

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

С.М. СТАРИКОВСКАЯ

**ФИЗИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ.
СЕМИНАРСКИЕ ЗАНЯТИЯ**

**1.2. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ. ИЗМЕРЕНИЕ
ИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ**

Учебно-методическое пособие.

Москва 2003

С.М.Стариковская. Физические методы исследования. Семинарские занятия. 1.2. Электрические цепи. Измерение импульсных сигналов: Учебно-методическое пособие. – М: изд-е МФТИ, 2003. - 46 с.

УДК 53.082

Данное учебно-методическое пособие является вторым из цикла пяти пособий для семинарских занятий в первом семестре изучения курса “Физические методы исследования”. В цикле рассмотрены наиболее типичные методы и принципы измерений, используемые в физических лабораториях, объяснены теоретические основы методов измерения, применяемых при изучении физико-химических систем. Первое пособие рассматривает принципы учета погрешностей измерений, второе – измерение электрических сигналов, третье – принципы измерения температуры, четвертое – давлений, и, наконец, пятое – измерение световых потоков, источники и приемники излучения. Каждая тема сопровождается разбором нескольких наиболее типичных задач и численных оценок. Цикл пособий предназначен для курса семинаров по физическим методам исследования, читаемому студентам 3 курса факультета молекулярной и биологической физики в 6 семестре.

© Московский физико-технический институт
(государственный университет), 2003

Оглавление

1. Электрические цепи	4
1.1. Интегрирование и дифференцирование сигналов	4
1.2. Импеданс. Обобщенный закон Ома. Частотные фильтры	8
1.3. Разложение сигнала в ряд Фурье. Импульс с крутым фронтом	11
2. Линии с распределенными параметрами. Распространение сигнала в длинной линии	14
2.1. Волновое сопротивление и аналог закона Ома для длинных линий	20
2.1.1. Волновое сопротивление длинной линии	20
2.1.2. Падающая и отраженная волны	24
2.1.3. Аналог закона Ома для длинных линий	27
2.2. Распространение сигналов вдоль линии.	31
2.2.1. Фазовая скорость. Линии без искажений	31
2.2.2. Коэффициент отражения. Согласование линий	33
2.2.3. Эквивалентные схемы цепей, содержащих длинные линии	36
2.3. Колебания в линии при подключении источника постоянного напряжения	38
2.4. Формирование импульсов наносекундной длительности при разрядке линии	41
3. Контрольные вопросы к теме “Электрические цепи. Распространение и генерация импульсных сигналов”	45

1. Электрические цепи

Данный семинар открывает цикл из трех семинаров, посвященных распространению и регистрации электрических сигналов. При измерении количественных характеристик процесса в большинстве встречающихся в жизни физических устройств используется преобразование различных типов сигналов в электрический сигнал. Это может быть измерение тока или напряжения в цепи, температуры, давления – по изменению определенных электрических характеристик цепи, излучения – при использовании различных типов оптико-электронных преобразователей и так далее. Следовательно, любой экспериментатор должен иметь минимальные навыки работы с электрическими цепями. В курсе общей физики достаточно подробно рассматриваются вопросы, связанные с электрическим и магнитным полями, процессами в электрических цепях и элементами электрических схем. Мы лишь кратко повторим некоторые общие положения, касающиеся электрических цепей. Не будем обсуждать нелинейные элементы цепей, оставив для рассмотрения лишь резисторы, конденсаторы и катушки индуктивности. Большую же часть времени мы посвятим особенностям распространения и регистрации очень быстрых электрических сигналов. Эта тема почти не затрагивается в курсе общей физики, между тем в реальном эксперименте с ней часто встречаются.

1.1. Интегрирование и дифференцирование сигналов

Рассмотрим цепь, изображенную на рисунке 1. Пусть в момент времени $t = 0$ мы замыкаем ключ. Найдем временное поведение напряжения на конденсаторе U . Согласно закону Ома,

$$U_0 = IR + U, \quad (1)$$

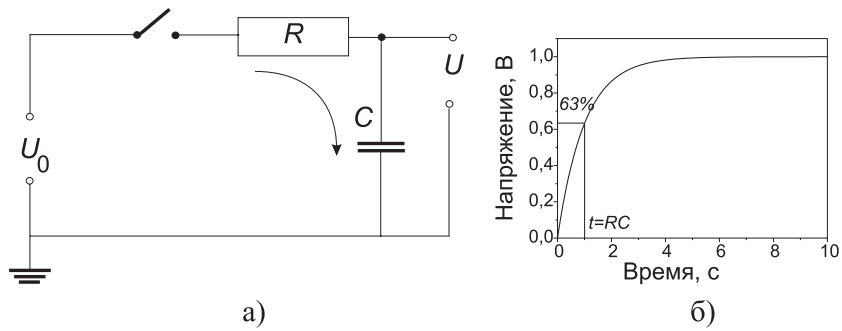


Рис. 1. Пример цепи, интегрирующей сигнал при $U \ll U_0$ (а), и поведения выходного напряжения U (б)в ней

$$q = CU, \quad I = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU}{dt}. \quad (2)$$

Тогда

$$U_0 = RC \frac{dU}{dt} + U, \quad (3)$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{RC}(U_0 - U), \quad (4)$$

$$\frac{d(U - U_0)}{dt} = -\frac{1}{RC}(U - U_0), \quad U - U_0 = Ae^{-\frac{t}{RC}}. \quad (5)$$

Постоянную интегрирования A найдем из условия $U = 0$ при $t = 0$:

$$A = -U_0, \quad U = U_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}}). \quad (6)$$

Действительно, при $t \rightarrow \infty$ получим $U \rightarrow U_0$.

Задача 1

Конденсатор емкостью 1 мкФ и сопротивлением 10 Ом подключены по схеме, изображенной на рис. 1. Определить, за какое время конденсатор зарядится на 99%. Сравнить это время с постоянной времени RC .

Решение

$$U = U_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}}). \quad (7)$$

При $U = 0.99U_0$ получим

$$(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = 0.99, \quad e^{-\frac{t}{RC}} = 1 - 0.99 = 0.01. \quad (8)$$

$$-\frac{t}{RC} = \ln 0.01 = -4.605. \quad (9)$$

Конденсатор зарядится за время

$$t \approx 5 RC = 5 \cdot 10^{-6} \cdot 10 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ с}. \quad (10)$$

Ответ. Разрядка (зарядка) конденсатора на 99% происходит за время, равное приблизительно 5-ти постоянным времени (этот результат называют еще “правилом пяти RC ”).

Пусть в рассмотренной схеме $U \ll U_0$. Тогда равенство (3) переписывается как

$$U_0 \approx RC \frac{dU}{dt}, \quad U(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t U_0(t) dt + \text{const}. \quad (11)$$

Фактически мы получили, что схема интегрирует входной сигнал по времени. Рассмотрим другую схему.

Задача 2

Конденсатор и сопротивление подключены по схеме, изображенной на рис. 2. Выполняется условие $dU/dt \ll dU_0/dt$ (к примеру, R и C достаточно малы). Определить временное поведение напряжения на резисторе $U(t)$ в зависимости от входного напряжения $U_0(t)$.

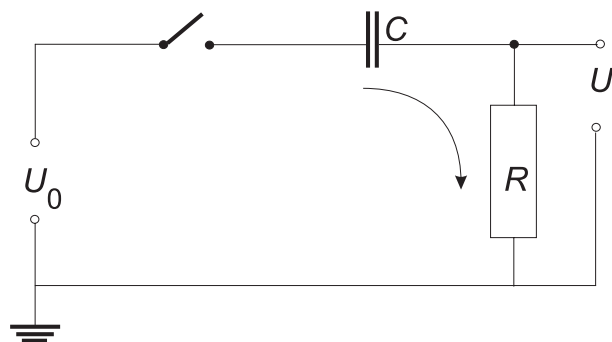


Рис. 2. Пример дифференцирующей цепи

Решение

Поскольку $q = C(U_0 - U)$, ток в цепи $I = dq/dt = C \cdot d(U_0 - U)/dt$, и, следовательно,

$$U = IR = RC \frac{d(U_0 - U)}{dt}. \quad (12)$$

Пренебрегая вторым членом в правой части, получим

$$U = RC \frac{dU_0}{dt}, \quad (13)$$

то есть выходное напряжение пропорционально скорости изменения входного сигнала.

Задача 3

При регистрации сигналов прямоугольной формы на осциллографе с входным сопротивлением 1 МОм экспериментатор обнаружил, что полка регистрируемого сигнала спадает с характерным временем 20 мкс. Какова может быть причина наблюдаемого явления? Диэлектрическая постоянная $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Решение

Предположим, что в цепи до входного сопротивления осциллографа существует дефект в контакте, дающий дифференцирующую цепь. Оценим емкость получившегося конден-

сатора и его типичные параметры. Так как $\tau = RC = 20$ мкс, емкость равна $C = \tau/R = (20 \cdot 10^{-6})/10^6 = 2 \cdot 10^{-11}$ Ф. Типичный диаметр центральной жилы сигнального осциллографического кабеля составляет 0.5 мм. Оценим необходимую толщину разрыва в кабеле, чтобы обеспечить соответствующую емкость. Емкость плоского воздушного конденсатора с площадью пластин S и расстоянием между ними d составляет $C = \varepsilon_0 \varepsilon S/d$. Тогда искомая толщина разрыва (для $\varepsilon = 1$)

$$d = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{C} = \frac{8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 3.14 \cdot 0.5^2 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-11}},$$

$$d = 3.5 \cdot 10^{-7} \text{ м} \approx 0.4 \text{ мкм.}$$

Такая толщина вполне реальна для оксидной пленки, которая может образоваться, скажем, в месте контакта центральной жилы кабеля с разъемом. Значение ε для оксидной пленки – величина порядка единицы ($\varepsilon = 3 - 5$). Таким образом, приходим к выводу, что причиной дифференцирования сигнала может быть плохой контакт в подводящей линии.

1.2. Импеданс. Обобщенный закон Ома. Частотные фильтры

Любая схема, содержащая конденсаторы и индуктивности, к примеру, делитель напряжения, обладает частотно зависимым коэффициентом преобразования сигнала. Как мы уже убедились, схемы, содержащие эти элементы, могут искажать входные сигналы (к примеру, прямоугольные колебания). Тем не менее и конденсаторы, и индуктивности являются *линейными* элементами. Это означает, что при подаче на вход схемы синусоидального сигнала с частотой f на выходе всегда будет получен также синусоидальный сигнал с той же частотой. Он может отличаться амплитудой, фазой, но форма – синусоидальная – и частота – исходная – останутся неизменными.

Закон Ома легко может быть обобщен на схемы, содержащие конденсаторы и индуктивности, так, чтобы он был спра-

ведлив в любом частотном диапазоне. Вспомним понятия импеданс и реактивное сопротивление, с которыми вы тоже уже знакомы из курса общей физики.

Любое комплексное число

$$z = x + jy \quad (14)$$

можно представить в показательной форме:

$$z = \rho e^{j\alpha}, \quad x = \rho \cos \alpha, \quad y = \rho \sin \alpha. \quad (15)$$

Модуль ρ и аргумент α комплексного числа можно выразить через x и y :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = y/x. \quad (16)$$

Пусть α изменяется со временем по закону $\alpha = \omega t + \varphi$. Тогда x и y будут представлять 2 гармонических колебания:

$$x = \rho \cos(\omega t + \varphi), \quad y = \rho \sin(\omega t + \varphi). \quad (17)$$

Оба этих колебания можно выразить при помощи одного комплексного выражения:

$$z = \rho \exp(j(\omega t + \varphi)) = \rho \exp(j\varphi) \exp(j\omega t). \quad (18)$$

Обычно заранее соблюдают условие: брать либо только вещественную, либо только мнимую часть комплексного выражения. Еще одно замечание: если частота ω одинакова для всех рассматриваемых колебаний, то множитель $e^{j\omega t}$ в промежуточных выражениях можно опускать. Фактически, задавая комплексную амплитуду колебания

$$A = \rho e^{j\varphi}, \quad (19)$$

мы определяем вектор, длина которого равна амплитуде колебаний, а угол поворота – начальной фазе.

Итак, пусть напряжение $U_0 \cos(\omega t + \varphi)$ задается комплексным выражением $U_0 e^{j\varphi}$. Действующее напряжение определяется соответственно как $\text{Re}(U_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t})$.

Принятый формализм позволяет легко определить реактивное сопротивление для емкости и индуктивности. Действительно, пусть $U(t) = \text{Re}(U_0 e^{j\omega t})$. Тогда

$$I = C \frac{dU}{dt} = -U_0 C \omega \sin(\omega t) = \text{Re} \left(\frac{U_0 e^{j\omega t}}{-j/\omega C} \right) = \text{Re} \left(\frac{U_0 e^{j\omega t}}{X_C} \right), \quad (20)$$

$$X_C = -j/\omega C. \quad (21)$$

Аналогичным образом можно получить

$$X_L = j\omega L. \quad (22)$$

Импеданс электрической схемы представляет собой сумму активного и реактивного сопротивлений:

$$Z = R + j(\omega L - 1/\omega C). \quad (23)$$

Давайте, пользуясь понятием импеданса, найдем зависимость выходного напряжения от входного в схеме, представленной на рис. 2.

Задача 4

Найти частотную зависимость выходного напряжения от значения входного напряжения U_0 .

Решение

Согласно закону Ома для комплексных величин,

$$I = \frac{U_0}{Z} = \frac{U_0}{R - j\omega C} = \frac{U_0[R + (j/\omega C)]}{R^2 + 1/\omega^2 C^2}. \quad (24)$$

Напряжение на резисторе равно

$$U = IR = \frac{U_0[R + (j/\omega C)]R}{R^2 + 1/\omega^2 C^2}. \quad (25)$$

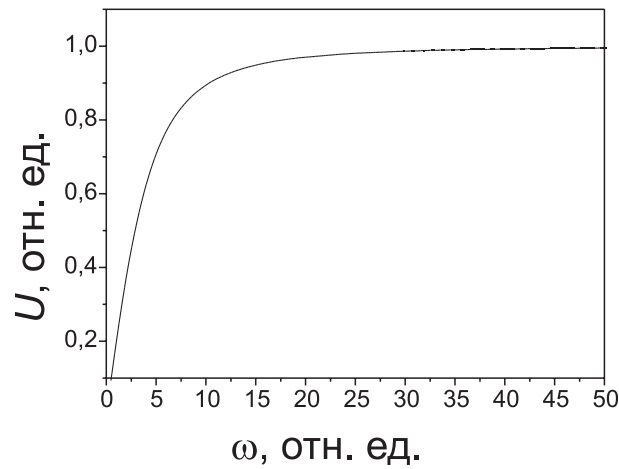


Рис. 3. Кривая пропускания фильтра высоких частот (зависимость выходного напряжения от частоты сигнала)

Отвлечемся от рассмотрения фазы и определим только амплитуду сигнала:

$$U = \sqrt{UU^*} = \frac{U_0 R}{\sqrt{R^2 + 1/\omega^2 C^2}}. \quad (26)$$

График полученной зависимости приведен на рис. 3. Данная схема представляет собой фильтр высоких частот: она пропускает высокие частоты и режет низкие. Поменяв в схеме резистор и конденсатор, получим фильтр низких частот.

1.3. Разложение сигнала в ряд Фурье. Импульс с крутым фронтом

Электрические сигналы далеко не всегда бывают синусоидальными. Чтобы проводить анализ распространения более сложных сигналов по электрической цепи, полезно пользоваться разложением сигнала в ряд Фурье. Функции, используемые в физике, обычно известны только на ограниченном интервале

$(0, T)$. Поэтому, как правило, внутри этого интервала функцию полагают равной нулю.

Вспомним принцип разложения функции в ряд Фурье. Любую функцию $f(x)$, заданную на интервале $[-\pi; \pi]$, можно представить в виде

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots \quad (27)$$

Если вспомнить свойства ортогональности тригонометрических функций

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = 0, \quad n \neq m, \quad (28)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \sin(nx) dx = 0, \quad (29)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(mx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(mx) dx = \pi \quad (30)$$

и, к примеру, умножив левую и правую часть равенства (27) на $\cos(mx)$, проинтегрировать их по dx на отрезке $[-\pi; \pi]$, то мы получим коэффициент a_m :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx = a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(mx) dx = \pi a_m, \quad (31)$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx, \quad (32)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \quad (33)$$

Для коэффициентов b_m получим

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx. \quad (34)$$

Аналогичным образом, введя новую переменную $x_1 = x \cdot (\pi/l)$, можно получить коэффициенты ряда Фурье для произвольного отрезка $[-l; l]$:

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx, \quad (35)$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx. \quad (36)$$

Из фурье-анализа трапециедального сигнала следует, что, если говорить о распространении коротких импульсных сигналов, мы должны рассматривать частоты вплоть до величин порядка $1/\tau$, где τ – длительность фронта сигнала. При этом верхняя граничная частота может оказаться настолько высокой, что традиционный подход к описанию электрической цепи становится неверным.

Задача 5

Разложить в ряд Фурье трапециедальный сигнал (рис. 4). Проанализировать предел высоких и низких частот при рассмотрении распространения импульсного сигнала по электрической цепи.

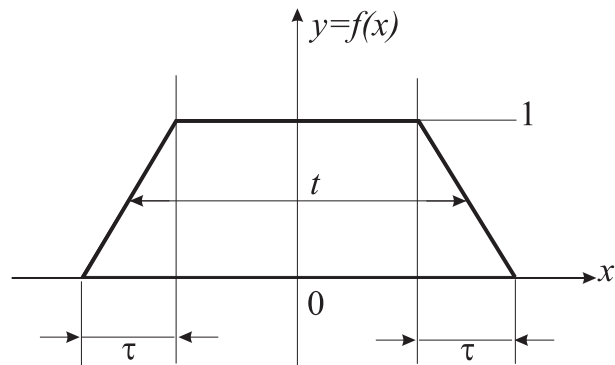


Рис. 4. Трапециевидальный электрический сигнал

2. Линии с распределенными параметрами. Распространение сигнала в длинной линии

В электротехнике нередки ситуации, когда электрическую цепь нельзя рассматривать традиционным образом, полагая, что емкость сосредоточена в одной точке цепи (конденсаторе), индуктивность – в другой (катушке) и т.д. Электрические линии, в которых емкость и индуктивность должны рассматриваться как величины, распределенные непрерывно, называют *линиями с распределенными параметрами*. При этом, очевидно, ток и напряжение непрерывно изменяются при переходе от одной точки линии к другой. Иногда подобные линии называют длинными линиями. Электрическую линию считают линией с распределенными параметрами, если выполняется два условия.

1. Длина линии существенно превышает длину волны питающего тока.
2. Расстояние между проводниками линии (поперечный размер) много меньше длины волны (условие квазистационарности).

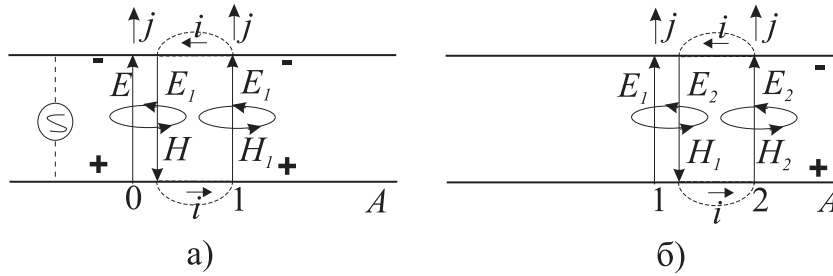


Рис. 5. Распространение электромагнитного сигнала вдоль двухпроводной линии

Представим, что подобные условия выполнены для двухпроводной линии, неограниченно простирающейся в обе стороны. Пусть источник переменного тока создает в какой-либо точке линии 0 электрическое поле E (рис. 5). Если экспериментатор находится в точке А, через некоторое время до него добежит сигнал, инициируемый в точке 0. Каким образом происходит перемещение сигнала вдоль проводов? Пусть в данный момент времени электрическое поле растет. Изменяющееся электрическое поле есть не что иное, как ток смещения: $j = \epsilon_0 \cdot (\partial E / \partial t)$. Следовательно, направление тока смещения совпадает с направлением поля E . Применяя правило правого буравчика, найдем направление магнитного поля. Изменяющееся магнитное поле, как известно, вызывает появление вихревого электрического поля. Поэтому в последующий момент времени возникнет вихревое поле E_1 . В точке 0 оно будет уничтожать поле E . Созданное полем E_1 магнитное поле H_1 будет уничтожать магнитное поле H . На горизонтальных участках в проводах линии будет возникать ток проводимости. Далее возрастающее магнитное поле H_1 вызовет появление вихревого электрического поля E_2 , которое, возрастая, приведет к появлению магнитного поля H_2 . Поля H_2 и H_1 взаимно уничтожат друг друга, и сигнал “передвинется” в соседнюю точку пространства и так далее. В конечном итоге наблюдатель в точке

А заметит появление электрического сигнала в точке наблюдения. Это время может быть вполне ощутимым. К примеру, для стандартного измерительного 50-омного кабеля импульс с наносекундным фронтом будет распространяться по нему так, что 20 см будут эквивалентны 1 нс. То есть, если на конце кабеля длиной 10 м генератор создал импульс с наносекундным фронтом, до другого конца кабеля этот импульс добежит за время $10 \text{ м} \cdot 5 \text{ нс/м} = 50 \text{ нс}$.

Решим несколько задач, чтобы понять, какую линию при каких условиях можно назвать длинной.

Задача 6

Пусть мы рассматриваем импульс длиной $t = 20 \text{ нс}$ и длительностью фронтов $\tau = 1 \text{ нс}$. Следует ли для него кабель длиной $L = 10 \text{ м}$ и расстоянием между центральной жилой и оплеткой $l = 3 \text{ мм}$ считать системой с распределенными параметрами?

Решение

Принято считать, что для распространения импульсных сигналов полоса пропускания составляет $[0.25/\tau; 0.5/t]$, где τ – длительность фронта сигнала, t – длительность импульса на полувысоте. Сосчитаем полосу пропускания для данного импульса:

$$\frac{0.25}{\tau} = 0.25 \cdot 10^9 = 2.5 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}, \quad \frac{0.5}{t} = \frac{0.5}{20 \cdot 10^{-9}} = 2.5 \cdot 10^7. \quad (37)$$

Следовательно, диапазон длин волн составит

$$\lambda_{\min} = \frac{c}{\nu_{\max}} = \frac{3 \cdot 10^{10}}{2.5 \cdot 10^8} = 1.2 \cdot 10^2 \text{ см}; \quad (38)$$

$$\lambda_{\max} = \frac{c}{\nu_{\min}} = \frac{3 \cdot 10^{10}}{2.5 \cdot 10^7} = 1.2 \cdot 10^3 \text{ см}. \quad (39)$$

Ответ. Да, следует, поскольку выполнены условия $\lambda_{\min} \ll L$; $\lambda_{\min} \gg l$.

Задача 7

Необходимо подсоединить компьютеры в разных корпусах института в единую сеть. Известно, что расстояние между двумя корпусами составляет $L = 300$ м. Следует ли в случае соединения корпусов витой парой или коаксиальным кабелем рассматривать соединительный элемент как длинную линию?

Решение

Типичная частота передаваемого сигнала составит около 1 МГц. Найдем соответствующую длину волны:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^{10}}{10^6} = 3 \cdot 10^4 \text{ см.} \quad (40)$$

Расстояние L того же порядка, что и длина волны. Вообще говоря, в этом случае уже корректно использовать приближение длинной линии.

Ответ. Да, следует.

Задача 8

Является ли линия Москва — Владивосток при частоте 50 Гц линией с распределенными параметрами?

Решение

Найдем соответствующую длину волны:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^{10}}{50} = 6 \cdot 10^8 \text{ см} = 6000 \text{ км.} \quad (41)$$

Ответ. Да, является.

Теперь рассмотрим распространение сигнала по длинной линии математически. Изобразим длинную двухпроводную линию так, как показано на рис. 6. Длинные линии называют однородными, если индуктивность L , емкость C , сопротивление R и утечка G (поперечная проводимость) на единицу длины линии не зависят от координаты x вдоль линии и неоднородными в противном случае. Они называются линейными, если L , C , R и G не являются функцией протекающих по ним токов. В качестве примера нелинейной линии можно назвать линии с

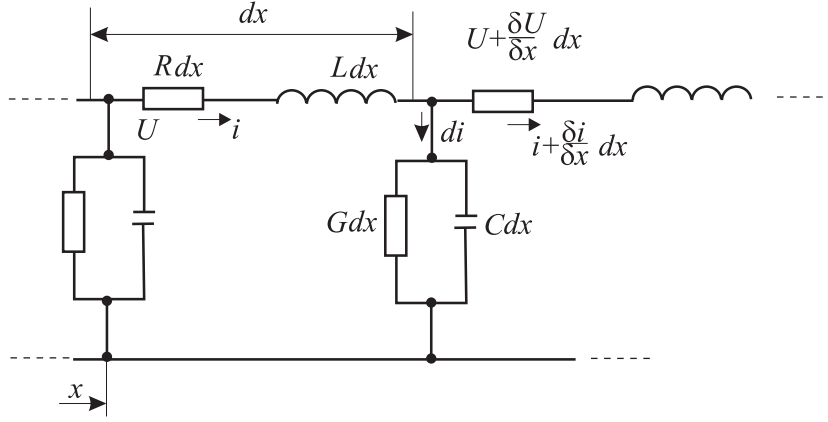


Рис. 6. Представление элементарной ячейки длинной двухпроводной линии

магнитными сердечниками, которые могут насыщаться в процессе протекания тока.

Итак, рассмотрим участок dx однородной линейной линии с распределенными параметрами. Запишем закон Ома для участка dx :

$$iRdx + Ldx \frac{\partial i}{\partial t} = U - \left(U + \frac{\partial U}{\partial x} dx \right), \quad (42)$$

$$iR + L \frac{\partial i}{\partial t} = - \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (43)$$

Запишем первый закон Кирхгофа:

$$i = di + \left(i + \frac{\partial i}{\partial x} dx \right), \quad di = - \frac{\partial i}{\partial x} dx. \quad (44)$$

С другой стороны, ток di есть не что иное, как сумма токов через проводимость Gdx и емкость Cdx :

$$di = \left(U + \frac{\partial U}{\partial x} dx \right) Gdx + \frac{\partial}{\partial t} \left(Cdx \left(U + \frac{\partial U}{\partial x} dx \right) \right). \quad (45)$$

Пренебрегая слагаемыми второго порядка малости, получим

$$di = UGdx + Cdx \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (46)$$

Подставим полученное равенство в уравнение (44):

$$-\frac{\partial i}{\partial x}dx = UGdx + Cdx \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (47)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial U}{\partial t} + GU. \quad (48)$$

Система уравнений (43), (48) называется телеграфными уравнениями и описывает распространение сигнала $U(x, t)$; $i(x, t)$ вдоль длинной линии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хоровиц П., Хилл У.* Искусство схемотехники. Т.1. — М.: Мир, 1993.
2. *Макс Ж.* Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. Т.1. — М.: Мир, 1983.
3. *Калашников Э.Г.* Электричество. — М.: Наука, 1977.
4. *Зельдович Я.Б., Яглом И.М.* Высшая математика для начинающих физиков и техников. — М.: Наука, 1983.
5. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т.3. Электричество. — М.: Наука. Физматлит, 1996.

2.1. Волновое сопротивление и аналог закона Ома для длинных линий

На прошлом семинаре мы получили математическое описание распространения сигнала в длинной линии, то есть систему из двух уравнений, описывающую изменение тока и напряжения по длине однородной линии с распределенными параметрами при распространении по ней сигнала:

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = iR + L\frac{\partial i}{\partial t}, \quad (49)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C\frac{\partial U}{\partial t} + GU. \quad (50)$$

Найдем волновое сопротивление такой линии – величину, формально связывающую ток и напряжение в линии.

2.1.1. Волновое сопротивление длинной линии

Пусть напряжение и ток в линии меняются по синусоидальному закону. Будем искать решения в виде $Ie^{j\omega t}$, $Ue^{j\omega t}$. Здесь $I = I_me^{j\varphi_i}/\sqrt{2}$; $U = U_me^{j\varphi_U}/\sqrt{2}$. Подставим данные выражения в уравнения (49), (50) и сократим на $e^{j\omega t}$:

$$IR + Lj\omega I = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad (51)$$

$$-\frac{\partial I}{\partial x} = Cj\omega U + GU. \quad (52)$$

Перепишем их как

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -(R + Lj\omega)I, \quad (53)$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -(Cj\omega + G)U. \quad (54)$$

Продифференцируем первое из уравнений по x и подставим получившееся значение $\partial I/\partial x$ во второе уравнение:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -(R + Lj\omega) \frac{\partial I}{\partial x}, \quad \frac{\partial I}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}}{R + Lj\omega}, \quad (55)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = (G + Cj\omega)(R + Lj\omega)U, \quad (56)$$

или

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \gamma^2 U; \quad \gamma = \sqrt{(G + Cj\omega)(R + Lj\omega)}. \quad (57)$$

Решение уравнения (57) есть

$$U = A_1 e^{\gamma x} + A_2 e^{-\gamma x}. \quad (58)$$

Комплексное число γ называется постоянной распространения, его можно представить в виде

$$\gamma = \alpha + j\beta, \quad (59)$$

где α – коэффициент затухания – характеризует изменение комплексной амплитуды напряжения или тока на единицу длины линии; β – волновой коэффициент или фазовая постоянная – характеризует изменение фазы на единице длины линии. Заметим, что размерность обеих величин равна м^{-1} .

Соотношение между током и напряжением можно найти из (53), (58):

$$I = -\frac{\partial U}{\partial x} (R + Lj\omega)^{-1} = \gamma (R + Lj\omega)^{-1} (A_2 e^{-\gamma x} - A_1 e^{\gamma x}). \quad (60)$$

Постоянные A_1 и A_2 определяются граничными условиями, слагаемые с A_2 соответствуют падающей, слагаемые с A_1 – отраженной волне.

Величину $Z = \gamma^{-1}(R + Lj\omega) = \sqrt{(R + Lj\omega)/(G + Cj\omega)}$, имеющую, очевидно, размерность сопротивления, называют волновым сопротивлением линии. В случае, когда можно пренебречь активным сопротивлением R и утечкой G , волновое сопротивление определится как

$$Z = \sqrt{L/C}. \quad (61)$$

Пусть мы рассматриваем обычный коаксиальный кабель. В этом случае емкость C – это емкость цилиндрического конденсатора, создаваемого центральной жилой и оплеткой, индуктивность L – индуктивность коаксиальной линии.

Задача 1

Определить волновое сопротивление кабеля с полиэтиленовой изоляцией, диаметром центральной жилы $d = 1.5$ мм и диаметром оплетки $D = 5$ мм (рис. 7а). $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (В · с)/(А · м) = $4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м. Диэлектрическая проницаемость полиэтилена $\varepsilon = 2.2$. Определить волновое сопротивление кабеля с теми же параметрами, но с диаметром центральной жилы 0.8 мм.

Решение

Найдем емкость цилиндрического конденсатора. По теореме Остроградского–Гаусса, $\int D_n ds = q$. Для цилиндрической поверхности длины l и радиуса r , заключенного между обкладками конденсатора, получим (здесь q – заряд на единицу длины)

$$\varepsilon_0 \varepsilon E \cdot 2\pi l r = ql, \quad (62)$$

$$E = \frac{q}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon r}. \quad (63)$$

Разность потенциалов между обкладками найдем как

$$U = \int_{d/2}^{D/2} E dr = \frac{q}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon} \int_{d/2}^{D/2} \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon} \ln \frac{D}{d}. \quad (64)$$

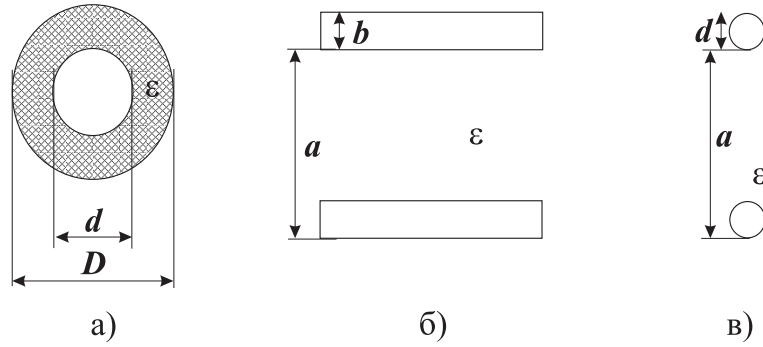


Рис. 7. Схемы кабеля (а), полосковой (б) и двухпроводной (в) линий

Тогда

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon Q}{q \ln \frac{D}{d}} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon l}{\ln \frac{D}{d}}. \quad (65)$$

Индуктивность коаксиальной линии

$$L = \frac{\mu_0\mu}{2\pi} l \ln \frac{D}{d}. \quad (66)$$

Тогда волновое сопротивление линии равно

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu_0\mu}{2\pi} l \ln \left(\frac{D}{d} \right) \frac{\ln \frac{D}{d}}{2\pi\epsilon_0\epsilon l}}, \quad (67)$$

$$Z = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0\mu}{\epsilon_0\epsilon}} \ln \frac{D}{d}. \quad (68)$$

Заметим, что оно не зависит от длины линии.

Найдем численный множитель:

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}} = 376.7 \text{ Ом}. \quad (69)$$

Учтем, что для полиэтиленовой изоляции $\mu = 1$. Тогда

$$Z = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \ln \frac{D}{d} = \frac{376.7}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \ln \frac{D}{d} = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon}} \ln \frac{D}{d}, \quad (70)$$

$$Z = \frac{60}{\sqrt{2.2}} \ln \frac{5}{1.5} = \frac{60}{1.48} \ln 3.3(3) = \frac{60}{1.48} \cdot 1.2 = 48.6 \text{ Ом.} \quad (71)$$

Если взять кабель с диаметром внутренней жилы 0.8 мм, то получим

$$Z = \frac{60}{\sqrt{2.2}} \ln \frac{5}{0.8} = \frac{60}{1.48} \ln 6.25 = \frac{60}{1.48} \cdot 1.83 = 74.2 \text{ Ом.} \quad (72)$$

Таким образом, увеличение отношения D/d ведет к слабому логарифмическому росту волнового сопротивления.

Аналогичным образом можно определить волновое сопротивление полосовой (полосковой) линии (рис. 7б) с шириной полос b и расстоянием между ними a для воздуха ($\varepsilon = 1$):

$$Z = \frac{120\pi a}{\sqrt{\varepsilon} b} = 377 \frac{a}{b} \quad (73)$$

и двухпроводной линии (рис. 7в) с диаметром проводов d и расстоянием между ними a :

$$Z = \frac{120}{\sqrt{\varepsilon}} \ln \frac{a}{d} = 276 \lg \frac{a}{d}. \quad (74)$$

2.1.2. Падающая и отраженная волны

Уравнения (58, 60) определяют одновременное движение в линии двух волн: направленной от источника к приемнику, то есть падающей ($A_2 \exp^{-\gamma x}$), и направленной от приемника к источнику, то есть отраженной ($A_1 \exp^{\gamma x}$). Действительно, заменим γ в уравнении (58) на $\gamma = \alpha + j\beta$, домножим уравнение на $e^{j\omega t}$:

$$u \sim A_1 e^{(\alpha+j\beta)x} e^{j\omega t} + A_2 e^{-\alpha-j\beta x} e^{j\omega t}. \quad (75)$$

Возьмем мнимую часть получившегося выражения:

$$u \sim A_1 e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x) + A_2 e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x). \quad (76)$$

Отсюда очевидно, что второй член отвечает волне, распространяющейся в направлении оси x . Действительно, если при увеличении t мы хотим сохранить значение выражения $\omega t \pm \beta x$ при положительном значении и росте x , между слагаемыми должен стоять знак “минус”. Затухание амплитуды волны (член $\exp^{\alpha x}$) по мере ее распространения обусловлено процессами диссипации в линии.

Задача 2

Определить затухание в неперах сигнала в коаксиальном кабеле длиной $L = 100$ м (полиэтиленовая изоляция, диаметр центральной жилы $d = 1.5$ мм, диаметр оплетки $D = 5$ мм). $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (В · с)/(А · м) = $4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м. Диэлектрическая проницаемость полиэтилена $\varepsilon = 2.2$. Согласно определению, затухание сигнала равно 1 непер, если его амплитуда уменьшается в $\exp$ раз. Потери считать малыми: $R \ll \omega L$; $G \ll \omega C$. Рассчитать затухание для $G = 0$ и двух удельных электрических сопротивлений: $\rho_1 = 1.72 \cdot 10^{-2}$ (Ом · мм²)/м (медь) и $\rho_2 = 1.12$ (Ом · мм²)/м (нихром), считая, что оно обусловлено активным сопротивлением центральной жилы.

Решение

Затухание в неперах равно αL . Определим α :

$$\gamma = \sqrt{(G + Cj\omega)(R + Lj\omega)} = \alpha + j\beta. \quad (77)$$

В случае малых потерь

$$\gamma = \sqrt{(G + Cj\omega)(R + Lj\omega)} = \alpha + j\beta. \quad (78)$$

С учетом малого затухания ($\sqrt{1+x} \approx 1 + 0.5x$) получим

$$\gamma = j\omega\sqrt{LC}\sqrt{\left(1 - \frac{jG}{\omega C}\right)\left(1 - \frac{jR}{\omega L}\right)}, \quad (79)$$

$$\gamma \approx j\omega\sqrt{LC}\left(1 - \frac{jG}{2\omega C}\right)\left(1 - \frac{jR}{2\omega L}\right), \quad (80)$$

$$\gamma \approx j\omega\sqrt{LC}\left(1 - \frac{jG}{2\omega C} - \frac{jR}{2\omega L}\right), \quad (81)$$

$$\gamma \approx j\omega\sqrt{LC} + \frac{G}{2}\sqrt{\frac{L}{C}} + \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (82)$$

При $G = 0$ получаем

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{LC} + \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}, \quad (83)$$

$$\alpha = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{\rho}{2Z\pi r^2}, \quad (84)$$

где r – радиус центральной жилы, $Z = \sqrt{L/C}$ – волновое сопротивление.

$$\alpha = \frac{\rho}{2 \cdot 50 \cdot 3.141.5^2} = 1.4 \cdot 10^{-3} \rho. \quad (85)$$

Для меди

$$\alpha_1 L = 1.4 \cdot 10^{-3} \cdot 1.72 \cdot 10^{-2} \cdot 100 = 2.4 \cdot 10^{-3}, \quad \exp^{-2.4 \cdot 10^{-3}} \approx 0.998. \quad (86)$$

Для нихрома

$$\alpha_2 L = 1.4 \cdot 10^{-3} \cdot 1.12 \cdot 100 = 0.1, \quad \exp^{-0.16} \approx 0.85. \quad (87)$$

На самом деле в реальных линиях, помимо активного сопротивления, может оказаться существенной утечка G и, вообще говоря, перед использованием кабеля, к примеру, в лаборатории, неплохо бы убедиться, что затухание сигнала в нем невелико и что сигнал не искажается.

2.1.3. Аналог закона Ома для длинных линий

Вернемся к уравнениям (58, 60). Перепишем их в виде

$$U = A_1 e^{\gamma x} + A_2 e^{-\gamma x} = U_{\leftarrow} + U_{\rightarrow}, \quad (88)$$

$$I = \frac{(A_2 e^{-\gamma x} - A_1 e^{\gamma x})}{Z} = \frac{U_{\rightarrow}}{Z} - \frac{U_{\leftarrow}}{Z}. \quad (89)$$

Последнее уравнение можно переписать как

$$I_{\rightarrow} = \frac{U_{\rightarrow}}{Z}; \quad I_{\leftarrow} = -\frac{U_{\leftarrow}}{Z}. \quad (90)$$

Следует заметить, что аналогия формул (90) и закона Ома $I = U/R$ чисто внешняя, так как в данном случае U есть напряжение между проводами, т.е. вдоль прямой, перпендикулярной к току, тогда как в законе Ома речь идет о напряжении вдоль провода, по которому течет ток. Закон Ома по своей сути отражает процесс диссипации энергии в линии, связывая плотность тока i , удельную электрическую проводимость σ и напряженность поля E : $i = \sigma E$. В случае же соотношения (90) мы рассматривали линию без диссипации энергии, то есть речь шла только о распространении электрического сигнала вдоль проводов.

Задача 3

По медному кабелю с волновым сопротивлением $Z = 50$ Ом надо передать мощность 10 МВт. Рассчитать минимальный внешний диаметр кабеля. Оценить активную мощность на единицу длины линии, выделяемую за счет протекания тока. Оценить выделяемую при этом энергию, если длина электрического импульса составляет $\tau = 20$ нс.

Решение

Электрическое поле в полиэтилене (см. уравнение (63))

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon r} = \frac{CU}{2\pi\epsilon_0\epsilon r}. \quad (91)$$

Погонную емкость кабеля вычислим как емкость цилиндрического конденсатора (см. уравнение (65)):

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon}{\ln D/d}. \quad (92)$$

Для напряженности электрического поля внутри кабеля, заряженного до напряжения U , получим

$$E = \frac{U}{r \ln D/d}. \quad (93)$$

Напряжение между центральной жилой и оплеткой оценим из величины электрической мощности:

$$P = \frac{U^2}{Z}, \quad U = \sqrt{PZ} = \sqrt{10^7 \cdot 50} = 10^4 \sqrt{5} \approx 22000 \text{ В}. \quad (94)$$

Порог пробоя полиэтилена $E_{\text{crit}} \approx 20 \text{ кВ/мм}$; оценим r_{min} как

$$r_{\text{min}} = \frac{U}{E_{\text{crit}} \ln \frac{D}{d}}. \quad (95)$$

С учетом того, что для коаксиального кабеля $Z = (60/\sqrt{\epsilon}) \ln D/d$, найдем $\ln D/d = Z\sqrt{\epsilon}/60$:

$$r_{\text{min}} = \frac{60U}{E_{\text{crit}} Z \sqrt{\epsilon}} = \frac{60 \cdot 22000}{20000 \cdot 50 \cdot 2.2} = 0.6 \text{ мм}. \quad (96)$$

Внешний диаметр кабеля найдем из условия на волновое сопротивление:

$$D = \exp^{Z\sqrt{\varepsilon}/60} d = \exp^{50 \cdot \sqrt{2.2}/60} \cdot 1.2 \approx 3.44 \cdot d = 4.1 \text{ мм.} \quad (97)$$

Оценим активную мощность. Будем считать, что величина электрического тока определяется в первую очередь волновым сопротивлением, поскольку активное сопротивление мало (для меди $\rho_1 = 1.72 \cdot 10^{-2} \text{ (Ом} \cdot \text{мм}^2)/\text{м}$). Тогда

$$I \approx \frac{U}{Z} = \frac{22000}{50} = 440 \text{ А.} \quad (98)$$

Для кабеля длиной 1 м

$$I^2 R \approx 440^2 \frac{1.72 \cdot 10^{-2}}{\pi 0.6^2} \approx 3000. \quad (99)$$

Таким образом, на 1 м кабеля выделяется мощность 3 кВт. Сосчитаем энергию, если длительность импульса 20 нс:

$$W = Pt = 3000 \cdot 2 \cdot 10^{-8} = 6 \cdot 10^{-5}. \quad (100)$$

Энергия $6 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}$, очевидно, мала и не может вести к нагреву изоляции кабеля. На самом деле для передачи импульсов напряжения амплитудой около 20 кВ обычно используют кабель с диаметром изоляции около 10 мм.

Стандартная маркировка кабелей выглядит следующим образом: РК-50-11-13. Марка кабеля состоит из букв, обозначающих тип кабеля, и трех чисел. Первое число обозначает номинальное волновое сопротивление, второе – диаметр изоляции коаксиального кабеля, третье – двух- или трехзначное число, первая цифра которого обозначает группу изоляции и категорию ее нагревостойкости, а последующие – порядковый номер разработки. В вышеприведенном примере “РК” – радиочастотный кабель, 50 – волновое сопротивление, 11 – диаметр изоляции в мм, 13 – число, содержащее код диэлектрика (в данном случае полиэтилен). Стандартные волновые сопротивления коаксиальных кабелей – 50, 75, 100, 150 Ом. Приведем

еще несколько стандартных маркировок кабелей: кабель РК-50-2-11 используется при подсоединении к осциллографической аппаратуре, РК-75-4-11 – телевизионный кабель.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хоровиц П., Хилл У.* Искусство схемотехники. Т.1. — М.: Мир, 1993.
2. *Макс Ж.* Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. Т.1. — М.: Мир, 1983.
3. *Калашников Э.Г.* Электричество. — М.: Наука, 1977.
4. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т.3. Электричество. — М.: Наука. Физматлит, 1996.
5. *Бессонов Л.А.* Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. — М.: Высшая школа, 1996.
6. *Попов В.П.* Основы теории цепей. — М.: Высшая школа, 2000.

2.2. Изменение сигналов при распространении вдоль длинной линии

2.2.1. Фазовая скорость. Линии без искажений

Как обычно в теории волн, фазовой скоростью называют ту скорость, с которой нужно перемещаться вдоль линии, чтобы наблюдать одну и ту же фазу колебаний. Неизменность фазы, к примеру, для падающей волны, означает, что

$$\omega t - \beta x = \text{const}; \quad (101)$$

$$\frac{d}{dt}(\omega t - \beta x) = 0, \quad \omega - \beta \frac{dx}{dt} = 0, \quad (102)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta}. \quad (103)$$

Вспомним, что

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(G + Cj\omega)(R + Lj\omega)}. \quad (104)$$

Положим $R = 0$; $G = 0$ (линия без потерь). Тогда

$$\gamma = j\omega\sqrt{LC} = j\beta, \quad (105)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (106)$$

Задача 1

Определить фазовую скорость распространения сигнала в коаксиальном кабеле с полиэтиленовой изоляцией, диаметр центральной жилы $d = 1.5$ мм, диаметр оплетки $D = 5$ мм. $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (В · с)/(А · м) = $4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м. Диэлектрическая проницаемость полиэтилена $\epsilon = 2.2$.

Решение

Емкость единицы длины кабеля

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}{\ln \frac{D}{d}}. \quad (107)$$

Индуктивность единицы длины коаксиальной линии

$$L = \frac{\mu_0\mu}{2\pi} \ln \frac{D}{d}. \quad (108)$$

Тогда фазовая скорость

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}{\ln D/d}\right) \left(\frac{\mu_0\mu}{2\pi} \ln \frac{D}{d}\right)}}, \quad (109)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{(\varepsilon_0\varepsilon)(\mu_0\mu)}}, \quad (110)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \quad (111)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}} \frac{1}{\sqrt{2.2}}, \quad (112)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}} \frac{1}{\sqrt{2.2}} = 3 \cdot 10^8 \frac{1}{\sqrt{2.2}} = 0.674 c, \quad (113)$$

где c – скорость света. Рассчитаем, за сколько наносекунд сигнал пройдет 1 метр: $0.674c \approx 2 \cdot 10^8$ м/с = 0.2 м/нс. Расстояние в 1 метр сигнал в 50-омном кабеле проходит за 5 нс.

Линией без искажений называется линия, вдоль которой волны всех частот распространяются с одинаковой скоростью и затухают в равной степени. Чтобы линия была неискажающей, коэффициент затухания α и фазовая скорость v не должны зависеть от частоты: $\alpha \neq \alpha(\omega)$, $v \neq v(\omega)$. Линия является линией без искажений, если выполняется условие Хевисайда (в частности, линия без потерь, где $G = R = 0$, всегда является неискажающей):

$$\frac{G}{C} = \frac{R}{L}. \quad (114)$$

Покажем это. Постоянная распространения

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(G + Cj\omega)(R + Lj\omega)}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (115)$$

Обозначим $G/C = R/L = k$.

$$\gamma = \sqrt{CL \left(\frac{G}{C} + j\omega \right) \left(\frac{R}{L} + j\omega \right)} = \sqrt{CL} \sqrt{(k + j\omega)^2}, \quad (116)$$

$$\gamma = \sqrt{CL}(k + j\omega) = \sqrt{CL}k + j\omega\sqrt{CL}, \quad (117)$$

$$\alpha = \sqrt{CL}k; \quad v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{CL}}. \quad (118)$$

Видно, что коэффициент затухания α и фазовая скорость v не зависят от частоты, то есть в такой линии все частоты будут передаваться одинаково.

2.2.2. Коэффициент отражения. Согласование линий

Давайте рассмотрим длинную линию с сопротивлением Z и нагрузкой Z_H . Пусть напряжение и ток в конце линии (то есть на нагрузке) равны U_H и I_H . Найдём коэффициенты A_1 и A_2 для рассматриваемого случая. Выражения для тока и напряжения на нагрузке запишутся как

$$U_H = A_1 e^{\gamma x} + A_2 e^{-\gamma x}, \quad (119)$$

$$I_H = Z^{-1}(A_2 e^{-\gamma x} - A_1 e^{\gamma x}). \quad (120)$$

Учтем также то, что $U_H = I_H Z_H$. Вычтем уравнения друг из друга, умножив второе из них на Z :

$$U_H - I_H Z = 2A_1 e^{\gamma x}. \quad (121)$$

Сложим уравнения:

$$U_H + I_H Z = 2A_2 e^{-\gamma x}. \quad (122)$$

Окончательно для коэффициентов A_1 и A_2 получим

$$A_1 = 0.5(U_H - I_H Z)e^{-\gamma x} = 0.5I_H(Z_H - Z)e^{-\gamma x}, \quad (123)$$

$$A_2 = 0.5I_H(Z_H + Z)e^{\gamma x}. \quad (124)$$

Коэффициент отражения по напряжению составит

$$K_U = \frac{U_{\rightarrow}}{U_{\leftarrow}} = \frac{A_2 e^{-\gamma x}}{A_1 e^{\gamma x}} = \frac{Z_H + Z}{Z_H - Z}. \quad (125)$$

Коэффициент отражения по току равен

$$K_I = \frac{I_{\rightarrow}}{I_{\leftarrow}} = -\frac{A_2 e^{-\gamma x}}{A_1 e^{\gamma x}} = -\frac{Z_H + Z}{Z_H - Z} = -K_U. \quad (126)$$

Следует обратить внимание на то, что ток и напряжение отражаются с противоположным знаком. Далее, при согласованной нагрузке отражение сигнала отсутствует: $K_U = K_I = 0$ при $Z_H = Z$.

Рассмотрим несколько задач на согласование линий.

Задача 2

Экспериментатору необходимо согласовать 50-омный кабель и осциллограф с 75-омным входом. Рассчитать схему согласования.

Решение

Нужно провести сопряжение линии с малой величиной Z (кабеля) и прибора с большой Z_H . Это означает, что мы должны эффективно уменьшить Z_H , сделав так, чтобы “со стороны

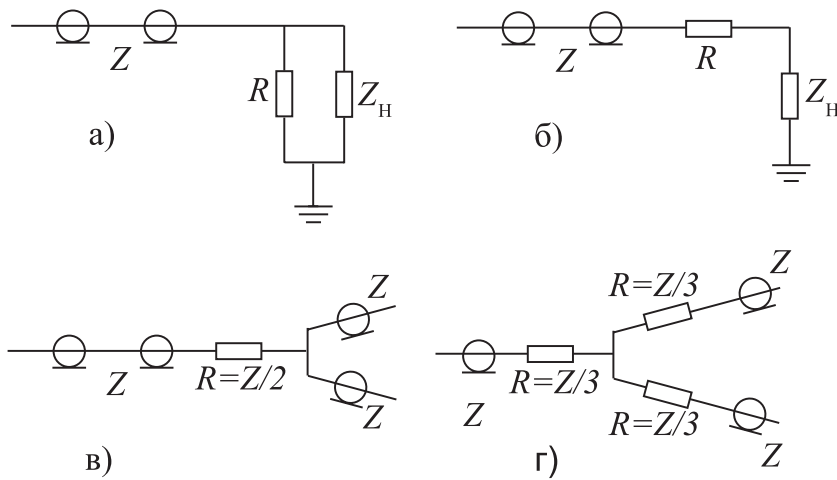


Рис. 8. Примеры согласования линий с различным волновым сопротивлением

кабеля” нагрузка смотрелась как 50 Ом. Подсоединим параллельно Z_H сопротивление R , такое, что

$$\frac{Z_H R}{Z_H + R} = Z, \quad R = \frac{Z Z_H}{Z_H - Z}. \quad (127)$$

Для приведенных в задаче величин

$$R = \frac{50 \cdot 75}{25} = 150. \quad (128)$$

Подсоединенное параллельно входу осциллографа сопротивление 150 Ом приведет к тому, что переотражения не будет (рис. 8а).

Задача 3

Экспериментатору необходимо согласовать 75-омный кабель и осциллограф с 50-омным входом. Рассчитать схему согласования. Определить амплитуду сигнала, сравнив ее с амплитудой сигнала в линии.

Решение

Включим в центральную жилу кабеля сопротивление R . Тогда

$$Z = R + Z_H; \quad R = Z - Z_H = 25. \quad (129)$$

Данная схема изображена на рис. 8б. Амплитуда сигнала, очевидно, будет составлять $2/3$ от амплитуды сигнала в линии.

Задача 4

Согласовать 50-омный кабель с двумя такими же кабелями (разветвитель).

Решение

Волновое сопротивление после разветвления $Z_H = 0.5Z$. Включим в центральную жилу кабеля сопротивление R . Тогда

$$Z = R + Z_H = R + 0.5Z; \quad R = Z - Z_H = 0.5Z = 25. \quad (130)$$

Схема представлена на рис. 8в.

Задача 5

Сконструировать согласованный тройник (чтобы можно было подсоединяться к любым выводам, не боясь испортить сигнал) из отрезков кабеля с волновым сопротивлением $Z = 50$ Ом.

Решение

Стремясь сделать схему симметричной, включим перед местом соединения линий в каждую ветвь сопротивление R . Тогда сопротивление такой ветви будет равно $R + Z$. Если смотреть на схему со стороны одной из линий, получим (рис. 8в)

$$Z = R + 0.5(Z + R), \quad R = Z/3 \approx 16.7. \quad (131)$$

2.2.3. Эквивалентные схемы цепей, содержащих длинные линии

При расчете линий с распределенными параметрами бывает удобно заменить длинноволновую линию линией с сосредото-

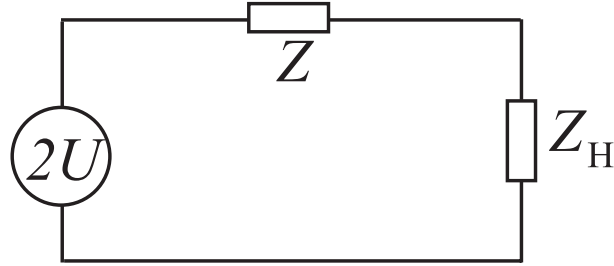


Рис. 9. Схема замещения линии с распределенными параметрами

ченными параметрами. Пусть схема состоит из источника напряжения U , волновой линии сопротивлением Z и нагрузки сопротивлением Z_H . В момент времени перед приходом импульса на нагрузку ток и напряжение в линии равны соответственно u и i . Когда волна дойдет до нагрузки, на ней будет напряжение u_H и через нее будет течь ток i_H . Ток и напряжение в любой точке линии можно представить в виде суммы падающей и отраженной волн. То же справедливо для конца линии:

$$u_{\rightarrow} + u_{\leftarrow} = u_H, \quad i_{\rightarrow} + i_{\leftarrow} = i_H. \quad (132)$$

Заменяем $i_{\rightarrow}$ на $u_{\rightarrow}/Z$, а $i_{\leftarrow}$ на $-u_{\leftarrow}/Z$:

$$u_{\rightarrow} + u_{\leftarrow} = u_H, \quad u_{\rightarrow} - u_{\leftarrow} = i_H Z. \quad (133)$$

Отсюда получим соотношение между амплитудой падающей волны и током и напряжением на нагрузке:

$$2u_{\rightarrow} = u_H + i_H Z. \quad (134)$$

Эквивалентную схему с сосредоточенными параметрами можно изобразить как источник ЭДС напряжением $2u_{\rightarrow}$ с подключенными к нему последовательно соединенными нагрузками Z и Z_H (рис. 9).

Решим задачи о согласовании 50 и 75-омной линии, пользуясь схемой замещения.

Задача 6

Пользуясь схемой замещения, рассчитать сигнал на осциллографе для согласованного перехода $75 \rightarrow 50$ Ом.

Решение

Нарисуем схему замещения, включив в нее последовательно соединенные волновое сопротивление линии Z_0 , нагрузки Z_H и добавленное сопротивление $R = 25$ Ом. ЭДС источника равна $2U$.

$$2U = U_H + I_H Z, \quad Z = Z_0 + R. \quad (135)$$

Ток через нагрузку

$$I_H = \frac{U_H}{Z_H}, \quad I_H Z = \frac{U_H}{Z_H} (Z_0 + R). \quad (136)$$

Тогда

$$2U = U_H + \frac{U_H}{Z_H} (Z_0 + R) = U_H \frac{Z_H + Z_0 + R}{Z_H}, \quad (137)$$

откуда

$$U_H = 2U \frac{Z_H}{Z_H + Z_0 + R} = \frac{2}{3}U, \quad (138)$$

то есть мы теряем $1/3$ амплитуды напряжения.

2.3. Колебания в линии при подключении источника постоянного напряжения

Пользуясь найденным формализмом, рассмотрим процессы, возникающие в линии при подключении к источнику постоянной ЭДС. Пусть есть линия сопротивлением Z , к ее концу подключен генератор с внутренним сопротивлением $R = 0$, а конец линии разомкнут: $Z_H = \infty$. Рассмотрим процессы в линии при включении генератора (рис. 10). На первой стадии от

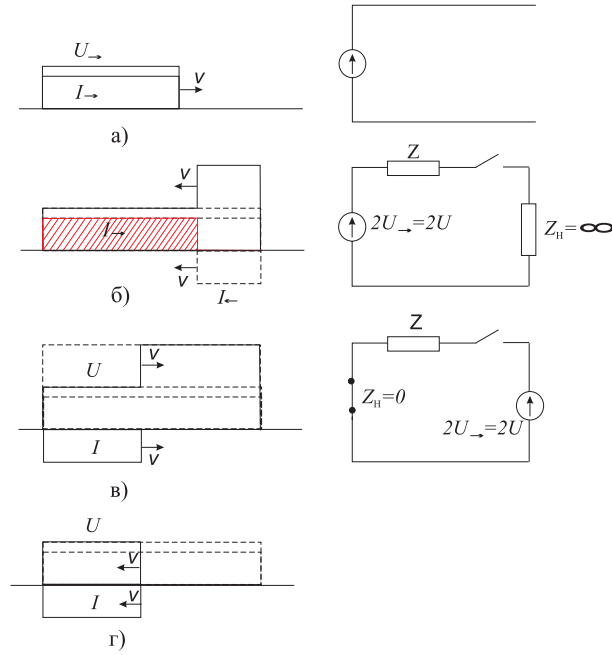


Рис. 10. Эпюры тока и напряжения при подключении разомкнутой на конце линии к источнику постоянного напряжения

генератора к концу линии распространяются волна напряжения $u_{\rightarrow 1} = u$ и волна тока $i_{\rightarrow 1} = u_{\rightarrow 1}/Z$ (рис. 10а). Вторая стадия заключается в том, что от конца линии к ее началу движется отраженная волна $(u_{\leftarrow 1}, i_{\leftarrow 1})$ (рис. 10б). Справа на том же рисунке представлена эквивалентная схема линии.

$$2U = U_H + I_H Z = U_H \left(1 + \frac{Z}{Z_H}\right) = U_H \frac{Z + Z_H}{Z_H}, \quad (139)$$

$$U_H = 2U \frac{Z_H}{Z + Z_H} \Big|_{Z_H \rightarrow \infty} \rightarrow 2U. \quad (140)$$

Напряжение на нагрузке

$$U_H = U_{\rightarrow 1} + U_{\leftarrow 1}, \quad (141)$$

$$U_{\leftarrow 1} = U_H - U_{\rightarrow 1} = U = U_{\rightarrow 1}. \quad (142)$$

Отраженная волна тока

$$I_{\leftarrow 1} = -U_{\leftarrow 1}/Z = -I_{\rightarrow 1}. \quad (143)$$

Таким образом, на второй стадии от конца линии к началу движется волна напряжения $U_{\leftarrow 1} = U$ и волна тока $I_{\leftarrow 1} = -I$. Эти волны складываются с волнами, идущими от начала линии, в итоге ток обнуляется, а напряжение удваивается. Схемы в левой части рис. 10, отражающие распределение напряжения (тока) по линии в определенный момент времени, называют эпюрами напряжения (тока).

Рассмотрим третью стадию. Волна, дойдя до начала линии, отражается от генератора. Эквивалентная схема для этой стадии представлена на рис. 10в справа. В ней $Z_H = 0$, $2U_{\leftarrow 1} = 2U$. Так как сопротивление нагрузки равно нулю, то и напряжение на ней нулевое. Оно равно сумме падающей и отраженной волн:

$$U_{\rightarrow 2} = -U_{\leftarrow 1}; I_{\rightarrow 2} = U_{\rightarrow 2}/Z = -I_{\rightarrow 1}. \quad (144)$$

Результирующее состояние линии на стадии 3 является суперпозицией трех волн: падающей, отраженной от конца линии и отраженной от генератора. Если аналогичным образом рассмотреть стадию 4, на которой напряжение не изменит знака, а ток отразится с противоположным, то, очевидно, на четвертой стадии мы получим $U = 0$, $I = 0$ (рис. 10г), то есть линия возвращается к исходному состоянию. Затем процесс повторяется до бесконечности, если $R = G = 0$. В реальности из-за наличия сопротивления и утечки колебательный процесс постепенно затухает.

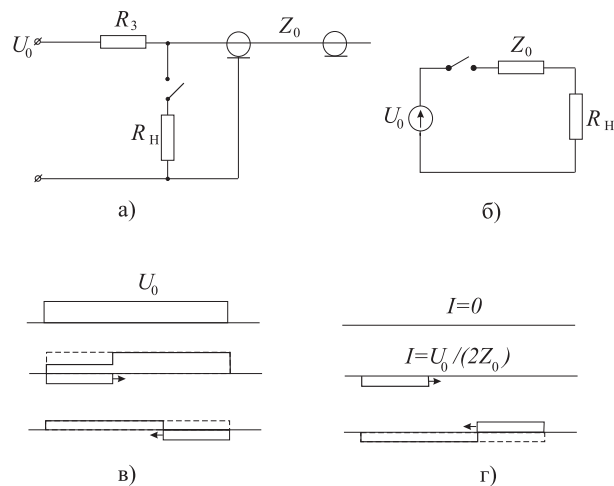


Рис. 11. Формирование импульса в результате разрядки линии на согласованное сопротивление

2.4. Формирование импульсов наносекундной длительности при разрядке линии

Переходные процессы, протекающие в длинной линии при подаче на нее ступеньки напряжения или тока, можно использовать для формирования импульсов наносекундной длительности.

Схема простейшего генератора для формирования прямоугольных импульсов с помощью отрезка заряженной разомкнутой линии показана на рис. 11а.

Если линию с волновым сопротивлением Z_0 зарядить до напряжения U_0 через зарядное сопротивление $R_3 \gg Z_0$, а затем замкнуть с помощью коммутатора К на сопротивление нагрузки R_H , то на последнем появится импульс напряжения, амплитуда и длительность которого зависят от соотношения R_H/Z_0 . Для определения параметров импульса рассмотрим эквивалентную схему генератора в момент замыкания коммутатора (рис. 11б), в которой для простоты не показано зарядное

сопротивление.

Напряжение в линии при замыкании ключа, когда по линии распространяются волны напряжения и тока u_1 и i_1 ,

$$U_0 = i_1(Z_0 + R_H), \quad u_1 = i_1 Z_0 = U_0 \frac{Z_0}{Z_0 + R_H}, \quad (145)$$

$$U_H = i_1 R_H = U_0 \frac{R_H}{Z_0 + R_H}. \quad (146)$$

Рассмотрим случай согласованной нагрузки: $R_H = Z_0$. При этом падающие волны напряжения и тока равны $u_1 = U_0/2$, $i_1 = U_0/2Z_0$ соответственно, а напряжение на нагрузке $U_H = U_0/2$.

Отметим, что полярность падающих волн тока и напряжения противоположна полярности источника напряжения, зарядившего линию, и, следовательно, при движении падающей волны напряжение в линии будет уменьшаться и составит $U_0 - u_1 = U_0/2$.

Эпюры для волн тока и напряжения приведены на рис. 11в, г. При достижении падающей волной разомкнутого конца линии волна напряжения отражается с тем же знаком: $u_2 = u_1 = -U_0/2$, а волна тока – с противоположным: $i_2 = -i_1 = U_0/2Z_0$. Это приводит к тому, что после прохождения отраженной волны линия полностью разряжена. Когда отраженная волна достигает конца линии, ток и напряжение во всей линии становятся равными нулю. Дальнейшего отражения волны от нагрузки не происходит, так как $R_H = Z_0$, и нестационарные процессы на этом заканчиваются. Поэтому в нагрузке прекращается ток разряда и исчезает напряжение. Таким образом, на нагрузке R_H формируется прямоугольный импульс, длительность которого определяется временем двукратного прохождения волны тока по линии $t = 2T$, а амплитуда равна половине зарядного напряжения U_0 . В случае несогласованной нагрузки одновременного обнуления тока и напряжения не произойдет, и в линии будут наблюдаться переотражения.

Задача 7

Экспериментатор конструирует генератор наносекундных импульсов, используя для формирования импульса коаксиальную линию внутренним диаметром 5 мм и внешним 20 мм, заполненную дистиллированной водой. Какую следует взять нагрузку R_H , чтобы схема была согласованной? Какую надо взять длину линии, чтобы получить импульс длительностью 10 нс? Диэлектрическая проницаемость воды $\epsilon = 81$.

Решение

Для коаксиальной линии волновое сопротивление

$$Z = \frac{60}{\sqrt{\epsilon}} \ln \frac{D}{d} = \frac{60}{9} \ln 4 = 9.2 \text{ Ом.} \quad (147)$$

Для согласования следует взять $R_H = Z \approx 9 \text{ Ом}$. Скорость распространения сигнала в линии

$$V = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{9} \approx 0.1 \cdot c = 0.3 \cdot 10^{10} = 3 \cdot 10^9 \text{ см/с} = 3 \text{ см/нс.} \quad (148)$$

Электрическая длина 10-наносекундного импульса составит $Vt = 30 \text{ см}$. Следовательно, для формирования подобного импульса нужно взять линию длиной 15 см.

Следует отметить, что реальные формирующие линии с потерями имеют переходные характеристики с конечным временем нарастания их фронта. Поэтому форма получаемых импульсов в действительности отличается от прямоугольной. Крутизна фронта переходной характеристики определяется величиной потерь в линии (коаксиальном кабеле, полосковой линии) и ее длиной. Кроме потерь в линии, на форму импульса влияют наличие паразитных емкостей и свойств коммутатора.

На длительности фронтов импульса одновременно с паразитными емкостями заметно влияет коммутирующее устройство, что объясняется конечным временем нарастания тока в коммутаторе, так как коммутатор имеет сопротивление, не равное нулю и изменяющееся во времени в процессе коммутации.

Как следствие, напряжение на коммутаторе также изменяется за время коммутации. Закон изменения сопротивления коммутатора определяет форму фронта импульса. Длительность фронта, как правило, определяется характеристиками коммутатора, а не переходной характеристикой линии.

Таким образом, в данном пособии рассмотрены переходные свойства электрических цепей и распространение электрических сигналов в линиях с распределенными параметрами. Дано определение длинной линии, рассмотрены особенности распространения сигнала в линии, на примере конкретных задач показано, почему знание теории длинных линий необходимо для грамотной регистрации быстрых импульсных электрических сигналов.

В заключение хотелось бы поблагодарить д.ф.-м.н. Л.М. Василюка, чьи лекции по теории длинных линий помогли автору при работе над данным пособием.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хоровиц П., Хилл У.* Искусство схемотехники. Т.1. — М.: Мир, 1993.
2. *Макс Ж.* Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. Т.1. — М.: Мир, 1983.
3. *Калашников Э.Г.* Электричество. — М.: Наука, 1977.
4. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т.3. Электричество. — М.: Наука. Физматлит, 1996.
5. *Бессонов Л.А.* Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. — М.: Высшая школа, 1996.
6. *Попов В.П.* Основы теории цепей. — М.: Высшая школа, 2000.
7. *Барсов И.Н.* Теоретические основы электротехники (для учащихся техникумов). Книга 2. — М.: Энергоатомиздат, 1992.

3. Контрольные вопросы к теме “Электрические цепи. Распространение и генерация импульсных сигналов”

1. Какая линия называется однородной? Нарисуйте схему замещения элемента такой линии.
2. Почему токи и напряжения вдоль линии с распределенными параметрами неодинаковы для одного и того же момента времени?
3. Какую линию называют линией без потерь?
4. При какой частоте сигнала электрическую цепь с характерной длиной l_m следует рассматривать как линию с распределенными параметрами?
5. Воздушную линию, состоящую из двух коаксиальных цилиндров, заполнили дистиллированной водой. Как изменилось волновое сопротивление?
6. Если два провода двухпроводной линии с малыми потерями раздвинуть по сравнению с их исходным состоянием, как это скажется на волновом сопротивлении линии?
7. Определить коэффициент отражения волны в конце линии с волновым сопротивлением Z , если линия замкнута на сопротивление нагрузки $1.5Z$.
8. Не зная правил распространения сигнала в длинных линиях, экспериментатор сделал разветвитель, соединив вместе центральные жилы и – тоже вместе – оплетки трех коаксиальных кабелей. По одному из кабелей подается импульсный сигнал. Какая часть сигнала отразится обратно в точке разветвления?

9. Экспериментатор контролировал импульс тока, запуская осциллограф сигналом с дополнительного датчика, расположенного в той же точке, что и измерительный. Оказалось, что задержка между импульсом синхронизации и сигналом составила 10 нс. Определить разницу в длинах кабелей “датчик синхронизации – осциллограф” и “измерительный датчик – осциллограф”, если измерения проводились стандартным осциллографическим 50-омным кабелем с полиэтиленовой изоляцией.
10. Экспериментатор тестирует исправность коаксиального кабеля, посылая в кабель импульс напряжения и регистрируя наличие переотражений. Какая из приведенных на рисунке 12 осциллограмм соответствует разрыву кабеля, какая – короткому замыканию и почему? Как определить расстояние до дефекта?

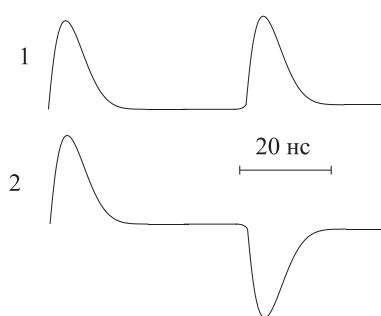


Рис. 12. Наблюдаемая осциллограмма при тестировании кабеля