МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

С.М. СТАРИКОВСКАЯ

ФИЗИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ. СЕМИНАРСКИЕ ЗАНЯТИЯ

1. УЧЕТ ПОГРЕШНОСТИ ПРИ ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Учебно-методическое пособие

Москва 2004

Учебно-методическое пособие разработано при частичной поддержке программы малых проектов в сфере охраны окружающей среды (SEPS-3). Программа финансируется Министерством охраны окружающей среды, продовольствия и развития сельских районов Великобритании (Defra), руководство программой осуществляет Британский Совет.

УДК 53.082

Составитель: С.М. Стариковская. Физические методы исследования. Семинарские занятия. 1.Учет погрешностей при обработке результатов измерений: Учебно-методическое пособие. — М: МФТИ, 2004. — 25 с.

Оглавление

1. Введение

Курс “Физические методы исследования” рассчитан на 2 семестра. В осеннем семестре студентам 3 курса факультета молекулярной и биологической физики предлагается прослушать курс лекций, семинаров и выполнить 5 лабораторных работ. Цель данного цикла заключается в том, чтобы дать слушателям представление об основных современных методах измерения физических величин: о том, какими приборами измеряют те или иные величины, каковы физические принципы подобных измерений в каждом случае, чем обусловлены разрешение и погрешности в исследуемой системе. Этот курс, по замыслу его основателя Евгения Леонидовича Франкевича, призван служить некоторым переходным звеном от общеинститутских курсов физики и математики к реальной работе в лаборатории.

Опыт приема лабораторных работ в течение нескольких лет показал, что чтения лекций и проведения лабораторных занятий, как правило, недостаточно для глубокого понимания данного предмета. Слушателям нужно почувствовать масштаб величин, научиться делать конкретные численные оценки на основе имеющихся данных, что совершенно необходимо при экспериментальной работе в лаборатории. Предлагаемый цикл пособий является дополнением к курсу семинаров, прочитанному автором в 2001 и 2002 гг. студентам факультета молекулярной и биологической физики.

Основные разделы цикла семинаров следующие:

1. Методы обработки и учет погрешностей измерений.

2. Измерительные электрические цепи.

3. Методы создания вакуума и измерения давления.

4. Методы измерения температуры.

5. Источники и приемники оптического излучения.

Каждое пособие соответствует одному разделу. Содержание основано на программе курса лекций Е.Л. Франкевича[1]. Добавлен раздел об учете экспериментальных погрешностей, так как, несмотря на обилие лабораторных работ, к третьему курсу студенты не всегда ориентируются в основных причинах погрешностей измерений, пытаясь объяснить ошибки измерений, к примеру, “плохими приборами”. Добавлен раздел об измерении электрических сигналов, поскольку в современных лабораториях при измерении количественных характеристик процесса, как правило, используется преобразование различных типов сигналов в электрический сигнал. Во второй части пособия в раздел “Источники и приемники оптического излучения” добавлено более детальное рассмотрение диспергирующих элементов оптических систем и семинар об источниках когерентного излучения.

Каждый из разделов, кроме вводного, рассчитан на 2—3 семинара. В конце каждого семинара оговорен список литературы, использовавшейся при подготовке семинара. Данная литература рекомендуется также для более детального изучения предмета. Разделы 2—5 завершаются контрольными вопросами, которые предлагались студентам для проверки качества усвоения прочитанного материала.

---

[1] *Франкевич Е.Л.* Физические методы исследования: Учебное пособие. — М.: МФТИ, 1986. — 92 с.

2. Методы обработки и учет погрешностей

Под измерением в физике понимают последовательность экспериментальных и вычислительных операций, проводимую для нахождения значения физической величины. Как правило, в современном эксперименте редко обходятся только прямыми измерениями (к примеру – измерение длины с помощью линейки), чаще косвенные измерения комбинируются с серьезными методами обработки экспериментальных данных и вычислительными процедурами.

Тем важнее представлять себе, в каком месте в результат измерений вносятся погрешности, можно ли их контролировать, анализировать и устранять. Обычно в ходе выполнения работы студент оценивает разброс точек на графике и утверждает, что именно этот разброс является погрешностью. Далее обычно следуют ссылки на плохие приборы. Так ли уж важно, каков разброс данных в эксперименте? Надо ли стремиться его уменьшить?

Предположим, что решается небезызвестная задача Архимеда об идентификации подлинности короны. Корона состоит либо из золота с плотностью $\rho = 15.5$ г/см^3, либо из некоторого дешевого сплава с плотностью $\rho = 13.8$ г/см^3. Пусть один исследователь измерил плотность материала, из которого изготовлена корона, и получил значение 15 ± 1.5 г/см^3. Второй, подобрав более точный способ определения плотности, получил значение 13.9 ± 0.2 г/см^3. В принципе оба правы. Измерения первого верны, но не позволяют определить подлинность короны, поскольку разность искомых плотностей меньше погрешности (рис. 1). Измерения второго, как более точные, свидетельствуют о том, что полученное значение плотности совпадает с плотностью сплава и не равно плотности золота. С другой стороны, если надо изготовить рамку для фотографии размером 10×15 см, вряд ли следует пользоваться микрометром: здесь достаточно и обычной линейки. Приведенные примеры

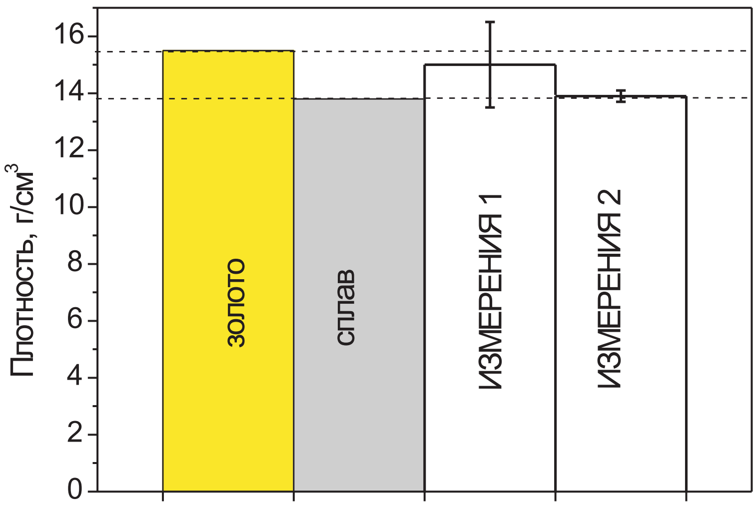

Рис. 1. Пример малоинформативности определения величины с большой погрешностью (см. текст)

показывают, что необходимая точность измерений зависит от поставленных целей.

Совсем коротко напомним основные правила обращения со случайными погрешностями. В записи значения величины погрешность принято округлять до одной значащей цифры. Исключение составляет случай, когда эта цифра равна единице. Ряд теорий позволяет оставлять две значащих цифры, так как разница, к примеру, между 0.1 и 0.14 составляет 40%. Таким образом, верными будут записи $g = 9.82 \pm 0.04$ м/с ^{2} или $g = 9.82 \pm 0.14$ м/с ^{2}. В расчетах, пока мы еще не получили окончательный результат, имеет смысл оставлять на одну значащую цифру больше. Это уменьшает неточности, возникающие при округлении чисел.

2.1. Оценка погрешности при косвенных измерениях

Как было сказано выше, в реальной ситуации крайне редко искомая величина измеряется непосредственно. Обычно результат измерений является некоторой комбинацией из измеренных величин, нередко помимо ошибок измерений необходимо анализировать достоверность теорий и вычислений, применяемых при определении конечной величины. Приблизительная схема определения физической величины в общем случае показана на рисунке 2. Прежде всего, исходя из цели измерений, мы должны выбрать приемлемый метод измерений. Предположим, что необходимо измерить распределение концентрации метана в пламени горелки. В качестве метода измерений выберем поглощение метаном излучения гелий-неонового ИК-лазера на длине волны 3.39 мкм. Обоснованиями для такого метода могут служить относительная простота регистрации и дешевизна оборудования при высоком временно́м (до микросекунд) и пространственном (миллиметры) разрешении схемы. Где в такой схеме могут проявиться погрешности, влияющие на конечный результат? Прежде всего, при получении исходной информации. Пламя — относительно нестабильный объект, и здесь следует ожидать существенного разброса самих исходных данных. Поскольку мы предполагаем проводить измерения методом абсорбционной спектроскопии (то есть по поглощению исходного излучения), следует заранее проанализировать, какая часть излучения поглотится исследуемым веществом, какова стабильность источника излучения, могут ли какие–либо внешние факторы (гидродинамические, температурные и т.д.) оказать влияние на результат измерений. На этом этапе возникают погрешности, связанные с выбранным методом измерений и схемой регистрации. Изменение интенсивности излучения будет регистрироваться каким-то фотоприемником (к примеру, фоторезистором) и далее, с помощью определенной электрической схемы – осциллографом. Данный этап преобразования сигнала может, в свою очередь, внести определенную погрешность в измерения. Она может быть связана, к примеру, с электрическими наводками при неграмотной организации схемы. Обратим внимание на обработку и трактовку результатов. В предложенной схеме измеряется соотношение интенсивностей падающего на приемник в отсутствие пламени и прошедшего через пламя излучения лазера. Можно, задавшись определенным соотношением, а именно — законом Буггера–Ламберта–Бера $I = I_0 e^{-\sigma n x}$, зная сечение поглощения на данной длине волны σ и определив длину прохождения луча через пламя, вычислить усредненную по всей длине концентрацию молекул метана. Тут же к обсужденным ранее погрешностям добавляется погрешность определения длины пути луча в среде. Можно выбрать более сложную процедуру и попытаться восстановить распределение метана в плоскости, перпендикулярной вертикальной оси горелки, проведя серию измерений по различным хордам и сделав ряд априорных предположений о характере распределения метана (так называемая процедура Абеля). В итоге мы придем к конечному результату с большим набором погрешностей, возникающих на различных этапах измерений и обработки данных. Как в общем случае искать погрешность определения итоговой величины?

Отложим на время вышеприведенную задачу, являющуюся реальной частной проблемой физика-экспериментатора, работающего в лаборатории, и начнем с простейших примеров. Пусть мы смешиваем две жидкости, масса каждой из которых измерена с определенной точностью: $m_1 \pm \delta m_1$ и $m_2 \pm \delta m_2$. Очевидно, что масса всей жидкости находится в пределах от $M_{\min} = m_1 + m_2 - (\delta m_1 + \delta m_2)$ до $M_{\max} = m_1 + m_2 + (\delta m_1 + \delta m_2)$. Верно ли утверждать, что масса жидкости известна с точностью $\delta M = \delta m_1 + \delta m_2$ и равна $m_1 + m_2 \pm (\delta m_1 + \delta m_2)$?

Аналогичным образом рассмотрим задачу о нахождении скорости бегуна при известных длине дистанции и скорости бега: $S \pm \delta S$, $t \pm \delta t$. Будем рассматривать относительные погрешности типа $\delta S/|S|$. Тогда искомое значение скорости

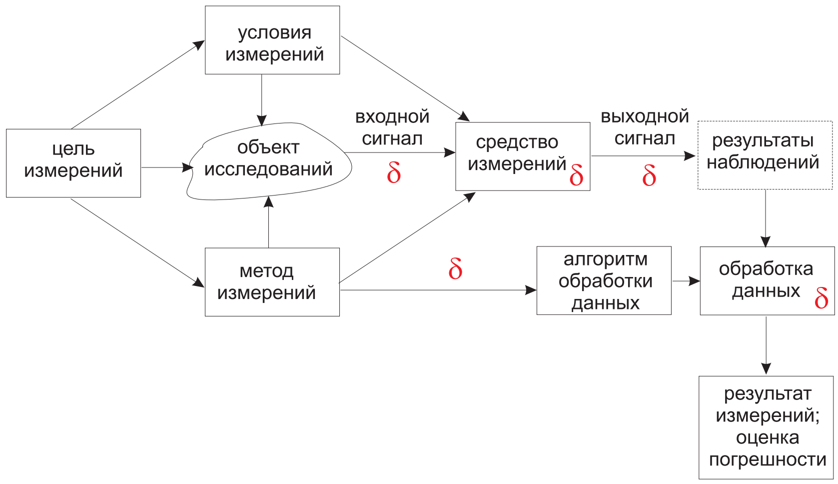

Рис. 2. Схема определения физической величины и погрешностей измерения

$$v = \frac{S}{t} \cdot \frac{1 \pm \delta S/|S|}{1 \pm \delta t/|t|}. \tag{1}$$

Найдем максимальное и минимальное значения данной величины. Очевидно, наибольшее значение соответствует максимальному числителю и минимальному знаменателю. Разложим данное выражение по малому параметру $\delta t/|t|$:

$$v_{\max} = \frac{S}{t} \cdot \frac{1 + \delta S/|S|}{1 - \delta t/|t|} \approx \frac{S}{t}(1 + \delta S/|S|)(1 + \delta t/|t|); \tag{2}$$

$$v_{\max} \approx \frac{S}{t}(1 + \delta S/|S| + \delta t/|t|). \tag{3}$$

Аналогичным образом можно получить, что нижний предел соответствует такому же выражению с двумя знаками “минус” при относительных погрешностях. Тогда скорость найдется как

$$v = \frac{S}{t}\left(1 \pm \left(\frac{\delta S}{|S|} + \frac{\delta t}{|t|}\right)\right). \qquad (4)$$

Приведенные выше формулы, в которых погрешность суммы (разности) определяется суммой погрешностей, а погрешность частного (произведения) определяется суммой относительных погрешностей, часто очень сильно переоценивает суммарную погрешность измерений. Действительно, логично предположить, что для случайных ошибок и независимых измерений при проведении большого числа испытаний в 50% случаев недооценка, к примеру, расстояния, будет компенсироваться переоценкой времени, и наоборот. Тогда погрешность суммы (разности)

$$q = a + b + ... - (k + l) \qquad (5)$$

определится как

$$\delta(q) = \sqrt{(\delta a)^2 + (\delta b)^2 + (\delta k)^2 + (\delta l)^2}, \qquad (6)$$

а погрешность произведения (частного)

$$q = \frac{a \cdot ... \cdot b}{k \cdot ... \cdot l} \qquad (7)$$

как

$$\frac{\delta(q)}{|q|} = \sqrt{\left(\frac{\delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\delta b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\delta k}{k}\right)^2 + \left(\frac{\delta l}{l}\right)^2}. \qquad (8)$$

Сказанное выше неприменимо для систематических погрешностей, которые не являются случайными и дают, фактически, сдвиг среднего значения в ту или иную сторону. Интересно отметить, что иногда случайные и систематические погрешности могут иметь одну и ту же природу. К примеру, при измерении давления U–образным манометром один из исследователей старается стоять так, чтобы мениск масла совпадал с уровнем глаз. В этом случае он ошибется, скажем, на ± 0.5 мм, что для масляного манометра составит 1/30 торр (15 мм масла = 1 мм рт. ст. = 1 торр). Второй же смотрит на манометр сверху или снизу, каждый раз получая сдвиг около 3 мм (1/5 торр). Одно и то же явление — параллакс — вызывает в одном случае небольшую случайную, в другом — в 5 раз более существенную систематическую ошибку. Вернемся к обсуждению независимости измерений.

Решим небольшую задачу, наглядно демонстрирующую отличие погрешности, определенной по прямому правилу сложения и по правилу сложения среднеквадратичных ошибок.

Задача 1

Определить КПД электрического двигателя η, примененного для поднятия груза массой $m = 1 \pm 0.01$ кг на высоту $h = 1 \pm 0.01$ м за время $t = 1 \pm 0.05$ мин при условии, что приложенное напряжение было равно $U = 100 \pm 0.01$ В, ток $I = 0.1 \pm 0.001$ А. Определить погрешность, считая, а) что мы не можем анализировать зависимость всех измеренных величин друг от друга; б) предполагая, что зависимость между отдельными измерениями отсутствует.

Решение

Вычислим КПД как

$$\eta = \frac{\text{полезная работа}}{\text{подведенная энергия}} = \frac{mgh}{UIt} = \frac{1 \cdot 9.8 \cdot 1}{100 \cdot 0.1 \cdot 60} = \frac{9.8}{600} = 0.016. \tag{9}$$

Соответственно максимальная погрешность равна

$$\delta_{\max} \approx \frac{\delta m}{|m|} + \frac{\delta h}{|h|} + \frac{\delta U}{|U|} + \frac{\delta I}{|I|} + \frac{\delta t}{|t|} = (1+1+1+1+5)\% = 9\%. \tag{10}$$

Погрешность, определенная как квадратичная сумма, существенно меньше:

$$\delta = \sqrt{\left(\frac{\delta m}{|m|}\right)^2 + \left(\frac{\delta h}{|h|}\right)^2 + \left(\frac{\delta U}{|U|}\right)^2 + \left(\frac{\delta I}{|I|}\right)^2 + \left(\frac{\delta t}{|t|}\right)^2}; \tag{11}$$

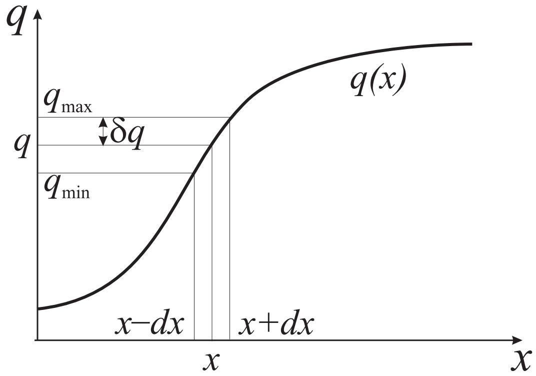

Рис. 3. К определению погрешности искомой величины, заданной аналитической функцией

$$\delta = \sqrt{1+1+1+1+25} = \sqrt{29} \approx 5.4\%. \qquad (12)$$

Заметим, что в случае, когда искомая величина является функцией, заданной аналитически, ее погрешность также находится достаточно просто. Пусть $q(x)$ — аналитическая функция, зависящая от переменной x. Из рис. 3 очевидно, что погрешность определения функции δq при известной погрешности переменной δx равна

$$\delta q = \left(q(x+\delta x) - q(x)\right)|_{\delta x \to 0} \to \frac{\partial q}{\partial x} dx. \qquad (13)$$

Разумеется, подобные вещи следует помнить при организации эксперимента. Рассмотрим две задачи, чтобы почувствовать, как погрешность переменной может влиять на погрешность зависимой величины.

Задача 2

Тележка скатывается по наклонной плоскости. Экспериментатор определяет скорость тележки в двух точках плоскости S_2 и S_1, деля длину тележки l на время прохождения тележкой фотоэлемента t_i. Определить ускорение и его погрешность, если определенные длины равны $S = S_2 - S_1 = 100.0 \pm 0.2$ см (0.2%), $l = 5.0 \pm 0.05$ см (1%), а времена составляют $t_1 = 0.054 \pm 0.001$ с (2%), $t_1 = 0.031 \pm 0.001$ с (3%).

Решение

$$S_2 - S_1 = S = \frac{a(t_{02}^2 - t_{01}^2)}{2}|_{v=at} = \frac{1}{2a}(v_2^2 - v_1^2); \qquad (14)$$

Здесь t_{02} и t_{01} — времена прохождения тележкой расстояния от некоторой точки, где ее скорость была равна нулю, до точек S_2 и S_1 соответственно.

$$a = \frac{1}{2S}(v_2^2 - v_1^2) = \frac{l^2}{2S}\left(\frac{1}{t_2^2} - \frac{1}{t_1^2}\right). \qquad (15)$$

Определим отдельно значение и погрешность $l^2/2S$, $1/t_2^2$ и $1/t_1^2$.

$$\frac{l^2}{2S} = \frac{25}{200} = 0.125 \text{ см}; \qquad (16)$$

$$\frac{\delta q}{q} = \sqrt{\left(2\frac{\delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\delta S}{S}\right)^2} = \sqrt{2^2 + 0.2^2} \approx 2\%. \qquad (17)$$

Для времен получим

$$\frac{1}{t_1^2} = 343 \pm 14 \text{ с}^{-2}; \qquad (18)$$

$$\frac{1}{t_2^2} = 1041 \pm 62 \text{ с}^{-2}; \qquad (19)$$

$$\frac{1}{t_2^2} - \frac{1}{t_1^2} = 698 \pm 64 \text{ с}^{-2} \quad (9\%). \qquad (20)$$

Окончательно

$$a = (0.125 \text{ см} \pm 2\%) \cdot (698 \text{ с}^{-2} \pm 9\%). \qquad (21)$$

Перемножая значения величин в скобках и складывая погрешности квадратично, придем к выводу, что

$$a = (87 \pm 8)\ \text{см}^2/\text{с}. \qquad (22)$$

Следует отметить две характерных особенности полученного результата: во-первых, основной в данной задаче является погрешность измерения времени; во-вторых, эта погрешность сильно возрастает при вычислении разности обратных квадратов. Частично рост погрешности обусловлен возведением в квадрат, частично — нахождением малой разности двух больших величин.

Задача 3

Образование возбужденных молекул в импульсном газовом разряде определяется тремя процессами: возбуждением прямым электронным ударом M+e→M*+e; радиационным расселением M* →M+$h\nu$ и тушением M*+M → $Prod$. Концентрация возбужденных состояний M* мала по сравнению с концентрацией исходных молекул M. Время радиационного расселения и тушения в несколько раз больше длительности импульса возбуждения. Предположим, что мы умеем измерять абсолютную интенсивность излучения с достаточным временным разрешением и проводить эксперименты при различных давлениях. Как определить скорость заселения молекул электронным ударом? Какова будет ее погрешность и что будет оказывать на эту погрешность максимальное влияние?

Решение

Кинетическое уравнение для процессов заселения и расселения уровня M* запишется как

$$\frac{d[M^*]}{dt} = Q - \frac{[M^*]}{\tau} - k_q[M^*][M]. \qquad (23)$$

Мы можем определить в эксперименте концентрацию возбужденных молекул и ее изменение во времени (а, следовательно, производную в левой части). Проводя эксперимент при разных давлениях, определим τ и k_q. Тогда скорость заселения электронным ударом получим как

$$Q = \frac{d[M^*]}{dt} + \frac{[M^*]}{\tau} + k_q[M^*][M]. \tag{24}$$

Далее читателю предоставляется возможность самостоятельно проанализировать погрешности основных членов.

2.1.1. Биномиальное и Гауссово распределение

Вернемся к рассмотрению случайных погрешностей и обсудим, откуда берется квадратичное сложение. Ответ на подобный вопрос дает элементарная статистическая физика. Рассмотрим некоторую статистическую систему из N статистически независимых случаев (к примеру, измерений). Пусть вероятность возникновения определенного случая (например, что измеряемая величина равна определенному значению — 3) равна p. Тогда вероятность того, что такой случай не возникнет, равна $q = 1 - p$. Какова вероятность $P(n)$ возникновения n подобных случаев?

Поскольку мы считаем измерения статистически независимыми, то вероятность получить n раз величину, равную 3, равна $pp...p|_n$ раз $\times$ $qq...q|_{N-n}$ раз, но конфигурация, при которой выполняется поставленное условие, может быть осуществлена различными способами (мы можем получать значение 3 в разных измерениях). Следовательно, в соответствии с теорией вероятностей, вероятность осуществления либо первой, либо второй, либо последней из возможных конфигураций равна сумме вероятностей, то есть

$$P(n) = C_N(n) p^n q^{N-n}, \tag{25}$$

где $C_N(n)$ – число различных конфигураций, при которых значение искомой величины равно заданному значению (к примеру, выбранному нами значению 3):

$$C_N(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!}. \tag{26}$$

Таким образом, распределение

$$P(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} \tag{27}$$

называется биномиальным распределением и отражает вероятность возникновения n раз нужного нам значения при N независимых измерениях физической величины. Решим задачу на биномиальное распределение.

Задача 4

Четыре студента приходят сдавать экзамен профессору, у которого вероятность получения неудовлетворительной оценки составляет 80%. Определить вероятность того, что один из 4-х студентов сдаст экзамен.

Решение

$$P(1) = \frac{4!}{1!3!} 0.2^1 0.8^3 \approx 0.41 = 41\%. \tag{28}$$

Обычно для характеристики разброса данных используют понятие дисперсии:

$$\langle (\Delta u)^2 \rangle = \langle (u - \langle u \rangle)^2 \rangle, \tag{29}$$

линейной же мерой разброса является квадратный корень из дисперсии, то есть величина

$$(\Delta u) = \sqrt{\langle (\Delta u)^2 \rangle}. \tag{30}$$

Данные биномиального распределения можно представить в виде гистограммы, на которой по оси абсцисс отложено значение измеряемой величины, по оси ординат — доля измерений, дающая именно это значение (рис. 4а). С ростом числа измерений (при $N \to \infty$) распределение будет стремиться к некоторой определенной непрерывной кривой, называемой *предельным распределением* (рис. 4б). В этом случае $\int\limits_a^b f(x)dx$ есть доля измерений, попадающих в интервал от a до b или, что то же, вероятность того, что результат любого единичного измерения попадет в интервал $[a; b]$. Говорят, что функция нормирована на единицу, если

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)d\,x = 1, \tag{31}$$

то есть полная вероятность получения результата, лежащего в интервале от $-\infty$ до ∞, при единичном измерении равна единице.

Среднее значение измеряемой величины определится тогда как

$$\langle x\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)d\,x, \tag{32}$$

а дисперсия:

$$\langle(\sigma_x)^2\rangle = \langle(x- < x >)^2\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(x - \langle x\rangle)^2 f(x)d\,x. \tag{33}$$

Из вышесказанного следует, что отличие измерений с высокой точностью от измерений с низкой проявится на зависимости $f(x)$ как более высокая и узкая колоколообразная кривая (рис. 5).

Подобная функция называется Гауссовой или гауссианом и представляется как

$$f(x) \sim e^{-x^2/(2\sigma^2)}, \tag{34}$$

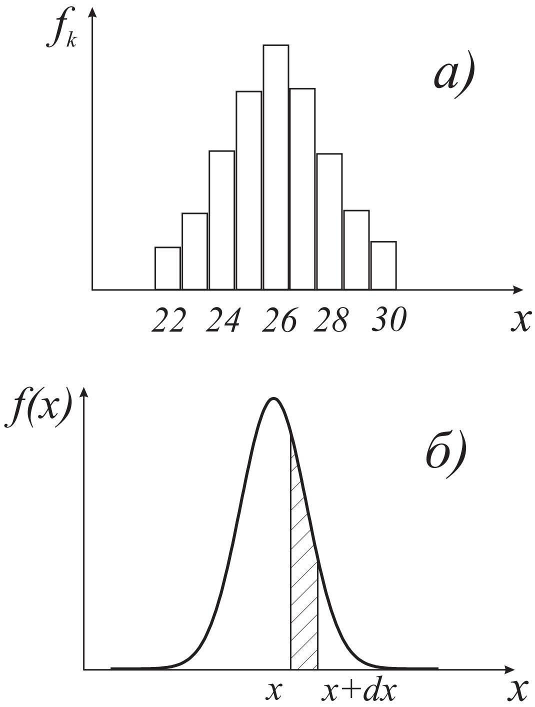

Рис. 4. Примеры биномиального (а) и Гауссова (б) распределений

где σ – некий фиксированный параметр, определяющий, собственнно, ширину функции. В общем случае среднее значение не должно находиться в нуле, поэтому заменим x на $x - X$:

$$f(x) \sim e^{-(x-X)^2/(2\sigma^2)}. \qquad (35)$$

Далее потребуем выполнения условия нормировки

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)d\,x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} Ne^{-(x-X)^2/(2\sigma^2)}d\,x = 1, \qquad (36)$$

и определим значение нормировочной константы N. Сделаем

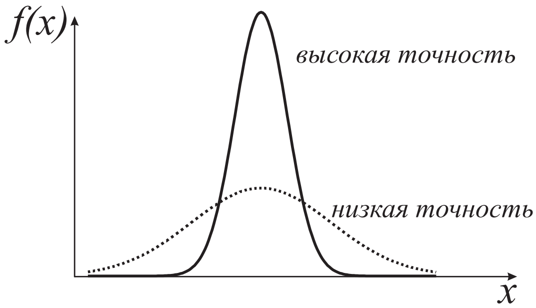

Рис. 5. Различие распределений при разной точности измерений

замену переменных $z = (x - X)/\sigma$. Тогда $dx = \sigma dz$, а уравнение (36) перепишется как

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)d\,x = N\sigma \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} d\,z = 1. \tag{37}$$

Известно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz = \sqrt{2\pi}. \tag{38}$$

Тогда окончательно для нормировочного множителя получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = N\sigma\sqrt{(2\pi)} = 1; \qquad N = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}. \tag{39}$$

и окончательное представление Гауссовой функции запишется как

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}}. \tag{40}$$

Теперь можно строго показать, что среднее значение полученной функции $\langle x \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = X$, а стандартное отклонение $\sigma_x^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 f(x) dx = \sigma^2$, то есть параметр ширины функции Гаусса есть стандартное отклонение, ожидаемое в случае бесконечного числа измерений.

2.1.2. Доверительный интервал. Вычисление интеграла ошибок

Вычислим вероятность того, что результат единичного измерения окажется в пределах одного отклонения σ от среднего значения X. Эта вероятность равна

$$P = \int\limits_{X-\sigma}^{X+\sigma} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{X-\sigma}^{X+\sigma} e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}} dx. \qquad (41)$$

Сделаем подстановку $z = (x - X)/\sigma$, $dx = \sigma dz$ и учтем, что пределы интегрирования равны $z = \pm 1$. Тогда

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-1}^{1} e^{-(z^2/2)} dz. \qquad (42)$$

Интеграл

$$erf(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-t}^{t} e^{-(z^2/2)} dz \qquad (43)$$

хорошо известен в математической физике и называется интегралом ошибок. Он не вычисляется аналитически, но может быть рассчитан. Из графика $erf(t)$, представленного на рис. 6, видно, что $erf(1) = 0.68$. Таким образом, полуширина функции Гаусса σ — это 70%-й доверительный интервал, то есть вероятность того, что в произвольном измерении отклонение измеренной величины от истинного значения не превышает стандартного отклонения σ, равна 70%.

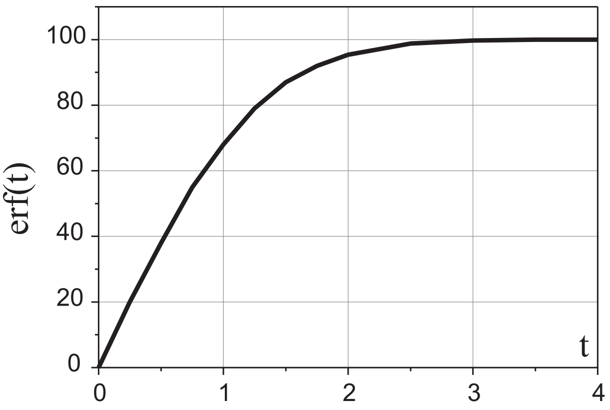

Рис. 6. Нормальный интеграл ошибок

Согласитесь, этот результат вселяет некий оптимизм. Действительно, в 70% случаев мы получаем в измерении величину, удаленную от среднего значения не более, чем на полуширину разброса.

2.1.3. Вычисление погрешности в комплексных измерениях

Обоснуем математически квадратичное сложение ошибок в случае сложения величин. Пусть для простоты средние значения X и Y равны нулю, вероятность получения того или иного значения представляет Гауссову функцию с шириной соответственно σ_x или σ_y. Найдем погрешность определения величины $X+Y$. Вероятность получения любого значения x и y

$$P(x) \sim \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right); \quad P(y) \sim \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_y^2}\right). \tag{44}$$

Тогда вероятность получения одновременно любого частного значения $x+y$ определится как произведение вероятностей:

$$P(x+y) \sim \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)\right). \tag{45}$$

Выделим из данного выражения сумму $x + y$, пользуясь следующим соотношением:

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = \frac{B(A+B)x^2 + A(A+B)y^2}{AB(A+B)} = \frac{(x+y)^2}{A+B} + z, \tag{46}$$

и будем рассматривать вероятность получения данных значений x и y как вероятность получения данных значений $x+y$ и z. Тогда

$$P(x+y,z) \sim \exp\left[-\frac{(x+y)^2}{2(\sigma_x^2+\sigma_y^2)} - \frac{z^2}{2}\right]. \tag{47}$$

Найдем вероятность получения данного значения $x+y$ безотносительно к тому, какое значение примет z. Для этого проинтегрируем полученное выражение по z от $-\infty$ до ∞, принимая во внимание, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}dz = \sqrt{2\pi}$:

$$P(x+y,z) \sim \exp\left[-\frac{(x+y)^2}{2(\sigma_x^2+\sigma_y^2)}\right]. \tag{48}$$

Фактически, мы получили, что значения $x+y$ распределены нормально с шириной $\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}$, как и ожидалось.

Рассмотрим более общий случай. Пусть мы измеряем две независимые величины x и y, наблюдаемые значения которых распределены нормально, и вычисляем некоторую их функцию $q(x,y)$. В пределе малых отклонений можно записать

$$q(x,y) \approx q(X,Y) + \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_{X,Y}(x-X) + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)_{X,Y}(y-Y). \tag{49}$$

Проанализируем полученное выражение. Первый член в сумме — фиксированное число, он может только смещать распределение, но не дает разброса. Второй — фиксированное число $\partial q/\partial x$, умноженное на $(x - X)$, распределенное с шириной σ_x. Значит, итоговое распределение для данной величины будет иметь ширину $(\partial q/\partial x)\sigma_x$. Аналогично определим разброс для третьего члена: $(\partial q/\partial y)\sigma_y$. Тогда получим, что итоговая величина $q(x, y)$ распределена нормально около истинного значения $q(X, Y)$ с шириной

$$\sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\sigma_x\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\sigma_y\right)^2}. \qquad (50)$$

Таким образом, мы получили математическое обоснование для правил сложения ошибок.

Задача 5

В эксперименте были получены значения начальной и конечной энергии системы, участвующей в ядерной реакции: $E_i = 75 \pm 3$ Мэв; $E_f = 60 \pm 9$ Мэв. Означает ли это, что закон сохранения энергии не выполняется ($erf(1.6) = 89\%$)?

Решение

$$E_f - E_i = 15 \text{ МэВ}; \qquad \delta = 9.5 \text{ МэВ}. \qquad (51)$$

Полученное значение отличается на 15/9.5, или на 1.6 стандартных отклонений. Поскольку вероятность попасть в подобный или больший разброс составляет 11%, данный результат, вообще говоря, не означает, что закон сохранения энергии не выполняется.

Таким образом, настоящий семинар представляет собой краткое обобщение материала из курсов общей физики, теории вероятности и статистической физики, относящегося к оценке погрешностей эксперимента. В курсе семинарских занятий мы не раз будем возвращаться к этой теме, но уже в процессе рассмотрения конкретных физических задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лабораторные* занятия по физике / Под ред. Л.Л. Гольдина. — М.: Наука, 1983.

2. *Тейлор Дж.* Введение в теорию ошибок. — М.: Мир, 1985.

3. *Рейч Ф.* Статистическая физика. (Из цикла "Берклеевский курс физики". Т. 5). — М.: Наука, 1986.