \quad (68)$$

Система уравнений (68) содержит $(n + 1)$ неизвестных: n амплитуд и частоту колебаний ω .

Если преобразовать систему (68) и рассматривать её как однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных амплитуд A_1, A_2, \dots, A_n , то ненулевое её решение можно получить, как это неоднократно делалось выше, из условия равенства нулю определителя. Раскрывая определитель, получим частотное уравнение.

Для иллюстрации сказанного запишем систему (68) в преобразованном виде при $n = 3$

$$\begin{cases} (-C_1 + I_1\omega^2)A_1 + C_1A_2 = 0; \\ C_1A_1 + (-C_1 - C_2 + I_2\omega^2)A_2 + C_2A_3 = 0; \\ C_2A_2 + (-C_2 + I_3\omega^2)A_3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда получим частотный определитель

$$D = \begin{vmatrix} -C_1 + I_1\omega^2 & C_1 & 0 \\ C_1 & -C_1 - C_2 + I_2\omega^2 & C_2 \\ 0 & C_2 & -C_2 + I_3\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (69)$$

и частотное уравнение

$$\omega^2 \left[\frac{I_1 I_2 I_3}{C_1 C_2} \omega^4 - \left(\frac{I_2 + I_3}{C_1} I_1 + \frac{I_1 + I_2}{C_2} I_3 \right) \omega^2 + I_1 + I_2 + I_3 \right] = 0. \quad (70)$$

В общем случае степень частотного уравнения относительно ω^2 равна n . Один из корней всегда равен нулю и соответствует повороту всех дисков и вала как жёсткого целого. Остальные $(n-1)$ корней (собственных частот) соответствуют упругим колебаниям.

При $n \geq 4$ решение частотного уравнения представляет значительные трудности. Но цепная структура уравнений (68) позволяет упростить определение собственных частот при помощи метода последовательных приближений (метода остатков). Суть метода состоит в следующем. Принимая $A_1 = 1$ и задаваясь ориентировочным значением ω^2 , из первого уравнения системы (68) находят амплитуду A_2 ; из второго уравнения системы можно определить амплитуду A_3 , из третьего уравнения - амплитуду A_4 и, наконец, из предпоследнего уравнения - амплитуду A_n . Если в последнее уравнение системы (68) подставить вычисленные значения A_{n-1} и A_n , то оно, вообще говоря, не будет удовлетворяться вследствие произвольности исходного значения ω^2 (которое, по сути, является первым приближением). Полученное значение левой части (остаток) характеризует меру неточности первого приближения ω^2 и одновременно показывает, в какую сторону нужно изменить расчётное значение ω^2 во втором приближении.

Далее производят повторный расчёт при новом значении ω^2 . Знак и величина нового остатка помогут указать необходимую поправку в значении

ω^2 для следующего приближения. Расчёт повторяется до тех пор, пока не будет достигнут удовлетворительный результат в последнем уравнении.

При реализации метода удобнее всего использовать компактную табличную схему вычислений, основанную на соотношениях типа

$$C_i(A_{i+1} - A_i) = -I_1\omega^2 A_1 - I_2\omega^2 A_2 - \dots - I_i\omega^2 A_i, \quad (71)$$

которые получаются из уравнений (68) после сложения первых i уравнений системы. Соотношение (71) выражает равенство крутящего момента в сечении i -го участка вала (левая часть) сумме моментов сил инерции всех расположенных слева дисков (правая часть).

Задавая значение ω^2 и принимая $A_1 = 1$, находим из соотношения (71) для $i = 1$:

$$A_2 = -\frac{I_1\omega^2}{C_1} + 1.$$

Далее из того же соотношения для $i = 2$:

$$A_3 = -\frac{I_1\omega^2 + I_2\omega^2 A_2}{C_2} + A_2.$$

Общая формула имеет вид

$$A_{i+1} = -\frac{\sum_{k=1}^i I_k \omega^2 A_k}{C_i} + A_i.$$

Процесс продолжается таким образом до $(n-1)$ -го уравнения. После определения из него A_n можно переходить к последнему уравнению и вычислять его левую часть. Этот результат должен быть равен нулю, так как если сложить все уравнения типа (71), то должно получиться

$$\sum_{k=1}^n I_k \omega^2 A_k = 0.$$

Вследствие неточности принятого исходного значения ω^2 нуля в результате не получится. Остаток выражает неуравновешенный момент, который при точном выборе ω^2 должен быть равен нулю.

После нескольких расчётов такого типа (при разных значениях ω^2) можно построить кривую зависимости остатка R от ω^2 (рис.27).

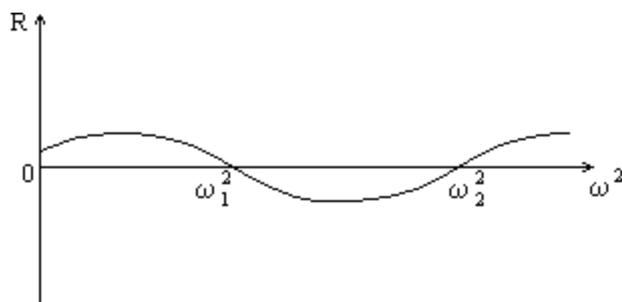


Рис. 27

Точки пересечения кривой с осью абсцисс соответствуют истинным значениям частот.

Объём вычислений может быть значительно уменьшен, если известны ориентировочные значения частот, для определения которых часто используют замену заданной системы упрощённой трехмассовой системой.

При записи решения (67) предполагалось, что колебания являются одночастотными, т.е. для любого диска описываются одной гармоникой

$$\varphi_i = A_i \sin(\omega t + \varphi).$$

Существование спектра частот ω требует обобщения решения (67) и записи его в виде

$$\varphi_i = A_{i1} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_{i2} \sin(\omega_2 t + \alpha_2) + \dots + A_{i,n-1} \sin(\omega_{n-1} t + \alpha_{n-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где первый индекс у амплитуды означает номер диска, а второй индекс - номер соответствующей частоты.

Для получения общего решения необходимо также учесть возможность вращения всей системы как жёсткого целого (что соответствует

частоте $\omega = 0$), т.е. добавить слагаемое вида (66), и тогда общее решение уравнений движения (65)

$$\varphi_i = A_0 + \omega_0 t + A_{i1} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_{i2} \sin(\omega_2 t + \alpha_2) + \dots + A_{i,n-1} \sin(\omega_{n-1} t + \alpha_{n-1})$$

$(i = 1, 2, \dots, n) \quad (72)$

Уравнения (72) содержат $2n$ неизвестных: $(n-1)$ неизвестных амплитуд колебаний первого диска $(A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1,n-1})$; $(n-1)$ неизвестных начальных фаз $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})$; угловое смещение A_0 и угловую скорость ω_0 . Амплитуды колебаний всех остальных дисков A_{ik} определяются через амплитуды составляющих колебаний первого диска A_{1k} ; отношения $\frac{A_{ik}}{A_{1k}}$ зависят от номера частоты k и определяют соответствующие формы колебаний.

Таким образом, для полного решения задачи необходимо и достаточно указать $2n$ начальных условий - угловые смещения и угловые скорости всех n дисков.

При произвольно заданных начальных условиях колебания каждого диска будут многочастотными, т.е. будут представлять собой сумму гармоник. Если начальные условия смещения соответствуют одной из собственных форм колебаний, то в дальнейшем процессе будут реализованы эта и только эта собственная форма и соответствующая собственная частота. В общем случае колебания будут носить сложный характер и представлять собой совокупность n форм колебаний. Относительное значение каждого из них зависит от близости заданной системы начальных смещений к той или иной собственной форме.

2.4.8. Примеры расчётов

Пример 6. Пружина несёт две массы $m = 2$ см каждая - одна на конце пружины, другая посередине (рис. 28,а). Средний диаметр пружины $D = 4$ см; диаметр проволоки пружины $d = 0.6$ см; число витков на каждой

половине пружины $n = 10$. Определить частоты собственных колебаний системы.

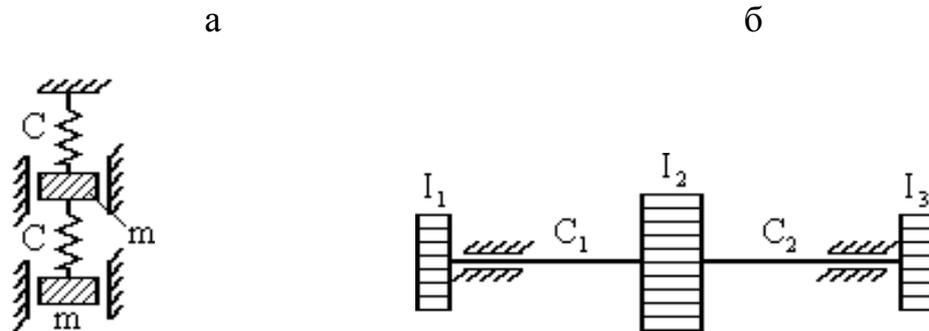


Рис. 28

Решение

Уравнения движения системы

$$\begin{cases} -m\ddot{X}_1 - CX_1 + C(X_2 - X_1) = 0; \\ -m\ddot{X}_2 - C(X_2 - X_1) = 0, \end{cases}$$

где X_1 и X_2 - смещения верхней и нижней масс соответственно; C - жёсткость пружины.

Решение системы уравнений ищем в виде

$$\begin{cases} X_1 = A_1 \cos \omega t; \\ X_2 = A_2 \cos \omega t. \end{cases}$$

После подстановки получим систему однородных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (2C - m\omega^2)A_1 - CA_2 = 0; \\ -CA_1 + (C - m\omega^2)A_2 = 0. \end{cases}$$

Частотное уравнение

$$(2C - m\omega^2)(C - m\omega^2) - C^2 = 0,$$

или

$$m^2\omega^4 - 3Cm\omega^2 + C^2 = 0.$$

Корни частотного уравнения:

$$\omega_1 = 0.168\sqrt{\frac{C}{m}}; \quad \omega_2 = 1.618\sqrt{\frac{C}{m}}.$$

Жёсткость пружины:

$$C = \frac{Gd^4}{8D^3n} = \frac{8 \cdot 10^7 \cdot (0.6 \cdot 10^{-2})^4}{8 \cdot (4 \cdot 10^{-2})^3 \cdot 10} = 20.25 \frac{\text{кН}}{\text{м}}.$$

Собственные частоты:

$$w_1 = 19.66 \text{ с}^{-1}; \quad w_2 = 51.48 \text{ с}^{-1}.$$

Пример 7. Определить частоты собственных колебаний невесомой консольной балки с двумя равными сосредоточенными массами (рис. 29,а). Построить собственные формы колебаний, проверить их ортогональность.

Решение

Прикладываем поочередно силу $\bar{F} = 1$ в точках расположения масс m_1 и m_2 и строим эпюры изгибающих моментов \bar{M}_1 и \bar{M}_2 (рис. 29,б).

Путем перемножения соответствующих эпюр способом Верещагина вычисляем единичные перемещения:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) = \frac{8}{EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 = -\frac{2}{EI};$$

$$\delta_{22} = \frac{2}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{1,33}{EI}.$$

Частотный определитель:

$$\begin{vmatrix} \delta_{11}m_1 - \frac{1}{\omega^2} & \delta_{12}m_2 \\ \delta_{21}m_1 & \delta_{22}m_2 - \frac{1}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0,$$

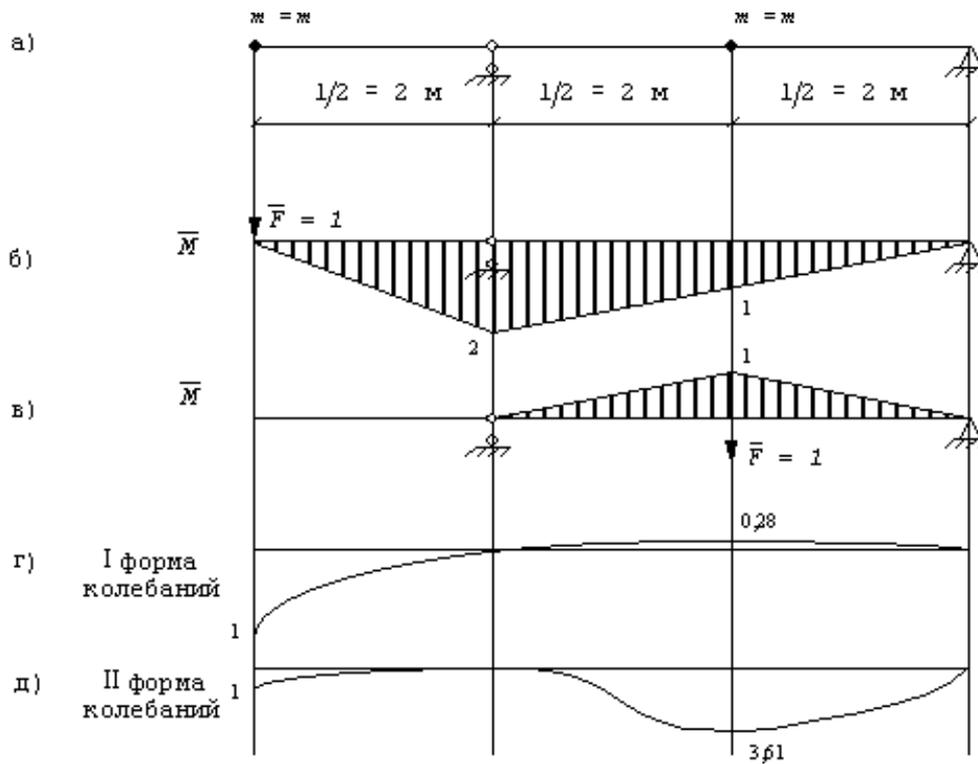


Рис. 29

ИЛИ

$$\begin{vmatrix} 8 \cdot 0,5 - \lambda & -2 \cdot 0,5 \\ -2 \cdot 0,5 & 1,33 \cdot 0,5 - 1 \end{vmatrix} = 0,$$

где $\lambda = \frac{EI}{\omega^2}$.

Частотное уравнение:

$$\lambda^2 - 4,67\lambda + 1,67 = 0.$$

$$\lambda_1 = 4,28; \lambda_2 = 0,39.$$

Собственные частоты колебаний:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{EI}{\lambda_1}} = 68,3 \text{ с}^{-1}; \omega_2 = \sqrt{\frac{EI}{\lambda_2}} = 226,4 \text{ с}^{-1}.$$

Система алгебраических уравнений относительно амплитуд колебаний A_1 и A_2 :

$$\begin{cases} (\delta_{11}m_1 - \frac{1}{\omega^2})A_1 + \delta_{11}m_2A_2 = 0; \\ \delta_{21}m_1A_1 + (\delta_{22}m_2 - \frac{1}{\omega^2})A_2 = 0; \end{cases}$$

Полагая $A_1=1$, находим A_2 из первого уравнения системы сначала при $\omega = \omega_1$, а затем при $\omega = \omega_2$:

$$A_2 = -\frac{\delta_{11}m_1 - 1/\omega^2}{\delta_{12}m_2} A_1;$$

$$\omega_1 = 68,3 \text{ c}^{-1} \Rightarrow A_{21} = -\frac{8 \cdot 0,5 - 4,28}{-2 \cdot 0,5} = -0,28;$$

$$\omega_2 = 226,4 \text{ c}^{-1} \Rightarrow A_{22} = -\frac{8 \cdot 0,5 - 0,39}{-2 \cdot 0,5} = 3,61.$$

Формы колебаний представлены на рис. 29,г,д.

Проверяем выполнение условия ортогональности:

$$m_1 A_{11} A_{12} + m_2 A_{21} A_{22} = 0,5(1 \cdot 1 - 0,28 \cdot 3,61) = 0.$$

Пример 8. Определитель частоты свободных колебаний балки с тремя равными сосредоточенными массами m (рис. 30,а), если $m=0,5 \frac{\text{кН}\cdot\text{с}^2}{\text{м}}$; $\ell=8 \text{ м}$; $EI = 2 \cdot 10^4 \text{ кН}\cdot\text{м}^2$.

Решение

Так как система и расположенные на ней массы симметричны, то задача может быть решена с использованием симметрии.

Строим единичные эпюры изгибающих моментов $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3$ (рис. 30,б,в,г).

Вычисляем единичные перемещения путем перемножения соответствующих эпюр по способу Верещагина:

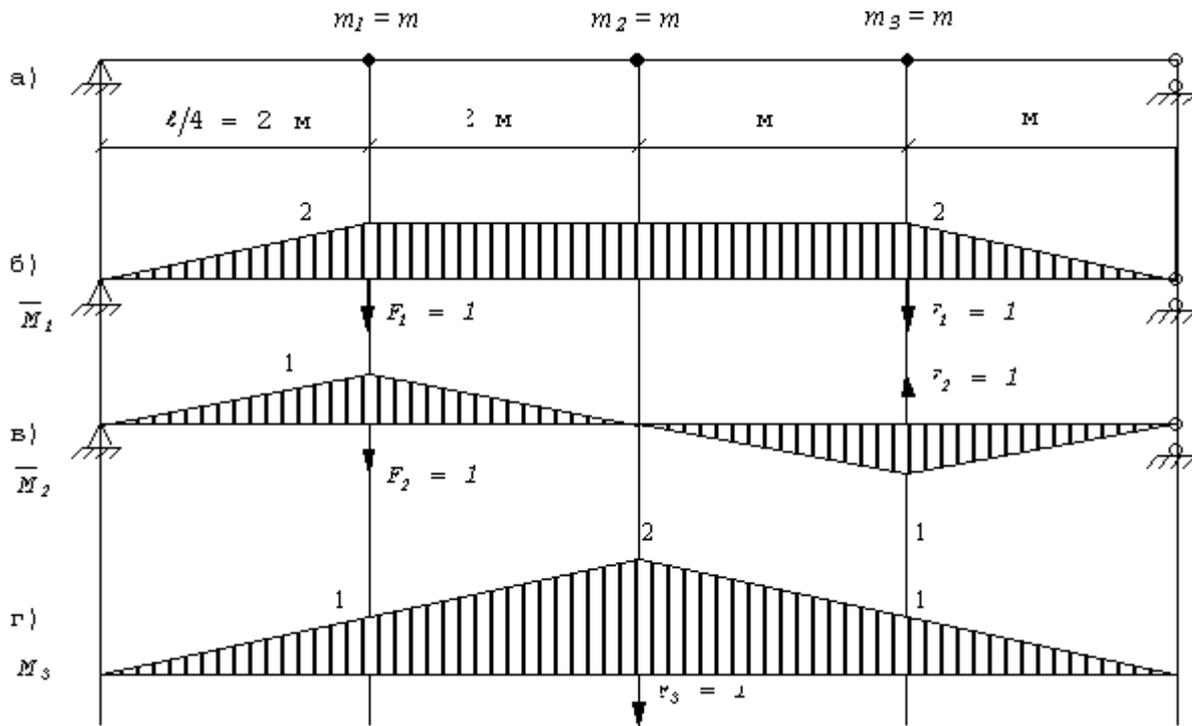


Рис. 30

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \right) = \frac{21,33}{EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 0;$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \frac{2}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1+2}{2} \cdot 2 \cdot 2 \right) = \frac{14,67}{EI};$$

$$\delta_{22} = \frac{4}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2,67}{EI};$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = 0;$$

$$\delta_{33} = \frac{2}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{10,67}{EI}.$$

Определитель для симметричных колебаний составляем с учетом того, что перемещения от групповой силы \$\bar{F}_1\$, состоящей из двух сил, получились удвоенными, поэтому соответствующая масса вводится с коэффициентом 0,5:

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} \frac{m}{2} - \frac{1}{\omega^2} & \delta_{13} m \\ \delta_{31} \frac{m}{2} & \delta_{33} m - \frac{1}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\begin{vmatrix} 21,33 \cdot 0,25 - \lambda & 14,67 \cdot 0,5 \\ 14,67 \cdot 0,25 & 10,67 \cdot 0,5 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

где $\lambda = \frac{EI}{\omega^2}$.

Соответствующее частотное уравнение:

$$\lambda^2 - 10,67\lambda + 1,55 = 0.$$

Собственные частоты симметричных колебаний:

$$\lambda_1 = 10,52 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{EI}{\lambda_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^4}{10,52}} = 43,6 \text{ c}^{-1};$$

$$\lambda_3 = 0,15 \Rightarrow \omega_3 = \sqrt{\frac{EI}{\lambda_3}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^4}{0,15}} = 365,1 \text{ c}^{-1}.$$

Частотное уравнение для обратно симметричных колебаний:

$$\delta_{22} \frac{m}{2} - \frac{1}{\omega_2^2} = 0;$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2}{\delta_{22} m}} = \sqrt{\frac{2EI}{2,67 \cdot 0,5}} = 173,1 \text{ c}^{-1}.$$

Пример 9. Определить собственные частоты и формы колебаний системы, состоящей из трех дисков с моментами инерции масс $I_1 = 0,2 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$; $I_2 = 0,3 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$; $I_3 = 0,1 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$, укрепленных на стальном валу с жесткостями $C_1 = 0,1 \text{ кН} \cdot \text{м}$ и $C_2 = 0,2 \text{ кН} \cdot \text{м}$ (рис. 28,б).

Решение

Уравнения движения системы, составленные прямым методом, таковы:

$$\begin{cases} -I_1\ddot{\varphi}_1 + C_1(\varphi_2 - \varphi_1) = 0, \\ -I_2\ddot{\varphi}_2 - C_1(\varphi_2 - \varphi_1) + C_2(\varphi_3 - \varphi_2) = 0, \\ -I_3\ddot{\varphi}_3 - C_2(\varphi_3 - \varphi_2) = 0. \end{cases}$$

Решение системы ищем в виде

$$\varphi_i = A_i \cos \omega t, (i = 1, 2, 3).$$

После подстановки получаем систему однородных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} (I_1\omega^2 - C_1)A_1 + C_1A_2 = 0; \\ C_1A_1 + (I_2\omega^2 - C_1 - C_2)A_2 + C_2A_3 = 0; \\ C_2A_2 + (I_3\omega^2 - C_2)A_3 = 0. \end{cases}$$

Приравняв определитель системы нулю и раскрывая его, получим частотное уравнение

$$\omega^6 - \left(\frac{C_1 + C_2}{I_2} + \frac{C_1}{I_1} + \frac{C_2}{I_3}\right)\omega^4 + C_1C_2 \frac{I_1 + I_2 + I_3}{I_1I_2I_3}\omega^2 = 0.$$

Собственные частоты колебаний:

$$\omega_1 = 0; \omega_2 = 26,8 \text{ c}^{-1}; \omega_3 = 52,7 \text{ c}^{-1}.$$

Нулевая частота соответствует повороту вала и дисков как жесткого целого.

Для ненулевых частот определяем собственные формы колебаний, принимая $A_2 = 1$.

Соотношение между амплитудами:

$$A_1 : A_2 : A_3 = \frac{C_1}{C_1 - I_1\omega^2} : 1 : \frac{C_2}{C_2 - I_3\omega^2}.$$

Первая форма колебаний при $\omega = \omega_2$:

$$A_1 : A_2 : A_3 = (-2,283) : 1 : 1,561.$$

Вторая форма колебаний при $\omega = \omega_3$:

$$A_1 : A_2 : A_3 = 0,219 : 1 : (-2,561).$$

Пример 10. Методом последовательных приближений определить две низших частоты собственных колебаний судовой дизельной установки по уточненной схеме, состоящей из дисков 1-6, к которым приведены кривошипы двигателей, маховика 7 и гребного винта 8 с присоединенными массами гребного вала и воды (рис.31,а) при следующих данных:

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = I_5 = I_6 = 0,28 \text{ кН} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2; I_7 = 8,4 \text{ кН} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2;$$

$$I_8 = 3,0 \text{ кН} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2; C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C_6 = 2 \cdot 10^4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$C_7 = 0,12 \cdot 10^4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Значения частот в первом приближении определить для упрощенной трехдисковой схемы (рис. 31,б).

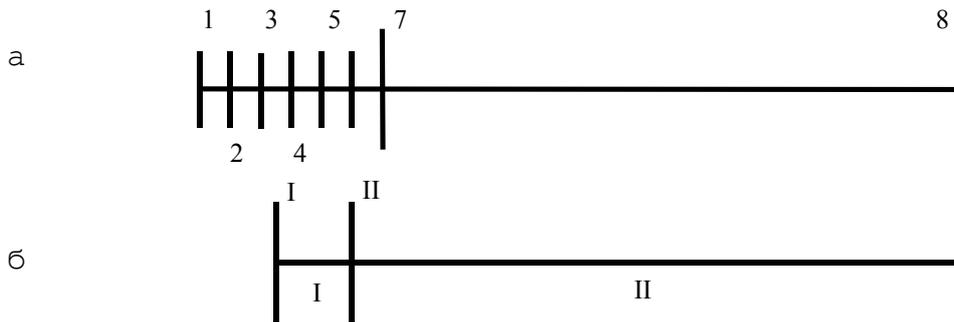


Рис. 31

Решение

Для приближенного определения двух низших частот образуем упрощенную схему (рис.31,б), в которой первые шесть дисков заменены одним общим, причем

$$I_I = 6I_1 = 6 \cdot 0,28 = 1,68 \text{ кН} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2;$$

$$I_{II} = I_7 = 8,4 \text{ кН} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2;$$

$$I_{III} = I_8 = 3,0 \text{ кН} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2.$$

Длина участка I–II в упрощенной схеме в 3,5 раза больше длины каждого участка между дисками 1-6 в исходной схеме, поэтому жесткости участков вала в упрощенной схеме

$$C_1 = \frac{C_1}{3,5} = \frac{2 \cdot 10^4}{3,5} = 5714 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$C_{II} = C_7 = 1200 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Таблица 1

№ диска	I	$I\omega^2$	A	$I\omega^2 A$	$\sum I\omega^2 A$	C	$\sum I\omega^2 A/C$
1	0,28	144,48	1,000	144,48	144,48	2.104	0,007
2	0,28	144,48	0,993	143,47	287,95	2.104	0,014
3	0,28	144,48	0,979	141,45	429,40	$2 \cdot 10^4$	0,021
4	0,28	144,48	0,958	138,34	567,74	$2 \cdot 10^4$	0,028
5	0,28	144,48	0,930	134,31	702,05	$2 \cdot 10^4$	0,035
6	0,28	144,48	0,895	129,29	831,34	$2 \cdot 10^4$	0,042
7	8,4	4334,4	0,853	3699,12	4530,46	$1,2 \cdot 10^3$	3,775
8	3,0	1548,0	-2,922	-4523,85	6,61		

В соответствии с (70) частотное уравнение для упрощенной схемы имеет вид

$$\omega^2 \left[\frac{I_I I_{II} I_{III}}{C_I C_{II}} \omega^4 - \left(\frac{I_I + I_{II}}{C_{II}} I_{III} + \frac{I_{II} + I_{III}}{C_I} I_I \right) \omega^2 + I_I + I_{II} + I_{III} \right] = 0.$$

$$\frac{1,68 \cdot 8,4 \cdot 3}{5714 \cdot 1200} \omega^4 - \left(\frac{1,68 + 8,4}{1200} \cdot 3 + \frac{8,4 + 3}{5714} \cdot 1,68 \right) \omega^2 + 1,68 + 8,4 + 3 = 0.$$

Приближенные значения двух низших частот:

$$\omega_1^2 = 515,9 \text{ c}^{-2}; \omega_1 = 22,7 \text{ c}^{-1};$$

$$\omega_2^2 = 4108 \text{ c}^{-2}; \omega_2 = 64,1 \text{ c}^{-1}.$$

В качестве первого приближения для уточнения первой собственной частоты колебаний принимаем $\omega_1^2 = 516 \text{ c}^{-2}$. Результаты расчетов представлены в табл. 1.

Полученное значение остатка $\sum I\omega^2 A = 6,61$ означает, что принятое в первом приближении значение $\omega_1^2 = 516 \text{ c}^{-2}$ незначительно отличается от истинного, поэтому во втором приближении принимаем: $\omega_1^2 = 530 \text{ c}^{-2}$. Результаты расчетов сведены в табл. 2.

Таблица 2

№ диска	I	$I\omega^2$	A	$I\omega^2 A$	$\sum I\omega^2 A$	C	$\sum I\omega^2 A/c$
1	0,28	148,4	1,000	148,4	148,4	$2 \cdot 10^4$	0,007
2	0,28	148,4	0,993	147,3	295,7	$2 \cdot 10^4$	0,015
3	0,28	148,4	0,978	145,2	440,9	$2 \cdot 10^4$	0,022
4	0,28	148,4	0,956	141,9	582,8	$2 \cdot 10^4$	0,029
5	0,28	148,4	0,927	137,6	720,4	$2 \cdot 10^4$	0,036
6	0,28	148,4	0,891	132,2	852,6	$2 \cdot 10^4$	0,043
7	8,4	4452,0	0,848	3776,9	4629,5	$1,2 \cdot 10^3$	3,858
8	3,0	1590,0	-3,01	-4785,8	-156,3		

Остаток $\sum I\omega^2 A = -156,3$ имеет знак, противоположный полученному в первом приближении. Следовательно, можно утверждать, что истинное значение величины ω_1^2 лежит в пределах $(516 \div 530) \text{ с}^{-2}$.

$$\omega_1^2 = 516 \text{ с}^{-2} \Rightarrow \sum I\omega^2 A = 6,61;$$

$$\omega_1^2 = 530 \text{ с}^{-2} \Rightarrow \sum I\omega^2 A = -156,3.$$

Используя линейную интерполяцию, находим достаточно точное значение ω_1^2 : $\omega_1^2 = 516,6 \text{ с}^{-2} \Rightarrow \omega_1 = 22,73 \text{ с}^{-1}$.

Для уточнения второй собственной частоты в качестве первого приближения принимаем $\omega_2^2 = 4108 \text{ с}^{-2}$. Результаты расчетов представлены в табл. 3.

Таблица 3

№ диска	I	$I\omega^2$	A	$I\omega^2 A$	$\sum I\omega^2 A$	C	$\sum I\omega^2 A/C$
1	0,28	1150,2	1,000	1150,2	1150,2	$2 \cdot 10^4$	0,058
2	0,28	1150,2	0,943	1083,5	2233,7	$2 \cdot 10^4$	0,112
3	0,28	1150,2	0,830	955,0	3188,7	$2 \cdot 10^4$	0,159
4	0,28	1150,2	0,671	771,3	3960,0	$2 \cdot 10^4$	0,198
5	0,28	1150,2	0,473	544,0	4505,0	$2 \cdot 10^4$	0,225
6	0,28	1150,2	0,248	285,0	4789,0	$2 \cdot 10^4$	0,239
7	8,4	34507,2	0,009	295,0	5084,0	$1,2 \cdot 10^3$	4,237
8	3,0	12324,0	-4,228	-52102,0	-47018,0		

Полученное значение остатка $\sum I\omega^2 A = -47018,0$ очень велико, поэтому для второго приближения необходимо значительно изменить величину ω_2^2 . Принимаем на втором шаге $\omega_2^2 = 5000 \text{ с}^{-2}$. Результаты расчета сведены в табл. 4.

Таблица 4

№ диска	I	$I\omega^2$	A	$I\omega^2 A$	$\sum I\omega^2 A$	C	$\sum I\omega^2 A/C$
1	0,28	1400	1,000	1400	1400	$2 \cdot 10^4$	0,070
2	0,28	1400	0,930	1302	2702	$2 \cdot 10^4$	0,135
3	0,28	1400	0,795	1113	3815	$2 \cdot 10^4$	0,191
4	0,28	1400	0,604	846	4661	$2 \cdot 10^4$	0,233
5	0,28	1400	0,371	519	5180	$2 \cdot 10^4$	0,259
6	0,28	1400	0,112	157	5337	$2 \cdot 10^4$	0,267
7	8,4	42000	-0,155	-6503	-1166	$1,2 \cdot 10^3$	-0,972
8	3,0	15000	0,817	12255	11089		

Остаток $\sum I\omega^2 A = 11089$ имеет знак, противоположный полученному в первом приближении. Следовательно, можно утверждать, что точное значение величины ω_2^2 лежит в интервале $(4108 \div 5000) \text{ с}^{-2}$.

Путем линейной интерполяции находим

$$\omega_2^2 = 4847 \text{ с}^{-2} \Rightarrow \omega_2 = 69,6 \text{ с}^{-1}.$$

Полученное значение собственной частоты ω_2 не является точным, хотя и близко к нему. Для уточнения значения ω_2 необходимо максимально

сузить интервал, в котором остаток $\sum I\omega^2 A$ меняет знак, что требует заполнения еще по меньшей мере двух таблиц.

2.4.9. Свободные колебания автомобиля

Рассмотрим автомобиль как систему упругосвязанных между собой жестких тел (рис. 32,а). Здесь тело 1 схематически представляет собой кузов автомобиля, тела 2-5 - колеса, массы которых будем считать сосредоточенными.

Движение такой системы в процессе колебаний характеризуется семью координатами:

y_1 - вертикальное перемещение центра тяжести кузова;

y_2, y_3, y_4, y_5 - вертикальные перемещения центров тяжести колес;

y_6 - угол поворота кузова относительно поперечной оси;

y_7 - угол поворота кузова относительно продольной оси.

Распределение масс автомобиля и жесткостей упругих связей почти симметрично относительно средней продольной плоскости, поэтому в расчетах колебаний некоторой малой асимметрией можно пренебречь. При этом общий процесс колебаний можно рассматривать состоящим из двух взаимно не связанных процессов (рис. 32,б,в): *продольных колебаний*, характеризуемых вертикальным перемещением кузова y_1 , поворотом кузова вокруг поперечной оси y_6 и попарно равными перемещениями обоих передних колес $y_2 = y_4$ и обоих задних колес $y_3 = y_5$; *поперечных (боковых) колебаний*, характеризуемых поворотом кузова вокруг продольной оси y_7 и попарно равными перемещениями обоих левых колес $y_2 = y_3$ и обоих правых колес $y_4 = y_5$.

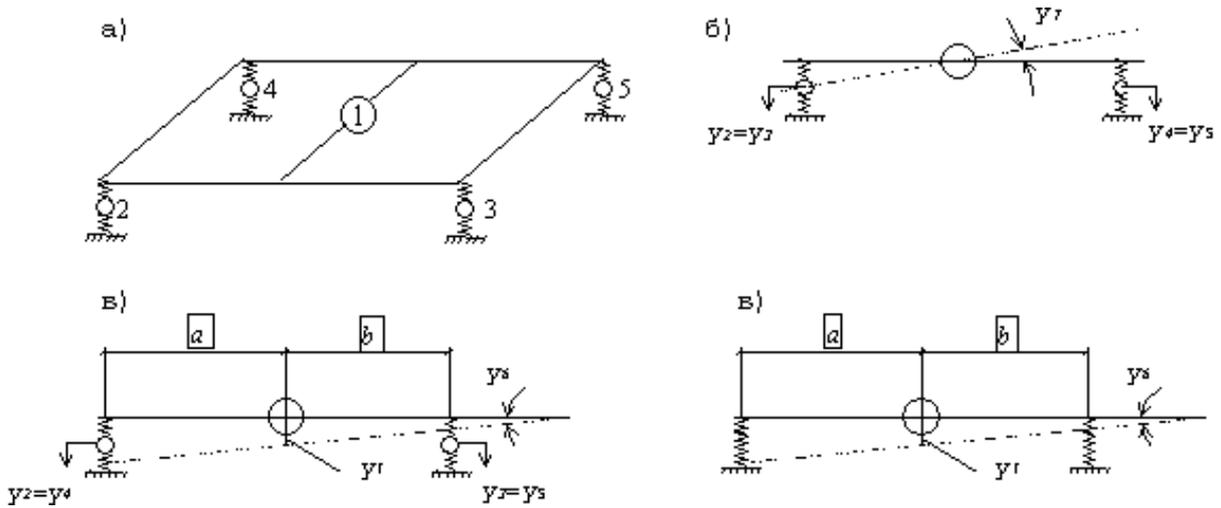


Рис. 32

В соответствии с этим продольные колебания описываются четырьмя, а поперечные колебания - тремя дифференциальными уравнениями.

Рассмотрим продольные колебания, которые имеют основное значение.

Обозначим жесткости шин через C ; жесткости передних и задних рессор через C_{II} и C_3 соответственно; массы кузова и колеса - через m и m_K . Радиус инерции кузова относительно поперечной оси, проходящей через его центр тяжести, обозначим через ρ .

Тогда деформации рессор составляют

$$\Delta_{II} = y_1 + ay_6 - y_2 \text{ (передняя рессора);}$$

$$\Delta_3 = y_1 - by_6 - y_3 \text{ (задняя рессора).}$$

Уравнения движения составим на основе уравнений Лагранжа.

Кинетическая энергия системы складывается из следующих частей:

кинетической энергии кузова

$$\frac{m\dot{y}_1^2}{2} + \frac{m\rho^2 \dot{y}_6^2}{2};$$

кинетической энергии передних колес

$$2 \cdot \frac{m_K \dot{y}_2^2}{2};$$

кинетической энергии задних колес

$$2 \cdot \frac{m_K \dot{y}_3^2}{2}.$$

Суммарная кинетическая энергия:

$$K = \frac{1}{2} [m(\dot{y}_1^2 + \rho^2 \dot{y}_6^2) + 2m_K(\dot{y}_2^2 + \dot{y}_3^2)].$$

Потенциальная энергия деформации рессор:

$$\Pi_p = 2 \frac{C_n \Delta_n^2}{2} + 2 \frac{C_3 \Delta_3^2}{2} = C_n (y_1 - y_2 + ay_6)^2 + C_3 (y_1 - y_3 - by_6)^2.$$

Потенциальная энергия сжатия шин:

$$\Pi_{ш} = 2 \frac{Cy_2^2}{2} + 2 \frac{Cy_3^2}{2} = C(y_2^2 + y_3^2).$$

Суммарная потенциальная энергия:

$$\Pi = C_n (y_1 - y_2 + ay_6)^2 + C_3 (y_1 - y_3 - by_6)^2 + C(y_2^2 + y_3^2).$$

Вычисляя соответствующие производные и подставляя в уравнения Лагранжа (29), получим

$$\begin{cases} m\ddot{y}_1 + 2C_n(y_1 - y_2 + ay_6) + 2C_3(y_1 - y_3 - by_6) = 0; \\ 2m_K\ddot{y}_2 - 2C_n(y_1 - y_2 + ay_6) + 2Cy_2 = 0; \\ 2m_K\ddot{y}_3 - 2C_3(y_1 - y_3 + by_6) + 2Cy_3 = 0; \\ m\rho^2\ddot{y}_6 + 2C_n(y_1 - y_2 + ay_6)a - 2C_3(y_1 - y_3 - by_6)b = 0. \end{cases} \quad (73)$$

Частное решение системы (73) имеет вид

$$y_i = A_i \sin(\omega t + \alpha) \quad (i = 1, 2, 3, 6).$$

Подстановка частного решения в уравнение (73) приведет, как в рассмотренных ранее системах, к однородным относительно амплитуд A_i алгебраическим уравнениям и соответственно обнаружатся четыре собственных частоты колебаний.

С практической точки зрения удовлетворительный результат дает рассмотрение упрощенной схемы продольных колебаний (рис. 32,г).

Будем считать шины недеформируемыми, тогда рассматриваемая система обладает двумя степенями свободы, соответствующими координатам y_1 и y_6 . Положим в полученных выше выражениях для кинетической и потенциальной энергий $y_2 = y_3 = 0$, тогда эти выражения принимают вид

$$K = \frac{m}{2}(\dot{y}_1^2 + \rho^2 \dot{y}_6^2),$$

$$\Pi = C_{\pi}(y_1 + ay_6)^2 + C_3(y_1 - by_6)^2.$$

Уравнения Лагранжа:

$$\begin{cases} m\ddot{y}_1 + 2C_{\pi}(y_1 + ay_6) + 2C_3(y_1 - by_6) = 0; \\ m\rho^2\ddot{y}_6 + 2C_{\pi}(y_1 + ay_6)a - 2C_3(y_1 - by_6)b = 0. \end{cases}$$

Частное решение

$$y_i = A_i \sin(\omega t + \alpha) \quad (i=1,6).$$

После его подстановки получим

$$\begin{cases} -mA_1\omega^2 + 2C_{\pi}(A_1 + aA_6) + 2C_3(A_1 - bA_6) = 0, \\ -m\rho^2\omega^2 A_6 + 2C_{\pi}(A_1 + aA_6)a - 2C_3(A_1 - bA_6)b = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (-m\omega^2 + 2C_{\pi} + 2C_3)A_1 + (2C_{\pi}a - 2C_3b)A_6 = 0, \\ (2C_{\pi}a - 2C_3b)A_1 + (-m\rho^2\omega^2 + 2C_{\pi}a^2 + 2C_3b^2)A_6 = 0. \end{cases} \quad (74)$$

Как обычно, для получения нетривиального решения приравняем нулю определитель системы:

$$\begin{vmatrix} -m\omega^2 + 2C_n + 2C_3 & 2C_n a - 2C_3 b \\ 2C_n a - 2C_3 b & -m\rho^2\omega^2 + 2C_n a^2 + 2C_3 b^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим частотное уравнение в виде

$$\omega^4 - \frac{2}{m\rho^2} [C_n(a^2 + \rho^2) + C_3(b^2 + \rho^2)]\omega^2 + \frac{4C_n C_3}{m^2 \rho^2} (a + b)^2 = 0. \quad (75)$$

Определив из уравнения (75) собственные частоты, можно найти соответствующие им собственные формы колебаний. Для этого из какого-либо (например, из первого) уравнения системы (74) нужно образовать отношение амплитуд

$$\frac{A_6}{A_1} = \frac{m\omega^2 - 2C_n - 2C_3}{2C_2 \epsilon - 2C_3 b} \quad (76)$$

и подставить в него поочередно оба корня частотного уравнения.

Рассмотрим подробно частный случай такого распределения масс, при котором $\rho^2 = ab$. В этом случае частотное уравнение (75) имеет корни:

$$\begin{cases} \omega_1^2 = \frac{2C_n(a+b)}{mb}; \\ \omega_2^2 = \frac{2C_3(a+b)}{ma}. \end{cases} \quad (77)$$

Для определения собственных форм колебаний подставим эти корни поочередно в соотношение (76). Тогда для первой собственной формы получим

$$A_{61} = \frac{A_{11}}{b},$$

а для второй собственной формы - $A_{62} = -\frac{A_{12}}{a}$.

Эти формы колебаний представлены на рис. 33,а,б. Их особенностью является неподвижность одной оси автомобиля при колебаниях другой. Формулы (77) показывают, что в этом частном случае частоты можно вычислять, используя схему, показанную на рис.33,в, т.е. распределяя общую массу по закону рычага.

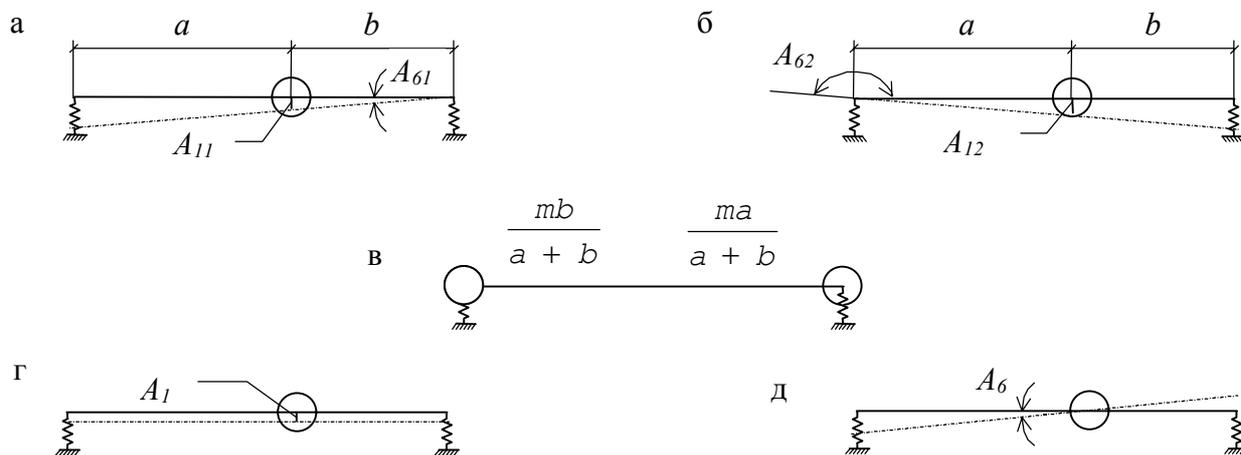


Рис. 33

В другом частном случае, когда $C_{пa} = C_3b$, уравнения (74) становятся независимыми

$$\begin{cases} (-m\omega^2 + 2C_{п} + 2C_3)A_1 = 0; \\ (-m\rho^2\omega^2 + 2C_{п}a^2 + 2C_3a^2)A_6 = 0, \end{cases} \quad (78)$$

что означает возможность чисто вертикальных колебаний при отсутствии поворотов - «подпрыгивание» (рис. 33,г), а также чисто угловых колебаний при неподвижности центра тяжести - «галопирование» (рис. 33,д).

Действительно, система (78) удовлетворяется решением $A_1 \neq 0, A_6 = 0$ при выполнении равенства

$$-m\omega^2 + 2C_{п} + 2C_3 = 0 \quad (79)$$

и решением $A_1 = 0, A_6 \neq 0$ при выполнении равенства

$$-m\rho^2\omega^2 + 2C_{п}a^2 + 2C_3b^2 = 0. \quad (80)$$

Из (79) находим первую собственную частоту:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2(C_n + C_3)}{m}},$$

а из (80) - вторую собственную частоту:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2(C_n a^2 + C_3 b^2)}{m \rho^2}}.$$

Пример 11. Определить собственные частоты и собственные формы

колебаний автомобиля, для которого известно: $m = 0,16 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}^2}{\text{м}}$;

$\rho = 1,225 \text{ м}$; $2C_n = 4,84 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$; $2C_3 = 3,7 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$; $a = 1,31 \text{ м}$; $b = 1,39 \text{ м}$.

Решение

Частотное уравнение (75) после подстановки в него заданных числовых значений принимает вид

$$\omega^4 - 117,8\omega^2 + 3400 = 0.$$

Собственные частоты:

$$\omega_1 = 7,11 \text{ с}^{-1}; \omega_2 = 8,20 \text{ с}^{-1}.$$

Для определения собственных форм колебаний воспользуемся формулой (76)

$$\frac{A_{61}}{A_{11}} = \frac{0,16 \cdot 50,6 - 4,84 - 3,7}{4,84 \cdot 1,31 - 3,7 \cdot 1,39} = -0,37 \text{ м}^{-1}$$

$$\frac{A_{62}}{A_{12}} = \frac{0,16 \cdot 67,2 - 4,84 - 3,7}{4,84 \cdot 1,31 - 3,7 \cdot 1,39} = 1,83 \text{ м}^{-1}$$

Собственные формы колебаний представлены на рис. 34,а,б.

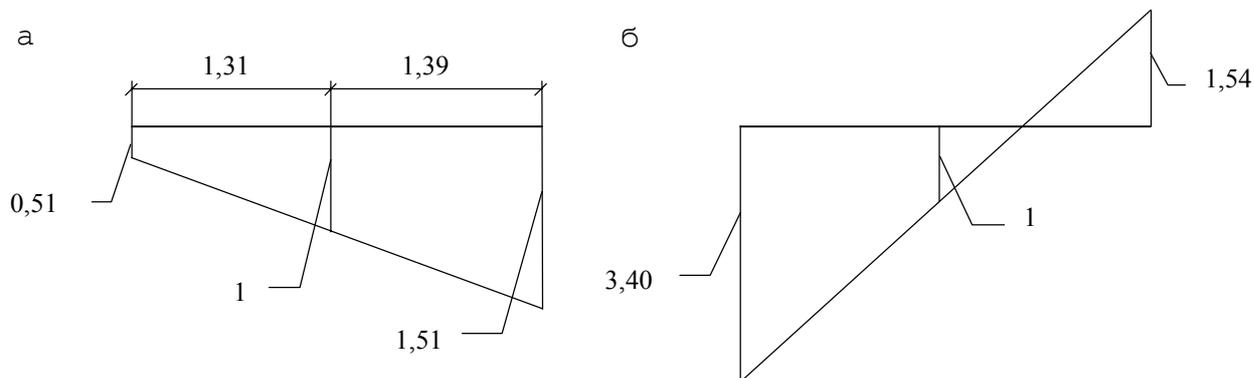


Рис. 34

Первая форма представляет собой, в основном, «подпрыгивание» кузова, а вторая - «галопирование».

Убедимся в ортогональности этих форм. Условие ортогональности имеет вид

$$\begin{aligned}
 mA_{11}A_{12} + m\rho^2 A_{61}A_{62} &= mA_{11}A_{12} \left(1 + \rho^2 \frac{A_{61}A_{62}}{A_{11}A_{12}} \right) = \\
 &= mA_{11}A_{12} (1 - 1,5 \cdot 0,37 \cdot 1,83) \cong 0.
 \end{aligned}$$

Глава 3

Вынужденные колебания

3.1. Системы с одной степенью свободы при отсутствии трения

3.1.1. Силовое возбуждение колебаний

Независимо от природы вынуждающих сил будем исходить из того, что каждая из них задана в виде некоторой функции времени $F_i = F_i(t)$, где $i = 1, 2, \dots, n$ - порядковый номер материальной точки.

Рассмотрим простейшую систему (рис.35,а) с одной степенью свободы, которая совершает колебания под действием вынуждающей силы $F(t)$. В любой момент времени на груз массой m действуют две силы: сила упругости пружины, пропорциональная смещению груза X , и возмущающая сила $F(t)$, изменяющаяся во времени по некоторому, заранее заданному закону (рис.35,б).



Рис. 35

Дифференциальное уравнение движения груза:

$$m\ddot{x} + cx = F(t),$$

где C - жесткость пружины,

или
$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m}. \quad (81)$$

Это уравнение иногда называют стандартным, так как к нему можно прийти и при рассмотрении других систем с одной степенью свободы, имеющих совершенно иной конструктивный вид.

В качестве примера рассмотрим задачу о колебаниях, вызываемых единичным толчком, т.е. внезапно приложенной в момент времени $t = \tau$ и затем постоянно действующей силой $F = 1$ (рис. 36,а).

При $t \geq \tau$ дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m}.$$

Решение уравнения должно удовлетворять начальным условиям $x = 0$ и $\dot{x} = 0$ при $t = \tau$ и представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного уравнения

$$x_1 = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$$

и частного решения заданного уравнения

$$x_2 = \frac{1}{m\omega^2} = \frac{1}{C},$$

т.е. $x = x_1 + x_2 = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t + \frac{1}{C}.$

Используя начальные условия, определим постоянные интегрирования C_1 и C_2 :

$$C_1 = -\frac{\sin \omega \tau}{C}; C_2 = -\frac{\cos \omega \tau}{C}$$

и тогда

$$x = \frac{1 - \cos \omega(t - \tau)}{C}.$$

Этот закон движения показан на рис. 36,б. Максимальное значение смещения x составляет $x_{\max} = 2/c$, т.е. в два раза превышает перемещение, вызванное статическим действием силы $F = 1$.

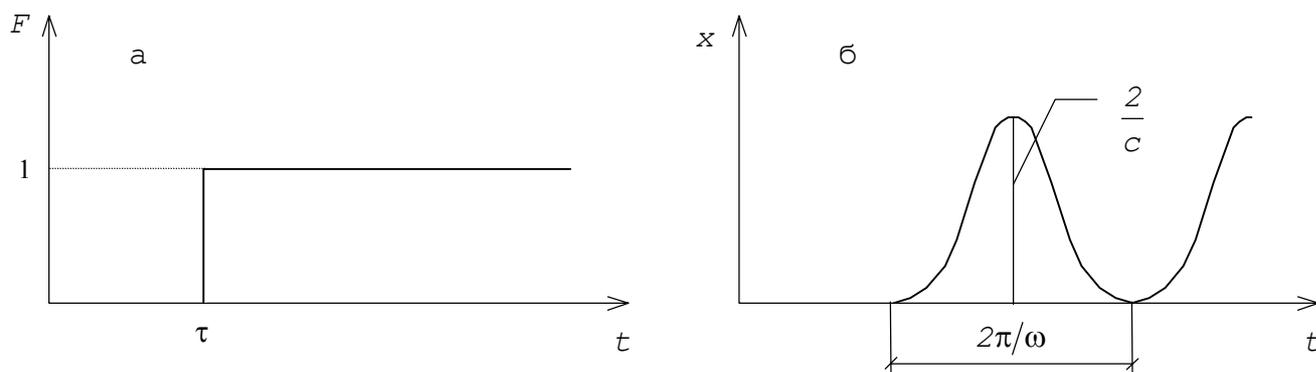


Рис. 36

3.1.2. Кинематическое возбуждение колебаний

К такому же стандартному уравнению можно привести задачу о вынужденных колебаниях, вызываемых кинематическим способом. Рассмотрим вновь одномассовую систему, но предположим, что причиной колебаний груза m являются колебания точки крепления пружины (рис. 37). Пусть закон движения этой точки задан в виде $f = f(t)$. Удлинение пружины в текущий момент времени равно $x - f$, а на груз действует сила упругости пружины - $C(x - f)$, и дифференциальное уравнение движения

$$m\ddot{x} + C(x - f) = 0,$$

или

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{Cf(t)}{m}.$$

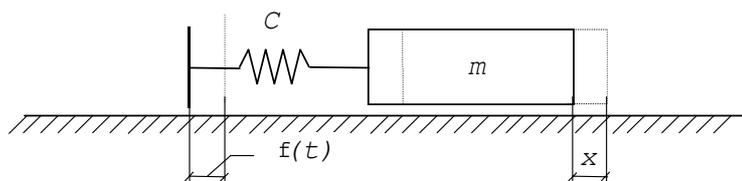


Рис. 37

Произведение $Cf(t)$ можно считать приведенной возмущающей силой $F(t)$, и тогда уравнение движения принимает стандартный вид (81).

3.1.3. Общее решение стандартного уравнения

Известны несколько методов решения уравнения (81). Рассмотрим наиболее часто используемый метод - *метод вариации произвольных постоянных*, применение которого позволяет получить результат, пригодный для любых законов изменения возмущающей силы.

Идея метода состоит в том, что частное решение уравнения (81) ищется в виде

$$x = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t, \quad (82)$$

соответствующем решению однородного уравнения, но здесь величины C_1 и C_2 следует считать не постоянными, а переменными. В результате задача определения функции $x(t)$ заменяется задачей определения двух функций - $C_1(t)$ и $C_2(t)$. Так как для этого имеется только одно уравнение (82), то функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$ можно связать еще одной произвольной зависимостью.

Составим выражение скорости:

$$\dot{x} = C_1 \omega \cos \omega t - C_2 \omega \sin \omega t + \dot{C}_1 \sin \omega t + \dot{C}_2 \cos \omega t$$

и свяжем \dot{C}_1 и \dot{C}_2 соотношением

$$\dot{C}_1 \sin \omega t + \dot{C}_2 \cos \omega t = 0, \quad (83)$$

тогда скорость запишется в форме

$$\dot{x} = C_1 \omega \cos \omega t - C_2 \omega \sin \omega t,$$

а ускорение

$$\ddot{x} = -C_1 \omega^2 \sin \omega t - C_2 \omega^2 \cos \omega t + \dot{C}_1 \omega \cos \omega t - \dot{C}_2 \omega \sin \omega t. \quad (84)$$

Подставляя (82) и (84) в (81), получим

$$\dot{C}_1 \cos \omega t - \dot{C}_2 \sin \omega t = \frac{F(t)}{m\omega}. \quad (85)$$

Из (83) и (85) можно найти производные $\dot{C}_1(t)$ и $\dot{C}_2(t)$

$$\dot{C}_1 = \frac{F(t)}{m\omega} \cos \omega t; \quad \dot{C}_2 = -\frac{F(t)}{m\omega} \sin \omega t.$$

Интегрируя, получим

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{m\omega} \int_0^t F(\tau) \cos \omega \tau d\tau + B_1; \\ C_2 = -\frac{1}{m\omega} \int_0^t F(\tau) \sin \omega \tau d\tau + B_2; \end{cases} \quad (86)$$

где B_1 и B_2 - постоянные величины.

Подставляя (86) в (82), получим общее решение уравнения (81)

$$x = \frac{1}{m\omega} \left[\sin \omega t \int_0^t F(\tau) \cos \omega \tau d\tau - \cos \omega t \int_0^t F(\tau) \sin \omega \tau d\tau \right] + B_1 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t, \quad (87)$$

или, внося $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$ под знаки интегралов и объединяя их,

$$x = B_1 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t + \frac{1}{m\omega} \int_0^t F(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau.$$

Соответственно для скорости

$$\dot{x} = B_1 \omega \cos \omega t - B_2 \omega \sin \omega t + \frac{1}{m} \int_0^t F(\tau) \cos \omega(t - \tau) d\tau. \quad (88)$$

Значения постоянных B_1 и B_2 можно определить только после того, как указаны начальные условия движения. Если $x = x_0$, $\dot{x} = V_0$ при $t=0$, то из (87) и (88) найдем

$$B_1 = \frac{V_0}{\omega}; \quad B_2 = x_0.$$

Тогда решение принимает вид

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{V_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{m\omega_0} \int_0^t F(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau.$$

Здесь первые два слагаемых описывают свободные колебания, вызванные начальными возмущениями x_0 и V_0 , а третье слагаемое характеризует вынужденные колебания, вызванные действием возмущающей силы $F(t)$.

В случае нулевых начальных условий, когда движение начинается при $x_0 = 0$ и $V_0 = 0$,

$$x = \frac{1}{m\omega_0} \int_0^t F(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau. \quad (89)$$

В некоторых случаях удобнее использовать другую форму решения, которую получим, интегрируя по частям решение (89).

Положим

$$\sin \omega(t - \tau) d\tau = dV; F(\tau) = u.$$

Тогда

$$V = \frac{\cos \omega(t - \tau)}{\omega}; du = \dot{F}(\tau) d\tau.$$

Заменяя $m\omega^2 = C$, по формуле интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{m\omega_0} \int_0^t F(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau = \frac{1}{m\omega} \left[\frac{F(\tau)}{\omega} \cos \omega(t - \tau) - \frac{1}{\omega_0} \int_0^\tau \dot{F}(\tau) \cos \omega(t - \tau) d\tau \right]_0^t = \\ &= \frac{F(t) - F(0) \cos \omega t}{C} - \frac{1}{C} \int_0^t \dot{F}(\tau) \cos \omega(t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (90)$$

Если в начальный момент времени $F(0)=0$, то решение принимает вид

$$x = x_{cm} - \frac{1}{C} \int_0^t \dot{F}(\tau) \cos \omega(t - \tau) d\tau, \quad (91)$$

где $x_{cm} = F(t)/C$ - переменное «статическое» перемещение, вычисляемое в предположении, что силы инерции отсутствуют.

Применим полученные результаты к случаю кинематического возбуждения колебаний (рис.37). Полагая $F(t)=Cf(t)$, основное решение (89) запишем в виде

$$x = \omega \int_0^t f(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau.$$

Аналогично вместо формулы (90) при $F(0)=0$ получим

$$x = f(\tau) - \int_0^t \ddot{f}(\tau) \cos \omega(t - \tau) d\tau. \quad (92)$$

3.1.4. Действие непериодической возмущающей силы

1. Действие линейно возрастающей силы (рис.38,а)

Используем выражение (91), полагая $\dot{F}(t) = a$:

$$x = x_{cm} - \frac{a}{C\omega} \sin \omega t.$$

График этого движения показан на рис.38,б.

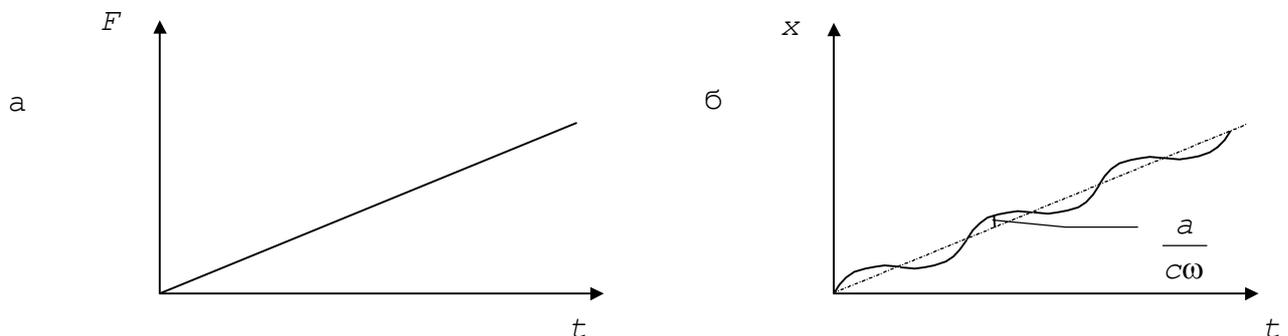


Рис. 38

Перемещения нарастают по сложному закону, представляющему собой сумму синусоиды и линейной функции. Дополнительное

синусоидальное колебание тем существеннее, чем быстрее нарастает сила F , т.е. чем больше a .

Колебания подрессоренного груза при движении по неровной дороге (рис.39)

Пусть профиль дороги задан уравнением

$$Z = h(1 - e^{-\gamma x}),$$

где h - предел, к которому стремится высота профиля; γ - параметр, характеризующий кривизну профиля.

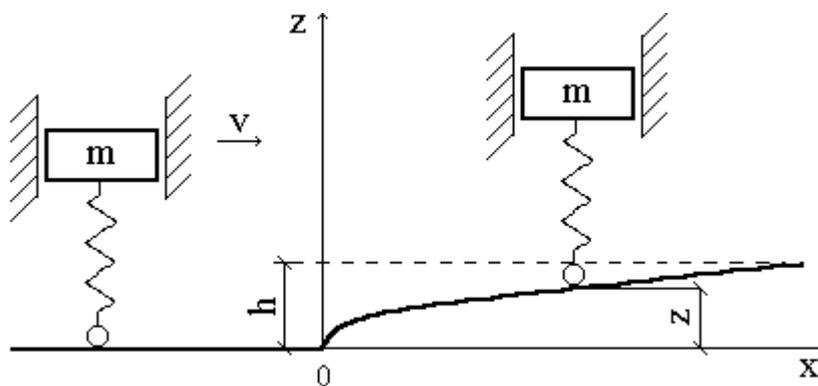


Рис. 39

Обозначим через V скорость движения груза массой m и примем начало отсчёта времени в мгновение, когда опорная точка проходит начало неровности. Тогда $x = Vt$ и движение опорной точки по вертикали определяется законом

$$f(t) = h(1 - e^{-\gamma \cdot v \cdot t}).$$

Дифференцируя, находим

$$\dot{f}(t) = \gamma \cdot v h e^{-\gamma \cdot v \cdot t}.$$

На основании (92) получим закон движения груза по вертикали:

$$Z = f(t) - \int_0^t \gamma v h e^{-\gamma \cdot v \cdot \tau} \cos \omega(t - \tau) d\tau.$$

Так как важным является не абсолютное изменение положения груза, а его колебания относительно опорной точки, то рассмотрим разность, определяющую дополнительную деформацию пружины

$$Z^* = Z(t) - f(t) = -\int_0^t \gamma v h e^{-\gamma \cdot v \cdot \tau} \cos \omega(t - \tau) d\tau .$$

Интегрируя, находим

$$Z^* = h \cdot \cos \left[e^{-\gamma \cdot v \cdot t} \cos \alpha - \cos(\omega t - \alpha) \right] ,$$

где α определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega}{\gamma v} .$$

Отсюда следует, что при весьма малой скорости параметр α стремится к $\frac{\pi}{2}$, а разность $z-f$ - к нулю. Наоборот, при весьма большой скорости (а также при весьма большом значении параметра γ) параметр α стремится к нулю, и колебания приближённо описываются законом

$$Z^* = h(e^{-\gamma \cdot v \cdot t} - \cos \omega t) .$$

2. Действие медленно изменяющихся сил

Рассмотрим полученное выше решение задачи о вынужденных колебаниях (91). Первое слагаемое представляет собой статическое отклонение, вызванное силой $F(t)$. Второе слагаемое - это поправка к статическому отклонению, причём эта поправка зависит от скорости изменения силы $\dot{F}(t)$.

При малой скорости нарастания внешней нагрузки динамическая поправка к статическому решению относительно мала и нагружение практически можно рассматривать как статическое.

А.Н.Крылов дал оценку динамической поправки для общего случая возмущающей силы. Если кривая $F(t)$ имеет один максимум (рис.40,а), то, обозначая максимальное значение $\dot{F}(t)$ через \dot{F}_{\max} (рис.40,б), имеем

$$\left| -\int_0^t \dot{F}(\tau) \cdot \cos \omega(t - \tau) d\tau \right| < \frac{\dot{F}_{\max} \cdot T}{2}.$$

Произведение $\dot{F}_{\max} \cdot T/2$ представляет собой максимально возможное приращение возмущающей силы за промежуток времени, равный полупериоду свободных колебаний; обозначая это произведение через ΔF_{\max} , получим

$$x < \frac{F + \Delta F_{\max}}{C}.$$

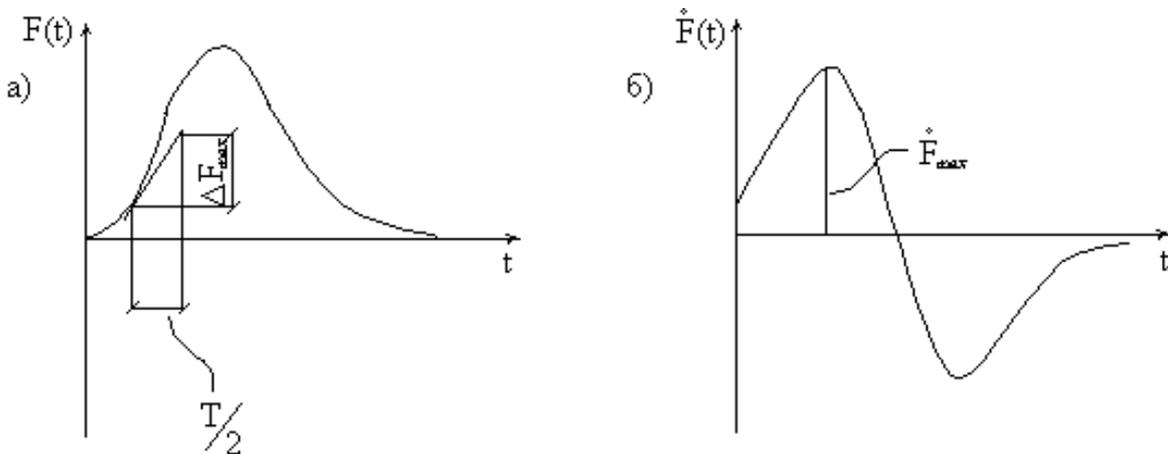


Рис. 40

Если сила возрастает равномерно в течение времени t_0 , то $\dot{F} = F_{\max} / t_0$ и динамическая "добавка" составляет

$$\Delta F_{\max} = \frac{F_{\max} T}{2t_0}.$$

Её относительная величина

$$\frac{\Delta F_{\max}}{F_{\max}} = \frac{T}{2t_0}.$$

Отсюда следует, что если период свободных колебаний мал по сравнению с продолжительностью действия силы, то она может считаться медленно изменяющейся, а её действие можно рассчитывать без учёта динамичности, т.е. считать силу приложенной статически.

3. Действие быстро исчезающих сил

Пусть возмущающая нагрузка действует в течение весьма короткого промежутка времени. Даже значительная нагрузка может оказаться безопасной, если длительность её действия мала по сравнению с периодом свободных колебаний системы.

Рассмотрим действие силы F , которая внезапно прикладывается в момент времени $t=0$, действует в течение некоторого промежутка времени a , а затем также внезапно исчезает. Можно показать, что если $a < \frac{T}{2}$, то максимальное отклонение системы достигается после исчезновения силы. В таком случае для $t > a$, согласно решению (89), имеем

$$x = \frac{F}{m\omega^0} \int_0^a \sin \omega(t - \tau) d\tau = \frac{2F}{C} \sin \frac{\omega \cdot a}{2} \sin(t - \frac{a}{2}). \quad (93)$$

Обозначим отношение промежутка времени a к периоду свободных колебаний T через α , тогда

$$\frac{\omega \cdot a}{2} = \frac{\pi \cdot a}{T} = \pi \cdot \alpha.$$

Максимальное отклонение в соответствии с (93):

$$x_{\max} = 2x_{\text{ст}} \sin \pi \alpha.$$

Следовательно, динамический коэффициент:

$$\mu = \frac{X_{\max}}{X_{\text{ст}}} = 2 \sin \pi \cdot \alpha$$

Значения динамического коэффициента μ при действии силы малой продолжительности приведены в табл. 5.

Таблица 5

α	0	0,01	0,02	0,03	0,05	0,10	0,15	0,25	0,5
μ	0	0,062	0,126	0,188	0,313	0,618	0,908	1,413	2,000

Из приведенной таблицы видно, что если сила действует в течение малой доли периода свободных колебаний, то эффект такой кратковременной силы во много раз меньше статического. Аналогичный вывод можно сделать и в случае, когда возмущающая сила представляет собой одну половину синусоиды.

Покажем, что действие кратковременной силы приближённо можно оценить её импульсом. Для $t \gg a$ решение имеет вид

$$x = \frac{1}{m\alpha} \int_0^a F(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau,$$

или

$$x = \frac{1}{m\omega} \left[\sin \omega t \int_0^a F(\tau) \cos \omega \tau \cdot d\tau - \cos \omega t \int_0^a F(\tau) \sin \omega \tau \cdot d\tau \right] =$$

$$= \frac{1}{m\omega} \left[\sin \omega t \int_0^a F(\tau) \cos \frac{2\pi\tau}{T} \cdot d\tau - \cos \omega t \int_0^a F(\tau) \sin \frac{2\pi\tau}{T} \cdot d\tau \right].$$

Но так как отношение τ/T меньше отношения a/T , то τ/T есть малое число.

Тогда приближённо можно записать

$$x \cong \frac{\sin \omega t}{m\omega} \int_0^a F(\tau) d\tau.$$

Входящий сюда интеграл есть импульс силы $F(t)$, т.е. движение системы определяется величиной импульса кратковременной силы, причём подробности изменения силы за промежуток времени a не играют роли.

3.1.5. Действие гармонической силы

Случай, когда возмущающая сила изменяется по гармоническому закону

$$F = F_0 \sin pt, \quad (94)$$

где F_0 - амплитуда силы; p - её частота, является наиболее распространённым в практике.

Описание колебательного процесса, вызываемого такой силой, при нулевых начальных условиях можно получить при помощи (89)

$$x = \frac{F_0}{m\omega} \int_0^t \sin pt \cdot \sin \omega(t - \tau) d\tau. \quad (95)$$

Вычисляя интеграл, при $\omega \neq p$ находим

$$x = \frac{F_0}{m(\omega^2 - p^2)} \left(\sin pt - \frac{p}{\omega} \sin \omega t \right). \quad (96)$$

Заменим $m\omega^2 = C$ и обозначим $\frac{F_0}{C} = x_{ст}$ (прогиб, вызванный статически приложенной постоянной силой F_0), тогда

$$x = \frac{x_{ст}}{1 - \frac{p^2}{\omega^2}} \left(\sin pt - \frac{p}{\omega} \sin \omega t \right). \quad (97)$$

Из (97) следует, что при нулевых начальных условиях возникают сложные колебания, состоящие из двух частей: колебаний, происходящих с

частотой p возмущающей силы, и колебаний, происходящих с собственной частотой ω . Обычно первые колебания называют *вынужденными*, а вторые - *свободными*. Такая терминология является условной. Дело в том, что и вторые колебания вызваны действующей возмущающей силой, и их амплитуда зависит от этой силы; в этом смысле вторые колебания также являются вынужденными. Указанные наименования получили широкое распространение потому, что первое слагаемое имеет частоту возмущающей силы, а второе меняется с собственной частотой системы.

Составляющая, названная выше свободными колебаниями, быстро исчезает, поэтому достаточно ограничиться изучением стационарной, незатухающей части решения

$$x = \frac{x_{ст}}{1 - \frac{p^2}{\omega^2}} \sin pt . \quad (98)$$

Амплитуда вынужденных колебаний

$$a = \frac{x_{ст}}{\left| 1 - \frac{p^2}{\omega^2} \right|} \quad (99)$$

отличается от прогиба $x_{ст}$, подсчитанного в предположении статического действия силы F_0 . Отношение $\frac{a}{x_{ст}}$ можно назвать *динамическим коэффициентом*

$$\mu = \frac{1}{\left| 1 - \frac{p^2}{\omega^2} \right|} . \quad (100)$$

Динамический коэффициент μ зависит только от отношения частот $\frac{p}{\omega}$. На рис.41,а приведена кривая зависимости μ от отношения $\frac{p}{\omega}$.

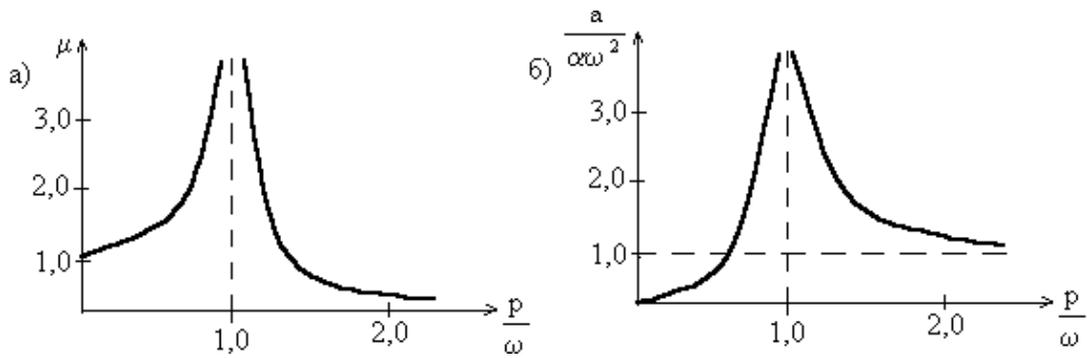


Рис. 41

При малой частоте возмущающей силы динамический коэффициент близок к единице. С ростом частоты p динамический коэффициент быстро увеличивается и при $p = \omega$ обращается в бесконечность. Это соответствует состоянию резонанса, когда амплитуда вынужденных колебаний стремится к бесконечности (если учесть силы неупругого сопротивления, то амплитуда при резонансе окажется хотя и ограниченной, но обычно настолько значительной, что состояние резонанса всё равно следует считать опасным).

Если частота p больше собственной частоты ω , то амплитуды становятся конечными; при $\frac{p}{\omega} > \sqrt{2}$ динамический коэффициент становится меньше единицы, т.е. динамический эффект слабее соответствующего статического эффекта. При очень больших значениях отношения $\frac{p}{\omega}$ динамический коэффициент становится весьма малым. Это означает, что сила высокой частоты не вызывает ощутимых колебаний в упругой низкочастотной системе, которая как бы "не успевает" отзываться на быстрые изменения возмущающей силы.

В приведенных рассуждениях считалось, что амплитудное значение возмущающей силы не связано с её частотой. Однако чаще бывает обратное, например, при вращении неуравновешенного ротора на опоры передаётся возмущающая сила

$$F = m_0 p^2 e \cdot \sin pt,$$

где m_0 - масса ротора; e - её эксцентриситет; p - угловая скорость.

В данном случае амплитуда возмущающей силы $m_0 p^2 e$ пропорциональна квадрату p^2 , и вместо решения (96) при $p \neq \omega$ следует принимать

$$x = \frac{m_0 e p^2}{m(\omega^2 - p^2)} \left(\sin pt - \frac{p}{\omega} \sin \omega t \right).$$

Амплитуда стационарных колебаний при этом определяется выражением

$$A = \frac{\alpha \cdot \omega^2}{\left| \frac{\omega^2}{p^2} - 1 \right|},$$

в котором параметр системы $\alpha = \frac{m_0 e}{m}$ не зависит от частоты p .

На рис.41,б представлено изменение амплитуды колебаний в зависимости от отношения $\frac{p}{\omega}$.

Как видно, при $p = \omega$ имеет место резонанс, а при $p \gg \omega$ амплитуда стремится к значению $\alpha \cdot \omega^2$.

Остановимся подробнее на случае совпадения частот $p = \omega$ (резонанс).

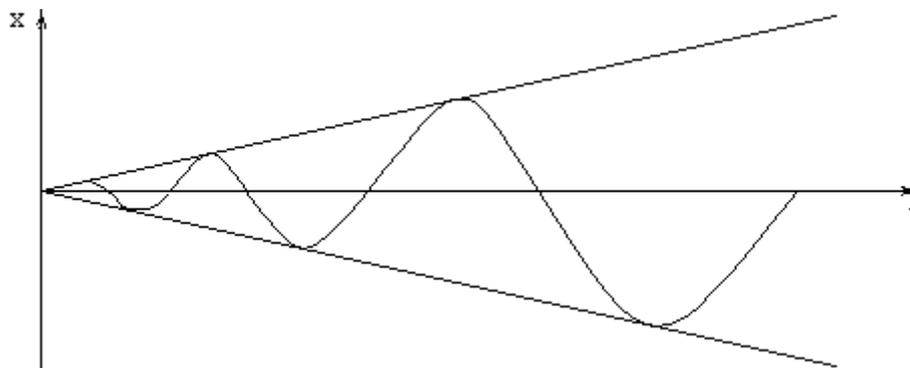


Рис. 42

При этом интеграл (95) принимает вид

$$x = \frac{F_0}{m\omega_0} \int_0^t \sin \omega \tau \cdot \sin \omega(t - \tau) d\tau.$$

После вычисления получим

$$x = x_{ct}(\sin \omega \cdot t - \omega \cdot t \cos \omega \cdot t).$$

График этого движения показан на рис.42. Как видно, при совпадении частот амплитуда нарастает по линейному закону и за конечный промежуток времени не обращается в бесконечность. Из этого вытекает принципиальная возможность перехода через резонанс, так как в процессе разгона двигателей равенство $p = \omega$ выполняется лишь одно мгновение и амплитуды при переходе могут не достигнуть опасных величин.

3.1.6. Действие двух гармонических сил с близкими частотами биения

Если система с одной степенью свободы испытывает действие двух различных гармонических возмущающих сил, то вследствие её линейности суммарный эффект может быть определён путём сложения эффектов, вызываемых каждой из сил. Так, возмущающая сила вида

$$F = F_1 \sin p_1 t + F_2 \sin p_2 t$$

вызовет сложные колебания

$$x = A_1 \sin p_1 t + A_2 \sin p_2 t. \quad (101)$$

Если частоты p_1 и p_2 близки одна к другой, то суммарное движение принимает своеобразный характер и называется *биением* (рис.43,а). Особенностью биений является периодическое изменение амплитуды колебаний. Для анализа этого явления преобразуем сначала решение (101).

$$x = A_1 \sin p_1 t + A_2 \sin p_2 t = \frac{A_1 + A_2}{2} (\sin p_1 t + \sin p_2 t) + \frac{A_1 - A_2}{2} (\sin p_1 t - \sin p_2 t) =$$

$$=(A_1 + A_2) \cos \frac{p_1 - p_2}{2} t \sin \frac{p_1 + p_2}{2} t + (A_1 - A_2) \sin \frac{p_1 - p_2}{2} t \cos \frac{p_1 + p_2}{2} t,$$

или

$$x = b_1 \sin \frac{p_1 + p_2}{2} t + b_2 \cos \frac{p_1 + p_2}{2} t, \quad (102)$$

где

$$b_1 = (A_1 + A_2) \cos \frac{p_1 - p_2}{2} t;$$

$$b_2 = (A_1 - A_2) \sin \frac{p_1 - p_2}{2} t.$$

Обозначая $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{b_2}{b_1}$, (102) перепишем в виде

$$x = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \sin\left(\frac{p_1 + p_2}{2} t + \alpha\right).$$

Вследствие того, что частоты p_1, p_2 близки друг другу, величины b_1, b_2 и α меняются медленно. Таким образом, движение можно описать выражением

$$x = A \cdot \sin(pt + \alpha),$$

где $P = \frac{p_1 + p_2}{2}$ - среднее значение частоты;

$A = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$ - медленно меняющаяся амплитуда колебаний;

α - медленно меняющаяся фаза.

Итак, движение будет носить почти синусоидальный характер, причём амплитуда колебаний A есть медленно изменяющаяся функция времени. Период изменения амплитуды A (период биений) составляет

$$T_A = \frac{2\pi}{p_1 - p_2}.$$

Так как разность $p_1 - p_2$ мала, то период T_A значительно больше периода колебаний

$$T = \frac{4\pi}{p_1 + p_2}.$$

Биения могут возникнуть и при действии одной возмущающей силы $F_0 \sin pt$ вблизи резонанса, когда частота p близка к собственной частоте ω . Из решения (96) видно, что в данном случае колебания состоят из двух гармоник с близкими частотами p и ω . Преобразования, подобные выполненным выше, приводят к выводу, что и здесь суммарные колебания носят синусоидальный характер с переменной амплитудой. Однако этот процесс не является стационарным; свободные колебания вследствие затухания постепенно исчезают, и остаются только вынужденные колебания, так что биения прекращаются (рис.43,б).

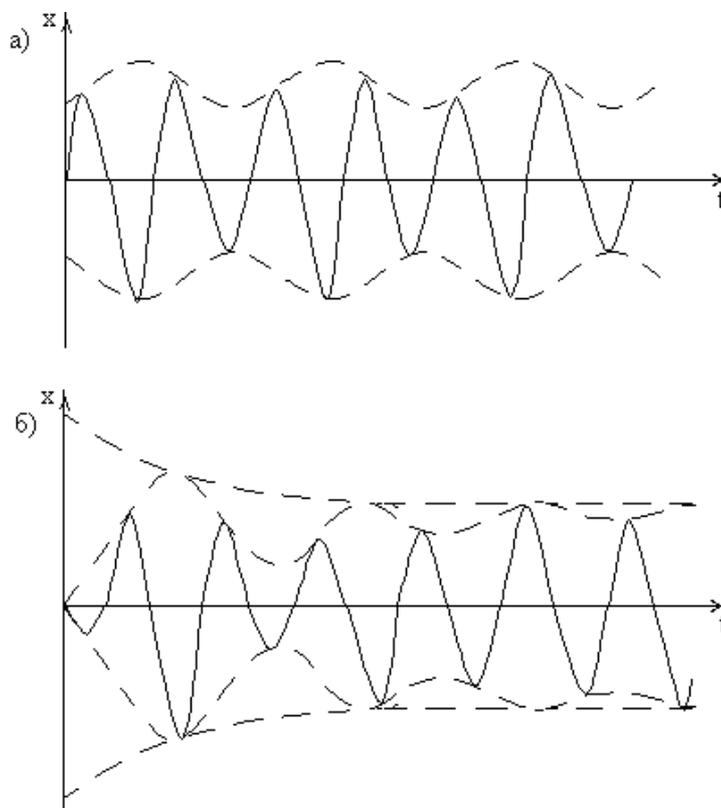


Рис. 43

3.1.7. Действие произвольной периодической возмущающей силы (способ разложения на гармонические составляющие)

В практических приложениях часто встречаются периодические возмущающие силы более сложного характера, чем рассмотренные выше.

Так, на рис.44,а показан закон изменения крутящего момента, создаваемого четырёхтактным двигателем внутреннего сгорания. Другой пример – периодические "безмассовые" удары – показан на рис.44,б.

Силы (моменты) рассматриваемого вида имеют чётко выраженный период колебаний T , но не описываются единым аналитическим выражением. В подобных случаях чаще всего пользуются разложением периодической нагрузки в ряд Фурье. При этом сила представляется в виде суммы гармонических составляющих, а затем определяется эффект, вызываемый каждой из составляющих; после этого полученные частные эффекты суммируются.

Периодическую силу $F(t)$ можно представить в виде ряда Фурье:

$$F(t) = a_0 + a_1 \cos pt + a_2 \cos 2pt + \dots + b_1 \sin pt + b_2 \sin 2pt + \dots,$$

где $P = \frac{2\pi}{T}$ - основная частота возмущения.

Коэффициенты a_i и b_i вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt,$$

$$a_1 = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos ptdt;$$

$$b_1 = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin ptdt;$$

$$a_2 = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos 2ptdt;$$

$$b_2 = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin 2ptdt;$$

.....

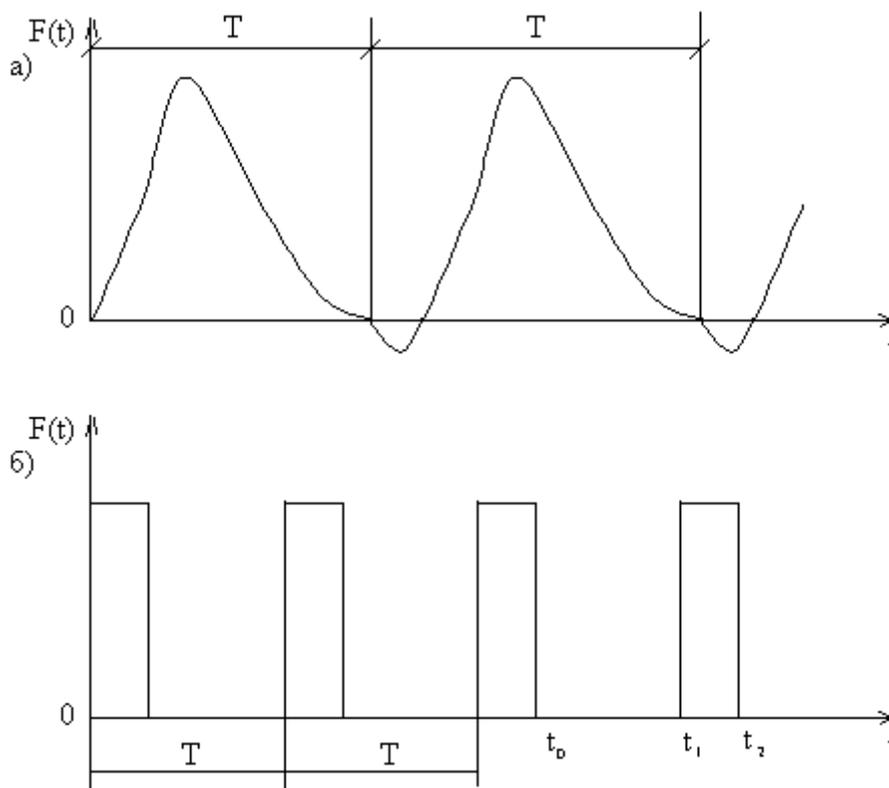


Рис. 44

Опираясь на решение (98), полученное для одной гармонике, находим

$$x = \frac{a_0}{c} + \frac{a_1 \cos pt + b_1 \sin pt}{c \cdot \left(1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right)} + \frac{a_2 \cos 2pt + b_2 \sin 2pt}{c \cdot \left[1 - \left(\frac{2p}{\omega}\right)^2\right]} + \dots \quad (103)$$

Это решение состоит из постоянного слагаемого $\frac{a_0}{c}$, соответствующего среднему значению возмущающей силы, и ряда, соответствующего гармоническим колебаниям с частотами $p, 2p, \dots$. Если собственная частота совпадает с частотой какой-либо одной гармонике pr ($n=1,2,\dots$), то соответствующее слагаемое в (103) стремится к бесконечности. Следовательно, в общем случае периодической возмущающей силы резонанс наступает не только тогда, когда собственная частота ω равна основной частоте возмущающей силы p , но и когда ω кратно p (в некоторых частных случаях в (103) пропадают некоторые слагаемые, и резонанс наступает не при любой кратности).

Рассмотренный способ чётко выявляет условия наступления резонанса. Недостатком этого способа является сложность вычислений, необходимых для учёта большого числа слагаемых в (103). Так, возмущающую силу, показанную на рис.44,а, для достаточной точности необходимо заменить примерно десятью гармониками.

3.1.8. Действие периодических импульсов

Исследуем действие периодических импульсов (рис.44,б), считая длительность каждого из них исчезающе малой.

Рассмотрим какой-либо период T , принимая начало отсчёта времени в конце действия предшествующего импульса (например, в момент времени t_0). Обозначим перемещение и скорость в момент времени t_0 через x_0 и V_0 .

В течение рассматриваемого периода (до приложения следующего импульса) колебания являются свободными и происходят с собственной частотой ω , т.е. описываются уравнением

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{V_0}{\omega} \sin \omega t \quad (104)$$

и, следовательно,

$$V = \dot{x} = -\omega \cdot x_0 \sin \omega t + V_0 \cos \omega t.$$

В конце этого периода, непосредственно перед следующим импульсом (мгновение t_1)

$$x_1 = x_0 \cos \omega T + \frac{V_0}{\omega} \sin \omega T;$$

$$V_1 = -\omega \cdot x_0 \sin \omega T + V_0 \cos \omega T.$$

В результате действия очередного импульса скорость мгновенно изменится на величину $\frac{S}{T}$ (где S - значение импульса). Поэтому непосредственно после следующего импульса (мгновение t_2)

$$x_2 = x_1 = x_0 \cos \omega T + \frac{V_0}{\omega} \sin \omega T;$$

$$V_2 = V_1 + \frac{S}{m} = -\omega X_0 \sin \omega T + V_0 \cos \omega T + \frac{S}{m}.$$

Вследствие периодичности процесса эти величины должны быть равны x_0 и V_0

$$x_0 = x_0 \cos \omega T + \frac{V_0}{\omega} \sin \omega T;$$

$$V_0 = -\omega x_0 \sin \omega T + V_0 \cos \omega T + \frac{S}{m}.$$

Решая уравнения, находим X_0 и V_0 .

$$x_0 = \frac{S}{2m\omega} \operatorname{ctg} \frac{\omega T}{2};$$

$$V_0 = \frac{S}{2m}.$$

Закон движения (104) принимает вид

$$x = \frac{S}{2m\omega} \left(\sin \omega t + \cos \omega t \cdot \operatorname{ctg} \frac{\omega T}{2} \right). \quad (105)$$

Замкнутая форма этого решения позволяет легко исследовать влияние периодических ударов, в то время как способ разложения на гармонические составляющие привёл бы к бесконечным суммам.

Амплитуда колебаний определяется формулой:

$$A = \frac{S}{2m\omega} \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\omega T}{2}} = \frac{S}{2m\omega \left| \sin \frac{\omega T}{2} \right|}.$$

Дробь $\frac{S}{m\omega}$ есть максимальное отклонение, вызванное одним импульсом, поэтому выражение

$$\beta = \frac{1}{2 \left| \sin \frac{\omega T}{2} \right|}$$

можно назвать *коэффициентом повторности*. Этот коэффициент характеризует возрастание влияния повторных импульсов. Из формулы для величины β видно, что при совпадении частот или их кратности ($T = 2\pi/p$; $p = \frac{\omega}{n}$; $n = 1, 2, \dots$) возникает резонанс. Максимально возможное значение коэффициента повторности равно 0,5.

3.2. Системы с одной степенью свободы при действии сил неупругого сопротивления

3.2.1. Влияние вязкого трения

Общее решение. Основное уравнение вынужденных колебаний с учётом вязкого трения принимает вид

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m}, \quad (106)$$

где $n = \frac{k}{2m}$; $\omega = \sqrt{\frac{C}{m}}$.

Оно отличается от соответствующего уравнения при свободных колебаниях наличием правой части, а от уравнения вынужденных колебаний системы без трения - наличием второго слагаемого в левой части. Для получения общего решения воспользуемся способом, который применялся выше при решении подобной задачи для $n = 0$.

Пусть к системе с одной степенью свободы в момент времени τ прикладывается мгновенный импульс; последующий колебательный процесс можно описать уравнением

$$x = Ae^{-n \cdot t} \sin(\sqrt{\omega^2 - n^2} t + \alpha) \quad (107)$$

Определим постоянные A и α из условий начала движения: при $t = \tau$ должно быть $X=0$, $\dot{x} = S/m$. Первое условие даёт

$$\alpha = -\omega_* \tau.$$

Из второго условия найдём

$$A = \frac{Se^{n \cdot \tau}}{m\omega_*},$$

где $\omega_* = \sqrt{\omega^2 - n^2}$.

Таким образом, свободные колебания, вызванные импульсом S , описываются законом

$$x_* = \frac{S}{m\omega_*} e^{-n(t-\tau)} \cdot \sin \omega_*(t - \tau)$$

и носят затухающий характер.

Как и выше, будем рассматривать возмущающую силу $F(t)$ в виде последовательности бесконечно малых импульсов $F(\tau)d\tau$. Тогда общее решение задачи о действии силы $F(t)$ принимает вид

$$x = \frac{1}{m\omega_*} \int_0^t F(\tau) \cdot e^{-n(t-\tau)} \cdot \sin \omega_*(t - \tau) d\tau, \quad (108)$$

причём закон изменения силы $F(t)$ может быть любым.

Гармоническая возмущающая сила. В практически важном случае действия гармонической силы $F = F_0 \sin pt$ решение (108) даёт

$$x = A \sin \cdot (pt - \gamma), \quad (109)$$

где

$$A = \frac{x_{cm}}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4p^2n^2}{\omega^4}}}, \quad (110)$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{2pn}{\omega^2 - p^2}, \quad (111)$$

$$x_{cr} = \frac{F_0}{C} = \frac{F_0}{m\omega^2}.$$

Введём, как и выше, динамический коэффициент

$$\mu = \frac{A}{x_{cr}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4p^2n^2}{\omega^4}}}. \quad (112)$$

Динамический коэффициент μ не обращается в бесконечность ни при каких значениях частоты возмущения p ; этим найденный результат существенно отличается от решения, полученного выше без учёта неупругого сопротивления. Зависимость μ от отношения частот $\frac{p}{\omega}$ при различных значениях отношения $\frac{n}{\omega}$ приведена на рис. 45,а. Максимум динамического коэффициента несколько смещён в сторону от абсциссы $\frac{p}{\omega} = 1$. Однако это смещение мало, и можно приближённо определять μ_{max} , подставляя в (112) $p = \omega$, т.е. $\mu_{max} = \frac{\omega}{2n}$.

Отсюда видно, что максимум динамического коэффициента обратно пропорционален коэффициенту затухания n . Из графиков (рис.45,а) следует, что силы вязкого сопротивления оказывают заметное влияние только в околорезонансной области. Это позволяет в удалении от резонанса

принимать для μ кривую, построенную без учёта вязкого сопротивления (рис. 41,а), а во всей околорезонансной области принимать $\mu = \mu_{\max}$.

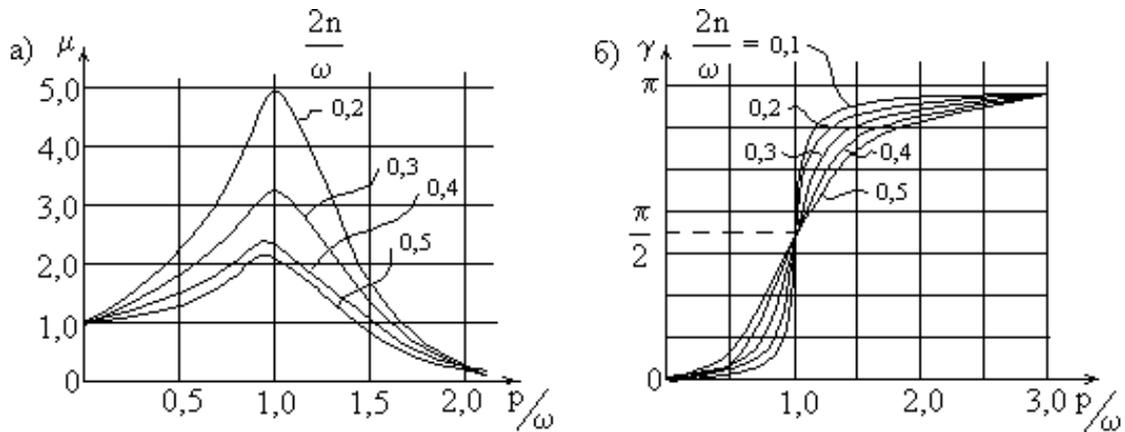


Рис. 45

Рассмотрим вопрос о "запаздывании" колебаний. Фазовый угол γ определяется (111) и зависит от отношения частот p/ω (рис. 45,б).

Как видно, при малых частотах p угол γ невелик. При резонансе ($p = \omega$) фазовый угол равен $\pi/2$, т.е. в те мгновения, когда сила максимальна, перемещение равно нулю. При высоких частотах фазовый угол близок к π , т.е. максимуму силы соответствует максимум перемещения.

Действие периодических импульсов. В качестве исходного выражения примем вместо (104) закон свободных затухающих колебаний

$$x = e^{-nt} \left(x_0 \cos \sqrt{\omega^2 - n^2} t + \frac{V_0 + nx_0}{\sqrt{\omega^2 - n^2}} \sin \sqrt{\omega^2 - n^2} t \right). \quad (113)$$

Дифференцируя, получим выражение скорости

$$V = \dot{x} = e^{-nt} \left(x_0 \cos \omega_* t - \frac{n \cdot V_0 + \omega^2 x_0}{\omega_*} \sin \omega_* t \right).$$

Начало отсчёта совместим с временем t_0 (рис.44,б). Для мгновения t_1 можно записать

$$x_1 = e^{-nT} \left(x_0 \cos \omega_* T + \frac{V_0 + n \cdot x_0}{\omega_*} \sin \omega_* T \right);$$

$$V_1 = e^{-nT} \left(x_0 \cos \omega_* T - \frac{n \cdot V_0 + \omega_*^2 x_0}{\omega_*} \sin \omega_* T \right).$$

В мгновение t_2 перемещение и скорость вновь равны x_0 и V_0

$$\begin{cases} x_0 = x_1 = e^{-nT} \left(x_0 \cos \omega_* T + \frac{V_0 + n \cdot x_0}{\omega_*} \sin \omega_* T \right); \\ V_0 = V_1 + \frac{S}{m} = \left(V_0 \cos \omega_* T - \frac{nV_0 + \omega_*^2 \cdot x_0}{\omega_*} \sin \omega_* T \right) + \frac{S}{m}, \end{cases} \quad (114)$$

где S - величина импульса.

Из (114) находим

$$\begin{cases} x_0 = \frac{Se^{nT} \sin \omega_* T}{m\omega_* (e^{2nT} - 2e^{nT} \cos \omega_* T + 1)} \\ V_0 = \frac{Se^{nT} \left(e^{nT} - \cos \omega_* T - \frac{n}{\omega_*} \sin \omega_* T \right)}{m(e^{2nT} - 2e^{nT} \cos \omega_* T + 1)}. \end{cases} \quad (115)$$

Вычислив x_0 и V_0 , можно по (113) найти решение x .

Особый интерес представляют *резонансные режимы*, при которых период импульсов T в целое число раз больше собственного периода колебаний T_* . Обозначим это число через r .

$$T = rT_* = \frac{2\pi \cdot r}{\omega_*}.$$

Тогда

$$\sin \omega_* T = 0; \quad \cos \omega_* T = 1,$$

и по (115) находим

$$x_0 = 0; V_0 = \frac{S \cdot e^{n \cdot T}}{m(e^{n \cdot T} - 1)}.$$

При малых значениях $n \cdot T$ можно считать

$$e^{n \cdot T} = nT + 1, \text{ т.е. } V_0 = \frac{S}{mnT},$$

и решение имеет вид

$$x = \frac{S}{2\pi \cdot m \cdot n \cdot r} e^{-n \cdot T} \sin \omega_* t.$$

Наибольшее значение (резонансная амплитуда) приблизительно составляет

$$x_{\max} = \frac{S}{2\pi \cdot m \cdot n \cdot r},$$

т.е. оказывается обратно пропорциональным коэффициенту вязкого сопротивления (как и в случае гармонического возмущения). Коэффициент повторности при резонансе получим, разделив X_{\max} на амплитуду колебаний, вызванных однократным ударом $\frac{S}{m\omega}$:

$$\beta = \frac{\omega}{2\pi \cdot n \cdot r},$$

т.е. с увеличением r (уменьшением частоты импульсов) резонансные амплитуды убывают.

3.2.2. Влияние произвольно заданных сил неупругого сопротивления

Рассмотрим общий случай, когда сила неупругого сопротивления является некоторой нелинейной функцией скорости: $R = R(\dot{x})$.

Ввиду сложности точного учёта влияния такой силы ограничимся приближённым, но дающим удовлетворительную точность простым приёмом. Заменим силу R эквивалентной силой вязкого сопротивления:

$$R_* = k_* \dot{x}$$

и определим коэффициент k из условия равенства работ, произведённых силами R и R_* за период колебаний.

При этом придётся ещё ввести определённое предположение о характере колебательного процесса. При действии гармонической возмущающей силы естественно предположить, что и в общем случае сил неупругого сопротивления колебательный процесс описывается законом (109). Удобнее сместить начало отсчёта времени с таким расчётом, чтобы закон колебаний принял более простой вид

$$x = A \sin pt, \quad (116)$$

и потребовать равенства указанных работ за полупериод $(0; T/2)$, в течение которого скорость (а вместе с ней и силы R, R_*) сохраняет постоянный знак.

Тогда элементарная работа эквивалентной силы R_*

$$R_* dx = R_* \dot{x} dt. \quad (117)$$

Подставляя значение R_* , получим

$$k_* \dot{x}^2 dt = A^2 \omega^2 k_* \cos^2 p \cdot t \cdot dt,$$

и соответственно этому работа силы R_* за период равна

$$\int_0^T R_* \dot{x} dt = \pi \cdot k_* A^2 p. \quad (118)$$

Аналогично должна быть представлена работа, совершаемая заданной нелинейной силой неупругого сопротивления. Положим, что указанные

действия выполнены и определён эквивалентный коэффициент k_* (как правило, его величина окажется зависящей от амплитуды колебаний A). Подставим найденное выражение k_* в решение (110):

$$A = \frac{x_{cm}}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{k_* p}{C}\right)^2}}. \quad (119)$$

Отметим, что неизвестная амплитуда A входит в обе части этого равенства. Определив из (119) зависимость амплитуды от частоты колебаний p , можем построить кривую, подобную кривым на рис. 45,а.

Проследим сказанное выше на примере сил неупругого сопротивления, заданных в виде

$$R = k\dot{x}|\dot{x}|^{n-1}. \quad (120)$$

Аналогично (117) элементарная работа силы R

$$Rdx = R\dot{x}dt = k\dot{x}^2|\dot{x}|^{n-1} dt.$$

Если сюда подставить (116), то получим

$$k \cdot \dot{x}^2 |\dot{x}|^{n-1} dt = k \cdot A^{n+1} p^{n+1} \cos^2 p \cdot t \cdot |\cos p \cdot t|^{n-1} dt,$$

и работа силы R за период равна

$$\int_0^T R\dot{x}dt = k \cdot A^{n+1} p^{n+1} \int_0^T \cos^2 p \cdot t |\cos p \cdot t|^{n-1} dt = k \cdot A^{n+1} p^n \int_0^{2\pi} |\cos \psi|^{n+1} d\psi.$$

Обозначим входящий в это выражение интеграл через S , тогда

$$\int_0^T R\dot{x}d \cdot t = k \cdot A^{n+1} \cdot p^n \cdot S. \quad (121)$$

Приравняем (118) и (121):

$$\pi \cdot k_* A^2 p = k \cdot A^{n+1} p^n S.$$

Отсюда находим эквивалентный коэффициент вязкого сопротивления

$$k_* = \frac{kS}{\pi} (A \cdot p)^{n-1},$$

который следует подставить в соотношение (119), и тогда из последнего можно определить амплитуду колебаний.

3.3. Примеры расчётов

Пример №12. Ротор электродвигателя, установленного на консоли (рис.46,а), имеет частоту вращения $n=900 \text{ об/мин.}$ Вследствие неуравновешенности ротора возникает вертикальная переменная сила $F(t) = F_1 \sin p \cdot t$. Определить: 1) при каком значении ℓ наступает резонанс; 2) на каком расстоянии ℓ_1 нужно установить двигатель, чтобы частота собственных колебаний балки была на 30 % больше частоты возмущающей силы. Для этого случая вычислить амплитуду вынужденных колебаний и максимальное нормальное напряжение. Массой балки пренебречь. Масса двигателя $m=100 \text{ кг}$; амплитуда возмущающей силы $F_1 = 0,2 \text{ кН}$; $E = 2 \cdot 10^8 \text{ кПа}$.

Решение

Частота возмущающей силы:

$$p = \frac{\pi n}{30} = \frac{3.14 \cdot 900}{30} = 94.25 \text{ с}^{-1}.$$

При наступлении резонанса $\omega = p$, т.е.

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{m}} = \sqrt{\frac{3EI}{m\ell^3}} = p,$$

отсюда находим длину балки при резонансе:

$$\ell = \sqrt[3]{\frac{3EI}{(mp)^2}} = 1.2 \text{ м.}$$

Для выполнения условия $\omega = 1.3p$ двигатель нужно расположить на расстоянии:

$$\ell_1 = \frac{\ell}{\sqrt[3]{(\omega/p)^2}} = 1 \text{ м.}$$

Амплитуда вынужденных колебаний:

$$A = \frac{\Delta_{\text{стат}}}{1 - (p/\omega)^2} = \frac{F_1 \ell_1}{3EI[1 - (p/\omega)^2]} = 0.32 \cdot 10^{-3} \text{ м,}$$

где $\Delta_{\text{стат}} = \frac{F_1 \ell_1^3}{3EI}$ – прогиб от статического действия силы $F_1 = 0.2 \text{ кН}$.

Статический прогиб от собственного веса двигателя:

$$\Delta_{\text{стат}}^{\text{дв}} = \frac{mg \ell_1^3}{3EI} = 0.644 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Статическое напряжение:

$$\sigma_{\text{стат}} = \frac{mg \ell_1}{W_x} = 26.37 \text{ МПа.}$$

Динамический коэффициент:

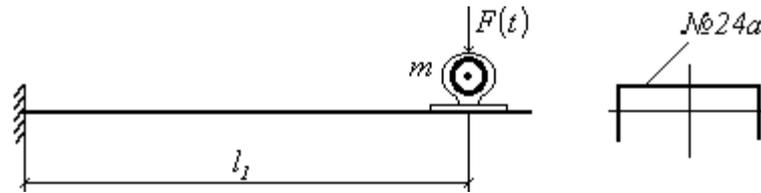
$$j_{\text{дин}} = 1 + \frac{A}{\Delta_{\text{стат}}^{\text{дв}}} = 1.5.$$

Динамическое напряжение:

$$\sigma_{\text{дин}} = j_{\text{дин}} \sigma_{\text{стат}} = 39.6 \text{ МПа.}$$

Пример 13. К валу переменного сечения с жёстко заделанными концами прикреплён маховик, на который действует переменный момент $M(t) = M_1 \sin pt$ (рис.46,б). Определить максимальные касательные напряжения в левой и правой частях вала, если $M_1 = 0,2 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $p = 20 \text{ с}^{-1}$; $I_m = 4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $d_1 = 1,19 \text{ см}$; $d_2 = 1 \text{ см}$; коэффициент сопротивления $\alpha = 6 \text{ Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-1}$; $G = 8 \cdot 10^7 \text{ кПа}$. Массой вала пренебречь.

а



б

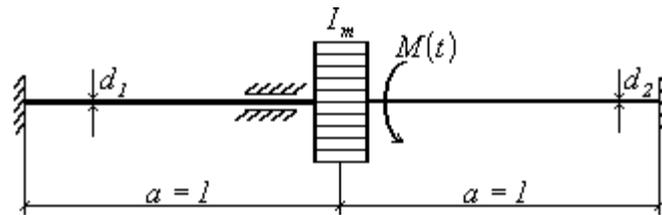


Рис. 46

Решение

Жёсткость вала:

$$C = \frac{GI_{d_1}}{a} + \frac{GI_{d_2}}{a} = \frac{G\pi}{32a} (d_1^4 + d_2^4) = 236 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Собственная частота колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{I_m}} = 7,68 \text{ с}^{-1}.$$

Угол поворота маховика от действия момента, равного амплитуде возмущающего момента:

$$\varphi_0 = \frac{M_1}{C} = 0,847 \text{ рад}; \quad 2n = \frac{\alpha}{I_m} = 1,5 \text{ с}^{-1}.$$

Амплитуда колебаний:

$$A = \frac{\varphi_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4n^2}{\omega^2} \cdot \frac{p^2}{\omega^2}}} = 0,146 \text{ рад}.$$

Соответствующий динамический момент:

$$M_{\text{дин}} = C \cdot A = 34,46 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Максимальные касательные напряжения в левой и правой частях вала:

$$\tau_1 = \frac{16M_{\text{дин}}}{\pi d_1^3 (1 + d_2^4/d_1^4)} = 69,4 \text{ МПа};$$

$$\tau_2 = \frac{16M_{\text{дин}} (d_2^4/d_1^4)}{\pi d_2^3 (1 + d_2^4/d_1^4)} = 58,5 \text{ МПа}.$$

Пример 14. Вдоль пути синусоидального профиля $y_0 = A_0 \text{Sin} \frac{\pi x}{\ell}$

(рис.47) с постоянной горизонтальной скоростью V движется колесо, на котором упруго подвешен груз массой m . Определить наибольшее допустимое значение коэффициента жёсткости подвески C , если требуется, чтобы амплитуда абсолютных колебаний груза не превышала $0,05A_0$.

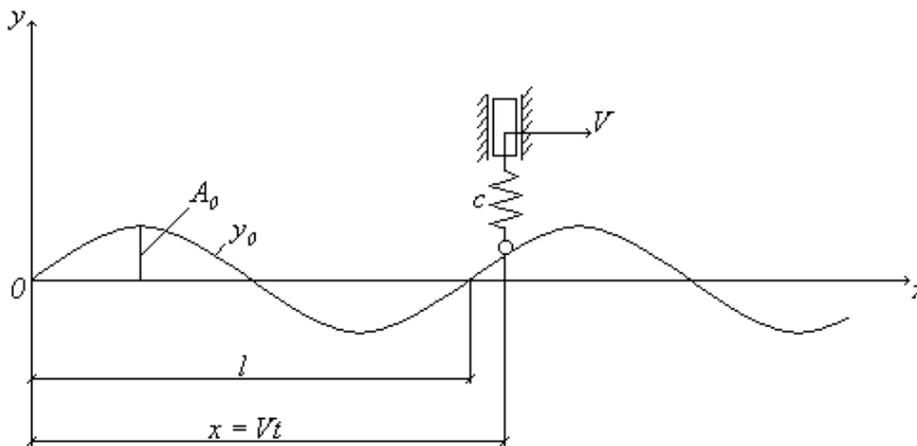


Рис. 47

Решение

Подставляя в уравнение профиля пути $x = Vt$, найдём ординаты нижнего конца пружины в функции времени:

$$y_0 = A_0 \text{Sin} \frac{\pi Vt}{\ell}.$$

Обозначая через y абсолютное вертикальное перемещение груза, отсчитываемое от равновесного уровня, дифференциальное уравнение движения запишем в виде

$$-C(y - y_0) = m\ddot{y}$$

или

$$m\ddot{y} + cy = cy_0.$$

Отсюда следует, что эквивалентная вынуждающая сила

$$F_{\text{эkv.}} = -A_0 \sin \frac{\pi V t}{\ell},$$

т.е. её амплитуда равна cA_0 .

Амплитуда абсолютных колебаний груза:

$$A = \frac{A_0}{\left| 1 - \left(\frac{p}{\omega} \right)^2 \right|} = \frac{A_0}{\left| 1 - \frac{\pi^2 V^2 m}{c \ell^2} \right|}.$$

По условиям задачи $A < 0,05A_0$, следовательно,

$$\frac{1}{\frac{m\pi^2 V^2}{c \ell^2} - 1} < 0,5,$$

тогда

$$c < \frac{0,47mV^2}{\ell}.$$

Пример 15. Двигатель весом 2,4 т установлен на десяти одинаковых пружинах диаметром $D = 12$ см. Диаметр сечения витка пружины $d = 3$ см; модуль сдвига материала пружины $G = 8 \cdot 10^7$ кПа; частота вращения двигателя $n = 800$ об/мин. Определить число витков пружины, необходимое для того, чтобы динамический коэффициент установки был равен 0,2.

Решение

Отношение p/ω определим, используя поставленное в условиях задачи ограничение:

$$\frac{1}{\left|1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right|} = 0,2 \Rightarrow \frac{p}{\omega} = 2,45.$$

Частота возмущающей силы:

$$p = \frac{\pi n}{30} = 83,8 \text{ с}^{-1}.$$

Необходимое значение собственной частоты:

$$\omega = \frac{p}{2,45} = 34,2 \text{ с}^{-1}.$$

Необходимая жёсткость всех пружин:

$$\sqrt{\frac{c}{m}} = 34,2 \Rightarrow c = 34,2^2 \cdot m = 2850 \text{ кг/см}.$$

Число витков:

$$n_b = 16,5.$$

Следует принять, по крайней мере, 17 витков, так как увеличение числа витков снижает жёсткость системы и уменьшает динамический коэффициент. Если принять $n_b = 16,5$, то динамический коэффициент окажется больше, чем задано в условиях задачи.

Пример 16. На двух балках посередине пролёта установлен двигатель массой $m = 500 \text{ кг}$. Балки (двутавр №20) имеют шарнирное опирание по концам. Ротор двигателя массой $m_1 = 200 \text{ кг}$ имеет эксцентриситет $e = 2 \text{ мм}$. Определить, при какой частоте вращения наступает резонанс и чему равно при этом нормальное максимальное напряжение. Коэффициент

сопротивления $\alpha = 2500 \text{ Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-1}$; длина пролёта $\ell = 6 \text{ м}$; $E = 2 \cdot 10^8 \text{ кПа}$. Учёт массы балок.

Решение

Приведенная масса системы:

$$m_{\text{п}} = m + 2 \cdot \frac{17}{35} m_0 \ell = 622,4 \text{ кг},$$

где m_0 – погонная масса балки.

Собственная частота колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{48E2I_x}{m_{\text{п}} \ell^3}} = 51,26 \text{ с}^{-1}.$$

Принимая $p = \omega$, находим частоту вращения двигателя при резонансе:

$$n_{\text{д}} = \frac{30\omega}{\pi} = 489 \text{ об/мин}.$$

Статический прогиб от амплитудного значения возмущающей нагрузки:

$$\Delta_{\text{стат}} = \frac{m_1 \omega^2 e \ell^3}{48E2I_x} = 0,643 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \quad 2n = \frac{\alpha}{m} = 5 \text{ с}^{-1}.$$

Амплитуда колебаний:

$$A = \frac{\Delta_{\text{стат}} \omega}{2n} = 6,59 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Статический прогиб:

$$\Delta = \frac{mg \ell^3}{48E2I_x} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Статическое напряжение:

$$\sigma_{\text{стат}} = \frac{mg \ell}{4 \cdot 2W_x} = 20 \text{ МПа}.$$

Динамическое напряжение:

$$\sigma_{дин} = \sigma_{стат} \left(1 + \frac{A}{\Delta} \right) = 63,93 \text{ МПа} .$$

3.4. Системы с конечным числом степеней свободы

(общий случай)

Способы решения. Если внешние силы изменяются по периодическому закону, то обычно их раскладывают в тригонометрический ряд, т.е. представляют в виде суммы гармоник. Затем на основании принципа независимости действия сил суммарное движение определяется как сумма движений, вызванных каждой из гармоник в отдельности. При таком подходе задача сводится к задаче о вынужденных колебаниях системы, вызываемых действием одной гармоники возмущения $F_i \sin pt$ (или $F_i \cos pt$), где F_i – амплитуда возмущающей силы, действующей по i -му направлению; p – частота возмущения, общая для всех сил, приложенных к различным точкам системы.

Решение этой основной задачи чаще всего ведут одним из двух способов: непосредственного решения или разложения по собственным формам колебаний. Наибольшее распространение в расчётной практике получил второй способ. Помимо этого, иногда используется способ разложения по собственным формам колебаний при сохранении заданного вида периодических нагрузок, т.е. без разложения их на гармонические составляющие.

Особенности каждого из этих способов рассмотрим на примере простейшей двухмассовой системы (рис.48).

Непосредственное решение. Предполагая, что внешняя нагрузка разложена в тригонометрический ряд, исследуем движение системы, вызванное одной гармоникой возмущения. Силы, действующие на каждую

массу, обозначим через $F_1 \sin pt$ и $F_2 \sin pt$. В дальнейшем будет рассмотрен также случай, когда обе силы имеют одинаковую частоту, но разные фазы.

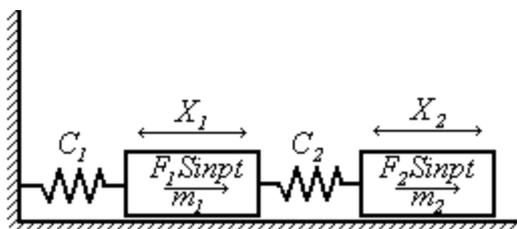


Рис. 48

Уравнения движения такой системы аналогичны уравнениям движения при свободных колебаниях, но нули в правых частях заменяются действующими силами $F_1 \sin pt$ и $F_2 \sin pt$:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1) = F_1 \sin pt; \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (x_2 - x_1) = F_2 \sin pt. \end{cases} \quad (122)$$

Решение этой системы, как и решение одного уравнения, состоит из двух частей: решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной системы (122).

Слагаемое, описывающее колебания с собственной частотой (т.е. решение однородной системы), меняется с течением времени, быстро уменьшаясь вследствие действия сил затухания. Основным интересом представляет вторая часть решения, соответствующая незатухающему стационарному процессу вынужденных колебаний.

Примем частное решение в виде

$$x_1 = A_1 \sin pt; \quad x_2 = A_2 \sin pt. \quad (123)$$

После подстановки (123) в (122) получим два уравнения с двумя неизвестными амплитудами A_1 и A_2 :

$$\begin{cases} -m_1 p^2 A_1 + c_1 A_1 - c_2 (A_2 - A_1) = F_1; \\ -m_2 p^2 A_2 + c_2 (A_2 - A_1) = F_2. \end{cases} \quad (124)$$

Решая систему уравнений (124), находим

$$\begin{cases} A_1 = \frac{F_1(c_2 - m_2 p^2) + F_2 c_2}{(c_1 + c_2 - m_1 p^2)(c_2 - m_2 p^2) - c_2^2}; \\ A_2 = \frac{F_2(c_1 + c_2 - m_1 p^2) + F_1 c_2}{(c_1 + c_2 - m_1 p^2)(c_2 - m_2 p^2) - c_2^2}. \end{cases} \quad (125)$$

Знаменатели выражений для A_1 и A_2 совпадают с левой частью частотного уравнения (42), если заменить в нём букву ω буквой p . Следовательно, если частота возмущения p совпадает с любой из двух собственных частот ω_1 или ω_2 , то знаменатели формул (125) обратятся в нуль, а амплитуды A_1 и A_2 станут бесконечно большими (резонанс).

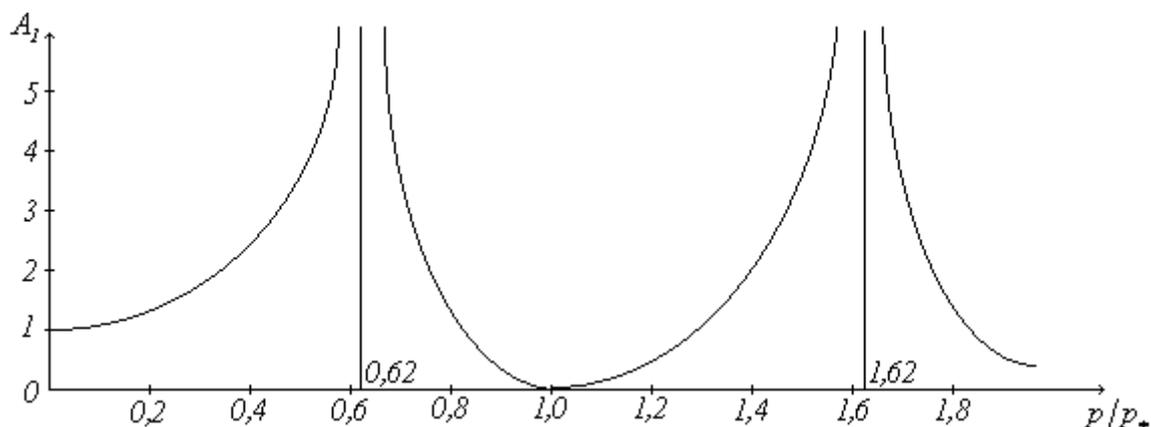
При $p = 0$ формулы (125) определяют статические отклонения обеих масс, вызванные силами F_1 и F_2 :

$$A_1 = \frac{F_1 + F_2}{c_1};$$

$$A_2 = \frac{F_1 + F_2}{c_1} + \frac{F_2}{c_2}.$$

При $p \rightarrow \infty$ решения системы (125) стремятся к нулю. Зависимость амплитуды A_1 от частоты показана на рис.49. Этот график построен для случая: $F_1 = 1$; $F_2 = 0$; $c_1 = c_2 = 1$; $m_1 = m_2 = 1$. В этом случае число резонансов равно двум, что соответствует числу степеней свободы системы и числу ее собственных частот.

При помощи (125) можно найти форму вынужденных колебаний, определяемую отношением A_2 к A_1 . В общем случае эта форма не совпадает ни с одной из собственных форм колебаний и только при резонансах форма вынужденных колебаний совпадает с формой свободных колебаний. Рассмотрим действие двух сил одинаковой частоты, но сдвинутых по фазе: $F_1 \sin(pt + \alpha_1)$ и $F_2 \sin(pt + \alpha_2)$.



Эти силы можно представить в виде

$$F_1 \sin(pt + \alpha_1) = F_1 \cos \alpha_1 \sin pt + F_1 \sin \alpha_1 \cos pt;$$

$$F_2 \sin(pt + \alpha_2) = F_2 \cos \alpha_2 \sin pt + F_2 \sin \alpha_2 \cos pt,$$

а затем решать две задачи: действуют только «синусные» составляющие $F_1 \cos \alpha_1 \sin pt$ и $F_2 \cos \alpha_2 \sin pt$; действуют только «косинусные» составляющие $F_1 \sin \alpha_1 \cos pt$ и $F_2 \sin \alpha_2 \cos pt$.

В первой задаче получаются уравнения:

$$\begin{cases} -m_1 p^2 A_1 + c_1 A_1 - c_2 (A_2 - A_1) = F_1 \cos \alpha_1; \\ -m_2 p^2 A_2 + c_2 (A_2 - A_1) = F_2 \cos \alpha_2, \end{cases}$$

а во второй (когда частное решение имеет вид: $x_1 = A_1 \cos pt$; $x_2 = A_2 \cos pt$):

$$\begin{cases} -m_1 p^2 A_1 + c_1 A_2 - c_2 (A_2 - A_1) = F_1 \sin \alpha_1; \\ -m_2 p^2 A_2 + c_2 (A_2 - A_1) = F_2 \sin \alpha_2. \end{cases}$$

Решая каждую из этих задач и суммируя результаты, получим решение исходной задачи.

Если возмущающие силы имеют полигармоническую структуру

$$\begin{cases} F_1 = F_{11} \sin p_1 t + F_{12} \sin p_2 t + \dots + F_{1n} \sin p_n t; \\ F_2 = F_{21} \sin p_1 t + F_{22} \sin p_2 t + \dots + F_{2n} \sin p_n t, \end{cases}$$

то резонанс становится возможным при

$$p_1 = \omega_1; \quad p_2 = \omega_1; \quad \dots; \quad p_n = \omega_1;$$

$$p_1 = \omega_2; \quad p_2 = \omega_2; \quad \dots; \quad p_n = \omega_2,$$

т.е. при совпадении любой из n частот возмущающей силы с любой из двух собственных частот системы.

Разложение решения по собственным формам колебаний

Вновь рассмотрим простейшую систему, испытывающую действие возмущающих сил $F_1 \sin pt$ и $F_2 \sin pt$.

Для вывода основных зависимостей рассматриваемого способа предварительно образуем вспомогательные соотношения исходя из уравнений (32). Эти уравнения удовлетворяются как решениями

$$\begin{cases} x_1 = A_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1); \\ x_2 = A_{21} \sin(\omega_1 t + \alpha_1), \end{cases} \quad (126)$$

так и решениями

$$\begin{cases} x_1 = A_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2); \\ x_2 = A_{22} \sin(\omega_2 t + \alpha_2). \end{cases} \quad (127)$$

Подставляя в уравнения (32) сначала решения (126), а затем решения (127), получим две группы вспомогательных соотношений, которые будут использованы в дальнейшем

$$\begin{cases} -c_1 A_{11} + c_2 (A_{21} - A_{11}) = -m_1 \omega_1^2 A_{11}; \\ -c_2 (A_{22} - A_{12}) = -m_2 \omega_1^2 A_{21}. \end{cases} \quad (128)$$

$$\begin{cases} -c_1 A_{12} + c_2 (A_{22} - A_{12}) = -m_1 \omega_2^2 A_{12}; \\ -c_2 (A_{21} - A_{11}) = -m_2 \omega_2^2 A_{22}. \end{cases} \quad (129)$$

В дифференциальных уравнениях (122) неизвестными являются функции x_1 и x_2 . Основная идея рассматриваемого способа состоит в замене этих функций двумя новыми функциями $f_1(t)$ $f_2(t)$ такими, что

$$\begin{cases} x_1 = A_{11} f_1 + A_{12} f_2; \\ x_2 = A_{21} f_1 + A_{22} f_2, \end{cases} \quad (130)$$

где A_{11} и A_{12} – произвольные пока числа (можно, например, принять $A_{11} = A_{12} = 1$), с которыми A_{21} и A_{22} связаны известными соотношениями (собственные формы колебаний). Подставляя (130) в (122), получим систему дифференциальных уравнений относительно новых функций f_1 и f_2 :

$$\begin{cases} m_1(A_{11}\ddot{f}_1 + A_{12}\ddot{f}_2) + f_1[c_1A_{11} - c_2(A_{21} - A_{11})] + f_2[c_1A_{12} - c_2(A_{22} - A_{12})] = F_1\text{Sinpt}; \\ m_2(A_{21}\ddot{f}_1 + A_{22}\ddot{f}_2) + f_1c_2(A_{21} - A_{11}) + f_2c_2(A_{22} - A_{12}) = F_2\text{Sinpt}. \end{cases} \quad (131)$$

Уравнения (131) можно существенно упростить. При помощи полученных выше вспомогательных соотношений (128) и (129) перепишем (131) в виде

$$\begin{cases} m_1(A_{11}\ddot{f}_1 + A_{12}\ddot{f}_2) + m_1(\omega_1^2A_{11}f_1 + \omega_2^2A_{12}f_2) = F_1\text{Sinpt}; \\ m_2(A_{21}\ddot{f}_1 + A_{22}\ddot{f}_2) + m_2(\omega_1^2A_{21}f_1 + \omega_2^2A_{22}f_2) = F_2\text{Sinpt}. \end{cases} \quad (132)$$

Дальнейшие упрощения вытекают из свойств ортогональности собственных форм колебаний. Умножим первое из уравнений (132) на A_{11} , а второе - на A_{21} и сложим их:

$$(m_1A_{11}^2 + m_2A_{21}^2)\ddot{f}_1 + (m_1A_{11}A_{12} + m_2A_{21}A_{22})\ddot{f}_2 + \omega_1^2f_1(m_1A_{11}^2 + m_2A_{21}^2) + \omega_2^2f_2(m_1A_{11}A_{12} + m_2A_{21}A_{22}) = (F_1A_{11} + F_2A_{21})\text{Sinpt}.$$

Согласно свойству ортогональности,

$$m_1A_{11}A_{12} + m_2A_{21}A_{22} = 0$$

и из записанного уравнения выпадают функция f_2 и её вторая производная \ddot{f}_2 ; в результате получается дифференциальное уравнение, содержащее только функцию f_1

$$\ddot{f}_1 + \omega_1^2f_1 = \frac{F_1A_{11} + F_2A_{21}}{m_1A_{11}^2 + m_2A_{21}^2}\text{Sinpt}. \quad (133)$$

Аналогично можно получить дифференциальное уравнение, содержащее только функцию f_2 . Для этого нужно первое из уравнений (132)

умножить на A_{12} , второе - на A_{22} и полученные уравнения сложить. Используя затем то же свойство ортогональности, будем иметь

$$\ddot{f}_2 + \omega_2^2 f_2 = \frac{F_1 A_{12} + F_2 A_{22}}{m_1 A_{12}^2 + m_2 A_{22}^2} \text{Sin}pt. \quad (134)$$

Таким образом, способ разложения по собственным формам колебаний приводит к отдельным уравнениям (133) и (134), каждое из которых описывает колебания некоторой системы с одной степенью свободы.

Если обозначить правые части дифференциальных уравнений (133) и (134) соответственно через $P_1 \text{Sin}pt$ и $P_2 \text{Sin}pt$, где

$$P_1 = \frac{F_1 A_{11} + F_2 A_{21}}{m_1 A_{11}^2 + m_2 A_{21}^2};$$

$$P_2 = \frac{F_1 A_{12} + F_2 A_{22}}{m_1 A_{12}^2 + m_2 A_{22}^2},$$

то стационарная часть решения имеет вид

$$f_1 = \frac{P_1}{\omega_1^2 - p^2} \text{Sin}pt;$$

$$f_2 = \frac{P_2}{\omega_2^2 - p^2} \text{Sin}pt.$$

Подставляя f_1 и f_2 в соотношения (130), получим решения для обобщённых координат x_1 и x_2 :

$$x_1 = \left(\frac{P_1 A_{11}}{\omega_1^2 - p^2} + \frac{P_2 A_{12}}{\omega_2^2 - p^2} \right) \text{Sin}pt;$$

$$x_2 = \left(\frac{P_1 A_{21}}{\omega_1^2 - p^2} + \frac{P_2 A_{22}}{\omega_2^2 - p^2} \right) \text{Sin}pt.$$

Приведенные выше действия обеспечивают разделение уравнений при любом конечном числе степеней свободы системы.

Разложение решения по собственным формам колебаний при сохранении заданного вида периодических нагрузок

Основное преимущество рассмотренного выше способа - разделение уравнений - никак не связано с тем или иным конкретным видом возмущающих сил. Иначе говоря, разделение уравнений так же легко достигается в случае произвольно заданных возмущающих сил $F_1(t)$, $F_2(t)$, как и в рассмотренном случае гармонических возмущающих сил $F_1 \sin pt$, $F_2 \sin pt$. Не повторяя выкладок, сразу приведём окончательные дифференциальные уравнения для общего случая

$$\begin{aligned}\ddot{f}_1 + \omega_1^2 f_1 &= \frac{F_1(t)A_{11} + F_2(t)A_{21}}{m_1 A_{11}^2 + m_2 A_{21}^2}, \\ \ddot{f}_2 + \omega_2^2 f_2 &= \frac{F_1(t)A_{12} + F_2(t)A_{22}}{m_1 A_{12}^2 + m_2 A_{22}^2}.\end{aligned}$$

Такие уравнения легко интегрируются при любом виде правых частей. Таким образом, способ разложения решения по собственным формам колебаний не требует предварительного разложения возмущающих сил на гармонические составляющие. Такое разложение является достаточно громоздкой операцией и, как правило, требует учёта большого числа гармоник. Эта операция оправдана только при решении задачи первым способом.

3.5. Стержневые системы с конечным числом степеней свободы при гармоническом нагружении

При действии на упругую систему (балку или раму) с конечным числом степеней свободы вибрационной гармонической нагрузки изгибающие моменты, поперечные и продольные силы также будут изменяться во времени, а их наибольшие значения (амплитуды) будут зависеть от частот возмущающих сил. Если все возмущающие нагрузки, действующие на систему, имеют одну и ту же частоту p и изменяются в

одной фазе, то силы инерции, а следовательно, и изгибающие моменты, поперечные и продольные силы достигают наибольших значений в одно и то же время.

Для решения задачи о вынужденных колебаниях стержневой системы можно использовать как метод сил, так и метод перемещений, причём наибольшее применение в расчётной практике находит первый из указанных методов.

Метод сил. Рассмотрим упругую систему (рис.50) с конечным числом сосредоточенных масс, на которую действуют вибрационные силы $F_i(t) = F_i \sin pt$.

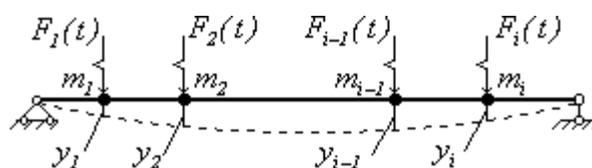


Рис. 50

Перемещение любой массы m_k в произвольный момент времени t выражается в виде

$$y_k = \delta_{k1} x_1 + \delta_{k2} x_2 + \dots + \delta_{kk} x_k + \dots + \delta_{kn} x_n + \Delta_{kF}, \quad (135)$$

где x_1, x_2, \dots, x_n – силы инерции соответствующих масс; $\delta_{k1}, \delta_{k2}, \dots, \delta_{kn}$ – перемещения по направлению силы инерции x_k , вызванные единичными силами $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$, приложенными в точках нахождения соответствующих масс; Δ_{kF} – перемещение точки расположения массы m_k от действия амплитудных значений всех приложенных вибрационных нагрузок.

Перечисленные перемещения вычисляются путём перемножения соответствующих эпюр методом Мора-Верещагина.

С другой стороны, при гармонических вынужденных колебаниях с

отброшенных связей в статически неопределимой системе, а амплитуды сил инерции масс, которые могут возникать как в статически определимой, так и в статически неопределимой системах.

После вычисления максимальных значений сил инерции x_1, x_2, \dots, x_n эпюра динамических изгибающих моментов строится путём сложения единичных эпюр, предварительно умноженных на найденные значения соответствующих инерционных сил, с эпюрой M_F , т.е. в соответствии с выражением

$$M = \bar{M}_1 x_1 + \bar{M}_2 x_2 + \dots + \bar{M}_n x_n + M_F.$$

Использование симметрии системы при её расчёте на вынужденные колебания оказывается возможным только при симметричном расположении масс.

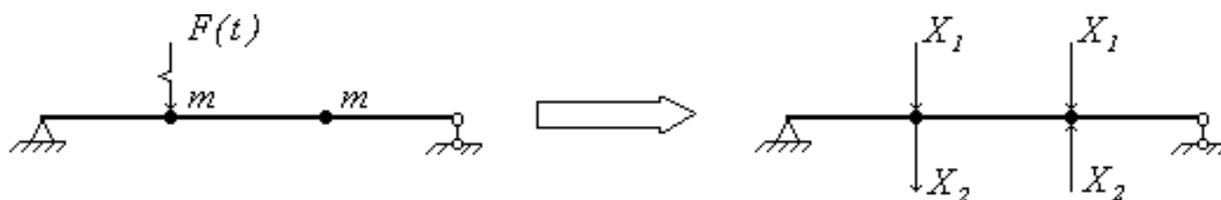


Рис. 51

При несимметричной вибрационной нагрузке разложение сил инерции на симметричные и обратно симметричные группы (рис.51) приводит к распаду системы канонических уравнений на две независимые системы.

В этом случае вычисление главных перемещений по направлению парных неизвестных нужно вести по формуле

$$\delta_{ii}^* = \delta_{ii} - \frac{2}{m_i p^2}.$$

При симметричной вибрационной нагрузке все обратно симметричные силы инерции равны нулю, а при обратно симметричной

вибрационной нагрузке симметричные силы инерции равны нулю. Симметричная нагрузка может привести к резонансу только при совпадении её частоты с собственными частотами симметричных колебаний системы и, наоборот, обратно симметричная нагрузка может дать резонанс только с частотами обратно симметричных свободных колебаний.

Метод перемещений. Этому методу отдают предпочтение при расчёте рам на вынужденные колебания. Рассмотрим систему (рис.52,а), для которой основная система получается путём введения связей по направлению неизвестных перемещений $Z_1, Z_2, \dots, Z_i, \dots, Z_n$ соответствующих масс $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_n$ (рис.52,б).

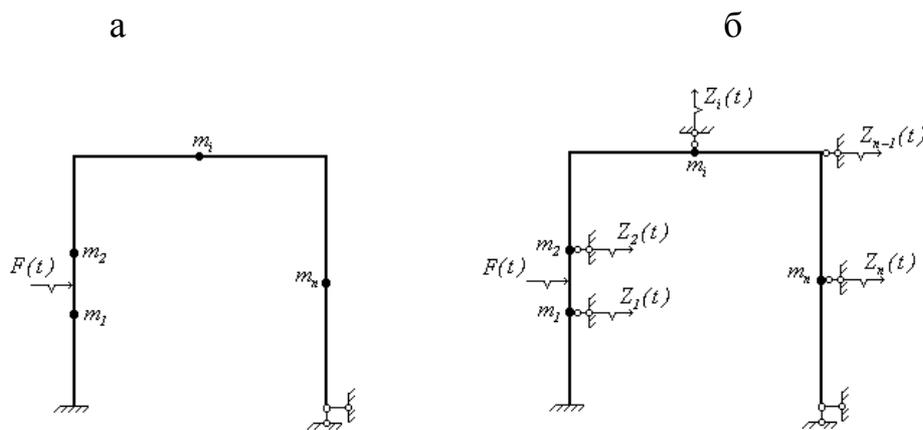


Рис. 52

Уравнение, выражающее равенство нулю динамической реакции введённой связи по направлению любого перемещения Z_i с учётом силы инерции $m_i \ddot{Z}_i$, выражается в виде

$$- m_i \ddot{Z}_i + r_{i1} Z_1 + r_{i2} Z_2 + \dots + r_{ii} Z_i + \dots + r_{in} Z_n + R_{iF} = 0.$$

Учитывая, что при гармонических колебаниях $\ddot{Z}_i = -Z_i p^2$, получим систему уравнений

Решение системы (139) можно получить всеми тремя рассмотренными способами (см. подразд. 8.4).

Непосредственное решение

Для применения первого способа необходимо предварительно разложить периодические возмущающие моменты в ряды Фурье. После этого уравнения (139) решаются несколько раз - отдельно для каждой гармоники возмущения. Это приводит к ряду однотипных частных задач, каждая из которых требует анализа действия возмущающих моментов одинаковой частоты $S\rho$:

$$\begin{cases} M_{1s}(t) = M_1 \text{Sin} S\text{pt}; \\ M_{2s}(t) = M_2 \text{Sin} S\text{pt}; \\ \dots\dots\dots \\ M_{ns}(t) = M_n \text{Sin} S\text{pt}. \end{cases} \quad (140)$$

При этом стационарные колебания будут происходить с частотой возмущения:

$$\begin{cases} \varphi_1 = A_1 \text{Sin} S\text{pt}; \\ \varphi_2 = A_2 \text{Sin} S\text{pt}; \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_n = A_n \text{Sin} S\text{pt}. \end{cases} \quad (141)$$

Подставляя (140) и (141) в (139), получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -I_1 S^2 p^2 A_1 - c_1(A_2 - A_1) = M_{1s}; \\ -I_2 S^2 p^2 A_2 + c_1(A_2 - A_1) - c_2(A_3 - A_2) = M_{2s}; \\ \dots\dots\dots \\ -I_n S^2 p^2 A_n + c_{n-1}(A_n - A_{n-1}) = M_{ns}. \end{cases} \quad (142)$$

Решая эту систему, находим амплитуды вынужденных колебаний A_1, A_2, \dots, A_n , а затем и крутящие моменты в сечениях вала: $c_1(A_2 - A_1)$ – на первом участке; $c_2(A_3 - A_2)$ – на втором и т.д.

или после преобразований

$$\begin{cases} M_1 = I_1 [\ddot{f}_0 + A_{11}(\ddot{f}_1 + \omega_1^2 f_1) + A_{12}(\ddot{f}_2 + \omega_2^2 f_2) + \dots + A_{1,n-1}(\ddot{f}_{n-1} + \omega_{n-1}^2 f_{n-1})] \\ M_2 = I_2 [\ddot{f}_0 + A_{21}(\ddot{f}_1 + \omega_1^2 f_1) + A_{22}(\ddot{f}_2 + \omega_2^2 f_2) + \dots + A_{2,n-1}(\ddot{f}_{n-1} + \omega_{n-1}^2 f_{n-1})] \\ \dots \\ M_n = I_n [\ddot{f}_0 + A_{n1}(\ddot{f}_1 + \omega_1^2 f_1) + A_{n2}(\ddot{f}_2 + \omega_2^2 f_2) + \dots + A_{n,n-1}(\ddot{f}_{n-1} + \omega_{n-1}^2 f_{n-1})] \end{cases} \quad (146)$$

Эта система уравнений распадается на независимые уравнения, если, как и выше, воспользоваться свойством ортогональности. Сложим все уравнения (146). Тогда первые слагаемые правых частей дадут сумму:

$$(I_1 + I_2 + \dots + I_n) \ddot{f}_0,$$

а вторые слагаемые -

$$(A_{11}I_1 + A_{21}I_2 + \dots + A_{n1}I_n) (\ddot{f}_1 + \omega_1^2 f_1).$$

Эта сумма вторых слагаемых равна нулю, так как сумма в первой скобке обращается в нуль вследствие ортогональности первой и нулевой форм колебаний. Точно так же обращаются в нуль результаты суммирования всех следующих слагаемых, входящих в правые части уравнений (146). Поэтому после сложения всех уравнений (146) получим

$$M_1 + M_2 + \dots + M_n = (I_1 + I_2 + \dots + I_n) \ddot{f}_0.$$

Интегрируя это уравнение, можно найти функцию f_0 .

Затем, умножив первое из уравнений (146) на A_{11} , второе - на A_{21} , третье - на A_{31} и т.д., сложим все полученные уравнения. При этом первые слагаемые правых частей образуют произведение:

$$(A_{11}I_1 + A_{21}I_2 + \dots + A_{n1}I_n) \ddot{f}_1,$$

причем сумма, заключенная в скобки, равна нулю. Суммирование вторых слагаемых дает отличное от нуля выражение

$$(A_{11}^2 I_1 + A_{21}^2 I_2 + \dots + A_{n1}^2 I_n) (\ddot{f}_1 + \omega_1^2 f_1) \neq 0.$$

При суммировании третьих слагаемых получим

$$(A_{11}A_{12}I_1 + A_{21}A_{22}I_2 + \dots + A_{n1}A_{n2}I_n)(\ddot{f}_2 + \omega_2^2 f_2)$$

Вследствие ортогональности первых двух форм колебаний сумма в первой скобке, а следовательно, и все это выражение равно нулю. Аналогично равна нулю сумма четвертых слагаемых, пятых и т.д.

Окончательно получим дифференциальное уравнение, содержащее только одну функцию f_1

$$\ddot{f}_1 + \omega_1^2 f_1 = \frac{M_1 A_{11} + M_2 A_{21} + \dots + M_n A_{n1}}{A_{11}^2 I_1 + A_{21}^2 I_2 + \dots + A_{n1}^2 I_n}.$$

Аналогично можно получить дифференциальное уравнение для функции f_2 . Для этого нужно умножить первое из уравнений (146) на A_{12} , второе - на A_{22} , третье - на A_{32} и т.д. Последовательно применяя тот же прием, можно образовать отдельные уравнения для остальных неизвестных функций. Для i -й функции f_i дифференциальное уравнение имеет вид

$$\ddot{f}_i + \omega_i^2 f_i = \frac{M_1 A_{1i} + M_2 A_{2i} + \dots + M_n A_{ni}}{A_{1i}^2 I_1 + A_{2i}^2 I_2 + \dots + A_{ni}^2 I_n}. \quad (147)$$

Уравнения этого типа наиболее удобны, так как с их помощью задача о колебаниях системы с n степенями свободы заменяется n простыми задачами о колебаниях системы с одной степенью свободы. При практическом расчете крутильных колебаний валов существенными оказываются решения, соответствующие первым двум-трем собственным формам колебаний, а это означает, что достаточно решения двух-трех уравнений типа (147), когда $i = 1, 2, 3$.

При периодичности внешних возмущающих моментов правые части дифференциальных уравнений также будут периодическими функциями. Для дальнейшего решения обычно производят разложение каждого из возмущающих моментов в ряд Фурье, после этого анализируется влияние

каждой гармонике, а затем выполняется сложение всех найденных результатов.

Хотя все эти выкладки выполняются достаточно просто, они должны быть повторены для всех важнейших гармонических составляющих возмущения, а число таких гармоник достаточно велико. Следующий пример (табл. 6) дает представление об относительной важности различных гармоник возмущения в частном случае одного четырехтактного двигателя внутреннего сгорания. Как видно, амплитуды гармоник убывают очень медленно, и в данном случае необходимо учесть в расчете не менее 13-15 гармоник. Еще раз подчеркнем, что разложение возмущающих моментов в ряд Фурье необязательно, если решение находится при помощи уравнения (147).

Таблица 6

Номер составляющей	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Амплитуда составляющей	2,38	2,69	2,65	2,31	1,95	1,64	1,01	0,76	0,59	0,47

Ввиду того, что угловая скорость вращения может изменяться в процессе эксплуатации, частоты возмущения $p_s = Sp$ непостоянны; вместе с изменением режима вращения изменяются и частоты возмущения. При этом становится реальной возможность совпадения частоты какой-либо гармонике возмущения с одной из собственных частот. В случае такого совпадения система оказывается в резонансном режиме и в расчет амплитуд колебаний следует ввести силы неупругого сопротивления.

Полное решение такой задачи даже в простейшем предположении вязких сил трения оказывается очень громоздким, поэтому практические расчеты производят приближенными способами. Основное упрощение состоит обычно в том, что форма колебаний при резонансе принимается

совпадающей с соответствующей собственной формой, определенной без учета сил затухания.

Пусть, например, одна из гармоник возмущающей силы имеет частоту ω_s , равную i -й собственной частоте ω_i . Тогда в расчете колебаний учитывается только i -я собственная форма, и если имеет место вязкое трение, то вместо уравнения (147) получим

$$\ddot{f}_i + 2n_i \dot{f}_i + \omega_i^2 f_i = Q_i \sin \omega_i t,$$

где n_i - коэффициент затухания, зависящий от номера резонирующей гармоники; Q_i - приведенная амплитуда возмущающей силы.

Это уравнение по смыслу совпадает с уравнением (106). Согласно (110), резонансная амплитуда в данном случае,

$$A^* = \frac{Q_i}{2n\omega_i}.$$

После вычисления резонансного значения A^* следует образовать резонансные значения амплитуд углов поворота. При помощи формул (145) получим, опуская в каждой строке как малые все слагаемые, кроме i -го:

$$\varphi_1 = A_{1i} A^*; \varphi_2 = A_{2i} A^*; \dots; \varphi_n = A_{ni} A^*.$$

3.7. Примеры расчетов

Пример 17. Два двигателя массой $m = 500$ кг каждый установлены на двух балках двутаврового сечения №24 (рис.53,а). При работе левый двигатель создает возмущающую силу $F \cos pt$. Найти амплитуды колебаний двигателей и максимальное напряжение в балках без учета массы балок. Дано: $a = 2$ м; $F = 1$ кН; $n = 480$ об/мин; $E = 2 \cdot 10^8$ кПа.

Решение

Уравнение движения масс:

$$\begin{cases} y_1 = -\delta_{11}m\ddot{y}_1 - \delta_{12}m\ddot{y}_2 + \delta_{11}F \cos pt; \\ y_2 = -\delta_{21}m\ddot{y}_1 - \delta_{22}m\ddot{y}_2 + \delta_{21}F \cos pt. \end{cases}$$

Решение уравнений ищем в виде

$$y_i = A_i \cos pt, i = 1, 2.$$

После подстановки получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (1 - \delta_{11}m\omega^2)A_1 - \delta_{12}m\omega^2 A_2 = \delta_{11}F; \\ -\delta_{21}m\omega^2 A_1 + (1 - \delta_{22}m\omega^2)A_2 = \delta_{21}F. \end{cases}$$

Единичные эпюры моментов, необходимые для вычисления коэффициентов δ_{ik} ($i, k = 1, 2$), представлены на рис.53,б,в.

Перемножая соответствующие эпюры по способу Верещагина, получим значения перемещений

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{3a^3}{4E2I_x} = 0,4335 \cdot 10^{-6} \text{ м};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{7a^3}{12E2I_x} = 0,3371 \cdot 10^{-6} \text{ м}.$$

Частота вибрационной нагрузки:

$$p = \frac{\pi n}{30} = 50,27 \text{ с}^{-1}.$$

После подстановки в систему алгебраических уравнений находим амплитуды колебаний:

$$A_1 = 14,76 \cdot 10^{-3} \text{ м}; A_2 = 14,66 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

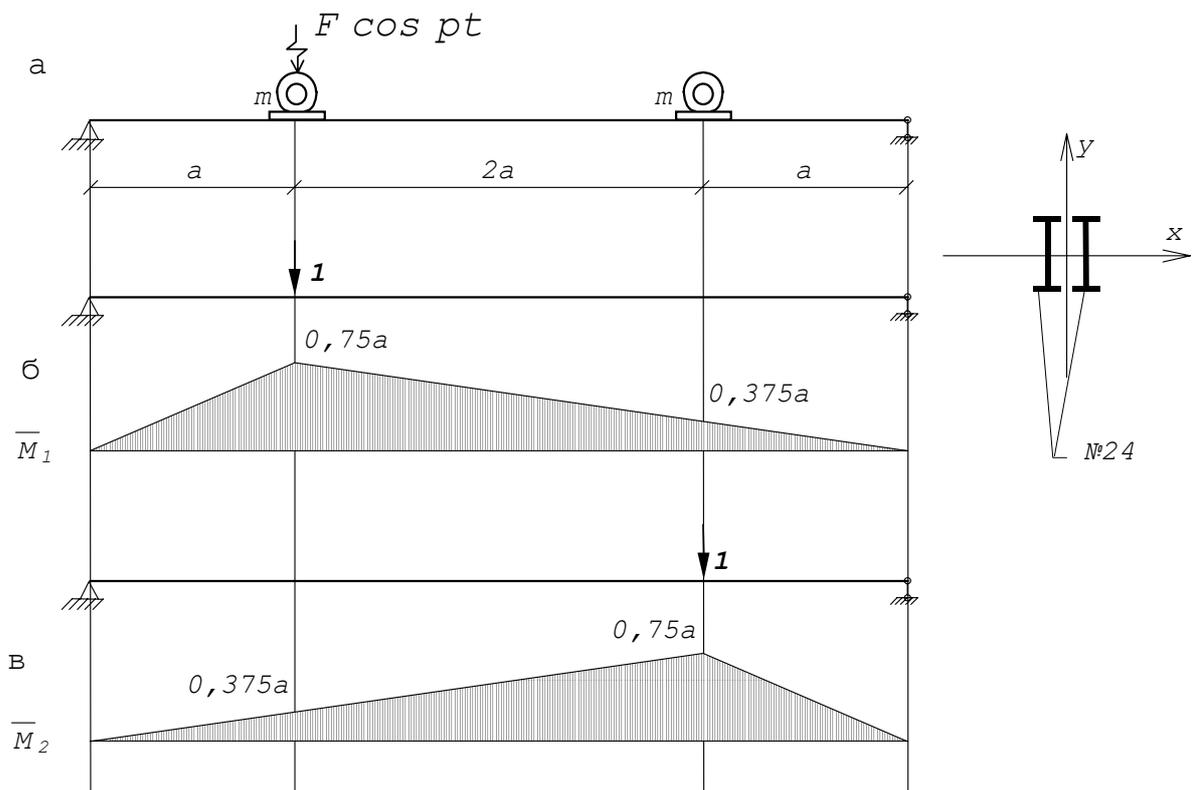


Рис. 53

Соответствующие динамические нагрузки F_{g1} и F_{g2} определяем из системы уравнений

$$\begin{cases} \delta_{11}F_{g1} + \delta_{12}F_{g2} = A_1; \\ \delta_{21}F_{g1} + \delta_{22}F_{g2} = A_2. \end{cases}$$

Так как A_1 и A_2 близки по величине, то $A_1 = A_2 = 14,76 \cdot 10^{-3}$ м,

тогда
$$F_{g1} = F_{g2} = \frac{A_1}{\delta_{11} + \delta_{12}} = 19,15 \text{ кН.}$$

С учетом статической нагрузки находим

$$F_{\max} = F_{g1} + mg = 24,05 \text{ кН.}$$

Максимальное напряжение в балках:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{2W_x} = \frac{F_{\max} a}{2W_x} = 83,2 \text{ МПа.}$$

Пример 18. Построить эпюру динамических изгибающих моментов для невесомой балки пролетом $l = 4\text{ м}$ при действии возмущающей силы $F(t) = F \sin pt$ (рис.54,а), если $F = 2\text{ кН}$; $p = 57,5\text{ с}^{-1}$; $m = 0,5 \frac{\text{кН}\cdot\text{с}^2}{\text{м}}$; $EI_x = 2 \cdot 10^4 \text{ кН}\cdot\text{м}^2$.

Решение.

Опуская вид единичных эпюр(см. пример 7), приведем значения перемещений δ_{ik} ($i, k = 1, 2$):

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{8EI_x} = \frac{8}{EI_x};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{l^3}{32EI_x} = -\frac{2}{EI_x};$$

$$\delta_{22} = \frac{l^3}{48EI_x} = \frac{4}{3EI_x}.$$

Эпюра от амплитудного значения возмущающей силы показана на рис.54,б.

Перемножая эпюру M_F с эпюрами \bar{M}_1 и \bar{M}_2 (рис.29) находим:

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) = \frac{16}{EI_x};$$

$$\Delta_{2F} = -\frac{1}{EI_x} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2 = -\frac{4}{EI_x}.$$

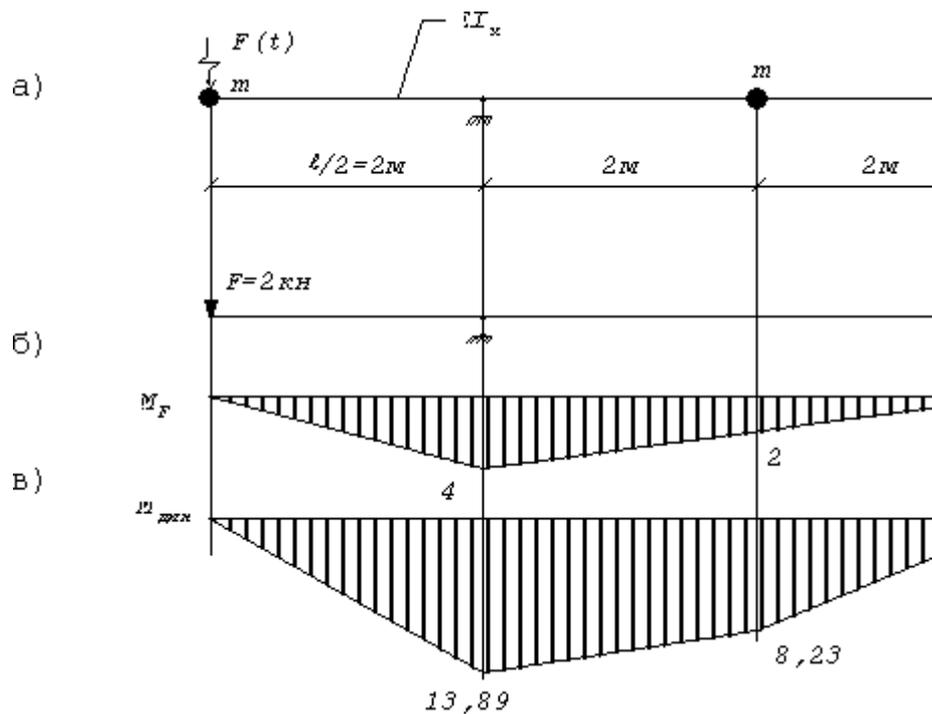


Рис. 54

Собственные частоты колебаний балки вычислены ранее (пример 7) и равны:

$$\omega_1 = 68,5\text{c}^{-1}; \omega_2 = 228\text{c}^{-1}.$$

«Исправленные» главные перемещения:

$$\delta_{11}^* = \delta_{11} - \frac{1}{mp^2} = \frac{1}{EI_x} \left(8 - \frac{2 \cdot 10^4}{0,5 \cdot 57,5^2} \right) = -\frac{3,8}{EI_x};$$

$$\delta_{22}^* = \delta_{22} - \frac{1}{mp^2} = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{4}{3} - \frac{2 \cdot 10^4}{0,5 \cdot 57,5^2} \right) = -\frac{10,47}{EI_x}.$$

Система канонических уравнений динамического варианта метода сил для вычисления сил инерции X_1 и X_2 имеет вид:

$$\begin{cases} \delta_{11}^* X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1F} = 0; \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22}^* X_2 + \Delta_{2F} = 0. \end{cases}$$

После подстановки числовых значений коэффициентов получим:

$$\begin{cases} -3,8X_1 - 2X_2 = -16; \\ -2X_1 - 10,47X_2 = 4. \end{cases}$$

Силы инерции:

$$\begin{cases} X_1 = 4,91\text{кН}; \\ X_2 = -1,32\text{кН}. \end{cases}$$

Используя формулу:

$$M_{\text{дин}} = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + M_F,$$

строим эпюру динамических изгибающих моментов $M_{\text{дин}}$ (рис.54,в).

Пример 19. Построить эпюру динамических изгибающих моментов в симметричной раме (рис.55,а) при действии на нее симметричной динамической нагрузки $F(t) = 6 \sin pt$ и $q(t) = 3 \sin pt$. Частота возмущающих сил $p = 0,6\omega_1$. Сосредоточенные массы одинаковы и располагаются посередине каждого стержня.

Решение.

Так как вибрационная нагрузка симметрична, то формы вынужденных колебаний также будут симметричными. Групповые симметричные неизвестные силы инерции показаны на рис.55,б. Эпюры моментов от единичных сил \bar{X}_1, \bar{X}_2 и \bar{X}_3 , действующих по направлению сил инерции, показаны на рис.55,в,г,д. Для их построения можно было применить метод расчета рам, например, метод сил или метод перемещений. Перемещения $\delta_{11}, \delta_{12} = \delta_{21}, \delta_{13} = \delta_{31}, \delta_{22}, \delta_{23} = \delta_{32}$ и δ_{33} определяются путем перемножения этих эпюр. Однако проще перемножать эпюры $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3$ не друг с другом, а с эпюрами $\bar{M}'_1, \bar{M}'_2, \bar{M}'_3$, построенными для основных систем и показанными на рис.55,е,ж,з (основная система на рис.55,е,ж получается путем введения шарниров, а на рис.55,з - путем разрезания стоек в их средних по высоте сечениях).

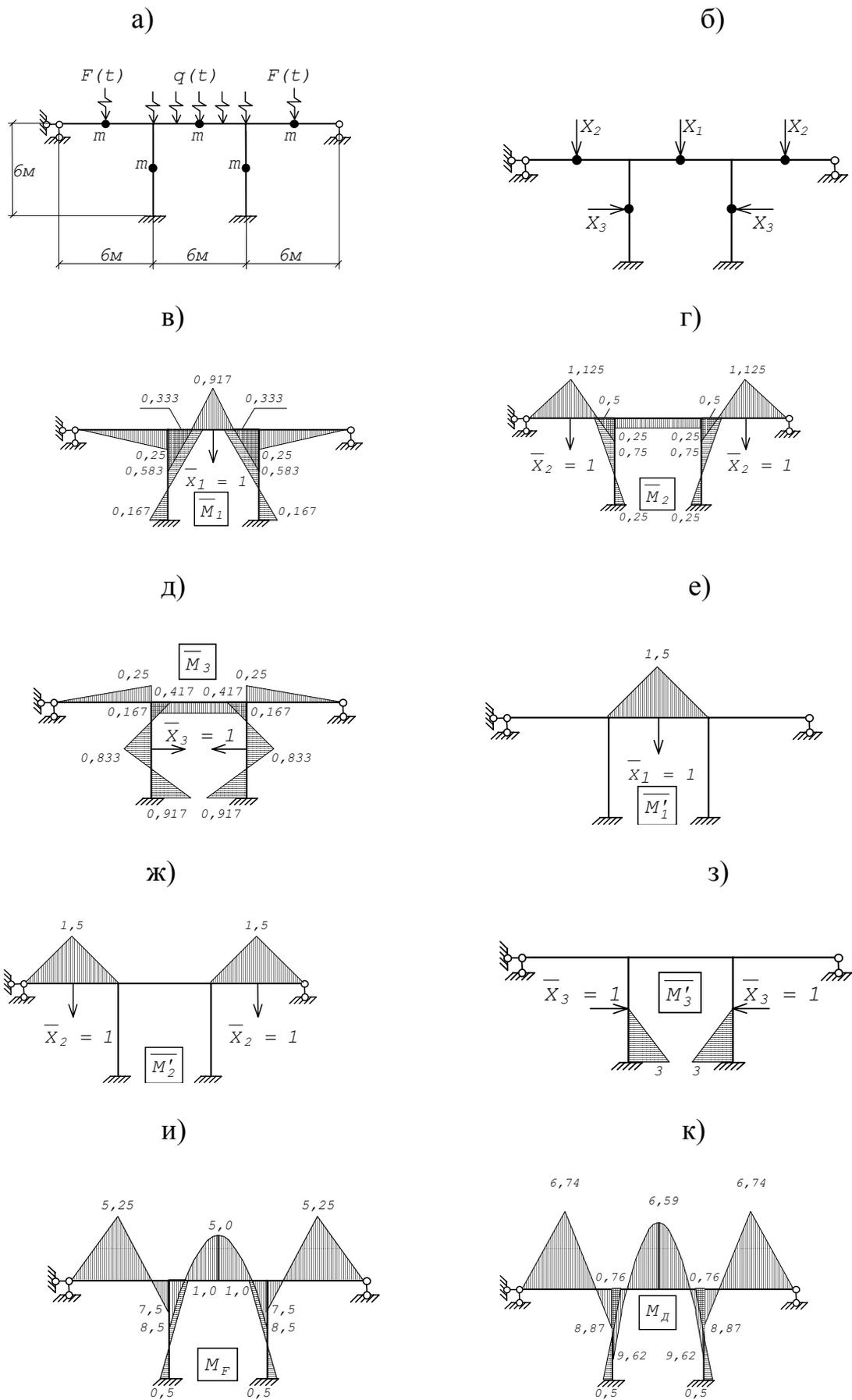


Рис. 55

Опуская промежуточные вычисления, приведем значения перемещений

$$EI\delta_{11} = 1,88; \quad EI\delta_{12} = -1,13; \quad EI\delta_{13} = -0,75;$$

$$EI\delta_{22} = 5,63; \quad EI\delta_{23} = 1,13; \quad EI\delta_{33} = 3,0.$$

Частотный определитель имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \delta_{11}m - \frac{1}{\omega^2} & \delta_{12} \frac{m}{2} & \delta_{13} \frac{m}{2} \\ \delta_{21}m & \delta_{22} \frac{m}{2} - \frac{1}{\omega^2} & \delta_{23} \frac{m}{2} \\ \delta_{31}m & \delta_{32} \frac{m}{2} & \delta_{33} \frac{m}{2} - \frac{1}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель и решая кубическое частотное уравнение, найдем собственные частоты колебаний рамы:

$$\omega_1 = 0,531 \sqrt{\frac{EI}{m}};$$

$$\omega_2 = 0,816 \sqrt{\frac{EI}{m}};$$

$$\omega_3 = 0,937 \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

Построив для заданной системы эпюру M_F от амплитудных значений вибрационных нагрузок (рис.55,и) и перемножив эту эпюру с вспомогательными эпюрами $\overline{M}'_1, \overline{M}'_2, \overline{M}'_3$, получим перемещения от амплитуд динамических нагрузок:

$$EI\Delta_{1F} = 12,37; EI\Delta_{2F} = 20,25; EI\Delta_{3F} = -2,25.$$

Частота возмущающих нагрузок:

$$p = 0,6\omega_1 = 0,319 \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

Главные перемещения с учетом зависимости инерционных сил от частоты p :

$$\delta_{11}^* = \delta_{11} - \frac{1}{mp^2} = \frac{1}{EI} \left(1,88 - \frac{1}{0,319^2} \right) = -\frac{7,94}{EI};$$

$$\delta_{22}^* = \delta_{22} - \frac{1}{mp^2} = \frac{1}{EI} \left(5,63 - \frac{2}{0,319^2} \right) = -\frac{14,01}{EI};$$

$$\delta_{33}^* = \delta_{33} - \frac{1}{mp^2} = \frac{1}{EI} \left(3,0 - \frac{2}{0,319^2} \right) = -\frac{16,64}{EI}.$$

Канонические уравнения динамического варианта метода сил:

$$\begin{cases} -7,94X_1 - 1,13X_2 - 0,75X_3 + 12,37 = 0; \\ -1,13X_1 - 14,01X_2 + 1,13X_3 + 20,25 = 0; \\ -0,75X_1 + 1,13X_2 - 16,64X_3 - 2,25 = 0. \end{cases}$$

Амплитудные значения сил инерции масс:

$$\begin{cases} X_1 = 13,9 \text{ кН}; \\ X_2 = 13,27 \text{ кН}; \\ X_3 = -1,08 \text{ кН}. \end{cases}$$

Для построения эпюры динамических изгибающих моментов $M_{\text{дин}}$ (рис. 55, к) вычисляем моменты в характерных сечениях рамы по формуле:

$$M = 13,9\bar{M}_1 + 13,27\bar{M}_2 - 1,08\bar{M}_3 + M_F.$$

Глава 4

Параметрические колебания

4.1. Основное уравнение (уравнение Матье)

В ряде случаев параметры механической системы - ее жесткость или масса - не остаются неизменными, а являются некоторыми заданными функциями времени, чаще периодическими. Если нарушить состояние равновесия такой системы, то будут происходить своеобразные колебания: с одной стороны, их нельзя назвать свободными, так как система испытывает определенное внешнее воздействие в виде изменения жесткости, а с другой - они не являются вынужденными, так как внешнее воздействие не проявляется в виде заданной возмущающей силы. Эти колебания называются *параметрическими* и в зависимости от свойств системы и характера изменения ее параметров могут иметь ограниченные или возрастающие амплитуды, причем во втором случае возможно наступление *параметрического резонанса*.

Рассмотрим простейшую систему (рис.56). Сосредоточенная масса 1 закреплена на конце невесомого стержня 2. Свобода перемещений стержня дополнительно ограничена втулкой 3, удаленной от нижнего конца стержня на расстояние l .

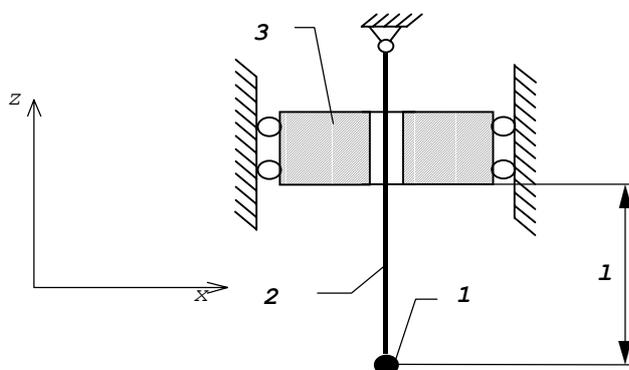


Рис. 56

Составим уравнение свободных колебаний груза, считая, что они происходят в плоскости чертежа. Если в текущий момент времени t перемещение груза составляет x , то восстанавливающая сила упругости стержня равна $-cx$, а уравнение движения груза имеет вид

$$-cx = m\ddot{x},$$

где c - коэффициент жесткости системы.

Втулка 3 при ее достаточной длине обеспечивает практически полное защемление нижней части стержня, и тогда $c = \frac{3EI}{\ell^3}$. При этом предполагается, что стержень имеет постоянное поперечное сечение с осевым моментом инерции I . Таким образом, дифференциальное уравнение движения

$$\ddot{x} + \frac{3EI}{m\ell^3}x = 0. \quad (148)$$

Если расстояние ℓ постоянно, то (148) описывает свободные колебания массы m около ее среднего положения с собственной частотой

$$\omega_c = \sqrt{\frac{3EI}{m\ell^3}}.$$

Теперь предположим, что втулка 3 скользит вдоль стержня 2 по заданному закону

$$z = A \cos \omega t,$$

т.е. совершает около среднего положения ℓ гармонические колебания с амплитудой A и круговой частотой ω . В этом случае коэффициент жесткости оказывается функцией времени:

$$C = \frac{3EI}{(\ell + z)^3} = \frac{3EI}{(\ell + A \cos \omega t)^3}, \quad (149)$$

и дифференциальное уравнение (148) становится уравнением с переменными

коэффициентами:

$$\ddot{x} + \frac{3EI}{m(\ell + A \cos \omega t)^3} x = 0, \quad (150)$$

что характерно для системы с параметрическим возбуждением колебаний.

Существует много других механических систем, подверженных параметрическому возбуждению. Ряд примеров убеждает, что в большинстве практически важных случаев дифференциальное уравнение параметрических колебаний можно привести к стандартной форме:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + (a - 2q \cos 2\tau)x = 0, \quad (151)$$

где a и q - некоторые постоянные.

Возвращаясь к механической системе, показанной на рис.56, положим, что амплитуда колебаний втулки A весьма мала по сравнению с длиной ℓ , тогда вместо (149) приближенно получается

$$C = \frac{3EI}{(\ell + A \cos \omega t)^3} \cong \frac{3EI}{\ell^3 + 3A\ell^2 \cos \omega t} \cong \frac{3EI}{\ell^3} \left(\ell - \frac{3A}{\ell} \cos \omega t \right), \quad (152)$$

и дифференциальное уравнение (150) принимает вид

$$\ddot{x} + \frac{3EI}{m\ell^3} \left(1 - \frac{3A}{\ell} \cos \omega t \right) x = 0. \quad (153)$$

Перейдем к безразмерному времени τ :

$$2\tau = \omega t,$$

тогда

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\omega^2}{4} \cdot \frac{d^2x}{d\tau^2},$$

и дифференциальное уравнение (153) приобретает стандартную форму (151),

причем

$$\begin{cases} a = \frac{12EI}{m\omega^2 \ell^3}; \\ q = \frac{18AEI}{m\omega^2 \ell^4}. \end{cases} \quad (154)$$

Основное уравнение параметрических колебаний (151) называется *уравнением Матье*. Решения этого уравнения носят колебательный характер и главным образом зависят от конкретных значений параметров **a** и **q**. В одних случаях данной комбинации **a** и **q** соответствуют колебания, ограниченные по амплитуде, а в других - колебания с возрастающими амплитудами. Основную практическую важность представляет именно тенденция колебательного процесса: если амплитуды остаются ограниченными, то система устойчива; в противном случае имеет место параметрический резонанс, и система неустойчива.

Результаты решения уравнения Матье для двух различных комбинаций **a** и **q** показаны на рис.57 (эти решения получены при помощи электронного аналогового устройства). Хотя в обоих случаях параметр **q** системы одинаков ($q = 0,1$), колебания имеют совершенно разный характер из-за различия между значениями параметра **a** ($a = 1$; $a = 1,2$). В первом случае амплитуды возрастают, т.е. система неустойчива, а во втором случае остаются ограниченными, т.е. система устойчива.

Для практических целей наибольшее значение имеют границы между областями устойчивых и неустойчивых решений. Этот вопрос хорошо исследован, причем окончательные результаты представляются в виде диаграммы, построенной в плоскости параметров **a** и **q**, которая называется *диаграммой Айнса-Стретта*.

Каждой данной системе, характеризуемой параметрами **a** и **q**, соответствует точка с координатами **a**, **q** на диаграмме Айнса-Стретта (изображающая точка). Если изображающая точка находится в пределах

заштрихованных полей диаграммы, то система устойчива; неустойчивым системам соответствуют изображающие точки, расположенные на белых полях.

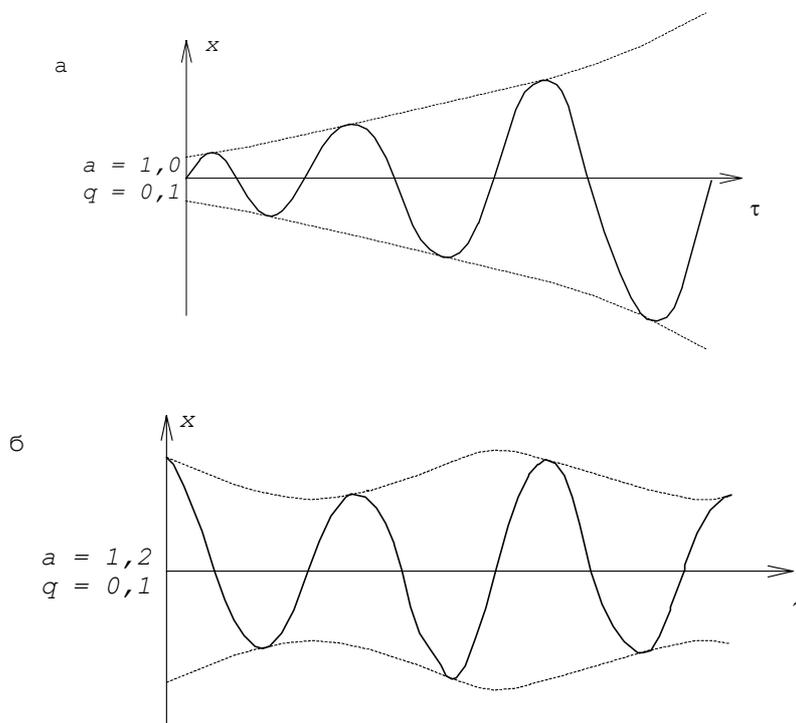


Рис. 57

На рис.58 показана часть диаграммы Айнса-Стретта, относящаяся к малым значениям параметра q . В качестве примера на диаграмме указаны точки 1 и 2, соответствующие параметрам $a_1 = 1; q_1 = 0,1; a_2 = 1,2; q_2 = 0,1$ (решения уравнения Матье для этих случаев даны на рис.57).

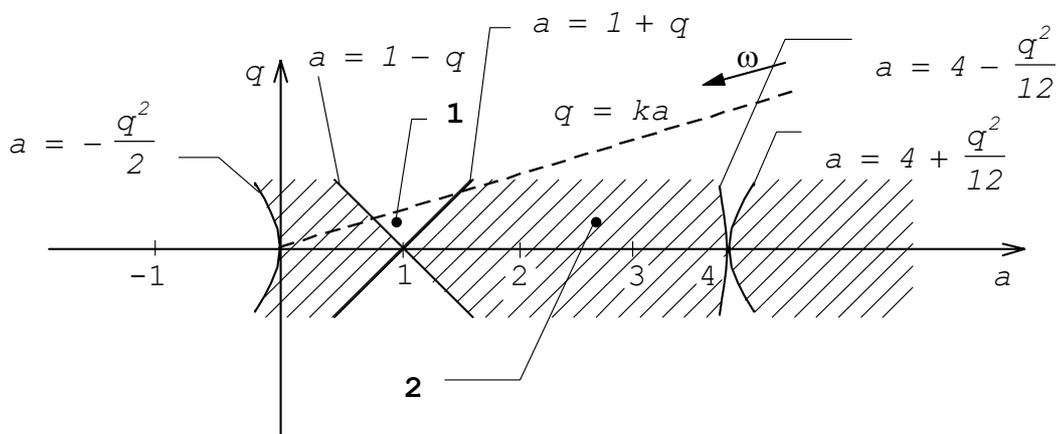


Рис. 58

Точка 1 находится в белой зоне (неустойчивость), и колебания происходят с возрастающими амплитудами (рис.57,а). Точка 2 находится в пределах заштрихованной зоны; ей отвечает движение с ограниченной амплитудой (рис.57,б).

В плоскости параметров \mathbf{a} , \mathbf{q} области устойчивости чередуются с областями неустойчивости, причем наиболее широкая, а потому и наиболее важная область неустойчивости содержит точку $\mathbf{a} = 1$, $\mathbf{q} = 0$. Диаграмма Айнса-Стретта полностью освобождает от выполнения каких-либо операций по решению уравнения Матье. Достаточно составить это уравнение, т.е. найти значения параметров системы \mathbf{a} и \mathbf{q} , после чего диаграмма дает ответ на вопрос об устойчивости или неустойчивости системы.

При возрастании частоты возбуждения параметры \mathbf{a} и \mathbf{q} уменьшаются. Так как отношение этих параметров остается постоянным, то последовательные состояния системы определяются изображающими точками на луче $\mathbf{q} = k\mathbf{a}$, проходящем через начало координат.

4.2. Случаи периодического изменения жесткости

В качестве примера рассмотрим систему, упругой частью которой является зубчатый (шлицевой) вал 1 (рис.59,а). На нижнем конце вала находится диск 2. С валом соединена зубчатая (шлицевая) массивная втулка 3, которая может скользить вдоль оси вала и совершать гармонические колебания в вертикальном направлении. В этой системе возможно возбуждение не только изгибных, но и крутильных колебаний. Пусть свободная длина вала в текущий момент времени \mathbf{t} составляет

$$\ell = \ell_0 + A \cos \omega t.$$

Коэффициент жесткости вала на кручение:

$$C = \frac{GI_p}{\ell} = \frac{GI_p}{\ell_0 + A \cos \omega t}. \quad (155)$$

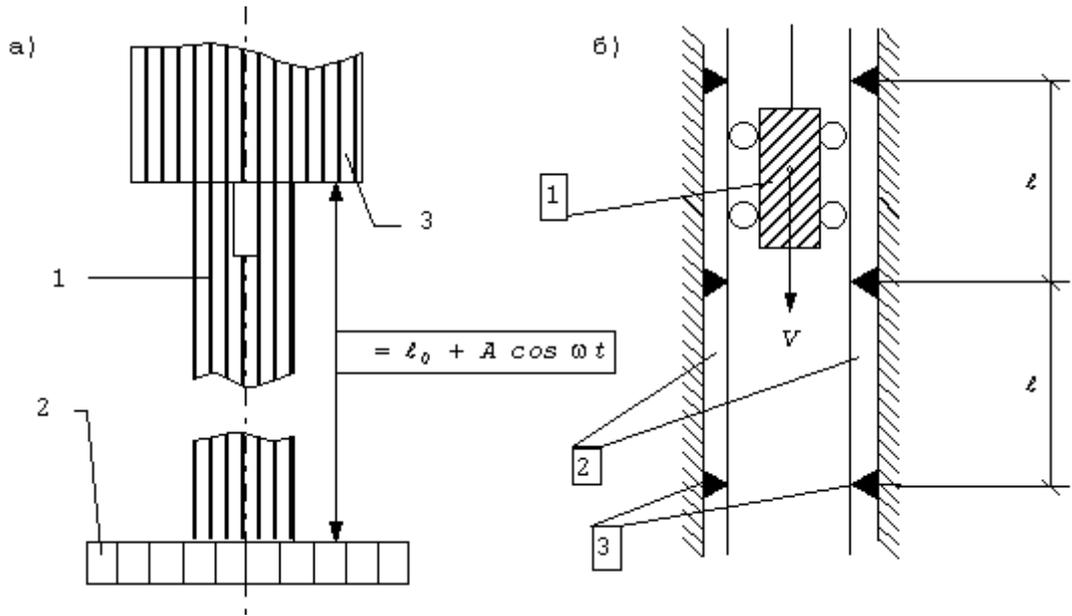


Рис. 59

Если амплитуда колебаний A значительно меньше среднего значения длины l_0 , то (155) можно представить в виде

$$C = \frac{GI_p}{l_0} \left(1 - \frac{A}{l_0} \cos \omega t \right),$$

что по структуре совпадает с (152), следовательно, крутильные колебания рассматриваемой системы также описываются уравнением Матье (151), причем

$$a = \frac{4GI_p}{\omega^2 l_0};$$

$$q = \frac{2AGI_p}{\omega^2 l_0^2}.$$

При некоторых условиях, определяемых диаграммой Айнса-Стретта, рассматриваемая система может оказаться в состоянии параметрического резонанса.

Другим примером параметрического возбуждения колебаний при периодическом изменении жесткости является система, изображенная на рис.59,б. Шахтная клетка 1 равномерно движется по вертикальным направляющим 2, которые закреплены на шпалах 3. В этой системе поперечная жесткость, определяющая восстанавливающую упругую силу при поперечных колебаниях клетки, есть величина переменная: если клетка находится на уровне очередной пары шпал, то эта жесткость достигает максимума, если же клетка расположена против середины свободного пролета направляющих, то жесткость минимальна. Частота изменения жесткости зависит от расстояния между шпалами и от скорости движения клетки:

$$\omega = 2\pi V/\ell,$$

а отсюда следует, что существует ряд «запретных» диапазонов скорости V , соответствующих условиям параметрического резонанса. Эти соображения полностью подтверждены экспериментальными исследованиями.

4.3. Случаи периодического изменения параметрических нагрузок

Простейший пример рассматриваемого типа представлен на рис.60,а.

Масса 1 закреплена на верхнем конце вертикального абсолютно жесткого стержня 2; внизу стержень имеет опору, упруго сопротивляющуюся повороту опорного сечения («упругий шарнир»). На верхний конец стержня действует вертикальная сила F . Такая система представляет собой результат упрощенной схематизации реального стержня, обладающего распределенными массой и упругостью.

Сила F является параметрической нагрузкой, и если она постоянна во времени, ее критическое значение можно найти при помощи формулы Эйлера.

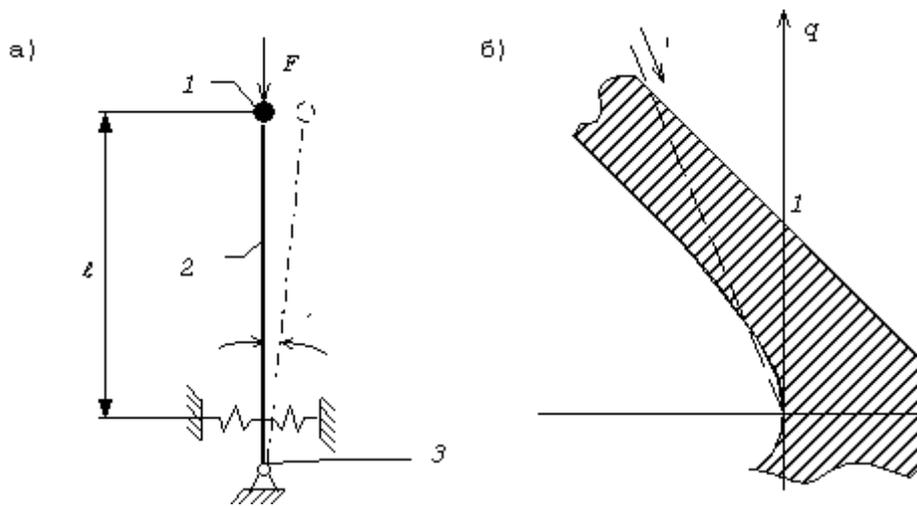


Рис. 60

Пусть φ - угол отклонения стержня от вертикали; C - коэффициент жесткости упругого шарнира. Тогда восстанавливающий момент (момент упругого шарнира) составляет $-C\varphi$, а уравнение имеет вид

$$F\ell\varphi - C\varphi = 0. \quad (156)$$

Очевидно, что $\varphi \neq 0$; отсюда следует, что отклоненное состояние равновесия возможно, если

$$F_{\text{бр}} = \frac{C}{\ell}. \quad (157)$$

Этой формулой определяется критическое значение статически действующей силы F (например веса груза 1).

Это же значение можно найти, рассматривая свободные колебания груза 1. В отличие от уравнения статики (156) уравнение моментов относительно шарнира 3 содержит инерционное слагаемое:

$$F\ell\varphi - C\varphi = ml^2\ddot{\varphi}, \quad (158)$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{C - F\ell}{ml^2}\varphi = 0.$$

При $C = F\ell$ частота свободных колебаний системы обращается в нуль, т.е. система становится неустойчивой. Значение критической силы вновь определяется формулой (157).

Рассмотрим случай, когда сила F изменяется во времени, следуя гармоническому закону:

$$F = F_0 + F_1 \cos \omega t.$$

При этом уравнение колебаний стержня (158) принимает вид

$$(F_0 + F_1 \cos \omega t)\ell\varphi - C\varphi = m\ell^2\ddot{\varphi},$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{\ell}{m\ell^2}(C - F_0\ell - F_1\ell \cos \omega t)\varphi = 0.$$

Это уравнение приводится к стандартной форме - уравнению Матье (151), если положить

$$\begin{cases} 2\tau = \omega t; \\ a = \frac{4}{m\omega^2\ell} \left(\frac{C}{\ell} - F_0 \right); \\ q = \frac{2F_1}{m\omega^2\ell}. \end{cases} \quad (159)$$

При возрастании частоты ω параметры a и q пропорционально уменьшаются. Штриховой луч (рис.58) указывает, что система проходит ряд последовательно чередующихся устойчивых и неустойчивых состояний. Наклон луча определяется отношением

$$K = \frac{q}{a} = \frac{F_1}{2(F_{кр} - F_0)},$$

где $F_{кр}$ -статическая критическая сила, определяемая выражением (157).

При данном значении F_1 величина k зависит от разности $F_{кр} - F_0$. Чем ближе значение статической составляющей F_0 к критическому значению $F_{кр}$, тем круче проходит луч и тем шире пересекаемые им участки областей неустойчивости.

Потеря устойчивости возможна при сколь угодно малых значениях сжимающей статической составляющей F_0 и даже при изменении ее знака, т.е. при растягивающей статической составляющей. Как видно из рис. 58, луч $q = ka$ при $F_0 < 0$ проходит весьма полого, но также пересекает ряд областей неустойчивости.

С другой стороны, диаграмма Айнса-Стретта позволяет установить, что устойчивость системы возможна при $F_{кр} = F_0$ и даже при $F_0 > F_{кр}$. Действительно, если $F_{кр} = F_0$, то $a = 0$, луч $q = ka = 0$ совпадает с осью ординат диаграммы Айнса-Стретта, но система остается неустойчивой, если $|q| < 1$. Согласно условиям (159), для этого необходимо выполнение неравенства

$$\omega > \sqrt{\frac{2F_1}{ml}}.$$

При $F_0 > F_{кр}$ луч $q = ka$ располагается во втором квадранте диаграммы; из рис.60,б следует, что и в этом случае возможна устойчивость системы в надлежаще выбранном диапазоне изменения частот ω . Таким образом, вибрационная составляющая сжимающей силы может при определенных условиях стабилизировать систему, которая неустойчива в отсутствие колебаний.

4.4. Маятник с колеблющейся точкой подвеса

Рассмотрим маятник (рис.61,а). Если точка подвеса неподвижна, то единственной силой, создающей момент относительно точки подвеса, является вес груза mg .

Уравнение малых колебаний маятника имеет вид

$$-mgl\varphi = ml^2\ddot{\varphi}.$$

Если же точка подвеса колеблется вдоль оси y по закону

$$y = A \cos \omega t,$$

то при составлении уравнения моментов нужно учесть переносную силу инерции $-m\ddot{y} = mA\omega^2 \cos \omega t$, момент которой составляет $mA\omega^2 l \varphi \cos \omega t$, и тогда уравнение колебаний маятника запишется так:

$$-mgl\varphi + mA\omega^2 l \varphi \cos \omega t = ml^2\ddot{\varphi},$$

или

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{l} - \frac{A\omega^2}{l} \cos \omega t \right) \varphi = 0. \quad (160)$$

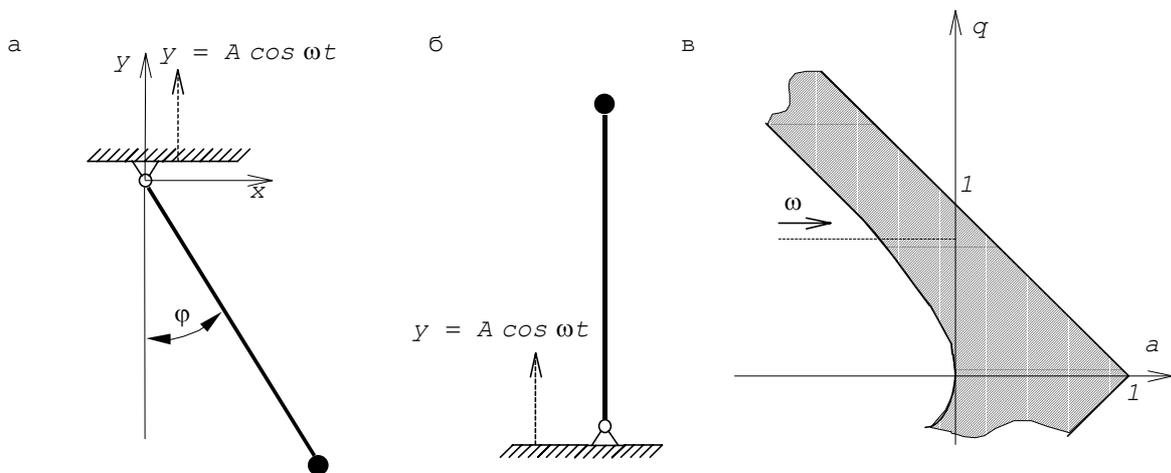


Рис. 61

Уравнение (160) можно привести к стандартному виду - уравнению Матье.

Для этого положим:

$$\begin{cases} 2\tau = \omega t; \\ a = \frac{4}{\omega^2 l}; \\ q = \frac{2A}{l}. \end{cases}$$

Теперь из диаграммы Айнса-Стретта видно, что параметр a не зависит от амплитуды колебаний точки подвеса и сколь бы малой ни была амплитуда A , неустойчивость нижнего положения маятника наступает вблизи значений $a = 1; a = 4; a = 9, \dots$, т.е. при

$$\omega = 2\sqrt{\frac{q}{l}}; \quad \omega = \sqrt{\frac{q}{l}}; \quad \omega = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{q}{l}}; \dots$$

Рассмотрим вопрос об устойчивости верхнего положения маятника (рис.61,б). При неподвижной опоре это положение, конечно, неустойчиво; однако вибрации основания могут придать ему устойчивость. Для получения уравнения движения в данном случае достаточно изменить знак перед членом, содержащим ускорение g в уравнении (160); соответственно параметр a становится отрицательным:

$$a = -\frac{4g}{\omega^2 l}.$$

Из рис.61,в видно, что верхнее положение маятника может быть устойчивым. При небольших амплитудах колебаний A точки подвеса, когда $|q| < 1$, устойчивость верхнего положения достигается, если выполняется неравенство $|a| < q^2/2$. Это условие устойчивости с учетом последней формулы принимает вид

$$\omega > \frac{\sqrt{2gl}}{A}.$$

Глава 5

Автоколебания

5.1. Общие положения и примеры автоколебательных систем

Во всех рассмотренных ранее системах с неупругими сопротивлениями стационарные колебательные процессы оказывались возможными благодаря наличию внешних воздействий периодического характера. Однако в некоторых системах стационарные колебания возможны и без периодических воздействий извне; такие системы называются *автоколебательными* или *самовозбуждающимися*. Так как в любом реальном колебательном процессе неизбежно происходит рассеяние энергии, то всякая автоколебательная система обладает источником энергии, пополняющим все энергетические потери, но по своей природе источник не обладает колебательными свойствами.

Способность системы так регулировать отбор энергии от источника, чтобы появлялись автоколебания, определяется некоторыми ее свойствами. Этими свойствами являются динамические характеристики - собственные частоты и формы колебаний и коэффициенты затухания, определяющие «динамическую индивидуальность» системы.

Приведем несколько примеров возникновения автоколебаний. Во многих случаях самовозбуждение колебаний возникает вследствие взаимодействия системы с потоком жидкости, доставляющим энергию, необходимую для поддержания колебаний системы. Так, если деревянный стержень полукруглого сечения, подвешенный на пружинах, обдувать потоком воздуха, то стержень будет совершать колебания в вертикальной плоскости, перпендикулярной к направлению потока, причем с течением времени эти колебания становятся весьма интенсивными. Такой стержень полукруглого сечения хорошо моделирует условия реальной проблемы -

«галопирование» линий электропередачи. При некоторых метеорологических условиях (главным образом при обледенении) провода линий электропередачи, протянутые между пилонами, могут колебаться с весьма большими амплитудами и низкими частотами.

Колебания стержня полукруглого сечения называют колебаниями системы с одной степенью свободы. Это означает, что движение совершается по одной форме, и соответствующее перемещение системы «стержень - пружины» можно охарактеризовать одной переменной величиной, например вертикальным отклонением центра тяжести стержня от своего среднего положения. Возможен такой тип автоколебаний, которые могут существовать лишь в случае возбуждения более чем одной степени свободы. В этом случае все положения, которые принимает система в процессе колебаний, могут быть описаны лишь при помощи более чем одной переменной величины.

Примером такой системы являются автоколебания крыла самолета в воздушном потоке. Длинная гибкая опора позволяет крылу перемещаться вверх и вниз как жесткому целому (таким же образом движется и стержень полукруглого сечения); это движение соответствует первой степени свободы. Движение, соответствующее второй степени свободы, - это поворот крыла вокруг своей оси, сопровождающийся деформацией тонкой листовой пружинки; при таких колебаниях изменяется наклон крыла относительно набегающего потока. Система имеет и другие степени свободы (так, крыло может перемещаться параллельно потоку), но они не играют существенной роли. При достаточно высокой скорости потока крыло совершает вертикальные колебания, и одновременно происходят изменения угла наклона крыла относительно набегающего потока (угла атаки). Это пример классического флаттера-движения, происходящего с двумя степенями свободы.

Флаттер может возникать также у лопастей вертолетов и лопаток турбомашин. На практике явление флаттера служит объектом обширных

исследований; условие отсутствия флаттера часто является одним из основных требований при проектировании.

Возникновение флаттера связано с выбором «формы флаттера», для которой выполняются определенные соотношения между амплитудами и фазами колебаний, соответствующих различным степеням свободы. Условие возникновения флаттера зависит от скорости потока, а также от плотности и температуры воздуха. Предположим, что скорость изменяется. От скорости потока зависит значение энергии, получаемой системой за один цикл колебаний, и значение энергии, рассеиваемой за цикл колебаний вследствие внутреннего и аэродинамического демпфирования. Когда отношение этих значений энергии становится равным единице, в системе могут установиться колебания постоянной амплитуды; соответствующая скорость самолета называется *критической скоростью флаттера*. Каждой из возможных форм флаттера соответствует своя критическая скорость, и все расчеты флаттера проводятся с целью удостовериться, что наименьшая из критических скоростей с достаточным запасом превышает максимально возможную скорость полета самолета.

Существуют три пути борьбы с флаттером.

Первый способ основан на таком изменении характеристик системы, при котором достигается независимость колебаний, соответствующих различным степеням свободы, причем демпфирование всех этих различных форм колебаний положительно. Так, можно добиться того, чтобы поворот оси профиля крыла относительно продольной оси сечения слабо зависел от вертикального перемещения оси. Для этого нужно, чтобы ось занимала определенное положение, а распределение массы по сечению профиля удовлетворяло определенному условию. *Другой способ* заключается в увеличении собственных частот конструкции за счет увеличения отношений «жесткость/масса» отдельных ее частей. Этот способ основан на том, что энергия, получаемая системой при флаттере за один цикл колебаний, почти

не зависит от частоты, тогда как энергия, рассеиваемая за один цикл, пропорциональна частоте.

Два рассмотренных метода обычно используются в практике самолетостроения. Третий метод борьбы с флаттером, вызываемым аэродинамическими силами, не всегда эффективен, но часто с успехом используется для устранения других видов автоколебаний. Этот метод заключается в демпфировании системы. Увеличивая трение в системе, склонной к флаттеру (т.е. увеличивая энергию, рассеиваемую за один цикл колебаний заданной амплитуды) можно, как правило, повысить критическую скорость системы.

5.2. Фрикционные автоколебания

Особого внимания заслуживают механические автоколебания, возникающие в системах с трением. Сила трения, которая в ранее рассмотренных примерах оказывалась причиной затухания колебаний, может явиться причиной их раскачивания.

Рассмотрим простейшую систему (рис.62,а), состоящую из двух вращающихся барабанов и бесконечной ленты.

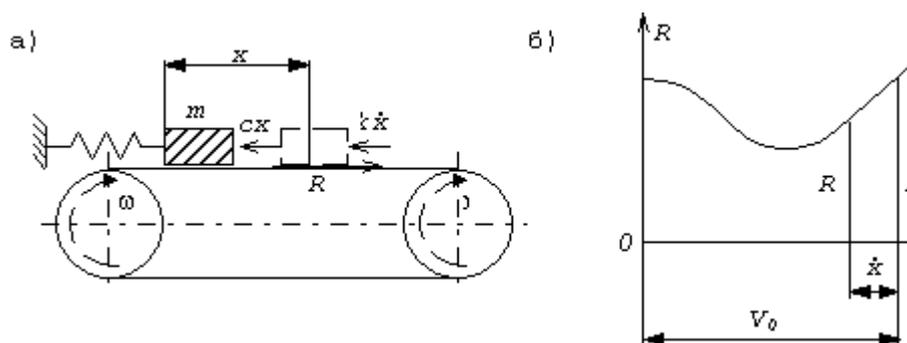


Рис. 62

На ленте лежит груз массой m , движение которого ограничено пружиной с жесткостью c . Развивающаяся при скольжении груза сила трения смещает груз вправо и вызывает некоторое удлинение пружины. Пусть в

положении равновесия груза сила трения равна R_0 , тогда статическое смещение груза

$$x_0 = \frac{R_0}{C}. \quad (161)$$

Для дальнейших рассуждений необходимо учесть, что сила трения R зависит от относительной скорости движения V (при заданном нормальном давлении груза, которое будем считать постоянным). Пусть характеристика трения имеет вид, показанный на рис.62,б, где значения V_0 и R_0 соответствуют состоянию равновесия груза.

Положим, что вследствие какого-либо возмущения в мгновение $t=0$ груз выведен из состояния покоя. Выясним характер движения, которое возникает после такого возмущения, считая, что скорость движения ленты в процессе колебаний груза не изменяется. Пусть в текущее мгновение t смещение груза равно x , его скорость равна \dot{x} , а скорость скольжения

$$V = V_0 - \dot{x}.$$

В это мгновение на груз действуют три силы: сила трения R , реакция пружины $-cx$ и внешнее сопротивление, которое будем считать пропорциональным скорости и равным $-k\dot{x}$.

Сила R отличается от силы R_0 , поскольку скорость относительного движения V отличается от скорости V_0 . При малых колебаниях относительной скорости можно принять:

$$R = R_0 - R'_0 \dot{x}, \quad (162)$$

где R'_0 - тангенс угла наклона характеристики трения в точке с координатами V_0, R_0 .

Уравнение движения груза:

$$m\ddot{x} = -cx - \dot{x}k + R.$$

Подставляя сюда (162), получим

$$m\ddot{x} + cx + k\dot{x} = R_0 - R'_0\dot{x},$$

или

$$m\ddot{x} + cx - R_0 + (R'_0 + k)\dot{x} = 0. \quad (163)$$

Сместим начало отсчета перемещений в точку $x = x_0$, т.е. введем новую переменную $x_1 = x - x_0$.

Тогда (163) имеет вид

$$m\ddot{x}_1 + (R'_0 + k)\dot{x}_1 + cx_1 + cx_0 - R_0 = 0.$$

Согласно (161), сумма двух последних слагаемых равна нулю, поэтому получим уравнение

$$m\ddot{x}_1 + (R'_0 + k)\dot{x}_1 + cx_1 = 0. \quad (164)$$

Анализ структуры этого уравнения показывает, что с увеличением времени колебания должны исчезать, если сумма $R'_0 + k$ положительна. Это обязательно имеет место на восходящем участке характеристики трения, где $R'_0 > 0$.

Однако при небольших значениях V_0 (нисходящий участок характеристики трения) величина R'_0 становится отрицательной. Если при этом $k > |R'_0|$, то сумма $R'_0 + k$ остается положительной, и колебания будут затухающими. Если сумма $R'_0 + k$ обращается в нуль, т.е. $k = |R'_0|$, то в уравнении (164) исчезает член, соответствующий затуханию, и становятся возможными колебания с постоянной амплитудой. Если же сумма $R'_0 + k$ отрицательна, то система обладает как бы «отрицательным затуханием», и колебания с течением времени будут возрастать за счет энергии, передаваемой движущейся лентой.

Природу «отрицательного затухания» при падающей характеристике трения можно выяснить исходя из следующих рассуждений. Когда груз

движется вправо, т.е. по ходу движения ленты, относительная скорость скольжения уменьшается; вместе с этим сила трения увеличивается и ее приращение направлено вправо, т.е. также в сторону движения. В другом интервале движения, когда груз движется влево, приращение силы трения направлено также влево, т.е. опять в сторону движения. Такой характер изменения силы трения и является причиной возрастания колебаний.

Итак, для возрастания колебаний необходимо выполнение условия: $R'_0 + k < 0$, что возможно только при достаточной крутизне падения характеристики трения. Обычно указанное условие выполняется лишь при малой скорости V_0 .

При помощи тех же рассуждений можно прийти к выводу о возможности автоколебаний упруго закрепленной колодки, прижатой к вращающемуся диску (рис.63,а), а также груза на пружине, когда левому ее концу задано движение с постоянной скоростью (рис.63,б). В обоих этих случаях необходимым условием автоколебаний также является наличие нисходящего участка характеристики трения.

К этому же классу явлений относятся автоколебания, возникающие при резании металлов на станках. Рассмотрим природу этих автоколебаний. Со стороны заготовки на резец действует реакция F , которая может быть разложена на составляющие F_y и F_z (рис.63,в,г). Резец упруго закреплен и его конец может совершать колебания как в горизонтальном, так и в вертикальном направлениях. Для выявления возможности автоколебаний достаточно рассмотреть колебания только в горизонтальном направлении $y = y(t)$ и учесть важный экспериментальный результат: горизонтальная составляющая F_y зависит от скорости горизонтальных колебаний резца \dot{y} .

На резец действуют три силы: сила упругости - $c y$ системы резец-суппорт (где c - коэффициент жесткости); реакция заготовки - $F_y(\dot{y})$ и сумма

различных неупругих сопротивлений, которая может быть объединена в одно слагаемое вида $-k\dot{y}$.

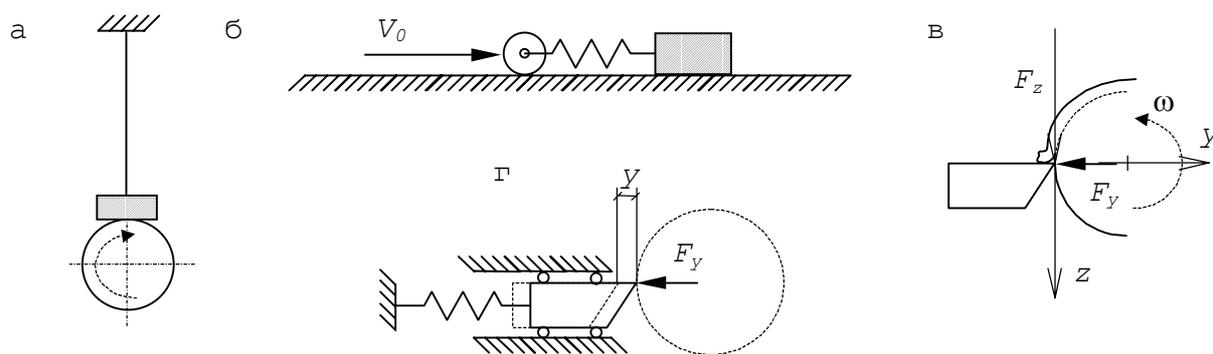


Рис. 63

Таким образом, уравнение движения системы резец-суппорт имеет вид

$$-F_y(\dot{y}) - c\dot{y} - k\dot{y} = m\ddot{y},$$

где m - приведенная масса системы резец-суппорт.

После линеаризации силы F_y , согласно (162), вновь приходим к уравнению типа (164), следовательно, и в этом случае автоколебания возможны, если характеристика силы F_y - нисходящая.

Как установлено, неустойчивость состояния равновесия может быть обнаружена в предположении малости колебаний, т.е. при помощи линейного приближения. Однако, если отказаться от этого предположения и проследить за дальнейшим течением процесса, то обнаруживается, что рост амплитуд постепенно замедляется и в конечном итоге амплитуда полностью стабилизируется. Этот процесс установившихся (стационарных) автоколебаний (рис.64) называется *предельным циклом*.

Важной особенностью предельного цикла является его полная независимость от начальных условий; после любого возмущения состояния равновесия система приближается к одному и тому же предельному циклу.

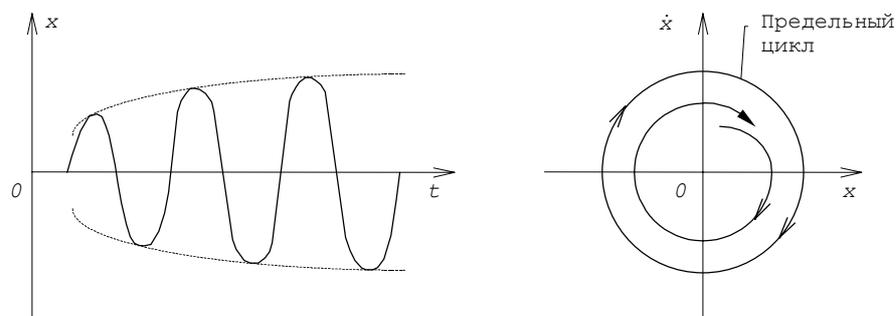


Рис. 64

Для выявления параметров (частоты, амплитуды) установившихся автоколебаний необходим анализ соответствующей нелинейной задачи.

В некоторых случаях стационарные автоколебания носят почти гармонический характер и совершаются с частотой свободных колебаний системы; соответствующие системы называются *квазилинейными*. В других случаях стационарные автоколебания резко отличаются от гармонических, сопровождаются остановками и скачками скорости; такие автоколебания и соответствующие системы называются *релаксационными* или *разрывными*.

5.3. Флаттер крыла в воздушном потоке

Как уже говорилось выше, флаттером называются автоколебания тел в потоке газа или жидкости.

При появлении первых скоростных самолетов флаттер служил причиной многочисленных катастроф. Явление флаттера тесно связано с теми воздействиями, которые поток воздуха оказывает на колеблющееся крыло.

Ограничимся рассмотрением принципиальной картины этого явления. При флаттере крыло самолета совершает изгибно-крутильные колебания, поэтому для анализа этого явления необходимо учесть по крайней мере две степени свободы крыла. При практических расчетах достаточно учесть движения крыла по первым формам собственных изгибных и крутильных колебаний. В еще более простом варианте расчета рассмотрим жесткое

крыло, имеющее две степени свободы, соответствующие его вертикальному перемещению и повороту (рис.65).

Существенное значение имеет положение центра тяжести крыла, т.е. той точки его хорды, приложении вертикальной силы в которой вызывает только вертикальное перемещение крыла, но не его поворот. К этой точке (точка 0 на рис.65) будем приводить действующие на крыло силы.

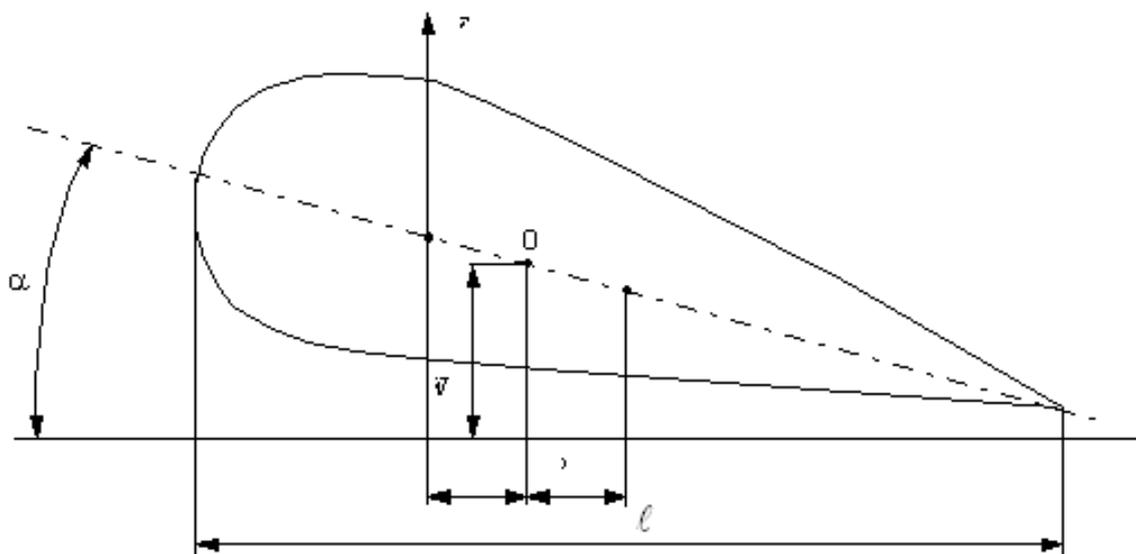


Рис. 65

Если обозначить вертикальное перемещение центра жесткости крыла через W , а изменение угла атаки крыла в процессе движения через α , то упругие сила и момент, приложенные в точке 0, будут равны соответственно $C_W W$ и $C_\alpha \alpha$, где C_W и C_α - коэффициенты жесткости.

Сила инерции и момент сил инерции относительно точки 0 составляют соответственно

$$\begin{aligned} F_\gamma &= -m(\ddot{W} - \ddot{\alpha}b); \\ M_\gamma &= F_\gamma b + mr^2 \ddot{\alpha} = -mb\ddot{W} + m(r^2 + b^2)\ddot{\alpha}, \end{aligned} \quad (165)$$

где b - расстояние от центра жесткости крыла до его центра массы; m - масса крыла; r - радиус инерции массы крыла относительно центральной оси.

Наибольшие трудности представляет определение изменений аэродинамических сил, возникающих вследствие движения крыла. Простейшая гипотеза относительно этих сил состоит в том, что их можно вычислить так же, как и при неподвижном крыле, подставив в соответствующие формулы значения мгновенного угла атаки. В этом предположении получаем увеличение подъемной силы и момента

$$F = \pi \rho A V^2 \left(\alpha - \frac{\dot{W}}{V} \right); M = -Fa, \quad (166)$$

где ρ - плотность воздуха; V - скорость потока; A - площадь сечения крыла; a - расстояние от центра тяжести до центра давления, который расположен на одной четверти хорды крыла.

Формулы (166) представляют собой грубое приближение, так как в них полностью игнорируется влияние движения крыла на обтекание. Более точное решение задачи показывает, что если крыло совершает, например, гармонические колебания с частотой ω , то следует учитывать еще инерцию присоединенной массы воздуха и то обстоятельство, что изменение подъемной силы оказывается смещенным по фазе относительно изменения угла атаки.

Как величина присоединенной массы, так и фазовый сдвиг зависят от безразмерного параметра $\omega \ell / V$, характеризующего частоту колебаний.

Ради упрощения расчета не будем учитывать всех этих обстоятельств и дополнительно в первой из формул (166) пренебрежем слагаемым \dot{W}/V , которое характеризует аэродинамическое демпфирование вертикальных колебаний крыла. С учетом сказанного получаем уравнения движения крыла в виде

$$\begin{cases} m(\ddot{W} - b\ddot{\alpha}) + C_w W = F; \\ -mb\ddot{W} + m(r^2 + b^2)\ddot{\alpha} + C_\alpha \alpha = Fa, \end{cases} \quad (167)$$

где $F = \pi \rho A V^2 \alpha$.

Решение системы (167) отыщем в виде, соответствующем гармоническим колебаниям:

$$\begin{cases} W = W_0 e^{-i\omega t}; \\ \alpha = \alpha_0 e^{-i\omega t}. \end{cases} \quad (168)$$

Подставляя (168) в (167), получим систему однородных алгебраических уравнений относительно W_0 и α_0 :

$$\begin{cases} (C_w - m\omega^2)W_0 + (mW^2b - \pi\rho AV^2)\alpha_0 = 0; \\ m\omega^2bW_0 + [C_\alpha - m\omega^2(r^2 + b^2) - \pi\rho AV^2a]\alpha_0 = 0. \end{cases} \quad (169)$$

Приравнявая нулю определитель системы (169), получим частотное уравнение. Для того чтобы привести это уравнение к более простому виду, введем следующие обозначения:

$$\omega_w = \sqrt{\frac{C_w}{m}}; \omega_\alpha = \sqrt{\frac{C_\alpha}{m(r^2 + b^2)}}$$

- собственные частоты поступательных (изгибных) и крутильных колебаний крыла;

$$\mu = \frac{4m}{\rho\pi A\ell}$$

- относительная плотность крыла.

Тогда частотное уравнение можно представить в так:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega}{\omega_\alpha}\right)^4 - \left[\left(1 + \frac{\omega_w^2}{\omega_\alpha^2}\right) \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) - \frac{4}{\mu} \left(\frac{V}{1 \cdot \omega_\alpha}\right)^2 \cdot \frac{1 \cdot (a+b)}{r^2} \right] \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_\alpha}\right)^2 + \\ + \left[1 + \frac{b^2}{r^2} - \frac{4}{\mu} \cdot \left(\frac{V}{1 \cdot \omega_\alpha}\right)^2 \cdot \frac{a \cdot 1}{r^2} \right] \cdot \left(\frac{\omega_w}{\omega_\alpha}\right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (170)$$

При нулевой скорости потока $V=0$ это уравнение даёт два положительных значения W^2 , соответствующих двум собственным частотам системы.

С увеличением скорости потока возможно появление двух типов неустойчивости. Так, один из корней уравнения (170) может обратиться в нуль, что соответствует обращению в нуль свободного члена уравнения (170):

$$1 + \frac{b^2}{r^2} - \frac{4}{\mu} \cdot \left(\frac{V_g}{1 \cdot \omega_\alpha} \right)^2 \cdot \frac{a \cdot l}{r^2} = 0. \quad (171)$$

Обращение в нуль частоты собственных колебаний системы свидетельствует о её статической неустойчивости. Действительно, возвращаясь в формуле (171) к первоначальным обозначениям, приведём её к виду

$$\rho \cdot \pi \cdot A \cdot V_g^2 \cdot a = C_\alpha.$$

Если это соотношение выполняется, то при повороте крыла на угол α момент дополнительной подъёмной силы

$$F_a = \rho \cdot \pi \cdot A \cdot V_g^2 \cdot a \cdot \alpha$$

уравновешивается упругим моментом $C_\alpha \alpha$.

Явление статической потери устойчивости крыла при достижении скоростью потока значения V_g называется *дивергенцией*.

Для крыльев самолётов, как правило, скорость дивергенции существенно превышает скорость полета и дивергенция не представляет реальной опасности.

Другой вид потери устойчивости – изгибно-крутильный флаттер - связан с тем, что частоты, определяемые из (170), становятся комплексными числами. Если имеются сопряжённые комплексные частоты $\pm \beta \pm \gamma i$, то соответствующие решения уравнений движения имеют множители

$$e^{i\omega t} = e^{\pm \gamma t} \cdot e^{\pm i\beta t}.$$

Экспоненциальные множители с действительными положительными показателями неограниченно возрастают.

Таким образом, в этом случае движение представляет собой колебания с нарастающими амплитудами (колебательный характер движения определяется множителями $e^{\pm i\beta t}$).

Итак, условием наступления флаттера является появление комплексных корней уравнения (170), что происходит при обращении в нуль (назовём это «граничным условием») его дискриминанта:

$$\left[\left(1 + \frac{\omega_w^2}{\omega_\alpha^2} \right) \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) - \frac{4}{\mu} \left(\frac{V_{TM}}{l \cdot \omega_\alpha} \right)^2 \cdot \frac{l \cdot (a + b)}{r^2} \right]^2 - 4 \cdot \left[1 + \frac{b^2}{r^2} - \frac{4}{\mu} \left(\frac{V_{TM}}{l \cdot \omega_\alpha} \right)^2 \cdot \frac{a \cdot l}{r^2} \right] \left(\frac{\omega_w}{\omega_\alpha} \right)^2 = 0 \quad (172)$$

Из уравнения (172) легко вычислить скорость флаттера.

Проследим на числовом примере характер изменения частот свободных колебаний крыла по уравнению (170) при увеличении скорости потока.

Допустим, что $\left(\frac{\omega_w}{\omega_\alpha} \right)^2 = 0.1$; $\mu = 10$; $a = 0.1 \cdot l$; $b = 0.05 \cdot l$;

$$\left(\frac{r}{l} \right)^2 = 0.06.$$

Этим данным соответствуют скорость дивергенции, вычисленная по уравнению (171), $V_g = 1.25 \cdot \omega_\alpha \cdot l$, и скорость флаттера, вычисленная по уравнению (172), $V_{TM} = 0.836 \cdot \omega_\alpha \cdot l$.

График изменения частот колебаний системы в зависимости от скорости потока, построенный в соответствии с уравнением (170), показан на рис.66.

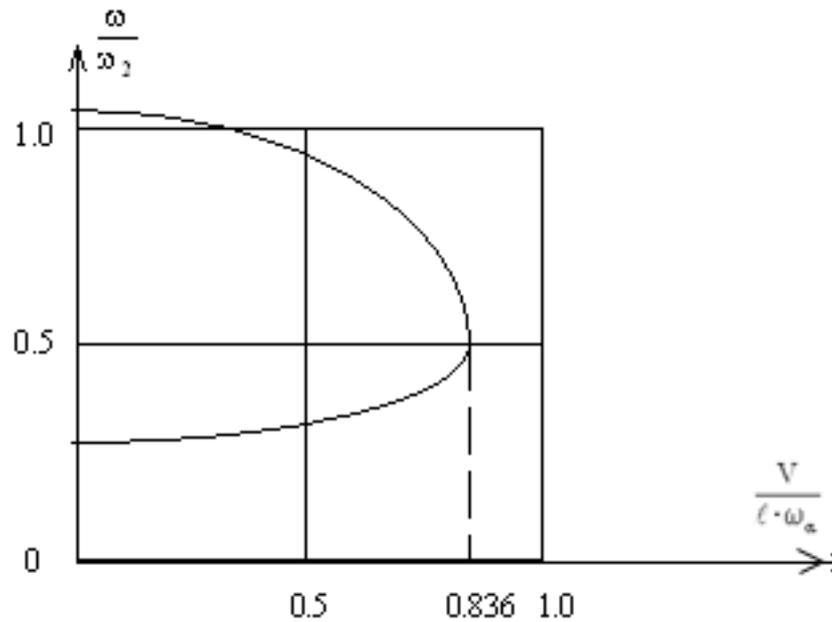


Рис. 66

При $V=0$ система имеет две частоты собственных колебаний, мало отличающиеся от частот чисто крутильных и чисто изгибных колебаний. С увеличением скорости потока частоты сближаются, и при скорости флаттера оказываются равными друг другу.

Наличие кратных собственных частот для консервативной системы не связано с какими-либо особенностями её поведения. Для неконсервативной системы, которую представляет собой крыло, находящееся в потоке воздуха, слияние двух частот ведёт к потере устойчивости движения. В процессе колебаний система начинает интенсивно потреблять энергию потока и амплитуды колебаний неограниченно возрастают. Механизм этого явления легко понять, если представить себе, что происходящие с одинаковой частотой крутильные и изгибные колебания крыла сдвинуты по фазе на $\frac{\pi}{2}$, так что, когда крыло движется вверх, его угол атаки (а значит, и подъёмная сила) больше, чем когда оно движется вниз. При этом за полный цикл подъёмная сила будет совершать положительную работу и энергия колебания будет непрерывно возрастать.

Глава 6

Свободные колебания систем с распределёнными параметрами

Основная особенность процесса свободных колебаний систем с бесконечным числом степеней свободы выражается в бесконечности числа собственных частот и форм колебаний. С этим связаны и особенности математического характера: вместо обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих колебания систем с конечным числом степеней свободы, здесь приходится иметь дело с дифференциальными уравнениями в частных производных. Кроме начальных условий, определяющих начальные смещения и скорости, необходимо учитывать и граничные условия, характеризующие закрепление системы.

6.1. Продольные колебания стержней

При анализе продольных колебаний прямолинейного стержня (рис.67,а) будем считать, что поперечные сечения остаются плоскими и что частицы стержня не совершают поперечных движений, а перемещаются только в продольном направлении.

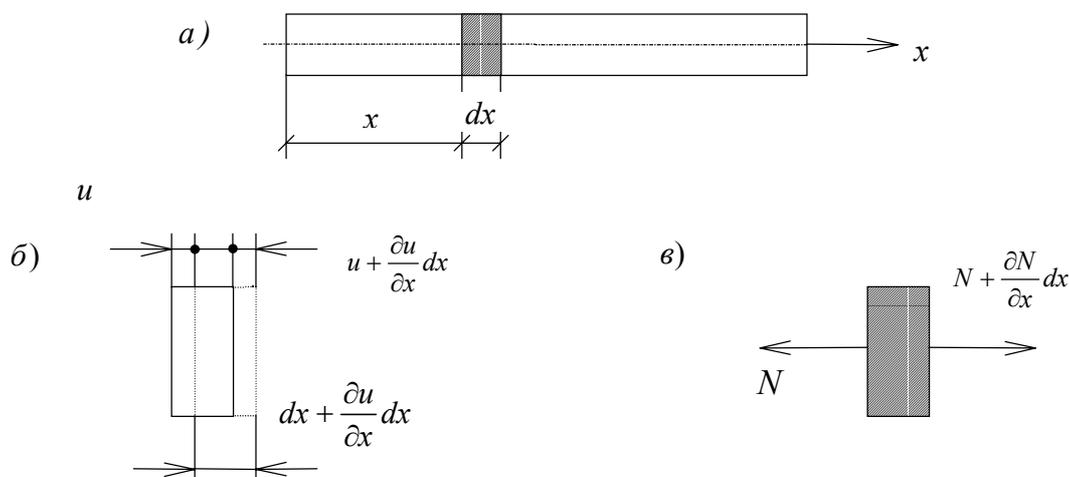


Рис. 67

Пусть u - продольное перемещение текущего сечения стержня при колебаниях; это перемещение зависит от расположения сечения (координаты x) и от времени t . Таким образом, $u = u(x, t)$ есть функция двух переменных; её определение и представляет основную задачу. Перемещение бесконечно близкого сечения равно $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$, следовательно, абсолютное удлинение бесконечно малого элемента dx равно $\frac{\partial u}{\partial x} dx$ (рис.67,б), а относительное его удлинение $-\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$.

Соответственно продольная сила в сечении с координатой x может быть записана в виде

$$N = EA\varepsilon = EA \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (173)$$

где EA жёсткость стержня при растяжении (сжатии). Сила N также является функцией двух аргументов – координаты x и времени t .

Рассмотрим элемент стержня, расположенный между двумя бесконечно близкими сечениями (рис.67,в). К левой грани элемента приложена сила N , а к правой – сила $N + \frac{\partial N}{\partial x} dx$. Если обозначить через ρ плотность материала стержня, то масса рассматриваемого элемента составляет $\rho A dx$. Поэтому уравнение движения в проекции на ось x

$$-N + \left(N + \frac{\partial N}{\partial x} dx \right) = \rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

или

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (174)$$

Учитывая (173) и принимая $A = \text{const}$, получим

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (175)$$

где

$$c^2 = \frac{E}{\rho}. \quad (176)$$

Следуя методу Фурье, ищем частное решение дифференциального уравнения (175) в виде

$$u = X(x) \cdot T(t), \quad (177)$$

т.е. предположим, что перемещение u можно представить в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от аргумента x , а другая только от аргумента t . Тогда вместо определения функции двух переменных $u(x, t)$ необходимо определять две функции $X(x)$ и $T(t)$, каждая из которых зависит только от одной переменной.

Подставив (177) в (174), получим

$$c^2 X'' T = X \ddot{T},$$

где штрихами обозначена операция дифференцирования по x , а точками – по t . Перепишем это уравнение таким образом:

$$\frac{c^2 X''}{X} = \frac{\ddot{T}}{T}.$$

Здесь левая часть зависит только от x , а правая – только от t . Для тождественного выполнения этого равенства (при любых x и t) необходимо, чтобы каждая из его частей была равна постоянной, которую обозначим через $-\omega^2$:

$$\frac{c^2 X''}{X} = -\omega^2; \quad \frac{\ddot{T}}{T} = -\omega^2. \quad (178)$$

Отсюда следуют два уравнения:

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0; X'' + \frac{\omega^2}{C^2} X = 0. \quad (179)$$

Первое уравнение имеет решение:

$$T = A \sin(\omega t + \alpha), \quad (180)$$

указывающее на колебательный характер, причём из (180) видно, что неизвестная величина ω имеет смысл частоты свободных колебаний.

Второе из уравнений (179) имеет решение:

$$X = C \sin \frac{\omega}{c} x + D \cos \frac{\omega}{c} x, \quad (181)$$

определяющее форму колебаний.

Частотное уравнение, определяющее величину ω , составляется путём использования граничных условий. Это уравнение всегда трансцендентное и имеет бесконечное число корней. Таким образом, число собственных частот бесконечно, причём каждому значению частоты ω_n соответствует своя функция $T_n(t)$, определяемая зависимостью (180), и своя функция $X_n(x)$, определяемая зависимостью (181). Решение (177) является лишь частным и не даёт полного описания движения. Полное решение получается путём наложения всех частных решений:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot T_n(t).$$

Функции $X_n(x)$ называются *собственными функциями* задачи и описывают собственные формы колебаний. Они не зависят от начальных условий и удовлетворяют условию ортогональности, которое при $A = \text{const}$ имеет вид

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) dx = 0, \text{ если } m \neq n.$$

Рассмотрим некоторые варианты граничных условий.

Закреплённый конец стержня (рис.68,а). В конечном сечении перемещение u должно быть равно нулю; отсюда следует, что в этом сечении

$$X=0 \quad (182)$$

Свободный конец стержня (рис.68,б). В конечном сечении продольная сила

$$N = EAX'T \quad (183)$$

должна тождественно равняться нулю, что возможно, если в конечном сечении $X'=0$.

Упругозакреплённый конец стержня (рис.68,в).

При перемещении u концевого стержня возникает упругая реакция опоры $-C_0u = -C_0XT$, где C_0 - жёсткость опоры. Учитывая (183) для продольной силы, получим граничное условие

$$C_0X = EAX',$$

если опора расположена на левом конце стержня (рис.68,в), и

$$-C_0X = EAX,$$

если опора расположена на правом конце стержня (рис.68,г).

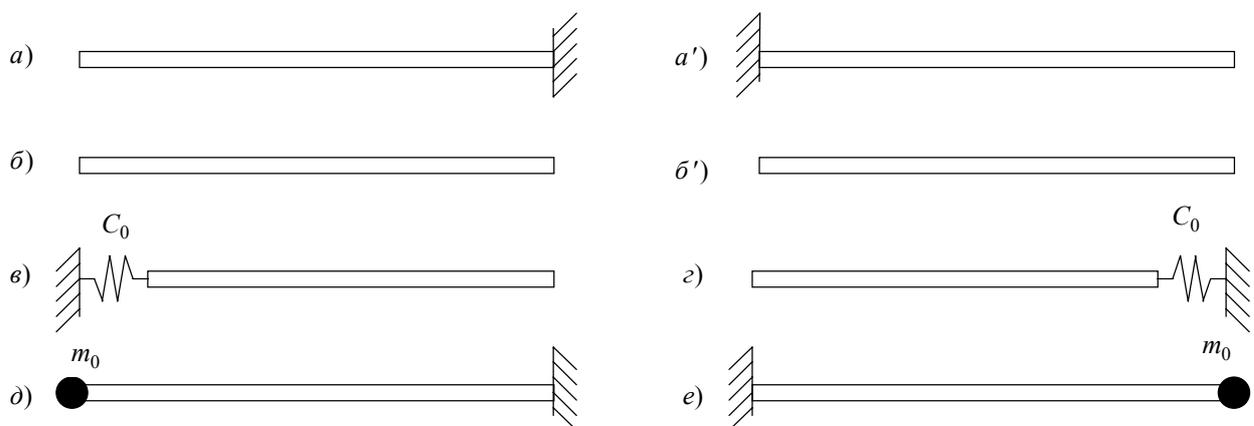


Рис. 68

Сосредоточенная масса m_0 на конце стержня.

Развиваемая массой сила инерции:

$$-m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -m_0 X \ddot{T}.$$

Так как, согласно первому из уравнений (179), $\ddot{T} = -\omega^2 T$, то сила инерции может быть записана в виде $m_0 \omega^2 X T$. Получаем граничное условие

$$-m_0 \omega^2 X = EAX',$$

если масса находится на левом конце (рис.68,д), и

$$m_0 \omega^2 X = EAX', \quad (184)$$

если масса связана с правым концом (рис.68,е).

Определим собственные частоты консольного стержня (рис.68,а').

Согласно (182) и (183), граничные условия

$$X=0 \text{ при } x=0;$$

$$X'=0 \text{ при } x=l.$$

Подставляя поочерёдно эти условия в решение (181), получим

$$D=0; C \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega l}{c} = 0.$$

Условие $C \neq 0$ приводит к частотному уравнению:

$$\cos \frac{\omega l}{c} = 0.$$

Корни этого уравнения

$$\frac{\omega l}{c} = (2n-1) \frac{\pi}{2} \quad (n=1,2,\dots)$$

определяют собственные частоты:

$$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi c}{2l} \quad (n=1,2,\dots). \quad (185)$$

Первая (низшая) частота при $n=1$:

$$\omega_1 = \frac{\pi c}{2l} = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Вторая частота (при $n=2$):

$$\omega_2 = \frac{3\pi}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \text{и т. д.}$$

Определим собственные частоты стержня с массой m_0 на конце (рис.68,е).

Согласно (182) и (184), имеем

$$X=0 \quad \text{при } x=0;$$

$$m_0\omega^2 X = EA X' \quad \text{при } x=l.$$

Подставляя эти условия в решение (181), получим:

$$D=0; \quad m_0\omega^2 \sin \frac{\omega l}{c} = \frac{EA\omega}{c} \cos \frac{\omega l}{c}.$$

Следовательно, частотное уравнение при учёте (176) имеет вид

$$\frac{\omega l}{c} \operatorname{tg} \frac{\omega l}{c} = \frac{\rho A l}{m_0}.$$

Здесь правая часть представляет собой отношение массы стержня к массе концевого груза.

Для решения полученного трансцендентного уравнения необходимо воспользоваться каким-либо приближённым способом.

При $\alpha = \frac{\rho A c}{m_0} = 0.1$ и $\alpha = 0.5$ значения наиболее важного низшего корня $\frac{\omega_1 l}{c}$ будут соответственно 0.32 и 0.65 .

При малом отношении α решающее влияние оказывает груз и хорошие результаты даёт приближённое решение

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{EA}{m_0 l (1 + \alpha/3)}} .$$

Для стержней переменного сечения, т.е. при $A \neq \text{const}$, из (173) и (174) получается уравнение движения в виде

$$c^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial u}{\partial x} \right) = A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} .$$

Это дифференциальное уравнение не поддаётся решению в замкнутом виде. Поэтому в подобных случаях приходится прибегать к приближённым методам определения собственных частот.

6.2. Крутильные колебания валов

Крутильные колебания вала с непрерывно распределенной массой (рис.69,а) описываются уравнениями, которые по структуре полностью совпадают с приведенными выше уравнениями продольных колебаний стержней.

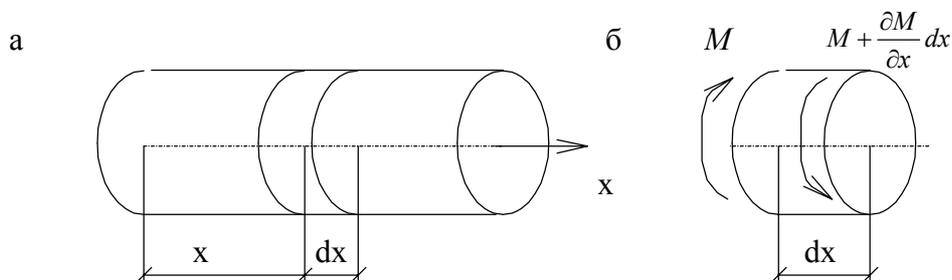


Рис. 69

Крутящий момент M в сечении с абсциссой x связан с углом поворота φ дифференциальной зависимостью, аналогичной (173):

$$M = GJ_p \frac{d\varphi}{dx}, \quad (186)$$

где J_p -полярный момент инерции поперечного сечения.

В сечении, расположенном на расстоянии dx , крутящий момент равен (рис.69,б):

$$M + \frac{\partial M}{\partial x} dx.$$

Обозначая через ρJ_p (где ρ - плотность материала вала) интенсивность момента инерции массы вала относительно его оси (т.е. момент инерции единицы длины), уравнение движения элементарного участка вала можно записать так:

$$-M + \left(M + \frac{\partial M}{\partial x} dx \right) = \rho J_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dx,$$

или подобно (174):

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \rho J_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Подставляя сюда выражение (186), при $J_p = \text{const}$ получим, аналогично (175):

$$C_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (187)$$

где

$$C_1^2 = \frac{G}{\rho}.$$

Общее решение уравнения (187), как и уравнения (175), имеет вид

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t),$$

где

$$X_n(x) = C_n \sin \frac{\omega_n x}{C_1} + D_n \cos \frac{\omega_n x}{C_1} \quad (188)$$

$$T_n(t) = A \sin(\omega_n t + \alpha_n)$$

Собственные частоты и собственные функции при этом определяются конкретными граничными условиями.

В основных случаях закрепления концов аналогично случаю продольных колебаний получим

а) закрепленный конец ($\varphi=0$): $X=0$;

б) свободный конец ($M=0$): $X'=0$;

в) упругозакрепленный левый конец: $C_0 X = G J_p X'$ (C_0 -коэффициент жёсткости);

г) упругозакрепленный правый конец: $-C_0 X = G J_p X'$;

д) диск на левом конце: $-J_0 \omega^2 X = G J_p X'$ (J_0 -момент инерции диска относительно оси стержня);

е) диск на правом конце: $J_0 \omega^2 X = G J_p X'$.

Если вал закреплён на левом конце ($x=0$), а правый конец ($x=\ell$) свободен, то $X=0$ при $x=0$ и $X'=0$ при $x=\ell$; собственные частоты определяются аналогично (185):

$$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi C_1}{2l} \quad (n=1,2,\dots).$$

Если левый конец закреплён, а на правом конце имеется диск,

получим трансцендентное уравнение:

$$\frac{\omega l}{C_1} \operatorname{tg} \frac{\omega l}{C_1} = \frac{\rho J_p l}{J_0}.$$

Если оба конца вала закреплены, то граничные условия будут $X=0$ при $x=0$ и $x=l$. В этом случае из (188) получим

$$C \sin \frac{\omega l}{C_1} = 0; \quad D=0,$$

т.е.

$$\frac{\omega l}{C_1} = \pi n \quad (n=1,2,\dots),$$

отсюда находим собственные частоты:

$$\omega_n = \frac{\pi n C_1}{l}.$$

Если левый конец вала свободен, а на правом конце имеется диск, то $X'=0$ при $x=0$; $J_0 \omega^2 X = G J_p X'$ при $x=l$.

При помощи (188) находим

$$C=0; \quad J_0 \omega^2 \cos \frac{\omega l}{C_1} = -G J_p \frac{\omega}{C_1} \sin \frac{\omega l}{C_1},$$

или трансцендентное частотное уравнение:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\omega l}{C_1}}{\frac{\omega l}{C_1}} = -\frac{J_0}{\rho J_p l}.$$

6.3. Изгибные колебания балок

6.3.1. Основное уравнение

Из курса сопротивления материалов известны дифференциальные зависимости при изгибе балок:

$$EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = M; \quad (189)$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = q, \quad (190)$$

где EJ - жёсткость при изгибе; $y=y(x, t)$ - прогиб; $M=M(x, t)$ - изгибающий момент; q - интенсивность распределённой нагрузки.

Объединяя (189) и (190), получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = q. \quad (191)$$

В задаче о свободных колебаниях нагрузкой для упругого скелета являются распределённые силы инерции:

$$q = -m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

где m - интенсивность массы балки (масса единицы длины), и уравнение (191) принимает вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

В частном случае постоянного поперечного сечения, когда $EJ = \text{const}$, $m = \text{const}$, имеем:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EJ}{m} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0. \quad (192)$$

Для решения уравнения (192) полагаем, как и выше,

$$y = X(x) \cdot T(t). \quad (193)$$

Подставляя (193) в (192), приходим к уравнению:

$$\frac{\ddot{T}}{T} = -\frac{EJ}{m} \cdot \frac{X^{IV}}{X}.$$

Для тождественного выполнения этого равенства необходимо, чтобы каждая из частей равенства была постоянной. Обозначая эту постоянную через $-\omega^2$, получим два уравнения:

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0; \quad (194)$$

$$X^{IV} - \frac{m\omega^2}{EJ} X = 0. \quad (195)$$

Первое уравнение указывает на то, что движение носит колебательный характер с частотой ω .

Второе уравнение определяет форму колебаний. Решение уравнения (195) содержит четыре постоянных и имеет вид

$$X = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 \operatorname{sh} kx + C_4 \operatorname{ch} kx,$$

где

$$k = \sqrt[4]{\frac{m\omega^2}{EJ}}. \quad (196)$$

Удобно использовать вариант записи общего решения, предложенный А.Н.Крыловым:

$$X = C_1 S + C_2 T + C_3 U + C_4 V, \quad (197)$$

где

$$\begin{cases} S = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}kx + \cos kx); \\ T = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}kx + \sin kx); \\ U = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}kx - \cos kx); \\ V = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}kx - \sin kx), \end{cases} \quad (198)$$

представляют собой функции А.Н.Крылова.

Обратим внимание на то, что $S=1$, $T=U=V=0$ при $x=0$. Функции S, T, U, V связаны между собой следующим образом:

$$\begin{cases} S = \frac{1}{k}T'; \\ T = \frac{1}{k}U'; \\ U = \frac{1}{k}V'; \\ V = \frac{1}{k}S'. \end{cases} \quad (199)$$

Поэтому производные выражения (197) записываются в виде

$$\begin{cases} X' = k(C_1V + C_2S + C_3T + C_4U); \\ X'' = k^2(C_1U + C_2V + C_3S + C_4T); \\ X''' = k^3(C_1T + C_2U + C_3V + C_4S). \end{cases} \quad (200)$$

В задачах рассматриваемого класса число собственных частот ω_n бесконечно велико; каждой из них отвечает своя функция времени T_n и своя фундаментальная функция X_n . Общее решение получится путём наложения частных решений вида (193)

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t). \quad (201)$$

Для определения собственных частот и формул необходимо рассмотреть граничные условия.

6.3.2. Граничные условия

Для каждого конца стержня можно указать два граничных условия.

Свободный конец стержня (рис. 70,а). Нулю равны поперечная сила $Q=EJX'''T$ и изгибающий момент $M=EJX''T$. Поэтому граничные условия имеют вид

$$X''=0; X'''=0 . \quad (202)$$

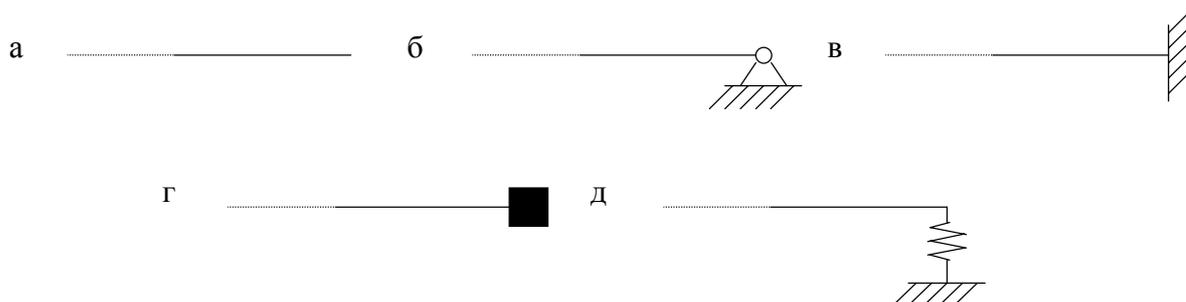


Рис. 70

Шарнирно-опёртый конец стержня (рис.70,б). Нулю равны прогиб $y=XT$ и изгибающий момент $M=EJX''T$. Следовательно, граничные условия таковы:

$$X=0 ; X''=0 . \quad (203)$$

Защемленный конец (рис.70,в). Нулю равны прогиб $y=XT$ и угол поворота $\varphi = X'T$. Граничные условия:

$$X=0; X'=0 . \quad (204)$$

На конце стержня имеется точечный груз массы m_0 (рис.70,г). Его сила инерции $-m_0\ddot{y} = -m_0X\ddot{T}$ может быть при помощи уравнения (194) записана так: $m_0\omega^2XT$; она должна быть равна поперечной силе $Q=EJX'''T$, поэтому граничные условия принимают вид

$$m_0\omega^2X = \pm EJX''' ; X''=0 . \quad (205)$$

В первом условии знак плюс принимается в случае, когда точечный груз связан с левым концом стержня, и знак минус, когда он связан с правым концом стержня. Второе условие вытекает из отсутствия изгибающего момента .

Упруго-опертый конец стержня (рис.70,д). Здесь изгибающий момент равен нулю, а поперечная сила $Q=EJX''''T$ равна реакции опоры $-C_0y = -C_0XT$ (C_0 -коэффициент жёсткости опоры).

Граничные условия:

$$X''=0 ; EJX'''' = \pm C_0 X \quad (206)$$

(знак минус принимается в случае, когда упругая опора является левой, и знак плюс, когда она является правой).

6.3.3. Частотное уравнение и собственные формы

Развёрнутая запись граничных условий приводит к однородным уравнениям относительно постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 .

Чтобы эти постоянные не равнялись нулю, должен равняться нулю определитель, составленный из коэффициентов системы; это приводит к частотному уравнению. При этих операциях выясняются соотношения между C_1, C_2, C_3, C_4 , т.е. определяются собственные формы колебаний (с точностью до постоянного множителя).

Проследим составление частотных уравнений на примерах.

Для балки с шарнирно-опёртыми концами согласно (203) имеем следующие граничные условия: $X=0; X''=0$ при $x=0$ и $x=l$. При помощи (197)-(200) получим из первых двух условий: $C_1=C_3=0$. Два оставшихся условия можно записать в виде

$$\begin{cases} C_2 T(kl) + C_4 U(kl) = 0; \\ C_2 U(kl) + C_4 T(kl) = 0. \end{cases}$$

Чтобы C_2 и C_4 не были равны нулю, необходимо равенство нулю определителя:

$$\begin{vmatrix} T(kl) & U(kl) \\ U(kl) & T(kl) \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, частотное уравнение имеет вид

$$T^2(kl) - U^2(kl) = 0.$$

Подставляя выражения T и U , получим

$$shkl \cdot \sin kl = 0.$$

Так как $shkl \neq 0$, то окончательно частотное уравнение записывается так:

$$\sin kl = 0. \quad (207)$$

Корни этого уравнения:

$$kl = \pi n, \quad (n=1,2,3,\dots).$$

Учитывая (196), получим

$$\omega_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}. \quad (208)$$

Перейдём к определению собственных форм. Из записанных выше однородных уравнений вытекает следующее соотношение между постоянными C_2 и C_4 :

$$C_4 = -\frac{U(kl)}{T(kl)} C_2.$$

Следовательно, (197) приобретает вид

$$X_n = C_2 \left[T(k_n x) - \frac{U(k_n l)}{T(k_n l)} U(k_n x) \right]$$

или

$$X_n = \frac{C_2}{2T(k_n l)} (\sin(k_n x) \operatorname{sh}(k_n x) + \sin(k_n l) \operatorname{sh}(k_n l))$$

Согласно (207), имеем

$$X_n = C_n \sin k_n x, \quad (209)$$

где $C_n = \frac{C_2 \operatorname{sh} k_n l}{2T(k_n l)}$ - новая постоянная, значение которой остаётся неопределённым, пока не введены в рассмотрение начальные условия.

6.3.4. Определение движения по начальным условиям

Если требуется определить движение, следующее после начального возмущения, то необходимо указать для всех точек балки как начальные смещения, так и начальные скорости:

$$\begin{cases} y(x, 0) = y_0(x); \\ V(x, 0) = \dot{y}(x, 0) = V_0(x), \end{cases} \quad (210)$$

и использовать свойство ортогональности собственных форм:

$$\int_0^l X_n(x) X_m(x) dx = 0 \quad (m \neq n).$$

Общее решение (201) запишем так:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) (A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t). \quad (211)$$

Скорость определяется выражением

$$\dot{y} = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n X_n(x) (A_n \cos \omega_n t - B_n \sin \omega_n t). \quad (212)$$

Подставляя в правые части уравнений (211) и (212) $t = 0$, а в левые части - предполагаемые известными начальные смещения и скорости,

получим

$$y_0 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n X_n(x); \quad V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n A_n X_n(x).$$

Умножая эти выражения на X_m и интегрируя по всей длине, имеем

$$\begin{cases} \int_0^1 y_0(x) X_m(x) dx = B_m \int_0^1 [X_m(x)]^2 dx; \\ \int_0^1 V_0(x) X_m(x) dx = A_m \omega_m \int_0^1 [X_m(x)]^2 dx. \end{cases} \quad (213)$$

Бесконечные суммы в правых частях исчезли вследствие свойства ортогональности. Из (213) следуют формулы для постоянных A_m и B_m

$$\begin{cases} A_m = \frac{\int_0^1 V_0(x) X_m(x) dx}{\omega_m \int_0^1 [X_m(x)]^2 dx}; \\ B_m = \frac{\int_0^1 y_0(x) X_m(x) dx}{\int_0^1 [X_m(x)]^2 dx}. \end{cases} \quad (214)$$

Теперь эти результаты нужно подставить в решение (211).

Снова подчеркнём, что выбор масштаба собственных форм несущественен. Если, например, в выражении собственной формы (209) принять вместо C_n величину в α раз большую, то (214) дадут результаты в α раз меньше; после подстановки в решение (211) эти различия компенсируют друг друга. Тем не менее часто пользуются нормированными собственными функциями, выбирая их масштаб таким, чтобы знаменатели выражений (214) равнялись единице, что упрощает выражения A_m и B_m .

6.3.5. Влияние постоянной продольной силы

Рассмотрим случай, когда колеблющаяся балка испытывает действие продольной силы N , величина которой не меняется в процессе колебаний. В этом случае уравнение статического изгиба усложняется и приобретает вид (при условии, что сжимающая сила считается положительной)

$$(EIy'')'' + Ny'' = q.$$

Полагая $q = -m\ddot{y}$ и считая жёсткость постоянной, получаем уравнение свободных колебаний

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{N}{m} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{EI}{m} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0. \quad (215)$$

Принимаем по-прежнему частное решение в виде $y = X(x)T(t)$.

Тогда уравнение (215) распадается на два уравнения:

$$\begin{aligned} \ddot{T} + \omega^2 T &= 0; \\ -\frac{N}{m} \cdot \frac{X''}{X} - \frac{EI}{m} \cdot \frac{X^{IV}}{X} &= -\omega^2. \end{aligned}$$

Первое уравнение выражает колебательный характер решения, второе определяет форму колебаний, а также позволяет найти частоты. Перепишем его таким образом:

$$X^{IV} + \alpha^2 X'' - K^4 X = 0, \quad (216)$$

где K определяется формулой (196), а

$$\alpha = \sqrt{\frac{N}{EI}}. \quad (217)$$

Решение уравнения (216) имеет вид

$$X = C_1 \text{Shs}_1 x + C_2 \text{Chs}_1 x + C_3 \text{Sins}_2 x + C_4 \text{Coss}_2 x,$$

где

$$s_1 = \sqrt{-\frac{\alpha^2}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^4}{4} + K^4}};$$

$$s_2 = \sqrt{\frac{\alpha^2}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^4}{4} + K^4}}.$$

Рассмотрим случай, когда оба конца стержня имеют шарнирные опоры. Условия на левом конце ($X = 0; X'' = 0$) дают $C_2 = C_4 = 0$. Удовлетворяя те же условия на правом конце, получим

$$\begin{cases} C_1 \text{Sh} s_1 \ell + C_3 \text{Sins}_2 \ell = 0; \\ C_1 s_1^2 \text{Sins}_1 \ell - C_3 s_2^2 \text{Sins}_2 \ell = 0. \end{cases}$$

Приравнивая нулю определитель, составленный из коэффициентов при величинах C_1 и C_3 , приходим к уравнению

$$(s_1^2 + s_2^2) \text{Sh} s_1 \ell \text{Sins}_2 \ell = 0,$$

или

$$\text{Sins}_2 \ell = 0. \quad (218)$$

Корни этого частотного уравнения:

$$s_2 \ell = \pi n \quad n = (1, 2, 3, \dots).$$

Следовательно, собственная частота определится из уравнения

$$\ell \sqrt{\frac{\alpha^2}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^4}{4} + \frac{m\omega^2}{EI}}} = \pi n.$$

Отсюда при учёте (217) находим

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \sqrt{1 - \frac{N \ell^2}{n^2 \pi^2 EI}}. \quad (219)$$

При растяжении ($N < 0$) частота увеличивается, при сжатии ($N > 0$) уменьшается. Когда сжимающая сила N приближается к критическому значению, корень стремится к нулю.

6.3.6. Влияние цепных усилий

Ранее продольная сила считалась заданной и не зависящей от перемещений системы. В некоторых практических задачах сопровождающая процесс поперечных колебаний продольная сила возникает вследствие изгиба балки и носит характер реакции опоры. Рассмотрим, например, балку на двух шарнирно-неподвижных опорах. При её изгибе возникают горизонтальные реакции опор, вызывающие растяжение балки; соответствующее горизонтальное усилие принято называть *цепным усилием*. Если балка совершает поперечные колебания, то цепное усилие будет изменяться во времени.

Если в мгновение t прогибы балки определяются функцией $y(x)$, то удлинение оси можно найти по формуле

$$\Delta \ell = \frac{\ell}{2} \int_0^{\ell} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Соответствующее цепное усилие найдём при помощи закона Гука

$$N = \frac{EA \Delta \ell}{\ell} = \frac{EA}{2\ell} \int_0^{\ell} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Подставим этот результат в (215) вместо продольной силы N (с учётом знака)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{EA}{2m\ell} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \int_0^{\ell} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{EI}{m} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0. \quad (220)$$

Полученное нелинейное интегродифференциальное уравнение

упрощается при помощи подстановки

$$y = A_n T_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad (221)$$

где $T_n = T_n(t)$ – безразмерная функция времени, максимальное значение которой можно положить равным любому числу, например, единице; A_n – амплитуда колебаний.

Подставляя (221) в (220), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\ddot{T}_n + C_n T + d_n T^3 = 0, \quad (222)$$

коэффициенты которого имеют следующие значения:

$$C_n = E A A_n^2 \frac{n^4 \pi^4}{4m\ell^4}; \quad d_n = EI \frac{n^4 \pi^4}{m\ell^4}.$$

Дифференциальное уравнение (222) является нелинейным, следовательно, частота свободных колебаний зависит от их амплитуды.

Точное решение для n – й частоты поперечных колебаний ω_n^* имеет вид

$$\omega_n^* = \omega_n \chi,$$

где ω_n – частота поперечных колебаний, вычисленная без учёта цепных усилий; χ – поправочный коэффициент, зависящий от отношения амплитуды колебаний A_n к радиусу инерции поперечного сечения ρ ; величина χ приводится в справочной литературе.

При соизмеримости амплитуды и радиуса инерции поперечного сечения поправка к частоте становится значительной. Если, например, амплитуда колебаний стержня круглого сечения равна его диаметру, то $A_1/2\rho = 2$, и частота почти в два раза больше, чем в случае свободного смещения опор.

Случай $A_1/2\rho \rightarrow \infty$ соответствует нулевому значению радиуса инерции, когда изгибная жёсткость балки исчезающе мала - струна. При этом формула для ω^* даёт неопределённость. Раскрывая эту неопределённость, получим формулу для частоты колебаний струны

$$\omega^* = \frac{4,181A_1}{\ell^2} \sqrt{\frac{EA}{m}}.$$

Эта формула относится к случаю, когда в положении равновесия натяжение равно нулю. Часто задачу о колебаниях струны ставят в других предположениях: считают, что перемещения малы, а растягивающая сила задана и остаётся неизменной в процессе колебаний.

При этом формула для частоты имеет вид

$$\omega^* = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{N}{m}},$$

где N - постоянная растягивающая сила.

6.4. Влияние вязкого трения

Ранее предполагалось, что материал стержней идеально упругий и трение отсутствует. Рассмотрим влияние внутреннего трения, считая, что оно является вязким; тогда связь напряжений с деформациями описывается соотношениями

$$\sigma = E\varepsilon + K \frac{d\varepsilon}{dt}; \quad \tau = G\gamma + K_* \frac{d\gamma}{dt}. \quad (223)$$

Пусть стержень с распределёнными параметрами совершает свободные продольные колебания. В этом случае продольная сила запишется в виде

$$N = \sigma A = EA\varepsilon + KA \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = EA \frac{\partial U}{\partial t} + KA \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t}. \quad (224)$$

Из уравнения движения элемента стержня было получено соотношение (174)

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}.$$

Подставляя сюда (224), приходим к основному дифференциальному уравнению

$$C^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{K}{\rho} \cdot \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad (225)$$

которое отличается от (175) вторым слагаемым, выражающим влияние сил вязкого трения.

Следуя методу Фурье, ищем решение уравнения (225) в виде

$$U = \sum_{r=1}^{\infty} X_r(x) T_r(t), \quad (226)$$

где X_r – функция только координаты x , а T_r – функция только времени t .

При этом каждый член ряда должен удовлетворять граничным условиям задачи, а вся сумма – также и начальным условиям. Подставляя (226) в (225) и требуя, чтобы равенство удовлетворялось для любого номера r , получим

$$C^2 X_r'' T_r + \frac{K}{\rho} X_r'' \dot{T}_r = X_r \ddot{T}_r, \quad (227)$$

где штрихи обозначают дифференцирование по координате x , а точки – дифференцирование по времени t .

Разделив (227) на произведение $X_r \left(T_r + \frac{K}{E} \dot{T}_r \right)$, приходим к равенству

$$C^2 \frac{X_r''}{X} = \frac{\ddot{T}_r}{T_r + \frac{K}{E} \dot{T}_r}, \quad (228)$$

левая часть, которого может зависеть только от координаты x , а правая - только от времени t . Для тождественного выполнения равенства (228) необходимо, чтобы обе части были равны одной и той же постоянной, которую обозначим через $-\omega_r^2$.

Из этого следуют уравнения

$$X_r'' + \frac{\omega_r^2}{C^2} X_r = 0; \quad (229)$$

$$\ddot{T}_r + \frac{K}{E} \omega_r^2 \dot{T}_r + \omega_r^2 T_r = 0. \quad (230)$$

Уравнение (229) не зависит от коэффициента вязкости K и, в частности, остаётся таким же в случае идеально упругой системы, когда $K = 0$. Поэтому числа ω_r полностью совпадают с найденными ранее; однако, как будет показано ниже, величина ω_r даёт лишь приближённое значение собственной частоты. Отметим, что собственные формы совершенно не зависят от вязких свойств стержня, т.е. формы свободных затухающих колебаний совпадают с формами свободных незатухающих колебаний.

Теперь перейдём к уравнению (230), описывающему процесс затухающих колебаний; его решение имеет вид

$$T_r = e^{-n_r t} (A_r \sin \omega_r^* t + B_r \cos \omega_r^* t), \quad (231)$$

где

$$n_r = \frac{K \omega_r^2}{2E}; \quad (232)$$

$$\omega_r^* = \sqrt{\omega_r^2 - n_r^2} = \omega_r \sqrt{1 - \left(\frac{K \omega_r^2}{2E} \right)^2}. \quad (233)$$

Выражение (232) определяет темп затухания, а (233) - частоту колебаний.

Таким образом, полное решение уравнения задачи

$$U = \sum_{r=1}^{\infty} X_r e^{-n_r t} (A_r \text{Sin} \omega_r^* t + B_r \text{Cos} \omega_r^* t). \quad (234)$$

Постоянные A_r и B_r всегда можно найти по заданным начальным условиям. Пусть начальные смещения и начальные скорости всех сечений стержня заданы следующим образом:

$$U(x;0) = f_1(x); \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x;0) = f_2(x), \quad (235)$$

где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ - известные функции.

Тогда при $t = 0$, согласно (211) и (212), имеем

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sum_{r=1}^{\infty} B_r X_r(x); \\ f_2(x) &= \sum_{r=1}^{\infty} (A_r \omega_r^* - B_r n_r) X_r(x); \end{aligned}$$

умножая обе части этих равенств на $X_r(x)$ и интегрируя в пределах всей длины стержня, получим

$$\begin{cases} \int_0^{\ell} f_1(x) X_r(x) dx = B_r \int_0^{\ell} [X_r(x)]^2 dx; \\ \int_0^{\ell} f_2(x) X_r(x) dx = (A_r \omega_r^* - B_r n_r) \int_0^{\ell} [X_r(x)]^2 dx. \end{cases} \quad (236)$$

Соответственно условию ортогональности собственных форм все остальные слагаемые, входящие в правые части этих равенств, обращаются в нуль. Теперь из равенств (236) легко найти A_r и B_r для любого номера r .

Рассматривая (232) и (234), заметим, что чем выше номер формы колебаний X_r , тем быстрее её затухание. Кроме того, слагаемые, входящие в (234), описывают затухающие колебания, если ω_r^* есть действительное

число. Из (233) видно, что это имеет место лишь для нескольких начальных значений r , пока выполняется неравенство

$$\frac{K\omega_r^2}{2E} < 1. \quad (237)$$

При достаточно больших значениях r неравенство (237) нарушается и величина ω^* становится мнимой. При этом соответствующие члены общего решения (234) уже не будут описывать затухающие колебания, но будут представлять аperiодическое затухающее движение. Другими словами, колебания, в обычном смысле слова, выражает только некоторая конечная часть суммы (234).

Все эти качественные выводы относятся не только к случаю продольных колебаний, но и к случаям крутильных и изгибных колебаний.

6.5. Колебания стержней переменного сечения

В тех случаях, когда распределённая масса и сечение стержня переменны по его длине, следует вместо уравнения продольных колебаний (175) исходить из уравнения

$$C^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial U}{\partial x} \right) = A \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \quad (238)$$

Уравнение крутильных колебаний (187) должно быть заменено уравнением

$$C_1^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(I \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (239)$$

а уравнение поперечных колебаний (192) - уравнением

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = -m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (240)$$

Уравнения (238)-(240) при помощи одностипных подстановок $U = X(x)\Gamma(t)$; $\varphi = X(x)\Gamma(t)$; $y = X(x)\Gamma(t)$ можно привести к обыкновенным дифференциальным уравнениям для функции $X(x)$

$$(AX')' + \frac{\omega^2}{C^2} AX = 0; \quad (241)$$

$$(IX')' + \frac{\omega^2}{C_1^2} IX = 0; \quad (242)$$

$$(EI_x X'')'' - m\omega^2 X = 0 \quad (243)$$

и одному одностипному уравнению для функции $T(t)$.

Уравнения (241)-(243) в отличие от уравнений, решённых выше, имеют переменные коэффициенты.

Замкнутую форму решений можно получить лишь в отдельных случаях, когда переменные A, I, EI_x, m определены специальными зависимостями. В общем случае неизбежен переход к приближённым методам. В частности, возможен путь, основанный на сосредоточении распределённой массы в ряде точек по длине стержня, после чего система сохраняет лишь конечное число степеней свободы, равное числу точек приведения. Используются также различные варианты вариационного метода и некоторые другие приближённые методы, о которых речь пойдёт ниже.

6.6. Колебания круговых колец

6.6.1. Колебания в плоскости кольца

Рассмотрим круговой брус малой кривизны постоянного сечения с радиусом R осевой линии (рис.71,а). Будем считать груз нерастяжимым. Перемещение центра тяжести поперечного сечения, зафиксированного

угловой координатой φ , можно разложить на радиальный и окружной компоненты - соответственно x_1 и x_2 . Из условия нерастяжимости оси бруса следует, что перемещения x_1 и x_2 связаны зависимостью:

$$\frac{\partial x_2}{R \partial \varphi} + \frac{x_1}{R} = 0. \quad (244)$$

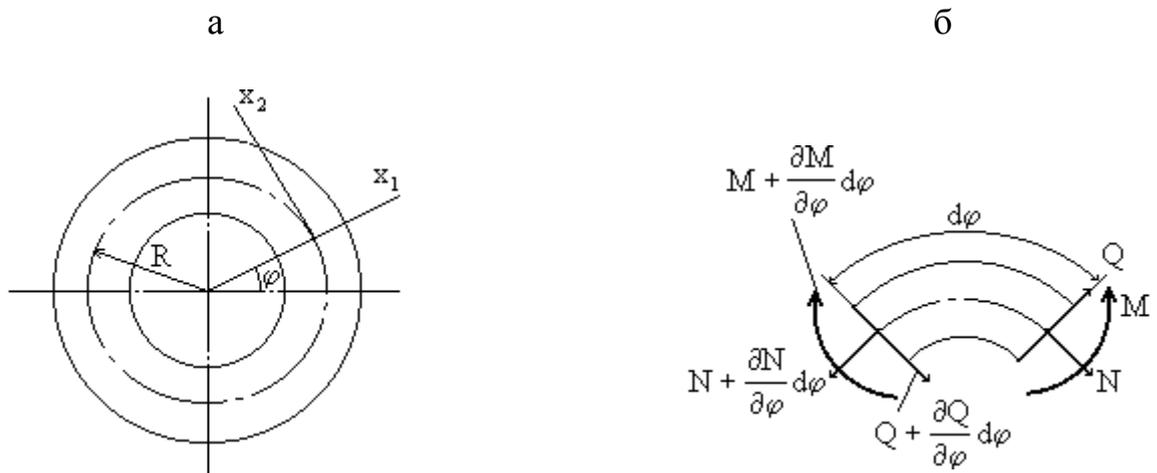


Рис. 71

Угол поворота поперечного сечения бруса в процессе движения определяется формулой

$$\theta = \frac{x_2}{R} - \frac{\partial x_1}{R \partial \varphi}. \quad (245)$$

Изменение кривизны бруса χ равно производной от θ по дуге:

$$\chi = \frac{\partial \theta}{R \partial \varphi} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial x_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial \varphi^2} \right). \quad (246)$$

Изгибающий момент в поперечном сечении кольца:

$$M = -EI\chi = -\frac{EI}{R^2} \left(\frac{\partial x_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial \varphi^2} \right). \quad (247)$$

Теперь составим уравнение движения элемента $Rd\varphi$ бруса (рис.71,б).

Помимо перечисленных сил, на элемент действует также сила инерции:

$$-m_0 R d\varphi \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2},$$

где m_0 – масса единицы длины бруса.

Проектируя приложенные к элементу силы на радиус, получим

$$m_0 R \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \frac{\partial Q}{\partial \varphi} + N = 0. \quad (248)$$

Равенство нулю суммы проекций всех сил на направление касательной приводит к уравнению:

$$m_0 R \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + Q - \frac{\partial N}{\partial \varphi} = 0. \quad (249)$$

Уравнение моментов имеет вид

$$\frac{\partial M}{\partial \varphi} = QR. \quad (250)$$

Исключим из (248) и (249) нормальную силу N , а поперечную силу Q заменим её значением из (250):

$$m_0 R^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \varphi} + x_2 \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial^2 M}{\partial \varphi^2} + M \right) = 0. \quad (251)$$

Подставляя сюда значение M из (247), получим уравнение движения в перемещениях x_1, x_2 , и, наконец, исключая один из компонентов перемещения, с помощью условия нерастяжимости (244) придём к уравнению, в которое входит единственная переменная x_2 :

$$\frac{\partial^6 x_2}{\partial \varphi^6} + 2 \frac{\partial^4 x_2}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 x_2}{\partial \varphi^2} + \frac{m_0 R^4}{EI} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 x_2}{\partial \varphi^2} - x_2 \right) = 0. \quad (252)$$

Решение уравнения движения (252) будем искать в виде

$$x_1 = U_1(\varphi)\text{Cos}\omega t; \quad x_2 = U_2(\varphi)\text{Sin}\omega t.$$

При этом для U_2 получается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^6 U_2}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 U_2}{d\varphi^4} + \frac{d^2 U_2}{d\varphi^2} - \frac{m_0 R^4 \omega^2}{EI} \left(\frac{d^2 U_2}{d\varphi^2} - U_2 \right) = 0, \quad (253)$$

$$U_1 = -\frac{dU_2}{d\varphi}.$$

Согласно общим правилам решения дифференциальных уравнений, следует найти общее решение уравнения (253), включающее шесть постоянных, и подчинить его граничным условиям. На каждом конце бруса должны быть равны нулю либо компоненты перемещений x_1, x_2, θ , либо соответствующие им внутренние силы. Равенство нулю определителя системы, выражающей граничные условия, приводит к частотному уравнению.

Для замкнутого кольца граничные условия заменяются условиями периодичности, которые выполняются, если принять

$$U_1 = K \text{Sin} K\varphi; \quad U_2 = \text{Cos} K\varphi. \quad (254)$$

Подставляя (254) в (253), устанавливаем, что последнее удовлетворяется тождественно, если

$$\omega = \omega_k = \frac{K(K^2 - 1)}{\sqrt{K^2 + 1}} \sqrt{\frac{EI}{m_0 R^4}}. \quad (255)$$

Формула (255) определяет частоты собственных колебаний кольца в своей плоскости. Значению $K = 1$ соответствует нулевая частота, так как при $K = 1$ формулы (254) описывают смещение кольца как жёсткого тела.

6.6.2. Колебания, перпендикулярные плоскости кольца

В этом случае положение поперечного сечения кольца в процессе движения характеризуется смещением x_3 его центра тяжести из плоскости кольца и углом поворота сечения x_4 (рис.72,а). В поперечном сечении кольца возникают изгибающие и крутящие моменты (рис.72,б), а также поперечная сила, перпендикулярная плоскости кольца.

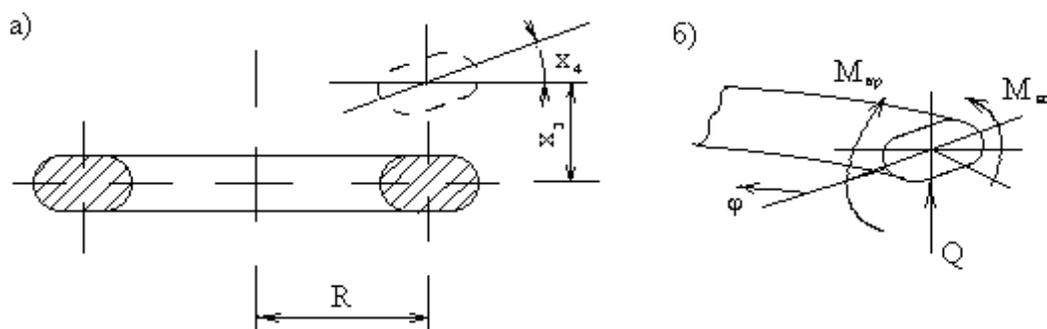


Рис. 72

Установим зависимость моментов от перемещений. Так как задача линейная, то рассмотрим сначала силовые факторы, связанные со смещением x_3 , а затем - с x_4 .

Если x_3 постоянно по длине окружности, то кольцо смещается как жёсткое целое, и внутренние силы не возникнут. Если x_3 изменяется в зависимости от центрального угла по линейному закону ($\partial x_3 / \partial \varphi = \text{const}$), то ось бруса превращается в винтовую линию, т.е. брус деформируется подобно витку пружины при растяжении. Известно, что в этом случае в поперечных сечениях возникает крутящий момент

$$M'_{вр} = -\frac{GJ_{вр}}{R^2} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial \varphi},$$

где $GJ_{кр}$ - крутильная жёсткость бруса.

Если при этом отлична от нуля и вторая производная ($\partial^2 x_3 / \partial \varphi^2$), то

меняется кривизна бруса и возникает изгибающий момент

$$M'_{\text{изг}} = -\frac{EJ_1}{R^2} \cdot \frac{\partial^2 x_3}{\partial \varphi^2},$$

где J_1 - момент инерции сечения относительно центральной оси, лежащей в плоскости кривизны.

Найдём силовые факторы, связанные с поворотом x_4 . Если x_4 постоянно, то происходит осесимметричный изгиб кольца, причём в его сечениях возникает изгибающий момент

$$M''_{\text{изг}} = -\frac{EJ_1}{R} \cdot x_4.$$

При переменном по длине повороте x_4 соседние сечения поворачиваются друг относительно друга и возникает крутящий момент

$$M''_{\text{кр}} = \frac{GJ_{\text{кр}}}{R} \cdot \frac{\partial x_4}{\partial \varphi}.$$

Суммируя силовые факторы, связанные с перемещениями x_3 и x_4 , получаем

$$\begin{cases} M_{\text{изг}} = EJ_1 \left(\frac{\partial^2 x_3}{R^2 \partial \varphi^2} + \frac{x_4}{R} \right); \\ M_{\text{кр}} = GJ_{\text{кр}} \left(-\frac{\partial x_3}{R^2 \partial \varphi} + \frac{x_4}{R d\varphi} \right). \end{cases} \quad (256)$$

Составим уравнение движения элемента $Rd\varphi$ бруса (рис.73).

Будем пренебрегать инерцией поворота элемента вокруг своей оси.

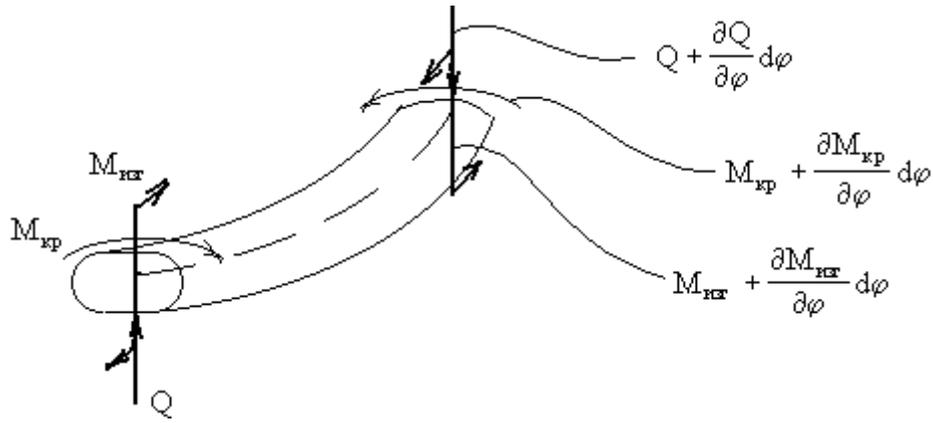


Рис. 73

Условие динамического равновесия в направлении нормали к плоскости кольца приводит к уравнению:

$$m_0 R \frac{\partial^2 x_3}{\partial t^2} + \frac{\partial Q}{\partial \varphi} = 0. \quad (257)$$

Сумма моментов относительно нормали к оси элемента:

$$\frac{\partial M_{\text{изг}}}{\partial \varphi} + M_{\text{кр}} - QR = 0. \quad (258)$$

Сумма моментов относительно касательной к оси элемента:

$$\frac{\partial M_{\text{изг}}}{\partial \varphi} - M_{\text{кр}} = 0. \quad (259)$$

Исключая поперечную силу из (257) и (258) и заменяя моменты в полученном уравнении и уравнении (259) их значениями (256), приходим к системе уравнений, в которую входят только перемещения x_3 и x_4 :

$$\begin{cases} \frac{m_0 R^3}{EJ} \cdot \frac{\partial^2 x_3}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 x_4}{R \partial \varphi^4} - \frac{GJ_{\text{кр}}}{EJ_1} \cdot \frac{\partial^2 x_3}{R \partial \varphi^2} + \left(1 + \frac{GJ_{\text{кр}}}{EJ_1}\right) \cdot \frac{\partial^2 x_4}{\partial \varphi^2} = 0, \\ \left(1 + \frac{GJ_{\text{кр}}}{EJ_1}\right) \cdot \frac{\partial^2 x_3}{R \partial \varphi^2} - \left(\frac{GJ_{\text{кр}}}{EJ_1} \cdot \frac{\partial^2 x_4}{\partial \varphi^2} - x_4\right) = 0. \end{cases} \quad (260)$$

Ограничиваясь исследованием собственных колебаний замкнутого

кольца, решение уравнений (260) можно представить в виде

$$x_3 = A \cos k\varphi \cdot \cos \omega t, \quad x_4 = B \cos k\varphi \cdot \cos \omega t. \quad (261)$$

Подставляя значения (261) в уравнение движения (260), получим

$$\begin{cases} \frac{1}{R} \left(k^4 + k^2 \frac{GJ_{кр}}{EJ_1} - \frac{m_0 R^4}{EJ_1} \omega^2 \right) A - k^2 \left(1 + \frac{GJ_{кр}}{EJ_1} \right) B = 0; \\ -\frac{k^2 R}{R} \left(1 + \frac{GJ_{кр}}{EJ_1} \right) A + \left(1 + k^2 \frac{GJ_{кр}}{EJ_1} \right) B = 0. \end{cases} \quad (262)$$

Из равенства нулю определителя этой системы получим частотное уравнение, корни которого - собственные частоты - таковы:

$$\omega_k = \frac{k(k^2 - 1)}{\sqrt{k^2 \frac{GJ_{кр}}{EJ_1} + 1}} \sqrt{\frac{GJ_{кр}}{m_0 R^4}}. \quad (263)$$

Наименьшая отличная от нуля частота соответствует $k=2$.

Глава 7

Приближённые методы расчета колебаний

Рассмотренные выше методы расчета становятся тем более громоздкими, чем сложнее структура рассчитываемой системы. Поэтому возникает необходимость в способах, позволяющих достаточно просто рассчитывать и сложные системы.

Один из возможных путей состоит в применении простых приближенных формул (например, формулы Рэлея). В этом случае задают форму колебаний системы, сводя её таким образом к системе с одной степенью свободы. При удачной аппроксимации получают достаточно точное значение низшей собственной частоты системы, однако другие её динамические характеристики остаются нераскрытыми.

Схематизация реальной системы, как имеющей несколько степеней свободы, достигается в методе Рэлея-Ритца, при использовании которого форма колебаний системы задаётся в виде выражения, включающего несколько параметров.

Другим приёмом, позволяющим свести реальную систему к системе с конечным числом степеней свободы, является метод прямой дискретизации. Чем больше число элементов, на которые разбита система при использовании этого метода, тем ближе расчётная схема к исходной системе. Вместе с тем, если элементы выбраны однотипными, то даже при большом их числе оказывается возможным реализовать расчёт колебаний, используя матричные методы с применением ЭВМ. Примерами таких методов являются метод начальных параметров в форме матриц перехода и метод прогонки.

При динамических расчётах конструкций сложной конфигурации также широко используется метод конечных элементов.

В том случае, когда сложную колебательную систему можно разделить на несколько подсистем, динамические характеристики которых определяются сравнительно просто, полезными являются методы динамических податливостей и жёсткостей. Эти методы представляют собой обобщение на динамические задачи метода сил и метода перемещений строительной механики.

В методе последовательных приближений задача об определении собственных частот и форм колебаний сводится к многократному расчёту деформаций системы под действием известной статической нагрузки.

Рассмотрим некоторые из используемых приближённых методов.

7.1. Теорема и метод Рэлея

Согласно этой теореме, истинное значение низшей собственной частоты всегда меньше, чем приближенное значение частоты, вычисленное энергетическим способом. Докажем эту теорему для изгибных колебаний, совершенно аналогично она доказывается и для других видов колебаний.

Положим, что при решении энергетическим способом задачи о свободных изгибных колебаниях была принята форма колебаний $f = f(x)$. Тогда соответствующая статическая нагрузка, способная вызвать изгиб по кривой $f(x)$, может быть представлена в виде

$$q = (EJf'').$$

Следовательно, приближенное выражение для квадрата частоты

$$\omega^2 = \frac{\int_0^{\ell} (EJf'')^2 dx}{\int_0^{\ell} mf^2 dx}. \quad (264)$$

Ввиду известного произвола в выборе функции $f(x)$ она не совпадает ни с одной из собственных форм, которые являются точными решениями; однако функцию $f(x)$ можно представить в виде ряда по этим формам. Если

ищут низшую собственную частоту, то функцию $f(x)$ можно представить так:

$$f(x) = X_1(x) + b_2 X_2(x) + b_3 X_3(x) + \dots \quad (265)$$

При удачном выборе функция $f(x)$ близка к $X_1(x)$, поэтому коэффициенты $b_2, b_3 \dots$ - малые числа.

Два раза продифференцируем выражение (265) по x , затем умножим обе части на жёсткость EJ и вновь дважды продифференцируем результат.

Тогда получим

$$(EJf'')'' = (EJX_1'')'' + b_2 (EJX_2'')'' + b_3 (EJX_3'')'' + \dots \quad (266)$$

Согласно основному уравнению (243), можно записать:

$$(EJX_1'')'' = m\omega_1^2 X_1; \quad (EJX_2'')'' = m\omega_2^2 X_2; \dots$$

Подставляя эти значения в выражение (266), получим

$$(EJf'')'' = m(\omega_1^2 X_1 + b_2 \omega_2^2 X_2 + b_3 \omega_3^2 X_3 + \dots) \quad (267)$$

При помощи (265) и (267) образуем числитель формулы (264):

$$\int_0^{\ell} (EJf'')'' f dx = \int_0^{\ell} m(X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + \dots)(\omega_1^2 X_1 + b_2 \omega_2^2 X_2 + b_3 \omega_3^2 X_3 + \dots) dx.$$

Вследствие ортогональности собственных форм все интегралы от произведений, где индексы сомножителей различны, равны нулю, поэтому

$$\int_0^{\ell} (EJf'')'' f dx = \omega_1^2 \int_0^{\ell} m X_1^2 dx + b_2^2 \omega_2^2 \int_0^{\ell} m X_2^2 dx + \dots \quad (268)$$

Знаменатель формулы (264) получим при помощи (265) в виде

$$\int_0^{\ell} m f^2 dx = \int_0^{\ell} m (X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + \dots)^2 dx = \int_0^{\ell} m X_1^2 dx + b_2^2 \int_0^{\ell} m X_2^2 dx + b_3^2 \int_0^{\ell} m X_3^2 dx + \dots \quad (269)$$

Здесь также исчезают все члены, содержащие произведения $X_m X_n$. Подставляя (268) и (269) в (264), получим квадрат низшей частоты

$$\omega^2 = \frac{\omega_1^2 \int_0^\ell mX_1^2 dx + b_2^2 \omega_2^2 \int_0^\ell mX_2^2 dx + \dots}{\int_0^\ell mX_1^2 dx + b_2^2 \int_0^\ell mX_2^2 dx + \dots} = \omega_1^2 \frac{\int_0^\ell mX_1^2 dx + b_2^2 \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} \int_0^\ell mX_2^2 dx + \dots}{\int_0^\ell mX_1^2 dx + b_2^2 \int_0^\ell mX_2^2 dx + \dots}. \quad (270)$$

Так как $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots$, то все дроби $\frac{\omega_i^2}{\omega_1^2}$ больше единицы и, следовательно, все члены числителя, начиная со второго, больше соответствующих членов знаменателя. Поэтому вся дробь, входящая в (270), больше единицы, т.е.

$$\omega^2 > \omega_1^2, \quad (271)$$

что и утверждается теоремой Рэлея.

Неравенство (271) справедливо не только для изгибных, но и для продольных и крутильных колебаний.

7.2. Метод Рунца

Зададимся несколькими функциями $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, каждая из которых удовлетворяет геометрическим граничным условиям задачи, и образуем функцию $f(x)$ как сумму

$$f(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \dots + C_n f_n(x). \quad (272)$$

Если эту функцию подставить в формулу Рэлея

$$\omega^2 = \frac{\int_0^\ell EJ(f'')^2 dx}{\int_0^\ell mf^2 dx}, \quad (273)$$

то результат будет зависеть от конкретного выбора коэффициентов C_1 , C_2 , ..., C_n .

Метод Ритца основан на простой идее: коэффициенты C_1, C_2, \dots, C_n должны быть выбраны так, чтобы вычисление по (273) дало наименьшее значение для ω^2 . Из теоремы Рэля вытекает, что такой выбор будет наилучшим (при данной системе функций f_i).

Условия минимума ω^2 имеют вид

$$\frac{\partial \int_0^\ell EJ(f'')^2 dx}{\partial C_i \int_0^\ell mf^2 dx} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

т.е.

$$\left[\frac{\partial}{\partial C_i} \int_0^\ell EJ(f'')^2 dx \right] \left[\int_0^\ell mf^2 dx \right] - \left[\frac{\partial}{\partial C_i} \int_0^\ell mf^2 dx \right] \left[\int_0^\ell EJ(f'')^2 dx \right] = 0.$$

Разделив это уравнение на интеграл $\int_0^\ell mf^2 dx$ и учитывая (273),

получим

$$\frac{\partial}{\partial C_i} \int_0^\ell [EJ(f'')^2 - \omega^2 mf^2] dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (274)$$

Уравнения (274) однородны и линейны относительно C_1, C_2, \dots, C_n и их число равно числу членов выражения (272). Приравнявая нулю определитель, составленный из коэффициентов при C_1, C_2, \dots, C_n , получим частотное уравнение. Это уравнение не только дает хорошее приближение для низшей частоты, но также определяет (хотя и с меньшей точностью) значения высших частот; при этом можно будет вычислить столько частот, сколько слагаемых принято в выражении (272).

Метод Ритца, как и метод Рэля, позволяет решить задачу в случаях разрывных функций EJ и m и когда эти функции представлены различными аналитическими выражениями на различных участках.

Иногда та же идея используется в иной форме. Например, при исследовании поперечных колебаний турбинных лопаток задаются функцией $f(x) = ax^s$ (начало координат в закрепленном конце). Применяя затем формулу Рэля (273), получают частоту в виде зависимости от показателя степени s . Затем при помощи числовых расчетов определяют значение s , которому отвечает наименьшая частота. Это позволяет достаточно надежно определить как форму, так и частоту колебаний первого тона.

Пример 20. Определить методом Ритца низшую собственную частоту поперечных колебаний консоли переменного сечения, имеющей толщину, равную единице; высота изменяется по линейному закону:

$$h_x = \frac{x}{\ell} h; J = \frac{h^3}{12\ell^3} x^3; m = \frac{\rho h}{\ell} x$$

(ℓ - длина консоли).

Решение

Точное значение низшей частоты такой консоли вычислено Кирхгофом в виде

$$\omega = \frac{2,657h}{\ell^2} \sqrt{\frac{E}{3\rho}}$$

Для приближенного решения принимаем

$$f(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \dots = C_1 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^2 + C_2 \frac{x}{\ell} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^2 + \dots$$

Каждый член этого разложения удовлетворяет граничным условиям задачи

$$f_i(x) = 0, f_i'(x) = 0 \text{ при } x = \ell.$$

Если ограничиться одним членом разложения, то по методу Рэля

$$\omega = \frac{2,740h}{\ell^2} \sqrt{\frac{E}{3\rho}}$$

при этом ошибка составляет около 3 %.

Чтобы получить лучшее приближение, возьмем два члена разложения, подставив их в (274),

$$\frac{h}{12\ell^3} \left[(C_1 - 2C_2)^2 + \frac{24}{5} C_2 (C_1 - 2C_2) + 6C_2^2 \right] - \omega^2 \frac{\rho h \ell}{E} \left(\frac{C_1^2}{30} + \frac{2C_1 C_2}{105} + \frac{C_2^2}{280} \right).$$

Дифференцируя это выражение по C_1 и C_2 поочередно, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{Eh^2}{12\rho\ell^4} - \frac{\omega^2}{30} \right) C_1 + \left(\frac{Eh^2}{30\rho\ell^4} - \frac{\omega^2}{105} \right) C_2 = 0 \\ \left(\frac{Eh^2}{30\rho\ell^4} - \frac{\omega^2}{105} \right) C_1 + \left(\frac{Eh^2}{30\rho\ell^4} - \frac{\omega^2}{280} \right) C_2 = 0 \end{cases}.$$

Приравнявая нулю определитель, составленный из коэффициентов этих уравнений, получим частотное уравнение, меньший корень которого

$$\omega = \frac{2,660h}{\ell^2} \sqrt{\frac{E}{3\rho}},$$

что даёт ошибку 0,1 %.

7.3. Метод Граммеля

Принимая форму колебаний подобной статическим прогибам системы от некоторой подходящей нагрузки, можно существенно увеличить точность расчёта за счёт исключения операции дифференцирования. Еще большая точность достигается в методе Граммеля, в котором дифференцирование заменяется интегрированием. Последовательность операций здесь такова:

1. Задают форму колебаний и вычисляют максимальную кинетическую энергию движения:

$$J_{\max} = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i x_i^2.$$

2. Определяют максимальные силы инерции:

$$F_i = \omega^2 m_i x_i .$$

3. Определяют внутренние силы в элементах системы, вызываемые нагрузками F_i .

4. По внутренним силам вычисляют максимальную потенциальную энергию деформации Π_0 .

5. Из равенства $K_{\max} = \Pi_0$ определяют частоту колебаний.

Применим метод Граммеля для вычисления частоты колебаний консольной балки. Принимая $x = (z/\ell)^2$, находим

$$K_{\max} = \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^\ell m_0 x^2 dz = \frac{\omega^2 m_0 \ell}{10} .$$

Интенсивность сил инерции:

$$q = \omega^2 m_0 \left(\frac{z}{\ell} \right)^2 .$$

Поперечная сила в сечении:

$$Q = - \int_z^{\ell} q dz = - \frac{\omega^2 m_0}{3 \ell^2} (\ell^3 - x^3) .$$

Изгибающий момент:

$$M = - \int_z^{\ell} Q dz = \frac{\omega^2 m_0}{12 \ell^2} (3 \ell^4 - 4 \ell^3 z + z^4) .$$

Потенциальная энергия деформации:

$$\Pi_0 = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{M^2}{EJ} dz = \frac{13}{1620} \cdot \frac{\omega^4 m_0^2 \ell^5}{EJ} .$$

Приравнявая $K_{\max} = \Pi_0$, находим

$$\omega = \sqrt{\frac{1620 EJ}{130 m_0 \ell^4}} = 3,5301 \sqrt{\frac{EJ}{m_0 \ell^4}} ,$$

что отличается от точного решения на 0,42 %.

7.4. Формула Донкерлея

Так как метод Рэля приводит к завышенному значению частоты колебаний, то весьма полезным является применение метода (формулы), дающего заниженное значение низшей частоты колебаний. Простейшей из такого рода формул является формула Донкерлея.

Рассмотрим какую-либо многомассовую систему, например балку (рис.74,а). Пусть на этом рисунке изображена точная форма собственных колебаний системы.

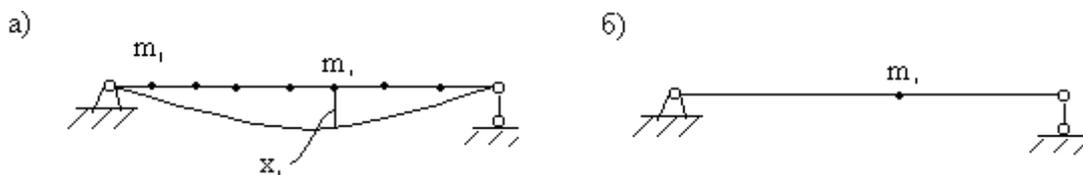


Рис. 74

Тогда точное значение собственной частоты системы выражается формулой

$$\omega^2 = \frac{2\pi_0}{\sum_{i=1}^n m_i x_i^2}. \quad (275)$$

Теперь рассмотрим ту же балку, но только с одной массой m_i (рис.74, б). В этом случае частота колебаний будет определяться по формуле

$$\omega_i^2 = \frac{1}{m_i \delta_{ii}},$$

где δ_{ii} - податливость балки при приложении силы в точке расположения массы m_i .

С другой стороны, приближённое значение ω_i той же частоты можно определить по формуле Рэлея, считая, что форма колебаний совпадает с изображённой на рис.74,а

$$\tilde{\omega}_i^2 = \frac{2\Pi_0}{m_i x_i^2}. \quad (276)$$

Здесь Π_0 и x_i имеют те же значения, что и в (275).

Так как форма, изображённая на рис.74,а, не является точной формой колебаний одномассовой системы, то выполняется неравенство:

$$\tilde{\omega}_i^2 > \omega_i^2. \quad (277)$$

Сравнивая (275) и (276), находим

$$\omega^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\tilde{\omega}_i^2}}. \quad (278)$$

Если в правой части полученного равенства заменить $\tilde{\omega}_i$ меньшими значениями ω_i , то равенство превратится в неравенство:

$$\omega^2 > \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_i^2}}.$$

Таким образом, приближенная формула Донкерлея всегда дает преуменьшенное значение частоты:

$$\omega^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n m_i \delta_{ii}}. \quad (279)$$

Рассчитав частоту одной и той же системы по методу Рэлея и формуле Донкерлея, получим вилку, в которой заключено истинное значение частоты колебаний.

7.5. Метод последовательных приближений

Докажем, что обычный процесс последовательных приближений приводит к первой собственной форме колебаний. Основой процесса является сравнение двух кривых a_n и a_{n+1} , из которых вторая получается как линия прогибов, вызванных нагрузкой ma_n ; при этом приближенное значение квадрата частоты определяется по формуле

$$\omega_1^2 = \frac{(a_{n+1})_{\max}}{(a_n)_{\max}}. \quad (280)$$

Подобно выражению (265) представим исходную кривую $a_1(x)$ в виде ряда

$$a_1(x) = X_1(x) + b_2 X_2(x) + b_3 X_3(x) + \dots \quad (281)$$

Тогда нагрузка, соответствующая прогибам a_1 , такова:

$$ma_1 = mX_1 + mb_2 X_2 + mb_3 X_3 + \dots \quad (282)$$

Рассмотрим одно из слагаемых этой нагрузки - $mb_i X_i$. От нагрузки $m\omega_i^2 X_i$ прогибы будут X_i , поэтому от нагрузки $mb_i X_i$ прогибы будут в $\frac{b_i}{\omega_i^2}$ раз больше, т.е. составят $\frac{b_i X_i}{\omega_i^2}$. Следовательно, кривая прогибов от суммарной нагрузки определяется рядом

$$a_2 = \frac{X_1}{\omega_1^2} + \frac{b_2 X_2}{\omega_2^2} + \frac{b_3 X_3}{\omega_3^2} + \dots, \quad (283)$$

который отличается от ряда (282) тем, что каждый член ряда разделен на квадрат соответствующей частоты. Так как $\omega_1 < \omega_2, \omega_2 < \omega_3, \dots$, то кривая $a_2(x)$ ближе к $X_1(x)$, чем исходная кривая $a_1(x)$; члены ряда, содержащие $X_2(x)$, $X_3(x)$ и искажающие основную форму $X_1(x)$, представлены в ряде (283) слабее, чем в ряде (281). Продолжая процесс дальше, получим для

(n + 1) кривой

$$a_{n+1} = \frac{1}{\omega_1^{2n}} \left[X_1 + b_2 \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^{2n} X_2 + b_3 \left(\frac{\omega_1}{\omega_3} \right)^{2n} X_3 + \dots \right]. \quad (284)$$

Как видно, при $n \rightarrow \infty$ высшие формы исчезают; следовательно, какой бы ни была выбрана исходная кривая (например, даже очень похожей на вторую собственную форму), процесс в конечном итоге приведет именно к первой собственной форме.

Поэтому может показаться, что попытка построить вторую собственную форму при помощи этого метода обречена на неудачу, так как всякое искажение, вносимое первой формой в приближенную вторую форму, будет постепенно увеличиваться; после большого числа построений второй тип колебаний совершенно исчезнет, и останется лишь первый тип.

Однако несколько видоизменяя метод, можно добиться того, что в результате последовательных приближений «очистится» не первая, а именно вторая собственная форма колебаний. Этот прием нашел практическое применение при расчете изгибных колебаний крыльев самолетов и лопаток турбин.

Прием основан на устранении формы $X_1(x)$ из исходной функции $a_1(x)$. Допустим, что в разложении (281) отсутствует слагаемое, соответствующее первой форме, тогда оно не сможет возникнуть при всех последующих операциях, и ряд (284) принимает вид

$$a_{n+1} = \frac{1}{\omega_1^{2n}} \left[X_2 + b_3 \left(\frac{\omega_2}{\omega_3} \right)^{2n} X_3 + b_4 \left(\frac{\omega_2}{\omega_4} \right)^{2n} X_4 + \dots \right]$$

При $n \rightarrow \infty$ исчезнут все формы колебаний, кроме второй. Чтобы процесс последовательных приближений привел именно ко второй форме, нужно из исходной функции $a_1(x)$ исключить первую собственную форму

$X_1(x)$. Это можно сделать, приняв в качестве основы для построения второго приближения функцию

$$\bar{a}_1(x) = a_1(x) - \alpha_1 X_1(x), \quad (285)$$

где $a_1(x)$ - «подходящая» функция; $X_1(x)$ - предварительно найденная первая собственная форма.

Коэффициент α следует принять таким, чтобы форма $\bar{a}_1(x)$ была ортогональна первой собственной форме $X_1(x)$:

$$\int_0^{\ell} m \bar{a}_1(x) X_1(x) dx = 0.$$

Подставляя сюда (285), получим

$$\alpha_1 = \frac{\int_0^{\ell} m a_1(x) X_1(x) dx}{\int_0^{\ell} m X_1^2(x) dx}.$$

Далее от нагрузки $m \bar{a}_1$ следует определить прогибы a_2 . Если при помощи (285) первая форма $X_1(x)$ исключена совершенно точно, то функция a_2 будет ближе ко второй форме, а последующие операции обеспечат сколь угодно близкое приближение к X_2 .

Однако первая собственная форма может быть известна лишь приближенно, поэтому операция, заключенная в (285), не гарантирует полного освобождения от первой формы X_1 . В связи с этим при продолжении процесса нужно снова исправить функцию a_2 и принять

$$\bar{a}_2(x) = a_2(x) - \alpha_2 X_1(x), \quad (286)$$

где коэффициент α_2 также определяется условием ортогональности

функций \bar{a}_2 и X_1 :

$$\int_0^{\ell} m \bar{a}_2(x) X_1(x) dx = 0,$$

которое после подстановки (286) дает

$$\alpha_2 = \frac{\int_0^{\ell} m a_2(x) X_1(x) dx}{\int_0^{\ell} m X_1^2(x) dx}.$$

Затем следует определить кривую a_3 от нагрузки $m \bar{a}_2$, вновь исправить ее по формуле:

$$\bar{a}_3(x) = a_3(x) - \alpha_3 X_1(x) \text{ и т.д.}$$

В таком процессе последовательных приближений ортогонализация сопровождает каждый шаг выкладок и, непрерывно вытесняя «примесь» первой формы, приведет ко второй собственной форме и второй частоте, которая, подобно (280), определится формулой

$$\omega_2^2 = \frac{(\bar{a}_{n+1})_{\max}}{(a_n)_{\max}}.$$

Таким же образом при помощи сопровождающей ортогонализации можно определить третью собственную форму и третью частоту и т.д.

Глава 8

Вынужденные колебания систем с распределенными параметрами

Рассмотренные выше (см. подразд.2.4) три способа решения задачи о вынужденных колебаниях систем с несколькими степенями свободы пригодны и для анализа колебаний систем с распределенной массой. Выбор способов обусловлен характером возмущающих сил: при гармоническом возмущении удобнее первый способ, а при произвольно заданном возмущении - третий.

8.1. Продольные колебания стержней

Рассмотрим случай, когда стержень испытывает действие одной сосредоточенной силы, изменяющейся по гармоническому закону:

$$F = F_0 \sin pt. \quad (287)$$

Стационарные вынужденные колебания происходят с частотой возмущения p , значит, описываются законом:

$$U(x, t) = V(x) \sin pt, \quad (288)$$

где $V(x)$ - подлежащая определению функция абсциссы (форма вынужденных колебаний). Для элемента стержня (см. рис.67,б) было получено уравнение:

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (289)$$

где

$$c^2 = \frac{E}{\rho}. \quad (290)$$

Подставляя в (289) выражение (288), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению для функции $V(x)$

$$V'' + \frac{p^2}{c^2} V = 0, \quad (291)$$

где c^2 определяется формулой (290).

Уравнение (291) отличается от (179) для формы свободных колебаний тем, что частота p заранее известна. Подобно выражению (181) решение уравнения (291) запишем в виде

$$V = C \sin \frac{p}{c} x + D \cos \frac{p}{c} x. \quad (292)$$

Постоянные C и D определяются из граничных условий; рассмотрим некоторые из них.

Закрепленный конец стержня. В этом случае $u = 0$ при любом t , а это требует, чтобы в этом сечении $V = 0$.

К концу стержня приложена сила $F = F_0 \sin pt$. Она должна быть равна продольной силе в концевом сечении. Согласно (173),

$$N = EA \frac{\partial u}{\partial x} = EAV' \sin pt. \quad (293)$$

Приравнявая (287) к (293), получим граничное условие в виде

$$V' = \frac{F_0}{EA}. \quad (294)$$

Конец стержня свободен от нагрузки.

Согласно (294), здесь $V' = 0$.

На конце стержня имеется сосредоточенная масса m_0 .

Развиваемая ею сила инерции

$$-m_0 \ddot{u} = m_0 p^2 V_0 \sin pt,$$

где u_0, v_0 - величины, относящиеся к точке расположения массы m_0 .

Эта сила инерции должна быть равна продольной силе

$$N_0 = EA \frac{\partial u}{\partial x} = EAV' \sin pt.$$

Следовательно, граничное условие имеет вид

$$\frac{m_0 p^2}{EA} V_0 = V'_0.$$

Если стержень имеет переменное сечение, изменяющееся ступенчато, то решение (292) должно быть записано отдельно для каждого из участков:

$$V_1 = C_1 \sin \frac{p}{c} x_1 + D_1 \cos \frac{p}{c} x_1;$$

$$V_2 = C_2 \sin \frac{p}{c} x_2 + D_2 \cos \frac{p}{c} x_2;$$

.....

$$V_n = C_n \sin \frac{p}{c} x_n + D_n \cos \frac{p}{c} x_n,$$

где n - номер соответствующего участка.

Постоянные C_i и D_i определяются из двух условий на концах стержня и $2(n-1)$ условий сопряжения, которые выражают равенство перемещений и продольных сил на границе двух участков:

$$\begin{aligned} V_{i-1}(\ell_{i-1}) &= V_i(0); \\ (EAV')_{i-1}(\ell_{i-1}) &= (EAV')_i(0). \end{aligned}$$

Аналогично следует поступать и в тех случаях, когда возмущающая сила приложена в ряде промежуточных сечений.

Рассмотрим случай, когда внешняя нагрузка непрерывно распределена по длине стержня:

$$q(x, t) = q_0(x) \sin pt. \tag{295}$$

Используя рис.67,б, запишем уравнение движения с учетом элементарной внешней нагрузки $q_0(x)dx \sin pt$; тогда при помощи соотношения (288) при $EA = \text{const}$ получим

$$V'' + \frac{p^2}{c^2} V = \frac{q_0}{EA}.$$

Общее решение этого дифференциального уравнения зависит от вида правой части. Так, если $q_0 = \text{const}$,

$$V = C \sin \frac{p}{c} x + D \cos \frac{p}{c} x + \frac{q_0}{\rho A p^2}.$$

В общем случае решение имеет вид

$$V = C \sin \frac{p}{c} x + D \cos \frac{p}{c} x + \frac{c}{EA p} \int_0^x q_0(\xi) \sin \frac{p}{c} (x - \xi) d\xi. \quad (296)$$

Если сечение стержня меняется непрерывно, то исходное дифференциальное уравнение записывается так:

$$c^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial u}{\partial x} \right) = A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

При этом предполагается отсутствие распределенной внешней нагрузки.

После подстановки выражения (288) уравнение принимает форму

$$(AV')' + \frac{p^2}{c^2} AV = 0. \quad (297)$$

Это уравнение имеет переменные коэффициенты и в общем случае не может быть решено в замкнутом виде, поэтому приходится использовать приближенные методы.

Теперь рассмотрим *разложение решения в ряд по собственным функциям*.

В общем случае внешняя нагрузка произвольным образом распределена по длине и является какой угодно функцией времени:

$$q = q(x, t).$$

В частности, нагрузка может изменяться во времени по закону, общему для всех точек:

$$q = q_0(x)H(t). \quad (298)$$

Согласно рис.67, учитывая элементарную внешнюю нагрузку qdx , получим при $EA = \text{const}$

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = q(x, t). \quad (299)$$

Далее нагрузка $q(x, t)$ и перемещение $u(x, t)$ представляются в виде рядов по собственным функциям соответствующей задачи о свободных колебаниях:

$$\begin{cases} q = X_1(x)S_1(t) + X_2(x)S_2(t) + \dots, \\ u = X_1(x)T_1(t) + X_2(x)T_2(t) + \dots \end{cases} \quad (300)$$

Для определения функций времени $S_i(t)$ умножим обе части уравнения (299) на $X_i(x)$ и проинтегрируем результат по всей длине стержня. При интегрировании в правой части исчезнут все слагаемые, кроме i -го, вследствие ортогональности собственных функций, и для $S_i(t)$ получится формула

$$S_i(t) = \frac{\int_0^{\ell} q(x, t) X_i(x) dx}{\int_0^{\ell} X_i^2(x) dx}. \quad (301)$$

Если нагрузка меняется по закону (298), то

$$S_i(t) = H(t) \cdot \frac{\int_0^{\ell} q_0(x) X_i(x) dx}{\int_0^{\ell} X_i^2(x) dx}, \quad (302)$$

т.е. функции $S_i(t)$ для всех номеров i отличаются только масштабом.

Если же нагружение осуществляется сосредоточенными силами $F_a(t), F_b(t), \dots$ в сечениях с абсциссами a, b, \dots , то (301) принимает вид

$$S_i(t) = \frac{F_a(t) X_i(a) + F_b(t) X_i(b) + \dots}{\int_0^{\ell} X_i^2(x) dx}. \quad (303)$$

Определение функций $T_i(t)$ основано на том, что каждое слагаемое в правой части верхнего ряда (300) вызывает движение, определяемое соответствующим слагаемым нижнего ряда (300). Поэтому в (299) можно подставить

$$b = X_i(x) S_i(t); u = X_i(x) T_i(t). \quad (304)$$

Тогда получим уравнение

$$EAX_i'' T_i - \rho AX_i \ddot{T}_i = X_i S_i,$$

или после деления на $\rho AX_i T_i$

$$c^2 \frac{X_i''}{X_i} = \frac{\ddot{T}_i}{T_i} + \frac{S_i}{\rho A T_i}.$$

Это равенство выполняется при условии, что обе его части равны одному и тому же числу, которое обозначим через $-\omega^2$.

Тогда

$$\ddot{T}_i + \omega_i^2 T_i = \frac{S_i}{\rho E}.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$T_i = \frac{1}{\rho A \omega_i} \int_0^{\ell} S_i(\tau) \sin \omega_i (t - \tau) d\tau.$$

Эта формула и позволяет решить задачу, так как дает возможность образовать вторую из сумм (300). Если нагрузка следует закону (298), то при учете выражения (302) можно записать

$$T_i = \frac{\int_0^{\ell} q_0(x) X_i(x) dx}{\rho A \omega_i \int_0^{\ell} X_i^2(x) dx} \cdot \int_0^t H(\tau) \sin \omega_i (t - \tau) d\tau.$$

В случае произвольной периодической функции $H(\tau)$ следует воспользоваться способами, изложенными выше. В простейших случаях [например, когда нагрузка определяется выражением (295)] удобнее искать решение в виде (288), определяя $v(x)$ по (296).

8.2. Изгибные колебания балок

Рассмотрим случай, когда возмущающая нагрузка задана в виде сосредоточенной силы

$$F = F_0 \sin pt \quad (305)$$

или комбинации нескольких нагрузок того же вида с одинаковой частотой. Решение для прогибов будем искать в виде

$$y(x, t) = Y(x) \sin pt, \quad (306)$$

сводя задачу к определению формы колебаний (кривой амплитуд прогибов) $Y(x)$.

В случае $m = \text{const}$, подставляя в (192) (306), получим

$$Y^{IV} - \frac{mp^2}{EI} Y = 0. \quad (307)$$

Решение дифференциального уравнения (307) имеет вид

$$Y = C_1 S + C_2 T + C_3 U + C_4 V, \quad (308)$$

где S, T, U, V - функции Крылова (198), в которых вместо (196) нужно принять

$$K = \sqrt{\frac{mp^2}{EI}}.$$

Для определения постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 , входящих в общее решение (308), необходимо использовать граничные условия. Рассмотрим два случая, которые не освещались при расчете на свободные колебания.

1. Возмущающая сила $F = F_0 \sin pt$ приложена на конце балки.

Поперечная сила в сечении должна быть равна этой силе

$$Q = EIy''' = EIY''' \sin pt,$$

и граничное условие принимает вид

$$Y''' = \pm \frac{F_0}{EI},$$

где знак «+» соответствует силе, приложенной к правому концу, знак «-» - силе, приложенной к левому концу. Кроме того, $Y'' = 0$.

2. Возмущающая сила $F = F_0 \sin pt$ приложена в промежуточном сечении балки.

В этом сечении должны выполняться четыре условия сопряжения:

$$Y(a_-) = Y(a_+); Y'(a_-) = Y'(a_+);$$

$$Y''(a_-) = Y''(a_+); Y'''(a_-) - Y'''(a_+) = \frac{F_0}{EI},$$

где a - абсцисса сечения, в котором приложена возмущающая сила; индексы «-» и «+» соответствуют сечениям, расположенным бесконечно близко слева и справа от сечения a .

Первые три условия обозначают непрерывность прогиба, угла поворота сечения и изгибающего момента в точке приложения возмущающей силы; четвертое условие выражает разрыв функции поперечной силы в указанном сечении на величину F_0 .

Приведенные выше рассуждения представляют собой *непосредственное решение* задачи. Теперь рассмотрим другой способ - *разложение решения в ряд по собственным функциям*.

В общем случае, когда возмущающая поперечная нагрузка задана произвольным законом

$$q = q(x, t),$$

дифференциальное уравнение движения приобретает вид

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EI}{m} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{q}{m}, \quad (309)$$

т.е. отличается от аналогичного уравнения при свободных колебаниях наличием правой части.

Как и выше, представим $q(x, t)$ в виде ряда

$$q(x, t) = X_1(x)S_1(t) + X_2(x)S_2(t) + \dots \quad (310)$$

Также в виде ряда будем искать решение для прогиба

$$y(x, t) = X_1(x)T_1(t) + X_2(x)T_2(t) + \dots \quad (311)$$

Для определения функций времени $S_i(t)$ умножим обе части равенства (310) на $X_i(x)$ и проинтегрируем результат по всей длине балки. Вследствие ортогональности собственных функций в правой части при этом остается только одно слагаемое, соответствующее номеру i , так что

$$S_i(t) = \frac{\int_0^{\ell} q(x, t)X_i(x)dx}{\int_0^{\ell} X_i^2(x)dx}. \quad (312)$$

Эта формула совпадает по записи с (301), выведенной выше для продольных колебаний, но в (312) $X_i(x)$ представляет собой собственные формы задачи о свободных колебаниях балки («балочные функции»). Поэтому здесь также справедлива формула (303), относящаяся к случаю сосредоточенных возмущающих сил.

Учитывая, что каждое слагаемое ряда (310) вызывает движение, описываемое соответствующим слагаемым ряда (311), можно записать уравнение (309) в виде

$$X_i \ddot{T}_i + \frac{EI}{m} X_i^{IV} T_i = \frac{X_i S_i}{m}.$$

Разделив обе части на $X_i T_i$, получим

$$-\frac{EI}{m} \cdot \frac{X_i^{IV}}{X_i} = \frac{\ddot{T}_i}{T_i} - \frac{S_i}{m T_i}.$$

Левая часть этого равенства равна $-\omega_i^2$, поэтому

$$\frac{\ddot{T}_i}{T_i} - \frac{S_i}{m T_i} = -\omega_i^2.$$

Отсюда получим дифференциальное уравнение для T_i

$$\ddot{T}_i + \omega_i^2 T_i = \frac{S_i}{m}.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$T_i(t) = \frac{1}{m\omega_i} \int_0^t S_i(\tau) \sin \omega_i (t - \tau) d\tau. \quad (313)$$

Изложенный способ позволяет получить решения и в случаях переменного сечения, если заранее найдены собственные формы X_i и собственные частоты ω_i .

Глава 9

Колебания пластин и оболочек

Задачи об определении частот и форм собственных колебаний пластин и оболочек приводят к необходимости интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных. Наиболее хорошо изучены те случаи, когда оказывается возможным разделение переменных. К ним относятся, в частности, колебания прямоугольной пластины, шарнирно опертой по противоположащим сторонам, зонтичные и веерные колебания круглых осесимметричных пластин, колебания цилиндрических оболочек, замкнутых или шарнирно закрепленных вдоль образующих.

Если разделение переменных оказывается невозможным, то для расчета, в основном, используют приближенные и численные методы.

9.1. Уравнение движения пластины постоянной толщины

Расположим оси x и y в срединной плоскости пластины, ось z направим по нормали к этой плоскости. Дифференциальное уравнение статического изгиба пластины постоянной толщины h при малых перемещениях имеет вид

$$\nabla^2 \nabla^2 W = \frac{q(x, y)}{D},$$

где $\nabla^2 \nabla^2$ - бигармонический оператор;

$$\nabla^2 \nabla^2 W = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right),$$

W - прогиб;

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} - \text{цилиндрическая жесткость;}$$

$q(x, y)$ - интенсивность нормальной нагрузки.

Добавляя к внешней нагрузке интенсивность сил инерции,

$$q_1 = -\rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \quad (313)$$

где ρ - плотность материала, получим уравнение движения

$$\nabla^2 \nabla^2 W + \frac{12\rho(1-\mu^2)}{Eh^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{1}{D} q(x, y, t). \quad (314)$$

При свободных колебаниях нагрузка $q(x, y, t) = 0$, и решение уравнения (314) ищется в виде

$$W = W_a(x, y) \cos \omega t. \quad (315)$$

Подставляя (315) в однородное уравнение, соответствующее (314), получим для амплитудной функции $W_a(x, y)$ уравнение в частных производных

$$\nabla^2 \nabla^2 W_a + \alpha^4 W_a = 0, \quad (316)$$

где
$$\alpha^4 = \omega^2 \frac{12\rho(1-\mu^2)}{Eh^2}.$$

Уравнение (316) может быть представлено так:

$$(\nabla^2 - \alpha^2)(\nabla^2 + \alpha^2)W_a = 0,$$

откуда следует, что решениями (316) являются, в частности, решения более простых уравнений:

$$\begin{cases} (\nabla^2 - \alpha^2)W_a = 0; \\ (\nabla^2 + \alpha^2)W_a = 0, \end{cases} \quad (317)$$

или
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_a}{\partial y^2} - \alpha^2 W_a = 0; \\ \frac{\partial^2 W_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_a}{\partial y^2} + \alpha^2 W_a = 0. \end{cases} \quad (318)$$

$$(319)$$

Из бесчисленного множества решений уравнения (316) должны быть отобраны те, которые соответствуют условиям закрепления краев пластинки. Эти условия будут такими же, как и при статическом изгибе: на жестко защемленном краю

$$W_a = 0; \frac{\partial W_a}{\partial h} = 0;$$

на шарнирно опертом краю

$$W_a = 0; M_n = 0;$$

на свободном краю

$$M_n = 0; Q_n = 0,$$

где M_n и Q_n - амплитудный изгибающий момент и приведенная поперечная сила на контуре.

Если пластина отнесена к декартовой системе координат x, y , то M_n и Q_n определяются формулами

$$M_n = -D \left[\left(\frac{\partial^2 W_a}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W_a}{\partial y^2} \right) \cos^2 \theta + \left(\frac{\partial^2 W_a}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 W_a}{\partial x^2} \right) \sin^2 \theta + (1 - \mu) \frac{\partial^2 W_a}{\partial x \partial y} \sin 2\theta \right];$$

$$Q_n = -D \left\{ \frac{\partial^3 W_a}{\partial x^3} [1 + (1 - \mu) \sin^2 \theta] \cos \theta + \frac{\partial^3 W_a}{\partial x^2 \partial y} [2 - \mu - 3(1 - \mu) \cos^2 \theta] \sin \theta + \right.$$

$$+ \frac{\partial^3 W_a}{\partial x \partial y^2} [2 - \mu - 3(1 - \mu) \sin^2 \theta] \cos \theta + \frac{\partial^3 W_a}{\partial y^3} [1 + (1 - \mu) \cos^2 \theta] \sin \theta + \frac{1 - \mu}{\rho_0} \cdot \left. \left[\left(\frac{\partial^2 W_a}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W_a}{\partial x^2} \right) \cos 2\theta - 2 \frac{\partial^2 W_a}{\partial x \partial y} \sin 2\theta \right] \right\},$$

где θ - угол, образуемый внешней нормалью к контуру с осью x ; ρ_0 - радиус кривизны контура.

9.2. Прямоугольная пластина постоянной толщины

9.2.1. Пластина, шарнирно опертая по противоположащим сторонам

Точное решение задачи об определении собственных частот и форм колебаний прямоугольной пластины может быть получено, если две противоположащие стороны пластины имеют шарнирное опирание. При этом закрепление двух других сторон может быть произвольным.

Пусть у прямоугольной пластины размерами (а - размер вдоль оси х; b - вдоль оси у) шарнирно оперты края $y = 0$ и $y = b$.

Тогда выражение для амплитудных прогибов, удовлетворяющее условиям шарнирного опирания на этих краях, можно представить в виде

$$W(x, y) = f(x) \sin \frac{n\pi y}{b} (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Подставляя это выражение в (318) и (319), устанавливаем, что функция $f(x)$ должна удовлетворять одному из двух уравнений:

$$f''(x) - \alpha_1^2 f(x) = 0,$$

$$\text{где } \alpha_1^2 = \alpha^2 + \frac{n^2 \pi^2}{b^2},$$

или

$$f''(x) + \alpha_2^2 f(x) = 0,$$

$$\text{где } \alpha_2^2 = \alpha^2 - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}.$$

Решениями этих уравнений являются выражения $\text{ch}\alpha_1 x, \text{sh}\alpha_1 x, \cos\alpha_2 x, \sin\alpha_2 x$. Следовательно, общее выражение для $W(x, y)$ принимает вид

$$W(x, y) = (C_1 \text{ch}\alpha_1 x + C_2 \text{sh}\alpha_1 x + C_3 \cos\alpha_2 x + C_4 \sin\alpha_2 x) \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Это выражение должно удовлетворять граничным условиям при $x = 0, x = a$. Если эти края пластины также шарнирно оперты, то должно быть

$$W_{x=0} = 0; \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_{x=0} = 0;$$

$$W_{x=a} = 0; \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0.$$

Из условий при $x = 0$ находим

$$C_1 = C_3 = 0.$$

Условия при $x = a$ приводят к уравнениям

$$\begin{cases} C_2 \operatorname{sh} \alpha_1 a + C_4 \sin \alpha_2 a = 0; \\ C_2 \alpha_1^2 \operatorname{sh} \alpha_1 a - C_4 \alpha_2^2 \sin \alpha_2 a = 0. \end{cases}$$

Приравнивая нулю определитель этой системы уравнений, получим *частотное уравнение*

$$\operatorname{sh} \alpha_1 a \sin \alpha_2 a = 0,$$

которое выполняется при $\alpha_2 a = m\pi (m = 1, 2, \dots)$.

$$\text{Так как } \alpha_2^2 = \alpha^2 - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}, \text{ то } \alpha^2 = \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2}.$$

Тогда собственные частоты пластинки, шарнирно опертой по контуру, определяются формулой

$$\omega_{m,n} = \alpha^2 \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\mu^2)}} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\mu^2)}}, \quad (320)$$

где $m, n = 1, 2, 3, \dots$

Низшая частота ω_1 соответствует $m = n = 1$, т.е. колебаниям пластинки без узловых линий:

$$\omega_1 = \pi^2 \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\mu^2)}}.$$

Форма колебаний определяется выражением

$$W = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (321)$$

Аналогичным образом проводится расчет и при других условиях закрепления границ $x = 0, x = a$.

9.2.2. Асимптотический метод расчета пластин

Для прямоугольной пластины с закреплением, отличным от шарнирного опирания по противоположащим сторонам, применяют различные приближенные методы. Рассмотрим асимптотический метод.

В пластинках так же как и в балках, имеет место динамический краевой эффект, который заключается в том, что закрепление влияет на форму колебания только вблизи границы, а вдали от нее форма колебания определяется произведением синусов типа уравнения (321). Благодаря этому колебания можно представить как сумму функции типа (321) и быстро затухающих с удалением от границ функций, которые позволяют выполнить граничные условия.

Рассмотрим применение этого метода на примере заделанной по контуру прямоугольной пластины размерами $a \times b$, у которой, как и ранее, размер a соответствует оси x . Ограничимся расчетом симметричных относительно осей x, y форм колебаний. В средней части пластины (начало координат располагается в центре тяжести пластины) принимаем

$$W = W_0 = C_0 \cos \gamma_1 x \cos \gamma_2 y.$$

Вблизи границ $x = \pm \frac{a}{2}$:

$$W = \cos \gamma_2 y [C_0 \cos \gamma_1 x + f(x)],$$

где $f(x)$ - быстро изменяющаяся функция, позволяющая удовлетворить условиям закрепления.

Аналогично вблизи границ $y = \pm \frac{b}{2}$:

$$W = \cos \gamma_1 x [C_0 \cos \gamma_2 y + \varphi(y)].$$

Таким образом, общее выражение для $W(x, y)$ имеет вид

$$W = C_0 \cos \gamma_1 x \cos \gamma_2 y + f(x) \cos \gamma_2 y + \varphi(y) \cos \gamma_1 x. \quad (322)$$

В средней части пластинки функции $f(x)$ и $\varphi(y)$ пренебрежимо малы и поэтому первый член выражения (322) должен удовлетворять уравнению (316). Отсюда находим

$$\alpha^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2.$$

Вблизи границ $x = \pm \frac{a}{2}$ существенными являются первый и второй члены выражения (322). Учитывая, что первый член удовлетворяет уравнению (316), потребуем, чтобы и второй удовлетворял ему:

$$\nabla^2 \nabla^2 [f(x) \cos \gamma_2 y] - \alpha^4 f(x) \cos \gamma_2 y = 0.$$

Выполняя дифференцирование, приходим к уравнению:

$$f^{IV} - 2\gamma_2^2 f'' + (\gamma_2^4 - \alpha^4) f = 0,$$

которое распадается на два уравнения:

$$f'' - (\gamma_2^2 + \alpha^2) f = 0;$$

$$f'' + (\alpha^2 - \gamma_2^2) f = 0.$$

Так как $\alpha^2 > \gamma_2^2$, то затухающие решения имеет только первое из этих уравнений. Решение, затухающее с удалением от стороны $x = -\frac{a}{2}$, имеет вид

$$f(x) = C_1 e^{-\alpha_1(x + \frac{a}{2})},$$

где $\alpha_1^2 = \alpha^2 + \gamma_2^2 = \gamma_1^2 + 2\gamma_2^2$.

В силу симметрии вблизи стороны $x = \frac{a}{2}$:

$$f(x) = C_1 e^{-\alpha_1 \left(\frac{a}{2} - x\right)}.$$

Аналогично вблизи стороны $y = -\frac{b}{2}$:

$$\varphi(y) = C_2 e^{-\alpha_2 \left(y + \frac{b}{2}\right)},$$

где $\alpha_2^2 = \alpha^2 + \gamma_1^2 = 2\gamma_1^2 + \gamma_2^2$

и вблизи стороны $y = \frac{b}{2}$:

$$\varphi(y) = C_2 e^{-\alpha_2 \left(\frac{b}{2} - y\right)}.$$

Рассмотрим граничные условия при $x = -\frac{a}{2}$:

$$W = 0; \frac{\partial W}{\partial x} = 0.$$

При вычислении W и $\frac{\partial W}{\partial x}$ учтем, что практически вдоль всей стороны $x = -\frac{a}{2}$, за исключением окрестностей угловых точек, функция $\varphi(y)$ равна нулю, поэтому W определяется первыми двумя слагаемыми выражения (322):

$$\begin{cases} W_{x=-\frac{a}{2}} \approx (C_0 \cos \frac{\gamma_1 a}{2} + C_1) \cos \gamma_2 y = 0; \\ \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{x=-\frac{a}{2}} = (C_0 \gamma_1 \sin \frac{\gamma_1 a}{2} - \alpha_1 C_1) \cos \gamma_2 y = 0. \end{cases}$$

Для одновременного выполнения этих уравнений необходимо, чтобы определитель, составленный из коэффициентов при C_0 и C_1 , равнялся нулю, что приводит к уравнению:

$$\alpha_1 \cos \frac{\gamma_1 a}{2} + \gamma_1 \sin \frac{\gamma_1 a}{2} = 0. \quad (323)$$

Аналогично условия при $y = \pm \frac{b}{2}$ приводят к уравнению:

$$\alpha_2 \cos \frac{\gamma_2 b}{2} + \gamma_2 \sin \frac{\gamma_2 b}{2} = 0. \quad (324)$$

Так как α_1, α_2 связаны с γ_1, γ_2 ($\alpha_1^2 = \gamma_1^2 + 2\gamma_2^2$; $\alpha_2^2 = 2\gamma_1^2 + \gamma_2^2$), то трансцендентные уравнения (323) и (324) позволяют определить значения γ_1 и γ_2 , а затем вычислить $\alpha^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2$ и частоты:

$$\omega = \alpha^2 \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\mu^2)}}.$$

Рассмотрим, например, колебания квадратной пластинки с одинаковым числом узловых линий в направлениях x, y . В этом случае $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$; $\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma\sqrt{3}$ и уравнения (323) и (324) приводят к зависимости:

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma a}{2} = -\sqrt{3},$$

откуда

$$\frac{\gamma a}{2} = \frac{2\pi}{3} + (K-1)\pi (K=1,2,\dots).$$

Частоты колебаний определяются формулой:

$$\omega_K = 2\gamma^2 \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\mu^2)}} = 8\left(K - \frac{1}{3}\right)^2 \pi^2 \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho a^4(1-\mu^2)}}.$$

Достаточно хороший результат получается уже для низшей частоты:

$$\omega_1 = 35,6 \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho a^4(1-\mu^2)}}.$$

Точное значение:

$$\omega_1 = 35,98 \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho a^4(1-\mu^2)}}.$$

Как видно из вышеизложенного, при использовании асимптотического метода погрешность возникает вследствие приближенного выполнения граничных условий вблизи угловых точек.

9.3. Круглая пластина постоянной толщины

9.3.1. Определение форм и частот колебаний

Для круглой пластины в уравнениях (317) для амплитудной функции W_a следует перейти к полярным координатам r, φ . В этих координатах оператор Лапласа имеет вид

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \varphi^2}.$$

Таким образом, уравнение (317) в полярных координатах принимает форму

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W_a}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial W_a}{\partial r} + \frac{\partial^2 W_a}{r^2 \partial \varphi^2} - \alpha^2 W_a = 0; \\ \frac{\partial^2 W_a}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial W_a}{\partial r} + \frac{\partial^2 W_a}{r^2 \partial \varphi^2} + \alpha^2 W_a = 0. \end{cases} \quad (325)$$

Решения этих уравнений, соответствующие колебаниям пластины с \mathbf{n}

узловыми диаметрами, можно представить в виде

$$W_a(r, \varphi) = W(r) \cos n\varphi.$$

После подстановки этого выражения приходим к уравнениям:

$$\frac{d^2W}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dW}{dr} - \frac{n^2}{r^2}W - \alpha^2W = 0; \quad (326)$$

$$\frac{d^2W}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dW}{dr} - \frac{n^2}{r^2}W + \alpha^2W = 0. \quad (327)$$

Решениями уравнения (326) являются бесселевы функции порядка n первого $\mathfrak{J}_n(\alpha r)$ и второго $Y_n(\alpha r)$ рода; решениями уравнения (327) - модифицированные бесселевы функции $I_n(\alpha r)$, $K_n(\alpha r)$. Таким образом, общее выражение амплитудной функции с n узловыми диаметрами таково:

$$W_a = [C_1 \mathfrak{J}_n(\alpha r) + C_2 Y_n(\alpha r) + C_3 I_n(\alpha r) + C_4 K_n(\alpha r)] \cos n\varphi. \quad (328)$$

Для кольцевой пластинки имеются четыре граничных условия (по два на каждом краю), которые образуют однородную систему уравнений относительно констант C_1, C_2, C_3, C_4 . Для сплошной пластинки в выражении (328) равны нулю коэффициенты C_2 и C_4 при функциях, стремящихся к бесконечности при $r \rightarrow 0$. Граничные условия на внешнем контуре пластинки образуют в этом случае однородную систему уравнений относительно C_1 и C_3 . Частотное уравнение получается путем приравнивания нулю определителя системы.

В качестве примера рассмотрим колебания свободной сплошной круглой пластинки. В этом случае на контуре должны выполняться условия:

$$M_r = 0; V_r = Q_r + \frac{\partial M_{r\varphi}}{r \partial \varphi} = 0.$$

Изгибающий момент определяется формулой

$$M_r = -D \left[\frac{\partial^2 W_a}{\partial r^2} + \mu \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial W_a}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 W_a}{\partial \varphi^2} \right) \right].$$

Поперечная сила:

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 W_a).$$

Крутящий момент:

$$M_{r\varphi} = -(1-\mu)D \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 W_a}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial W_a}{\partial \varphi} \right).$$

Таким образом, граничные условия имеют вид

$$\nabla^2 W_a - (1-\mu) \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial W_a}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 W_a}{\partial \varphi^2} \right) = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 W_a) + (1-\mu) \frac{\partial^2}{r \partial \varphi^2} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial W_a}{\partial r} - \frac{W_a}{r^2} \right) = 0. \quad (329)$$

Учитывая, что $\mathfrak{J}_n \cos n\varphi$ является решением уравнения $\nabla^2 W_a + \alpha^2 W_a = 0$, а $I_n \cos n\varphi$ - уравнения $\nabla^2 W_a - \alpha^2 W_a = 0$, находим

$$\nabla^2 W_a = \alpha^2 [-C_1 \mathfrak{J}_n(\alpha r) + C_3 I_n(\alpha r)].$$

При подстановке в (329) вместо W_a его выражения

$$W_a = [C_1 \mathfrak{J}_n(\alpha r) + C_3 I_n(\alpha r)] \cos n\varphi$$

учтем правила дифференцирования функций Бесселя:

$$\frac{d}{dr} \mathfrak{J}_n(\alpha r) = \frac{\alpha}{2} [\mathfrak{J}_{n-1}(\alpha r) - \mathfrak{J}_{n+1}(\alpha r)];$$

$$\frac{d}{dr} I_n(\alpha r) = \frac{\alpha}{2} [I_{n-1}(\alpha r) + I_{n+1}(\alpha r)].$$

В результате приходим к уравнениям

$$\begin{aligned}
 & C_1 \left\{ \left[(1-\mu) \frac{n^2}{\lambda^2} - 1 \right] \mathfrak{I}_n - \frac{1-\mu}{2\lambda} (\mathfrak{I}_{n-1} - \mathfrak{I}_{n+1}) \right\} + \\
 & + C_3 \left\{ \left[(1-\mu) \frac{n^2}{\lambda^2} + 1 \right] I_n - \frac{1-\mu}{2\lambda} (I_{n-1} - I_{n+1}) \right\} = 0; \\
 \\
 & C_1 \left\{ (\mathfrak{I}_{n-1} - \mathfrak{I}_{n+1}) \left[(1-\mu) \frac{n^2}{\lambda^2} + 1 \right] - 2(1-\mu) \frac{n^2}{\lambda^3} \mathfrak{I}_n \right\} + \\
 & + C_3 \left\{ (I_{n-1} + I_{n+1}) \left[(1-\mu) \frac{n^2}{\lambda^2} - 1 \right] - 2(1-\mu) \frac{n^2}{\lambda^3} I_n \right\} = 0.
 \end{aligned}$$

Здесь аргументом всех бесселевых функций является величина $\lambda = \alpha R$, где R - радиус пластинки.

Значения λ , обращающие в нуль определитель полученной системы, связаны с собственными частотами равенством

$$\omega = \lambda^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h R^4}}.$$

Если ограничиться формами колебаний без узловых окружностей, то значениям $n = 0$ и $n = 1$ соответствуют смещения пластинки как жесткой и нулевые частоты. При $n = 2$ (два узловых диаметра) частотное уравнение можно привести к виду

$$\begin{aligned}
 & \mathfrak{I}_0(\lambda) I_0(\lambda) \frac{48(1-\mu)}{\lambda^3} + \mathfrak{I}_1(\lambda) I_1(\lambda) \left[\frac{48(1-\mu)(3+\mu)}{\lambda^5} - \frac{2(3-\mu)}{\lambda} \right] + \\
 & + \mathfrak{I}_0(\lambda) I_1(\lambda) \left[1 - \frac{12(1-\mu)}{\lambda^2} - \frac{12(1-\mu)(7+\mu)}{\lambda^4} \right] + \mathfrak{I}_1(\lambda) I_0(\lambda) \cdot \\
 & \cdot \left[1 + \frac{12(1-\mu)}{\lambda^2} - \frac{12(1-\mu)(7+\mu)}{\lambda^4} \right] = 0.
 \end{aligned}$$

При $\mu = 0,3$ наименьший корень этого уравнения $\lambda = 2,275$

и соответствующая частота собственных колебаний

$$\omega = \lambda^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h R^4}} = 5,17 \sqrt{\frac{D}{\rho h R^4}}.$$

Для заделанной по контуру пластинки граничные условия

$$W_{r=R} = 0; \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)_{r=R} = 0.$$

Частотное уравнение

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{I}_n(\lambda) & I_n(\lambda) \\ \mathfrak{I}_{n-1}(\lambda) - \mathfrak{I}_{n+1}(\lambda) & I_{n-1}(\lambda) + I_{n+1}(\lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

9.3.2. Бегущие волны в круглых пластинках

Рассмотренные выше собственные колебания круглых пластинок описываются уравнением

$$\xi_1 = W(r) \cos n\varphi \cos \omega t. \quad (330)$$

Они соответствуют стоячим волнам на поверхности пластинки, при которых узловые диаметры неподвижны.

Наряду с (330) решением уравнения движения является также выражение

$$\xi_2 = W(r) \sin n\varphi \sin \omega t. \quad (331)$$

Но поскольку уравнение движения линейно, сумма и разность (330) и (331) также являются его решениями:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = W(r) \cos n\left(\varphi - \frac{\omega}{n} t\right);$$

$$\xi = \xi_1 - \xi_2 = W(r) \cos n\left(\varphi + \frac{\omega}{n} t\right).$$

Эти выражения представляют собой уравнения бегущих волн. Первое выражение соответствует вращению всей картины деформаций вокруг оси симметрии пластинки в направлении возрастания угла φ с угловой скоростью $\frac{\omega}{n}$. Второе выражение соответствует движению волны с той же скоростью в противоположном направлении.

Если имеются внешние нагрузки, вращающиеся по периферии пластинки со скоростью, близкой к скорости $\frac{\omega}{n}$ распространения собственных колебаний, то такие нагрузки вызовут большие резонансные колебания пластинки.

Практически движущаяся по круглой пластинке нагрузка осуществляется в дисках турбомашин благодаря вращению диска при неподвижной в пространстве нагрузке, обусловленной неравномерностью давления рабочего тела по окружности.

Критические скорости вращения диска $\omega_{кр}$ могут быть найдены, если известны частоты его собственных колебаний ω_n , по формуле

$$\omega_{кр} = \frac{\omega_n}{n}, \quad (332)$$

где n - число узловых диаметров при свободных колебаниях с частотой ω_n .

9.4. Применение метода Рэля-Ритца к определению частот собственных колебаний пластинок

Метод Рэля-Ритца позволяет расчетным путем приближенно определять частоты собственных колебаний пластинок переменной толщины и, в частности, дисков турбомашин. Преимуществом этого метода является также возможность легко учесть влияние на частоту различных побочных факторов, например начальных напряжений в срединной поверхности пластинки.

Потенциальная энергия деформации пластинки при ее изгибе по форме, определяемой функцией $W(x, y)$, выражается двойным интегралом

$$\Pi_0 = \frac{1}{2} \iint D \left\{ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1 - \mu) \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy, \quad (333)$$

где $D = Eh^3/[12(1 - \mu^2)]$; интеграл берется по всей поверхности пластинки, причем для пластинки постоянной толщины, заделанной по контуру, интеграл от второго слагаемого выражения (333) обращается в нуль.

Обобщенная масса пластинки

$$\tilde{M} = \iint \rho h W^2 dx dy. \quad (334)$$

В соответствии с методом Рэлея-Ритца форма колебаний задается в виде ряда

$$W = C_1 W_1(x, y) + C_2 W_2(x, y) + \dots, \quad (335)$$

где каждая из координатных функций $W_k(x, y)$ удовлетворяет геометрическим граничным условиям.

Равенство нулю определителя системы уравнений

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial C_k} - \frac{1}{2} \omega^2 \frac{\partial \tilde{M}}{\partial C_k} = 0 (k = 1, 2, \dots) \quad (336)$$

позволяет определить частоты собственных колебаний.

Если в (335) ограничиваются одним слагаемым, то частота определяется по формуле Рэлея

$$\omega^2 = \frac{2\Pi_0}{\tilde{M}}. \quad (337)$$

Можно задаваться выражением для формы колебаний, в которое параметры C_1, C_2, \dots, C_n входят нелинейно

$$W = W(C_1, C_2, \dots, C_n, x, y).$$

В этом случае уравнения метода Рэля-Ритца (336) оказываются нелинейными и проще исходить не из них, а из условий экстремума выражения (337), причем значения параметров, при которых достигается этот экстремум, находятся численными методами.

Рассмотрим в качестве примера заделанную по контуру прямоугольную пластинку постоянной толщины. Ограничиваясь одним слагаемым выражения (335), принимаем

$$W = C \left(1 + \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 + \cos \frac{2\pi y}{b} \right).$$

Проводя вычисления по (333) и (334), находим

$$\pi_0 = C^2 D 2\pi^4 ab \left(\frac{3}{a^4} + \frac{2}{a^2 b^2} + \frac{3}{b^4} \right);$$

$$\tilde{M} = \frac{9}{4} \rho C^2 h ab.$$

Для частоты колебаний получаем

$$\omega = \sqrt{\frac{2\pi_0}{\tilde{M}}} = \frac{4}{3} \pi^2 \sqrt{3 + \frac{2a^2}{b^2} + \frac{3a^4}{b^4}} \cdot \sqrt{\frac{D}{\rho h a^4}}.$$

При $a = b$:

$$\omega = 37,2 \sqrt{\frac{D}{\rho h a^4}},$$

что на 3,3 % выше точного значения.

При расчете колебаний круглых пластин целесообразно использовать выражения энергии деформации и обобщенной массы в полярных координатах r, φ

$$\Pi_0 = \iint \frac{D}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right)^2 + 2(1-\mu) \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) \right]^2 - \right. \\ \left. - 2(1-\mu) \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right) \right\} r dr d\varphi;$$

$$\tilde{M} = \iint \rho h W^2 r dr d\varphi,$$

где интегрирование выполняется по всей срединной поверхности пластинки.

При изучении колебаний осесимметричных пластин полагают

$$W(r, \varphi) = \tilde{W}(r) \cos n\varphi.$$

В этом случае интегрирование по φ можно выполнить в общем виде и выражения для Π_0 и \tilde{M} представляются в форме

$$\Pi_0 = \frac{\pi}{2} \int D \left\{ \left(\tilde{W}'' + \frac{1}{r} \tilde{W}' - \frac{n^2}{r^2} \tilde{W} \right)^2 + 2(1-\mu) n^2 \left[\left(\frac{1}{r} \tilde{W} \right)' \right]^2 - \right. \\ \left. - 2(1-\mu) \tilde{W}'' \left(\frac{1}{r} \tilde{W}' - \frac{n^2}{r^2} \tilde{W} \right) \right\} r dr; \quad (338)$$

$$\tilde{M} = \pi \int \rho h \tilde{W}^2 r dr. \quad (339)$$

Для сплошной свободной пластинки вычисления упрощаются, если принять функцию $\tilde{w}(x)$ в виде

$$\tilde{W}(r) = r^S,$$

где S - параметр, определяемый из условия минимума формулы Рэлея (337).

Тогда Π_0 и \tilde{M} определяются формулами

$$\Pi_0 = \frac{\pi E}{24(1-\mu^2)} \left[(S^2 - n^2)^2 + 2(1-\mu)(S-1)(2n^2 - n^2 - S^2) \right] \int_r h^3 r^{2S-3} dr;$$

$$\tilde{M} = \pi \rho \int_r hr^{2S+1} dr.$$

Чтобы оценить погрешность метода, применим его для расчета частоты колебаний диска постоянной толщины при двух узловых диаметрах.

В этом случае

$$\Pi_0 = \frac{\pi E h^3}{24(1-\mu^2)} R^{2(S-1)} \left[\frac{(S^2 - 4)^2}{2(S-1)} + (1-\mu)(8S - 4 - S^2) \right];$$

$$\tilde{M} = \frac{\pi \rho h R^{2(S+1)}}{2(S+1)}.$$

Отсюда находим

$$\omega^2 = \frac{2\Pi_0}{\tilde{M}} = \frac{Eh^2}{12\rho(1-\mu^2)R^4} \cdot \frac{S+1}{S-1} [(S^2 - 4)^2 + 2(1-\mu)(S-1)(8S - 4 - S^2)]$$

Минимальное значение частоты при $S = 1,742$

$$\omega = 5,43 \sqrt{\frac{D}{\rho h R^4}},$$

что дает ошибку порядка 5 %.

9.5. Колебания оболочек

Изгибные колебания пластинок можно рассматривать независимо от их колебаний в своей плоскости. В отличие от этого при колебаниях оболочек изгиб стенки связан, как правило, с растяжением срединной поверхности. Потенциальная энергия деформации оболочки выражается формулой

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2,$$

где

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + 2(1-\mu) \left(\frac{\gamma_{12}^2}{4} - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \right) \right] d\Omega; \quad (340)$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \left[(\chi_1 + \chi_2)^2 + 2(1-\mu)(\chi_{12}^2 - \chi_1 \chi_2) \right] d\Omega. \quad (341)$$

Величина Π_1 представляет собой энергию растяжения оболочки, Π_2 - энергию ее изгиба; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}$ - компоненты деформации срединной поверхности; $\chi_1, \chi_2, \chi_{12}$ - параметры изменения ее кривизны. Интегрирование в (340) и (341) выполняется по всей срединной поверхности Ω оболочки. Величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}, \chi_1, \chi_2, \chi_{12}$ по известным формулам выражаются через компоненты амплитудного перемещения u, V, W точек оболочки.

Амплитудное значение кинетической энергии движения оболочки, совершающей гармонические колебания с частотой ω ,

$$K = \frac{\omega^2 \tilde{M}}{2}, \tilde{M} = \iint_{\Omega} \rho h (u^2 + V^2 + W^2) d\Omega.$$

Частота колебаний определяется формулой Рэлея

$$\omega^2 = \frac{2(\Pi_1 + \Pi_2)}{\tilde{M}}. \quad (342)$$

Числитель и знаменатель дроби (342) зависят от выбора функции перемещений u, V, W . При этом истинные формы собственных колебаний сообщают выражению (342) стационарные значения, а первая собственная форма - минимум. Обозначим характерный размер оболочки и характерную толщину через R и h_0 соответственно. Тогда (342) можно записать так:

$$\omega^2 = \frac{E}{(1-\mu^2)\rho R^2} \left(\lambda_1 + \frac{h_0^2}{12R^2} \lambda_2 \right), \quad (343)$$

где

$$\lambda_1 = \frac{R^2 \iint_{\Omega} \frac{h}{h_0} \left[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + 2(1-\mu) \left(\frac{\gamma_{12}^2}{4} - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \right) \right] d\Omega}{\iint_{\Omega} \frac{h}{h_0} (u^2 + V^2 + W^2) d\Omega},$$

$$\lambda_2 = \frac{R^4 \iint_{\Omega} \left(\frac{h}{h_0} \right)^3 \left[(\chi_1 + \chi_2)^2 + 2(1-\mu)(\chi_{12}^2 - \chi_1 \chi_2) \right] d\Omega}{\iint_{\Omega} \frac{h}{h_0} (u^2 + V^2 + W^2) d\Omega}.$$

Величины λ_1 и λ_2 являются безразмерными и зависят от вида амплитудных функций u, V, W . Второе слагаемое в (343), соответствующее энергии изгиба оболочки, имеет малый множитель $\frac{h_0^2}{12R^2}$, поэтому при минимизации ω^2 наиболее существенно уменьшение λ_1 , т.е. слагаемого, соответствующего энергии растяжения срединной поверхности.

Если геометрия оболочки и условия ее закрепления это допускают, то наименьшие значения частот отвечают такому выбору функций u, V, W , при котором $\lambda_1 = 0$.

Но требование $\lambda_1 = 0$ может быть выполнено только при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \gamma_{12} = 0$, т.е. при отсутствии растяжения срединной поверхности. Такой вид деформации оболочек называется *чистым изгибанием*.

9.5.1. Теория колебаний оболочек без растяжения срединной поверхности

На основе описанной выше теории рассмотрим колебания цилиндрической оболочки (рис.75). Определим положение произвольной точки M на срединной поверхности оболочки координатами $\alpha = x/R$ и β .

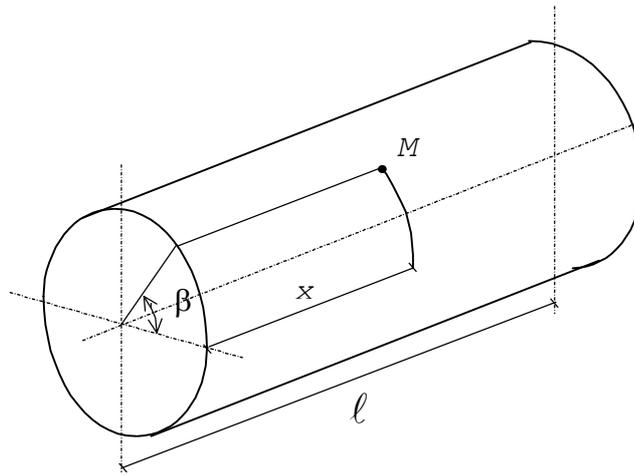


Рис.75

Компоненты перемещения точки в продольном, окружном и нормальном к поверхности направлениях обозначим соответственно u, V, W . Компоненты деформации срединной поверхности определяются формулами

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{R \partial \alpha}; \varepsilon_2 = \frac{\partial V}{R \partial \beta} + \frac{W}{R}; \gamma_{12} = \frac{\partial u}{R \partial \beta} + \frac{\partial V}{R \partial \alpha}. \quad (344)$$

Приравняв $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и γ_{12} нулю и проинтегрировав полученные уравнения, выразим u, V, W через две произвольные функции угловой координаты β

$$u = f_1(\beta); \quad V = -\alpha f_1'(\beta) + f_2(\beta); \quad W = \alpha f_1''(\beta) - f_2'(\beta). \quad (345)$$

Из полученных формул видно, что при деформации цилиндрической оболочки без растяжения срединной поверхности образующие остаются прямыми, а осевые перемещения не зависят от продольной координаты.

Формулы показывают, что чистые изгибания замкнутой цилиндрической оболочки возможны в следующих случаях: а) если ее торцы свободны; в этом случае отличны от нуля f_1 и f_2 ; б) если на одном из торцов запрещены перемещения V, W , но разрешено перемещение u ; в) если на одном из торцов запрещено перемещение u . Если же оболочка оперта на обоих торцах, чистое изгибание ее невозможно.

Составим выражения потенциальной и кинетической энергии оболочки, совершающей гармонические колебания с частотой ω . В общем выражении потенциальной энергии деформации сохраняется только слагаемое π_2 . Входящие в него параметры изменения кривизны определяются формулами

$$\chi_1 = -\frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} = 0;$$

$$\chi_2 = \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left(V - \frac{\partial W}{\partial \beta} \right) = \frac{1}{R^2} \left\{ -\alpha [f_1''(\beta) + f_1^{IV}(\beta)] + f_2'(\beta) + f_2'''(\beta) \right\};$$

$$\chi_{12} = \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(V - \frac{\partial W}{\partial \beta} \right) = -\frac{1}{R^2} [f_1'(\beta) + f_1'''(\beta)].$$

После подстановки этих значений в выражение π_2 (341) и интегрирования по α с учетом того, что $d\Omega = R^2 d\alpha d\beta$, находим

$$\begin{aligned} \pi = \pi_2 = \frac{1}{2R^2} \cdot \frac{E}{12(1-\mu^2)} \int_{\beta} \left\{ A(f_1'' + f_1^{IV})^2 - 2B(f_1'' + f_1^{IV})(f_2' + f_2''') + \right. \\ \left. + C[(f_2' + f_2''')^2 + 2(1-\mu)(f_1' + f_1''')^2] \right\} d\beta, \end{aligned} \quad (346)$$

$$\tilde{M} = \rho R^2 \int_{\beta} \left\{ A_1[(f_1')^2 + (f_1'')^2] - 2B_1(f_1'f_2' + f_1''f_2'') + C_1[f_1^2 + f_2^2 + (f_2')^2] \right\} d\beta,$$

где

$$A = \int_{\alpha} h^3 \alpha^2 d\alpha; B = \int_{\alpha} h^3 \alpha d\alpha; C = \int_{\alpha} h^3 d\alpha;$$

$$A_1 = \int_{\alpha} h \alpha^2 d\alpha; B_1 = \int_{\alpha} h \alpha d\alpha; C_1 = \int_{\alpha} h d\alpha.$$

Интегралы в выражениях A, B, C, A_1, B_1, C_1 вычисляются по всей длине оболочки.

Из основного уравнения метода Рэлея-Ритца следует, что выражение $\frac{1}{2}\omega^2\tilde{M} - \Pi$ (где ω - частота собственных колебаний) должно иметь стационарное значение:

$$\delta\left(\frac{1}{2}\omega^2\tilde{M} - \Pi\right) = 0.$$

Отсюда следует система обыкновенных дифференциальных уравнений для функции $f_1(\beta), f_2(\beta)$. В этом случае, если форма всех меридиональных сечений одинакова (толщина оболочки не зависит от β), коэффициенты A, B, C, A_1, B_1, C_1 постоянны и уравнения получают такой вид:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{d^2}{d\beta^2} + 1\right)\frac{d^2}{d\beta^2}\left[A\frac{d^2f_1}{d\beta^2} - B\frac{d^2f_2}{d\beta^2} - 2(1-\mu)Cf_1\right] - \omega^2\frac{12(1-\mu^2)\rho R^4}{E} \times \\ &\times \left[A_1\left(\frac{d^2}{d\beta^2} - 1\right)\frac{d^2f_1}{d\beta^2} - B_1\left(\frac{d^2}{d\beta^2} - 1\right)\frac{d^2f_2}{d\beta^2} + C_1f_1\right] = 0; \end{aligned} \quad (347)$$

$$\left(\frac{d^2}{d\beta^2} + 1\right)^2\frac{d^2}{d\beta^2}\left[B\frac{df_1}{d\beta} - Cf_2\right] - \omega^2\frac{12(1-\mu^2)\rho R^4}{E}\left(\frac{d^2}{d\beta^2} - 1\right)\left[B_1\frac{df_1}{d\beta} - C_1f_2\right] = 0. \quad (348)$$

Решение этих дифференциальных уравнений для открытых оболочек должно быть подчинено граничным условиям на продольных кромках. На этих кромках могут быть заданы перемещения u (постоянные вдоль каждой кромки), а также перемещения V, W и угол поворота

$$\theta_2 = \frac{1}{R}\left(V - \frac{\partial W}{\partial \beta}\right)$$

в двух различных сечениях по длине оболочки. Всего имеется семь кинематических граничных условий на каждой продольной кромке, что соответствует четырнадцатому порядку уравнений (347)-(348). Если

закрепления отсутствуют, то кинематические граничные условия заменяются естественными граничными условиями.

Если оболочка симметрична относительно поперечного сечения $\alpha = 0$ (рис.76,а), то $V = V_1 = 0$ и функции $f_1(\beta), f_2(\beta)$ определяются независимыми дифференциальными уравнениями

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{d^2}{d\beta^2} + 1 \right)^2 \frac{d^2}{d\beta^2} \left[A \frac{d^2 f_1}{d\beta^2} - 2(1-\mu) C f_1 \right] - \omega^2 \frac{12(1-\mu^2)\rho R^4}{E} \times \\ & \times \left[A_1 \left(\frac{d^2}{d\beta^2} - 1 \right) \frac{d^2 f_1}{d\beta^2} + C_1 f_1 \right] = 0; \\ & \left(\frac{d^2}{d\beta^2} + 1 \right)^2 \frac{d^2 f_2}{d\beta^2} - \omega^2 \frac{12(1-\mu^2)\rho R^4}{E} \cdot \frac{C_1}{C} \left(\frac{d^2 f_2}{d\beta^2} - f_2 \right) = 0. \end{aligned} \right. \quad (349)$$

Функция f_1 описывает в этом случае кососимметричные относительно сечения $\alpha = 0$ формы колебаний, а функция f_2 - симметричные. Уравнение, определяющее функцию $f_2(\beta)$, совпадает с уравнением колебаний кольца в своей плоскости.

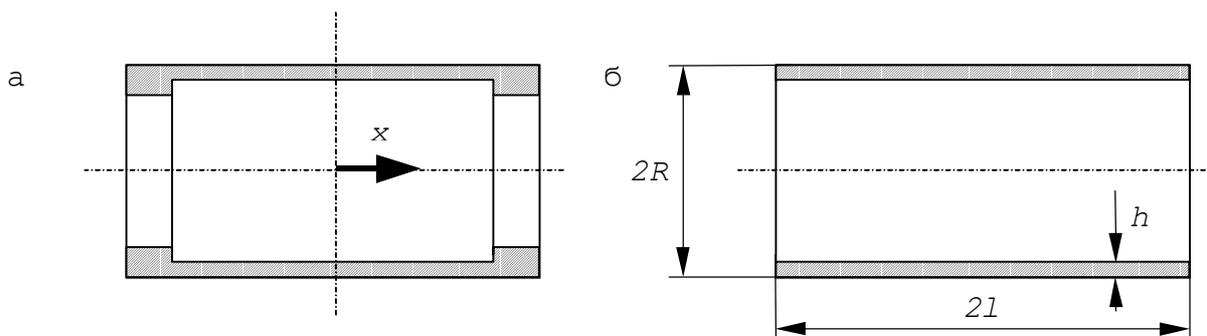


Рис.76

Для замкнутой оболочки граничные условия заменяются условиями периодичности, которым удовлетворяют функции $f_1 = M \cos K\beta$, $f_2 = N \cos K\beta$. В случае симметричной оболочки подстановка этих выражений в уравнения (349) приводит к следующим значениям частот для

кососимметричных колебаний:

$$\omega_{K1}^2 = \frac{1}{12(1-\mu^2)} \cdot \frac{E}{\rho R^4} \cdot \frac{K^2(K^2-1)^2 [K^2 A + 2(1-\mu)C]}{K^2(K^2+1)A_1}$$

и для симметричных колебаний:

$$\omega_{K2}^2 = \frac{1}{12(1-\mu^2)} \cdot \frac{E}{\rho R^4} \cdot \frac{C}{C_1} \cdot \frac{K^2(K^2-1)^2}{K^2+1}$$

Для оболочки постоянной толщины h и длины 2ℓ (рис.76,б):

$$A = 2h^3 \int_0^{\ell/R} \alpha^2 d\alpha = \frac{2}{3} h^3 \left(\frac{\ell}{R}\right)^3; C = 2h^3 \int_0^{\ell/R} d\alpha = 2h^3 \frac{\ell}{R};$$

$$A_1 = 2h \int_0^{\ell/R} \alpha^2 d\alpha = \frac{2}{3} h \left(\frac{\ell}{R}\right)^3; C = 2h \int_0^{\ell/R} d\alpha = 2h \frac{\ell}{R}.$$

В этом случае

$$\omega_{K1}^2 = \frac{Eh^2}{12(1-\mu^2)\rho R^4} \cdot \frac{K^2(K^2-1)^2 \left[K^2 \left(\frac{\ell}{R}\right)^2 + 6(1-\mu) \right]}{K^2(K^2+1) \left(\frac{\ell}{R}\right)^2 + 6};$$

$$\omega_{K2}^2 = \frac{Eh^2}{12(1-\mu^2)\rho R^4} \cdot \frac{K^2(K^2-1)^2}{K^2+1}.$$

Как видно из полученных формул, при колебаниях оболочек без растяжения срединной поверхности частоты определяются зависимостями такого же типа, как и для пластинок

$$\omega = \lambda \sqrt{\frac{D}{\rho h R^4}},$$

где D - цилиндрическая жесткость; λ - числовой коэффициент. При стремлении толщины оболочки к нулю частота ее колебаний без растяжения срединной поверхности также стремится к нулю.

9.5.2. Уравнения движения оболочек

Если отнести оболочку к системе гауссовых координат α, β , совпадающих с линиями кривизны срединной поверхности, то уравнения движения могут быть записаны в таком виде:

$$\begin{cases} N_{11}u + N_{12}V + N_{13}W = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ N_{21}u + N_{22}V + N_{23}W = \rho h \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}; \\ N_{31}u + N_{32}V + N_{33}W = \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \end{cases} \quad (350)$$

где u, V, W - компоненты перемещения точки срединной поверхности в направлениях α - и β -линий и по нормали; ρh - масса оболочки на единицу срединной поверхности; N_{ij} - дифференциальные операторы. Структура операторов N_{ij} для оболочек произвольной формы весьма сложна. Поэтому уравнения движения в виде (350), т.е. в перемещениях, имеет смысл записывать только для простейшего случая цилиндрической оболочки постоянной толщины, для которой коэффициенты уравнений постоянны. В этом случае

$$\begin{cases} N_{11} = \frac{Eh}{(1-\mu^2)R^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right); \\ N_{12} = N_{21} = \frac{Eh}{(1-\mu^2)R^2} \cdot \frac{1+\mu}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}; \\ N_{13} = -N_{31} = \frac{Eh}{(1-\mu^2)R^2} \cdot \mu \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha}; \\ N_{22} = \frac{Eh}{(1-\mu^2)R^2} \left\{ \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + a^2 \left[2(1-\mu) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right] \right\}; \\ N_{23} = -N_{32} = \frac{Eh}{(1-\mu^2)R^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta} - a^2 \left[(2-\mu) \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \beta} + \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} \right] \right\}; \\ N_{33} = -\frac{Eh}{(1-\mu^2)R^2} \left[1 + a^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right)^2 \right], \end{cases} \quad (351)$$

где $\alpha = x/R$; $\beta = S/R$ - безразмерные координаты точки на срединной поверхности; $a^2 = h^2/(12R^2)$.

Система уравнений (350) имеет восьмой порядок по координатам α, β и второй - по времени t . Даже тогда, когда эти уравнения имеют постоянные коэффициенты (т.е. для цилиндрической оболочки) и при рассмотрении гармонических колебаний с частотой ω , т.е. при

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -p^2 u; \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -p^2 V; \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = -p^2 W,$$

аналитическое решение этих уравнений может быть получено лишь при некоторых специально подобранных граничных условиях. В остальных случаях для расчета используют приближенные или численные методы.

Особенностью уравнений движения оболочек является то, что, как это видно из формул (351), в эти уравнения входит малый, пропорциональный квадрату толщины оболочки, параметр a^2 , на который умножаются старшие производные перемещений по координатам. Поэтому, если рассматриваются такие формы колебаний, при которых перемещения медленно меняются по координатам α и β , соответствующими моментными членами в уравнениях (350) можно пренебречь. На основе безмоментной теории рассматривают низшие формы колебаний оболочек, закрепленных так, что обеспечивается возможность безмоментного состояния.

При высших формах собственных колебаний оболочка разбивается узловыми линиями на ряд достаточно пологих сегментов, на каждом из которых напряженное состояние быстро изменяется по координатам. В этом случае для расчета может быть использована так называемая теория пологих оболочек. Применительно к цилиндрической оболочке уравнения теории пологих оболочек получаются из уравнений (350), если в операторах N_{22}, N_{23}, N_{32} (351) опустить слагаемые с множителем a^2 .

Аналитическое решение задачи о собственных колебаниях для замкнутой цилиндрической оболочки может быть получено при так называемых граничных условиях Навье. Согласно этим условиям, на торцах оболочки отсутствуют нормальные w и окружные v перемещения, а также продольная сила T_x в срединной поверхности и изгибающий момент M_x . Условиям Навье удовлетворяют следующие выражения компонентов перемещения:

$$u = A \cos \frac{m\pi R\alpha}{\ell} \sin n\beta \cdot \cos \omega t;$$

$$V = B \sin \frac{m\pi R\alpha}{\ell} \cos n\beta \cdot \cos \omega t;$$

$$W = C \sin \frac{m\pi R\alpha}{\ell} \sin n\beta \cdot \cos \omega t.$$

Подставив эти выражения в уравнения движения (350) и учитывая (351), приходим к системе трех линейных алгебраических уравнений относительно A, B, C .

Равенство нулю определителя этой системы приводит к кубическому уравнению относительно ω^2 . Три корня этого уравнения соответствуют трем различным формам колебаний с одинаковыми числами узловых окружностей и образующих, но с различными соотношениями между A, B, C .

В отличие от пластинок, где наименьшие собственные частоты соответствуют формам колебаний без узловых линий, в оболочках, закрепленных так, что деформация их без растяжения срединной поверхности невозможна, наименьшие частоты имеют колебания с узловыми линиями. Это объясняется тем, что формы колебаний без узловых линий связаны со значительными деформациями в срединной поверхности оболочки.

Глава 10

Технические приложения теории колебаний

10.1. Основы расчета виброизоляции

Колебания, возникающие при работе различного рода машин и механизмов, передаются прилегающим конструкциям и объектам, что нарушает нормальную работу других устройств, а также вредно влияет на здоровье человека. Кроме того, часто приходится устанавливать различные приборы и другие объекты на колеблющемся основании. При этом, как правило, требуется изолировать объект от основания так, чтобы ему не передавались колебания последнего. В обоих случаях задача виброизоляции решается одинаково - между объектом и основанием устанавливают упругие элементы, а иногда и демпферы сухого или вязкого трения.

Рассмотрим простейшую систему виброзащиты (рис.77,а). Здесь объект массой m , на который действует гармоническая возмущающая сила $F(t) = F_0 \cos pt$, соединен с основанием упругой связью с жесткостью C и элементом вязкого трения с коэффициентом трения K .

Выше было установлено, что при колебаниях такой системы перемещения груза меняются по закону:

$$x = A \cos(pt - \varphi),$$

где

$$A = \frac{F_0}{C \sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right)^2 + 4 \frac{n^2 p^2}{\omega^2}}}; \varphi = \arctg \frac{2np}{\omega^2 - p^2};$$

$n = \frac{K}{2m}$ - коэффициент затухания; $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ - частота собственных колебаний системы.

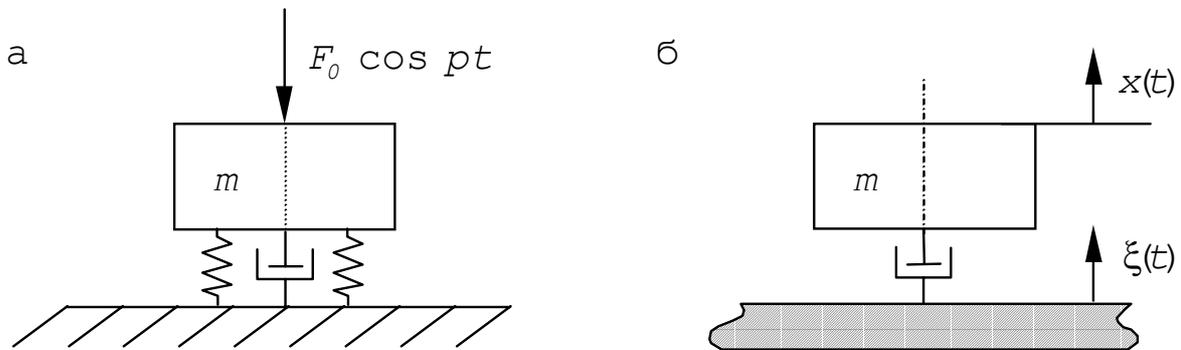


Рис.77

В задаче расчета виброизоляции существенными являются не столько перемещения объекта x , сколько динамическое усилие R , передаваемое основанию. Это усилие является суммой реакции упругой связи Cx и силы вязкого трения $K\dot{x}$:

$$R = Cx + K\dot{x} = A[C\cos(pt - \varphi) - Kp\sin(pt - \varphi)] = R_0 \cos(pt - \varphi_1),$$

где

$$R_0 = A\sqrt{C^2 + (Kp)^2} = F_0 \frac{\sqrt{1 + \frac{4n^2 p^2}{\omega^4}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4n^2 p^2}{\omega^4}}};$$

$$\varphi_1 = \varphi - \operatorname{arctg} \frac{2np}{\omega^2}.$$

Отношение амплитуды силы, передаваемой основанию (R_0), к амплитуде возмущающей силы (F_0) называется *коэффициентом*

виброизоляции (γ):

$$\gamma = \frac{R_0}{F_0} = \frac{\sqrt{1 + \frac{4n^2 p^2}{\omega^4}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4n^2 p^2}{\omega^4}}}. \quad (352)$$

На рис.78 показаны графики зависимости коэффициента виброизоляции γ от отношения частоты возмущающей силы к собственной частоте системы.

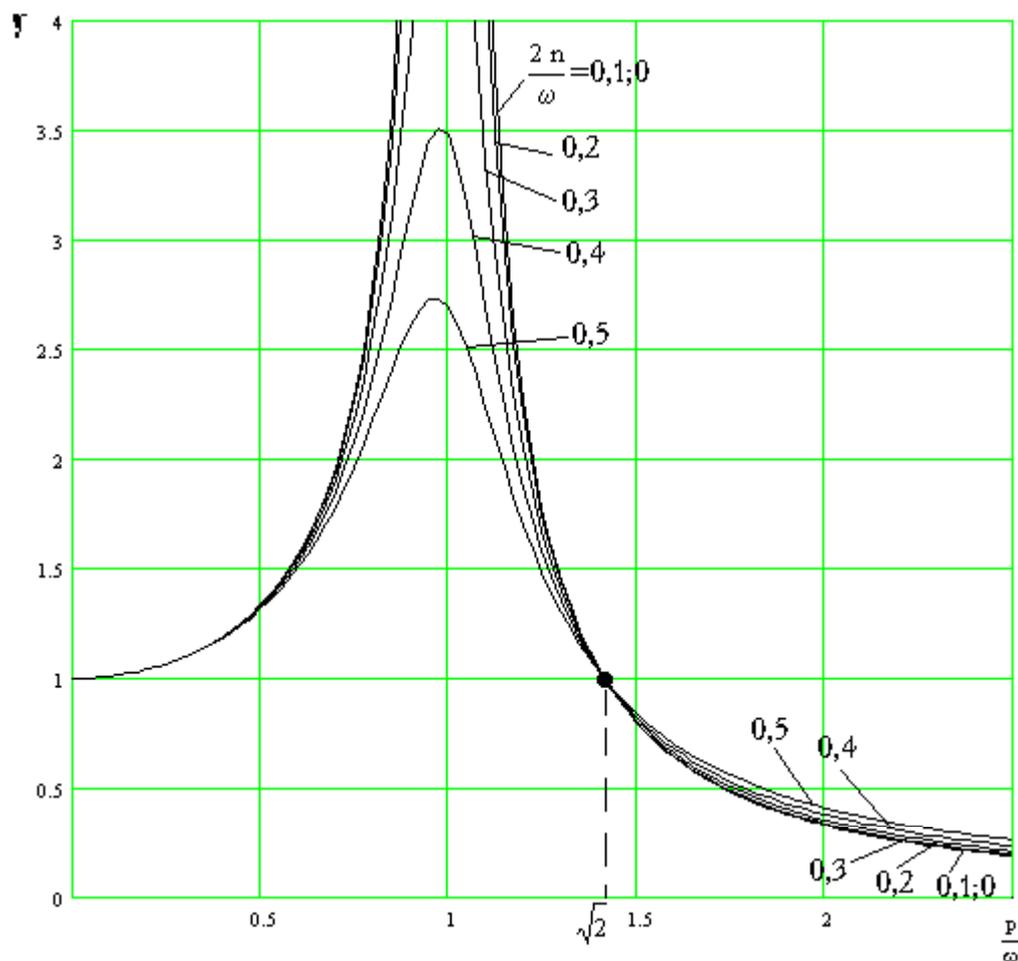


Рис.78

В случае, если система виброизоляции служит для защиты объекта m от передачи ему колебаний основания (рис.77,б), коэффициентом

виброизоляции называется отношение ускорения объекта к ускорению основания. Этот коэффициент также выражается формулой (352).

Действительно, уравнение движения объекта (рис.77,б) имеет вид

$$m\ddot{x} + K(\dot{x} - \dot{\xi}) + C(x - \xi) = 0, \quad (353)$$

где x - смещение объекта, ξ - смещение основания.

При гармоническом возбуждении смещение основания определяется формулой

$$\xi = a \cos pt,$$

а смещение объекта - $x = A \cos(pt - \varphi)$.

Подставляя эти значения в (353), получим

$$A = a \sqrt{\frac{C^2 + K^2 p^2}{(C - mp^2)^2 + K^2 p^2}}.$$

Коэффициент виброизоляции:

$$\gamma = \frac{\ddot{x}_{\max}}{\ddot{\xi}_{\max}} = \frac{A}{a} = \sqrt{\frac{C^2 + K^2 p^2}{(C - mp^2)^2 + K^2 p^2}}.$$

Это выражение полностью совпадает с (352), следовательно, график на рис.78 относится в равной мере к обоим случаям виброизоляции.

Очевидно, что система виброизоляции эффективна только в том случае, когда отношение p/ω велико, т.е. если собственная частота системы мала по сравнению с частотой возмущения. При $\omega > p/\sqrt{2}$ упругая подвеска приносит не пользу, а вред, так как коэффициент виброизоляции γ оказывается большим единицы. Демпфирование ухудшает эффективность виброизоляции в области высоких частот, но снижает резонансные пики.

Незначительное демпфирование полезно, так как позволяет сохранить продолжительность переходных процессов и ограничить амплитуды при пуске и остановке системы.

Для обеспечения низкой собственной частоты колебаний изолируемого объекта необходимо сделать систему виброизоляции достаточно податливой. Однако при этом возникает опасность излишней подвижности объекта при действии медленно изменяющихся нагрузок. Например, приборы самолетного оборудования, система изоляции которых рассчитана на гашение вибраций, передаваемых от двигателя, могут получать недопустимо большие перемещения при перегрузках, связанных с маневрами самолета. Для ограничения возможных перемещений в этом случае устанавливают упоры (рис.79,а). При наличии упоров система амортизации становится нелинейной (рис.79,б).

В такой нелинейной системе возможны режимы движения с ударами об ограничители, что недопустимо. Для их исключения система виброизоляции должна быть рассчитана на основе нелинейной теории.

Выведем формулу для определения наименьшего допустимого расстояния до упоров в случае, если упоры являются весьма жесткими, располагаются симметрично, а удар о них определяется коэффициентом восстановления скорости α . Другие виды демпфирования при этом не учитываются.

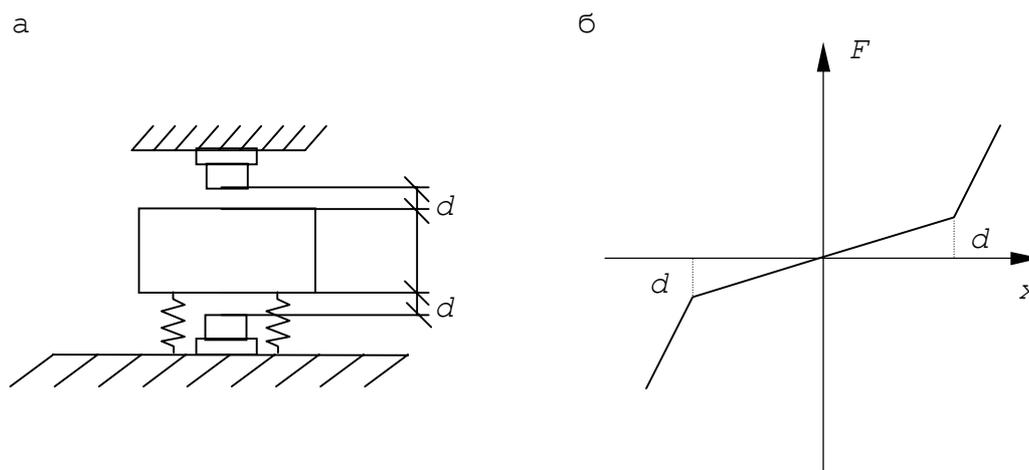


Рис.79

Рассмотрим режим движения, при котором за один период возмущения имеют место удары о верхнюю и нижнюю опоры. Уравнение движения при таком кинематическом возбуждении имеет вид

$$m\ddot{x}_1 + Cx_1 = -mp^2a \cos(pt + \varphi), \quad (354)$$

где $x_1 = x - \xi$ - смещение объекта относительно вибрирующего основания; x и $\xi = a \cos(pt + \varphi)$ - абсолютные смещения объекта и основания.

Общее решение уравнения (354) для периода движения объекта между упорами таково:

$$x_1 = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{a}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}} \cos(pt + \varphi). \quad (355)$$

Совместив начало отсчета времени с моментом отскока объекта от нижнего упора (что всегда можно сделать, выбрав надлежащим образом фазовый угол φ), имеем

$$\text{при } t = 0 : x_1 = -d;$$

$$\text{при } t = \pi/p : x_1 = d.$$

Кроме того, следует учесть условие, связывающее скорость удара об ограничитель со скоростью отскока от него:

$$(\dot{x}_1)_{t=0} = \alpha (\dot{x}_1)_{t=\frac{\pi}{p}}.$$

Три записанных условия позволяют определить постоянные C_1, C_2, φ , входящие в решение (355). Эти условия приводят к равенствам:

$$\left\{ \begin{array}{l} -d = C_1 + \frac{a}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}} \cos \varphi; \\ d = C_1 \cos \lambda + C_2 \sin \lambda - \frac{a}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}} \cos \varphi; \\ C_2 \omega - \frac{a}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}} p \sin \varphi = \alpha \left(-C_1 \omega \sin \lambda + C_2 \omega \cos \lambda + \frac{ap}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}} \sin \varphi \right), \end{array} \right.$$

где

$$\lambda = \frac{\pi \omega}{p}.$$

Из первых двух уравнений находим

$$C_1 = -d - \frac{a}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}} \cos \varphi; C_2 = -C_1 \operatorname{ctg} \frac{\lambda}{2}.$$

Подстановка этих значений в третье уравнение приводит к соотношению

$$d = \frac{a}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}} \left(\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \cdot \frac{p}{\omega} \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} \sin \varphi - \cos \varphi \right). \quad (356)$$

Очевидно, что стационарный режим движения с ударами об упоры возможен, если можно подобрать такое значение фазового угла φ , чтобы выполнялось равенство (356). И наоборот, удары об упоры невозможны, если зазор d больше, чем максимальное значение правой части равенства (356).

Таким образом, достаточное условие отсутствия ударов об упоры имеет вид

$$d > d_0,$$

$$d_0 = \frac{a}{\left|1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right|} \sqrt{1 + \left(\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}\right)^2 \frac{p^2}{\omega^2} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi\omega}{2p}}. \quad (357)$$

Из (357) следует, что для предупреждения ударов зазор должен быть существенно больше, чем стационарная амплитуда колебаний, рассчитанная по линейной теории:

$$d > \frac{a}{\left|1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right|}.$$

Величина коэффициента восстановления α значительно влияет на размеры необходимого зазора, поэтому в конструкциях упоров обычно используют материалы с большим поглощением энергии.

Одним из методов снижения частоты собственных колебаний системы виброизоляции без уменьшения ее жесткости является искусственное увеличение массы объекта.

Полученные выше соотношения для системы с одной степенью свободы справедливы для более сложных систем. Так, для линейно-упругой системы можно ввести главные координаты, и тогда движение по каждой из координат будет определяться самостоятельным уравнением. Наряду с системами, в которых защита от вибраций достигается с помощью пассивных элементов, в ответственных конструкциях используют также системы активной виброзащиты. В этих системах вибрации подавляются за счет энергии постороннего источника, управляемого системой автоматического регулирования.

10.2. Автоматическая балансировка вращающихся валов

При вращении несбалансированного вала всегда наблюдаются более или менее интенсивные поперечные колебания. Амплитуды колебаний зависят от угловой скорости вращения и при определенных для данного вала критических значениях скорости возрастают столь значительно, что нарушают нормальные условия эксплуатации и могут вызвать поломку вала. При этом критическое состояние нельзя устранить даже самой тщательной балансировкой, поэтому необходимо добиваться, чтобы эксплуатационные угловые скорости не совпадали с критическими.

Рассмотрим вал, на котором с эксцентриситетом e насажен диск массой m . Чтобы исключить влияние веса и рассмотреть явление в наиболее чистом виде, будем считать, что ось вала расположена вертикально (рис.80,а). Вал имеет круглое сечение и вращается в подшипниках; диск расположен посередине между опорами.

При вращении вала с угловой скоростью ω центр тяжести диска будет двигаться по окружности и возникнет центробежная сила. Обозначим прогиб вала, вызываемый этой силой, через r , тогда результирующий эксцентриситет равен $r+e$, а центробежная сила - $m\omega^2(e+r)$. Чтобы определить прогиб r , нужно найти отношение центробежной силы к изгибной жесткости вала c :

$$r = \frac{m\omega^2(e+r)}{c},$$

или

$$r = \frac{m\omega^2 e}{c - m\omega^2}, \quad (358)$$

т.е. прогиб вала пропорционален начальному эксцентриситету.

Из (358) следует, что критическое состояние наступает при вполне определенном значении угловой скорости, зависящем от параметров системы:

$$p_{кр} = \sqrt{\frac{c}{m}}. \quad (359)$$

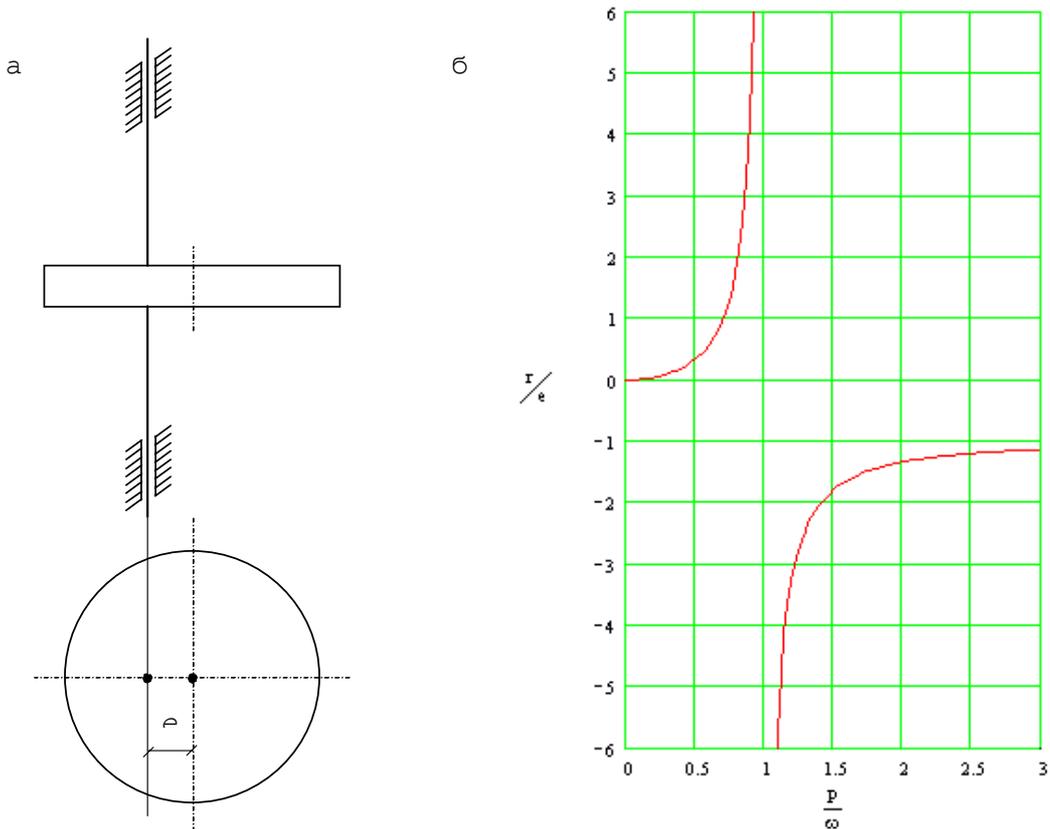


Рис.80

Величину $p_{кр}$ называют *критической скоростью вращения*; она совпадает с собственной частотой ω невращающейся системы вал-диск и тем больше, чем жестче вал и легче диск.

Из (359) следует выражение для относительного прогиба вала

$$\frac{r}{e} = \frac{1}{\frac{p_{кр}^2}{p} - 1}. \quad (360)$$

Кривая зависимости $r/e = f(p/\omega)$ приведена на рис.80,б. Анализ показывает, что при медленном вращении прогибы r малы и возрастают с ростом угловой скорости; при этом центр тяжести диска S расположен дальше от центра вращения O , чем центр сечения вала W (рис.81,а). Если $p = p_{кр}$, то прогиб равен бесконечности и наступает критическое состояние.

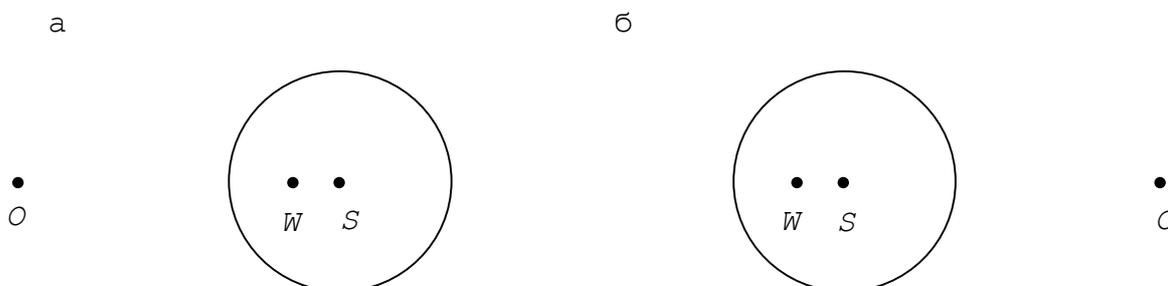


Рис.81

В закритической области, когда $p > p_{кр}$, прогибы вновь оказываются конечными, но имеют знак, противоположный начальному эксцентриситету. На рис.81,б показано соответствующее этому случаю взаимное расположение центров S, O и W . При быстром вращении, когда $p > p_{кр}$, центр тяжести диска S оказывается ближе к центру вращения O , чем центр вала W . Чем больше угловая скорость, тем ближе располагается центр тяжести диска S к центру вращения O , а при $p \rightarrow \infty$ центр тяжести диска неограниченно приближается к оси вращения. Таким образом, при весьма больших угловых скоростях происходит самоцентрирование диска. Поэтому, делая вал весьма гибким, т.е. добиваясь малых значений $p_{кр}$, можно получить хорошую сбалансированность системы. Это используется при проектировании валов быстроходных турбин, где гибкие валы оказываются рациональнее жестких.

Ранее критическое состояние было определено как состояние неограниченного нарастания прогиба вала, если диск имеет начальный эксцентриситет. Возможна также другая трактовка критического состояния. Из (358) видно, что если $e = 0$ и одновременно $c = mp^2$, то прогиб r

оказывается неопределенным. Это означает, что при $p = p_{кр}$ полностью сбалансированный вал теряет устойчивость прямолинейной формы. Если эту форму нарушить, то вал не стремится ее восстановить, так как упругая реакция cg точно уравновешивается возникающей при отклонении r центробежной силой $mr_{кр}^2 g$.

При всяком фиксированном значении угловой скорости (кроме $p = p_{кр}$) вращение сопровождается определенной и неизменной во времени деформацией вала. Любое волокно в процессе движения остается одинаково растянутым (или сжатым) независимо от времени.

Критическое состояние обычно считают недопустимым в эксплуатации, и вблизи $p_{кр}$ выделяют запретную зону опасных значений угловых скоростей.

Для устранения изгиба, возникающего при вращении неуравновешенного вала, иногда применяют специальные устройства, обеспечивающие автоматическую балансировку. Такая балансировка особенно необходима, когда в условиях эксплуатации возможно существенное изменение несбалансированности вала или ротора. Примером могут служить некоторые типы центрифуг, при загрузке которых возможно значительное нарушение симметрии распределения масс относительно оси вращения.

Автоматическая балансировка способствует сохранению прямолинейной формы вала и этим отличается от самоцентрирования диска при высоких скоростях вращения, когда происходит центрирование массы диска при соответственно изогнутом вале.

Один из вариантов автоматического балансировщика состоит в том, что схема вал-диск усложняется двумя маятниками, которые могут свободно вращаться на валу. Ограничимся рассмотрением стационарных режимов вращения и для упрощения будем пренебрегать силами веса и неупругими сопротивлениями.

Пусть O - точка, лежащая на прямой, проходящей через центры подшипников; W - центр сечения вала; S - центр тяжести диска; M_1, M_2 - центры масс маятников; $e_1 = \overline{WM_1} = \overline{WM_2}$ - длина маятников; $e = \overline{WS}$ - эксцентриситет (рис.82).

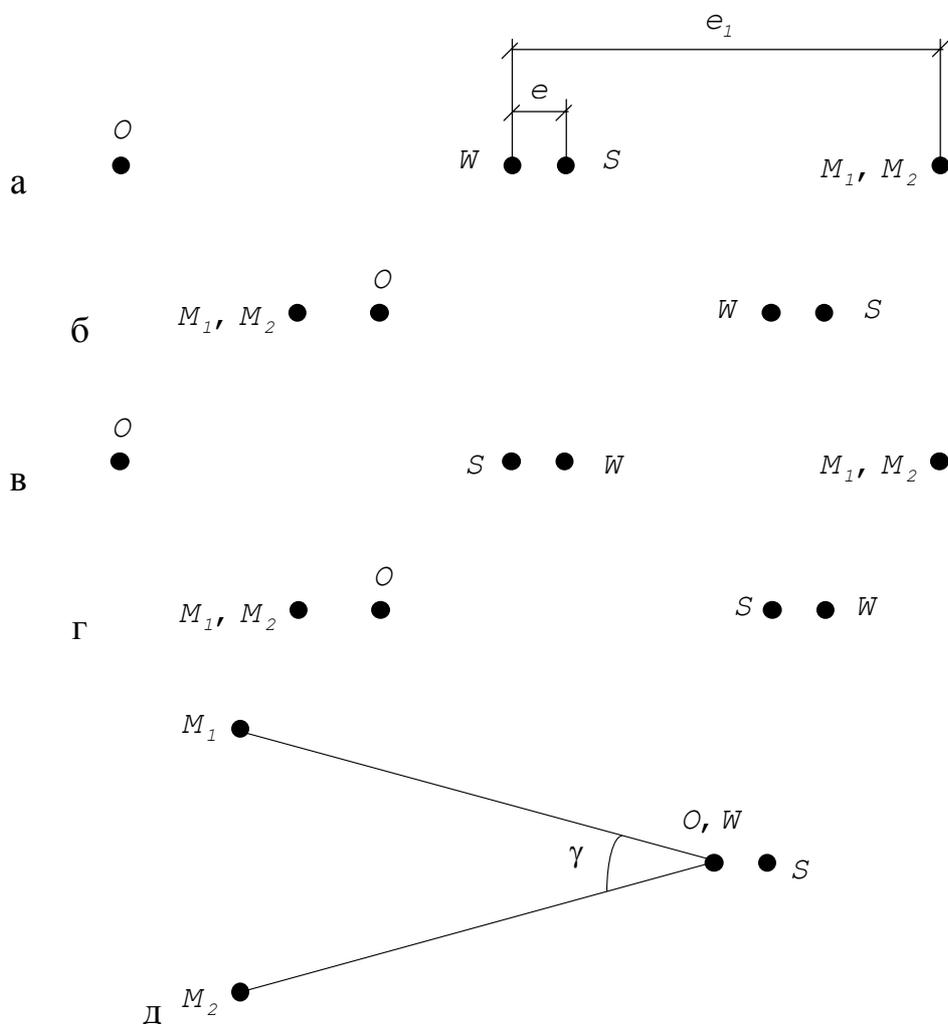


Рис.82

При отсутствии маятников возможны две схемы взаимного расположения точек O, W и S (рис.82). В каждой схеме центробежная сила и сила упругости вала действуют по одной прямой, поэтому, добавляя маятники, можно предположить, что в любой из этих схем оси обоих маятников имеют направление той же прямой.

Это приводит к четырем вариантам расположения характерных точек. Варианты а и б (рис.82) соответствуют схеме, данной на рис.81,а, когда центр тяжести диска S лежит дальше от оси вращения, чем центр сечения вала W ; эти варианты различаются между собой относительным положением точек M_1 и M_2 .

Варианты в и г соответствуют схеме, данной на рис.82,б, когда центр тяжести диска S лежит ближе к оси вращения, чем центр сечения вала W .

Эти четыре варианта исчерпывают все возможные принципиально различные случаи взаимного расположения точек O, W, S, M_1, M_2 , если все они лежат на одной прямой. Но возможен еще пятый вариант (рис.82,д), соответствующий полной балансировке вала, когда центр сечения вала W совпадает с центром вращения системы O . В этом варианте силы упругости отсутствуют, так как вал не изогнут, а центробежная сила диска уравновешена центробежными силами маятников. При этом оси маятников образуют некоторый угол γ , соответствующий данному эксцентриситету диска.

Хотя равновесие возможно в каждом из перечисленных вариантов стационарного режима, но не все эти режимы будут устойчивыми. Теоретический анализ и эксперименты показывают, что при $p > p_{кр}$ устойчивостью обладает только пятый вариант. Поэтому в докритической области такие маятники служат автоматическими балансировщиками и удерживают ось вала от изгиба; если в процессе вращения эксцентриситет увеличивается, т.е. точка S на рис.82,д смещается вправо, то маятники сходятся ближе и угол γ уменьшается ровно настолько, насколько это необходимо для уравновешивания возросшей центробежной силы диска.

В докритической области, при $p < p_{кр}$, устойчивым оказывается режим а (рис.82), в котором маятники увеличивают прогиб вала и поэтому приносят только вред. Поэтому в реальных системах принимают меры по «выключению» маятников в докритической области.

В конструкциях стиральных машин маятниками служат кольца, заключенные в кожух. При $p < p_{кр}$ центробежные силы, действующие на кольца, малы, кольца лежат на дне кожуха, и балансировщик «выключен». При $p = p_{кр}$ центробежные силы оказываются достаточными, чтобы кольца «всплыли» и произошло включение балансировщика.

В некоторых конструкциях шлифовальных станков маятниками служат шары, заключенные в кожух.

10.3. Критические состояния ротора вертолета

Формулы, приведенные при рассмотрении вала с одним диском, нельзя использовать, если с вращающимся диском связаны массы, обладающие некоторой подвижностью по отношению к диску; в частности, в (359) для критической угловой скорости нельзя подставлять вместо m суммарную массу диска вместе с присоединенными массами.

К схемам этого типа относится, например, горизонтальный вертолетный ротор, состоящий из втулки и лопастей, которые связаны с втулкой вертикальными шарнирами. На рис.83 показан трехлопастный ротор, причем O - центр втулки, A, B, C - центры вертикальных шарниров. Предположим, что вертолет стоит на земле, а центр втулки o будем считать упруго закрепленным в горизонтальной плоскости; эта упругость создается всей конструкцией вертолета.

Схематизируем массовые свойства системы и будем считать, что лопасти полностью уравновешены, причем масса m_* каждой лопасти сосредоточена на расстоянии b от центра соответствующего вертикального шарнира. Допустим также, что втулка уравновешена не полностью и ее центр тяжести G находится на расстоянии e от центра втулки O и на биссектрисе угла BOC (рис.83,а).

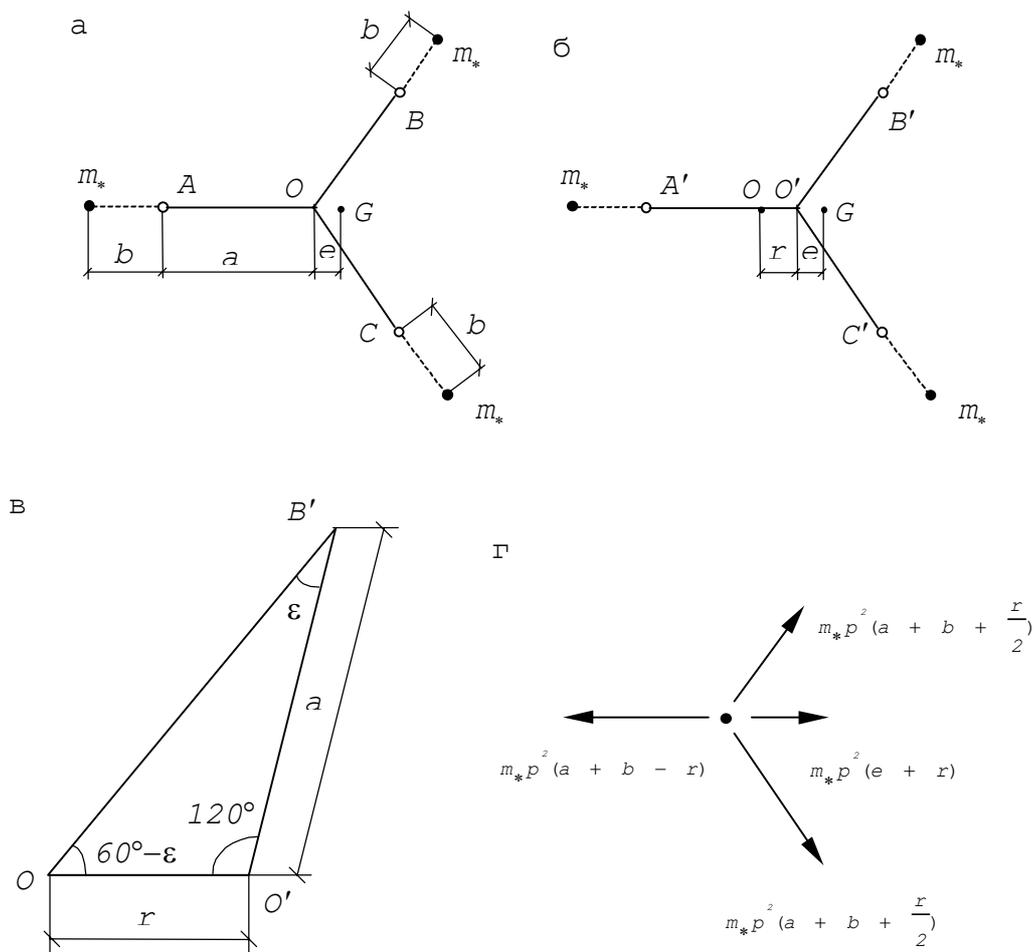


Рис.83

Вследствие неуравновешенности системы при вращении ротора возникает центробежная сила, которая вызовет дополнительное упругое смещение r центра втулки (рис.83,б), где O' - смещенное положение центра втулки; G - ее центр тяжести; A', B', C' - центры вертикальных шарниров. Этими буквами обозначено некоторое мгновенное положение ротора; с течением времени точки O', G, A', B', C' описывают окружности с центром в точке O , которая определяет ось вращения системы. Оси лопастей, подвешенных в шарнирах B' и C' , уже не будут располагаться на прямых O', B' и O', C' , так как центробежные силы лопастей должны проходить через центр вращения O . Угол, который ось каждой из этих лопастей составляет с прямой O', A' , будет несколько меньше 60° ; обозначим его как $60^\circ - \varepsilon$ (рис.83,в).

Из треугольника $OO'B'$ имеем:

$$\frac{r}{\sin \varepsilon} = \frac{a}{\sin(60^\circ - \varepsilon)} = \frac{\overline{OB'}}{\sin 120^\circ},$$

отсюда, вследствие малости ε :

$$\sin \varepsilon \cong \varepsilon \cong \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{r}{a}; \overline{OB'} \approx a + \frac{r}{2}.$$

Центробежные силы лопастей:

$$m_* p^2 (a + b - r) - \text{лопасть } A;$$

$$m_* p^2 \left(a + b + \frac{r}{2}\right) - \text{лопасть } B;$$

$$m_* p^2 \left(a + b + \frac{r}{2}\right) - \text{лопасть } C.$$

Схема центробежных сил показана на рис.83,г. Кроме центробежных сил лопастей, сюда включена центробежная сила втулки $mp^2(e + r)$, где m - масса втулки.

Сумма всех этих сил направлена вдоль прямой OO' и равна:

$$\mathfrak{Z} = 2m_* \left(a + b + \frac{r}{2}\right) \cos(60^\circ - \varepsilon) + mp^2(e + r) - m_* p^2(a + b - r).$$

Так как

$$\cos(60^\circ - \varepsilon) \cong \cos 60^\circ + \varepsilon \sin 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{r}{a},$$

то окончательно получим:

$$\mathfrak{Z} = mp^2(r + e) + 3m_* p^2 r \left(1 + \frac{b}{2a}\right). \quad (361)$$

Смещение r равно частному от деления силы \mathfrak{Z} на коэффициент жесткости C упругой системы. После подстановки в это отношение

выражения (361) получим простое уравнение для определения r , решение которого дает:

$$r = \frac{e}{\frac{C}{mp^2} - 1 - 3\frac{m_*}{m}\left(1 + \frac{b}{2a}\right)},$$

и тогда критическая скорость составляет:

$$p_{кр} = \sqrt{\frac{C}{m + 3m_*\left(1 + \frac{b}{2a}\right)}}. \quad (362)$$

Дополнительным слагаемым $b/2a$ выражено влияние подвижности лопастей относительно втулки; если рассматривать систему без вертикальных шарниров (жесткий ротор), то

$$p_{кр} = \sqrt{\frac{C}{m + 3m_*}},$$

что значительно больше, чем $p_{кр}^*$.

Формула (362) справедлива для любого числа лопастей $n \geq 3$ с заменой числа 3 на число n .

10.4. Колебания лопаток турбомашин

Колебания лопаток турбомашин возникают вследствие неравномерного по окружности потока рабочей среды, а также в связи с возмущениями, вносимыми в поток лопатками направляющего аппарата. Задачей проектировщика является расчет собственной частоты колебаний лопатки и выбор такой ее конструкции, которая позволяет исключить возможность резонанса.

Лопатка газовой турбины или компрессора представляет собой стержень переменного сечения, заделанный одним концом. Ось лопатки обычно является слабо изогнутой пространственной кривой, но при расчете частоты колебаний можно с достаточной точностью считать, что ось лопатки прямолинейна и перпендикулярна оси вращения ротора.

Трудности расчета частоты собственных колебаний лопаток связаны с необходимостью учитывать влияние центробежных сил и с тем, что лопатка представляет собой естественно закрученный стержень, главные оси различных поперечных сечений которого не параллельны друг другу.

Закрученная лопатка в процессе колебаний испытывает кривой изгиб. Установим соотношение между изгибающими моментами и кривизнами для этого случая. Поперечное сечение лопатки, расположенное на расстоянии r от оси вращения, отнесем к осям x, y , направленным соответственно параллельно оси вращения и по касательной к окружности (рис.84,а).

Главные оси сечения ξ и η составляют некоторый угол φ с осями x и y . Площадь сечения, его моменты инерции и угол φ являются функциями радиуса r или расстояния z данного сечения от корневого сечения лопатки. Положительные направления изгибающих моментов, приложенных к внутренней части лопатки, свяжем с направлениями x, y, ξ, η правилом правого винта.

$$\begin{cases} \chi_x = M_x^* \left(\frac{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}{E\mathfrak{Z}_\xi} \right) + M_y^* \left(\frac{1}{E\mathfrak{Z}_\xi} - \frac{1}{E\mathfrak{Z}_\eta} \right) \sin \varphi \cos \varphi; \\ \chi_y = M_x^* \left(\frac{1}{E\mathfrak{Z}_\xi} - \frac{1}{E\mathfrak{Z}_\eta} \right) \sin \varphi \cos \varphi + M_y^* \left(\frac{\sin^2 \varphi}{E\mathfrak{Z}_\xi} + \frac{\cos^2 \varphi}{E\mathfrak{Z}_\eta} \right). \end{cases} \quad (366)$$

В этих равенствах кривизны можно заменить их приближенными выражениями:

$$\chi_x = \frac{\partial^2 V^*}{\partial z^2}; \chi_y = -\frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2}, \quad (367)$$

где u^*, V^* - смещения центра тяжести лопатки в осевом и окружном направлениях.

На основе принципа Даламбера для составления уравнений движения рассмотрим динамическое равновесие элемента dz лопатки в плоскости, перпендикулярной оси вращения. На концах элемента возникают внутренние силы - продольная N , поперечная Q_y^* и изгибающий момент M_x^* (рис.84,б). Кроме того, к элементу приложена центробежная сила, имеющая вертикальную $\rho A r^2 g dz$ и горизонтальную $\rho A r^2 V^* dz$ проекции (рис.84,в), а также сила инерции в относительном движении, равная $-\rho A dz \frac{\partial^2 V^*}{\partial t^2}$.

Проектируя силы на вертикаль, получим:

$$\frac{dN}{dz} = -r p^2 \rho A. \quad (368)$$

Сумма проекций на горизонталь дает уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(N \frac{\partial V^*}{\partial z} \right) + p^2 \rho A V^* - \frac{\partial Q_y^*}{\partial z} - \rho A \frac{\partial^2 V^*}{\partial t^2} = 0. \quad (369)$$

И третье уравнение, сумма моментов, дает:

$$\frac{\partial M_x^*}{\partial z} = Q_y^*. \quad (370)$$

Уравнение (368) позволяет вычислить продольную силу в сечении:

$$N = p^2 \int_z^\ell \rho A r dz, \quad (371)$$

которую, следовательно, можно считать заданной. В формуле (371) ℓ - длина лопатки.

Уравнения движения элемента в плоскости xz (рис.85,а) имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(N \frac{\partial u^*}{\partial z} \right) + \frac{\partial Q_x^*}{\partial z} - \rho A \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} = 0;$$

$$\frac{\partial M_y^*}{\partial z} = Q_x^*.$$

Выражения для смещений и силовых факторов, соответствующие свободным колебаниям лопатки, представим в форме:

$$u^* = u \cos \omega t; V^* = V \cos \omega t;$$

$$M_x^* = M_x \cos \omega t; Q_x^* = Q_x \cos \omega t;$$

$$M_y^* = M_y \cos \omega t; Q_y^* = Q_y \cos \omega t.$$

Тогда получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, состоящую из уравнений динамического равновесия:

$$\begin{cases} \frac{dQ_y}{dz} = (p^2 + \omega^2) \rho A V + N \frac{d^2 V}{dz^2} - r p^2 \rho A \frac{dV}{dz}; \\ \frac{dQ_x}{dz} = -\omega^2 \rho A u - N \frac{d^2 u}{dz^2} + r p^2 \rho A \frac{du}{dz}; \\ \frac{dM_x}{dz} = Q_y; \\ \frac{dM_y}{dz} = Q_x \end{cases} \quad (372)$$

и уравнений упругости:

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dz^2} = -aM_x - bM_y; \\ \frac{d^2 V}{dz^2} = cM_x + aM_y, \end{cases}$$

где

$$a = \left(\frac{1}{E\mathfrak{I}_\xi} - \frac{1}{E\mathfrak{I}_\eta} \right) \sin \varphi \cos \varphi;$$

$$b = \frac{\sin^2 \varphi}{E\mathfrak{I}_\xi} + \frac{\cos^2 \varphi}{E\mathfrak{I}_\eta};$$

$$c = \frac{\cos^2 \varphi}{E\mathfrak{I}_\xi} + \frac{\sin^2 \varphi}{E\mathfrak{I}_\eta}.$$

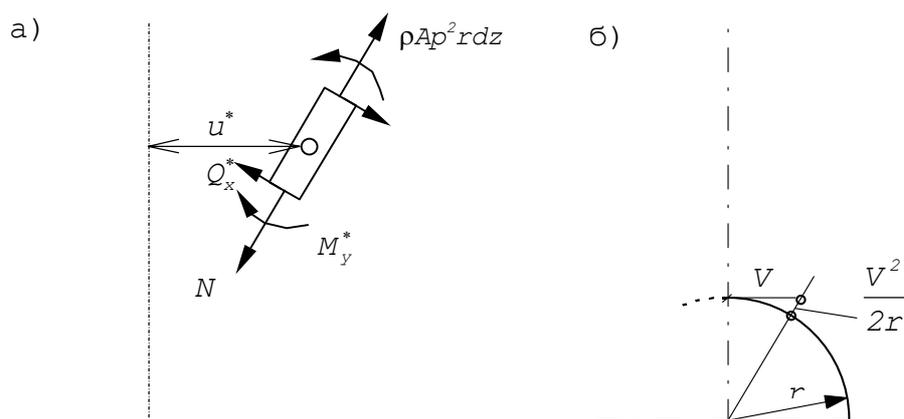


Рис.85

Полученные уравнения можно записать в матричной форме:

$$\frac{d}{dz} \vec{X} = \overline{A} \vec{X}, \quad (373)$$

где \vec{X} - матрица-столбец из восьми элементов:

$$x_1 = u; x_2 = V; x_3 = \frac{du}{dz}; x_4 = \frac{dV}{dz};$$

$$x_5 = M_x; x_6 = M_y; x_7 = Q_x; x_8 = Q_y,$$

\bar{A} - матрица переменных коэффициентов размером 8×8 , ненулевые элементы которой:

$$a_{13} = 1; a_{24} = 1; a_{35} = -a; a_{36} = -b;$$

$$a_{45} = C; a_{46} = a; a_{58} = 1; a_{67} = 1;$$

$$a_{71} = -\omega^2 \rho A; a_{72} = r\rho^2 A; a_{75} = Na; a_{76} = Nb;$$

$$a_{82} = (p^2 + \omega^2) \rho A; a_{84} = -r\rho^2 A; a_{85} = NC; a_{86} = Na.$$

Для определения частот собственных колебаний из уравнения (373) может быть использован метод начальных параметров. С этой целью конструируются четыре линейно независимых решения уравнения (373), удовлетворяющие граничным условиям в сечении $z = 0$. Например, для заделанного сечения такие решения при $z = 0$ могут иметь значения:

$$\bar{X}_1(0) = \{00001000\};$$

$$\bar{X}_2(0) = \{00000100\};$$

$$\bar{X}_3(0) = \{00000010\};$$

$$\bar{X}_4(0) = \{00000001\}.$$

Численно интегрируя уравнение (373) при этих начальных условиях и при фиксированном значении частоты ω , находят значения $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \bar{X}_4$ при $z = \ell$.

Общее решение \bar{X} в сечении $z = \ell$ представляет собой линейную комбинацию частных решений:

$$\bar{X}(\ell) = C_1 \bar{X}_1(\ell) + C_2 \bar{X}_2(\ell) + C_3 \bar{X}_3(\ell) + C_4 \bar{X}_4(\ell).$$

Граничные условия при $z = \ell$ ($M_x = M_y = 0; Q_x = Q_y = 0$) приводят к системе однородных уравнений относительно C_1, C_2, C_3, C_4 . Если при расчете принято истинное значение собственной частоты ω , то определитель этой системы равен нулю. Это условие позволяет, повторяя расчет при

различных значениях ω , определить собственные частоты колебаний. Для применяемых в практике профилей лопаток момент инерции поперечных сечений относительно одной из главных осей (η) существенно больше, чем момент инерции относительно другой оси (ξ). В этом наиболее важном с практической точки зрения случае расчет можно существенно упростить, пренебрегая изгибом относительно оси (η). При этом существенными становятся только изгибающий момент M_ξ и соответствующая кривизна χ_ξ .

Для решения упрощенных уравнений эффективным является метод последовательных приближений.

Можно также использовать метод Рэлея в варианте Граммеля. Зададимся изменением кривизны χ_ξ по длине лопатки, тогда интегрированием уравнений

$$\chi_x = \frac{d^2 V}{dz^2} = \chi_\xi \cos \varphi; \quad -\chi_y = \frac{d^2 u}{dz^2} = -\chi_\xi \sin \varphi$$

можно найти соответствующие смещения:

$$\begin{cases} V = \int_0^{z_2} \int_0^{z_1} \chi_\xi \cos \varphi dz_2 dz_1; \\ u = - \int_0^{z_2} \int_0^{z_1} \chi_\xi \sin \varphi dz_2 dz_1. \end{cases} \quad (374)$$

Потенциальная энергия деформации определяется по формуле:

$$\Pi_0 = \frac{1}{2} \int_0^\ell E \mathfrak{S}_\xi \chi_\xi^2 dz. \quad (375)$$

Обобщенная масса:

$$\tilde{M} = \int_0^\ell \rho A (u^2 + V^2) dz \quad (376)$$

Для учета центробежных сил нужно дополнительно вычислить их потенциал. Предположим, что в процессе колебаний точки оси лопатки

движутся по нормали к недеформированной оси. Тогда дополнительная деформация удлинения лопатки в связи с изгибом составляет:

$$\varepsilon' = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{du}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dV}{dz} \right)^2 \right].$$

Работа начального усилия N растяжения лопатки на этой деформации равна

$$\int_0^{\ell} N \varepsilon' dz.$$

При перемещении в плоскости вращения точки лопатки удаляются от оси вращения на расстояние $V^2/(2r)$ (рис.85,б), что приводит к уменьшению потенциала массы лопатки в поле центробежных сил на величину

$$\int_0^{\ell} \rho A r p^2 \frac{V^2}{2r} dz.$$

Таким образом, общее увеличение энергии составляет:

$$\pi_p = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} N \left[\left(\frac{du}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dV}{dz} \right)^2 \right] dz - \frac{p^2}{2} \int_0^{\ell} \rho A V^2 dz.$$

Так как продольная сила в лопатке пропорциональна p^2 , то окончательно получим:

$$\pi_p = \frac{p^2}{2} \left\{ \int_0^{\ell} N_1 \left[\left(\frac{du}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dV}{dz} \right)^2 \right] dz - \int_0^{\ell} \rho A V^2 dz \right\},$$

где $N_1 = \int_z^{\ell} \rho A r dz$ - усилие в лопатке при $p = 1$.

После определения π_0, \tilde{M} и π_p частота собственных колебаний лопатки вычисляется по формуле Рэлея:

$$\omega^2 = \frac{2(\pi_0 + \pi_p)}{\tilde{M}}.$$

10.5. Понятие о динамическом гасителе колебаний

В динамическом гасителе для гашения колебаний используется явление антирезонанса.

Рассмотрим простейшую систему с одной степенью свободы, совершающую вынужденные гармонические колебания с частотой p . Если дополнительно присоединить к системе гаситель, состоящий из диска с моментом инерции \mathfrak{J}_d и вала жесткостью C_d (рис.86), причем, настроить гаситель так, чтобы его собственная частота при закреплённом диске \mathfrak{J} равнялась p :

$$p = \sqrt{\frac{C_d}{\mathfrak{J}_d}},$$

то частота p станет для получившейся двухмассовой системы антирезонансной и движение основного диска прекратится.

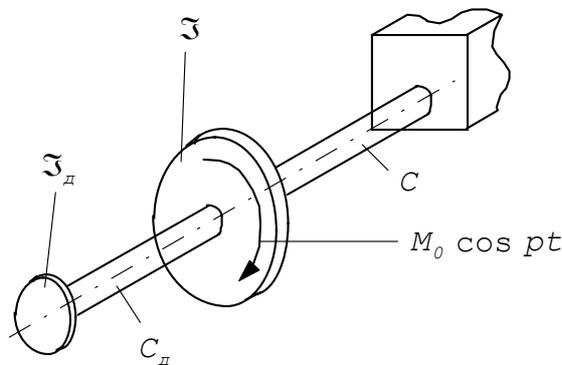


Рис.86.

Амплитуда A_d колебаний диска гасителя может быть найдена из условия, что крутящий момент на валу гасителя уравновешивает возмущающий момент M_0 :

$$A_d = \frac{M_0}{C_d}.$$

Проследим поведение системы с динамическим гасителем при изменении частоты возбуждения p . Если гаситель отклонить, то амплитуда A колебаний основной системы будет определяться по формуле:

$$A = \frac{A_0}{1 - \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2},$$

где

$$A_0 = \frac{M_0}{C}; \omega_0 = \sqrt{\frac{C}{\mathfrak{I}}}.$$

Уравнения движения системы при включенном гасителе:

$$\begin{cases} \mathfrak{I}\ddot{x}_1 + -x_1 + C_d(x_1 - x_2) = M_0 \cos pt; \\ \mathfrak{I}_d\ddot{x}_2 - C_d(x_1 - x_2) = 0. \end{cases} \quad (377)$$

Углы поворотов основного диска и гасителя x_1 и x_2 зададим в форме:

$$\begin{cases} x_1 = A \cos pt; \\ x_2 = A_g \cos pt. \end{cases}$$

Углы поворотов основного диска и гасителя x_1 и x_2 и их вторые производные в (377) и решая полученную систему уравнений, получим:

$$\begin{cases} -A\mathfrak{I}p^2 + Ac + C_d(A - A_d) = M_0; \\ -A_d\mathfrak{I}_dp^2 - C_d(A - A_d) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_d = \frac{M_0 C_d}{(C + C_d - \mathfrak{I}p^2)(C_d - \mathfrak{I}_dp^2)}; \\ A = \frac{M_0(C_d - \mathfrak{I}_dp^2)}{(C + C_d - \mathfrak{I}p^2)(C_d - \mathfrak{I}_dp^2)}. \end{cases} \quad (378)$$

При нулевой амплитуде основного диска, т.е. при отсутствии колебаний:

$$A = 0 \Rightarrow M_0(C_d - \mathfrak{Z}_d p^2) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{\mathfrak{Z}_d}{C_d} p^2 = 0,$$

или

$$1 - \left(\frac{p}{\omega_d} \right)^2 = 0.$$

Таким образом, благодаря установке гасителя устраняются колебания основной системы при частоте $p = \omega_d$, но сохраняются резонансные колебания при $p = \omega_1$ и $p = \omega_2$, т.е. динамический гаситель колебаний эффективен только при постоянной частоте возбуждения.

Устранить резонансные колебания при частотах ω_1 и ω_2 оказывается возможным, если ввести в конструкцию динамического гасителя трение.

В двигателях внутреннего сгорания используются также динамические гасители, частота настройки которых меняется автоматически с изменением частоты возбуждения. Принцип работы этих гасителей основан на том, что собственная частота маятника в поле центробежных сил пропорциональна скорости вращения. Поэтому, подвесив маятник к диску, закрепленному на коленчатом валу двигателя и выбрав соответствующим образом радиус качения, можно добиться того, чтобы собственная частота колебаний маятника была в 2,3,...,n раз больше, чем угловая скорость диска. Такой виброгаситель устраняет крутильные колебания, вызываемые второй, третьей, ..., n-ной гармониками возмущающих моментов.

Литература

1. Бабаков И.М. Теория колебаний. 2-е изд. -М.,1965.
2. Безухов Н.И., Лужин О.В., Колкунов Н.В. Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах. 3-е изд., -М.: «Высшая школа», 1987.
3. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. -М.: «Высшая школа», 1980.
4. Бицено К., Граммель Р. Техническая динамика. Пер. С нем. Т.2 -М.: ГТТИ, 1952.
5. Клейн Г.К., Рекач В.Г., Розенблат Г.И. руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики. -М.: Высшая школа, 1972.
6. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории упругих колебаний. 2-е изд. -М.: Машиностроение, 1967.
7. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. 2-е изд. -М.: Наука, 1980.
8. Прочность, устойчивость, колебания. Спр. Руководство в 3-х томах. Т.3 - М., 1968.
9. Строительная механика стержневых систем и оболочек. Под ред. Бутенко Ю.И. -Киев, «Выща школа», 1980.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1	3
1.1. Способы образования механических моделей с конечным числом степеней свободы.....	3
1.2. Классификация сил, действующих при колебаниях	5
1.3. Классификация колебаний	8
1.4. Методы получения дифференциальных уравнений движения	12
Глава 2. Свободные колебания	14
2.1. Общие сведения о свободных колебаниях	14
2.2. Свободные колебания системы с одной степенью свободы без трения	20
2.2.1. Примеры расчётов.....	24
2.3. Свободные колебания системы с одной степенью свободы при наличии трения.....	28
2.3.1 Вязкое трение	28
2.3.2. Сухое трение.....	33
2.3.3.Позиционное трение	37
2.4.Свободные колебания систем с конечным числом степеней свободы (общий случай).....	40
2.4.1. Решение уравнений движения в общем случае	45
2.4.2. Решение уравнений движения для простейшей системы	47
2.4.3. Ортогональность собственных форм колебаний	50
2.4.4. Кратные и нулевые корни частотного уравнения.....	51
2.4.5. Влияние трения на свободные колебания системы с n степенями свободы	56
2.4.6. Свободные колебания стержневых систем	58
2.4.7. Крутильные колебания валов.....	61
2.4.8. Примеры расчётов.....	68
2.4.9. Свободные колебания автомобиля.....	81

Глава 3. Вынужденные колебания.....	89
3.1. Системы с одной степенью свободы при отсутствии трения.....	89
3.1.1. Силовое возбуждение колебаний	89
3.1.2. Кинематическое возбуждение колебаний	91
3.1.3. Общее решение стандартного уравнения.....	92
3.1.4. Действие непериодической возмущающей силы	95
3.1.5. Действие гармонической силы	101
3.1.6. Действие двух гармонических сил с близкими частотами биения..	105
3.1.7. Действие произвольной периодической возмущающей силы (способ разложения на гармонические составляющие).....	108
3.1.8. Действие периодических импульсов	110
3.2. Системы с одной степенью свободы при действии сил неупругого сопротивления.....	112
3.2.1. Влияние вязкого трения.....	112
3.2.2. Влияние произвольно заданных сил неупругого сопротивления....	117
3.3. Примеры расчётов	120
3.4. Системы с конечным числом степеней свободы	127
3.5. Стержневые системы с конечным числом степеней свободы при гармоническом нагружении.....	134
3.6. Крутильные колебания валов.....	140
3.7. Примеры расчетов	147
Глава 4. Параметрические колебания	156
4.1. Основное уравнение (уравнение Матье)	156
4.2. Случаи периодического изменения жесткости	161
4.3. Случаи периодического изменения параметрических нагрузок.....	163
4.4. Маятник с колеблющейся точкой подвеса	166
Глава 5. Автоколебания	169
5.1. Общие положения и примеры автоколебательных систем.....	169
5.2. Фрикционные автоколебания	172

5.3. Флаттер крыла в воздушном потоке	177
Глава 6. Свободные колебания систем с распределёнными параметрами ..	184
6.1. Продольные колебания стержней.....	184
6.2. Крутильные колебания валов.....	191
6.3. Изгибные колебания балок.....	195
6.3.1. Основное уравнение.....	195
6.3.2. Граничные условия	198
6.3.3. Частотное уравнение и собственные формы.....	199
6.3.4. Определение движения по начальным условиям	201
6.3.5. Влияние постоянной продольной силы	203
6.3.6. Влияние цепных усилий.....	205
6.4. Влияние вязкого трения.....	207
6.5. Колебания стержней переменного сечения.....	211
6.6. Колебания круговых колец	212
6.6.1. Колебания в плоскости кольца	212
6.6.2. Колебания, перпендикулярные плоскости кольца	216
Глава 7. Приближённые методы расчета колебаний.....	220
7.1. Теорема и метод Рэлея.....	221
7.2. Метод Ритца.....	223
7.3. Метод Граммеля	226
7.4. Формула Донкерлея	228
7.5. Метод последовательных приближений.....	230
Глава 8. Вынужденные колебания систем с распределёнными параметрами.....	234
8.1. Продольные колебания стержней.....	234
8.2. Изгибные колебания балок.....	240
Глава 9. Колебания пластин и оболочек.....	244
9.1. Уравнение движения пластины постоянной толщины	244
9.2. Прямоугольная пластина постоянной толщины.....	247

9.2.1. Пластина, шарнирно опертая по противоположащим сторонам.....	247
9.2.2. Асимптотический метод расчета пластин	249
9.3. Круглая пластина постоянной толщины.....	253
9.3.1. Определение форм и частот колебаний	253
9.3.2. Бегущие волны в круглых пластинках.....	257
9.4. Применение метода Рэлея-Ритца к определению частот собственных колебаний пластинок	258
9.5. Колебания оболочек.....	262
9.5.1. Теория колебаний оболочек без растяжения срединной поверхности	264
9.5.2. Уравнения движения оболочек.....	270
Глава 10. Технические приложения теории колебаний	273
10.1. Основы расчета виброизоляции	273
10.2. Автоматическая балансировка вращающихся валов.....	281
10.3. Критические состояния ротора вертолета	287
10.4. Колебания лопаток турбомашин	290
10.5. Понятие о динамическом гасителе колебаний.....	298
Литература	302