

Высшее Военно-Морское Инженерное ордена Ленина Училище
имени Ф. Э. Дзержинского

Н. С. СОЛОМЕНКО и Ю. П. РУМЯНЦЕВ

048116

1900

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ПОДВОДНЫХ ЛОДОК

Под редакцией
доктора технических наук профессора
В. П. БЕЛКИНА

Утверждено

*Начальником Военно-морского училища
инженеров в качестве учебника для курсантов
ВВММУ им. Ф. Э. Дзержинского*

Уо

390439

ОТДЕЛ учебников

БЫСТРОСТЕ А

ДЛЯ В. П. БЕЛКИНА

Высшее Военно-Морское Инженерное ордена Ленина
Училище имени Ф. Э. Дзержинского
Ленинград
1952

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга является учебником по строительной механике подводных лодок. В основу учебника положены работы создателей строительной механики подводных лодок проф. И. Г. Бубикова, проф. П. Ф. Панючина, акад. Ю. А. Швацкопфа, проф. В. В. Новожилова, проф. В. Ф. Сегеля, а также других отечественных и иностранных ученых.

Строительная механика подводных лодок базируется на основных результатах теории тонких оболочек, поэтому в учебнике изложены основы теории тонких оболочек, без знания которых невозможно изучение курса.

Учебник состоит из десяти глав. В главе I изложены основы теории тонких оболочек, в том числе и безмоментной теории. Глава II посвящена теории устойчивости тонких оболочек, причем излагается только классическая теория устойчивости. В главе III рассмотрены условия, действующие на прочный корпус, а также даны рекомендации по выбору расчетных условий. Наибольшей по объему является IV глава «Расчет основных элементов прочного корпуса». Здесь изложены методы определения напряжений в обшивке, шпангоутах и ребрах жесткости прочного корпуса, а также методы расчета устойчивости обшивки и шпангоутов.

Остальные главы учебника посвящены расчетам прочности и устойчивости других конструкций корпуса. В главе V рассмотрены методы расчета круглых, эллиптических и овальных рубок. Главы VI и VII посвящены расчетам прочности поперечных переборок, причем в главе VI рассмотрены сферические переборки, а в главе VII — плоские. Большое внимание уделено в учебнике изложению методов расчета составных шпангоутов, а также шпангоутом некрутого сечения (главы VIII и IX). Последние главы учебника (главы X) «Расчеты местной прочности» посвящены изложению методов расчета прочности корпуса в районе переборок и в районе выкружек гребных валов.

Особо важное место в учебнике уделено разъяснению физической сущности явлений, методам решения практических задач, оценке принятых допущений и допущений, а также предостережению относительно полученных результатов.

При написании учебника авторы широко использовали литературу, приведенную в конце книги.

Введение и главы I, II, III, IV, VI и X написаны кандидатом технических наук доцентом Н. С. Соломенко, а главы V, VII, VIII и IX — кандидатом технических наук доцентом Ю. Н. Румянцевым.

Авторы выражают благодарность доктору технических наук В. С. Чувиловскому и доктору технических наук В. С. Калинин, сделавшим ряд ценных замечаний.

Авторы

ВВЕДЕНИЕ

Строительной механикой подводных лодок называют науку, изучающую внешние силы, действующие на корпус подводной лодки, напряженное состояние и устойчивость корпуса, а также допустимые пределы возникающих в нем напряжений и деформаций. На основе этого изучения строительная механика подводных лодок дает практические методы расчета прочности и устойчивости корпуса.

Широкое применение в строительной механике подводных лодок получили оболочки как упругие тела, обладающие высокой прочностью при сравнительно малом весе.

Прочный корпус подводной лодки представляет собой замкнутую конструктивно анисотропную оболочку, состоящую из цилиндрических, конических и овальных участков. Конструкцииистерии легкого корпуса, причиня паружных и внутренних истерии, сферических конических и межотсечных переборок и рубок являются либо изотропными, либо конструктивно анизотропными оболочками. Поэтому естественно, что строительная механика подводных лодок базируется на достижениях теории тонких оболочек как одного из основных разделов теории упругости.

Необходимо отметить, что вследствие высокой прочности и относительной легкости, кроме судостроения, оболочки широко применяются в приборостроении, авиаприборостроении, котло- и турбостроении и многих других областях техники.

Главная задача практического расчета заключается в проверке достаточности прочности конструкции. Конечно, в ряде случаев, назначив заданно заниженные размеры связей конструкции, можно обеспечить достаточную прочность и не прибегая к расчету, однако такая конструкция будет перетяжеленной, а следовательно, нерациональной и дорогой. Поэтому целью расчета в конечном счете является создание рациональной конструкции, обладающей наряду с необходимой прочностью возможно меньшим весом. Требование минимального веса особенно важно для подводного судостроения.

Задача создания рациональной конструкции включает в себя решение трех важнейших проблем:

1. Проблемы внешних усилий, действующих на конструкцию.
2. Проблемы определения внутренних усилий и обеспечения устойчивости конструкции при заданных внешних силах,
3. Проблемы веса прочности.

Каждая из упомянутых проблем одинаково важна, ибо ошибка в опасную сторону, допущенная при определении внешних сил или внутренних усилий в конструкции, равно как и ошибка при назначении

норм прочности, может привести к катастрофическим последствиям. Последнее очень важно иметь в виду, так как разрушение прочного корпуса приводит к гибели подводной лодки вместе с личным составом, и той находящимся. Только правильное решение всех трех проблем позволяет создать рациональные конструкции корпуса подводных лодок.

Особое место в строительной механике подводных лодок занимает проблема устойчивости упругого равновесия прочного корпуса и других прочных конструкций. Поскольку при нахождении на глубине прочный корпус подводной лодки нагружен внешним гидростатическим давлением, обеспечение несущей формы упругого равновесия является первоочередной задачей. Потеря устойчивости несущей формы равновесия прочного корпуса вследствие превышения действующими усилиями критической величины приведет к его разрушению. Этим объясняется то особое внимание, которое уделяется вопросам устойчивости в строительной механике подводных лодок.

Большое значение необходимо уделять проблеме норм прочности. При определении норм для опасных и допускаемых напряжений, а также запасов устойчивости конструкций корпуса должно быть по возможности учтено все многообразие факторов, определяющих прочность и устойчивость корпуса. В частности, необходимо учитывать степень точности определения величин и характера принятых расчетных усилий, условность используемых расчетных методов, возможное влияние на прочность технологии сборки и сварки корпусных конструкций, возможные отклонения механических характеристик материала от их спецификационных значений и другие важные факторы.

Проблема норм прочности налагается в общей постановке в чисто учебный план, поэтому конкретные нормы допускаемых напряжений и запасов устойчивости обобщены в приложениях в учебнике не приводятся.

Прежде чем перейти к изложению материала, целесообразно кратко остановиться на истории развития строительной механики подводных лодок, а также на основных работах, посвященных в основу этой науки.

Основоположником науки строительная механика подводных лодок является создатель русской школы строительной механики кораблей профессор И. Г. Бубнов (1872—1919 гг.), который не только разработал методы расчета прочности и устойчивости корпуса первых отечественных подводных лодок, но и принял непосредственное участие в проектировании корпусов этих лодок.

Широкое применение в расчетной практике получила работа И. Г. Бубнова «Критическое давление для тонкостенной трубы, подвергнутой ребранию», опубликованная в «Вестнике морских инженеров» в 1916 г. В этой работе даны простые расчетные формулы для определения как критического давления, так и числа волн при потере устойчивости оболочки.

И. Г. Бубнову принадлежит идея создания первой подводной лодки чисто боевого назначения — подводной лодки «Барс». Необходимо отметить, что подводные лодки, созданные под руководством И. Г. Бубнова и при его непосредственном участии, были по тому времени довольно совершенны и долгое время находились на вооружении отечественного флота.

Со смертью И. Г. Бубнова заканчивается первый период развития строительной механики подводных лодок.

Подлинный расцвет строительной механики подводных лодок относится к периоду, начавшемуся после Великой Октябрьской социалисти-

ческой революция. Этот расцвет связан с именами проф. П. Ф. Палкоича, академика Ю. А. Шиманского, проф. В. В. Новожилова, проф. В. Ф. Сегала.

Профессор П. Ф. Палкоич (1887—1946 гг.) на базе современных достижений общей теории упругости и теории тонких оболочек решил ряд важных задач строительной механики подводных лодок. Работы П. Ф. Палкоича «О напряжениях в цилиндрической оболочке прочного корпуса подводных лодок» 1928 г., «Расчетные формулы для проверки устойчивости цилиндрической оболочки прочного корпуса подводных лодок» 1929 г., «К вопросу об изгибе кругового кольца в цилиндрической оболочке, вызванном неравномерным отступлением от ее правильной формы» 1933 г., «О напряжениях в шпангоутах цилиндрической оболочки» 1935 г. и другие широко используются в расчетной практике. Выполненные исследования позволили П. Ф. Палкоичу дать простые расчетные схемы определения напряжений в обшивке и шпангоутах прочного корпуса, а также расчетные формулы для определения критического давления обшивки, удобные для практического использования.

Большая часть работ П. Ф. Палкоича по строительной механике подводных лодок вошла в его классическую монографию «Строительная механика корабля», ч. I, т. II. Необходимо отметить, что П. Ф. Палкоич принимал непосредственное участие в проектировании и постройке первых советских подводных лодок.

Большой вклад в строительную механику подводных лодок внес академик Ю. А. Шиманский (1883—1962 гг.). В работах Ю. А. Шиманского «Изгиб тонких цилиндрических оболочек, подверженных ребристым конечной жесткости» 1932 г., «Влияние первоначальной погрешности в кольце и цилиндрической оболочке на ее прочность» 1933 г., «Устойчивость тонких цилиндрических оболочек в изогнутых частях» 1936 г. разработаны важные вопросы строительной механики подводных лодок.

Ю. А. Шиманский впервые обратил внимание на влияние отклонений от правильной круговой формы на величину критического давления и провел большую экспериментальную работу по определению поправочных коэффициентов к теоретическим формулам устойчивости.

В 1936 году Ю. А. Шиманским был написан первый курс по строительной механике подводных лодок. В 1948 г. вышла в свет монография Ю. А. Шиманского «Строительная механика подводных лодок», в которой даны теоретические решения и практические методы расчета конструкций корпусов подводных лодок. Ю. А. Шиманский был инициатором и руководителем многочисленных экспериментальных исследований прочности и устойчивости оболочек, принимал активное участие в разработке справочников, норм и других руководящих материалов.

Важное значение для развития строительной механики подводных лодок имеют работы проф. В. В. Новожилова. Замечательная монография В. В. Новожилова «Теория тонких оболочек», изданная в 1947 и 1951 гг., дает подробное изложение общей и безмоментной теории оболочек, теории цилиндрических оболочек и оболочек вращения. В. В. Новожиловым разработана общая теория устойчивости упругих тонких оболочек.

Крупный ученый-теоретик В. В. Новожилов уделял много внимания разработке вопросов строительной механики подводных лодок. Первая работа В. В. Новожилова по строительной механике подводных лодок «Расчет прочности асимметричных шпангоутов подводных лодок» была опубликована в 1935 г.

Исследования В. В. Новожилова по определению критической нагрузки цилиндрических оболочек, подкрепленных упругими ребрами, напряженного состояния овальных безреберных рубок подводных лодок, влияния поперечных переборок на напряженное состояние конструкций прочного корпуса и другие широко используются в расчетной практике.

Большое значение имеют работы В. Ф. Сегала по разработке многих практических методов строительной механики подводных лодок, исследованию влияния начальной погрешности на напряженное состояние обшивки и шпангоутов, исследованию прочности цилиндрических оболочек в районе сферических переборок, а также по исследованию прочности криволинейных рам, образующих набор цистерны прочного корпуса.

В настоящее время над разработкой проблем строительной механики подводных лодок плодотворно трудятся ученики и последователи П. Ф. Панковича, Ю. А. Шиманского, В. В. Новожилова и В. Ф. Сегала.

ОБОЗНАЧЕНИЯ, ПРИНЯТЫЕ В КНИГЕ

x, y, z — прямоугольные координаты;

α_1, α_2 — криволинейные координаты поверхности;

e_1, e_2, e_n — единичные векторы (орты), направленные по касательным к координатным линиям α_1 и α_2 и нормали к срединной поверхности;

A_1, A_2 — параметры Ламе;

R_1, R_2 — главные радиусы кривизны поверхности в рассматриваемой точке;

ds_1, ds_2 — приращения дуг координатных линий α_1 и α_2 , соответствующие приращениям $d\alpha_1$ и $d\alpha_2$;

u, v, w — проекции перемещения точки срединной поверхности на направления e_1, e_2, e_n ;

$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon$ — относительные удлинения и сдвиг срединной поверхности;

κ_1, κ_2, τ — изменения кривизны и кручение срединной поверхности;
 δ — толщина обложки;

σ_{11}, σ_{22} — нормальные напряжения в площадках, перпендикулярных к срединной поверхности;

σ_{12}, σ_{21} — касательные напряжения в тех же площадках, действующие в направлении координатных линий α_1 и α_2 ;

σ_{1n}, σ_{n1} — касательные напряжения в тех же площадках, действующие в направлении нормали к срединной поверхности;

$T_{11}, T_{22}, T_{12}, T_{21}, N_{11}, N_{22}$ — нормальные, касательные и перерезывающие усилия в тех же площадках, отнесенные к единице длины срединной поверхности;

M_{11}, M_{22} — изгибающие и крутящие моменты в тех же площадках, отнесенные к единице длины срединной поверхности;

ϕ_1, ϕ_2, ϕ_n — проекции вектора поверхностной нагрузки q на направления e_1, e_2 и e_n ;

E — модуль продольной упругости;

G — модуль упругости при сдвиге;

ν — коэффициент Пуассона;

$E_{\text{ср}}$ — приведенный модуль упругости;

$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость;

V — потенциальная энергия деформации;

U — работа внешних сил;

$d\Omega$ — элементарный объем;

λ — объемное расширение;

- χ, φ — криволинейные координаты круговой цилиндрической оболочки;
 r — радиус круговой цилиндрической оболочки;
 l — длина неподкрепленной цилиндрической оболочки (шпангоута);
 L — длина цилиндрической оболочки, подкрепленной ребрами жесткости;
 p — интенсивность равномерно распределенного давления, нормального к поверхности цилиндрической оболочки;
 $P_{кр}$ — теоретическое значение критического давления;
 $P_{кр}$ — действительное критическое давление;
 n — число волн, образующихся по периметру оболочки при потере устойчивости;
 m — число полуволн по длине оболочки, образующихся при потере устойчивости;
 F — площадь сечения шпангоута;
 f — площадь сечения промежуточного ребра жесткости;
 I — момент инерции шпангоута вместе с присоединенным пояском оболочки (обшивки);
 h — глубина погружения.
-

ГЛАВА I

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

§ 1. Основные определения, гипотезы и допущения

В настоящей главе рассматриваются основы теории тонких оболочек, выполненных из однородного, изотропного и идеально упругого материала. Понятие о таком материале включает:

а) однородность материала, т. е. одинаковость его свойств в любых произвольно выбранных объемах тела;

б) изотропность материала, т. е. одинаковую зависимость между напряжениями и деформациями в любых произвольно выбранных направлениях;

в) идеальную упругость материала, т. е. линейную зависимость между напряжениями и деформациями.

Хотя идеально упругих материалов в природе не существует, тем не менее почти все металлы до нагрузок, при которых наступает отклонение от линейного закона изменения деформаций от напряжений, можно рассматривать как идеально упругие материалы. Погрешность, связанная с таким рассмотрением, невелика и практически с нею считаться не следует. Следовательно, область рассмотрения деформации оболочек ограничивается такими нагрузками, при которых наступает отклонение от закона Гука.

Прежде чем перейти к изложению последующих гипотез и допущений, необходимо дать определение оболочек как упругих тел.

Оболочками называются тела, ограниченные криволинейными поверхностями, расстояние между которыми мало в сравнении с прочими размерами тела.

Различают замкнутые и незамкнутые оболочки. Если оболочка не имеет никаких других границ, кроме упомянутых выше двух поверхностей, то такая оболочка называется замкнутой. Если, кроме упомянутых двух поверхностей, оболочка имеет еще и торцевые поверхности, то такая оболочка называется незамкнутой.

Геометрическое место точек, равноудаленных от обеих криволинейных поверхностей, называется *средней поверхностью* оболочки.

Отрезок перпендикуляра к средней поверхности оболочки между двумя ограничивающими оболочку криволинейными поверхностями называется *толщиной* оболочки и обозначается через δ , как показано на рис. 1. Здесь $ABCD$ — наружная криволинейная поверх-

ность; $A'B'C'D'$ — внутренняя криволинейная поверхность, $abcd$ — средняя поверхность.

Если толщина оболочки не меняется, то такая оболочка называется оболочкой постоянной толщины в отличие от оболочек переменной толщины, у которых толщина δ не является постоянной.

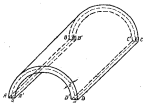


Рис. 1

Наибольший практический интерес представляют оболочки постоянной толщины, которые и будут предметом дальнейшего рассмотрения.

Средняя поверхность, толщина оболочки и граничный контур полностью определяют оболочку с геометрической стороны, и, поскольку они заданы, геометрия оболочки однозначно будет определена.

Различают тонкие и толстые оболочки. При рассмотрении первых из

них используются гипотезы Кирхгофа—Лива, то есть предполагается, что

а) прямолинейные волокна оболочки, перпендикулярные к средней поверхности до деформации, остаются прямолинейными и перпендикулярными к деформированной средней поверхности, сохраняя при этом свою длину;

б) нормальными напряжениями в площадках, параллельных средней поверхности, можно пренебречь в сравнении с напряжениями в других площадках.

Гипотезы Кирхгофа—Лива иногда называют гипотезами прямых нормалей, хотя последнее определение не является полным. Как показали В. В. Новожилов и Р. М. Финкельштейн,^{*} погрешность от использования гипотез Кирхгофа—Лива равна погрешности от пренебрежения отношением толщины оболочки δ к радиусу ее кривизны r в сравнении с единицей. Допуская для инженерного расчета относительную погрешность порядка пяти процентов, к категории тонких оболочек будем относить оболочки, у которых наибольшее отношение толщины к радиусу кривизны не превышает $1/20$. Если это условие не соблюдено, то такие оболочки будем относить к категории толстых оболочек.

Теория расчета толстых оболочек существенно сложнее таковой для тонких оболочек, так как принятые гипотезы Кирхгофа—Лива для тонких оболочек позволяют свести задачу о деформации оболочки как тела трех измерений к исследованию деформаций ее средней поверхности.

Однако в строительной механике подводных лодок используются исключительно тонкие оболочки. Поэтому в учебнике рассматривается только теория тонких оболочек. Наконец, рассматриваемая ниже общая

^{*} В. В. Новожилов, Р. М. Финкельштейн, О погрешности гипотез Кирхгофа в теории оболочек, ГИИМ, т. VII, 1943.

теория дается в геометрически линейной постановке, так как предполагается, что перемещения точек оболочки весьма невелики в сравнении с ее размерами.

При изучении материала необходимо всегда помнить о тех допущениях и гипотезах, которые приняты в качестве исходных, чтобы избежать возможных ошибок при распространении приведенных в учебнике результатов на расчетные случаи, в которых принятые гипотезы и допущения не могут быть использованы.

§ 2. Криволинейные координаты поверхности

Как будет показано ниже, перемещения любой точки оболочки, не лежащей на срединной поверхности, можно легко определить, зная перемещения срединной поверхности оболочки и отстояние этой точки от срединной поверхности. То же относится к деформациям оболочки и к напряжениям, пропорциональным этим деформациям.

Таким образом, для определения деформированного или напряженного состояния оболочки необходимо прежде всего знать деформированное или напряженное состояние ее срединной поверхности.

Поскольку по определению срединная поверхность оболочки является криволинейной поверхностью, постольку для изучения геометрии деформации срединной поверхности необходимо изучать теорию поверхностей. Подробное изучение теории поверхностей выходит за рамки настоящего курса, поэтому ограничимся лишь изложением некоторых основных свойств поверхностей, необходимых для дальнейшего изложения.

Известно, что кривую в пространстве трех измерений можно задать либо векторным равенством

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha), \quad (1.1)$$

либо тремя скалярными уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x &= x(\alpha) \\ y &= y(\alpha) \\ z &= z(\alpha) \end{aligned} \right\}. \quad (2.1)$$

В уравнении (1.1) $\mathbf{r}$ — радиус-вектор кривой, а α — произвольный параметр. Три скалярных равенства (2.1) есть не что иное, как проекция векторного равенства (1.1) на оси декартовой системы координат X, Y, Z . Таким образом, x, y, z есть проекция вектора $\mathbf{r}$ на оси X, Y, Z соответственно.

По аналогии всякую поверхность в пространстве трех измерений можно задать либо векторным равенством

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\alpha_1, \alpha_2), \quad (3.1)$$

либо тремя скалярными уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x &= x(\alpha_1, \alpha_2) \\ y &= y(\alpha_1, \alpha_2) \\ z &= z(\alpha_1, \alpha_2) \end{aligned} \right\}. \quad (4.1)$$

В векторном равенстве (3.1) вектор $\mathbf{R}$ — радиус-вектор поверхности, а α_1 и α_2 — некоторые произвольные параметры. Три скалярных

ур-ния (4.1) есть проекция векторного равенства (3.1) на координатные оси X, Y, Z , из чего следует, что x, y и z — проекции вектора $\mathbf{R}$ на координатные оси.

Если поверхность является плоской, то $x(\alpha_1, \alpha_2), y(\alpha_1, \alpha_2)$ и $z(\alpha_1, \alpha_2)$ — некоторые непрерывные функции параметров α_1 и α_2 .

Ограничим область изменения параметров α_1 и α_2 таким образом, чтобы каждой точке поверхности соответствовала только одна вполне определенная пара значений α_1 и α_2 . Тогда параметры α_1 и α_2 будут криволинейными координатами рассматриваемой поверхности.

Рассмотрим участок поверхности произвольной формы (рис. 2). Нанесем на эту поверхность семейство кривых α_1 и α_2 . Видно, что семейство кривых α_1 и α_2 образует на поверхности сетку. Каждой точке

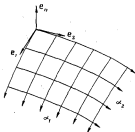


Рис. 2

поверхности соответствует одна вполне определенная пара значений α_1 и α_2 , т. е. любая точка поверхности может рассматриваться как точка пересечения двух линий α_1 и α_2 .

В каждой точке плоской поверхности можно провести две линии, кривизна которых достигает максимума и минимума. Эти линии на поверхности называются линиями главной кривизны.

Для каждой поверхности можно выбрать бесчисленное множество криволинейных координат. Однако наиболее удобной для использования является такая система криволинейных координат,

когда координатные линии α_1 и α_2 будут одновременно линиями главной кривизны поверхности.

Из теории поверхностей известно, что линии главной кривизны на поверхности взаимно ортогональны. Все дальнейшие выкладки будут относиться только к системе ортогональных криволинейных координат α_1 и α_2 .

Проведя в любой точке поверхности касательные к линиям α_1 и α_2 , а также нормаль к поверхности, мы получим триад $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_n$. В общем случае направления векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_n$ при переходе от одной точки поверхности к другой будут изменяться. Это обстоятельство необходимо учитывать при рассмотрении геометрии оболочек.

§ 3. Правила дифференцирования векторов по криволинейным координатам α_1 и α_2

Пусть параметр α_1 получит приращение $d\alpha_1$, и при этом параметр α_2 остался неизменным. В этом случае конец вектора $\mathbf{R}(\alpha_1, \alpha_2)$ переместится вдоль координатной линии α_2 (рис. 3).

Приращение вектора $\mathbf{R}(\alpha_1, \alpha_2)$ при приращении криволинейной координаты α_1 равно $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1$. При этом вектор $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \alpha_1}$ будет касателен к коор-

динатной линии α_1 . Аналогично приращение вектора $R(x_1, x_2)$ при приращении координаты x_2 равно $\frac{\partial R}{\partial x_2} dx_2$, причем вектор $\frac{\partial R}{\partial x_2}$ будет касателен к координатной линии α_2 .

В общем случае, когда имеет место приращение обеих координат x_1 и x_2 , полное приращение вектора $R(x_1, x_2)$ равно

$$dR = \frac{\partial R}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial R}{\partial x_2} dx_2. \quad (5.1)$$

Квадрат длины вектора dR представим в виде скалярного произведения вектора dR на самого себя, т. е.

$$(dR)^2 = \left(\frac{\partial R}{\partial x_1}\right)^2 dx_1^2 + 2 \left(\frac{\partial R}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial R}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 + \left(\frac{\partial R}{\partial x_2}\right)^2 dx_2^2. \quad (6.1)$$

В равенстве (6.1) символ $(\cdot)$ означает скалярное произведение двух векторов, а символ $(\cdot)^2$ — скалярное произведение вектора на самого себя.

Введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial R}{\partial x_1}\right)^2 &= A_1^2 \\ \left(\frac{\partial R}{\partial x_2}\right)^2 &= A_2^2 \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

где A_1 и A_2 носят название параметров Ламе поверхности или коэффициентов первой квадратичной формы (8.1).

Так как x, y, z — проекции вектора R на координатные оси X, Y, Z , то будем иметь следующие очевидные равенства:

$$\left. \begin{aligned} A_1^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2 \\ A_2^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

В силу ортогональности криволинейных координат скалярное произведение $\left(\frac{\partial R}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial R}{\partial x_2}\right)$ равно нулю. Следовательно,

$$(dR)^2 = A_1^2 dx_1^2 + A_2^2 dx_2^2. \quad (9.1)$$

В частном случае, когда приращение получает одна координата x_1 , будем иметь

$$dR = A_1 dx_1. \quad (10.1)$$

Если приращение будет получать координата x_2 , то

$$dR = A_2 dx_2. \quad (11.1)$$

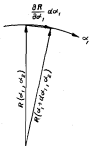


Рис. 3

В равенствах (10.1) и (11.1) ds_1 и ds_2 — приращения дуг координатных линий, соответствующие приращению криволинейных координат dx_1 и dx_2 .

Ранее мы отметили, что вектор $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_1}$ касателен к координатной линии x_1 , а вектор $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_2}$ — к координатной линии x_2 . Из ф-лы (7.1) следует, что длина вектора $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_1}$ равна A_1 , а длина вектора $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_2}$ равна A_2 . Поэтому единичные векторы (орты), касательные к координатным линиям x_1 и x_2 , соответственно будут

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_1} \\ \mathbf{e}_2 &= \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_2} \end{aligned} \right\} \quad (12.1)$$

Единичный вектор нормален к поверхности равен векторному произведению двух векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, т. е.

$$\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2, \quad (13.1)$$

где символ $\times$ означает векторное произведение двух векторов. Ортогональный триада $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_n$ показан на рис. 2.

В дальнейшем все векторы перемещений, напряжений и соответствующих им усилий и моментов представим в виде

$$\mathbf{T} = T_{x_1} \cdot \mathbf{e}_1 + T_{x_2} \cdot \mathbf{e}_2 + T_n \cdot \mathbf{e}_n, \quad (14.1)$$

где T_{x_1}, T_{x_2}, T_n — проекции вектора $\mathbf{T}$ на направления $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_n$. Поэтому для возможности выполнения дифференцирования векторов перемещений и напряжений необходимо, прежде всего, исследовать правила дифференцирования единичных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_n$ по криволинейным координатам x_1 и x_2 .

Определим производную вектора $\mathbf{e}_1$ по x_2 , т. е. $\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial x_2}$. Для этого рассмотрим на координатной линии x_2 две близкие точки B_1 и B_2 и проведем в каждой из них нормальный орт $\mathbf{e}_1$ (рис. 4). Направления векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_1 + \Delta \mathbf{e}_1$ пересекутся в точке O . Так как линия x_2 есть линия главной кривизны, то отрезок OB_2 равен главному радиусу кривизны R_2 .

Из рисунка 4 видно, что приращение вектора $\mathbf{e}_1$ при переходе от точки B_1 к точке B_2 параллельно отрезку B_1B_2 и в пределе, когда расстояние точки B_2 от B_1 бесконечно мало, это приращение будет параллельно орту $\mathbf{e}_2$.

Рис. 4

Из подобия треугольников B_1KN и OB_1B_2 следует $\frac{|\Delta e_1|}{|e_1|} = \frac{B_2B_1}{R_1}$. Но длина вектора e_1 равна единице, то есть $|e_1| = 1$. Длина же отрезка B_2B_1 будет равна $B_1B_2 = A_1 da_1$. Следовательно,

$$|\Delta e_1| = \frac{A_1}{R_1} da_1$$

или

$$\frac{|\Delta e_1|}{da_1} = \frac{A_1}{R_1}. \quad (15.1)$$

Из формулы (15.1) видно, что модуль вектора производной $\frac{\partial e_1}{\partial a_1}$ равен $\frac{A_1}{R_1}$. Направление вектора $\frac{\partial e_1}{\partial a_1}$, как мы установили ранее, параллельно орту e_1 , поэтому производная вектора e_1 по a_1 есть вектор

$$\frac{\partial e_1}{\partial a_1} = \frac{A_1}{R_1} e_1. \quad (16.1)$$

Аналогично производная $\frac{\partial e_2}{\partial a_2}$ есть вектор

$$\frac{\partial e_2}{\partial a_2} = \frac{A_2}{R_2} e_2. \quad (17.1)$$

где R_2 — второй главный радиус кривизны в рассматриваемой точке.

Таким образом мы установили, что производная вектора e_1 по координате a_1 касательна к координатной линии a_1 , следовательно, проекции вектора $\frac{\partial e_1}{\partial a_1}$ на направления e_2 и e_3 будут равны нулю. По аналогии производная вектора e_2 по координате a_2 касательна к координатной линии a_2 . В этом случае проекции вектора $\frac{\partial e_2}{\partial a_2}$ на направления e_1 и e_3 также будут равны нулю. Окончательно получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial e_1}{\partial a_1} &= \frac{A_1}{R_1} e_1 + 0 + 0 \\ \frac{\partial e_2}{\partial a_2} &= 0 + \frac{A_2}{R_2} e_2 + 0 \end{aligned} \right\} \quad (18.1)$$

Прежде чем определить величину и направление остальных производных, выведем одно вспомогательное равенство.

Из формулы (12.1) следует:

$$\frac{\partial R}{\partial a_1} = A_1 e_1,$$

$$\frac{\partial R}{\partial a_2} = A_2 e_2.$$

Используя эти выражения, из тождества $\frac{\partial A_1}{\partial a_2} \frac{\partial R}{\partial a_1} = \frac{\partial A_2}{\partial a_1} \frac{\partial R}{\partial a_2}$ получаем

$$\frac{\partial A_1 e_1}{\partial a_2} = \frac{\partial A_2 e_2}{\partial a_1} \quad (19.1)$$

или

$$\frac{\partial A_1}{\partial a_2} e_1 + A_1 \frac{\partial e_1}{\partial a_2} = \frac{\partial A_2}{\partial a_1} e_2 + A_2 \frac{\partial e_2}{\partial a_1}. \quad (20.1)$$

Перейдем теперь к определению производной $\frac{d\mathbf{e}_1}{ds_1}$. Проекция этого вектора на направление $\mathbf{e}_1$ равна нулю, поскольку длина вектора $\mathbf{e}_1$ остается постоянной, и, следовательно, приращение вектора $\mathbf{e}_1$ будет ему перпендикулярно. Таким образом, $\left(\mathbf{e}_1 \cdot \frac{d\mathbf{e}_1}{ds_1}\right) = 0$.

Аналогично вектор $\frac{d\mathbf{e}_1}{ds_2}$ перпендикулярен вектору $\mathbf{e}_1$, поэтому $\left(\mathbf{e}_1 \cdot \frac{d\mathbf{e}_1}{ds_2}\right) = 0$.

Проекция вектора $\frac{d\mathbf{e}_1}{ds_1}$ на направление $\mathbf{e}_2$ будет равна

$$\left(\mathbf{e}_2 \cdot \frac{d\mathbf{e}_1}{ds_1}\right) = \frac{\partial(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1)}{\partial s_1} = \left(\mathbf{e}_1 \cdot \frac{d\mathbf{e}_2}{ds_1}\right).$$

Поскольку векторы $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_1$ взаимно перпендикулярны, их скалярное произведение равно нулю, то есть $(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1) = 0$. Таким образом,

$$\left(\mathbf{e}_2 \cdot \frac{d\mathbf{e}_1}{ds_1}\right) = -\left(\mathbf{e}_1 \cdot \frac{d\mathbf{e}_2}{ds_1}\right). \quad (21.1)$$

Определив производную $\frac{d\mathbf{e}_2}{ds_1}$ из вспомогательного равенства (20.1)

$$\frac{d\mathbf{e}_2}{ds_1} = \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial s_2} \mathbf{e}_1 + \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{d\mathbf{e}_1}{ds_2} - \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial s_1} \mathbf{e}_2$$

и подставив ее в ур-ние (21.1), получим

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{e}_2 \cdot \frac{d\mathbf{e}_1}{ds_1}\right) &= -\left(\mathbf{e}_1 \cdot \frac{d\mathbf{e}_2}{ds_1}\right) = -\frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial s_2} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1) - \frac{A_1}{A_1} \left(\mathbf{e}_1 \cdot \frac{d\mathbf{e}_1}{ds_2}\right) + \\ &+ \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial s_1} (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2). \end{aligned}$$

Но скалярное произведение $(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1) = 1$, а скалярные произведения $\left(\mathbf{e}_1 \cdot \frac{d\mathbf{e}_1}{ds_2}\right)$ и $(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2)$ равны нулю. Следовательно, проекция вектора $\frac{d\mathbf{e}_1}{ds_1}$ на направление $\mathbf{e}_2$ равна

$$\left(\mathbf{e}_2 \cdot \frac{d\mathbf{e}_1}{ds_1}\right) = -\frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial s_2}. \quad (22.1)$$

Проекция производной $\frac{d\mathbf{e}_1}{ds_1}$ на направление $\mathbf{e}_3$ будет

$$\left(\mathbf{e}_3 \cdot \frac{d\mathbf{e}_1}{ds_1}\right) = \frac{\partial(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1)}{\partial s_1} = \left(\mathbf{e}_1 \cdot \frac{d\mathbf{e}_3}{ds_1}\right) = -\frac{A_1}{A_1} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1) = -\frac{A_1}{A_1}. \quad (23.1)$$

Таким образом, все три проекции вектора $\frac{d\mathbf{e}_1}{ds_1}$ на направления $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ определены. Окончательно вектор $\frac{d\mathbf{e}_1}{ds_1}$ может быть представлен в виде

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{ds_1} = 0 - \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial s_2} \mathbf{e}_2 - \frac{A_1}{A_1} \mathbf{e}_3. \quad (24.1)$$

По аналогии

$$\frac{d\mathbf{e}_2}{ds_2} = -\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial s_1} \mathbf{e}_1 + 0 - \frac{A_2}{A_2} \mathbf{e}_3. \quad (25.1)$$

Определим проекции производной $\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial x_1}$ на направления $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$. По соображениям, высказанным ранее, проекция $\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial x_1}$ на направление $\mathbf{e}_1$ равна нулю. Проекция $\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial x_1}$ на направление $\mathbf{e}_2$ равна $(\mathbf{e}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial x_1})$. Из тождества (20.1) получим

$$\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial x_2} = \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \mathbf{e}_2 + \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial x_1} - \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \mathbf{e}_1$$

или

$$(\mathbf{e}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial x_1}) = \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial x_1} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) + \frac{A_2}{A_1} (\mathbf{e}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial x_1}) - \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_2} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1) - \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_1}.$$

Проекция $\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial x_1}$ на вектор $\mathbf{e}_3$ будет

$$(\mathbf{e}_3 \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial x_1}) = \frac{d(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1)}{dx_1} - (\mathbf{e}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial x_1}) = -(\mathbf{e}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial x_1}).$$

Но из ф-лы (18.1) имеем $\frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial x_1} = \frac{A_2}{R_1} \mathbf{e}_2$. Тогда

$$(\mathbf{e}_3 \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial x_1}) = -\frac{A_2}{R_1} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) = 0.$$

Таким образом, проекция вектора $\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial x_1}$ на направление $\mathbf{e}_3$ равна нулю.

Мы получили все три проекции вектора $\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial x_1}$ на направления $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$.

Следовательно, вектор $\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial x_1}$ определяется по выражению

$$\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial x_1} = 0 + \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \mathbf{e}_2 + 0. \quad (26.1)$$

Аналогично

$$\frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial x_1} = \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \mathbf{e}_1 + 0 + 0. \quad (27.1)$$

Все производные единичных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ по координатам x_1 и x_2 получены. В заключение приведем окончательные формулы, определяющие упомянутые производные:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial x_1} &= 0 & -\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \mathbf{e}_2 &- \frac{A_1}{R_1} \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial x_2} &= 0 & + \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \mathbf{e}_2 &+ 0 \\ \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial x_1} &= \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \mathbf{e}_1 &+ 0 &+ 0 \\ \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial x_2} &= -\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial x_2} \mathbf{e}_1 &+ 0 &- \frac{A_2}{R_1} \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial x_1} &= \frac{A_1}{R_1} \mathbf{e}_2 &+ 0 &+ 0 \\ \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial x_2} &= 0 &+ \frac{A_2}{R_1} \mathbf{e}_2 &+ 0 \end{aligned} \right\} \quad (28.1)$$

§ 4. Условия Кодаци—Гаусса

Задание параметров Ламе еще не определяет никакой поверхности. Для определения поверхности должны быть заданы еще главные радиусы кривизны, то есть для определения любой поверхности плавной формы необходимо и достаточно задание как параметров Ламе, так и главных радиусов кривизны.

Отметим, однако, что все упомянутые четыре величины (параметры Ламе A_1 и A_2 и главные радиусы кривизны R_1 и R_2) не могут быть заданы произвольно. Они должны удовлетворять дифференциальным зависимостям, именуемым в теории поверхностей условиями Кодаци—Гаусса.

Для получения этих дифференциальных зависимостей рассмотрим тождество

$$\frac{\partial^2 \mathbf{e}_1}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} = \frac{\partial^2 \mathbf{e}_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \alpha_1} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \alpha_1} \right).$$

Подставив в последнее равенство значения $\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \alpha_1}$ и $\frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \alpha_2}$ из системы (28.1), получим

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{A_1}{R_1} \mathbf{e}_1 \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_2}{R_2} \mathbf{e}_2 \right)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{A_1}{R_1} \right) \mathbf{e}_1 + \frac{A_1}{R_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_2}{R_2} \right) \mathbf{e}_2 + \frac{A_2}{R_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \alpha_1}. \quad (29.1)$$

Подставив в равенство (29.1) значения векторов $\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \alpha_2}$ и $\frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \alpha_1}$ согласно (28.1) и сделав приведение подобных членов, получим

$$\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{A_1}{R_1} \right) - \frac{1}{R_1} \cdot \frac{dA_1}{d\alpha_2} \right] \mathbf{e}_1 - \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_2}{R_2} \right) - \frac{1}{R_2} \cdot \frac{dA_2}{d\alpha_1} \right] \mathbf{e}_2 = 0. \quad (30.1)$$

Но так как равенство (30.1) является тождеством, а единичные векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ не равны нулю, то необходимо, чтобы выражения, стоящие в обеих квадратных скобках, были равны нулю, то есть

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{A_1}{R_1} \right) - \frac{1}{R_1} \cdot \frac{dA_1}{d\alpha_2} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_2}{R_2} \right) - \frac{1}{R_2} \cdot \frac{dA_2}{d\alpha_1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (31.1)$$

или окончательно

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{A_1}{R_1} \right) &= \frac{1}{R_1} \cdot \frac{dA_1}{d\alpha_2} \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_2}{R_2} \right) &= \frac{1}{R_2} \cdot \frac{dA_2}{d\alpha_1} \end{aligned} \right\} \quad (32.1)$$

Полученные дифференциальные соотношения (32.1) между параметрами Ламе поверхности и главными радиусами ее кривизны и называются условиями Кодаци.

Рассмотрим тождество

$$\frac{\partial^2 e_1}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 e_1}{\partial x_1 \partial x_2}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial e_1}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial e_1}{\partial x_2} \right). \quad (33.1)$$

Подставив в тождество (33.1) значения векторов $\frac{\partial e_1}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial e_1}{\partial x_2}$ из системы (28.1), получим

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_2} e_2 - \frac{A_1}{R_1} e_3 \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_1} e_1 \right)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) e_2 - \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial e_2}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{A_1}{R_1} \right) e_3 - \frac{A_1}{R_1} \cdot \frac{\partial e_3}{\partial x_2} = \\ = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \right) e_1 + \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial e_1}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

Подставив в полученное тождество значения векторов $\frac{\partial e_2}{\partial x_1}$, $\frac{\partial e_3}{\partial x_2}$ и $\frac{\partial e_1}{\partial x_1}$ из системы (28.1), будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) e_2 - \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \left(-\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_1} e_1 - \frac{A_2}{R_1} e_3 \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{A_1}{R_1} \right) e_3 - \\ - \frac{A_1}{R_1} \cdot \frac{A_2}{R_2} e_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \right) e_1 + \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \left(\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \right) e_1 \end{aligned}$$

или после приведения подобных членов

$$\begin{aligned} \left[-\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \right) - \frac{A_1}{R_1} \cdot \frac{A_2}{R_2} \right] e_2 + \\ + \left[-\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{A_1}{R_1} \right) + \frac{1}{R_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right] e_3 = 0. \end{aligned} \quad (34.1)$$

Так как ур-ние (34.1) является тождеством, а векторы e_2 и e_3 не равны нулю, то для удовлетворения тождества (34.1) необходимо, чтобы выражения, стоящие в обеих квадратных скобках, были равны нулю. Получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) + \frac{A_1}{R_1} \cdot \frac{A_2}{R_2} = 0, \\ -\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{A_1}{R_1} \right) + \frac{1}{R_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_2} = 0. \end{aligned}$$

Второе из полученных дифференциальных соотношений совпадает с одним из выведенных ранее в ф-лах (32.1) и, следовательно, не является новым.

Остается первое дифференциальное соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) = -\frac{A_1 A_2}{R_1 R_2}. \quad (35.1)$$

Дифференциальное соотношение (35.1) называется условием Гаусса.

Можно показать, что из тождества $\frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} = \frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1}$ также получим условие (35.1) и (32.1), т. е. никаких новых к выведенным ранее дифференциальным соотношениям мы не получим.

Таким образом, условия Коши и условия Гаусса имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{A_1}{R_1} \right) &= \frac{1}{R_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_2}{R_2} \right) &= \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) &= - \frac{A_1 A_2}{R_1 R_2} \end{aligned} \right\} \quad (36.1)$$

Из изложенного можно сделать заключение, что параметры A_1 и A_2 и радиусы R_1 и R_2 можно рассматривать как параметры Ламе поверхности и главные радиусы ее кривизны лишь в том случае, если они удовлетворяют дифференциальным соотношениям Коши—Гаусса. Удовлетворение этим соотношениям обеспечивает неразрывность или сплошность поверхности. Если же параметры A_1 и A_2 и радиусы R_1 и R_2 не удовлетворяют упомянутым условиям, то они не определяют никакой поверхности.

§ 5. Перемещения оболочек

Под действием внешних усилий, приложенных к оболочке, последняя деформируется, т. е. изменяет свою форму и размеры. В данном параграфе мы ограничимся лишь чисто геометрической стороной вопроса, т. е. не будем интересоваться усилиями, которые вызывают те или иные перемещения, и сосредоточим свое внимание на рассмотрении перемещений оболочки.

Перемещения любой точки упругого тела определяются вектором перемещений. Под вектором перемещений будем понимать такой вектор, начало которого находится в рассматриваемой точке до деформации, а конец — в рассматриваемой точке после деформации. Длина вектора перемещений равна длине отрезка, соединяющего положение точки до и после деформации. Вектор перемещений точки срединной поверхности в дальнейшем обозначим через $\mathbf{K}$. Как и ранее, все векторы будем проецировать на направления, касательные к линиям α_1 и α_2 и нормаль к срединной поверхности оболочки. Тогда вектор $\mathbf{K}$ может быть представлен в виде

$$\mathbf{K} = u \mathbf{e}_1 + v \mathbf{e}_2 + w \mathbf{e}_n \quad (37.1)$$

Покажем, что перемещения любой точки оболочки, не лежащей на срединной поверхности и отстоящей от нее на расстоянии z , могут быть легко определены, если известны перемещения соответствующей точки срединной поверхности (имеем в виду точку срединной поверхности, лежащую на линии перпендикулярно к рассматриваемой точке).

Пусть точка B_0 срединной поверхности оболочки с координатами α_1 , α_2 переместилась в новое положение B_1 (рис. 5). При этом вектор перемещений $\mathbf{K}$ есть вектор, соединяющий точку B_0 с точкой B_1 , и направленный в сторону последней.

Вектор перемещения точки срединной поверхности есть функция координат α_1 и α_2 . Проекции этого вектора u , v и w будут, очевидно, также функциями координат α_1 , α_2 .

Восстановим в точке B , перпендикуляр к срединной поверхности оболочки и рассмотрим точку B_0^0 , отстоящую от срединной поверхности на расстоянии z . После деформации точка B_0^0 переместится в новое положение B_1^0 .

Вектор перемещения точки, отстоящей от срединной поверхности на расстоянии z , обозначим через K_z . Проекция вектора K_z на направления e_1 , e_2 и e_3 обозначим u_z , v_z и w_z .

Вектор K_z , так же как и его проекции u_z , v_z , w_z , является функцией x_1 , x_2 , z , при этом

$$K_z = u_z e_1 + v_z e_2 + w_z e_3. \quad (38. I)$$

Необходимо выразить вектор K_z через вектор K и расстояние z . Так как точка B_1^0 лежит на перпендикуляре к срединной поверхности, то

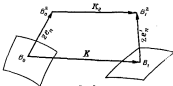


Рис. 5

вектор $B_0 B_1^0$ равен ze_3 . Согласно гипотезам Кариоффа—Лива, расстояние точек от срединной поверхности в процессе деформации не меняется, следовательно, длина отрезка $B_0 B_1^0$ также будет равна z .

Согласно этим же гипотезам, точки, лежащие на перпендикуляре к срединной поверхности до деформации, останутся на перпендикуляре к деформированной срединной поверхности.

Обозначим единичный вектор нормали к деформированной срединной поверхности через e'_3 . Тогда вектор $B_0 B_1^0$ будет равен ze'_3 .

Составим векторное равенство

$$ze'_3 + K_z = K + ze'_3, \quad (39. I)$$

откуда искомый вектор K_z определяется по выражению

$$K_z = K + z(e'_3 - e_3). \quad (40. I)$$

Ранее мы указали, что орт e_3 равен векторному произведению ортов e_1 и e_2 , т. е. $e_3 = e_1 \times e_2$. После деформации координатные линии x_1 и x_2 уже не будут ортогональными. Однако, с допустимой для практики точностью, можно принять

$$e'_3 = e'_1 \times e'_2, \quad (41. I)$$

где e'_1 и e'_2 — единичные векторы, касательные к координатным линиям после деформации.

В § 3 настоящей главы было отмечено, что если $\mathbf{R}$ — радиус-вектор, определяющий некоторую поверхность, а A_1 и A_2 — параметры Ламе этой поверхности, то единичные орты, касательные к линиям e_1 и e_2 , будут соответственно равны

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_1} \\ e_2 &= \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_2} \end{aligned} \right\} \quad (42.1)$$

Так как при деформации точки срединной поверхности получали перемещения $\mathbf{K}$, то радиус-вектор, определяющий деформированную срединную поверхность, равен

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} + \mathbf{K}$$

или

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} + ue_1 + ve_2 + we_3, \quad (43.1)$$

Для деформированной срединной поверхности получим

$$\left. \begin{aligned} e'_1 &= \frac{1}{A'_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_1} \\ e'_2 &= \frac{1}{A'_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_2} \end{aligned} \right\} \quad (44.1)$$

Поскольку e'_1 и e'_2 — единичные векторы, то очевидно, что A'_1 — длина вектора $\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_1}$, а A'_2 — длина вектора $\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_2}$.

Квадрат длины вектора $\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_1}$ равен скалярному произведению вектора $\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_1}$ на самого себя. Следовательно,

$$(A'_1)^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_1} \right). \quad (45.1)$$

Определим вектор $\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_1}$, пользуясь выражением для $\mathbf{L}$ согласно равенству (43.1). Получим

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_1} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_1} + u \frac{\partial e_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_1} e_1 + v \frac{\partial e_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_1} e_2 + w \frac{\partial e_3}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} e_3$$

Подставив в полученное выражение значения производных векторов $\frac{\partial e_1}{\partial x_1}$, $\frac{\partial e_2}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial e_3}{\partial x_1}$ согласно равенствам (28.1) и учитывая, что $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_1} = A_1 e_1$, окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_1} &= A_2 \left(1 + \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{1}{A_2 A_1} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_2} v + \frac{w}{R_1} \right) e_1 + \\ &+ \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_1} u \right) e_2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{A_1}{R_1} u \right) e_3. \end{aligned} \quad (46.1)$$

Теперь определим скалярное произведение $\left(\frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial x_2}\right)$, учитывая, что скалярные произведения единичных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ в силу их ортогональности равны:

$$(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1) = 1, \quad (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) = 0,$$

$$(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3) = 0, \quad (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3) = 0,$$

$$(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2) = 1, \quad (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3) = 0$$

и что в линейной теории оболочек можно пренебречь произведениями перемещений и их производных в сравнении с их первыми степенями. Получим

$$(\mathbf{A}_i')^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial x_2}\right) \approx A_i^2 \left(1 + \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{1}{A_2 A_3} \cdot \frac{\partial A_3}{\partial x_2} v + \frac{w}{R_1}\right)^2,$$

откуда

$$A_i' \approx A_i \left(1 + \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{1}{A_2 A_3} \cdot \frac{\partial A_3}{\partial x_2} v + \frac{w}{R_1}\right). \quad (47.1)$$

Введем обозначение

$$a_i = \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{1}{A_2 A_3} \cdot \frac{\partial A_3}{\partial x_2} v + \frac{w}{R_1}, \quad (48.1)$$

тогда

$$A_i' = A_i (1 + a_i). \quad (49.1)$$

Подставив в ф-лу (44.1) полученное значение A_i' из ф-лы (49.1) и $\frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial x_i}$ из ф-лы (46.1), будем иметь

$$\mathbf{e}_i' \approx \mathbf{e}_i + \frac{1}{A_2(1+a_2)} \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial A_3}{\partial x_2} v \right) \mathbf{e}_2 + \frac{1}{A_3(1+a_3)} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{A_2}{R_1} v \right) \mathbf{e}_3.$$

Анализ показывает, что с погрешностью, равной погрешности пренебрежения произведениями перемещений и их производных в сравнении с их первыми степенями, в знаменателе второго и третьего слагаемых можно пренебречь a_i . Таким образом, окончательно получим

$$\mathbf{e}_i' \approx \mathbf{e}_i + \left(\frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{1}{A_2 A_3} \cdot \frac{\partial A_3}{\partial x_2} v \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{1}{A_3} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{v}{R_1} \right) \mathbf{e}_3. \quad (50.1)$$

Путем совершенно аналогичных рассуждений можно получить

$$\mathbf{e}_j' = \mathbf{e}_j + \left(\frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{1}{A_2 A_3} \cdot \frac{\partial A_3}{\partial x_2} v \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{1}{A_3} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{v}{R_1} \right) \mathbf{e}_2. \quad (51.1)$$

Пользуясь выражениями (50.1) и (51.1), составим векторное произведение векторов $\mathbf{e}_1'$ и $\mathbf{e}_2'$. При этом воспользуемся известными формулами, определяющими векторное произведение взаимно ортогональных единичных векторов:

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 = 0, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 = 0,$$

$$\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = 0, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 = 0,$$

$$\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = 0, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2,$$

Тогда, в соответствии с ф-лой (41. I), получим следующее выражение для единичного вектора нормали к деформированной срединной поверхности:

$$\mathbf{e}_n' = \mathbf{e}_n + \vartheta \mathbf{e}_1 + \varphi \mathbf{e}_2, \quad (52. I)$$

где параметры ϑ и φ определяются по выражениям

$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= -\frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{u}{R_1} \\ \varphi &= -\frac{1}{R_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} + \frac{v}{R_2} \end{aligned} \right\} \quad (53. I)$$

Для определения вектора перемещений любой точки, не лежащей на срединной поверхности, подставим полученное значение $\mathbf{e}_n'$ в ф-лу (40. I). Получим

$$\mathbf{K}_0 = K \cdot x (\vartheta \mathbf{e}_1 + \varphi \mathbf{e}_2). \quad (54. I)$$

Выражение (54. I) определяет искомое значение вектора перемещений любой точки оболочки, не лежащей на срединной поверхности, через перемещение соответствующей точки срединной поверхности на расстояние x .

Так как параметры ϑ и φ не зависят от x , можно заключить, что вектор перемещения $\mathbf{K}_0$ есть линейная функция x .

Спроектировав векторное равенство (54. I) на направления $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_n$, и учитывая ф-лы (37. I) и (38. I), получим

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= u + x\vartheta \\ v_0 &= v + x\varphi \\ w_0 &= w \end{aligned} \right\} \quad (55. I)$$

Формулами (55. I) дается математическая формулировка гипотезы прямых нормалей.

Из приведенных формул видно, что компоненты вектора перемещений, касательные к линиям $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, изменяются по толщине оболочки по линейному закону, а нормальное перемещение w_0 не зависит от x , т. е. постоянно по толщине оболочки.

Таким образом, зная перемещение срединной поверхности, можем определить перемещение любой точки, не лежащей на срединной поверхности и отстоящей от последней на расстоянии x .

В заключение выясним физический смысл параметров ϑ и φ . Из ф-лы (52. I) следует, что ϑ — проекция единичного вектора $\mathbf{e}_n'$ на направление $\mathbf{e}_1$, а φ — такая же проекция этого вектора на направление $\mathbf{e}_2$. Но проекция ϑ вектора $\mathbf{e}_n'$ на направление $\mathbf{e}_1$ равна модулю этого вектора, умноженному на синус угла поворота $\mathbf{e}_n'$ вокруг оси $\mathbf{e}_2$. Модуль же вектора $\mathbf{e}_n'$ равен единице, а синус угла поворота вектора $\mathbf{e}_n'$ вокруг оси $\mathbf{e}_2$, вследствие допущения о малости перемещений оболочки, будет равен самому углу. Следовательно, параметр ϑ есть угол поворота единичного вектора нормали к срединной поверхности вокруг оси $\mathbf{e}_2$. Аналогично φ — угол поворота этого же вектора вокруг оси $\mathbf{e}_1$.

§ 6. Деформации оболочек

Определенные нами компоненты вектора перемещений u , v и w вполне определяют деформированную среднюю поверхность (средняя поверхность до деформации предполагается заданной), однако их абсолютные величины не являются характерными для описки деформации оболочки.

Действительно, рассмотрим две круговые цилиндрические оболочки одинаковой толщины и одинакового радиуса, выполненные из одного и того же материала. Длина оболочки A в пять раз превышает длину оболочки B . Обе оболочки равномерно сжаты в осевом направлении (рис. 6).

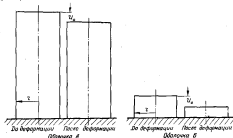


Рис. 6

Допустим, что абсолютные величины перемещений в осевом направлении (перемещения u) для обеих оболочек одинаковы и равны u_0 . Из рисунка видно, что при равенстве абсолютных величин осевого перемещения у обеих оболочек укорочение оболочки B в процессе деформации

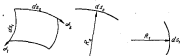


Рис. 7

равно почти половине ее первоначальной длины, в то время как укорочение оболочки A не превышает десяти процентов первоначальной длины. Следовательно, степень деформации оболочки B более высокая, чем таковая для оболочки A . Поэтому целесообразно оценивать деформации оболочки не в абсолютных перемещениях, а в их относительных величинах.

Рассмотрим параметры, характеризующие деформацию оболочки. Для этого выделим из срединной поверхности оболочки элемент со сторонами ds_1 и ds_2 , причем отметим, что сторона ds_1 совпадает с координатной линией α_1 и имеет радиус кривизны R_1 , а ds_2 совпадает с координатной линией α_2 и имеет радиус кривизны R_2 (рис. 7). Поскольку координатные линии α_1 и α_2 взаимно ортогональны, угол между сторонами элемента ds_1 и ds_2 будет до деформации прямым.

Относительные удлинения

В процессе деформации, прежде всего, могут изменяться размеры элемента, т. е. его стороны, равные до деформации ds_1 и ds_2 , после деформации станут равными ds'_1 и ds'_2 (рис. 8).

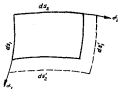


Рис. 8

Изменения размеров сторон элемента характеризуются относительным удлинением в направлении α_1 и относительным удлинением в направлении α_2 . Относительным удлинением будем называть отношение приращения длины элемента в процессе деформации к его длине до деформации. Если при деформации длина элемента возрастает, то приращение длины будет положительным и, следовательно, положительным будет относительное удлинение. Если же при деформации длина элемента уменьшится, то приращение длины будет отрицательным и отрицательным будет относительное удлинение. Таким образом, относительные удлинения элемента в направлении α_1 и α_2 характеризуют изменения размеров этого элемента.

Сдвиг

Кроме изменения размеров сторон элемента, в процессе деформации может изменяться его форма. Прямоугольный элемент до деформации оболочки может стать косугольным после деформации. Следовательно, изменится угол между сторонами ds'_1 и ds'_2 , который до деформации был прямым (рис. 9).

Из рисунка видно, что в результате деформации угол между сторонами ds'_1 и ds'_2 оказался равным β . Такое изменение формы элемента будет характеризовать деформацию сдвига. Последняя определяется косинусом угла между сторонами элемента после деформации ($\cos \beta$). Сдвиг будет положительным, если угол ме-

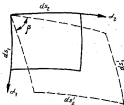


Рис. 9

жду сторонами элемента после деформации будет меньше $\frac{\pi}{2}$ и, наоборот, сдвиг будет отрицательным, если этот угол будет превышать $\frac{\pi}{2}$.

Изменения кривизны

В процессе деформации может измениться кривизна элемента, при этом радиус кривизны элемента ds , равный R_1 до деформации, после деформации станет равным R_2 .

Пусть R_2 будет радиусом кривизны элемента ds' после деформации (рис. 10). Изменения кривизны элемента в направлении координатной линии α_1 будет равно $\frac{1}{R_2'} - \frac{1}{R_1'}$, а изменение кривизны в направлении координатной линии α_2 будет равно $\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}$.

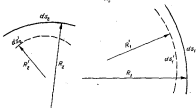


Рис. 10

Изменения кривизны считаются положительными, если после деформации кривизна возрастает (радиусы кривизны уменьшаются). Если же имеет место обратное, т. е. радиусы кривизны в процессе деформации возрастают, то изменения кривизны будут отрицательными.

Кручение

Относительные удлинения, сдвиг, изменения кривизны не полностью характеризуют деформацию элемента. Для полной характеристики деформации элемента необходимо еще знать и кручение этого элемента.

Под кручением элемента будем понимать предел отношения угла взаимного закручивания двух его противоположных сторон к расстоянию между ними (при стремлении размеров элемента к нулю). Для характеристики кручения рассмотрим рис. 11.

Пусть при деформации элемента точка C перешла в положение C' , точки же A , B и D остались неподвижными. Тогда угол φ будет углом взаимного закручивания противоположных сторон элемента AB и CD . Отнеся угол φ к расстоянию между сторонами, мы получим относительный угол закручивания или кручение элемента. Можно показать, что относительный угол закручивания сторон AB и CD всегда равен относительному углу закручивания двух других противоположных сторон элемента BC и AD .

Маломанное позволяет заключить, что шесть компонентов, а именно: 1) относительное удлинение в направлении a_1 ; 2) относительное удлинение в направлении a_2 ; 3) сдвиг; 4) изменение кривизмы в направлении a_1 ; 5) изменение кривизмы в направлении a_2 ; 6) кручение полностью характеризуют деформацию элемента срединной поверхности оболочки. Упомянутые шесть компонентов являются компонентами деформации срединной поверхности оболочки.

Определим относительные удлинения элемента срединной поверхности оболочки. Пусть до деформации длина элемента в направлении координатной линии x_1 равна dx_1 , а после деформации равна dx'_1 . При этом

$$dx_1 = A_1 dx_p, \text{ а } dx'_1 = A'_1 dx_p.$$

Приращение длины элемента при деформации будет равно

$$\Delta(dx_1) = dx'_1 - dx_1 = (A'_1 - A_1) dx_p.$$

Рис. 1)

Относительное удлинение равно отношению приращения длины элемента к его длине до деформации, т. е.

$$\frac{\Delta(dx_1)}{dx_1} = \frac{(A'_1 - A_1) dx_p}{A_1 dx_1} = \frac{A'_1}{A_1} - 1.$$

Подставив сюда значение A'_1 из ф-лы (49.1), получим

$$\frac{\Delta(dx_1)}{dx_1} = \epsilon_1.$$

Если воспользоваться ф-ой (48.1), то относительное удлинение элемента срединной поверхности в направлении a_1 будет

$$\epsilon_1 = \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial s}{\partial x_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_2} v + \frac{w}{R_1}. \quad (56.1)$$

Совершенно аналогично относительное удлинение элемента срединной поверхности оболочки в направлении a_2 равно

$$\epsilon_2 = \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial x_1} u + \frac{w}{R_2}. \quad (57.1)$$

Перейдем к определению сдвига элемента срединной поверхности α .

Как было отмечено, сдвиг равен косинусу угла между сторонами элемента dx'_1 и dx'_2 . Направление элемента dx'_1 определяется единичным вектором e'_1 . Точно так же единичный вектор e'_2 определяет направление dx'_2 . Очевидно, косинус угла между сторонами dx'_1 и dx'_2 будет равен скалярному произведению векторов e'_1 и e'_2 , т. е.

$$\alpha = (e'_1 \cdot e'_2). \quad (58.1)$$

Подставив в ф-лу (58.1) значения ϵ_1^c и ϵ_2^c , согласно ф-лам (50.1) и (51.1), и сделав приведение подобных членов, окончательно получим

$$u = \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_2} v + \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial x_1} v \quad (59.1)$$

или

$$u = \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{v}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{v}{A_2} \right). \quad (60.1)$$

Формулы (56.1), (57.1) и (60.1) определяют относительные удлинения и сдвиг элемента срединной поверхности.

Определим теперь, чему будут равны относительные удлинения и сдвиг элемента любой поверхности, параллельной срединной и отстоящей от последней на расстоянии z . Для этого можно воспользоваться ф-лами (56.1), (57.1) и (60.1), подставив в них вместо параметров Ляме, главных радиусов кривизны и перемещений срединной поверхности, параметры Ляме, главные радиусы кривизны и перемещения параллельной поверхности. Перемещения любой поверхности, параллельной срединной и отстоящей от последней на расстоянии z , уже определены в предыдущем параграфе (см. ф-лы (56.1)). Остается определить главные радиусы кривизны и параметры Ляме параллельной поверхности.

Дважды отрезок нормали к срединной поверхности длиной z вдоль координатных линий α_1 и α_2 , мы получим на параллельной поверхности сеть координатных линий, параллельных линиям α_1 и α_2 срединной поверхности. Эти линии являются линиями главной кривизны параллельной поверхности, отстоящей от срединной поверхности на расстоянии z .

Рассмотрим сечение оболочки, нормальное к координатным линиям α_2 (рис. 12).

Точка m , и m_1 принадлежат срединной поверхности, точки n и n_1 — параллельной поверхности. Из рисунка видно, что если радиус кривизны рассматриваемого сечения срединной поверхности равен R_1 , то соответствующий радиус кривизны параллельной поверхности будет

$$R_1^{(n)} = R_1 + z. \quad (61.1)$$

Длина дуги $m_1 m_2$ элемента срединной поверхности

$$ds_1 = A_1 ds_2,$$

длина же дуга $n_1 n_2$ элемента параллельной поверхности

$$ds_1^{(n)} = A_1^{(n)} ds_2. \quad (62.1)$$

Из подобия фигур $m_1 m_2 O$ и $n_1 n_2 O$ следует:

$$\frac{ds_1^{(0)}}{ds_1} = \frac{R_1 + z}{R_1} = 1 + \frac{z}{R_1}$$

или

$$ds_1^{(0)} = ds_1 \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) = A_1 \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) dz_1. \quad (62.1)$$

Сравнивая ф-лы (62.1) и (63.1), получим

$$A_1^{(0)} = A_1 \left(1 + \frac{z}{R_1} \right). \quad (64.1)$$

Аналогично можно получить

$$\left. \begin{aligned} R_2^{(0)} &= R_2 + z \\ A_2^{(0)} &= A_2 \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (65.1)$$

Таким образом, параметры Ляме и главные радиусы кривизны параллельной поверхности определены. Подставив их значения, а также значения перемещений u , v , и w , согласно ф-лам (35.1) и ф-лы (56.1) и (57.1), получим относительные удлинения элемента параллельной поверхности. Сделаем такую подстановку, после несложных преобразований получим

$$\epsilon_1^{(0)} = \frac{1}{1 + \frac{z}{R_1}} (e_1 + z e_2), \quad (66.1)$$

где

$$e_1 = \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \phi. \quad (67.1)$$

Параметр ϵ_1 после подстановки значений ξ и ϕ согласно ф-лам (53.1) может быть приведен к виду

$$e_1 = -\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{u}{R_1} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \left(\frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} - \frac{v}{R_2} \right). \quad (68.1)$$

Параметр $\epsilon_1^{(0)}$ есть относительное удлинение элемента параллельной поверхности в направлении α_1 .

Совершенно аналогично можно получить

$$\epsilon_2^{(0)} = \frac{1}{1 + \frac{z}{R_2}} (e_2 + z e_3), \quad (69.1)$$

где

$$e_2 = \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \phi. \quad (70.1)$$

Параметр ϵ_2 после подстановки ξ и ϕ приводится к виду

$$e_2 = -\frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} - \frac{v}{R_2} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \left(\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{u}{R_1} \right). \quad (71.1)$$

Параметр $\epsilon_2^{(0)}$ есть относительное удлинение элемента параллельной поверхности в направлении α_2 .

Подставляя значения параметров Ляме, главных радиусов кривизны и перемещений параллельной поверхности в ф-лу (60.1), получим выражение для сдвига элемента параллельной поверхности

$$\omega^{(1)} = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{R_1}} (\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{1}{1 + \frac{\rho}{R_2}} (\alpha_1 + \alpha_2), \quad (72.1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u \\ \alpha_2 &= \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} v \\ \alpha_3 &= \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \rho \\ \alpha_4 &= \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \rho \end{aligned} \right\} \quad (73.1)$$

Учитывая малые тождества

$$\alpha_1 + \frac{\alpha_3}{R_1} = \alpha_1 + \frac{\alpha_4}{R_2},$$

которое легко проверяется подстановкой входящих в него величин, и обозначая

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ \tau &= \alpha_3 + \frac{\alpha_4}{R_1} = \alpha_4 + \frac{\alpha_3}{R_2} \end{aligned} \right\} \quad (74.1)$$

получим

$$\omega^{(1)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\rho}{R_1}\right) \left(1 + \frac{\rho}{R_2}\right)} \left\{ \left(1 - \frac{\rho^2}{R_1 R_2}\right) \alpha + 2 \left[1 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \frac{\rho}{2}\right] \tau \right\}. \quad (75.1)$$

где

$$\begin{aligned} \tau &= -\frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial u v}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} \right) + \\ &+ \frac{1}{R_1} \left(\frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u \right) + \frac{1}{R_2} \left(\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} v \right). \end{aligned} \quad (76.1)$$

Параметр $\omega^{(1)}$, определяемый ф-лой (75.1), и есть сдвиг элемента параллельной поверхности.

В формулы, определяющие удлинения и сдвиг элемента параллельной поверхности (ф-лы (66.1), (69.1) и (75.1)), входят шесть различных функций перемещений срединной поверхности:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u + \frac{\rho}{R_1} \\ \alpha_2 &= \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} v + \frac{\rho}{R_2} \\ \alpha &= \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{\rho}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{\rho}{A_1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (77.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= -\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{u}{R_1} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{u}{R_1} \right) \\ \varepsilon_2 &= -\frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - \frac{v}{R_2} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{u}{R_1} \right) \\ \tau &= -\frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{R_1} \left(\frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_2} u \right) + \frac{1}{R_2} \left(\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} v \right) \end{aligned} \right\} \quad (77.1)$$

Геометрический смысл параметров ε_1 , ε_2 и τ был вынесен уже ранее. Напомним еще раз, что ε_1 есть относительное удлинение элемента срединной поверхности в направлении α_1 ; ε_2 — относительное удлинение элемента срединной поверхности в направлении α_2 , а τ — сдвиг этого элемента или, что то же, косинус угла между сторонами элемента после деформации.

Остается выписать геометрический смысл параметров ε_1 , ε_2 и τ . Для этого разложим знаменатели ф-л (66.1), (69.1) и (75.1) в ряды по степеням x , сохраняя в рядах члены со степенями x до второй включительно. Получим

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1^{(0)} &\approx \varepsilon_1 + x \left(\varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_1}{R_1} \right) - \frac{x^2}{R_1^2} \left(\varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_1}{R_1} \right) \\ \varepsilon_2^{(0)} &\approx \varepsilon_2 + x \left(\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_2}{R_2} \right) - \frac{x^2}{R_2^2} \left(\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_2}{R_2} \right) \\ \tau^{(0)} &\approx \tau + 2x \left[\tau - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\tau}{2} \right] - x^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \left[\tau - (R_1 - R_2) \frac{\tau}{R_1 R_2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (78.1)$$

Для тонких оболочек третьими членами равенств (78.1) можно пренебречь. Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1^{(0)} &\approx \varepsilon_1 + x \left(\varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_1}{R_1} \right) \\ \varepsilon_2^{(0)} &\approx \varepsilon_2 + x \left(\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_2}{R_2} \right) \\ \tau^{(0)} &\approx \tau + 2x \left[\tau - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\tau}{2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (79.1)$$

Из формул (79.1) видно, что относительные удлинения и сдвиг элемента параллельной поверхности изменяются по толщине оболочки по линейному закону. Первые слагаемые этих формул соответствуют деформациям, равномерно распределенным по толщине оболочки. Вторые же слагаемые соответствуют деформациям, линейно изменяющимся по толщине, т. е. деформациям изгиба. Следовательно, коэффициенты при x в первых двух ур-ниях (79.1) будут значениями кривизны элемента в направлениях α_1 и α_2 соответственно, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_1} &= \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_1}{R_1} \\ \frac{1}{R_2'} - \frac{1}{R_2} &= \varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_2}{R_2} \end{aligned} \right\} \quad (80.1)$$

Таким образом, параметры ε_1 и ε_2 характеризуют изменение кривизны срединной поверхности. Анализ показывает, что с погрешностью, не превышающей погрешности гипотез Кирхгофа—Лява, эти параметры можно отождествлять с изменениями кривизны. Последнее следует из того, что для тонких оболочек в ф-лах (79.1) членами $\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ и $\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ можно пренебречь в сравнении с членами ε_1 и ε_2 соответственно, т. е. считать, что

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1^{(1)} &= \varepsilon_1 + 2\varepsilon_1 \\ \varepsilon_2^{(1)} &= \varepsilon_2 + 2\varepsilon_2 \end{aligned} \right\} \quad (81.1)$$

Подобными рассуждениями можно получить

$$\omega^{(1)} = \omega + 2\omega, \quad (82.1)$$

Следовательно, ω характеризует кручение элемента срединной поверхности и с упомянутой выше степенью точности его можно отождествлять с кручением этого элемента.

Из изложенного следует, что деформация срединной поверхности оболочки определяется шестью параметрами: ε_1 , ε_2 , ω , ε_1 , ε_2 и ω , причем первые три параметра характеризуют изменение размеров и сдвиг элемента, а три последних — его искривление и закручивание. Эти шесть параметров называются *компонентами деформации срединной поверхности*.

§ 7. Уравнения неразрывности деформаций срединной поверхности

Шесть компонентов деформации срединной поверхности (ε_1 , ε_2 , ω , ε_1 , ε_2 , ω) являются функциями трех компонентов вектора перемещений. Поэтому естественно, что упомянутые шесть компонентов не могут быть величинами произвольными и между ними должны существовать дополнительные зависимости. Эти зависимости ищутся в общей теории упругости уравнениями неразрывности деформаций. Геометрический смысл уравнений неразрывности состоит в том, что они обеспечивают сплошность или неразрывность упругого тела. Применительно к тонким оболочкам произвольной формы уравнения неразрывности получены А. Л. Гольдштейном* и имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} &A_2 \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_1} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - A_1 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x_2} - 2 \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \varepsilon + \frac{1}{R_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \omega + \\ &+ \frac{1}{R_1} \left[A_1 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x_2} + \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \omega - A_2 \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_2}{\partial x_1} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \right] = 0 \\ &A_1 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x_2} + \frac{\partial A_1}{\partial x_2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - A_2 \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x_1} - 2 \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \varepsilon + \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \omega + \\ &+ \frac{1}{R_2} \left[A_2 \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \omega - A_1 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x_2} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \right] = 0 \\ &\frac{\varepsilon_1}{R_2} + \frac{\varepsilon_2}{R_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \cdot \frac{1}{A_1} \left[A_1 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x_2} + \frac{\partial A_1}{\partial x_2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - \frac{A_1}{2} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_2} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \omega \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \cdot \frac{1}{A_2} \left[A_2 \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_1} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - \frac{A_2}{2} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_1} - \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \omega \right] \right\} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (83.1)$$

* А. Л. Гольдштейн. Уравнения теории оболочек. ПММ. Т. IV. Вып. 2, 1948.

Удовлетворение ур-ний (83.1) обеспечивает сплошность или неразрывность срединной поверхности оболочки после ее деформации. Таким образом, условия (83.1) являются аналогом условий Коши—Гаусса. Если соблюдение последних обеспечивает сплошность срединной поверхности оболочки до деформации, то соблюдение условий (83.1) обеспечивает ее сплошность после деформации.

§ 8. Напряжения

Приложенные к оболочке внешние усилия вызывают ее деформацию. Деформация оболочки завершится в тот момент, когда упомянутые внешние усилия уравновесятся внутренними упругими усилиями или напряжениями. Перейдем к рассмотрению напряжений.

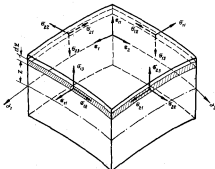


Рис. 13

Выделим из оболочки четыре сечения, перпендикулярными к ее срединной поверхности и проходящими через координатные линии a_1 , a_1+da_1 , a_2 , a_2+da_2 , пространственный элемент, высота которого равна толщине оболочки (рис. 13).

Из этого элемента двумя поверхностями, параллельными срединной поверхности и отстоящими от последней на расстояниях z и $z+dz$, выделим элементарный слой толщиной dz и проанализируем напряженное состояние этого слоя. Рассмотрим площадку этого слоя, перпендикулярную координатной линии a_1 . Вектор напряжений в этой площадке разложим на три составляющих: σ_{11} , σ_{12} и σ_{13} . При этом первая составляющая (σ_{11}), направленная по нормали к площадке, называется нормальным напряжением. Две других составляющих (σ_{12} и σ_{13}) лежат в плоскости площадки и называются касательными напряжениями. Касательное напряжение σ_{12} действует в направлении координатной линии a_2 , а касательное напряжение σ_{13} — в направлении нормали

к срединной поверхности. Рассматривая площадку, перпендикулярную к координатной линии α_1 , по аналогии будем иметь три составляющих вектора напряжений в этой площадке: σ_{11} — нормальное напряжение, а σ_{12} и σ_{13} — касательные напряжения. В принятых обозначениях первый индекс при составляющих напряжений указывает направление нормали к площадке, а второй — направление составляющей напряжений.

В заключение параграфа условимся о правиле знаков для напряжений. Напряжения в площадках, внешняя нормаль к которым совпадает с положительным направлением α_1 или α_2 , будем считать положительными, если они положительным образом проецируются на ϵ_1 , ϵ_2 и ϵ_3 . Напряжения же в площадках, внешняя нормаль к которым обратна по направлению α_1 или α_2 , будем считать положительными, если они отрицательным образом проецируются на ϵ_1 , ϵ_2 и ϵ_3 . Положительные составляющие напряжений показаны на рис. 13.

Из рисунка видно, что положительные составляющие нормальных напряжений вызывают растяжение элемента. Отрицательные составляющие нормальных напряжений вызывают его сжатие.

§ 8. Усилия и моменты

При рассмотрении перемещений оболочки было показано, что перемещения любой точки оболочки определяются перемещениями соответствующей точки ее срединной поверхности в отстоянии ее z от срединной поверхности. Следовательно, для исследования перемещений оболочки достаточно исследовать перемещения ее срединной поверхности. Эта же идея была проведена при определении деформаций оболочки. Деформации оболочки также определяются деформациями ее срединной поверхности в отстоянии z .

Полученные зависимости, таким образом, давали возможность свести задачу о деформации оболочки как упругого тела трех измерений к задаче о деформации ее срединной поверхности (два измерения). Такое сведение задачи к существованию более простой является прямым следствием признания гипотезы прямых нормалей.

В предыдущем параграфе мы рассмотрели напряженное состояние элемента оболочки. В общем случае как нормальные, так и касательные напряжения, приложены во всех точках сечения оболочки. Следовательно, при рассмотрении равновесия оболочки мы сталкиваемся с задачей о равновесии тела трех измерений. Для того чтобы эту задачу свести к задаче о равновесии срединной поверхности, необходимо действительные напряжения, приложенные по всей толщине оболочки, заменить статическими эквивалентами, ко- приложенными уже к срединной поверхности.

Из механики известно, что силу, действующую в любой точке тела, можно привести к другой точке (центру приведения), причем в центре приведения будет действовать уже не только сила той же величины, но и момент, равный произведению силы на отстояние ее от центра приведения. Приведем напряжения в отдельной точке сечения оболочки к срединной поверхности, мы также получим силу, равную этому напряжению, и момент, равный произведению напряжения на отстояние z от линии срединной поверхности. Упомянутые сила и момент являются статически эквивалентными рассматриваемому напряжению.

Приведем напряжения, действующие во всем сечении, к линии срединной поверхности, мы получим полное усилие и полный момент в рассматриваемом сечении, статически эквивалентные напряжениям, возника-

блем в данном сечении реальной оболочки. Следовательно, усилие будет равно равнодействующей всех напряжений в сечении, а момент — моменту этой равнодействующей относительно линии срединной поверхности.

Заменяя таким образом действительные напряжения, возникающие в оболочке, статически или эквивалентными усилиями и моментами, мы можем рассматривать уже равновесие только срединной поверхности. Решение этой задачи значительно проще задачи о равновесии оболочки как тела трех измерений.

Перейдем к определению усилий и моментов. Рассмотрим грань элемента оболочки, перпендикулярную координатной линии α_1 (см. рис. 13). Как было отмечено выше, на рассматриваемую грань будут действовать нормальные напряжения σ_{11} и касательные σ_{21} и τ_{12} .

Длина элемента дуги срединной поверхности рассматриваемой грани равна

$$ds_2 = A_2 ds_2.$$

Длина же дуги заштрихованного элемента, отстоящего от срединной поверхности на расстоянии x , будет

$$ds'_2 = A_2 \left(1 + \frac{x}{R_2}\right) ds_2.$$

Следовательно, заштрихованная площадь рассматриваемой грани элемента определится по выражению

$$dF = A_2 \left(1 + \frac{x}{R_2}\right) d\alpha_2 dx.$$

Усилия, приходящиеся на заштрихованную площадь грани, будут равны:

$$dS_{11} = \sigma_{11} dF = \sigma_{11} A_2 \left(1 + \frac{x}{R_2}\right) d\alpha_2 dx,$$

$$dS_{12} = \tau_{12} dF = \tau_{12} A_2 \left(1 + \frac{x}{R_2}\right) d\alpha_2 dx,$$

$$dS_{12} = \sigma_{12} dF = \sigma_{12} A_2 \left(1 + \frac{x}{R_2}\right) d\alpha_2 dx.$$

Полные усилия, приходящиеся на всю рассматриваемую грань, очевидно, будут определяться по формулам:

$$S_{11} = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} dS_{11} = A_2 d\alpha_2 \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \sigma_{11} \left(1 + \frac{x}{R_2}\right) dx,$$

$$S_{12} = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} dS_{12} = A_2 d\alpha_2 \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \tau_{12} \left(1 + \frac{x}{R_2}\right) dx,$$

$$S_{12} = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} dS_{12} = A_2 dx_2 \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x_{12} \left(1 + \frac{x}{R_2}\right) dx.$$

Физический смысл усилий S_{11} , S_{12} и S_{22} состоит в том, что они являются равнодействующими всех напряжений x_{11} , x_{12} и x_{22} , действующих в рассматриваемом сечении. Упомянутые равнодействующие приходятся на элемент дуги срединной поверхности $dx_2 = A_2 dx_2$.

Так же как и в теории пластин, для удобства построения всех зависимостей будем интересоваться усилиями, отнесенными к единице длины срединной поверхности. Отнеся усилия S_{11} , S_{12} и S_{22} к длине дуги элемента срединной поверхности, окончательно получим:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{S_{11}}{A_2 dx_2} = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x_{11} \left(1 + \frac{x}{R_2}\right) dx \\ T_{12} &= \frac{S_{12}}{A_2 dx_2} = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x_{12} \left(1 + \frac{x}{R_2}\right) dx \\ N_1 &= \frac{S_{22}}{A_2 dx_2} = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x_{22} \left(1 + \frac{x}{R_2}\right) dx \end{aligned} \right\} \quad (84.1)$$

В выражениях (84.1) T_1 — нормальное, а T_{12} и N_1 — касательные усилия, отнесенные к единице длины срединной поверхности.

Аналогично для сечения, перпендикулярного к координатной линии x_2 , будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} T_2 &= \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x_{22} \left(1 + \frac{x}{R_1}\right) dx \\ T_{21} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x_{12} \left(1 + \frac{x}{R_1}\right) dx \\ N_2 &= \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x_{11} \left(1 + \frac{x}{R_1}\right) dx \end{aligned} \right\} \quad (85.1)$$

Здесь T_n — нормальное, а T_{τ} и N_t — касательные усилия, отнесенные к единице длины срединной поверхности.

В технической литературе касательные усилия N_t и N_z иногда называют поперечными или поперечными усилиями.

Правило знаков, установленное для нормальных и касательных напряжений, сохраняет свою силу и для усилий, а именно: усилия, действующие в площадках, у которых внешняя нормаль совпадает с положительными направлениями e_1 или e_2 , считаются положительными, если они положительным образом проецируются на направления e_1 , e_2 и e_3 . И наоборот, если внешняя нормаль к площадке обратна по направлению e_1 или e_2 , то положительные усилия отрицательным образом проецируются на e_1 , e_2 и e_3 . На рис. 14 показаны положительные усилия.

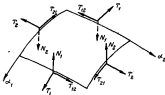


Рис. 14

Перейдем к определению моментов напряжений e_{11} и e_{22} (момент напряжений e_{33} относительно срединной поверхности всегда равен нулю). Обращаясь опять к рис. 13, для мушкетерского сечения элемента получим следующие величины моментов напряжений e_{11} и e_{22} относительно срединной поверхности:

$$dS_{11}x = e_{11}A_2\left(1 + \frac{x}{R_2}\right)xd\alpha_2dx,$$

$$dS_{22}x = e_{22}A_2\left(1 + \frac{x}{R_2}\right)xd\alpha_2dx.$$

Полные величины моментов в рассматриваемом сечении, приходящиеся на длину дуги срединной поверхности $d\alpha_2 = A_2d\alpha_2$, очевидно, будут равны

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x dS_{11} &= A_2 d\alpha_2 \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} e_{11} x \left(1 + \frac{x}{R_2}\right) dx, \\ \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x dS_{22} &= A_2 d\alpha_2 \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} e_{22} x \left(1 + \frac{x}{R_2}\right) dx. \end{aligned}$$

Относя полученные моменты к $A_z dz$, получим

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \sigma_{11} x \left(1 + \frac{x}{R_1}\right) dx \\ M_{12} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \sigma_{12} x \left(1 + \frac{x}{R_1}\right) dx \end{aligned} \right\} \quad (86.1)$$

Аналогично для сечения, перпендикулярного к координатной линии z , будем иметь

$$\left. \begin{aligned} M_2 &= \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \sigma_{22} x \left(1 + \frac{x}{R_1}\right) dx \\ M_{23} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \sigma_{23} x \left(1 + \frac{x}{R_1}\right) dx \end{aligned} \right\} \quad (87.1)$$

В выражениях (86.1) и (87.1) M_1 и M_2 — изгибающие моменты, относенные к единице длины срединной поверхности, M_{12} и M_{23} — крутильные моменты. Изгибающие и крутильные моменты будем обозначать двойными стрелками, причем направление вращения примем совпадающим с направлением часовой стрелки. Положительные направления моментов показаны на рис. 15.

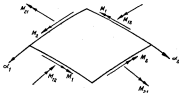


Рис. 15

Шесть усилий: T_1 , T_{12} , N_1 , T_2 , T_{23} , N_2 и четыре момента: M_1 , M_{12} , M_2 , M_{23} статически эквивалентны всем напряжениям, возникающим в оболочке при ее деформации. Следовательно, вместо рассмотрения условий

равновесия элемента оболочки, достаточно рассмотреть условия равновесия элемента ее срединной поверхности, нагруженного соответствующими усилиями и моментами. С другой стороны, знание всех усилий и моментов равносильно знанию всех напряжений, возникающих в оболочке.

В теории оболочек вместо усилий T_{12} и T_{21} и моментов M_{12} и M_{21} вводят их комбинации

$$\left. \begin{aligned} S &= T_{12} - \frac{M_{12}}{R_2} = T_{21} - \frac{M_{21}}{R_1} \\ H &= \frac{1}{2} (M_{12} + M_{21}) \end{aligned} \right\} \quad (88.1)$$

§ 10. Условия равновесия элемента оболочки

Как было отмечено выше, в положении равновесия внешние усилия уравновешиваются внутренними напряжениями, возникающими в оболочке. Последнее же мы заменили статически эквивалентными условиями

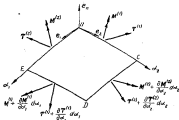


Рис. 16

и моментами, приложенными к срединной поверхности. Для рассмотрения равновесия элемента срединной поверхности оболочки необходимо аналогичную операцию проделать и с внешними условиями, т. е. заменить внешние условия статически им эквивалентными и приложенными к срединной поверхности.

Все внешние силы можно разделить на две группы:

- 1) объемные силы,
- 2) поверхностные силы.

Объемными силами являются силы веса (в задачах статики) и силы инерции (в задачах динамики), которые приложены ко всем точкам рассматриваемого объема.

Ввиду малости толщины оболочки, объемные силы можно считать равномерно распределенными по толщине оболочки. Следовательно, моменты относительно срединной поверхности объемные силы давать не будут. Таким образом, объемные силы приводятся только к силам, приложенным к срединной поверхности.

Вторую группу сил составляют поверхностные силы, приложенные к верхней и нижней краевой линейным поверхностям оболочки. Из поверхностных сил наибольший практический интерес представляет давление жидкости или газа. Последнее же действует нормально к срединной поверхности оболочки и, следовательно, моментов относительно срединной поверхности давать не будет. Таким образом, и поверхностные силы приводятся только к силам.

Обозначим вектор внешней силы, приходящейся на единицу площади срединной поверхности, через q . Прочём его, очевидно, можно представить в виде

$$q = q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3, \quad (89.1)$$

где q_1 , q_2 и q_3 — компоненты или проекции вектора q на направления e_1 , e_2 , e_3 .

Теперь перейдем к анализу условий равновесия элемента срединной поверхности оболочки (рис. 16). Сначала рассмотрим условия и моменты, приложенные к каждой из сторон рассматриваемого элемента $OCDE$. На сторону OC действуют усилия $T_1 A_1 dx_2$, $T_{21} A_1 dx_2$, и $N_1 A_1 dx_2$ и моменты $M_1 A_1 dx_2$, $M_{21} A_1 dx_2$. При этом суммарный вектор усилий будет

$$-T^{(1)} = -(T_1 e_1 + T_{21} e_2 + N_1 e_3) A_1 dx_2, \quad (90.1)$$

а суммарный вектор момента

$$-M^{(1)} = -(M_1 e_1 + M_{21} e_2) A_1 dx_2. \quad (91.1)$$

На противоположной стороне ED соответствующие векторы усилий и моментов будут иметь приращения

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial x_1} dx_2 \equiv \frac{\partial M^{(1)}}{\partial x_1} dx_2,$$

а полные величины усилий и моментов, приложенные к этой стороне, будут

$$\left. \begin{aligned} T^{(1)} + \frac{\partial T^{(1)}}{\partial x_1} dx_2 \\ M^{(1)} + \frac{\partial M^{(1)}}{\partial x_1} dx_2 \end{aligned} \right\} \quad (92.1)$$

Аналогично на сторону OE действуют:

усилие

$$-T^{(2)} = -(T_2 e_1 + T_{12} e_2 + N_2 e_3) A_2 dx_1, \quad (93.1)$$

момент

$$-M^{(2)} = -(M_2 e_1 + M_{12} e_2) A_2 dx_1, \quad (94.1)$$

а на противоположную сторону CD действуют:

усилие

$$T^{(2)} + \frac{\partial T^{(2)}}{\partial x_2} dx_1, \quad (95.1)$$

момент

$$M^{(2)} + \frac{\partial M^{(2)}}{\partial x_2} dx_1. \quad (96.1)$$

Кроме рассмотренных усилий и моментов, на элемент действует внешняя нагрузка

$$q A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = (q, e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2.$$

При составлении уравнений равновесия будем пренебрегать (малой величиной) изменением размеров и формы элемента срединной поверхности в процессе деформации.

Знак минус в выражениях (90.1), (91.1), (93.1) и (94.1) является следствием того, что на противоположных сторонах элемента положительные значения проекций усилий и моментов имеют взаимно противоположные направления.

В положении равновесия главный вектор и главный момент всех внешних и внутренних сил, действующих на рассматриваемый элемент срединной поверхности, должны быть равны нулю.

Выпишем условие равенства нулю главного вектора

$$-T^{(1)} + T^{(1)} + \frac{\partial T^{(1)}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 - T^{(2)} + T^{(2)} + \frac{\partial T^{(2)}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + q A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = 0$$

или

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial T^{(2)}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + q A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = 0. \quad (97.1)$$

Подставляя в ур-ние (97.1) $T^{(1)}$, $T^{(2)}$ и q и учитывая правила дифференцирования единичных векторов, окончательно получим

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial A_2 T_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2 T_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} T_{12} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_2 + \frac{A_2 A_1}{R_1} N_1 + A_1 A_2 \beta_1 \right) e_1 + \\ & + \left(\frac{\partial A_2 T_{12}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2 T_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_2} T_{12} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_1 + \frac{A_1 A_2}{R_2} N_2 + A_1 A_2 \beta_2 \right) e_2 + \\ & + \left[\frac{\partial A_2 N_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2 N_2}{\partial \alpha_2} - A_1 A_2 \left(\frac{F_1}{R_1} + \frac{F_2}{R_2} \right) + A_1 A_2 q_3 \right] e_3 = 0. \quad (98.1) \end{aligned}$$

Известно, что равенство нулю вектора означает равенство нулю всех его проекций, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_2 T_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2 T_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} T_{12} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_2 \right) + \frac{N_1}{R_1} + q_1 = 0 \\ & \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_2 T_{12}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2 T_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_2} T_{12} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_1 \right) + \frac{N_2}{R_2} + q_2 = 0 \\ & \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_2 N_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2 N_2}{\partial \alpha_2} \right) - \frac{F_1}{R_1} - \frac{F_2}{R_2} + q_3 = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (99.1)$$

Уравнения (99.1) и выражают равенство нулю главного вектора всех внешних и внутренних сил.

Перейдем к определению главного момента. Главный момент будет равен сумме всех внутренних моментов и моментов от внутренних усилий и внешней нагрузки.

Сумма внутренних моментов будет

$$-M^{(1)} + M^{(1)} + \frac{\partial M^{(1)}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 - M^{(2)} + M^{(2)} + \frac{\partial M^{(2)}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 = \frac{\partial M^{(1)}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial M^{(2)}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2.$$

Подставляя в это выражение значения $M^{(1)}$ и $M^{(2)}$ из выражений (91.1) и (94.1) и учитывая правила дифференцирования единичных векторов, получим следующее выражение для суммы внутренних моментов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M^{(1)}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial M^{(2)}}{\partial x_2} dx_2 = & \left[- \left(\frac{\partial A_2 M_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2 M_{22}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_1} M_{21} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} M_{11} \right) e_3 + \right. \\ & + \left(\frac{\partial A_2 M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_1 M_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_1} M_{12} - \frac{\partial A_2}{\partial x_1} M_{13} \right) e_2 + \\ & \left. + \left(\frac{M_{21}}{R_1} - \frac{M_{22}}{R_2} \right) A_1 A_2 e_3 \right] dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (100.1)$$

Рассмотрим момент от внутренних усилий, действующих на элемент срединной поверхности, относительно точки O . Компоненты усилий, касательные к срединной поверхности (T_{11} , T_{12} , T_{21} , T_{22}), дают момент лишь относительно оси e_3 , а компоненты усилий, нормальные к срединной поверхности (N_1 и N_2), дают моменты лишь относительно осей e_1 и e_2 .

Умножив усилия, действующие на стороны элемента длиной $A_1 dx_1$ и $A_2 dx_2$, на плечи, равные $A_2 dx_2$ и $A_1 dx_1$, мы получим величины второго порядка малости. Что касается моментов от приращения усилий, то они будут величинами третьего порядка малости, и этими моментами можно пренебречь. Точно так же момент от внешней нагрузки будет величиной третьего порядка малости, и им тоже следует пренебречь.

Окончательно, момент от усилий будет равен

$$[N_1 e_1 - N_2 e_2 + (T_{12} - T_{21}) e_3] A_1 A_2 dx_1 dx_2. \quad (101.1)$$

Сложив сумму внутренних моментов с моментом от усилий, получим главный момент всех сил. Приравняв его нулю, будем иметь

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\partial A_2 M_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_1 M_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_1} M_{21} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} M_{11} \right) - A_1 A_2 N_3 \right] e_3 + \\ & + \left[\left(\frac{\partial A_2 M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_1 M_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_1} M_{12} - \frac{\partial A_2}{\partial x_1} M_{13} \right) - A_1 A_2 N_2 \right] e_2 + \\ & + \left(T_{12} - T_{21} + \frac{M_{21}}{R_1} - \frac{M_{22}}{R_2} \right) e_3 = 0. \end{aligned} \quad (102.1)$$

Уравнение (102.1) и есть исконое равенство нулю главного момента всех приложенных к элементу сил. Это равенство может иметь место только в том случае, если

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_2 M_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_1 M_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_1} M_{21} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} M_{11} \right) - N_3 &= 0 \\ \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_2 M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_1 M_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_1} M_{12} - \frac{\partial A_2}{\partial x_1} M_{13} \right) - N_2 &= 0 \\ T_{12} - T_{21} + \frac{M_{21}}{R_1} - \frac{M_{22}}{R_2} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (103.1)$$

Шесть ур-ий (99.1) и (103.1) и являются искомыми дифференциальными уравнениями равновесия элемента срединной поверхности обо-

дочки. Необходимо отметить, что последнее уравнение системы (103. I), по существу, является тождеством. Действительно, подстановкой в это уравнение значений T_{12} , T_{22} , M_{12} и M_{22} приходим к равенству

$$T_{12} - T_{21} + \frac{M_{12}}{R_1} - \frac{M_{21}}{R_2} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(1 + \frac{x}{R_1}\right) \left(1 + \frac{x}{R_2}\right) (z_{12} - z_{21}) dx,$$

но в силу симметрии тензора напряжений (это доказывается в общей теории упругости) $z_{12} = z_{21}$. Следовательно, последнее уравнение системы (103. I) является тождеством.

В полученное шесть уравнений равновесия входят десять неизвестных: шесть усилий T_{11} , T_{12} , T_{21} , T_{22} , N_1 , N_2 и четыре момента M_1 , M_{12} , M_2 , M_{21} , поэтому задача о равновесии элемента оболочки статически неопределима. Таким образом, десять неизвестных усилий и моментов не могут быть определены только из уравнений статики. Для определения этих усилий необходимы дополнительные уравнения, которые будут получены в § 12.

Обычно в теории оболочек систему уравнений равновесия (99. I) и (103. I) заменяется одной системой трех уравнений. Для этого из первого и второго уравнений системы (103. I) выписывают значения N_1 и N_2 (они входят в систему (99. I) в явном виде) и подставляют их в систему (99. I).

В результате с учетом соотношений (88. I) приходим окончательно к следующей системе трех дифференциальных уравнений равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A_1 T_1}{\partial s_1} + \frac{\partial A_1 S}{\partial s_2} + \frac{\partial A_1}{\partial s_1} S - \frac{\partial A_1}{\partial s_1} T_2 + \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial A_2 M_1}{\partial s_1} - \frac{\partial A_2}{\partial s_1} M_2 + \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial A_2 H}{\partial s_2} + 2 \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial s_2} H \right) &= -A_1 A_2 q_1 \\ \frac{\partial A_2 S}{\partial s_2} + \frac{\partial A_2 T_2}{\partial s_1} + \frac{\partial A_2}{\partial s_1} S - \frac{\partial A_2}{\partial s_2} T_1 + \frac{1}{R_2} \left(\frac{\partial A_1 M_2}{\partial s_2} - \frac{\partial A_1}{\partial s_2} M_1 + \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial A_1 H}{\partial s_1} + 2 \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial s_1} H \right) &= -A_2 A_1 q_2 \\ \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial s_1} \cdot \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial A_2 M_1}{\partial s_1} + \frac{\partial A_2 H}{\partial s_2} + \frac{\partial A_2}{\partial s_2} H - \frac{\partial A_2}{\partial s_1} M_2 \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial s_2} \cdot \frac{1}{R_2} \left(\frac{\partial A_1 M_2}{\partial s_2} + \frac{\partial A_1 H}{\partial s_1} + \frac{\partial A_1}{\partial s_1} H - \frac{\partial A_1}{\partial s_2} M_1 \right) \right] &= q_n \end{aligned} \right\} \quad (104. I)$$

В полученную систему трех уравнений входят шесть неизвестных: T_1 , T_2 , S , M_1 , M_2 , H , т. е. задача является статически неопределимой.

§ 11. Потенциальная энергия деформации оболочки

Мы уже отметили, что задача о равновесии элемента оболочки статически неопределима. Необходимо, очевидно, найти те дополнительные зависимости, которые позволяют бы раскрыть эту статическую неопреде-

жимость. Определив же все усилия и моменты, мы можем определять возникающие в оболочке напряжения. Однако при одних и тех же напряжениях, оболочка, выполненная из различных материалов (с разными упругими свойствами), будут деформироваться по-разному, поэтому для определения деформаций оболочки необходимо иметь зависимости между напряжениями и соответствующими им деформациями. Эти зависимости были получены в общей теории упругости. Однако при изложении теории оболочек мы заменили действительные напряжения статически эквивалентными усилиями и моментами, поэтому необходимо найти зависимость между усилиями и моментами, с одной стороны, и компонентами деформаций срединной поверхности с другой. Эти зависимости и позволят раскрыть статическую неопределенность задачи о равновесии оболочки в предлагаемой общей теории.

Известно, что упругие свойства всякого тела, а значит, и оболочки, полностью определяются потенциальной энергией его деформации.

В общей теории упругости показано, что потенциальная энергия деформации тела объема Ω определяется по выражению

$$V = \frac{1}{2} \int (\sigma_{11}\epsilon_{11} + \sigma_{22}\epsilon_{22} + \sigma_{33}\epsilon_{33} + \sigma_{12}\epsilon_{12} + \sigma_{13}\epsilon_{13} + \sigma_{23}\epsilon_{23}) d\Omega, \quad (105.1)$$

где σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} — нормальные напряжения на трех взаимно перпендикулярных площадках элементарного параллелепипеда;

σ_{12} , σ_{13} , σ_{23} — касательные напряжения;

ϵ_{11} , ϵ_{22} , ϵ_{33} — относительные удлинения;

ϵ_{12} , ϵ_{13} , ϵ_{23} — деформации сдвига;

$d\Omega$ — элементарный объем.

Определим потенциальную энергию элемента, выделенного из оболочки четырьмя близкими сечениями, перпендикулярными координатным линиям α_1 и α_2 , а также двумя сечениями, параллельными срединной поверхности и отстоящими друг от друга на расстоянии dz (см. рис. 13).

Объем заштрихованного элемента будет

$$d\Omega = A_1 \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) A_2 \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) d\alpha_1 d\alpha_2 dz. \quad (106.1)$$

Учитывая, что для тонких оболочек, согласно гипотезам прямых нормалей, нормальными напряжениями σ_{11} и сдвигами ϵ_{11} и ϵ_{22} можно пренебречь, для потенциальной энергии заштрихованного элемента получим следующее выражение:

$$dV = \frac{1}{2} (\sigma_{12}\epsilon_{12} + \sigma_{23}\epsilon_{23} + \sigma_{33}\epsilon_{33}) \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 dz. \quad (107.1)$$

Потенциальная энергия деформации всей оболочки будет, очевидно, равна интегралу выражения (107.1) по всему объему оболочки. Следовательно,

$$V = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_{12}\epsilon_{12} + \sigma_{23}\epsilon_{23} + \sigma_{33}\epsilon_{33}) \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 dz. \quad (108.1)$$

Согласно закону Гука, для упругих изотропных и однородных материалов имеем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1+\mu} \left(\epsilon_{11} + \frac{\mu}{1-2\mu} \epsilon \right) \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1+\mu} \left(\epsilon_{22} + \frac{\mu}{1-2\mu} \epsilon \right) \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{1+\mu} \left(\epsilon_{33} + \frac{\mu}{1-2\mu} \epsilon \right) \\ \sigma_{12} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \epsilon_{12} \end{aligned} \right\} \quad (109.1)$$

где ϵ — объемное расширение, причем $\epsilon = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$.

Положив σ_{33} равным нулю, получим

$$\epsilon_{33} + \frac{\mu}{1-2\mu} \epsilon = 0$$

или

$$\epsilon_{33} + \frac{\mu}{1-2\mu} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) = 0,$$

откуда

$$\epsilon_{33} = -\frac{\mu}{1-2\mu} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}).$$

Подставив полученное значение ϵ_{33} в первые два выражения (109.1), получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_{11} + \mu \epsilon_{22}) \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_{22} + \mu \epsilon_{11}) \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \epsilon_{12} \end{aligned} \right\} \quad (110.1)$$

В нашем случае удлинения ϵ_{11} , ϵ_{22} и сдвиг ϵ_{12} идентичны рассмотренным в § 6 компонентам деформации $\epsilon_1^{(0)}$, $\epsilon_2^{(0)}$, $\omega^{(0)}$, поэтому

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1-\mu^2} [\epsilon_1^{(0)} + \mu \epsilon_2^{(0)}] \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1-\mu^2} [\epsilon_2^{(0)} + \mu \epsilon_1^{(0)}] \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \omega^{(0)} \end{aligned} \right\} \quad (111.1)$$

Компоненты деформации $\epsilon_1^{(0)}$, $\epsilon_2^{(0)}$ и $\omega^{(0)}$ выражаются через компоненты деформации элемента срединной поверхности зависимостями (81.5) и

(82.1). Подставляя эти зависимости в формулы для напряжений (111.1), получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[(z_1 + z_{z_1}) + \mu (z_2 + z_{z_2}) \right] \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[(z_2 + z_{z_2}) + \mu (z_1 + z_{z_1}) \right] \\ \sigma_{12} &= \frac{E}{2(1+\mu)} (\omega + 2xz) \end{aligned} \right\} \quad (112.1)$$

Подставляя в выражение для потенциальной энергии (106.1) значения σ_{11} , σ_{22} и σ_{12} из ф-л (112.1) и учитывая, что компоненты ε_{11} , ε_{22} и ε_{12} эквивалентны принятым в теории оболочек $\varepsilon_1^{(1)}$, $\varepsilon_2^{(1)}$ и $\omega^{(1)}$, приходим к выражению

$$V = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \iint \left[(z_1 + z_{z_1})^2 + \mu (z_2 + z_{z_2}) (z_1 + z_{z_1}) + (z_2 + z_{z_2})^2 + \right. \\ \left. + \mu (z_1 + z_{z_1}) (z_2 + z_{z_2}) + \frac{1-\mu}{2} (\omega + 2xz)^2 \right] \left(1 + \frac{x}{R_1} \right) \left(1 + \frac{x}{R_2} \right) A_1 A_2 dz_1 dz_2. \quad (113.1)$$

Выполнив в ф-ле (113.1) интегрирование по x в пределах от $-\frac{1}{2}$ до $+\frac{1}{2}$ и отбрасывая малые члены, окончательно получим

$$V = \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \iint \left[(z_1 + z_2)^2 - 2(1-\mu) \left(z_1 z_2 - \frac{\omega^2}{4} \right) \right] A_1 A_2 dz_1 dz_2 + \\ + \frac{Eh^3}{24(1-\mu^2)} \iint \left[(z_1 + z_2)^2 - 2(1-\mu) (z_1 z_2 - \omega^2) \right] A_1 A_2 dz_1 dz_2. \quad (114.1)$$

Выражение (114.1) и есть искомое выражение для потенциальной энергии деформации оболочки. Интегрирование распространяется по всей средней поверхности оболочки.

Так как в первый интеграл ф-лы (114.1) входит только удлинения и сдвиг, то эту часть полной потенциальной энергии деформации оболочки никогда не вызывают потенциальной энергией удлинения и сдвига. Вторым же интегралом называется потенциальной энергией изгиба и кручения.

§ 12. Зависимости между усилиями и моментами и деформациями средней поверхности оболочки

Воспользуемся полученным выражением потенциальной энергии деформации оболочки для определения аналитических зависимостей между усилиями и моментами и деформациями средней поверхности.

Допустим, что в положении равновесия мы даем оболочке малые, но возможные перемещения δu , δv и δw . В этом случае относительные удлинения и сдвиг получают соответственно приращения $\delta \varepsilon_{11}$, $\delta \varepsilon_{22}$ и $\delta \varepsilon_{12}$, и, если воспользоваться выражением (106.1), приращение потенциальной энергии будет

$$\delta V = \iint \left[(\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \delta \varepsilon_{22} + \sigma_{12} \delta \varepsilon_{12}) \left(1 + \frac{x}{R_1} \right) \left(1 + \frac{x}{R_2} \right) A_1 A_2 dz_1 dz_2 \right] \quad (115.1)$$

Но, как было отмечено, $e_{11} = e_1^{(1)}$; $e_{22} = e_2^{(2)}$; $e_{33} = e^{(3)}$ и, следовательно,

$$\delta e_{11} = \delta e_1^{(1)}; \delta e_{22} = \delta e_2^{(2)}; \delta e_{33} = \delta e^{(3)}. \quad (116.1)$$

Подставив в ф-лы (116.1) $e_1^{(1)}$ из ф-лы (65.1), $e_2^{(2)}$ из ф-лы (69.1) и $e^{(3)}$ из ф-лы (72.1), получим

$$\delta e_1^{(1)} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma}{R_1}} (\delta a_1 + z \delta a_2),$$

$$\delta e_2^{(2)} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma}{R_2}} (\delta a_2 + z \delta a_3),$$

$$\delta e^{(3)} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma}{R_3}} (\delta a_3 + z \delta r_1) + \frac{1}{1 + \frac{\sigma}{R_4}} (\delta a_4 + z \delta r_2).$$

Вводя эти выражения в ф-лу (115.1) вместо δe_{11} , δe_{22} и δe_{33} , будем иметь

$$\begin{aligned} \delta V = \iiint \left[\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{a_{11} \left(1 + \frac{\sigma}{R_1}\right) dz}{1 + \frac{\sigma}{R_1}} \delta a_1 + \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{a_{11} \left(1 + \frac{\sigma}{R_1}\right) z dz}{1 + \frac{\sigma}{R_1}} \delta a_2 + \right. \\ \left. + \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{a_{22} \left(1 + \frac{\sigma}{R_2}\right) dz}{1 + \frac{\sigma}{R_2}} \delta a_2 + \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{a_{22} \left(1 + \frac{\sigma}{R_2}\right) z dz}{1 + \frac{\sigma}{R_2}} \delta a_3 + \right. \\ \left. + \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{a_{33} \left(1 + \frac{\sigma}{R_3}\right) dz}{1 + \frac{\sigma}{R_3}} \delta a_3 + \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{a_{33} \left(1 + \frac{\sigma}{R_3}\right) z dz}{1 + \frac{\sigma}{R_3}} \delta r_1 + \right. \\ \left. + \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{a_{44} \left(1 + \frac{\sigma}{R_4}\right) dz}{1 + \frac{\sigma}{R_4}} \delta a_4 + \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{a_{44} \left(1 + \frac{\sigma}{R_4}\right) z dz}{1 + \frac{\sigma}{R_4}} \delta r_2 \right] A_3 A_4 da_1 da_2. \quad (117.1) \end{aligned}$$

Подчеркнутые интегралы — не что иное, как соответствующие усилия и моменты, что видно из сравнения их с ф-лами (84.1)–(87.1). Вводя в ф-лу (117.1) эти усилия и моменты, получим

$$\begin{aligned} \delta V = \iiint (T_1 \delta a_1 + T_2 \delta a_2 + T_{31} \delta a_1 + T_{32} \delta a_2 + M_1 \delta a_1 + M_2 \delta a_2 + \\ + M_{11} \delta a_1 + M_{21} \delta a_2) A_3 A_4 da_1 da_2, \quad (118.1) \end{aligned}$$

но, согласно ф-лам (74.1), можно записать

$$\left. \begin{aligned} \delta z_1 &= \delta z - \frac{1}{R_1} \delta a_1 \\ \delta z_2 &= \delta z - \frac{1}{R_2} \delta a_2 \\ \delta a &= \delta a_1 + \delta a_2 \end{aligned} \right\} \quad (119.1)$$

С учетом ф-л (119.1) и (88.1) приращению потенциальной энергии можно придать вид

$$\delta V = \iint (T_1 \delta z_1 + T_2 \delta z_2 + S \delta a + M_1 \delta a_1 + M_2 \delta a_2 + 2H \delta z) A_1 A_2 da_1 da_2 \quad (120.1)$$

С другой стороны, выражение для приращения потенциальной энергии можно получить, если взять вариацию потенциальной энергии из ф-лы (114.1)

$$\begin{aligned} \delta V = \iiint & \left[\frac{E\delta}{1-\mu^2} (z_1 + \mu z_2) \delta z_1 + \frac{E\delta}{1-\mu^2} (z_2 + \mu z_1) \delta z_2 + \frac{E\delta}{2(1+\mu)} \delta a + \right. \\ & \left. + \frac{E\psi}{12(1-\mu^2)} (z_1 + \mu z_2) \delta a_1 + \frac{E\psi}{12(1-\mu^2)} (z_2 + \mu z_1) \delta a_2 + \frac{E\psi}{24(1+\mu)} \delta z \right] A_1 A_2 da_1 da_2 \end{aligned} \quad (121.1)$$

Вариации потенциальной энергии, определенные по ф-лам (120.1) и (121.1), очевидно, равны. Следовательно, равны интегралы, стоящие в правых частях обоих равенств. Поскольку это равенство должно соблюдаться при всех возможных малых приращениях δa_1 , δa_2 , ..., δz , то коэффициенты при δa_1 , δa_2 , ..., δz в обоих равенствах должны быть равны друг другу. Приравнивая упомянутые коэффициенты, получим:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{E\delta}{1-\mu^2} (z_1 + \mu z_2) \\ T_2 &= \frac{E\delta}{1-\mu^2} (z_2 + \mu z_1) \\ S &= \frac{E\delta}{2(1+\mu)} \delta \\ M_1 &= \frac{E\psi}{12(1-\mu^2)} (z_1 + \mu z_2) \\ M_2 &= \frac{E\psi}{12(1-\mu^2)} (z_2 + \mu z_1) \\ H &= \frac{E\psi}{12(1+\mu)} \delta \end{aligned} \right\} \quad (122.1)$$

Формулы (122.1) и определяют искомые зависимости между усилиями и моментами, с одной стороны, и деформациями срединной поверхности, с другой. Анализ показывает, что с погрешностью, не превышающей погрешность гипотез прямых нормалей, можно считать

$$\left. \begin{aligned} T_{11} = T_{22} = S &= \frac{E\delta}{2(1+\mu)} \delta \\ M_{12} = M_{21} = H &= \frac{E\psi}{12(1+\mu)} \delta \end{aligned} \right\} \quad (123.1)$$

§ 13. Граничные условия

В результате интегрирования уравнений равновесия оболочки мы получим дополнительно ряд произвольных функций интегрирования. Эти функции определяются из граничных условий задачи. Следовательно, до тех пор, пока решение уравнений равновесия не подчинено на границах оболочки определенным условиям (заданным величинам усилий, моментов, деформаций, перемещений или соотношений между этими величинами), задача определения возникающих в оболочке усилий и моментов остается неопределенной. Определим число граничных условий, которые должны быть заданы на краях оболочки, и их математическую формулировку.

При формулировке граничных условий необходимо рассмотреть все три возможных случая.

1. Оболочка не имеет границ, т. е. является замкнутой. В этом случае координатные линии α_1 и α_2 являются замкнутыми кривыми. Примером замкнутой оболочки может служить сфера.

2. Оболочка замкнута в одном направлении и имеет границы в другом. В этом случае одна из координатных линий является замкнутой, другая же имеет границы. Примером такой оболочки может служить участок цилиндрической трубы.

3. Оболочка имеет границы как в одном, так и в другом направлении. В этом случае координатные линии α_1 и α_2 имеют границы.

Рассмотрим сначала первый случай. Поскольку замкнутая оболочка не имеет границ и удовлетворить граничным условиям не следует, то возникает вопрос, в каких граничных условиях может быть? Однако не всякое решение системы уравнений равновесия является решением задачи. Так как координатные линии α_1 и α_2 являются для замкнутой оболочки замкнутыми, то, двигаясь вдоль координатной линии, мы будем периодически возвращаться в одну и ту же точку срединной поверхности. Перемещении данной точки (или соответствующие им деформации или напряжения) будут вполне определенными, поэтому на решении необходимо наложить условия периодичности функций координат. При этом период должен быть таким, чтобы сохранялась однозначность перемещений или деформаций и напряжений.

Таким образом, в случае замкнутой оболочки граничными условиями можно считать условия периодичности.

Во втором случае, когда оболочка замкнута в отношении одной координаты, граничными условиями будут условия периодичности решения в направлении этой координаты. В направлении же другой координаты необходимо удовлетворить заданным условиям на краях. При этом ограничимся рассмотрением случая, когда край оболочки совпадает с одной из координатных линий.

Пусть край оболочки совпадает с линией $\alpha_2 = \text{const}$. Действующие на этом краю оболочки напряжения сводятся (как и для всей оболочки) к трем усилиям: T_{α_1} , T_{α_2} и N , и двум моментам: M_{α_1} и M_{α_2} . Поэтому может показаться, что число граничных условий на краю должно быть равно пяти. В действительности оказывается, что для решения достаточно иметь на краю только четыре граничных условия. Кажущееся противоречие легко разрешается, так как три величина (усилия T_{α_2} и N , и момент M_{α_2}) могут быть сведены к двум величинам. Физический смысл такого преобразования состоит в следующем. Крутящий момент на краю оболочки заменяется касательными и перерезывающими силами. Суммируя эти составляющие крутящего момента с касательными ус-

лязии T_{21} и перерезывающими силами N_2 , мы получим условные касательные и перерезывающие силы, эквивалентные силам T_{21} и N_2 и моменту M_{21} . Следовательно, вместо трех величин T_{21} , N_2 и M_{21} мы получим две величины. А всего вместе с усилием T_2 и моментом M_2 будем иметь четыре граничных условия.

Выполним замену M_{21} касательной и перерезывающей составляющих. Рассмотрим на краю оболочки некоторую произвольную точку A и отстоящие от нее на расстоянии ds_1 точки B и C (рис. 17).

Посредние дуг $\widehat{AB}$ и $\widehat{AC}$ возьмем точки E и F . Расстояние между точками E и F будет так же равно ds_1 . Пусть крутящий момент в точке E равен M_{21} . В точке F крутящий момент будет

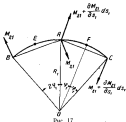
$$M_{21} + \frac{\partial M_{21}}{\partial s_1} ds_1.$$

Упомянутые моменты являются моментами, отнесенными к единице длины дуги s_1 . Полный крутящий момент, приходящийся на дугу $\widehat{AB}$, будет равен $M_{21} ds_1$, а полный крутящий момент, приходящийся на дугу $\widehat{AC}$, равен

$$\left(M_{21} + \frac{\partial M_{21}}{\partial s_1} ds_1 \right) ds_1.$$

Крутящие моменты заменим парой сил, приложенных в точках B и A и точках A и C . При этом сила будет равна частному от деления момента на плечо пары. Следовательно, в точках A и B силы от момента $M_{21} ds_1$ будут равны

$$\frac{M_{21} ds_1}{ds_1} = M_{21},$$



а в точках A и C силы от момента $\left(M_{21} + \frac{\partial M_{21}}{\partial s_1} ds_1 \right) ds_1$ будут

$$\frac{\left(M_{21} + \frac{\partial M_{21}}{\partial s_1} ds_1 \right) ds_1}{ds_1} = M_{21} + \frac{\partial M_{21}}{\partial s_1} ds_1.$$

Направления сил показаны на рис. 17. Таким образом, в точке A имеем две силы: одну — от момента $M_{21} ds_1$ и другую — от момента $\left(M_{21} + \frac{\partial M_{21}}{\partial s_1} ds_1 \right) ds_1$. Спроектируем эти силы на направления нормали к срединной поверхности и на направление, касательное к ней. Учтем, что угол φ_1 мал и равен $\frac{ds_1}{2R_1}$, получим:

а) проекцию на нормаль к срединной поверхности

$$\left(M_{21} + \frac{\partial M_{21}}{\partial s_1} ds_1 \right) \cos \varphi_1 - M_{21} \cos \varphi_1 \approx \frac{\partial M_{21}}{\partial s_1} ds_1;$$

б) проекцию на направление касательной к a_1

$$M_{22} \sin \varphi_1 + \left(M_{21} + \frac{\partial M_{21}}{\partial s_1} ds_1 \right) \sin \varphi_1 \approx \left(2M_{21} + \frac{\partial M_{21}}{\partial s_1} ds_1 \right) \varphi_1 = \\ = \left(2M_{21} + \frac{\partial M_{21}}{\partial s_1} ds_1 \right) \frac{ds_1}{2R_1} \approx \frac{M_{21}}{R_1} ds_1.$$

Обе полученные проекции приходится на элемент дуги длиной ds_1 . Поэтому, если мы получим проекции сил, вызванных ~~крутящим моментом~~ M_{21} , отнесенные к единице длины дуги s_1 . Проекция на нормаль к срединной поверхности (от M_{21}), отнесенная к единице длины дуги, равна $\frac{\partial M_{21}}{\partial s_1}$ или $\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial M_{21}}{\partial s_1}$, а проекция этих же сил на направление касательной к a_1 , также отнесенная к единице длины дуги s_1 , соответственно равна $\frac{M_{21}}{R_1}$.

Таким образом, крутящий момент M_{21} мы заменили перерезывающей силой, распределенной по закону $\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial M_{21}}{\partial s_1}$, и касательными силами, распределенными по закону $\frac{M_{21}}{R_1}$.

Просуммировав эти составляющие с перерезывающей силой N_2 и касательной силой T_{22} , получим

$$N_2 + \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial M_{21}}{\partial s_1} ; T_{22} + \frac{M_{21}}{R_1}. \quad (124.1)$$

Эти величины статически эквивалентны усилиям N_{21} , T_{21} и моменту M_{21} .

В итоге на краю оболочки $a_2 = \text{const}$ будем иметь четыре заданные величины:

$$T_{21}, T_{22} + \frac{M_{21}}{R_1}, N_2 + \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial M_{21}}{\partial s_1}, M_2.$$

Аналогично на краю оболочки $a_1 = \text{const}$ будем иметь

$$T_{11}, T_{12} + \frac{M_{12}}{R_1}, N_1 + \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial M_{12}}{\partial s_1}, M_1.$$

Необходимо отметить, что в практических задачах редко бывают заданы все четыре упомянутые величины. Гораздо чаще бывают заданы на краях перемещения или углы поворота.

Приведем наиболее распространенные варианты граничных условий на краю оболочки.

1. Абсолютно свободный край

В случае абсолютно свободного края все усилия и моменты на краю должны быть равны нулю, т. е.

$$T_2 = 0, T_{21} + \frac{M_{21}}{R_1} = 0, N_2 + \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial M_{21}}{\partial s_1} = 0, M_2 = 0.$$

2. Шарнирный, неподвижно опертый край

В этом случае все перемещения на краю равны нулю. Так как край шарнирный, то момент M_2 равен нулю. Следовательно, граничные условия будут

$$M_2 = 0, u = 0, v = 0, w = 0.$$

3. Шарнирный, свободный и нормальный и неподвижный и касательный закрепленный край

В этом случае касательные перемещения u и v на краю будут равны нулю. Поскольку край свободен в нормальном направлении, то условие $N_0 + \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial M_0}{\partial x_1}$ должно быть равно нулю. Шарнирность края накладывает условие равенства нулю момента M_0 . В итоге имеем

$$M_0 = 0, N_0 + \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial M_0}{\partial x_1} = 0, u = 0, v = 0.$$

4. Неподвижный и абсолютно заделанный край

В этом случае все перемещения u , v , w на краю равны нулю. Абсолютная заделка накладывает условие, чтобы угол поворота φ края был также равен нулю. Следовательно,

$$u = 0, v = 0, w = 0, \varphi = -\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\tau}{R_0} = 0.$$

§ 14. Два пути решения задач теории оболочек

Принципиально возможны два пути решения любой задачи общей теории упругости: либо в перемещениях, либо в напряжениях. Поскольку при рассмотрении задачи о деформации оболочек перемещения любой точки оболочки выражаются через перемещения ее срединной поверхности, а фактически напряжения в оболочке заменяются статически эквивалентными усилиями и моментами, постольку и в теории оболочек, как одном из разделов теории упругости, существуют два пути решения задач:

- 1) в перемещениях точек срединной поверхности;
- 2) в усилиях и моментах.

Рассмотрим первый из них — решение задачи теории оболочек в перемещениях. В § 10 нами получена окончательная система трех уравнений равновесия (104.1), выраженная в усилиях и моментах. Если последние (то есть усилия и моменты) с помощью формул обобщенного закона Гука (123.1) выразить через относительные деформации срединной поверхности ε_1 , ε_2 , α , κ_1 , κ_2 и τ , то получим систему трех уравнений равновесия, выраженную в компонентах деформации срединной поверхности. Но компоненты деформации ε_1 , ε_2 , α , κ_1 , κ_2 и τ связаны с перемещениями срединной поверхности зависимостями (77.1). Заменяя компоненты деформации перемещениями срединной поверхности оболочки, мы приходим к системе трех уравнений равновесия с тремя неизвестными перемещениями u , v и w , к интегрированию которой при заданных граничных условиях и сводится решение поставленной задачи. Таков первый путь решения задачи теории оболочек.

Рассмотрим второй путь — решение задачи теории оболочек в усилиях и моментах. Как было выше отмечено, система трех уравнений равновесия (104.1) включает в себя шесть неизвестных (три усилия и три момента). Следовательно, система (104.1) недостаточна для решения задачи, и ее необходимо дополнить. Воспользуемся для этого системой уравнений неразрывности срединной поверхности (система 83.1). Если в этой системе заменить компоненты деформации ε_1 , ε_2 , α , κ_1 , κ_2 и τ их выражениями через усилия и моменты, то получим систему трех уравнений неразрывности в усилиях и моментах. Дополнив последнюю систему уравнений равновесия (104.1), мы приходим к системе шести уравнений

равновесия—неразрывности с шестью неизвестными условиями, и моментами. К интегрированию этой системы при заданных граничных условиях и сводятся решение задачи теории оболочек в условиях и моментах.

Необходимо отметить, что как в первом случае, так и во втором, система имеет восьмой порядок, то есть эквивалентна некоторому уравнению в частных производных восьмого порядка.

Ввиду принятого допущения о малости перемещений система уравнений равновесия в перемещениях, равно как и система уравнений равновесия и неразрывности в условиях и моментах, являются линейными дифференциальными системами, что значительно упрощает решение задачи. Однако и в данной постановке задача слишком сложна. Для всех классов оболочек (исключая круговые цилиндрические оболочки) имеем систему восьмого порядка с переменными коэффициентами, поэтому трудность интегрирования такой системы очевидна. Существенным упрощением задач общей теории оболочек является предложенное в работе В. В. Новожиловым комплексное преобразование основных уравнений, позволяющее снизить порядок системы вдвое. Однако рассмотрение этого вопроса выходит за рамки курса.

§ 15. Типы напряженного состояния оболочек

В общем случае при деформации оболочки величина напряжений от усилий (называемые иногда цепными напряжениями) соизмеримы с напряжениями от моментов (или изгибными напряжениями). Поэтому такое напряженное состояние оболочки называется *сбалансированным*.

На практике часто встречаются случаи, когда напряжения от моментов пренебрежимо малы по сравнению с напряжениями от усилий. Тогда первыми напряжениями можно пренебречь по сравнению со вторыми, что эквивалентно игнорированию моментов при рассмотрении деформации оболочки. Этот тип напряженного состояния называется *безмоментным*. Безмоментное состояние оболочек по причинам, изложенным ниже, является наиболее выгодным.

Имеет место также третий случай, когда напряжения от усилий пренебрежимо малы в сравнении с напряжениями от моментов. Такой тип напряженного состояния называется *чисто изгибным*. Так как оболочки, в силу малости толщины, плохо сопротивляются изгибу, чисто изгибный тип напряженного состояния является наиболее невыгодным, и его необходимо, по возможности, избегать.

§ 16. Основные определения безмоментной теории оболочек

Как видно из самого наименования теории, безмоментная теория построена на допущении об отсутствии моментов (как изгибающих, так и крутящих). Естественно поэтому, что она существенно проще общей теории. Возникают вопросы, какое практическое значение имеет безмоментная теория, каков круг задач, ею охватываемых, и т. д.? Прежде чем ответить на эти вопросы, необходимо, хотя бы на простом примере, оценить сравнительное влияние на прочность конструкций усилий и моментов.

Рассмотрим две одинаковые консольные балки длиной l , шириной b и толщиной δ . Обе балки выполнены из одного и того же материала. Первая балка загружена на свободном конце поперечной силой, а вторая балка — продольной, причем величина силы P в обоих случаях также одинакова (рис. 18). Определим наибольшие напряжения в обеих балках.

В первой балке наибольшее напряжением является сечение по заданному краю, причем изгибающий момент в этом сечении $M_{\max} = Pl$. Момент сопротивления балки $W = \frac{b\delta^3}{6}$ и, следовательно, наибольшее напряжение от изгиба будет

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{M}{W} = \pm \frac{6Pl}{b\delta^3}.$$

Во второй балке изгибающий момент во всех сечениях будет равен нулю. Эта балка находится в безмоментном состоянии и испытывает только растягивающее усилие P . При этом растягивающее напряжение во всех сечениях одинаково и равно

$$\sigma_0 = \frac{P}{b\delta}.$$

Отношение величин $\sigma_{\max}$ и σ_0 будет определяться равенством

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0} = \frac{6l}{\delta}.$$

Как видим, при одинаковых действующих силах в первой балке напряжения $\sigma_{\max}$ во много раз больше напряжений σ_0 . Действительно, при $l : \delta = 50$ отношение $\sigma_{\max} : \sigma_0 = 300$, т. е. если в этом частном случае поперечная сила P вызывает $\sigma_{\max} = \sigma_0$, то эта же сила, будучи приложена вдоль стержня, вызовет $\sigma_0 = 0,0033\sigma_{\max}$. Из приведенного примера видно, насколько невыгодной является работа конструкции, обладающей относительно малой жесткостью на изгиб, в изгибном или моментном состоянии и, наоборот, насколько выгодна работа такой конструкции в безмоментном напряженном состоянии.



Рис. 18

Приведем другой пример. Известно, что арка произвольной формы, нагруженная произвольной нагрузкой, работает как на изгиб, так и на сжатие. Однако, соответствующим выбором формы арки и характера действующей на нее нагрузки можно добиться, чтобы арка работала в безмоментном напряженном состоянии. При этом такая арка будет значительно легче балки, работающей на изгиб, либо при одинаковых с балкой размерах может выдерживать существенно большую нагрузку. Отсюда и техническое преимущество арок перед балками.

Тонкие оболочки, в силу малой изгибной жесткости, плохо работают на изгиб, и поэтому основной целью конструктора является стремление достигнуть безмоментного состояния оболочки. Теоретические и экспериментальные исследования показали, что при надлежащем закреплении краев оболочка способна работать в безмоментном напряженном состоянии при многообразии действующих на нее нагрузок.

Таким образом, тонкие оболочки, работающие в безмоментном напряженном состоянии, обладают, наряду с высокой прочностью, еще и минимальным весом. В этом основное преимущество тонких оболочек перед балками и пластинами, работающими на изгиб. Вместе с тем безмоментная теория существенно проще общей теории, а круг реше-

ных с ее помощью задач значительно шире. Отсюда большое практическое значение безмоментной теории оболочек.

Необходимо отметить, что не всегда удается достигнуть чисто безмоментного напряженного состояния, и в большинстве случаев в оболочке, помимо усилий, будут появляться и моменты. В этих случаях необходимо стремиться ограничить величину моментов, чтобы при сложении напряженном состоянии напряжения от моментов были, по возможности, невелики в сравнении с напряжениями от усилий.

Как мы уже условились, в безмоментной теории при рассмотрении равновесия элемента оболочки будем пренебрегать всеми моментами, т. е. считать

$$M_1 = 0; M_2 = 0; H = 0. \quad (123.1)$$

Так как жесткость оболочки на изгиб является конечной, то равенство нулю моментов эквивалентно в силу равенств (122.1) равенству нулю следующих величин:

$$\begin{aligned} \kappa_1 + \mu \kappa_2 &= 0, \\ \kappa_2 + \mu \kappa_1 &= 0, \\ \tau &= 0. \end{aligned}$$

Эти равенства могут иметь место, если

$$\kappa_1 = 0; \kappa_2 = 0; \tau = 0. \quad (126.1)$$

Таким образом, пренебрежение изгибающими и крутящими моментами эквивалентно пренебрежению изменениями кривизн и кручением срединной поверхности оболочки.

§ 17. Основные уравнения безмоментной теории оболочек

Рассмотрим систему уравнений равновесия элемента оболочки, полученную в общей теории (99.1) и (103.1). Пренебрегаем в этой системе всеми моментами (M_1 , M_2 , M_{12} и M_{21}). Тогда из уравнений (103.1) получим

$$N_1 = 0; N_2 = 0; T_{12} = T_{21} = S^0. \quad (127.1)$$

Видно, что пренебрежение изгибающими и крутящими моментами автоматически приводит к пренебрежению перерезывающими силами N_1 и N_2 . Таким образом, оболочка подвержена действию усилий T_1^0 , T_2^0 и S^0 .

Условились в дальнейшем усилия в безмоментной теории отмечать значком 0 .

Подставляя ф-лы (127.1) в первые три уравнения равновесия общей теории оболочек (99.1), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_1 T_1^0}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2 S^0}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} S^0 - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} T_2^0 \right) + q_1 &= 0 \\ \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_2 S^0}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 T_2^0}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} S^0 - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_1^0 \right) + q_2 &= 0 \\ \frac{T_1^0}{R_1} + \frac{T_2^0}{R_2} &= q_3 \end{aligned} \right\}. \quad (128.1)$$

Система (128.1) и является системой уравнений равновесия безмоментной теории оболочек. К интегрированию системы (128.1) при заданных граничных условиях и сводится решение задачи о напряженном состоянии безмоментной оболочки.

Из рассмотрения системы (128.1) следует, что число неизвестных усилий (T_1^0 , T_2^0 и S^0) в безмоментной теории соответствует числу уравнений равновесия. Следовательно, задача о равновесии элемента оболочки в безмоментной теории является статически определенной, и мы можем определять все усилия в безмоментной оболочке (а, следовательно, и напряжения), не прибегая к определению ее деформаций. Поэтому во многих задачах безмоментной теории ограничиваются определением усилий, а затем и напряжений, оставляя без рассмотрения определение деформаций безмоментной оболочки. Как будет видно из дальнейшего, возможность определения усилий без определения деформаций представляется не всегда, так как при задании граничных условий не в усилиях, а в перемещениях проинтегрировать систему (128.1) без определения перемещений не представляется возможным, и неизбежно придется определять деформации оболочки. Последний вопрос связан с условиями существования безмоментного напряженного состояния оболочки и будет рассматриваться особо.

Здесь же предположим, что система (128.1) проинтегрирована, и, следовательно, усилия T_1^0 , T_2^0 и S^0 нами определены. Необходимо определить деформации и перемещения срединной поверхности оболочки.

Для этого выведем первые три ф.м. (122.1), дающие связь между усилиями и деформациями:

$$T_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_1 + \nu\epsilon_2),$$

$$T_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_2 + \nu\epsilon_1),$$

$$S = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \omega.$$

Подставив в эти формулы вместо T_1 , T_2 и S значения T_1^0 , T_2^0 и S^0 , а вместо ϵ_1 , ϵ_2 и ω значения ϵ_1^0 , ϵ_2^0 и ω^0 и решив их относительно последних, получим

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1^0 &= \frac{1}{Eh} (T_1^0 - \nu T_2^0) \\ \epsilon_2^0 &= \frac{1}{Eh} (T_2^0 - \nu T_1^0) \\ \omega^0 &= \frac{2(1+\nu)}{Eh} S^0 \end{aligned} \right\} \quad (129.1)$$

По формулам (129.1) определяются компоненты деформации срединной поверхности безмоментной оболочки после подстановки в их правые части определенных из системы (128.1) усилий.

Перейдем к определению перемещений безмоментной оболочки.

Связь между компонентами перемещений и компонентами деформаций элемента срединной поверхности оболочки дается зависимостями (77.1). Заменяя в последних ϵ_1 , ϵ_2 и ω на ϵ_1^0 , ϵ_2^0 и ω^0 соответ-

ственно, получим следующую дифференциальную систему, для определения перемещений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{1}{A_2 A_3} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_2} v + \frac{w}{R_1} &= e_1^0 = \frac{1}{Eh} \{T_1^0 - \nu T_2^0\} \\ \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{1}{A_1 A_3} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial x_1} u + \frac{w}{R_2} &= e_2^0 = \frac{1}{Eh} \{T_2^0 - \nu T_1^0\} \\ \frac{A_3}{A_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{v}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{u}{A_1} \right) &= w^0 = \frac{2(1+\nu)}{Eh} S^0 \end{aligned} \right\}. \quad (130.1)$$

Принтегрировав систему (130.1), мы получим искомые величины перемещений срединной поверхности оболочки.

Общее решение системы (130.1) можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} u &= u^0 + u' \\ v &= v^0 + v' \\ w &= w^0 + w' \end{aligned} \right\}, \quad (131.1)$$

где u^0, v^0, w^0 — частное решение системы (130.1);

u', v', w' — общее решение однородной системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial u'}{\partial x_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_2} v' + \frac{w'}{R_1} &= 0 \\ \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial v'}{\partial x_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial x_1} u' + \frac{w'}{R_2} &= 0 \\ \frac{A_3}{A_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{v'}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{u'}{A_1} \right) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (132.1)$$

Первые части системы (132.1) — те же что иные, как удлинения и сдвиг. Следовательно, перемещения, соответствующие однородной системе, обращают в нуль все удлинения и сдвиги срединной поверхности оболочки. Поэтому перемещения u', v', w' могут быть либо перемещениями абсолютно твердого тела, либо перемещениями чистого изгиба. Если первые (перемещения оболочки как твердого тела) не нарушают безмоментности напряженного состояния, то вторые (перемещения чистого изгиба) прямо противоречат основным допущениям безмоментной теории. Поэтому перемещения чистого изгиба должны быть либо совершенно устранены, либо ограничены столь малыми величинами, что соответствующие этим перемещениям напряжения изгиба будут пренебрежимо малы в сравнении с напряжениями от усилий.

В заключение приведем формулы для определения напряжений в безмоментной оболочке:

$$\sigma_1^0 = \frac{\gamma_1^0}{\epsilon}; \quad \sigma_2^0 = \frac{\gamma_2^0}{\epsilon}; \quad \sigma_{12}^0 = \frac{\gamma_{12}^0}{\epsilon}. \quad (133.1)$$

§ 18. Граничные условия в безмоментной теории

Определение условий в безмоментной теории связано с интегрированием дифференциальной системы (128.1), а определение перемещений — с интегрированием дифференциальной системы (130.1). Для того чтобы

как усилия, так и перемещения были определенными, необходимо задать на краях оболочки некоторое число граничных условий.

Рассмотрим, какое число граничных условий и какие именно граничные условия должны быть использованы в безмоментной теории.

В § 14 было отмечено, что дифференциальная система (104.1) имеет восьмой порядок, т. е. эквивалентна одному разрешающему уравнению восьмого порядка. При этом в общей теории на каждом краю оболочки должно быть задано по четыре граничных условия.

В безмоментной теории система (128.1) имеет второй порядок, а система (130.1) — четвертый.^{*} Так как безмоментная система (130.1) имеет такое более низкий порядок, чем система в общей теории, то и число граничных условий в безмоментной теории должно быть такое меньше, а именно: на каждом краю оболочки должно быть задано только по два граничных условия. В этом случае как усилия, так и перемещения безмоментной оболочки будут однозначно определены.

Рассмотрим сначала формулировку граничных условий в усилиях. В общей теории мы имеем следующие граничные условия на краю $\alpha_2 = \text{const}$:

$$T_z, T_{\alpha_1} + \frac{M_{\alpha_1}}{R_1}, N_2 + \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\delta M_{\alpha_1}}{\delta \alpha_1}, M_z.$$

Поскольку в безмоментной теории все моменты и перерезывающие силы равны нулю, постольку сохраняются только два крайних условия:

$$T_z^0, T_z^1 = S^0$$

вместо четырех в общей теории.

Таким образом, в безмоментной оболочке ее края должны быть свободны как от моментов M_1, M_2, M_{12}, M_{21} , так и от перерезывающих сил N_1 и N_2 и могут быть нагружены только тангенциальными усилиями, а именно: край $\alpha_1 = \text{const}$ — условиями T_z^0 и S^0 , а край $\alpha_2 = \text{const}$ — условиями T_z^0 и S^0 .

Выше мы отметили, что в интегралы однородной системы для определения перемещений входит перемещение чистого изгиба, которые должны быть либо вовсе устранены, либо ограничены таким образом, что напряжения от изгиба будут малы в сравнении с напряжениями от усилий.

Для такого устранения или ограничения перемещений чистого изгиба необходимо ограничить тангенциальные перемещения на краю оболочки. Поэтому одно из граничных условий на краю оболочки должно быть задано в тангенциальных перемещениях (и или u), а другое — либо в тангенциальных усилиях, либо в тангенциальных перемещениях. Следовательно, оба граничных условия на каждом краю оболочки не могут быть заданы в тангенциальных усилиях, так как одно из условий должно быть обязательно задано в тангенциальных перемещениях. Это одно условие на каждом краю иногда называют «принудительным» условием, так как оно обеспечивает безмоментность напряженного состояния по существу.

Рассмотрим случай, когда граничные условия формулируются только в перемещениях. Как было отмечено, в общей теории на краю $\alpha_2 = \text{const}$

* Прямая часть системы (130.1) имеет тоже второй порядок, но так как ее правые части сами являются решениями системы второго порядка, то система (130.1) эквивалентна одному уравнению четвертого порядка.

Должны быть заданы четыре условия: α, ν, φ и $\dot{\varphi} = -\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial s_1} + \frac{\nu}{R_1}$, а на краю $\alpha_2 = \text{const}$ — условия α, φ, ν и $\dot{\nu} = -\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial s_1} + \frac{\nu}{R_1}$.

В безмоментной теории ограничивать величину нормального перемещения w и углов поворота θ и ϕ , естественно, нельзя, так как ограничение на краю w приводит к появлению на этом краю перерезывающей силы (N_1 или N_2), что уже противоречит безмоментной теории. Ограничение же θ или ϕ приводит к появлению на краю моментов M_1 или M_2 , что также противоречит безмоментной теории. Таким образом, если формулировать граничные условия в перемещениях, то на каждом краю могут быть заданы только два тангенциальных перемещения (u и v).

Подводя итог сказанному выше, сформулируем следующие выводы.

В безмоментной теории на каждом краю оболочки должно быть задано только два граничных условия. При этом для обеспечения безмоментности напряженного состояния одно из этих условий должно быть обязательно задано в тангенциальных перемещениях (u или v). Второе условие на каждом краю может быть задано либо в тангенциальных условиях, либо в тангенциальных перемещениях. При этом могут быть случаи, когда на одном из краев второе условие задано в тангенциальных условиях, а на другом — в тангенциальных перемещениях.

Если второе условие на всех краях оболочки задано в тангенциальных условиях T_1^0, T_2^0, S^0 , то задача определения усилий в безмоментной оболочке будет статически определимой, и все усилия, а следовательно, и напряжения могут быть определены, не прибегая к определению деформаций или перемещений.

Если хотя бы на одном из краев оболочки второе граничное условие задано в тангенциальных перемещениях, то задача становится статически неопределимой.

§ 19. Условия существования безмоментного напряженного состояния

Сформулируем все необходимые условия, которые обеспечивают безмоментное напряженное состояние.

1. Безмоментная оболочка не может быть нагружена на краю ни моментами (изгибающими или крутящими), ни перерезывающими силами.
2. Нормальные перемещения w и углы поворота θ и ϕ не должны быть ограничены на краях.

3. На каждом из краев оболочки для исключения или существенного ограничения перемещений чистого изгиба должно быть задано одно принципиальное условие в тангенциальных перемещениях.

Все три отмеченных условия являются необходимыми, так как нарушение одного из них приводит к нарушению безмоментности напряженного состояния.

Однако эти условия не являются достаточными. Дело в том, что усилия в безмоментной оболочке определяются без использования уравнений неразрывности деформаций срединной поверхности. Если полученные из безмоментного решения величины усилий подставить в уравнения неразрывности, то оказывается, что последние не удовлетворяются, т. е. срединная поверхность будет иметь разрывы. В действительности же упругая оболочка не имеет разрывов при деформации. Отмеченная противоречивость безмоментной теории не является определяющей. Если форма оболочки и действующая на оболочку нагрузка имеют плавный характер, так

что оба главных радиуса кривизны R_1 и R_2 , толщина оболочки δ и нагрузка q_0 при дифференцировании по α_1 и α_2 существенно не возрастают, то для строгого соблюдения условий неразрывности деформаций срединной поверхности оболочки можно предположить наличие малых возмущений и крутящих моментов, а также перерезывающих сил, которыми в уравнениях равновесия можно пренебречь. Если же отмеченное условие гладкости не имеет места, то для соблюдения условий неразрывности деформаций срединной поверхности необходимо в местах резкого изменения R_1 или R_2 , толщины δ и нагрузки q_0 загрузить оболочку уже не малыми, а достаточно большими моментами и перерезывающими силами. Последнее несовместимо с основным допущением безмоментной теории — пренебрежением моментами и перерезывающими силами.

Следовательно, к трем изложенным условиям безмоментного напряженного состояния добавляется четвертое, а именно: форма оболочки и поверхностная нагрузка безмоментной оболочки должны быть плавноыми, так чтобы при дифференцировании по α_1 и α_2 главные радиусы кривизны R_1 и R_2 , толщина δ и нагрузка q_0 существенно не возрастали.

Последнее условие накладывает ряд существенных ограничений. В частности, если форма срединной поверхности имеет разрывы непрерывности или оболочка загружена сосредоточенными силами (разрыв непрерывности нагрузки q_0), то такая оболочка, по крайней мере в окрестности точек разрыва непрерывности, будет моментной.

Несмотря на ряд отмеченных условий существования безмоментного напряженного состояния, практическая ценность безмоментной теории сохраняется. Выгодность безмоментного напряженного состояния очевидна, и задача конструктора состоит в обеспечении всех необходимых условий. При этом, если не удается полностью соблюсти все отмеченные условия, необходимо стремиться локализовать отход возможно, меньшим районом и ограничить величину изгибающих моментов. В тех случаях, когда в оболочке появляются существенные моменты, безмоментное решение должно быть дополнено моментным решением так, что общее решение задачи будет состоять из двух решений: безмоментного и моментного. Последнее очень важно иметь в виду, так как сфера использования безмоментной теории не ограничивается только безмоментными оболочками.

§ 20. Расчет безмоментной круговой цилиндрической оболочки, нагруженной всесторонним равномерным внешним давлением

Использование безмоментной теории начнем с наиболее простого и практически важного случая расчета круговой цилиндрической оболочки конечной длины, нагруженной по всей криволинейной поверхности и по торцам равномерным внешним давлением интенсивности p .

Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку длиной l , радиусом r и толщиной δ (рис. 19).

Для произвольной точки A с координатами x и y единичные векторы e_1 , e_2 и e_3 имеют направления, показанные на рис. 19, а. Координатными линиями будут образующие и направляющие цилиндра, которые являются линиями главной кривизны. Так как прращения длин координатных линий равны прращениям координат, оба параметра Ламе будут равны 1, т. е. $A_1=1$; $A_2=1$.

Главные радиусы кривизны будут равны $R_1=\infty$ (радиус кривизны образующей), $R_2=\cos\alpha=r$ (радиус кривизны направляющей).

В соответствии с принятыми обозначениями усилие T_1^0 будет направлено вдоль образующих, а усилие T_2^0 — по направляющей, поэтому

усилие T_1^0 называют осевым, а T_2^0 — кольцевым. Направленные усилия показано на рис. 13, б.

Перемещения u , v и w будут направлены по направлениям e_1 , e_2 и e_3 соответственно.

В рассматриваемом случае компоненты поверхностной нагрузки равны

$$q_1 = 0; \quad q_2 = 0; \quad q_3 = -p. \quad (134.1)$$

Знак минус в выражении q_3 объясняется тем, что внешняя нагрузка p направлена внутрь цилиндра. Необходимо определить усилия, напряжения и перемещения оболочки. Прежде всего сформулируем граничные условия. Крайняя оболочка является сечения $x=0$ и $x=l$.

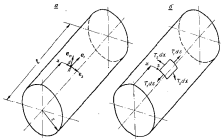


Рис. 13

Первое „принудительное“ условие на краях оболочки примем в тангенциальном перемещении w , причем положим при $x=0$ и $x=l$

$$w = 0. \quad (135.1)$$

Второе условие легко определить из рассмотрения внешней торцевой нагрузки. Полная нагрузка на торце оболочки равна $Q = p\pi r^2$. Эта нагрузка уравновешивается на краях усилиями T_1^0 . Поскольку круговая цилиндрическая оболочка симметрична относительно оси, то и усилия T_1^0 равномерно распределены по периметру направляющей и являются сжимающими. Усилия T_2^0 на краю оболочки равны

$$T_1^0 = -\frac{Q}{2\pi r} = -\frac{pr}{2}. \quad (136.1)$$

при $x=0$ и $x=l$

Таким образом, граничные условия сформулированы. Поскольку одно из граничных условий на торцах задано в усилиях, задаем

является статически определенной, т. е. все усилия и соответствующие им напряжения определяются без рассмотрения деформации оболочки.

Подставив параметры Ляме, главные радиусы кривизны и компоненты поверхностной нагрузки в ф-лы (137.1), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_1^0}{\partial x} + \frac{\partial S^0}{\partial s} &= 0 \\ \frac{\partial S^0}{\partial s} + \frac{\partial T_1^0}{\partial x} &= 0 \\ T_1^0 &= -p \end{aligned} \right\} \quad (137.1)$$

К интегрированию системы (137.1) при заданных граничных условиях и сводится решение поставленной задачи. Система (137.1) интегрируется в замкнутом виде. Из третьего ур-ния (137.1) сразу получаем

$$T_1^0 = -pr. \quad (138.1)$$

Подставив T_1^0 во второе уравнение системы, получаем $\frac{\partial S^0}{\partial s} = 0$.

Принтегрируем полученное равенство по s . В результате интегрирования будем иметь

$$S^0 = f_1(x),$$

где $f_1(x)$ — некоторая неизвестная функция.

В среднем по длине сечения оболочки $\left(x = \frac{l}{2}\right)$, ввиду симметрии конструкции, нагрузки и граничных условий относительно этого сечения, усилие $S^0 = 0$ и, следовательно, в этом сечении $f_1(x) = 0$. Так как функция $f_1(x)$ не зависит от координаты x , то она должна быть вообще равна нулю, и, следовательно,

$$S^0 = 0. \quad (139.1)$$

Таким образом, касательные усилия во всех точках круговой цилиндрической оболочки, нагруженной равномерным внешним давлением, равны нулю.

Подставив $S^0 = 0$ в первое ур-ние (137.1), будем иметь $\frac{\partial T_1^0}{\partial x} = 0$.

Принтегрируем это равенство по x . Получаем $T_1^0 = f_2(s)$. Видно, что T_1^0 не зависит от x , т. е. по длине не меняется. Следовательно, $f_2(s)$ может быть определена из условия равенства T_1^0 на краях оболочки, т. е. $f_2(s) = -\frac{pr}{2}$. Поэтому

$$T_1^0 = -\frac{pr}{2}. \quad (140.1)$$

Выпишем выражения для осевого, кольцевого и касательного усилий:

$$\left. \begin{aligned} T_1^0 &= -\frac{pr}{2} \\ T_2^0 &= -pr \\ S^0 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (141.1)$$

Из формул (141.1) видно, что круговая безмоментная цилиндрическая оболочка, нагруженная по криволинейной поверхности и по торцам равномерно распределенной внешней нагрузкой интенсивности p , испытывает только осевые и кольцевые усилия, одинаковые во всех точках оболочки, причем осевые усилия вдвое меньше кольцевых. Как осевые, так и кольцевые усилия являются сжимающими. Если бы нагрузка была внутренней, то знак усилий изменился бы. В соответствии с этим напряжения будут равны

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1^0 &= \frac{T_1^0}{r} = -\frac{pr}{2h} \\ \sigma_2^0 &= \frac{T_2^0}{r} = -\frac{pr}{h} \end{aligned} \right\}. \quad (142.1)$$

Перейдем к определению перемещений. Для этого подставим параметры Ламе, главные радиусы кривизны и определенные нами усилия T_1^0 , T_2^0 и S^0 в ф-лы (130.1). В результате будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{pr}{Eh} \left(r - \frac{1}{2} \right) \\ \frac{dv}{dx} + \frac{w}{r} &= \frac{pr}{Eh} \left(\frac{r}{2} - 1 \right) \\ \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (143.1)$$

Пронтегрируем первое уравнение по x

$$u = \frac{pr}{Eh} \left(r - \frac{1}{2} \right) x + f_1(x). \quad (144.1)$$

В силу симметрии нагрузки и конструкции относительно среднего сечения $\left(x = \frac{l}{2} \right)$, перемещение u в этом сечении равно нулю. Таким образом,

$$\frac{pr}{Eh} \left(r - \frac{1}{2} \right) \frac{l}{2} + f_1(x) = 0,$$

откуда

$$f_1(x) = -\frac{pr}{Eh} \left(r - \frac{1}{2} \right) \frac{l}{2}.$$

Подставляя $f_1(x)$ в выражение (144.1), получим

$$u = \frac{pr}{Eh} \left(r - \frac{1}{2} \right) \left(x - \frac{l}{2} \right). \quad (145.1)$$

Из формулы (145.1) следует, что w не зависит от x , а по длине оболочки изменяется по линейному закону, достигая наибольших значений на торцах, где

$$w_{\max} = \pm \frac{p r}{E h} \left(r - \frac{l}{2} \right) \frac{l}{2}.$$

Взяв производную от w по x и подставив в третье уравнение (143.1), будем иметь $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$, откуда $\varphi = f_4(x)$.

Перемещение φ не зависит от x , поэтому оно должно быть равно перемещению φ на краях оболочки. Но, согласно граничным условиям, $\varphi = 0$ (при $x = 0$ и $x = l$), откуда $f_4(x) = 0$.

Следовательно, во всех точках оболочки

$$\varphi = 0 \quad (146.1)$$

Зная φ , из второго уравнения (143.1) определим

$$w = - \frac{p r^3}{E h} \left(1 - \frac{x}{l} \right). \quad (147.1)$$

Как видим, перемещение w одинаково во всех точках оболочки и направлено внутрь ее.

Таким образом, все три компонента вектора перемещения определены:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{p r}{E h} \left(r - \frac{l}{2} \right) \left(x - \frac{l}{2} \right) \\ v &= 0 \\ w &= - \frac{p r^3}{E h} \left(1 - \frac{x}{l} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (148.1)$$

§ 21. Расчет безмоментной круговой усеченной конической оболочки, нагруженной всесторонним равномерным внешним давлением

Расчет усеченной конической оболочки по безмоментной теории представляет большой практический интерес. Поэтому целесообразно получить расчетные формулы для определения усилий и напряжений в безмоментной круговой усеченной конической оболочке. Так же как и ранее, будем рассматривать оболочку, нагруженную по криволинейной поверхности и по торцам равномерно распределенным внешним давлением интенсивности p .

Рассмотрим усеченный конус, симметричный относительно оси (рис. 20).

Введем обозначения:

- α — половина угла при вершине конуса;
- r_0 — радиус круга малого торцевого сечения;
- r_1 — радиус круга большого торцевого сечения;
- l — длина оболочки по направлению образующей.

Для симметричного кругового конуса линиями главной кривизны являются образующие конуса и направляющие, являющиеся линиями пересечения поверхности конуса сечениями, перпендикулярными оси.

Координаты произвольной точки оболочки будем определять отстоянием x вдоль образующей от малого торцевого сечения и углом φ по дуге направляющей от некоторого выбранного положения.

Единичный орт e_z направлен вдоль образующей, e_t — по касательной к направляющей и e_n — по нормали к срединной поверхности.

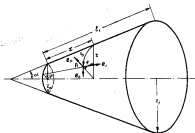


Рис. 20

Так как координатная линия x_1 совпадает с выбранной координатой x , то $A_1 = 1$. С другой стороны, приращение дуги координатной линии x_2 будет $dx = r d\varphi$, следовательно,

$$A_2 = r, \quad (149.1)$$

где r — переменный радиус окружности поперечного сечения конуса в сечении x .

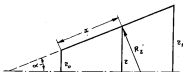


Рис. 21

Из рисунка 21 следует:

$$\left. \begin{aligned} r &= r_0 + x \sin \alpha \\ A_2 &= r = r_0 + x \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (150.1)$$

Главные радиусы кривизны будут $R_1 = \infty$ (радиус кривизны образующей) и $R_2 = \frac{r}{\cos \alpha} = \frac{r_0}{\cos \alpha} + x \tan \alpha$ (главный радиус направляющей).

Компоненты поверхностной нагрузки соответственно равны

$$q_1 = 0; \quad q_2 = 0; \quad q_n = -p. \quad (151.1)$$

Сформулируем граничные условия на торцах конической оболочки. Как и ранее, первым граничным условием будет $v = 0$ (при $x = 0$ и $x = l_1$).

Второе граничное условие выражает равенство поперечного усилия на торцах оболочки горизонтальной составляющей суммарного усилия T_2^0 . Поскольку торцы оболочки различны, постольку и граничные условия будут разными. Для малого торцевого сечения ($x = 0$) будем иметь

$$T_2^0 = -\frac{p r_0^2}{2 r_0 \cos \alpha} = -\frac{p r_0}{2 \cos \alpha}, \quad (152.1)$$

а для большого торцевого сечения ($x = l_1$)

$$T_2^0 = -\frac{p r_1}{2 \cos \alpha}. \quad (153.1)$$

Ограничимся в данной задаче определенным усилием и напряжением.

Как и в предыдущей задаче, ввиду симметрии оболочки относительно оси конуса, касательные усилия S^0 во всех точках оболочки равны нулю. Подставив значения параметров Ламе, главных радиусов кривизны и компоненты поверхностной нагрузки в основные уравнения безмоментной теории (128.1), придем к следующей системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial x} (r T_1^0) - \frac{\partial r}{\partial x} T_2^0 \right] &= 0 \\ \frac{1}{r} + \frac{\partial T_1^0}{\partial r} &= 0 \\ \frac{T_1^0}{\cos \alpha} &= -p \end{aligned} \right\}, \quad (154.1)$$

где $r = r_0 + x \sin \alpha$.

Из системы (154.1) и определяем поперечные усилия. Третье уравнение системы (154.1) непосредственно дает значение кольцевого усилия T_2^0

$$T_2^0 = -\frac{p r}{\cos \alpha} = -\frac{p r_0}{\cos \alpha} \left(1 + \frac{x}{r_0} \sin \alpha \right). \quad (155.1)$$

Из формулы (155.1) видно, что усилие T_2^0 не зависит от φ , т. е. в любом поперечном сечении конуса кольцевое усилие постоянно по периметру сечения. По длине же оболочки усилие T_2^0 изменяется по линейному закону. Так как r_0 и $\sin \alpha$ — величинами постоянными и заданными, то очевидно, что минимальное значение усилия T_2^0 будет при $x = 0$, т. е. на малом торце оболочки

$$T_2^0 \Big|_{x=0} = -\frac{p r_0}{\cos \alpha}. \quad (156.1)$$

Наибольшее значение T_1^0 будет при $x = l_1$, т. е. на большом торце оболочки

$$T_1^0 \Big|_{x=l_1} = -\frac{Pr_0}{\cos \alpha} \left(1 + \frac{l_1}{r_0} \sin \alpha \right)$$

или, учитывая, что $r_1 = r_0 + l_1 \sin \alpha$,

$$T_1^0 \Big|_{x=l_1} = -\frac{Pr_1}{\cos \alpha}. \quad (157.1)$$

Подставляя значение T_2^0 из ф-лы (155.1) в первое уравне (154.1) и учитывая при этом, что $\frac{dr}{dx} = \sin \alpha$, получим

$$\frac{d}{dx} (rT_1^0) + pr_1 \operatorname{tg} \alpha \left(1 + \frac{x}{r_0} \sin \alpha \right).$$

Пронтегрируем полученное выражение по x . В результате будем иметь

$$rT_1^0 = -pr_1 \operatorname{tg} \alpha x \left(1 + \frac{x}{2r_0} \sin \alpha \right) + f_1(x). \quad (158.1)$$

Выше мы отметили, что в сечении $x = 0$ $T_1^0 \Big|_{x=0} = -\frac{Pr_0}{2 \cos \alpha}$. Имея это в виду, определяем функцию $f_1(x) = -\frac{pr_0^2}{2 \cos \alpha}$. Следовательно,

$$rT_1^0 = -pr_0 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} x \left(1 + \frac{x}{2r_0} \sin \alpha \right) - \frac{pr_0^2}{2 \cos \alpha}$$

или окончательно

$$T_1^0 = -\frac{Pr_0}{2 \cos \alpha} \left(1 + \frac{x}{r_0} \sin \alpha \right). \quad (159.1)$$

Таким образом, все усилия определены.

Приведем сводные формулы для усилий и напряжений в безмоментной круговой конической оболочке:

для усилий

$$\left. \begin{aligned} T_1^0 &= -\frac{Pr_0}{2 \cos \alpha} \left(1 + \frac{x}{r_0} \sin \alpha \right) \\ T_2^0 &= -\frac{Pr_0}{\cos \alpha} \left(1 + \frac{x}{r_0} \sin \alpha \right) \\ S^0 &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (160.1)$$

для напряжений

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1^0 &= \frac{T_1^0}{r} = -\frac{Pr_0}{2 \cos \alpha} \left(1 + \frac{x}{r_0} \sin \alpha \right) \\ \sigma_2^0 &= \frac{T_2^0}{r} = -\frac{Pr_0}{r \cos \alpha} \left(1 + \frac{x}{r_0} \sin \alpha \right) \end{aligned} \right\}. \quad (161.1)$$

Наибольшие значения усилий и им соответствующих напряжений имеют место у большого торцевого сечения конуса ($x=0$) и равны:

$$\left. \begin{aligned} T_{\max}^s &= -\frac{Pr_1}{2\cos\alpha} \\ T_{\max}^s &= -\frac{Pr_1}{\cos\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (162.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\max}^s &= -\frac{Pr_1}{2\cos\alpha} \\ \sigma_{\max}^s &= -\frac{Pr_1}{\cos\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (163.1)$$

Сравнение формул для максимальных усилий и напряжений в конической оболочке с таковыми в цилиндрической оболочке, радиус которой равен радиусу большого основания конуса, показывает, что наибольшие усилия и напряжения в конусе в $1/\cos\alpha$ раз больше, чем у цилиндра радиуса r_1 . Это обстоятельство следует иметь в виду, так как иногда ошибочно считают, что расчет конуса по формулам для цилиндрической оболочки радиуса r_1 приводит к погрешности в безвредную сторону. В действительности эта погрешность направлена в опасную сторону.

ГЛАВА II

УСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

§ 22. Устойчивые и неустойчивые формы упругого равновесия

В первой главе рассмотрено определение напряжений и соответствующих им деформаций и перемещений, возникающих в оболочках при действии внешней нагрузки. Сравнение полученных напряжений с допустимыми или опасными и дает критерий прочности оболочек.

Однако для оболочек критерий прочности еще не является определяющим. Действительно, оболочка может разрушиться вследствие потери устойчивости, хотя возникающие в ней напряжения, соответствующие исходной форме упругого равновесия, могут быть весьма малы в сравнении с теми напряжениями, которые могут быть допущены при принятом материале оболочки. Поэтому для тонких оболочек проблема устойчивости является не менее важной, чем проблема прочности.

Критерий устойчивости оказывается удовлетворенным при усло-



Рис. 22

$$P_{\text{вн}} \geq P_{\text{к}} \quad (I. II)$$

где P — действующая на оболочку внешняя нагрузка;

$P_{\text{к}}$ — критическая нагрузка.

Поскольку действующая внешняя нагрузка обычно бывает задана, то для проверки условия (I. II) необходимо знать критическую нагрузку оболочки. К размышлению критических нагрузок оболочек и сводится проблема их устойчивости.

Изучение этой проблемы начнем с определения устойчивых и неустойчивых форм упругого равновесия.

Рассмотрим длинную замкнутую круговую цилиндрическую оболочку, нагруженную внутренним равномерным давлением интенсивности p (рис. 22).

Под действием внутреннего равномерного давления оболочка равномерно растягивается, причем ее поперечные сечения сохраняют круговую форму. Равновесие оболочки наступает в тот момент, когда давление p уравновесится возникающими в оболочке внутренними упругими силами или напряжениями. Возникает вопрос, является ли это положение равновесия устойчивым или же оно неустойчиво? Прежде чем ответить на поставленный вопрос, необходимо дать определение устойчивых и неустойчивых форм упругого равновесия.

Упругое равновесие оболочки является устойчивым, если при любом возможном малом отклонении оболочки от положения равновесия после удаления причин, вызвавших эти малые отклонения, оболочка вернется к своей исходной форме.

Упругое равновесие оболочки является неустойчивым, если хотя бы при одном возможном малом отклонении от положения равновесия после удаления причин, вызвавших эти малые отклонения, оболочка не вернется к своей исходной форме упругого равновесия.

Таким образом, для ответа на поставленный вопрос необходимо рассматриваемой оболочке в положении равновесия дать любое малое отклонение от этого положения. Для этой цели приложим к рассмотренной деформированной оболочке произвольную малую нагрузку, например, в виде двух сосредоточенных сил (рис. 23, б). Под действием этой дополнительной нагрузки оболочка получит дополнительные малые перемещения. Поперечные сечения этой оболочки до и после приложения дополнительных сил показаны на рис. 23.

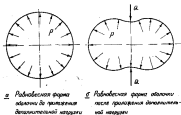


Рис. 23

Предположим, что суммарные напряжения в оболочке, вызванные начальной нагрузкой p и дополнительной Q , не превосходят предела упругости материала. Тогда после снятия дополнительной нагрузки оболочка вернется к своей исходной форме упругого равновесия (рис. 23, а). Следовательно, такая форма упругого равновесия является устойчивой. При этом важно отметить, что рассмотренная форма упругого равновесия является устойчивой при любом значении величины давления p .

Устойчивость исходной формы упругого равновесия рассмотренной выше оболочки является вполне естественной, так как при внутреннем

давлением все элементы оболочки испытывают растягивающие усилия, и последние, как известно, не приводят к потере устойчивости.

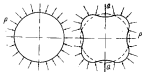
Теперь рассмотрим другой пример. Дана круговая цилиндрическая оболочка, находящаяся под действием внешней равномерно распределенной нагрузки интенсивности p . Под действием этой нагрузки оболочка равномерно сожмется, причем ее поперечные сечения сохранят круговую форму (рис. 24).

Упругое равновесие рассматриваемой оболочки наступит, когда внешняя нагрузка p уравновесится внутренними силами упругости или напряжениями. При этом, в отличие от первого примера, возникающие в оболочке напряжения будут сжимающими. Возникает вопрос, является ли эта равновесная форма устойчивой или она неустойчива? Окажется, что до некоторого значения внешнего давления (которое в дальнейшем будем называть критическим) упругое равновесие оболочки является устойчивым. Если такой оболочке в состоянии равновесия дать сколь угодно малые отклонения от равновесной формы (например, приложением сколь



До деформации
После деформации

Рис. 24



а. Полюс оболочки перемещен до критической величины нагрузки
б. Полюс оболочки перемещен за критическую величину нагрузки

Рис. 25

угодно малых сил), то после удаления причин, вызвавших эти отклонения, оболочка вернется к своей исходной круговой равновесной форме.

Таким образом, до достижения внешней нагрузкой p критической величины упругое равновесие и для сжатой оболочки является устойчивым.

Перейдем к случаю, когда внешняя сжимающая нагрузка достигла критической величины. В этом случае оболочка также равномерно сожмется, сохранив свою круговую форму (рис. 25, а). Для ответа на вопрос об устойчивости равновесной формы дадим оболочке сколь угодно малые отклонения от этой формы, например, приложим сколь угодно малые силы Q . В этом случае оболочка выпучивается и принимает вид, показанный на рис. 25, б. После снятия этих сил оболочка уже не возвращается к исходной круговой форме, а сохраняет новую форму упругого равновесия.

Следовательно, если интенсивность внешней нагрузки на оболочку достигнет критической величины, то круговая форма упругого равновесия оболочки является неустойчивой, и малым возмущением оболочка переходит в новое равновесное состояние. Путем приложения малых возмущений можно показать, что изогнутая равновесная форма является устойчивой.

В реальных условиях малые отклонения от исходной формы можно получить не обязательно за счет приложения дополнительных малых

сил. Эти малые отклонения имеют место вследствие неоднородности материала оболочки, неидеальности ее исходной формы, и т. д. Следовательно, в реальных оболочках всегда имеются причины, вызывающие малые отклонения от исходной равновесной формы. Поэтому при достижении нагрузкой критической величины реальные оболочки теряют устойчивость своей исходной формы упругого равновесия (выпучиваются). В результате на поверхности оболочки образуются выпуклости и вмятины, число и размеры которых определяются конструктивными размерами оболочки, а также крайними условиями.

Изложенное позволяет сформулировать следующие основные положения.

1. Если действующая на оболочку сжимающая нагрузка не достигла критической величины, то упругое равновесие оболочки всегда является устойчивым. Таким образом, при одной и той же нагрузке и условиях закрепления оболочка всегда имеет только одну равновесную форму и притом устойчивую.

2. Если действующая на оболочку сжимающая нагрузка равна критической, то оболочка может иметь несколько возможных равновесных форм.

3. Не все из этих равновесных форм являются устойчивыми, а следовательно, для реальных оболочек и равновероятными.

4. Обычная исходная равновесная форма оболочки при критической нагрузке является неустойчивой, и оболочка выпучивается, переходя к новой форме упругого равновесия.

До достижения сжимающей нагрузкой своей критической величины будет иметь место однозначная зависимость между нагрузкой и соответствующими ей упругими перемещениями оболочки, т. е. при заданной нагрузке и условиях закрепления будет одно единственное положение равновесия. При критической нагрузке наступает раздвоение решения задачи о перемещениях оболочки, так как одной и той же нагрузке будут соответствовать два положения равновесия. Примерная зависимость между нагрузкой и перемещением показана на рис. 26. Здесь по оси абсцисс отложено упругое перемещение оболочки, а по оси ординат — внешняя сжимающая нагрузка. Видно, что в зоне $P = (0 - P_{кр})$ имеет место единственность решения, а при $P = P_{кр}$ — наступает момент раздвоения решения. Поэтому при критической нагрузке два соответствующих положения равновесия будут бесконечно мало отличаться друг от друга.

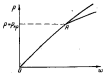


Рис. 26

§ 13. Система уравнений устойчивости

Прежде чем перейти к составлению системы дифференциальных уравнений устойчивости, необходимо наметить общий путь решения задачи. Отметим, что общая теория устойчивости оболочек была дана В. В. Новожиловым.*

* В. В. Новожилов. Общая теория устойчивости оболочек. ДАН СССР. Т. XXIII, № 5, 1941.

Рассмотренные в предыдущей главе вопросы относились к задачам классической или линейной теории оболочек. Здесь мы переходим к задачам нелинейной теории оболочек, базирующимся на аппарате нелинейной теории упругости. В чем же отличие рассмотренных в предыдущей главе вопросов от рассматриваемой в настоящей главе проблемы устойчивости упругого равновесия?

При определении усилий, напряжений, перемещений и деформаций оболочек в предыдущей главе мы рассматривали ненапряженную оболочку, т. е. оболочку, свободную в начальном состоянии от внешней нагрузки. Задача состояла в том, чтобы определить напряженное или деформированное состояние такой оболочки после приложения внешней нагрузки.

Задача устойчивости упругого равновесия принципиально отлична. Если в задачах прочности мы рассматривали переход ненапряженной в начальном состоянии оболочки (при этом оболочка была свободна от внешней нагрузки) в напряженное или деформированное состояние под действием приложенной внешней нагрузки, то в задачах устойчивости упругого равновесия рассматривается переход одного напряженного состояния оболочки (неустойчивого) в другое напряженное состояние (устойчивое), при этом внешняя нагрузка неизменна и равна критической.

В задачах прочности форма напряженной или деформированной оболочки мало отличалась от начальной (недеформированной) формы. Поэтому в линейной постановке задачи, когда перемещения предполагались малыми в сравнении с толщиной оболочки, нет необходимости учитывать такое изменение формы при составлении уравнений равновесия. В соответствии с этим, при составлении уравнений равновесия мы проектировали все усилия на орты начального состояния оболочки, хотя по существу равновесие наступает в деформированном состоянии.

В задачах устойчивости упругого равновесия при том же допущении о малости перемещений в сравнении с толщиной оболочки исходная (неустойчивая) форма оболочки существенно отличается от новой устойчивой формы. Поэтому при проектировании всех усилий необходимо учесть это отличие.

Допустим, что внешняя нагрузка, действующая на оболочку, равна критической. Тогда для оболочки будут возможны два бесконечно близких положения равновесия.

Исходное положение будем называть *первым* (неустойчивым) *положением равновесия*. Соответствующие этому положению равновесия перемещения обозначим через u^1 , v^1 , w^1 .

Новое положение равновесия, в которое переходит оболочка, будем называть *вторым* (устойчивым) *положением равновесия*, в соответствующие ему перемещения обозначим через u^2 , v^2 , w^2 . При этом, поскольку два этих положения равновесия бесконечно близки друг другу, будем иметь следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} u^2 &= u^1 + u \\ v^2 &= v^1 + v \\ w^2 &= w^1 + w \end{aligned} \right\}, \quad (2.1)$$

где u , v , w — те дополнительные малые перемещения, которые нужно сообщить точкам оболочки, находящимся в первом (исходном) состоянии, чтобы перевести их во второе состояние.

Напряжения, соответствующие первому или исходному состоянию, обозначим через σ_{11}^0 , σ_{12}^0 , σ_{13}^0 , σ_{22}^0 , σ_{23}^0 и σ_{33}^0 .

Дополнительные напряжения, обусловленные перемещениями u , v и w — через σ_{11} , σ_{12} , σ_{13} , σ_{22} , σ_{23} и σ_{33} .

Углы поворота, соответствующие дополнительным перемещениям, обозначим α_1 , α_2 , α_3 .

Положим общий путь решения задачи, исходя из общей теории устойчивости упругого равновесия тел трех измерений. Так как положение первое (неустойчивое) и положение второе (устойчивое) являются положениями равновесия, то для них мы можем записать уравнения равновесия. В результате получим две системы дифференциальных уравнений равновесия в напряжениях (одна система для второго положения и одна для первого).

Вычитая из одной системы вторую, мы приходим к системе трех однородных уравнений устойчивости, записанной в напряжениях. В кривоугольных ортогональных координатах эта система имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_1} \left[A_1 \left(1 + \frac{x}{R_1} \right) \hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_1 \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[A_1 \left(1 + \frac{x}{R_2} \right) \hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_1 \right] + \\ & + A_1 \hat{\sigma}_1 \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 + \frac{x}{R_1} \right) \left(1 + \frac{x}{R_2} \right) \hat{x} \hat{x} \right] + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \left(1 + \frac{x}{R_1} \right) \hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_1 - \\ & - \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \left(1 + \frac{x}{R_1} \right) \hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_1 + \frac{A_1 A_2}{R_1} \left(1 + \frac{x}{R_2} \right) \hat{\sigma}_2 \hat{x} = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial x_1} \left[A_2 \left(1 + \frac{x}{R_1} \right) \hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[A_2 \left(1 + \frac{x}{R_2} \right) \hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_2 \right] + \\ & + A_2 \hat{\sigma}_2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 + \frac{x}{R_1} \right) \left(1 + \frac{x}{R_2} \right) \hat{x} \hat{x} \right] + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} \left(1 + \frac{x}{R_2} \right) \hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_2 - \\ & - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \left(1 + \frac{x}{R_2} \right) \hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 + \frac{A_1 A_2}{R_2} \left(1 + \frac{x}{R_1} \right) \hat{\sigma}_1 \hat{x} = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial x_1} \left[A_3 \left(1 + \frac{x}{R_3} \right) \hat{\sigma}_3 \hat{x} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[A_3 \left(1 + \frac{x}{R_1} \right) \hat{\sigma}_3 \hat{x} \right] + \\ & + A_3 \hat{\sigma}_3 \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 + \frac{x}{R_1} \right) \left(1 + \frac{x}{R_2} \right) \hat{x} \hat{x} \right] - \frac{A_1 A_3}{R_1} \left(1 + \frac{x}{R_2} \right) \hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_3 - \\ & - \frac{A_1 A_3}{R_2} \left(1 + \frac{x}{R_2} \right) \hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_3 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3. II)$$

Здесь $\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_1$, ..., $\hat{x} \hat{x}$ — компоненты напряжений, выражаемые через напряжения первого или исходного состояния и дополнительные напряжения следующими зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_1 &= \sigma_{11} - \sigma_2 \sigma_{12}^0 + \sigma_3 \sigma_{13}^0 \\ \hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_2 &= \sigma_{22} - \sigma_2 \sigma_{22}^0 + \sigma_3 \sigma_{23}^0 \\ \hat{x} \hat{x} &= \sigma_{33} - \sigma_2 \sigma_{32}^0 + \sigma_3 \sigma_{33}^0 \end{aligned} \right\} \quad (4. II)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{a}_1 \hat{x}_2 &= a_{12} - a_1 a_{12}^I + a_2 a_{11}^I \\ \hat{a}_2 \hat{x}_2 &= a_{22} - a_1 a_{22}^I + a_2 a_{21}^I \\ \hat{x} \hat{x}_2 &= a_{22} - a_1 a_{22}^I + a_2 a_{21}^I \\ \hat{a}_1 \hat{x} &= a_{12} - a_1 a_{12}^I + a_2 a_{11}^I \\ \hat{a}_2 \hat{x} &= a_{22} - a_2 a_{22}^I + a_1 a_{21}^I \\ \hat{x} \hat{x} &= a_{22} - a_1 a_{22}^I + a_2 a_{21}^I \end{aligned} \right\} \quad (4. II)$$

Пронтегрировав систему уравнений устойчивости в напряжениях (3. II) по x в пределах от $-\frac{h}{2}$ до $+\frac{h}{2}$ и учитывая, что для тонких оболочек

$$1 + \frac{x}{R_1} \approx 1 + \frac{x}{R_2} \approx 1,$$

получим следующую систему уравнений устойчивости в усилиях:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial A_1 T_1^*}{\partial a_1} + \frac{\partial A_1 T_2^*}{\partial a_2} + \frac{\partial A_1}{\partial a_2} T_{12}^* - \frac{\partial A_2}{\partial a_1} T_2^* + \frac{A_1 A_2}{R_1} N_1^* &= \\ &= -A_1 A_2 \left| \hat{x} \hat{x}_2 \right|_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \\ \frac{\partial A_1 T_2^*}{\partial a_1} + \frac{\partial A_2 T_2^*}{\partial a_2} + \frac{\partial A_2}{\partial a_1} T_{21}^* - \frac{\partial A_1}{\partial a_2} T_1^* + \frac{A_1 A_2}{R_1} N_2^* &= \\ &= -A_1 A_2 \left| \hat{x} \hat{x}_2 \right|_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \\ \frac{\partial A_2 N_1^*}{\partial a_1} + \frac{\partial A_1 N_2^*}{\partial a_2} - A_1 A_2 \left(\frac{T_1^*}{R_1} + \frac{T_2^*}{R_2} \right) &= \\ &= -A_1 A_2 \left| \hat{x} \hat{x} \right|_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (5. II)$$

В этой системе:

$$T'_1 = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{x}{R_1}\right) \tilde{a}_1 \tilde{a}_1 dz \approx \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \tilde{a}_1 \tilde{a}_1 dz - \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} a_{11} dz - a_1 \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} a'_{11} dz + \\ + a_2 \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} a'_{12} dz = T_1 - a_2 S^2 + a_2 N_1^2$$

$$T'_2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{x}{R_2}\right) \tilde{a}_2 \tilde{a}_2 dz \approx \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \tilde{a}_2 \tilde{a}_2 dz - \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} a_{22} dz - a_2 \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} a'_{22} dz + \\ + a_1 \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} a'_{21} dz = S - a_2 T_2^2 + a_2 N_2^2$$

(6.11)

$$T'_3 = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{x}{R_3}\right) \tilde{a}_3 \tilde{a}_3 dz \approx \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \tilde{a}_3 \tilde{a}_3 dz - \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} a_{33} dz - a_3 \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} a'_{33} dz + \\ + a_2 \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} a'_{32} dz = S - a_3 N_3^2 + a_2 T_3^2$$

$$T'_4 = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{x}{R_4}\right) \tilde{a}_4 \tilde{a}_4 dz \approx \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \tilde{a}_4 \tilde{a}_4 dz - \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} a_{44} dz - a_4 \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} a'_{44} dz + \\ + a_3 \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} a'_{43} dz = T_4 - a_4 N_4^2 + a_3 S^2$$

$$\left. \begin{aligned}
 N_1' &= \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{x}{R_1}\right) \bar{u}_1 x dz \approx \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \bar{u}_1 x dz = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} u_{1x} dz - u_1 \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} dz + \\
 &\quad + u_1 \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} dz = N_1 - u_1 T_1' + u_1 S^1 \\
 N_2' &= \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{x}{R_1}\right) \bar{u}_2 x dz \approx \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \bar{u}_2 x dz = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} u_{2x} dz - u_2 \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} dz + \\
 &\quad + u_2 \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} dz = N_2 - u_2 T_2' + u_2 S^2
 \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

Из сравнения ф-л (6.11) с ф-лами (84.1) и (85.1) легко устанавливается физический смысл величин T_1 , T_2 , S , N_1 , N_2 и величин T_1' , T_2' , S' , N_1' , N_2' . Видно, что T_1 , T_2 , S , N_1 , N_2 — дополнительные усилия в оболочке, вызванные переходом из первого исходного состояния во второе новое состояние. Иначе говоря, эти дополнительные усилия соответствуют дополнительным перемещениям u , v и w . Величины же T_1' , T_2' , S' , N_1' , N_2' — не что иное, как усилия, соответствующие первому исходному состоянию. Эти последние усилия соответствуют перемещениям u^1 , v^1 , w^1 .

Остается определить значения правых частей системы (5.11). Если считать, что оболочка в первом исходном напряженном состоянии загружена лишь нормальным давлением с выпуклой стороны (а этот случай и представляет наибольший практический интерес), то на криволинейных поверхностях оболочки будем иметь

$$\left. \begin{aligned}
 d_{1x}^1 &= d_{1y}^1 = d_{1z}^1 = 0 \\
 &\quad \text{при } x = -\frac{1}{2} \\
 d_{2x}^1 &= d_{2y}^1 = 0 \\
 &\quad \text{при } x = +\frac{1}{2} \\
 d_{3x}^1 &= -p
 \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

Эта нагрузка будет сохраняться и при отклонении оболочки от исходного состояния, поэтому

$$\left. \begin{aligned}
 \left[\bar{z} z_1 \right]_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} &= -p u_1, & \left[\bar{z} z_2 \right]_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} &= p u_2, & \left[\bar{z} z \right]_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} &= 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (8.11)$$

Учитывая ф-лы (8. II) и (8. III), систему уравнений устойчивости (3. II) можно переписать в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_1 T_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2 S}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_3}{\partial \alpha_3} S - \frac{\partial A_4}{\partial \alpha_1} T_1 \right) + \frac{N_1}{R_1} + F_1 &= 0 \\ \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_1 S}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2 T_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_3}{\partial \alpha_3} S - \frac{\partial A_4}{\partial \alpha_1} T_1 \right) + \frac{N_2}{R_2} + F_2 &= 0 \\ \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_1 N_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2 N_2}{\partial \alpha_2} \right) - \frac{T_1}{R_1} - \frac{T_2}{R_2} + F_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9. II)$$

где величины F_1 , F_2 , F_3 определяются по выражениям:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} [A_2 (\alpha_2 N_1^I - \alpha_2 S^I)] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} [A_1 (\alpha_2 N_2^I - \alpha_2 T_1^I)] + \right. \\ &\quad + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (\alpha_2 T_1^I - \alpha_1 N_1^I) - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} (\alpha_2 S^I - \alpha_1 N_2^I) \Big\} + \\ &\quad + \frac{1}{R_1} (\alpha_2 S^I - \alpha_1 T_1^I) - p \alpha_2 \\ F_2 &= \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} [A_2 (\alpha_2 T_1^I - \alpha_1 N_1^I)] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} [A_1 (\alpha_2 S^I - \alpha_1 N_2^I)] + \right. \\ &\quad + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (\alpha_1 N_1^I - \alpha_2 T_1^I) - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (\alpha_2 N_2^I - \alpha_2 S^I) \Big\} + \\ &\quad + \frac{1}{R_2} (\alpha_1 T_1^I - \alpha_2 S^I) + p \alpha_1 \\ F_3 &= \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} [A_1 (\alpha_1 S^I - \alpha_2 T_1^I)] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} [A_1 (\alpha_1 T_2^I - \alpha_2 S^I)] \right\} - \\ &\quad - \frac{1}{R_1} (\alpha_2 N_1^I - \alpha_2 S^I) - \frac{1}{R_2} (\alpha_2 S^I - \alpha_1 N_1^I) \end{aligned} \right\} \quad (10. II)$$

Система (9. II) выражает равенство нулю главного вектора всех сил, действующих на элемент оболочки, находящейся во втором положении равновесия. Сравнение этой системы с системой уравнений равновесия (99. I) показывает, что по виду эти две системы идентичны. Однако роль компонентов поверхностной нагрузки q_1 , q_2 и q_3 в системе уравнений устойчивости выполняют функции F_1 , F_2 и F_3 , в которые, кроме поверхностной нагрузки, входят проекции усилий первого для исходного состояния на координатные оси второго состояния. И это естественно, так как при переходе из первого (исходного) состояния во второе (новое), кроме проекции дополнительных усилий T_1 , T_2 , S , N_1 , N_2 , соответствующих дополнительным перемещениям α , β и γ , необходимо учесть еще и проекции усилий начального состояния T_1^I , T_2^I , S^I , N_1^I , N_2^I на новые координатные оси.

Составим равенство нулю главного момента всех сил, действующих на элемент оболочки во втором состоянии равновесия. Умножая для первых уравнений системы (3. II) на x и интегрируя в пределах от $-\frac{b}{2}$ до $+\frac{b}{2}$, получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_2 M_1'}{\partial a_1} + \frac{\partial A_1 M_{21}'}{\partial a_1} + \frac{\partial A_2}{\partial a_2} M_{12}' - \frac{\partial A_2}{\partial a_1} M_2' \right) - N_1 &= 0 \\ \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_2 M_{12}'}{\partial a_1} + \frac{\partial A_1 M_2'}{\partial a_2} + \frac{\partial A_1}{\partial a_1} M_{21}' - \frac{\partial A_1}{\partial a_2} M_1' \right) - N_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11. II)$$

und

$$\left. \begin{aligned} M_1' &= \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{x}{R_1} \right) x dx \widehat{a}_1 \approx \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x \widehat{a}_1 dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} a_{10} x dx - \\ &\quad - a_x \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} a_{12} x dx = M_1 - a_x H' \\ M_2' &= \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{x}{R_1} \right) x a_2 \widehat{a}_1 dx \approx \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} a_2 \widehat{a}_1 x dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} a_{10} x dx + \\ &\quad + a_x \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} a_{12} x dx = M_2 + a_x H' \\ M_{12}' &= \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{x}{R_1} \right) x a_1 \widehat{a}_2 dx \approx \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} a_1 \widehat{a}_2 x dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} a_{10} x dx + \\ &\quad + a_x \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} a_{12} x dx = H + a_x M_1' \\ M_{21}' &= \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{x}{R_1} \right) x a_2 \widehat{a}_1 dx \approx \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} a_2 \widehat{a}_1 x dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} a_{10} x dx - \\ &\quad - a_x \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} a_{12} x dx = H - a_x M_2' \end{aligned} \right\} \quad (12. II)$$

Из сравнения ф-л (12. II) с ф-лами (86. I) и (87. I) видно, что величины

M_1 , M_2 и H — дополнительные изгибающие и крутящий моменты, вызванные переходом из первого состояния во второе, т. е. дополнительные моменты, соответствующие дополнительным перемещениям u , v и w , а величины:

M_1^0 , M_2^0 , H^0 — изгибающие и крутящий моменты, соответствующие первому (исходному) состоянию, т. е. перемещением u^0 , v^0 , w^0 .

Пять уравнений систем (9. II) и (11. II) обеспечивают равенство нулю главного вектора и главного момента всех сил, действующих на элемент оболочки, находящейся во втором положении равновесия. В результате умножения третьего уравнения системы (3. II) на z и интегрирования в пределах от $-\frac{h}{2}$ до $+\frac{h}{2}$ получим шестое уравнение статики. Это уравнение следствия парности касательных напряжений является тождеством.

Наибольший практический интерес в задачах устойчивости упругого равновесия представляет случай, когда первое исходное состояние равновесия является безмоментным. В этом случае все моменты и перерезывающие силы в первом исходном состоянии равны нулю, т. е.

$$M_1^0 = M_2^0 = H^0 = N_1^0 = N_2^0 = 0, \quad (13. II)$$

а усилия T_1^0 , T_2^0 и S^0 определяются из дифференциальных уравнений равновесия безмоментных оболочек

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_2 T_1^0}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 S^0}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1 S^0}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_2 T_2^0}{\partial \alpha_2} \right) &= 0 \\ \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_2 S^0}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 T_2^0}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2 S^0}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1 T_1^0}{\partial \alpha_2} \right) &= 0 \\ \frac{T_1^0}{R_1} + \frac{T_2^0}{R_2} &= -p \end{aligned} \right\} \quad (14. II)$$

Ввиду равенства нулю изгибающих и крутящих моментов в исходном безмоментном состоянии система (11. II), фиксирующая равенство нулю главного момента всех сил, действующих на элемент оболочки во втором состоянии, оказывается не зависящей от усилий исходного состояния и может быть переписана в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{A_2 A_3} \left(\frac{\partial A_3 M_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 H}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1 H}{\partial \alpha_3} - \frac{\partial A_3 M_2}{\partial \alpha_3} \right) &= N_1 \\ \frac{1}{A_1 A_3} \left(\frac{\partial A_3 H}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 M_3}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1 H}{\partial \alpha_3} - \frac{\partial A_3 M_1}{\partial \alpha_3} \right) &= N_2 \end{aligned} \right\} \quad (15. II)$$

Вид системы (9. II) в случае безмоментного исходного состояния не изменяется. Однако функции F_1 , F_2 , F_3 , учитывающие усилия исходного состояния, существенно упрощаются:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= -\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} S^1 - \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_2^1 + \frac{1}{R_1} (\omega_1 S^1 - \alpha_1 T_1^1) - p \omega_1 \\ F_2 &= \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_1^1 + \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} S^1 + \frac{1}{R_2} (\omega_1 T_2^1 - \alpha_1 S^1) + p \omega_1 \\ F_3 &= \left(-\frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} \alpha_1 \right) T_1^1 + \left(\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \alpha_1 \right) T_1^1 + \\ &\quad + \left[\frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{\alpha_1}{A_1} \right) - \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{\alpha_1}{A_2} \right) + \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \alpha_1 \right] S^1 \end{aligned} \right\} (16. II)$$

В результате проделанных преобразований мы пришли к системе пяти дифференциальных уравнений устойчивости:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_2 T_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 S}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} S - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_1 \right) + \frac{N_1}{R_1} + F_1 &= 0 \\ \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_2 S}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2 T_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} S - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_2 \right) + \frac{N_2}{R_2} + F_2 &= 0 \\ \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_2 N_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2 N_2}{\partial \alpha_1} \right) - \frac{T_2}{R_1} - \frac{T_1}{R_2} + F_3 &= 0 \\ \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_2 M_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 H}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} H - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_1 \right) - N_1 &= 0 \\ \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_2 H}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2 M_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} H - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_2 \right) - N_2 &= 0 \end{aligned} \right\} (17. II)$$

Подставляя из двух последних уравнений значения перерезывающих сил в первые три, окончательно приходим к следующей системе трех дифференциальных уравнений устойчивости в условиях и моментах:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A_2 T_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 S}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} S - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_1 + \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial A_2 M_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2 H}{\partial \alpha_1} + \right. \\ \left. + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} H - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_2 \right) + A_1 A_2 F_1 &= 0 \\ \frac{\partial A_2 S}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 T_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} S - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_2 + \frac{1}{R_2} \left(\frac{\partial A_2 H}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 M_2}{\partial \alpha_1} + \right. \\ \left. + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} H - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} M_2 \right) + A_1 A_2 F_2 &= 0 \\ \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{1}{A_1} \left(\frac{\partial A_2 M_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 H}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} H - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_2 \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{1}{A_2} \left(\frac{\partial A_2 H}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 M_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} H - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} M_2 \right) \right] - \\ - \frac{T_1}{R_1} - \frac{T_2}{R_2} + F_3 &= 0 \end{aligned} \right\} (18. II)$$

Входящие в систему (18. II) дополнительные усилия и моменты связаны с компонентами деформации срединной поверхности оболочки известными зависимостями закона Гука (см. ф-лы (12. I)):

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{Et}{1-\nu^2} (\epsilon_1 + \nu \epsilon_2) & M_1 &= \frac{Eh}{12(1-\nu^2)} (\epsilon_1 + \nu \epsilon_2) \\ T_2 &= \frac{Et}{1-\nu^2} (\epsilon_2 + \nu \epsilon_1) & M_2 &= \frac{Eh}{12(1-\nu^2)} (\epsilon_2 + \nu \epsilon_1) \\ S &= \frac{Et}{2(1+\nu)} \omega & H &= \frac{Eh}{12(1+\nu)} \tau \end{aligned} \right\} \quad (19. II)$$

В формулах (19. II) удлинения ϵ_1 и ϵ_2 , сдвиг ω , изменения кривизны κ_1 , κ_2 и кручение τ — дополнительные удлинения, сдвиг, изменения кривизны и кручение элемента оболочки при переходе ее из первого исходного состояния равновесия во второе. Они связаны с дополнительными перемещениями ф-лами (7. I):

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial x_1} v + \frac{w}{R_1} \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_2} u + \frac{w}{R_2} \\ \omega &= \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{v}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{u}{A_1} \right) \\ \kappa_1 &= -\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{v}{R_1} \right) - \frac{1}{A_2 A_1} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \left(\frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} - \frac{u}{R_2} \right) \\ \kappa_2 &= -\frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} - \frac{v}{R_2} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \left(\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{u}{R_1} \right) \\ \tau &= -\frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \\ &+ \frac{1}{R_1} \left(\frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial x_2} u \right) + \frac{1}{R_2} \left(\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_1} v \right) \end{aligned} \right\} \quad (20. II)$$

Функции F_1 , F_2 и F_3 определяются по ф-лам (16. II). Входящие в эти формулы усилия исходного состояния определяются непосредственно из безмоментной теории (см. систему (14. III)). Эти усилия не зависят от дополнительных перемещений u , v и w , а зависят лишь от величин внешней нагрузки и конструктивных размеров оболочки. Однако в выражениях F_1 , F_2 и F_3 при усилиях первого (исходного) состояния T_1^I , T_2^I и S^I имеются множители — дополнительные углы поворота ω_1 , ω_2 и ω_3 и их производные по координатам. Эти дополнительные углы поворота соответствуют переходу из первого исходного состояния равновесия во второе.

Дополнительный угол поворота элемента вокруг касательной к линии α_2 есть ω_1 . Как было установлено в главе I, этот угол равен параметру ϕ , т. е.

$$\omega_1 = -\phi = \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} - \frac{v}{R_2} \quad (21. II)$$

Аналогично дополнительный угол поворота элемента вокруг касательной к линии α_2 есть α_2 , причем этот угол равен параметру η , т. е.

$$\alpha_2 = \eta = -\frac{1}{A_2} \cdot \frac{d\alpha}{ds_2} + \frac{s}{R_1}. \quad (22. II)$$

Наконец,

$$\alpha_3 = \left(\frac{1}{A_1} \cdot \frac{d\alpha}{ds_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \alpha \right) - \left(\frac{1}{A_2} \cdot \frac{d\alpha}{ds_2} - \frac{1}{A_2 A_1} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \alpha \right). \quad (23. II)$$

После подстановки ф-л (21. II)–(23. II) в выражение (16. II) легко убедиться, что в функции F_1 , F_2 и F_3 дополнительные перемещения u , v и w и их производные входят линейным образом. Следовательно, подстановкой в систему уравнений устойчивости (18. II) дополнительных усилий и моментов T_1 , T_2 , S , M_1 , M_2 , H , предварительно выраженных через дополнительные перемещения u , v , w в соответствии с ф-лами (19. II) и (20. II), и выражений для F_1 , F_2 и F_3 , мы приходим к системе трех линейных однородных уравнений относительно дополнительных перемещений u , v и w . Последняя система будет иметь отличные от нуля решения лишь при выполнении определенных значений параметра внешней нагрузки. Эти значения, являющиеся характеристическими числами полученной однородной системы, и определяют критические значения нагрузки.

Таким образом, задача определения критических нагрузок оболочек сводится к определению характеристических чисел системы линейных однородных уравнений устойчивости при заданных граничных условиях. Перейдем к формулировке этих условий.

§ 24. Граничные условия

Рассмотрим формулировку граничных условий в перемещениях. Граничные условия в задачах устойчивости упругого равновесия могут быть получены сравнением граничных условий первого или исходного состояния с граничными условиями второго состояния.

Пусть на границе оболочки явно заданы перемещения, компоненты которых по касательным к срединной поверхности оболочки и по нормали к ней соответственно равны $u_1(\alpha_1, \alpha_2)$; $v_1(\alpha_1, \alpha_2)$; $w_1(\alpha_1, \alpha_2)$, где u_1 , v_1 и w_1 — заданные функции.

Если перемещения на границе заданы, они должны сохраняться как в первом, так и во втором состояниях равновесия. Следовательно, на рассматриваемой границе будем иметь:

в первом или исходном состоянии

$$\left. \begin{aligned} u^I &= u_1 \\ v^I &= v_1 \\ w^I &= w_1 \end{aligned} \right\}. \quad (24. II)$$

во втором состоянии равновесия

$$\left. \begin{aligned} u^II + u &= u_1 \\ v^II + v &= v_1 \\ w^II + w &= w_1 \end{aligned} \right\}. \quad (25. II)$$

Вычитая равенства (24. II) из равенств (25. II), приходим к следующим граничным условиям для дополнительных перемещений:

$$\left. \begin{aligned} u &= 0 \\ v &= 0 \\ w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (26. II)$$

Таким образом, если на краю оболочки задаем перемещения, то в качестве граничных условий для дополнительных перемещений u , v и w необходимо принять нулевые значения этих перемещений. То же относится к случаю, если на границе оболочки задаем углы поворота.

§ 25. Энергетический метод определения критических нагрузок

Рассмотренный в § 23 метод определения критических нагрузок является наиболее строгим, и его использование приводит к получению достаточно точных значений критических нагрузок. Однако в ряде случаев использование этого метода, вследствие математических трудностей, оказывается невозможным, и тогда приходится прибегать к менее строгим, но более простым методам. К их числу относится энергетический метод, который нашел самое широкое распространение в задачах устойчивости оболочек. Сформулируем его основные положения.

Пусть дана оболочка, нагруженная внешней сжимающей нагрузкой. Будем считать, что внешняя нагрузка достигла критического значения. Как было установлено, при критической нагрузке оболочка может иметь две равновесные формы: первую или исходную, которую имеет оболочка до потери устойчивости, и вторую или новую, которую приобретает оболочка после потери устойчивости.

Пусть, как и ранее, перемещения, соответствующие первому состоянию, выражены через u^1 , v^1 , w^1 , а перемещения, соответствующие второму состоянию — через u^2 , v^2 , w^2 , причем последние связаны с первыми равенствами (2. II).

Обозначим потенциальную энергию деформации оболочки в первом исходном состоянии через V^1 , а во втором — через V^2 . Тогда

$$V^2 = V^1 + V, \quad (27. II)$$

где V — дополнительная потенциальная энергия деформации оболочки при переходе ее из первого исходного состояния во второе.

Работу внешних сил на перемещениях, соответствующих первому состоянию, обозначим через U^1 , а на перемещениях, соответствующих второму состоянию, через U^2 . В этом случае

$$U^2 = U^1 + U, \quad (28. II)$$

где U — дополнительная работа внешних сил на перемещениях оболочки при переходе ее из первого состояния во второе.

Теперь воспользуемся началом возможных перемещений. Согласно началу возможных перемещений, работа внешних сил на малых, но возможных перемещениях равна потенциальной энергии. Применим этот принцип ко второму состоянию равновесия оболочки, но виртуальные перемещения будем давать не суммарным перемещениям u^1 , v^1 , w^1 , u^2 , а дополнительным.

Если дополнительными перемещениями α , φ и ψ дать возможные виртуальные перемещения $\delta\alpha$, $\delta\varphi$ и $\delta\psi$, где δ есть символ вариации, то математическая формулировка принципа возможных перемещений для второго положения равновесия имеет вид

$$\delta U^0 = \delta V^0, \quad (29. II)$$

но

$$\delta U^0 = \delta(U^1 + U) = \delta U^1 + \delta U$$

и

$$\delta V^0 = \delta(V^1 + V) = \delta V^1 + \delta V.$$

Так как мы дали виртуальные перемещения лишь дополнительным перемещениями α , φ и ψ , сохраняя без изменения перемещения первого исходного состояния u^1 , φ^1 , ψ^1 , то, очевидно, вариации δU^1 и δV^1 будут равны нулю, т. е.

$$\delta U^1 = 0, \quad \delta V^1 = 0$$

и, следовательно,

$$\delta U^0 = \delta U, \quad \delta V^0 = \delta V. \quad (30. II)$$

После подстановки равенств (30. II) в ф-лу (29. II) окончательно получим

$$\delta U = \delta V. \quad (31. II)$$

Эта формула и дает вариационную формулировку проблемы упругой устойчивости.

Переносим все члены равенства (31. II) в левую часть, будем иметь

$$\delta U - \delta V = 0$$

или

$$\delta(U - V) = 0. \quad (32. II)$$

Для решения задач воспользуемся прямыми методами вариационного исчисления. Для этого представим перемещения α , φ и ψ в виде

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= A_1 f_1(\alpha_1, \alpha_2) + A_2 f_2(\alpha_1, \alpha_2) + A_3 f_3(\alpha_1, \alpha_2) + \dots \\ \varphi &= B_1 \varphi_1(\alpha_1, \alpha_2) + B_2 \varphi_2(\alpha_1, \alpha_2) + B_3 \varphi_3(\alpha_1, \alpha_2) + \dots \\ \psi &= C_1 \psi_1(\alpha_1, \alpha_2) + C_2 \psi_2(\alpha_1, \alpha_2) + C_3 \psi_3(\alpha_1, \alpha_2) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (33. II)$$

В равенствах (33. II) $f_1(\alpha_1, \alpha_2)$, $f_2(\alpha_1, \alpha_2)$, ..., $\varphi_n(\alpha_1, \alpha_2)$ — некоторые известные функции, а A_1 , A_2 , ..., C_n — неизвестные варьируемые коэффициенты.

Функции $f_1(\alpha_1, \alpha_2)$, $f_2(\alpha_1, \alpha_2)$, ..., $\varphi_n(\alpha_1, \alpha_2)$ должны быть выбраны таким образом, чтобы все они удовлетворяли граничным условиям задачи. Следовательно, в задачах упругой устойчивости при задании на границах перемещений эти функции должны на границах обращаться в нуль. Поскольку при таком задании перемещений α , φ и ψ варьируются только коэффициенты A_1 , B_1 , C_1 , равенству (32. II) можно приписать вид

$$\begin{aligned} \delta(U - V) &= \frac{\partial(U - V)}{\partial A_1} \delta A_1 + \frac{\partial(U - V)}{\partial A_2} \delta A_2 + \frac{\partial(U - V)}{\partial A_3} \delta A_3 + \dots \\ &\dots + \frac{\partial(U - V)}{\partial B_1} \delta B_1 + \frac{\partial(U - V)}{\partial B_2} \delta B_2 + \frac{\partial(U - V)}{\partial B_3} \delta B_3 + \dots \\ &\dots + \frac{\partial(U - V)}{\partial C_1} \delta C_1 + \frac{\partial(U - V)}{\partial C_2} \delta C_2 + \frac{\partial(U - V)}{\partial C_3} \delta C_3 + \dots = 0. \quad (34. II) \end{aligned}$$

Вариации $\delta A_1, \delta A_2, \dots, \delta C_2$ не равны нулю, равенство же (34. II) должно удовлетворяться тождественно. Поэтому для выполнения равенства (34. II) необходимо, чтобы все производные скалярной функции $(U - V)$ были равны нулю, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(U-V)}{\partial A_1} &= 0 & \frac{\partial(U-V)}{\partial A_2} &= 0 & \frac{\partial(U-V)}{\partial A_3} &= 0 & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial(U-V)}{\partial B_1} &= 0 & \frac{\partial(U-V)}{\partial B_2} &= 0 & \frac{\partial(U-V)}{\partial B_3} &= 0 & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial(U-V)}{\partial C_1} &= 0 & \frac{\partial(U-V)}{\partial C_2} &= 0 & \frac{\partial(U-V)}{\partial C_3} &= 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{aligned} \right\} \quad (35. II)$$

В итоге получается система $3n$ линейных однородных алгебраических уравнений относительно варьируемых параметров A_i, B_i и C_i , где n — число членов, удерживаемых в формулах для дополнительных перемещений.

Решением этой системы будет либо равенство нулю коэффициентов A_i, B_i и C_i (что практического интереса не представляет, так как в этом случае будут равны нулю дополнительные перемещения, а, следовательно, будет отсутствовать потеря устойчивости), либо равенство нулю определителя этой системы. Приравняв нулю определитель системы (35. II) получаем выражение для определения критической нагрузки.

Таким образом изложено путь определения критических нагрузок энергетическим методом. Чем лучше выбранная форма дополнительных перемещений соответствует действительной форме потери устойчивости, тем точнее получается результат. С другой стороны, необходимо стремиться, чтобы порядок характеристического определителя был по возможности ниже, что достигается за счет уменьшения числа членов, удерживаемых в выражениях для дополнительных перемещений.

Практические расчеты показывают, что в каждом из рядов достаточно удержать лишь один член. В этом случае характеристический определитель имеет третий порядок.

ГЛАВА III

РАСЧЕТНЫЕ НАГРУЗКИ ДЛЯ ПРОЧНОГО КОРПУСА

§ 26. Основные понятия

Корпус подводной лодки является весьма сложным инженерным сооружением. Задача проектирования рациональной конструкции корпуса, т. е. конструкции, обладающей достаточной прочностью при минимальном весе, может быть выполнена, если будут решены три основные проблемы строительной механики:

- 1) проблема внешних усилий;
- 2) проблема внутренних усилий или напряжений;
- 3) проблема норм прочности.

Совершенно очевидно, что для выполнения расчета прочности корпуса подводной лодки необходимо, прежде всего, определить те усилия, которые на него действуют. При этом имеется в виду определение не только величины усилий, но и определение характера их действия на конструкцию. Эти вопросы составляют проблему внешних усилий. В результате решения этой проблемы мы приходим к определению величины и характера усилий, действующих на корпус подводной лодки.

Следующая задача состоит в том, чтобы определить те напряжения и деформации, которые возникают в конструкциях корпуса при действии отмеченных выше усилий. Эта задача составляет проблему внутренних усилий или напряжений и решается с помощью расчетных методов строительной механики, базирующихся на достигнутых теориях оболочек.

Для строгости отметим, что проблема внутренних усилий охватывает задачу определения напряжений и деформаций, возникающих в конструкции не только от действующих на конструкцию усилий, но и от любых усилий, принятых за расчетные.

Однако решение первых двух проблем еще не определяет прочность корпуса подводной лодки. Очевидно, разрушающая нагрузка всегда должна быть больше действующей, ибо в противном случае корпус подводной лодки разрушился бы еще до достижения действующими усилиями их максимальной величины. Отмеченное условие не является определенным, так как еще не определена величина этого превышения.

Действительно, в одном случае разрушающая нагрузка может превышать действующую на 5—10 процентов, а другом — в пять и более раз. И здесь мы подходим к решению третьей проблемы — проблемы норм прочности. При решении этой проблемы необходимо учитывать как степень точности определения расчетных усилий, так и возможную погрешность при определении напряжений и деформаций, неизбежно

появляющихся вследствие условий наших расчетов. Поэтому отношение разрушающей нагрузки к действующей, определяющее запас прочности, должно быть не меньше некоторой величины, перекрывающей все возможные ошибки и погрешности наших расчетов. С другой стороны, это отношение не должно быть излишне большим, так как в последнем случае конструкция окажется перетяжеленной и, следовательно, неэкономичной.

Из изложенного следует, что только правильное совокупное решение трех основных проблем строительной механики позволяет конструировать рациональные конструкции корпусов, обладающие высокой прочностью при наименьших весах.

Прежде чем перейти к изложению вопроса о запасах прочности, дадим определение некоторым величинам, фактически определяющим запасы прочности. К числу этих величин будем относить:

- а) опасную нагрузку;
- б) допускаемую нагрузку;
- в) опасное напряжение;
- г) допускаемое напряжение.

Опасной нагрузкой будем называть такую нагрузку, при действии которой конструкция либо разрушается, либо получает недопустимые деформации.

По аналогии опасными напряжениями назовем такие напряжения, превышение которых приводит к разрушению или к недопустимым деформациям конструкции.

Таким образом, *опасные напряжения* — наибольшие напряжения, возникающие в конструкции при действии на нее опасной нагрузки. Последним определением является видное строение, если имеет место одностороннее напряженное состояние, т. е. такое напряженное состояние, когда отлично от нуля только одно из главных нормальных напряжений (σ_1 или σ_2), при этом второе нормальное и касательное напряжение σ_3 равны нулю. В тех случаях, когда напряженное состояние является более сложным, в качестве опасных напряжений или деформаций необходимо принимать комбинации напряжений или деформаций, в зависимости от принятых критериев или гипотез прочности.

Допускаемой нагрузкой назовем такую нагрузку, которой может быть нагружена конструкция без опасения за ее прочность или сохранность ее формы.

По аналогии *допускаемые напряжения* будем определять как такие напряжения, которые могут быть допущены в конструкции без опасения за ее прочность или сохранность ее формы.

Следовательно, *допускаемые напряжения* — наибольшие напряжения в конструкции при действии на нее допускаемой нагрузки.

Рассмотрим конструкцию, у которой зависимость между действующим на нее усилием P и возникающими напряжениями σ определяется кривой, показанной на рис. 27.

Пусть на некотором участке кривой зависимость напряжений от нагрузки является линейной, а затем рост напряжений превышает

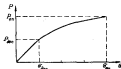


Рис. 27

рост нагрузки. Отметим, что зависимость $\sigma = f(P)$ может быть в отдельных случаях линейной (или нелинейной) на всем протяжении кривой. При этом величина опасной нагрузки есть $P_{\text{оп}}$, а величина допускаемой нагрузки — $P_{\text{доп}}$.

Отношение опасной нагрузки к допускаемой называется истинным запасом прочности, следовательно,

$$n_{\text{ист}} = \frac{P_{\text{оп}}}{P_{\text{доп}}}. \quad (1. III)$$

Таким образом, истинный запас прочности показывает, какую долю от опасной должна составлять допускаемая нагрузка или, во сколько раз опасная нагрузка превышает допускаемую.

Предположим, что с помощью соответствующих расчетных методов мы определили величину опасной нагрузки. После анализа возможной погрешности в определении усилий, могущих действовать на конструкцию, анализа погрешности принятых расчетных методов мы устанавливаем запас прочности $n_{\text{доп}}$. Отнеся величину опасной нагрузки к величине избранного запаса прочности, мы определяем величину допускаемой нагрузки, т. е.

$$P_{\text{доп}} = \frac{P_{\text{оп}}}{n_{\text{доп}}}. \quad (2. III)$$

В этом случае условие прочности имеет вид

$$P_{\text{действ}} < P_{\text{доп}}, \quad (3. III)$$

где $P_{\text{действ}}$ — величина действующей на конструкцию нагрузки.

Условие прочности (3. III) иногда приводит к несколько иному виду. Умножив обе части равенства на величину $n_{\text{доп}}$, получим

$$P_{\text{действ}} n_{\text{доп}} < P_{\text{оп}}. \quad (4. III)$$

Эквивалентность ф-л (3. III) и (4. III) очевидна. Необходимо отметить, что в строительной механике подводных лодок по причинам, изложенным ниже, условие прочности выражается зависимостью (4. III). Наибольшее значение действующей нагрузки умножится на выбранный запас прочности, и полученная нагрузка принимается за расчетную, при этом она должна быть равна или меньше опасной. Таким образом,

$$P_{\text{расч}} = P_{\text{действ}} n_{\text{доп}} < P_{\text{оп}}. \quad (5. III)$$

Отмеченный вариант нормирования по существу является нормированием по нагрузкам.

Теперь рассмотрим другой вариант нормирования — нормирование по напряжениям.

Пусть напряжение, соответствующее опасной нагрузке, есть $\sigma_{\text{оп}}$, а напряжение, соответствующее допускаемой нагрузке, $\sigma_{\text{доп}}$. Тогда отношение опасного напряжения к допускаемому будем называть кажущимся запасом прочности, т. е.

$$n_{\text{каж}} = \frac{\sigma_{\text{оп}}}{\sigma_{\text{доп}}}. \quad (6. III)$$

Из формулы (6. III) видно, что кажущийся запас прочности характеризует, какую долю от опасных напряжений должны составлять допускаемые или, во сколько раз опасное напряжение превышает допускаемое.

Определив с помощью соответствующих расчетных методов величину опасного напряжения $\sigma_{\text{оп}}$ и выбрав необходимый запас прочности, можно найти величину допускаемого напряжения

$$\sigma_{\text{доп}} = \frac{\sigma_{\text{оп}}}{n_{\text{доп}}} \quad (7. III)$$

Условие прочности при этом будет иметь вид

$$\sigma_{\text{действ}} \leq \sigma_{\text{доп}} \quad (8. III)$$

Из формулы (8. III) следует, что величина действующего напряжения должна быть меньше или равна величине допускаемого напряжения.

В чем же заключается разница обоих путей нормирования и почему в одном случае запас прочности называется истинным, а в другом — кажущимся?

Для ответа на этот вопрос обратимся к рис. 27. На рисунке видно, что в рассматриваемом случае опасная нагрузка лишь в два раза больше допускаемой, хотя опасное напряжение превышает допускаемое более чем в четыре раза. Истинная оценка прочности конструкции определяется величиной, показывающей, во сколько раз необходимо увеличить допускаемую нагрузку, чтобы конструкция разрушилась или получила недопустимые деформации. Поэтому, назначив запас прочности по нагрузкам $n_{\text{доп}}$, мы гарантированы, что разрушение конструкции не наступит до тех пор, пока допускаемая нагрузка не будет превышена в $n_{\text{доп}}$ раз. Именно поэтому запас прочности по нагрузкам и называется истинным запасом. В рассмотренном на рис. 27 случае, имея четырехкратный запас прочности по напряжениям, мы не можем в четыре раза увеличить допускаемую нагрузку, так как удвоенная допускаемая нагрузка уже является опасной. Таким образом, отношение опасного напряжения к допускаемому дает не истинную оценку прочности, а лишь кажущуюся. Поэтому запас прочности по напряжениям называется кажущимся запасом.

Очевидно, кажущийся запас прочности будет равен истинному лишь в том случае, если зависимость между нагрузкой и напряжением является линейной вплоть до разрушения или недопустимых деформаций конструкции. В этом единственном случае совершенно безразлично, как производить нормирование: по нагрузкам или по напряжениям. Во всех остальных случаях, когда зависимость между нагрузкой и напряжениями не является линейной, рост напряжений всегда превышает рост нагрузки. Следовательно, кажущийся запас прочности всегда больше истинного.

В конструкциях корпусов подводных лодок имеет место нелинейная зависимость между нагрузкой и возникающими в конструкциях напряжениями. Более быстрый рост напряжений в сравнении с ростом нагрузки объясняется главным образом неправильностью формы корпуса (отклонения от правильной круговой формы), вследствие чего имеет место сложный изгиб конструкции. Поэтому в строительной механике подводных лодок запас прочности вводится в нагрузку.

Умножив наибольшую действующую нагрузку на выбранный запас прочности, мы получаем расчетную нагрузку. Она и является той нагрузкой, на действия которой проверяется прочность конструкции.

§ 27. Внешние силы, действующие на корпус подводной лодки

Все силы, действующие на корпус подводной лодки, можно разделить на две группы:

- 1) силы поверхностные;
- 2) силы объемные.

К числу поверхностных сил относятся: гидростатическое давление на корпус, давление ударной волны и пульсаций газового пузыря при подводном взрыве. Поверхностные силы приложены непосредственно к наружной поверхности обшивки прочного корпуса.

К числу объемных сил можно отнести силы веса при статическом нагружении корпуса подводных лодок и силы инерции при воздействии на корпус динамических нагрузок. Объемные силы приложены к каждой частице объема, обладающей массой.

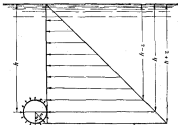


Рис. 28

Воздействие на корпус динамических нагрузок будет рассмотрено особо. Здесь же ограничимся рассмотрением только статических нагрузок, а именно: гидростатического давления воды и сил веса корпуса лодки и всех находящихся в нем грузов.

Известно, что гидростатическое давление воды, приходящееся на 1 см^2 в любой точке тела, погруженной на расстоянии h см от поверхности воды, равно весу столба воды высотой h , т. е.

$$p = \gamma h, \quad (9. \text{III})$$

Во всех расчетах прочности будем принимать $\gamma = 0,001 \text{ кг/см}^2$. Тогда гидростатическое давление будет $p = 0,001 h$.

Ввиду больших глубин погружения подводных лодок величину h удобнее принимать не в сантиметрах, а в метрах, поэтому окончательное гидростатическое давление в кг/см^2 будет

$$p = 0,1 h, \quad (10. \text{III})$$

где h — высота столба воды от поверхности в метрах.

Из формул (9. III) и (10. III) видно, что гидростатическое давление изменяется по глубине по линейному закону. Рассмотрим поперечное сечение прочного корпуса подводной лодки, погруженной на глубину h . При этом глубину погружения h будем отсчитывать от оси корпуса.

Из рисунка 28 видно, что гидростатическое давление, действующее на корпус, изменяется по высоте корпуса. Если давление у оси корпуса равно $0,1h$, то в нижней точке оно возрастает до величины $0,1(h+r)$, а в верхней, наоборот, убывает до $0,1(h-r)$, где r — радиус корпуса в метрах.

Представим это давление в виде двух составляющих (рис. 29):

давления p , равномерно распределенного по всему периметру корпуса,

$$p = 0,1h, \quad (11. III)$$

и давления p_1 , распределенного по треугольнику,

$$p_1 = 0,1r \cos \alpha. \quad (12. III)$$

Так как речь идет о гидростатическом давлении, то оно направлено по нормали к поверхности оболочки, т. е. в радиальном направлении.

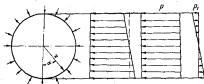


Рис. 29

Равномерно распределенная нагрузка p полностью уравновешивается на прочном корпусе. Нагрузки же p_1 уравновешены на корпусе только в горизонтальном направлении. В вертикальном направлении эта нагрузка сама по себе не уравновешивается, она уравновешивается силами веса подводной лодки. Если бы последние, т. е. силы веса, были равномерно распределены по длине подводной лодки, то в этом случае вертикальная составляющая P_1 , приходящаяся на единицу участка длины корпуса, полностью уравновешивалась бы силами веса этого участка длины подводной лодки (P_2). Однако из-за неравномерного распределения сил веса по длине корпуса, вес единичного участка длины подводной лодки (P_2) может быть как больше, так и меньше сил P_1 . При этом разность $P_1 - P_2$ уравновешивается разностью перерезывающих сил $\Delta P_2 = P_1' - P_2$, приложенных к границам рассматриваемого участка (рис. 30), причем

$$\Delta P_2 = P_1 - P_2. \quad (13. III)$$

Таким образом, на единицу длины дна корпуса подводной лодки, ось которой находится на глубине h , действуют следующие усилия.

1. Усилие P от равномерно распределенного гидростатического давления интенсивностью $p=0,1h$.

2. Усилие P_1 от гидростатического давления, распределенного по высоте корпуса по закону треугольника, интенсивностью $p_1=0,1 \text{ г} \cos \alpha$.

3. Усилие P_2 , равное весу рассматриваемого участка длины лодки.

4. Усилие $\Delta P_1 = P_1 - P_2$, равное разности перерезывающих сил, приложенных к границам участка.

Как было отмечено, усилие P уравновешено полностью, усилие же P_1 уравновешивается усилиями P_2 и P_3 . Для оценки влияния этих усилий определим отношение интенсивности p_1 к интенсивности p . Получим

$$\frac{p_1}{p} = \frac{0,1 \text{ г} \cos \alpha}{0,1h}.$$

Наибольшее отношение $\frac{p_1}{p}$ будет, очевидно, в нижней точке кругового сечения, т. е. при $\alpha = 0$. В этом случае

$$\frac{p_1}{p} = \frac{r}{h}. \quad (14. \text{III})$$

Для подводных лодок глубина погружения h , как правило, не менее 100 м, наибольшее значение радиуса прочного корпуса r не превышает 5 м. Следовательно, наибольшая величина отношения

$$\frac{p_1}{p} = \frac{r}{h} = \frac{5}{100} = 0,05.$$

Рис. 30

Таким образом, интенсивность усилия P_1 не превышает пяти процентов интенсивности усилия P . Анализ показывает, что при расчетах прочности конструкций прочного корпуса влиянием усилия P_1 и уравновешивающих его усилий P_2 и P_3 можно пренебречь.

В соответствии с этим в качестве действующей нагрузки при расчете прочности прочного корпуса необходимо принимать равномерно распределенное гидростатическое давление интенсивности

$$p=0,1h. \quad (15. \text{III})$$

Величина действующего гидростатического давления, определяемая ф-лой (15. III), не является определенной до тех пор, пока не будет определена глубина погружения h оси лодки. Естественно, что для расчетов прочности корпуса интерес представляет наибольшее значение глубины погружения, так как обеспечение прочности на наибольшей глубине является гарантией обеспечения прочности на всех промежуточных глубинах. Поэтому будем интересоваться лишь наибольшим значением h . Последнее определяется предельной глубиной погружения $h_{\text{пр}}$, под которой понимается та наибольшая глубина погружения (считая до оси корпуса), на которую лодка может погружаться (например, ложась на грунт) без появления в корпусе остаточных деформаций.

Погружение подводной лодки на предельную глубину происходит ограниченное число раз, причем с большими промежутками времени между отдельными погружениями. В связи с этим гидростатическую нагрузку, соответствующую заданной предельной глубине погружения, будем считать по характеру изменения неизменной, а по характеру действия — случайной. Так как подводная лодка, находящаяся на предельной глубине, может иметь некоторый дифферент ϕ , то наибольшее значение нагрузки, действующей на прочный корпус, будет соответствовать величине A , определяемой по выражению

$$A = A_{\text{гг}} + \phi x, \quad (16. III)$$

где x — расстояние рассматриваемого сечения корпуса от миделя в метрах.

Следовательно, наибольшая величина действующего на корпус равномерного гидростатического давления будет

$$p = 0,1(A_{\text{гг}} + \phi x). \quad (17. III)$$

§ 28. Расчетная нагрузка для прочного корпуса

Ввиду нелинейной зависимости между нагрузкой и напряжениями в корпусе подводной лодки, запас прочности будем вводить в нагрузку. Следовательно, умножив действующую нагрузку, определенную по ф-ле (17. III), на коэффициент запаса n , мы получим расчетную нагрузку. Остается назначить запас прочности n . При определении запаса прочности (или, как иногда называют, коэффициента безопасности) n необходимо учитывать следующие важные факторы.

1. Возможность увеличения нагрузки вследствие аварийных провалов подводной лодки за предельную глубину.

2. Возможность уменьшения действительных размеров (толщины обшивки, сечения шпангоута) и механических характеристик материала корпуса (предела пропорциональности, предела текучести) в сравнении со спецификационными размерами и механическими характеристиками.

3. Возможность превышения действительных напряжений и деформаций корпуса над вычисленными расчетом, вследствие условности принятых расчетных методов (неучет отклонений от правильной формы, технологических факторов, погрешность расчетных формул и т. д.).

Рассмотрим каждый из упомянутых факторов в отдельности.

Первый фактор — превышение предела сжатия

Возможность увеличения нагрузки вследствие аварийных провалов подводной лодки за предельную глубину может быть учтена двумя путями:

- 1) введением относительного запаса прочности;
- 2) введением абсолютного запаса прочности.

Если принять относительный запас прочности (только аварийное погружение лодки) n , равным, например, 1,1, то для подводных лодок с предельными глубинами погружения $A_{\text{гг}} = 100, 200$ и 300 м получим следующие значения:

$$\text{при } A_{\text{гг}} = 100 \text{ м} \quad A_1 = 1,1 A_{\text{гг}} = 1,1 \cdot 100 = 110 \text{ м},$$

$$\text{при } A_{\text{гг}} = 200 \text{ м} \quad A_2 = 1,1 A_{\text{гг}} = 1,1 \cdot 200 = 220 \text{ м},$$

$$\text{при } A_{\text{гг}} = 300 \text{ м} \quad A_3 = 1,1 A_{\text{гг}} = 1,1 \cdot 300 = 330 \text{ м}.$$

Разница между этими глубинами и предельной глубиной погружения определяет величину аварийного провала или аварийного переуглубления подводной лодки.

Эта величина для рассмотренных случаев будет равна

$$\text{при } h_{\text{пр}} = 100 \text{ м} \quad h_1 - h_{\text{пр}} = 110 - 100 = 10 \text{ м,}$$

$$\text{при } h_{\text{пр}} = 200 \text{ м} \quad h_1 - h_{\text{пр}} = 220 - 200 = 20 \text{ м,}$$

$$\text{при } h_{\text{пр}} = 300 \text{ м} \quad h_1 - h_{\text{пр}} = 330 - 300 = 30 \text{ м.}$$

Видно, что при назначении одинакового относительного запаса на аварийное переуглубление мы получаем существенно разные абсолютные величины аварийного переуглубления для лодок с различными предельными глубинами. Между тем очевидно, что величина аварийного переуглубления не зависит от предельной глубины погружения подводной лодки, а зависит главным образом от скорости подводного хода, длины подводной лодки, состояния систем погружения и всплытия и подготовки личного состава. В связи с этим введение относительного запаса прочности на аварийное переуглубление принципиально неправильно. Более правильно в этом случае назначать абсолютное аварийное переуглубление подводной лодки.

Учет влияния скорости хода, состояния систем погружения и всплытия и подготовки личного состава затруднителен. Поэтому можно, следуя предложению Ю. А. Шинявского,* рекомендовать величину абсолютного аварийного переуглубления лодки принимать равной $0,2L$, где L — длина лодки в метрах.

Таким образом, глубина погружения с учетом возможного дифферента и аварийного переуглубления будет

$$h_1 = h_{\text{пр}} + \phi x + 0,2L. \quad (18. \text{III})$$

Необходимо отметить, что с ростом скоростей подводного хода и накоплением опытных данных по аварийным провалам подводных лодок величина аварийного переуглубления подлежит корректировке.

Второй фактор — увеличение действительных размеров и механических характеристик материала по сравнению со спецификационными

Известно, что прокат листового и профильного материала не может быть выполнен абсолютно точно. Поэтому соответствующими ГОСТ или ведомственными стандартами предусмотрены допуски на прокат. Нам будут интересовать лишь минусовые допуски на перекал листов и профильного материала, так как в случае недоката действительная толщина листа и сечение профиля шпангоута будет больше спецификационных. Выгнута из спецификационной толщины величину наибольшего недоката листов, установленного ГОСТ или ведомственным стандартом, мы получим минимально возможную толщину листа, которую и следует принять в качестве расчетной. Аналогично необходимо поступить и в отношении шпангоутов, так как их роль в составе корпуса подводной лодки является весьма важной. Следует отметить, что, кроме перекал листов и профиля шпангоутов, предусмотренного ГОСТ, необходимо учитывать дополнительное утонение материала при штамповке, гибке и пескоструй-

* Ю. А. Шинявский. Справочник по судостроению. Т. III. Строительная техника корабля. Госстройиздат, 1934.

ной обработки. Учет отмеченных факторов очень важен, так как дополнительное утонение материала в результате штамповки, гибки и пескоструйной обработки может оказать существенное влияние на прочность и устойчивость корпуса. Таким образом, утонение листового и профильного материала будем учитывать не увеличением запаса прочности, а введением в расчетные формулы минимальных толщин листов и размеров сечения шпангоутов с учетом предусмотренного ГОСТ переката и дополнительных утонений при штамповке, гибке и пескоструйной обработке.

Что касается механических характеристик материала, и, в частности, предела текучести, то следует отметить, что, как правило, фактический предел текучести и временное сопротивление всегда выше спецификационных. Поэтому при выполнении расчетов прочности достаточно учитывать заданные в спецификации механические характеристики материала.

Третий фактор — возможные погрешности вследствие упрощения расчетных методов.

Всякой расчетный метод строительной механики есть математическая абстракция действительности, так как в основу всех расчетных методов положены те или иные гипотезы, допущения и предположения. Естественно, что принятие различных гипотез и допущений приводит к известной условности наших расчетов, а следовательно, и к их погрешности. Так, например, при расчете цилиндрической части прочного корпуса последний рассматривается как круговой цилиндр. Между тем, непосредственными измерениями можно установить отклонения обшивки и шпангоутов от идеальной круговой формы. Эти отклонения приводят к тому, что конструкция корпуса под действием равномерно распределенного давления испытывает дополнительные изгибы, вследствие чего в корпусе появляются остаточные деформации еще задолго до разрушения конструкции.

Все возможные погрешности, связанные с условностью наших расчетов, должны учитываться введением в нагрузку дополнительного запаса прочности λ_p . Умножив глубину погружения (с учетом дифферента и аварийного провала) на коэффициент λ_p , получим расчетную глубину погружения λ_p . Следовательно, расчетная глубина погружения будет

$$\lambda_p = \lambda_1 (\lambda_{ap} + \varphi x + 0,2L). \quad (19. III)$$

Остается определить коэффициент λ_p . Величина этого коэффициента выбирается на основании многочисленных опытов с натурными и масштабными отсеками. Ю. А. Шиманский считает,* что при нагрузке, составляющей примерно 70% от разрушающей, в корпусе появляются местные остаточные деформации, которые совершенно недопустимы на предельной глубине. Поэтому, следуя Ю. А. Шиманскому, можно записать следующее условие:

$$0,7\lambda_p = \lambda_{ap} + \varphi x + 0,2L. \quad (20. III)$$

Разделив обе части равенства (20. III) на коэффициент 0,7, получим

$$\lambda_p = \frac{1}{0,7} (\lambda_{ap} + \varphi x + 0,2L). \quad (21. III)$$

* Ю. А. Шиманский. Строительная механика подводных лодок. Сухаревина, 1948.

Сравним Ф-лу (21. III) с Ф-лой (19. III), получим значение коэффициента π_2

$$\pi_2 = \frac{1}{0,7} \approx 1,4. \quad (22. III)$$

Поэтому расчетная глубина погружения будет

$$h_p = 1,4 (h_{ap} + \phi x + 0,2L). \quad (23. III)$$

Для удобства пользования Ф-лой (23. III) и для однообразия расчетов прочности примем угол дифферента ϕ равным 0,2. Окончательно расчетная глубина погружения будет определяться по выражению

$$h_p = 1,4 [h_{ap} + 0,2 (L + x)]. \quad (24. III)$$

Формула (24. III) была предложена Ю. А. Шаманским.

Соответственно, расчетное равномерно распределенное гидростатическое давление будет равно

$$p_p = 0,1 h_p. \quad (25. III)$$

В дальнейшем знак p при p_p будем опускать, а расчетное давление будем обозначать через p .

Истинный запас прочности или коэффициент безопасности есть отношение расчетной нагрузки к допустимой или отношение расчетной глубины погружения к предельной. Для идеального сечения ($x=0$) истинный запас прочности π будет равен

$$\pi = \frac{h_p}{h_{ap}} = 1,4 \left(1 + \frac{0,2L}{h_{ap}} \right). \quad (26. III)$$

Запас прочности π несколько повышается с увеличением длины подводной лодки и несколько понижается с увеличением предельной глубины, что вполне естественно, так как была задана абсолютная величина аварийного переглубления лодки, равная $0,2L$.

В заключение необходимо сделать следующее замечание. Ввиду того, что в расчетах прочности корпуса подводных лодок запас прочности вводится в нагрузку или в пропорциональную ей глубину погружения, некоторые специалисты вводят понятие «абсолютный запас прочности», понимая под ним разность между расчетной и предельной глубинами погружения. Однако такая точка зрения является ошибочной. Расчетная глубина погружения определена как с учетом возможного аварийного переглубления лодки, так и с учетом возможных погрешностей и ошибок вследствие условности принятых расчетных методов. При этом аварийное переглубление лодки принято сравнительно небольшим и равным $0,2L$.

§ 29. Особенности расчетов прочного корпуса

Расчетной нагрузкой для прочного корпуса подводной лодки является равномерно гидростатическое давление p . Естественно, что первая задача расчета прочности любой конструкции, в том числе и прочного корпуса подводной лодки, состоит в определении напряжений, возникающих при действии расчетной нагрузки, и проверке соблюдения условий прочности по напряжениям.

Однако проверка прочности по напряжениям, как необходимое и обязательное условие расчета прочности корпуса подводных лодок,

ний не гарантируют корпус от разрушения. Дело в том, что гидростатическое давление p является критическим по отношению к корпусу, следовательно, оно вызывает обжатие прочного корпуса. При этом как в обшивке, так и в шпангоутах возникают значительные сжимающие напряжения. В этих условиях имеет место вторая, не менее важная задача — проверка устойчивости обшивки и шпангоутов прочного корпуса. Если жесткость при изгибе обшивки или шпангоутов окажется недостаточной, то даже при относительно небольших сжимающих напряжениях может наступить потеря устойчивости обшивки или шпангоутов вместе с обшивкой. Многочисленные эксперименты показали, что при напряжениях, имеющих место на расчетной глубине, потеря устойчивости обшивки приводит к разрушению прочного корпуса. Следовательно, критическая нагрузка для прочного корпуса опасна. В этих условиях необходимо выбрать конструктивные размеры обшивки и шпангоутов прочного корпуса таким образом, чтобы критическая нагрузка была не менее расчетной нагрузки, т. е. обеспечить соблюдение условия

$$P_{кр} \geq P \quad (27. III)$$

Резюмируя изложенное, можно заключить, что расчет прочности прочного корпуса включает: а) проверку прочности по напряжениям и б) проверку устойчивости.

ГЛАВА IV

РАСЧЕТ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРОЧНОГО КОРПУСА

§ 30. Основные задачи расчета прочности корпуса

Прочный корпус подводных лодок на большей части своей длины konstrуируется в виде круговой цилиндрической оболочки постоянной толщины, подкрепленной одинаковыми и равноотстоящими упругими кольцами или шпангоутами. Поперечное сечение шпангоутных колец не меняется по периметру цилиндра. Следовательно, такая конструкция прочного корпуса симметрична относительно оси цилиндра.

Как было установлено в третьей главе, расчетной нагрузкой для прочного корпуса является равномерно распределенное давление p , соответствующее расчетной глубине погружения, причем последняя определяется по выражению

$$\lambda_p = 1,4 [\lambda_{\text{вп}} + 0,2 (\ell + x)]. \quad (1. IV)$$

Эта внешняя нагрузка симметрична относительно оси цилиндра. Таким образом, как конструкция корпуса, так и внешняя нагрузка симметричны относительно оси цилиндра, а силу чего будет иметь место симметричная деформация круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной упругими шпангоутными кольцами. В соответствии с этим и напряженное состояние оболочки будет симметричным относительно оси, так что возникающие в оболочке сжимающие напряжения не будут изменяться в направлении направляющей кругового цилиндра. Естественно, что симметричная деформация оболочки будет иметь место лишь в том случае, если до достижения расчетной нагрузки оболочка не потеряет устойчивости. Поэтому в дополнение к проверке прочности корпуса по напряженным деформациям производиться проверка его устойчивости, т. е. проверка соблюдения условия

$$\sigma_{\text{сж}} > p. \quad (2. IV)$$

При потере устойчивости оболочки могут встретиться два случая:

1) шпангоуты сохраняют свою круговую форму, а оболочка теряет устойчивость между шпангоутами;

2) оболочка вместе со шпангоутами теряет устойчивость по всей длине отсека между переборками.

Из изложенного следует, что расчеты прочности и устойчивости прочного корпуса должны включать:

- а) проверку прочности обшивки по напряжениям;
- б) проверку прочности шпангоутов по напряжениям;
- в) проверку устойчивости обшивки;
- г) проверку устойчивости шпангоутов.

В соответствии с замечанным планом и перейдем к проверке прочности корпуса по напряжениям.

§ 31. Определение напряжений в обшивке и шпангоутах прочного корпуса

1. Постановка задачи

Дана круговая цилиндрическая оболочка, нагруженная по всей боковой поверхности и по торцам внешней равномерно распределенной

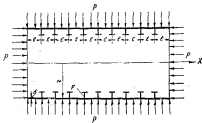


Рис. 31

нагрузкой интенсивности P . Оболочка подкреплена одинаковыми и равноотстоящими упругими шпангоутами постоянного сечения (рис. 31).

Требуется определить напряжения, возникающие в оболочке.

2. Усилия и моменты в круговой цилиндрической оболочке при осесимметричной ее деформации

Напряжения в оболочке могут быть найдены лишь после определения всех усилий и моментов, а следовательно с чем расчет прочности обшивки и шпангоутов прочного корпуса сводится, по существу, к определению усилий и моментов. В случае осесимметричной деформации круговой цилиндрической оболочки касательное усилие S и крутящий момент H равны нулю.

Направляемые нормальные усилия в направлении образующей (действующих в поперечных сечениях оболочки) T_1 и нормальные усилия, направленные по касательной к направляющей (действующих в продольных сечениях оболочки) T_2 , показано на рис. 32.

Усилия T , часто называют осевыми, а усилия T_r — кольцевыми. На том же рисунке показано направление изгибающих моментов в поперечных сечениях оболочки M , и в продольных сечениях M_s . При этом

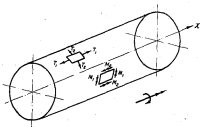


Рис. 33

упомянутые усилия и моменты являются усилиями и моментами, отнесенными к единице длины срединной поверхности.

3. Общий характер деформаций оболочки и шпангоутов

Прежде чем перейти к выводам расчетных формул для определения напряжений в оболочке, рассмотрим общий характер деформаций оболочки и шпангоутов. В первой главе учебника было показано, что круговая цилиндрическая оболочка постоянной толщины, не подкрепленная шпангоутами и нагруженная равномерно распределенной нагрузкой в поперечном направлении и по торцам, может рассматриваться как безмоментная оболочка. Такая оболочка по всей длине обжимается одинаково, так что нормальное перемещение w (которое в данном случае можно называть радиальным обжатием) постоянно во всех точках оболочки и равно

$$w = -\frac{Pr^2}{Eh} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right). \quad (3. IV)$$

При этом сжимающие усилия в поперечных сечениях оболочки (осевые усилия) будут

$$T_s = -\frac{Pr}{2}, \quad (4. IV)$$

а соответствующие им осевые сжимающие напряжения

$$\sigma_s = \frac{T_s}{t} = -\frac{Pr}{2h}. \quad (5. IV)$$

Сжимающие усилия в продольных сечениях оболочки (кольцевые усилия) определяются по формуле

$$T_1 = -pr, \quad (6.14)$$

а соответствующие им кольцевые напряжения равны

$$\sigma_{11} = \frac{T_1}{\delta} = -\frac{pr}{\delta}. \quad (7.14)$$

Характер деформации безмоментной крутовой цилиндрической оболочки показан на рис. 33:

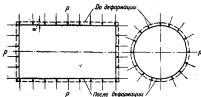


Рис. 33

С точки зрения прочности безреберная оболочка является весьма выгодной, так как отсутствие в ней изгибающих моментов дает возможность наиболее эффективно использовать материал оболочки. Однако спроектировать прочный корпус в виде безреберной оболочки не удастся, так как, во-первых, безреберная оболочка оказывается малоустойчивой и, во-вторых, вследствие неизбежного наличия начальной технологической погрешности, безреберная оболочка плохо сопротивляется изгибу, вызванному наличием погрешности. Для устранения этих недостатков обшивку прочного корпуса подкрепляют упругими ребрами или шпангоутами. Таким образом, шпангоуты прочного корпуса призваны выполнять две основные функции: 1) повышать устойчивость оболочки и 2) обеспечивать восприятие изгиба, вызванного начальной погрешностью.

Постановка упругих кольцевых шпангоутов существенно изменяет общий характер деформации оболочки. Хотя в силу симметрии нагрузки и конструкции оболочки относительно ее оси будет иметь место симметричная деформация, т. е. нормальное перемещение w , а также возникающие усилия по периметру кольца меняться не будут, тем не менее по длине оболочки как величина перемещений w , так и величина возникающих усилий и моментов будет меняться. Действительно, в местах установки шпангоутных колец нормальные перемещения обшивки будут минимальными, а в середине пролета между шпангоутами — максимальными.

Таким образом, кроме радиального перемещения вместе со шпангоутами, обшивка дополнительно прогибается между шпангоутами, в результате чего в ней появляются, кроме сжимающих усилий T_1 и T_2 , еще и изгибающие моменты M_1 и M_2 . Общий характер деформации

обшивки, подкрепленной шпангоутами, показан на рис. 34. Такая оболочка уже не является безмоментной, так что возникающие в ней

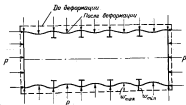


Рис. 34

напряжения будут складываться из напряжений от усилий (продольных напряжений), равномерно распределенных по толщине оболочки, и напряжений от моментов (изгибных напряжений), распределенных по толщине по линейному закону.

4. Дифференциальное уравнение равновесия круговой цилиндрической оболочки при осесимметричной деформации

Поскольку толщина обшивки по длине цилиндра не меняется, а шпангоуты, подкрепляющие обшивку, одинаковы и отстоят друг от друга на одинаковых расстояниях, то, очевидно, деформация всех пролетов обшивки между шпангоутами будет совершенно одинакова. Поэтому нет необходимости рассматривать задачу о деформации всей оболочки, а достаточно рассмотреть лишь деформации оболочки в пределах любого пролета по длине, ограниченного двумя соседними шпангоутами (рис. 35). Исходя из зависимостей получим из соответствующих уравнений общей теории оболочек. В главе I была получена система уравнений равновесия (104.1) для оболочек произвольной формы.

В качестве криволинейных координат поверхности примем x — расстояние по оси для любого поперечного сечения цилиндра от начала координат и φ — угол, определяющий положение любой точки на направляющей. Тогда параметры Ламе и главные радиусы кривизны будут равны: $A_1 = 1$; $A_2 = r$; $R_1 = \infty$; $R_2 = r$. Начало координат примем по середине длины шпанги, так что границами оболочки будут сечения $x = \pm \frac{l}{2}$.

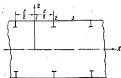


Рис. 35

Подставляя в систему (104.1) значения параметров Ламе и главных радиусов кривизны и учитывая, что при осесимметричной деформации

все усилия и моменты от φ не зависят и $S=0$; $H=0$, получим следующую систему уравнений равновесия осесимметричной деформации круговой цилиндрической оболочки:

$$\left. \begin{aligned} r \frac{dT_1}{dx} &= 0 \\ \frac{T_2}{r} - \frac{dM_2}{dx} &= -p \end{aligned} \right\} \quad (8. IV)$$

Из первого уравнения системы (8. IV) непосредственно получаем $\frac{dT_1}{dx} = 0$. Интегрируя по x , будем иметь

$$T_1 = \text{const.} \quad (9. IV)$$

Из равенства (9. IV) следует, что осевое усилие T_1 не меняется по длине оболочки, так что во всех точках оболочки усилие T_1 постоянно. Определим это усилие на одном из торцов оболочки. Равнодействующая внешнего давления, действующего на торцевые поверхности оболочки, равна $p\pi r^2$. Эта внешняя нагрузка уравнивается на краю усилием T_1 , равнодействующая которых равна $T_1 2\pi r$. Приравняв нулю сумму этих равнодействующих, получим

$$T_1 2\pi r + p\pi r^2 = 0,$$

откуда

$$T_1 = -\frac{pr}{2}. \quad (10. IV)$$

Усилие T_1 в рассматриваемом случае, так же как и в безмоментной оболочке, равно $-\frac{pr}{2}$.

Для определения усилия T_2 и изгибающих моментов M_1 и M_2 выразим все усилия и моменты через деформации срединной поверхности.

В главе I были получены следующие зависимости, связывающие усилия и моменты с компонентами деформации срединной поверхности оболочки:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_1 + \nu\epsilon_2) \\ T_2 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\nu\epsilon_1 + \epsilon_2) \\ M_1 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_1 + \nu\kappa_2) \\ M_2 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\nu\kappa_1 + \kappa_2) \end{aligned} \right\} \quad (11. IV)$$

Подставив в первое уравнение системы (11. IV) T_1 из ф-лы (10. IV), получим

$$-\frac{pr}{2} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_1 + \nu\epsilon_2),$$

откуда

$$\frac{Eh}{1-\nu^2} \epsilon_1 = -\frac{pr}{2} - \nu \frac{Eh}{1-\nu^2} \epsilon_2.$$

Подставляя $\frac{E_0}{1-\nu^2} \epsilon_1$ во второе уравнение системы (11.IV), приходим к выражению

$$T_2 = E \epsilon_2 - \rho \frac{E^2}{2}. \quad (12.IV)$$

Но относительное удлинение ϵ_2 для круговых цилиндрических оболочек связано с нормальным перемещением w (см. ф-лы (77.I)) зависимостью

$$\epsilon_2 = \frac{w}{r}.$$

Таким образом, усилие T_2 будет равно

$$T_2 = \frac{E^2}{r} w - \rho \frac{E^2}{2}. \quad (13.IV)$$

При осесимметричной деформации круговой цилиндрической оболочки изменение кривизны направляющей ϵ_1 равно нулю и, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{E^2}{12(1-\nu^2)} \epsilon_1 \\ M_2 &= \frac{E^2}{12(1-\nu^2)} \epsilon_2 \end{aligned} \right\}. \quad (14.IV)$$

Из формул (14.IV) следует:

$$M_2 = \nu M_1. \quad (15.IV)$$

Для круговых цилиндрических оболочек

$$\epsilon_1 = -\frac{d^2 w}{dx^2}, \quad (16.IV)$$

поэтому

$$M_1 = -\frac{E^2}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{d^2 w}{dx^2}. \quad (17.IV)$$

Подставляя во второе уравнение системы (8.IV) M_1 из ф-лы (17.IV) и T_2 из ф-лы (13.IV), приходим к уравнению

$$\frac{E^2}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{E^2}{r^2} w = -\rho \left(1 - \frac{\nu}{2}\right). \quad (18.IV)$$

Уравнение (18.IV) и есть дифференциальное уравнение осесимметричной деформации круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной упругими шпангоутами. К интегрированию этого уравнения при заданных граничных условиях и сводится решение поставленной задачи.

3. Интегрирование дифференциального уравнения равновесия

Введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} EI &= \frac{E^2}{12(1-\nu^2)} \\ k &= \frac{E^2}{r^2} \\ q &= -\rho \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) \end{aligned} \right\}, \quad (19.IV)$$

с помощью которых дифференциальному уравнению (18. IV) можно придать вид

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + kw = q. \quad (20. IV)$$

Уравнение (20. IV) есть известное дифференциальное уравнение изгиба призматический балки, лежащий на сплошном упругом основании постоянной жесткости и нагруженный равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q . Таким образом, дифференциальное уравнение осесимметричной деформации круговой цилиндрической оболочки идентично дифференциальному уравнению изгиба призматической балки на упругом основании, поэтому перейдем к отысканию общего интеграла дифференциального уравнения изгиба балки на упругом основании.

Общий интеграл дифференциального ур-ния (20. IV) состоит из частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения, т. е.

$$w = w_{\text{н.р.}} + w_{\text{о.р.}}$$

Частное решение, очевидно, будет равно

$$w_{\text{н.р.}} = \frac{q}{k}. \quad (21. IV)$$

Найдем общий интеграл однородного уравнения

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + kw = 0. \quad (22. IV)$$

Общий интеграл однородного ур-ния (22. IV) подробно изучен в первой части курса строительной механики корабля, поэтому нет необходимости повторять все выкладки по его определению. Приведем лишь окончательные формы общего интеграла этого однородного уравнения.

Первая форма

$$w_{\text{о.р.}} = e^{-\alpha x} (B_1 \cos \alpha x + B_2 \sin \alpha x) + e^{\alpha x} (B_3 \cos \alpha x + B_4 \sin \alpha x), \quad (23. IV)$$

где B_1, B_2, B_3, B_4 — произвольные постоянные интегрирования;

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}. \quad (24. IV)$$

Вторая форма

$$w_{\text{о.р.}} = C_1 \operatorname{ch} \alpha x \cos \alpha x + C_2 \operatorname{sh} \alpha x \cos \alpha x + C_3 \operatorname{ch} \alpha x \sin \alpha x + C_4 \operatorname{sh} \alpha x \sin \alpha x, \quad (25. IV)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные интегрирования.

Третья форма

$$w_{\text{о.р.}} = D_0 V_0(\alpha x) + D_1 V_1(\alpha x) + D_2 V_2(\alpha x) + D_3 V_3(\alpha x), \quad (26. IV)$$

где D_0, D_1, D_2, D_3 — произвольные постоянные интегрирования;
 V_0, V_1, V_2, V_3 — четыре линейно независимых частных интеграла уравнения (22.IV), которые именуются функциями Пузыревского. Эти функции имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} V_0(ax) &= \operatorname{ch} ax \cos ax \\ V_1(ax) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\operatorname{ch} ax \sin ax + \operatorname{sh} ax \cos ax) \\ V_2(ax) &= \operatorname{sh} ax \sin ax \\ V_3(ax) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\operatorname{ch} ax \sin ax - \operatorname{sh} ax \cos ax) \end{aligned} \right\} \quad (27.IV)$$

Задача об изгибе призматических однопролетных балок, опертых по концам на жесткие опоры и лежащих на сплошном упругом основании постоянной жесткости k , решена И. Г. Бубновым, при этом были рассмотрены четыре основных случая:

- 1) балка по концам свободно оперта;
- 2) балка по концам жестко заделана;
- 3) балка по концам упруго заделана;
- 4) балка по концам свободно оперта и загружена на одной из опор моментом.

П. Ф. Папкович дополнил и обобщил решения И. Г. Бубнова на случай опирания балки по концам на упругие опоры одинаковой жесткости.

Случай осесимметричной деформации крутовой цилиндрической оболочки, опертой на шпалеры, соответствует случаю изгиба призматической балки на упругом основании, жестко заделанной по концам на упругих опорах одинаковой жесткости. Поэтому ограничимся лишь рассмотрением этого последнего случая. Схема загрузки и конструкция балки показана на рис. 36.



Рис. 36

Поскольку нагрузка и конструкция балки симметричны относительно ее среднего сечения, то и упругая линия балки будет, очевидно, симметрична относительно этого сечения. Рассмотренное условие симметрии позволяет в общем интеграле (26.IV) положить D_1 и D_3 равными нулю, так как в противном случае прогиб балки не будет симметричным относительно сечения $x=0$. Следовательно, в рассматриваемом случае общий интеграл уравнения (20.IV) будет иметь вид

$$w = \frac{q}{k} + D_0 V_0(ax) + D_2 V_2(ax). \quad (28.IV)$$

Граничные условия на правом конце балки определяются равенствами

$$\left. \begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= 0 \\ AEI \frac{d^2 w}{dx^2} &= -Q \end{aligned} \right\} \quad \text{при } x = +\frac{l}{2} \quad (29.IV)$$

Подставив выражение (28.IV) в граничные условия (29.IV), получим два уравнения для определения произвольных постоянных интегрирования:

$$-V\sqrt{2}\alpha D_0 V_1(x) + V\sqrt{2}\alpha D_1 V_2(x) = 0,$$

$$-AEI2V\sqrt{2}\alpha^2 [D_0 V_1(x) + D_1 V_2(x)] = \frac{q}{k} + D_0 V_0(x) + D_1 V_2(x),$$

где

$$\alpha = \pm \frac{l}{2} = \sqrt[4]{\frac{KS}{4EI}}. \quad (30.IV)$$

Решив эту систему относительно D_0 и D_1 , получим:

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= -\frac{q}{k} \cdot \frac{V_1(x)}{[V_0(x)V_1(x) + V_2(x)V_3(x)]} \cdot \frac{1}{1+B_1} \\ D_1 &= -\frac{q}{k} \cdot \frac{V_2(x)}{[V_0(x)V_1(x) + V_2(x)V_3(x)]} \cdot \frac{1}{1+B_1} \\ B_1 &= 2V\sqrt{2}\alpha^2 AEI \frac{V_1'(x) + V_2'(x)}{[V_1(x)V_2(x) + V_2(x)V_3(x)]} \end{aligned} \right\} \quad (31.IV)$$

Подставив найденные значения D_0 и D_1 в выражение (28.IV), окончательно найдем следующее выражение для прогиба балки:

$$w = \frac{q}{k} \left[1 - \frac{V_1(x)V_3(x) + V_2(x)V_4(x)}{V_0(x)V_1(x) + V_2(x)V_3(x)} \cdot \frac{1}{1+B_1} \right]. \quad (32.IV)$$

Изгибающий момент в любом поперечном сечении балки определяется по выражению:

$$M_1 = EI \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{qEI}{k} 2\alpha^2 \frac{V_1(x)V_3(x) - V_2(x)V_4(x)}{V_0(x)V_1(x) + V_2(x)V_3(x)} \cdot \frac{1}{1+B_1}. \quad (33.IV)$$

Формулы (32.IV) и (33.IV) позволяют определить прогибы и изгибающие моменты в любом сечении по длине балки. Во всем дальнейшем ограничимся определением прогибов и изгибающих моментов в двух наиболее интересных сечениях по длине балки, а именно:

- 1) в сечении посредине пролета балки ($x=0$);
- 2) в сечении у опоры балки ($x=\frac{l}{2}$).

Б. Прогiby балки

В сечении посредине пролета ($x=0$)

$$w|_{x=0} = \frac{q}{k} \left[1 - \frac{V_1(x)}{V_0(x)V_1(x) + V_2(x)V_3(x)} \cdot \frac{1}{1+B_1} \right] \quad (34.IV)$$

или, если обозначить

$$\gamma_1(x) = \frac{V_1(x)}{V_0(x)V_1(x) + V_2(x)V_3(x)} = \frac{2(\operatorname{ch} x \sin x + \operatorname{sh} x \cos x)}{\operatorname{sh} 2x + \sin 2x}, \quad (35.IV)$$

получим

$$w|_{x=0} = \frac{q}{k} \left[1 - \frac{\gamma_1(x)}{1+B_1} \right]. \quad (36.IV)$$

Формулой (36.IV) и определяется прогиб балки посредине пролета. Отметим, что функция $\gamma_1(x)$ разработана И. Г. Бубновым и приводится в Приложении I.

В сечении у опоры $\left(x = \frac{l}{2}\right)$

$$\omega \Big|_{x=\frac{l}{2}} = \frac{q}{k} \left(1 - \frac{1}{1+B_1}\right) \quad (37. IV)$$

7. Изгибающие моменты

1) Сечение посредине пролета балки $(x=0)$

$$M_z \Big|_{x=0} = -\frac{q}{2a^2} \cdot \frac{V_2(a)}{V_2(a)V_1(a)+V_1(a)V_2(a)} \cdot \frac{1}{1+B_1} \quad (38. IV)$$

или, если обозначить

$$\chi_1(a) = \frac{3}{2a^2} \cdot \frac{V_2(a)}{V_2(a)V_1(a)+V_1(a)V_2(a)} = \frac{6}{a^2} \cdot \frac{\operatorname{ch} a \operatorname{sh} a - \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a}{\operatorname{sh} 2a + \operatorname{sh} 2a}, \quad (39. IV)$$

получим

$$M_z \Big|_{x=0} = -\frac{qB}{24} \cdot \frac{\chi_1(a)}{1+B_1}. \quad (40. IV)$$

Формулой (40. IV) и определяется изгибающий момент посредине пролета балки, причем функция $\chi_1(a)$ также была протабулирована И. Г. Бубновым и приводится в Приложении I.

2) Сечение у опоры $\left(x = \frac{l}{2}\right)$

$$M_z \Big|_{x=\frac{l}{2}} = \frac{q}{2a^2} \cdot \frac{V_1(a)V_2(a) - V_2(a)V_1(a)}{V_2(a)V_1(a)+V_1(a)V_2(a)} \cdot \frac{1}{1+B_1} \quad (41. IV)$$

или, если обозначить

$$\chi_2(a) = \frac{3}{2a^2} \cdot \frac{V_1(a)V_2(a) - V_2(a)V_1(a)}{V_2(a)V_1(a)+V_1(a)V_2(a)} = \frac{3}{2a^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} 2a - \operatorname{ch} 2a}{\operatorname{sh} 2a + \operatorname{ch} 2a}, \quad (42. IV)$$

получим

$$M_z \Big|_{x=\frac{l}{2}} = \frac{qB}{12} \cdot \frac{\chi_2(a)}{1+B_1}. \quad (43. IV)$$

По формуле (43. IV) и определяется изгибающий момент в опорном сечении балки, причем функция $\chi_2(a)$, протабулированная И. Г. Бубновым, приводится в Приложении I.

В заключение приведем выражение для B_1 к более простому виду. Обозначим

$$p_1(x) = \frac{1}{x\sqrt{2}} \cdot \frac{V_1^2(x) + V_2^2(x)}{V_2(x)V_1(x) + V_1(x)V_2(x)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\operatorname{ch} 2x - \operatorname{ch} 2x}{\operatorname{sh} 2x + \operatorname{sh} 2x}. \quad (44. IV)$$

Тогда функция B_1 может быть представлена в виде

$$B_1 = \frac{AM}{2} p_1(x). \quad (45. IV)$$

Функция $p_1(x)$ протабулирована П. Ф. Палковичем и также приводится в Приложении I.

Ниже приведены основные формулы, которые будут необходимы для использования в поставленной задаче:

$$\left. \begin{aligned} \varpi &= \frac{q}{k} \left[1 - \frac{\gamma_1(a)}{1+B_1} \right] & \varpi &= \frac{q}{k} \left(1 - \frac{1}{1+B_1} \right) \\ M_1 &= -\frac{qR^2}{34} \cdot \frac{\gamma_1(a)}{1+B_1} & M_1 &= -\frac{qR^2}{12} \cdot \frac{\gamma_1(a)}{1+B_1} \end{aligned} \right\} \quad (46, IV)$$

при $x = 0$ при $x = \frac{l}{2}$

Б. Расчетные формулы для определения усилий, моментов и напряжений в круглой цилиндрической оболочке

Дифференциальное уравнение осесимметричной деформации круглой цилиндрической оболочки подстановкой ф-л (19, IV) свелось к известному дифференциальному уравнению изгиба балки, лежащей на сплошном упругом основании. При этом для балки, концы которой жестко заделаны на упругих опорах с коэффициентом податливости A , были получены расчетные формулы, определяющие прогибы и изгибающие моменты в поперечных сечениях балки.

Обратной подстановкой в эти расчетные формулы вместо El , k и q их значений, согласно ф-лам (19, IV), мы получим прогиб оболочки ϖ и изгибающий момент в поперечных сечениях оболочки M_1 .

Возникает вопрос, является ли оболочка жестко заделанной на шпангоутах и как определить коэффициент податливости шпангоутов A , входящий во все расчетные формулы? Другими словами, возникает вопрос о граничных условиях для случая осесимметричной деформации круглой цилиндрической оболочки, подкрепленной упругими шпангоутами.

Из рассмотрения изгиба оболочки между шпангоутами (см. рис. 34) следует, что угол поворота сечений оболочки по шпангоутам ($\chi = \pm \frac{l}{2}$) будет равен нулю, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varpi}{dx} &= 0, \\ \text{при } x &= \pm \frac{l}{2} \end{aligned} \right\} \quad (47, IV)$$

Это и есть первое граничное условие, определяющее поворот опорного сечения оболочки. Второе граничное условие получим из рассмотрения обжатия шпангоута и оболочки в месте ее соединения со шпангоутом. Очевидно, прогиб оболочки в сечениях $x = \pm \frac{l}{2}$ будет равен обжатию, или радиальному перемещению, шпангоута.

Пусть $R_{\text{сж}}$ — интенсивность реактивного взаимодействия шпангоута с рассматриваемым участком оболочки (например, с участком 1—2, на рис. 35). Тогда шпангоут может рассматриваться как кольцо, нагруженное по всему своему периметру равномерно распределенной сжимающей нагрузкой интенсивности $R_{\text{сж}}$. Обжатие шпангоута равно

$$\varpi_{\text{сж}} = -\frac{R_{\text{сж}} R^2}{EF}.$$

В этом случае коэффициент податливости шпангоута, равный отношению прогиба шпангоута ($\varpi_{\text{сж}}$) к величине реакции шпангоута на обжатие ($-R_{\text{сж}}$), будет $A = \frac{1}{EF}$.

В действительности же рассматриваемый шпангоут испытывает реактивное усилие не только от рассмотренного участка обшивки 1—2, но и от смежного участка 2—3. Вследствие этого действительное обжатие шпангоута будет вдвое больше, т. е.

$$w_{\text{из}} = -2 \frac{R_{\text{ср}} r^2}{E \delta}, \quad (48. \text{IV})$$

а соответствующий этому обжатию коэффициент податливости

$$A = 2 \frac{r^2}{E \delta}. \quad (49. \text{IV})$$

Это значение коэффициента податливости и необходимо подставить в полученные расчетные формулы.

Прежде чем перейти к системе расчетных формул, определим выражения вспомогательных величин μ и B_1 для цилиндрической оболочки.

Параметр μ

Для балки на упругом основании параметр μ определяется по выражению (30. IV). Подставив в это выражение значения k и EI согласно ф-лам (19. IV), получим выражение параметра μ для оболочки

$$\mu = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)H}{16r^3\delta}} = \frac{1}{\sqrt{R}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}. \quad (50. \text{IV})$$

При значении $\nu = 0,3$ параметр μ будет

$$\mu = 0,6425 \frac{1}{\sqrt{R}}.$$

Коэффициент B_1

Коэффициент B_1 определяется по ф-ле (45. IV). После подстановки в ф-лу (45. IV) значений A и k получим

$$B_1 = \frac{R}{\delta} r_1(\mu). \quad (51. \text{IV})$$

Воспользовавшись ф-лами (46. IV), получим прогибы оболочки w и изгибающие моменты M , как посредние пролета между шпангоутами, так и в опорном сечении у шпангоута.

Подставив в ф-лы (46. IV) значения q и k согласно ф-лам (19. IV) и значение B_1 согласно ф-ле (51. IV), получим следующее выражение для прогибов и изгибающих моментов:

В сечении посредние пролета ($x=0$):

а) прогиб оболочки

$$w|_{x=0} = -\frac{Rr^2}{EI} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) \left[1 - \frac{\gamma_1(x)}{1 + \frac{R}{\delta} r_1(x)}\right], \quad (52. \text{IV})$$

б) изгибающий момент

$$M|_{x=0} = +\frac{R^2}{2H} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) \frac{\gamma_1(x)}{1 + \frac{R}{\delta} r_1(x)}. \quad (53. \text{IV})$$

В сечении у шпангоута $(x = \pm \frac{r}{2})$:

а) прогиб оболочки

$$\varpi \Big|_{x=\pm \frac{r}{2}} = -\frac{p r^2}{2E} \left(1 - \frac{r}{2}\right) \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{r}{p} \nu_1(u)}\right], \quad (54. IV)$$

б) изгибающий момент

$$M_1 \Big|_{x=\pm \frac{r}{2}} = -\frac{p r^2}{12} \left(1 - \frac{r}{2}\right) \frac{\gamma_1(u)}{1 + \frac{r}{p} \nu_1(u)}, \quad (55. IV)$$

Зная прогиб оболочки ϖ и изгибающий момент в ее поперечных сечениях M_1 , можно по ф-лам (10. IV), (13. IV) и (15. IV) определить остальные усилия и моменты в оболочке.

Ограничимся рассмотрением всех усилий и моментов в оболочке по середине пролета между шпангоутами и на опоре (у шпангоута).

Сечение по середине пролета ($x=0$)

Осевое усилие T_1 (нормальное усилие в поперечных сечениях оболочки) определяется по ф-ле (10. IV). Соответствующее этому усилию осевое цепное напряжение σ_1^c равно

$$\sigma_1^c = \frac{T_1}{s} = -\frac{p r}{2E}. \quad (56. IV)$$

Кольцевое усилие T_2 (нормальное усилие в продольных сечениях оболочки) определяется по ф-ле (13. IV), и соответствующее ему кольцевое цепное напряжение σ_2^c будет

$$\sigma_2^c = \frac{T_2}{s} = \frac{E}{r} \varpi - p \frac{p r}{2E}. \quad (57. IV)$$

Подставив в эту формулу значение ϖ из ф-лы (52. IV), окончательно получим

$$\sigma_2^c \Big|_{x=0} = \frac{T_2}{s} = -\frac{p r}{4} \left[1 - \left(1 - \frac{r}{2}\right) \frac{\gamma_1(u)}{1 + \frac{r}{p} \nu_1(u)}\right]. \quad (58. IV)$$

Отметим, что напряжения σ_1^c и σ_2^c являются сжимающими.

Изгибающий момент M_1 (изгибающий момент в поперечных сечениях оболочки) определяется по ф-ле (53. IV). Соответствующие этому моменту изгибные напряжения распределены по толщине оболочки по линейному закону, при этом наибольшие изгибные напряжения появляются в крайних волокнах и равны

$$\sigma_1^{из} \Big|_{x=0} = \pm \frac{4 M_1}{s^2} = \pm \frac{p r^2}{4E} \left(1 - \frac{r}{2}\right) \frac{\gamma_1(u)}{1 + \frac{r}{p} \nu_1(u)}. \quad (59. IV)$$

В формуле (59. IV), как и в последующих формулах, верхний знак относится к внутренним волокнам, а нижний — к наружным.

Изгибающий момент M_2 (изгибающий момент в продольных сечениях оболочки) определяется по ф-ле (15. IV).

Подставляя в нее значение M_1 из ф-лы (53. IV), окончательно получим

$$M_1|_{x=0} = +P \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \frac{P_1^2}{24} \cdot \frac{\gamma_1(u)}{1 + \frac{\mu}{P} P_1(u)}, \quad (60. IV)$$

поэтому изгибные напряжения в продольных сечениях оболочки, вызванные изгибающим моментом M_1 , будут равны

$$\sigma_1^{\text{изг}}|_{x=0} = \pm \frac{\delta M_1}{\delta} = \pm \frac{P_1^2}{48} P \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \frac{\gamma_1(u)}{1 + \frac{\mu}{P} P_1(u)}. \quad (61. IV)$$

В заключение перейдем к определению суммарных нормальных напряжений в поперечном и продольном сечениях оболочки.

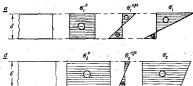


Рис. 37

Очевидно, суммарные нормальные напряжения будут определяться алгебраическим суммированием осевых и изгибных напряжений. Суммарные нормальные напряжения в поперечных сечениях оболочки σ_1 будут равны

$$\sigma_1|_{x=0} = \sigma_1^p + \sigma_1^{\text{изг}} = -\frac{P^2}{24} \pm \frac{P_1^2}{48} P \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \frac{\gamma_1(u)}{1 + \frac{\mu}{P} P_1(u)}.$$

Приведем эту формулу к более простому виду, для чего выделим общий множитель $-\frac{P^2}{24}$, определяющий осевые напряжения в безмоментной безреберной оболочке,

$$\sigma_1|_{x=0} = -\frac{P^2}{24} \left[1 \mp \frac{P_1^2}{24} \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \frac{\gamma_1(u)}{1 + \frac{\mu}{P} P_1(u)} \right]$$

или

$$\sigma_1|_{x=0} = -\frac{P^2}{24} \left[1 \mp \frac{2 \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \cdot \frac{\frac{\mu^2}{2} P_1(u)}{1 + \frac{\mu}{P} P_1(u)} \right]. \quad (62. IV)$$

По формуле (62. IV) определяются суммарные нормальные напряжения в поперечном сечении оболочки посредине пролета между шпангоутами.

Эпюры нормальных напряжений по толщине оболочки показана на рис. 37, а. Из рисунка видно, что в наружном волокне оболочки растяжные и изгибные напряжения имеют один и тот же знак. Следовательно, наибольшие суммарные напряжения в поперечном сечении оболочки посредине пролета между шпангоутами возникают в наружных волокнах и равны

$$\sigma_{\perp r=0} = -\frac{E\epsilon}{2} \left[1 + \frac{2 \left(1 - \frac{\nu}{2} \right)}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{\frac{1}{R} \chi_1(x)}{1 + \frac{1}{R} \chi_1(x)} \right]. \quad (63. IV)$$

Формулой (63. IV) и определяются искомые суммарные осевые напряжения в поперечном сечении оболочки посредине пролета между шпангоутами. Суммарные нормальные напряжения в продольных сечениях оболочки $\sigma_{\parallel}$ при $x = 0$ будут равны

$$\begin{aligned} \sigma_{\parallel r=0} = \sigma_{\parallel}^i + \sigma_{\parallel}^{ext} = & -\frac{E\epsilon}{4} \left[1 - \left(1 - \frac{\nu}{2} \right) \frac{\frac{1}{R} \chi_1(x)}{1 + \frac{1}{R} \chi_1(x)} \right] \pm \\ & \pm \frac{E\epsilon}{2\sqrt{3}} \nu \left(1 - \frac{\nu}{2} \right) \frac{\frac{1}{R} \chi_1(x)}{1 + \frac{1}{R} \chi_1(x)}. \end{aligned}$$

Приведем эту формулу к более простому виду. Выделим общий множитель, определяющий кольцевые напряжения в безмоментной безреберной оболочке. В результате получим

$$\sigma_{\parallel r=0} = -\frac{E\epsilon}{4} \left[1 - \left(1 - \frac{\nu}{2} \right) \frac{\chi_1(x)}{1 + \frac{1}{R} \chi_1(x)} \mp \frac{\nu \left(1 - \frac{\nu}{2} \right)}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{\frac{1}{R} \chi_1(x)}{1 + \frac{1}{R} \chi_1(x)} \right]. \quad (64. IV)$$

Эпюры нормальных кольцевых напряжений показаны на рис. 37, б.

Так как в наружных волокнах оболочки изгибные напряжения $\sigma_{\perp}^{ext}$ являются сжимающими, то, очевидно, суммарные нормальные кольцевые напряжения $\sigma_{\parallel}$ в наружных волокнах будут по абсолютной величине больше напряжений во внутренних волокнах оболочки.

Определением суммарных нормальных напряжений $\sigma_{\parallel}$ и $\sigma_{\perp}$ исчерпываются расчеты прочности оболочки в сечении посредине пролета между шпангоутами.

Теперь перейдем к определению напряжений в оболочке в сечении у шпангоута.

Сечение у шпангоута $x = \pm \frac{l}{2}$

Осевое усилие $T_{\parallel}$ определится по ф-ле (10. IV)

$$T_{\parallel} \Big|_{x=\pm \frac{l}{2}} = -\frac{E\epsilon}{2}. \quad (65. IV)$$

Осевое деформационное напряжение $\sigma_{\parallel}^d$, соответствующее этому усилию, будет

$$\sigma_{\parallel}^d \Big|_{x=\pm \frac{l}{2}} = \frac{T_{\parallel}}{\epsilon} = -\frac{E\epsilon}{2}. \quad (66. IV)$$

Таким образом, осевое усилие T_z и соответствующее ему цепное напряжение σ_z^c для сечения оболочки у шпангоута $\left(x = \pm \frac{l}{2}\right)$ равны осевому усилию T_z и напряжению посередине пролета между шпангоутами ($x = 0$), что является следствием постоянства по длине оболочки осевого усилия T_z .

Кольцевое усилие T_θ определяется по ф-ле (13. IV). Подставляя в эту формулу значение w из ф-лы (54. IV), получим

$$T_\theta \Big|_{x=\pm \frac{l}{2}} = -pR \left[1 - \left(1 - \frac{p}{2} \right) \frac{1}{1 + \frac{R}{p} \nu_1(x)} \right] \quad (57. IV)$$

Соответствующие этому усилию цепные кольцевые напряжения будут равны

$$\sigma_\theta^c \Big|_{x=\pm \frac{l}{2}} = \frac{T_\theta}{R} = -\frac{pR}{R} \left[1 - \left(1 - \frac{p}{2} \right) \frac{1}{1 + \frac{R}{p} \nu_1(x)} \right] \quad (58. IV)$$

Изгибающий момент M_z определяется по ф-ле (35. IV). Соответствующее этому моменту изгибные напряжения $\sigma_z^{из}$ распре-

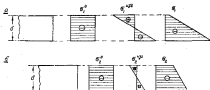


Рис. 38

делены по толщине оболочки по линейному закону, при этом наибольшие изгибные напряжения появляются в крайних волокнах и равны

$$\sigma_z^{из} \Big|_{x=\pm \frac{l}{2}} = \pm \frac{6M_z}{d^2} = \mp \frac{pR^2}{2d^2} \left(1 - \frac{p}{2} \right) \frac{2\nu_2(x)}{1 + \frac{R}{p} \nu_1(x)} \quad (59. IV)$$

Изгибающий момент M_θ определяется по ф-ле (15. IV). Поэтому изгибные кольцевые напряжения $\sigma_\theta^{из}$ будут равны

$$\sigma_\theta^{из} = \pm \frac{6M_\theta}{d} = \mp \frac{pR^2}{2d} p \left(1 - \frac{p}{2} \right) \frac{2\nu_2(x)}{1 + \frac{R}{p} \nu_1(x)} \quad (60. IV)$$

Теперь перейдем к определению суммарных осевых и кольцевых напряжений в оболочке у шпангоута $\left(x = \pm \frac{l}{2}\right)$. Суммарные нормаль-

ные напряжений σ_1 в поперечном сечении оболочки (при $x = \pm \frac{l}{2}$) равны

$$\sigma_1 \Big|_{x = \pm \frac{l}{2}} = \sigma_1^0 + \sigma_1^{\text{пр}} = -\frac{E\epsilon}{2} \mp \frac{E\mu^2}{2\sqrt{3}} \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \frac{\gamma_1(a)}{1 + \frac{\mu}{\sqrt{3}} \mu_1(a)}$$

или

$$\sigma_1 \Big|_{x = \pm \frac{l}{2}} = -\frac{E\epsilon}{2} \left[1 \pm \frac{2 \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)}{\sqrt{3}(1 - \mu^2)} \cdot \frac{\mu^2 \gamma_1(a)}{1 + \frac{\mu}{\sqrt{3}} \mu_1(a)} \right]. \quad (71. IV)$$

Эпюры нормальных осевых напряжений по толщине оболочки приведены на рис. 38, а. Из рисунка видно, что во внутренних волокнах оболочки шпильные и изгибные напряжения имеют один и тот же знак. Следовательно, в сечении у шпильгоута наибольшие по абсолютной величине суммарные напряжения возникают во внутренних волокнах. Суммарные нормальные напряжения σ_1 в продольных сечениях оболочки у шпильгоута (при $x = \pm \frac{l}{2}$) будут равны

$$\begin{aligned} \sigma_1 \Big|_{x = \pm \frac{l}{2}} = \sigma_1^0 + \sigma_1^{\text{пр}} = -\frac{E\epsilon}{2} & \left[1 - \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \frac{1}{1 + \frac{\mu}{\sqrt{3}} \mu_1(a)} \right] \mp \\ & \mp \frac{E\mu^2}{2\sqrt{3}} \mp \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \frac{\gamma_1(a)}{1 + \frac{\mu}{\sqrt{3}} \mu_1(a)}, \end{aligned}$$

или

$$\sigma_1 \Big|_{x = \pm \frac{l}{2}} = -\frac{E\epsilon}{2} \left[1 - \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \frac{1}{1 + \frac{\mu}{\sqrt{3}} \mu_1(a)} \pm \frac{2\mu \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)}{\sqrt{3}(1 - \mu^2)} \cdot \frac{\mu^2 \gamma_1(a)}{1 + \frac{\mu}{\sqrt{3}} \mu_1(a)} \right]. \quad (72. IV)$$

Эпюры нормальных напряжений по толщине оболочки приведены на рис. 38, б.

2. Сводка основных формул

Ниже приводятся окончательные формулы для определения суммарных нормальных напряжений в сечении посередине пролета между шпильгоутами ($x=0$) и в сечении у шпильгоута ($x = \pm \frac{l}{2}$).

А. Сечение посередине пролета ($x=0$)

Осевое напряжение σ_1 определяется по формуле

$$\sigma_1|_{x=0} = -\frac{E\epsilon}{2} \left[1 \mp \frac{2 \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)}{\sqrt{3}(1 - \mu^2)} \cdot \frac{\mu^2 \gamma_1(a)}{1 + \frac{\mu}{\sqrt{3}} \mu_1(a)} \right],$$

Кольцевое напряжение σ_2 равно

$$\sigma_2|_{x=0} = -\frac{E\epsilon}{2} \left[1 - \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \frac{\mu_1(a)}{1 + \frac{\mu}{\sqrt{3}} \mu_1(a)} \mp \frac{\mu \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)}{\sqrt{3}(1 - \mu^2)} \cdot \frac{\mu^2 \gamma_1(a)}{1 + \frac{\mu}{\sqrt{3}} \mu_1(a)} \right].$$

Осевое напряжение σ_z определяется по формуле

$$\sigma_z \Big|_{r=\pm \frac{1}{2}} = - \frac{E\epsilon}{2\delta} \left[1 \pm \frac{4 \left(1 - \frac{\kappa}{2} \right)}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{\nu^2 \gamma_2(\alpha)}{1 + \frac{R}{\rho} \nu_1(\alpha)} \right].$$

Кольцевое напряжение σ_r равно

$$\sigma_r \Big|_{r=\pm \frac{1}{2}} = - \frac{E\epsilon}{\delta} \left[1 - \left(1 - \frac{\kappa}{2} \right) \frac{1}{1 + \frac{R}{\rho} \nu_1(\alpha)} \pm \frac{2\kappa \left(1 - \frac{\kappa}{2} \right)}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{\nu^2 \gamma_2(\alpha)}{1 + \frac{R}{\rho} \nu_1(\alpha)} \right].$$

В дальнейшем будем интересоваться только наибольшими значениями суммарных нормальных напряжений. Очевидно, наибольшие суммарные напряжения возникают в тех волокнах, где касные и изгибные напряжения имеют один и тот же знак, т. е. являются сжимающими. Поэтому в сечениях посредине пролета между шпангоутами наибольшие суммарные напряжения возникают в наружных волокнах, а в сечениях у шпангоутов, наоборот, во внутренних волокнах.

Анализ показывает, что осевые суммарные нормальные напряжения σ_z в сечении у шпангоута всегда больше таковых в сечении посредине пролета между шпангоутами. Поэтому в практических расчетах целесообразно определять осевые напряжения σ_z только в сечении у шпангоута и во внутренних волокнах по формуле

$$\sigma_z \Big|_{r=\pm \frac{1}{2}} = - \frac{E\epsilon}{2\delta} \left[1 + \frac{4 \left(1 - \frac{\kappa}{2} \right)}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{\nu^2 \gamma_2(\alpha)}{1 + \frac{R}{\rho} \nu_1(\alpha)} \right]. \quad (73. IV)$$

Наибольшие суммарные кольцевые напряжения возникают в сечении посредине пролета между шпангоутами и притом в наружных волокнах. Эти напряжения определяются по формуле

$$\sigma_r \Big|_{r=0} = - \frac{E\epsilon}{\delta} \left[1 - \left(1 - \frac{\kappa}{2} \right) \frac{\nu_1(\alpha)}{1 + \frac{R}{\rho} \nu_1(\alpha)} + \frac{\kappa \left(1 - \frac{\kappa}{2} \right)}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{\nu^2 \gamma_2(\alpha)}{1 + \frac{R}{\rho} \nu_1(\alpha)} \right]. \quad (74. IV)$$

Для стали, принимая $\nu = 0,3$, получим

$$\sigma_z \Big|_{r=\pm \frac{1}{2}} = - \frac{E\epsilon}{2\delta} \left[1 + 2,06 \frac{\nu^2 \gamma_2(\alpha)}{1 + \frac{R}{\rho} \nu_1(\alpha)} \right].$$

$$\sigma_r \Big|_{r=0} = - \frac{E\epsilon}{\delta} \left[1 - 0,85 \frac{\nu_1(\alpha)}{1 + \frac{R}{\rho} \nu_1(\alpha)} + 0,154 \frac{\nu^2 \gamma_2(\alpha)}{1 + \frac{R}{\rho} \nu_1(\alpha)} \right].$$

Введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{R}{r} \\ 1 + 2,06 \frac{\nu_1^2 \beta_1(\alpha)}{1 + \beta_1(\alpha)} &= A_1 \\ 1 - 0,88 \frac{\nu_1(\alpha)}{1 + \beta_1(\alpha)} + 0,154 \frac{\nu_1^2 \beta_1(\alpha)}{1 + \beta_1(\alpha)} &= A_2 \end{aligned} \right\} \quad (75, IV)$$

Окончательно суммарные напряжения в оболочке будут равны

$$\sigma_1 \Big|_{r=\pm \frac{r}{2}} = -A_1 \frac{E \sigma}{2G}, \quad (76, IV)$$

$$\sigma_2 \Big|_{r=\pm \frac{r}{2}} = -A_2 \frac{E \sigma}{G}. \quad (77, IV)$$

Коэффициенты A_1 и A_2 имеют простой физический смысл: они определяют то число, на которое необходимо умножить напряжение в безмоментной безреберной оболочке, чтобы определить наибольшие суммарные напряжения в оболочке, подкрепленной шпангоутами.

10. Определение напряжений в шпангоутах

До сих пор мы определяли осевые и кольцевые напряжения в оболочке. Перейдем теперь к определению напряжений в шпангоутах. Шпангоуты представляют собой замкнутые круговые кольца, нагруженные равномерно распределенными реактивными усилиями от обжатия оболочки. Естественно, что в шпангоутных кольцах будут возникать только кольцевые сжимающие напряжения $\sigma_{\text{шп}}$.

Прогнбы или радиальные перемещения шпангоутов будут, очевидно, равны прогибам оболочки в месте притыкания к шпангоутам, поскольку шпангоуты и обшивка соединены между собой при помощи клепки или сварки. Следовательно,

$$w_{\text{шп}} = w \Big|_{r=\pm \frac{r}{2}}.$$

Относительное удлинение цилиндрической оболочки в кольцевом направлении определяется по выражению $\epsilon_2 = \frac{w}{r}$. Таким образом, относительное удлинение шпангоутов будет

$$\epsilon_{\text{шп}} = \frac{w_{\text{шп}}}{r} = \frac{w}{r} \Big|_{r=\pm \frac{r}{2}}.$$

Нормальные напряжения, возникающие в шпангоуте, согласно закону Гука будут равны

$$\sigma_{\text{шп}} = E \epsilon_{\text{шп}} = E \frac{w}{r} \Big|_{r=\pm \frac{r}{2}}. \quad (78, IV)$$

Подставив в выражение (78.IV) значение $w|_{r=\pm \frac{1}{2}}$, окончательно получим

$$\sigma_{\text{сж}} = - \frac{P^*}{b} \left(1 - \frac{\beta}{2} \right) \left[1 - \frac{1}{1 + \beta \alpha_1(\alpha)} \right], \quad (79.IV)$$

где β определяется по ф-ле (75.IV).

Таким образом, напряжения в шпангоутах определяются по ф-ле (79.IV). Видно, что эти напряжения являются сжимающими.

Для стали, принимая $\beta = 0,85$, получим

$$\sigma_{\text{сж}} = - 0,85 \frac{P^*}{b} \left[1 - \frac{1}{1 + \beta \alpha_1(\alpha)} \right].$$

Обозначив

$$k = 0,85 \left[1 - \frac{1}{1 + \beta \alpha_1(\alpha)} \right], \quad (80.IV)$$

окончательно будем иметь

$$\sigma_{\text{сж}} = - k \frac{P^*}{b}, \quad (81.IV)$$

II. Практическая схема расчета

Исходные данные: r , δ , l , P и β .

Определяются:

1. Параметр n : $n = 0,6425 \frac{1}{\sqrt{r\delta}}$.
2. По таблицам Приложения I для данного параметра n функции Бубнова $\varphi_1(\alpha)$, $\chi_1(\alpha)$, $\chi_2(\alpha)$, а также функция Папковича $\sigma_1(\alpha)$.
3. Параметр β : $\beta = \frac{n}{r}$.
4. Коэффициенты A_1 , A_2 и k :

$$A_1 = 1 + 2,06 \frac{n^2 \chi_2(\alpha)}{1 + \beta \alpha_1(\alpha)},$$

$$A_2 = 1 - 0,85 \frac{\varphi_1(\alpha)}{1 + \beta \alpha_1(\alpha)} + 0,154 \frac{n^2 \chi_2(\alpha)}{1 + \beta \alpha_1(\alpha)},$$

$$k = 0,85 \left[1 - \frac{1}{1 + \beta \alpha_1(\alpha)} \right].$$

5. Наибольшие суммарные напряжения в оболочке:
осевое напряжение σ_x в сечениях у шпангоута

$$\sigma_x|_{r=\pm \frac{1}{2}} = - A_1 \frac{P^*}{2b},$$

кольцевое напряжение σ_θ посередине пролета между шпангоутами

$$\sigma_\theta|_{x=0} = - A_2 \frac{P^*}{b}.$$

6. Сжимающие напряжения в шпангоутах

$$\sigma_{\text{сж}} = - k \frac{P^*}{b}.$$

Полученное в предыдущем параграфе решение задачи о напряжениях в обшивке прочного корпуса подводных лодок целиком основано на результатах линейной теории оболочек, и применительно к этой теории такое решение является вполне строгим. П. Ф. Папковичем было предложено более точное решение этой же задачи, основанное на учете одного из факторов нелинейной теории оболочек.*

Предварительно рассмотрим факторы, которые отличают нелинейную теорию оболочек от линейной. В общем случае нелинейность задачи можно разделить на физическую и геометрическую.

Физическая нелинейность задачи состоит в том, что в рассматриваемой области напряжений и деформаций материал не подчиняется закону Гука, так что зависимость между напряжениями и соответствующими им деформациями перестает быть линейной. Особенно ярко проявляется физическая нелинейность при появлении пластических деформаций, хотя в общем случае физическая нелинейность имеет место и до появления пластических деформаций для материалов, у которых зависимость напряжений от деформаций в упругой области не является линейной.

В данном параграфе факторы физической нелинейности задачи рассматриваться не будут.

Геометрическая нелинейность включает в себя учет трех следующих факторов:

1. Учет произведений перемещений и их производных в выражениях для компонентов деформации срединной поверхности оболочки.
2. Учет удлинений и сдвигов элемента срединной поверхности при написании уравнений равновесия элемента оболочки.
3. Учет углов поворота при составлении уравнений равновесия оболочки.

В рассматриваемой задаче перемещения u , v и w столь малы, что произведениями перемещений и их производных можно пренебречь в сравнении с их первыми степенями. Поэтому первый фактор геометрической нелинейности учитываться не будет. Что касается второго фактора геометрической нелинейности (учета удлинений и сдвигов элемента при написании уравнений равновесия), то необходимо отметить, что для большинства материалов относительное удлинение в упругой области не превышает 0,01, а для сталей оно превышает 0,005; упругий сдвиг примерно в два раза меньше относительного удлинения. Поэтому при составлении уравнений равновесия изменением размеров элемента при деформации можно также пренебречь.

Остается третий фактор — учет углов поворота при составлении уравнений равновесия оболочки. Совершенно очевидно, что при взаимодействии на оболочку внешней нагрузки равновесие между внешней нагрузкой и возникающими в оболочке усилиями и моментами наступает не в начальном (до приложения нагрузки), а в деформированном положении оболочки. Поэтому при составлении уравнений равновесия необходимо при проектировании сил учитывать тот поворот, который получает элемент срединной поверхности при деформации. В линейной те-

* П. Ф. Папкович, О напряжениях в цилиндрической оболочке прочного корпуса подводных лодок, Доклады НТК УВМС, Вып. 1, 1938 (то же же в книге П. Ф. Папковича „Строительная механика корабля“, ч. 1, т. II. Морской транспорт, 1943).

теории оболочек проектирование всех сил производится на начальное положение элемента, а не на деформированное. Такое допущение линейной теории оболочек является вполне оправданным, так как в большинстве практических задач учет нелинейности не приводит к сколь угодно значительной погрешности, а результат получается значительно проще и быстрее. В рассматриваемом ниже решении Папковича при составлении уравнения равновесия элемента деформированной срединной поверхности производится учет проекции осевых усилий для деформированной оболочки на нормаль к срединной поверхности до деформации.

Необходимо отметить, что учет проекции усилий на нормаль к срединной поверхности был впервые выполнен С. П. Тимошенко, который и получал дифференциальное уравнение осесимметричной деформации круговой цилиндрической оболочки для данного случая. П. Ф. Папкович проинтегрировал это уравнение для случая деформации оболочки, подкрепленной упругими ребрами жесткости, протабулировал входящие в решение функции и составил достаточно простую расчетную схему.

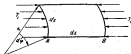


Рис. 39

Потому излагаемое ниже решение будем называть точным решением Папковича. Отличие точного решения П. Ф. Папковича от приближенного, изложенного в § 31, состоит в учете проекции усилия T_1 на нормаль к срединной поверхности оболочки до деформации (на ось Z). Поэтому нет необходимости рассматривать всю задачу сначала. Достаточно получить дополнительный член от усилия T_1 , который необходимо учесть во втором уравнении системы (8. IV'), или, в окончательном виде, в уравн. (18. IV').

Рассмотрим элемент срединной поверхности длиной dx и шириной dz , причем $dz = r d\varphi$, где $d\varphi$ — малый центральный угол, ограничивающий рассматриваемый элемент вдоль направляющей (рис. 39).

Если бы оболочка не изгибалась между шпангоутами, то усилие T_1 было бы направлено вдоль оси X , и составляющей на ось Z (нормаль к срединной поверхности до деформации) это усилие не давало бы. Однако при изгибе оболочки усилие T_1 уже не будет направлено вдоль оси X и поэтому будет давать нормальную составляющую, которую и следует учесть.

Рассмотрим переднюю грань AB элемента до и после деформации (рис. 40). Положение передней грани элемента до деформации оболочки показано пунктиром, а после деформации — сплошной линией.

Угол поворота дуга AB в точке A , очевидно, будет равен $\frac{dw}{dx}$, а угол поворота в точке B , отстоящей от точки A на расстоянии dx , будет равен

$$\frac{dw}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\frac{dw}{dx} \right) dx = \frac{dw}{dx} + \frac{d^2w}{dx^2} dx.$$

Нормальная составляющая усилия T_1 (проекции на ось Z) будет равна произведению усилия на синус угла, образованного усилием с осью X . Однако по малости этого угла его синус может быть приравнен самому углу.

Таким образом, проекция усилий T_1 на ось Z будет

$$+ T_1 \frac{dw}{dx} - T_1 \left(\frac{dx}{dx} + \frac{dw}{dx} \frac{dx}{dx} \right) = - T_1 \frac{dw}{dx} dx.$$

Но по определению усилие T_1 есть усилие, приходящееся на единицу длины. Полное усилие, приходящееся на грань элемента dx , будет $T_1 dx = T_1 r d\varphi$. Следовательно, полная нормальная составляющая усилия T_1 , приходящаяся на рассматриваемый элемент, равна

$$- T_1 \frac{dw}{dx} dx r d\varphi.$$

Отнеся это усилие к площади элемента $r dx d\varphi$, мы и получим искомый дополнительный член, который необходимо учесть в уравнении (18.IV), т. е. член $- T_1 \frac{dw}{dx}$. Но усилие T_1 (см. Ф-лу (10.IV)) равно $T_1 = - \frac{Er}{2}$. Тогда дополнительный член будет равен $\frac{Er}{2} \cdot \frac{dw}{dx}$.

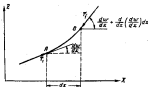


Рис. 40

В итоге дифференциальное уравнение осесимметричной деформации круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной упругими кольцевыми ребрами, выразится уравнением

$$\frac{Er}{12(1-\mu^2)} \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{Er}{2} \cdot \frac{dw}{dx} + \frac{Er}{r^2} w = -p \left(1 - \frac{r}{2} \right). \quad (82.IV)$$

К интегрированию этого уравнения при принятых граничных условиях и сводится решение поставленной задачи.

Решение ур-ния (82.IV) будет состоять из решения однородного уравнения (без правой части) и частного решения, т. е.

$$w = w_{од} + w_{чп}.$$

Поскольку в правой части ур-ния (82.IV) стоит постоянная величина, то частное решение будет тем же, что и в ур-нии (18.IV), т. е.

$$w_{чп} = - \frac{Er^2}{Eh} \left(1 - \frac{r}{2} \right). \quad (83.IV)$$

Перейдем к определению решения однородного уравнения

$$\frac{Er}{12(1-\mu^2)} \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{Er}{2} \cdot \frac{dw}{dx} + \frac{Er}{r^2} w = 0. \quad (84.IV)$$

Разделим все члены уравнения на цилиндрическую жесткость оболочки $\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$. Получим

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{pr}{2} \cdot \frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3} \cdot \frac{dw}{dx} + \frac{E}{h^3} \cdot \frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3} w = 0. \quad (85. IV)$$

Введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} 2m &= \frac{pr}{Eh^3} 12(1-\mu^2) \\ n^2 &= \frac{12(1-\mu^2)}{r^2 h^3} \end{aligned} \right\}. \quad (86. IV)$$

В этом случае уравнение (85. IV) примет вид

$$\frac{d^2w}{dx^2} + 2m \frac{dw}{dx} + n^2 w = 0. \quad (87. IV)$$

Характеристическое уравнение дифференциального уравнения (87. IV) $x^2 + 2mx^2 + n^2 = 0$ имеет следующие корни:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= +\sqrt{-m} + \sqrt{m^2 - n^2} \\ z_2 &= +\sqrt{-m} - \sqrt{m^2 - n^2} \\ z_3 &= -\sqrt{-m} + \sqrt{m^2 - n^2} \\ z_4 &= -\sqrt{-m} - \sqrt{m^2 - n^2} \end{aligned} \right\}. \quad (88. IV)$$

При практических расчетах прочности корпусов подводных лодок, как правило, $m^2 < n^2$, поэтому все корни характеристического уравнения являются комплексными. Известно, что в общем виде всякое комплексное число может быть представлено выражением

$$z = \alpha + i\beta. \quad (89. IV)$$

Сравнив корни характеристического уравнения, определенные по формулам (89. IV) и (88. IV), будем иметь

$$\begin{aligned} \alpha^2 - \beta^2 &= -m, \\ \alpha^2 \beta^2 &= \frac{n^2 - m^2}{4}, \end{aligned}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\frac{1}{2}(n-m)} = \frac{\sqrt{3(1-\mu^2)}}{\sqrt{r^2 h^3}} \sqrt{1-\tau} \\ \beta &= \sqrt{\frac{1}{2}(n+m)} = \frac{\sqrt{3(1-\mu^2)}}{\sqrt{r^2 h^3}} \sqrt{1+\tau} \end{aligned} \right\}. \quad (90. IV)$$

где

$$\tau = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{3(1-\mu^2)}}{2} \cdot \frac{pr^2}{Eh^3}. \quad (91. IV)$$

Для стали, если принять $E = 2 \cdot 10^4$ кг/см² и $\nu = 0,3$, будем иметь

$$\alpha = \frac{1,285}{\sqrt{R}} \sqrt{1 - \nu},$$

$$\beta = \frac{1,285}{\sqrt{R}} \sqrt{1 + \nu},$$

$$\gamma = \left(\frac{0,205 \nu}{1005} \right)^2 \frac{R}{16}.$$

Следовательно, корни характеристического уравнения представлены в комплексной форме (82. IV).

Решение однородного ур-ния (87. IV) будет

$$w_{op} = C_1 \operatorname{ch} \alpha x \cos \beta x + C_2 \operatorname{th} \alpha x \sin \beta x + C_3 \operatorname{ch} \alpha x \sin \beta x + C_4 \operatorname{th} \alpha x \cos \beta x,$$

и общий интеграл ур-ния (82. IV)

$$w = -\frac{R^2}{2E} \left(1 - \frac{x}{2} \right) + C_1 \operatorname{ch} \alpha x \cos \beta x + C_2 \operatorname{th} \alpha x \sin \beta x +$$

$$+ C_3 \operatorname{ch} \alpha x \sin \beta x + C_4 \operatorname{th} \alpha x \cos \beta x. \quad (92. IV)$$

Входящие в общий интеграл постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 определяются из граничных условий. Поскольку граничные условия нами уже сформулированы в § 31, нет необходимости повторять их вывод. Приведем эти условия в окончательном виде:

1. Углы поворота оболочки у шпангоутов $\left(x = \pm \frac{l}{2} \right)$

$$\frac{dw}{dx} \Big|_{x=\pm \frac{l}{2}} = 0. \quad (93. IV)$$

2. Прогiby оболочки у шпангоутов $\left(x = \pm \frac{l}{2} \right)$

$$w \Big|_{x=\pm \frac{l}{2}} = w_{\text{зад}}.$$

но

$$w_{\text{зад}} = A EI \frac{d^2 w}{dx^2},$$

где A — коэффициент податливости шпангоута, который, согласно формуле (49. IV), равен

$$A = 2 \frac{r^4}{EF}.$$

Таким образом, второе граничное условие будет

$$w \Big|_{x=\pm \frac{l}{2}} = \frac{2r^4}{EF} EI \frac{d^2 w}{dx^2}. \quad (94. IV)$$

Определив из граничных условий (ф-лы (93. IV) и (94. IV)) постоянные интегрирования C_1 , C_2 , C_3 и C_4 , получим

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -\frac{\rho r^2}{E\delta} \left(1 - \frac{\beta}{2}\right) \frac{u_1 \operatorname{sh} u_1 \cos u_2 + u_1 \operatorname{ch} u_1 \sin u_2}{u_2 \operatorname{sh} 2u_1 + u_1 \sin 2u_2} u_1 \\ C_2 &= +\frac{\rho r^2}{E\delta} \left(1 - \frac{\beta}{2}\right) \frac{u_2 \operatorname{ch} u_1 \sin u_2 - u_2 \operatorname{sh} u_1 \cos u_2}{u_2 \operatorname{sh} 2u_1 + u_1 \sin 2u_2} u_1 \\ C_3 &= 0 \\ C_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (95. IV)$$

где

$$u_1 = \frac{1}{1 + R} \quad (96. IV)$$

Здесь

$$R = \frac{\rho}{\gamma} F_1(u_1, u_2), \quad (97. IV)$$

причем

$$F_1(u_1, u_2) = \sqrt{1 - \gamma} \frac{\operatorname{ch} 2u_1 - \cos 2u_2}{u_2 \operatorname{sh} 2u_1 + u_1 \sin 2u_2} \quad (98. IV)$$

где

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \alpha \sqrt{1 - \gamma} \\ u_2 &= \alpha \sqrt{1 + \gamma} \end{aligned} \right\} \quad (99. IV)$$

$$\gamma = \frac{\pi}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{3}(1 - \nu^2)}{2} \cdot \frac{\rho r^2}{E\delta^3}$$

Для стали: $\pi = 0,6425 \frac{1}{\sqrt{x}}$; $\gamma = \left(\frac{0,203 \cdot \rho}{100\delta}\right)^2 \cdot \frac{\rho}{15}$.

Таким образом, прогиб оболочки w будет равен

$$w = -\frac{\rho r^2}{E\delta} \left(1 - \frac{\beta}{2}\right) + C_1 \operatorname{ch} \alpha x \cos \beta x + C_2 \operatorname{sh} \alpha x \sin \beta x, \quad (100. IV)$$

где C_1 и C_2 определяются по ф-лам (95. IV).

По формуле (100. IV) можно определить прогиб в любой точке оболочки. В большинстве случаев прогиб сам по себе практического интереса не представляет, однако знание его необходимо для определения кольцевого усилия T_2 по ф-ле (13. IV).

По формулам (10. IV) и (13. IV) и определяются осевые и кольцевые усилия T_1 и T_2 в любой точке оболочки. Соответствующие этим усилиям кольцевые и осевые напряжения будут

$$\sigma_1^x = \frac{T_1}{\delta}; \quad \sigma_2^x = \frac{T_2}{\delta}. \quad (101. IV)$$

Для определения изгибных напряжений необходимо знать изгибающие моменты M_1 и M_2 .

Изгибающий момент в поперечных сечениях оболочки M_1 и изгибающий момент в продольных сечениях оболочки M_2 вычисляются по ф-лам (17. IV) и (15. IV).

Взяв вторые производные прогиба оболочки w по x , можно по этим формулам определить изгибающие моменты в любой точке оболочки.

Соответствующие осевые (σ_1^{os}) и кольцевые (σ_2^{os}) изгибные напряжения в крайних по толщине фибрах находятся по выражениям

$$\sigma_1^{os} = \pm \frac{6M_1}{h^2}; \quad \sigma_2^{os} = \pm \frac{6M_2}{h^2}. \quad (102. IV)$$

Таким образом, суммарные напряжения в любой точке оболочки (в крайних по толщине фибрах) будут равны

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_1^0 + \sigma_1^{os} = \frac{T_1}{\gamma} \pm \frac{6M_1}{h^2} \\ \sigma_2 &= \sigma_2^0 + \sigma_2^{os} = \frac{T_2}{\gamma} \pm \frac{6M_2}{h^2} \end{aligned} \right\} \quad (103. IV)$$

Как и ранее, определим осевые и кольцевые напряжения в оболочке в точках посередине пролета между шпангоутами ($x=0$) и в точках у шпангоута ($x = \pm \frac{l}{2}$), а также кольцевые напряжения в самих шпангоутах.

А. Сечения посередине пролета ($x=0$)

1. Прогиб оболочки равен

$$w|_{x=0} = -\frac{\rho^2}{8\gamma} \left(1 - \frac{\rho}{2}\right) + \frac{\rho^2}{8\gamma} \epsilon_4 = -\frac{2-\rho}{\sqrt{3(1-\rho^2)}} \gamma^3 \left(1 - \frac{2}{2-\rho} \epsilon_4\right). \quad (104. IV)$$

При $\rho = 0,3$

$$w|_{x=0} = -1,0375(1 - 1,175\epsilon_4),$$

где

$$\epsilon_4 = \epsilon_4 F_4(\alpha_1, \alpha_2), \quad (105. IV)$$

причем

$$F_4(\alpha_1, \alpha_2) = (2-\rho) \frac{\alpha_1 \operatorname{ch} \alpha_1 \sin \alpha_2 + \alpha_2 \operatorname{sh} \alpha_1 \cos \alpha_2}{\alpha_1 \operatorname{sh} 2\alpha_1 + \alpha_2 \sin 2\alpha_2}. \quad (106. IV)$$

2. Осевое усилие T_1 и осевое цепное напряжение σ_1^0 определяются по формулам

$$T_1|_{x=0} = -\frac{\rho^2}{2}, \quad (107. IV)$$

$$\sigma_1^0|_{x=0} = -\frac{\rho^2}{2\gamma}. \quad (108. IV)$$

3. Изгибающий момент в поперечном сечении оболочки M_1 и соответствующее ему изгибное напряжение σ_1^{os} будут

$$M_1|_{x=0} = -\frac{\rho^2}{6} \epsilon_5, \quad (109. IV)$$

где

$$\epsilon_5 = \epsilon_5 F_5(\alpha_1, \alpha_2), \quad (110. IV)$$

причем

$$F_5(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{6\left(1 - \frac{\rho}{2}\right)}{\sqrt{3(1-\rho^2)}} \cdot \frac{\alpha_1 \operatorname{ch} \alpha_1 \sin \alpha_2 - \alpha_2 \operatorname{sh} \alpha_1 \cos \alpha_2}{\alpha_2 \operatorname{sh} 2\alpha_1 + \alpha_1 \sin 2\alpha_2}. \quad (111. IV)$$

При $\gamma = 0,3$

$$F_1(\alpha_1, \alpha_2) = 3,08 \frac{\alpha_1 \operatorname{ch} \alpha_1 \sin \alpha_2 - \alpha_2 \operatorname{sh} \alpha_1 \cos \alpha_2}{\alpha_1 \operatorname{sh} 2\alpha_1 + \alpha_2 \sin 2\alpha_2}.$$

Осевое изгибное напряжение $\sigma_1^{\text{из}}$ в крайних фибрах обшивки

$$\sigma_1^{\text{из}}|_{r=0} = \mp \frac{E^*}{\delta} \alpha_0. \quad (112. \text{IV})$$

4. Суммарные нормальные напряжения в поперечном сечении определяются по формуле

$$\sigma_1|_{r=0} = \sigma_1^* + \sigma_1^{\text{из}} = -\frac{E^*}{\delta} (0,5 \pm \alpha_0). \quad (113. \text{IV})$$

5. Кольцевое усилие T_2 и кольцевое щепное напряжение σ_2^* равны

$$T_2|_{r=0} = \frac{E^*}{r} \omega - \mu \frac{E^*}{2} = -\mu r (1 - \alpha_1), \quad (114. \text{IV})$$

$$\sigma_2^*|_{r=0} = -\frac{E^*}{\delta} (1 - \alpha_1) = -K_2^0 \frac{E^*}{\delta}, \quad (115. \text{IV})$$

где

$$K_2^0 = 1 - \alpha_1. \quad (116. \text{IV})$$

Изменение коэффициента K_2^0 в зависимости от параметра μ и отношения $\frac{R}{r}$ показано на рис. 41.

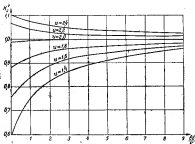


Рис. 41

6. Изгибающий момент M_2 и соответствующие ему напряжения в крайних фибрах $\sigma_2^{\text{из}}$

$$M_2 = -r \frac{E^* h}{\delta} \alpha_0, \quad (117. \text{IV})$$

$$\sigma_2^{\text{из}} = \mp \mu \frac{E^*}{\delta} \alpha_0. \quad (118. \text{IV})$$

7. Суммарное кольцевое напряжение σ_2 будет

$$\sigma_2|_{r=\pm \frac{t}{2}} = \sigma_2^i + \sigma_2^{ex} = -\frac{Pr}{8} (1 - \epsilon_2 \pm \mu \epsilon_2). \quad (119. IV)$$

Б. Сечение у мнимогорла ($x = \pm \frac{l}{2}$)

1. Протяб оболочки w равен

$$w|_{x=\pm \frac{l}{2}} = -\frac{Pr^2}{8E} \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) + \frac{Pr^2}{8E} \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \epsilon_1 = -\frac{2 \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \gamma^2 (1 - \epsilon_1). \quad (120. IV)$$

При $\mu = 0,3$

$$w|_{x=\pm \frac{l}{2}} = -1,03 \gamma^2 (1 - \epsilon_1).$$

2. Осевое усилие T_1 и осевое цепное напряжение σ_1^i определяются по формулам

$$T_1|_{x=\pm \frac{l}{2}} = -\frac{Pr}{2}, \quad (121. IV)$$

$$\sigma_1^i|_{x=\pm \frac{l}{2}} = -\frac{Pr}{2E}. \quad (122. IV)$$

3. Изгибающий момент в поперечном сечении оболочки M_1 и соответствующее ему изгибное напряжение σ_1^{ex} равны

$$M_1|_{x=\pm \frac{l}{2}} = \frac{Pr^3}{8} \epsilon_2, \quad (123. IV)$$

$$\sigma_1^{ex}|_{x=\pm \frac{l}{2}} = \pm \frac{Pr}{8} \epsilon_2, \quad (124. IV)$$

где

$$\epsilon_2 = \epsilon_1 P_2(\mu_1, \mu_2), \quad (125. IV)$$

причем

$$P_2(\mu_1, \mu_2) = \frac{3 \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \cdot \frac{\mu_2 \sinh 2\mu_1 - \mu_1 \sinh 2\mu_2}{\mu_2 \sinh 2\mu_1 + \mu_1 \sinh 2\mu_2}. \quad (126. IV)$$

При $\mu = 0,3$

$$P_2(\mu_1, \mu_2) = 1,54 \frac{\mu_2 \sinh 2\mu_1 - \mu_1 \sinh 2\mu_2}{\mu_2 \sinh 2\mu_1 + \mu_1 \sinh 2\mu_2}.$$

4. Суммарные нормальные напряжения в поперечном сечении будут

$$\sigma_1|_{x=\pm \frac{l}{2}} = \sigma_1^i + \sigma_1^{ex} = -\frac{Pr}{8} (0,5 \mp \epsilon_2). \quad (127. IV)$$

5. Кольцевое усилие T_2 и кольцевое цепное напряжение σ_2^i определяются по формулам

$$T_2|_{x=\pm \frac{l}{2}} = -Pr \left[1 - \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \epsilon_1\right], \quad (128. IV)$$

$$\sigma_2^i|_{x=\pm \frac{l}{2}} = -\frac{Pr}{8} \left[1 - \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \epsilon_1\right]. \quad (129. IV)$$

6. Изгибающий момент M_x и соответствующее ему напряжение в крайних волокнах σ_x^{ext} имеют вид

$$M_x|_{x=\pm \frac{l}{2}} = \mp \frac{\rho \sigma_0}{8} \epsilon_0, \quad (130. IV)$$

$$\sigma_x^{ext}|_{x=\pm \frac{l}{2}} = \pm \mu \frac{\rho \sigma_0}{8} \epsilon_0. \quad (131. IV)$$

7. Суммарные нормальные напряжения в продольных сечениях обшивки у шпангоута будут равны

$$\sigma_x|_{x=\pm \frac{l}{2}} = \sigma_0 + \sigma_x^{ext} = -\frac{\rho \sigma_0}{8} \left[1 - \left(1 - \frac{\nu}{2} \right) \epsilon_1 \pm \mu \epsilon_2 \right]. \quad (132. IV)$$

Таким образом, все расчетные формулы нами получены.

Приведем окончательные расчетные формулы для суммарных нормальных напряжений в поперечных и продольных сечениях обшивки как по середине шпангоута, так и у шпангоута.

В сечении по середине шпангоута ($x=0$) суммарные нормальные напряжения в поперечных сечениях обшивки (осевые напряжения) равны

$$\sigma_x|_{x=0} = -\frac{\rho \sigma_0}{8} (0,5 \pm \epsilon_3). \quad (133. IV)$$

Суммарные нормальные напряжения в продольных сечениях обшивки (кольцевые напряжения) имеют вид

$$\sigma_x|_{x=0} = -\frac{\rho \sigma_0}{8} (1 - \epsilon_1 \pm \mu \epsilon_2). \quad (134. IV)$$

В сечении у шпангоута ($x = \pm \frac{l}{2}$) суммарные нормальные напряжения в поперечных сечениях обшивки (осевые напряжения) определяются по формуле

$$\sigma_x|_{x=\pm \frac{l}{2}} = -\frac{\rho \sigma_0}{8} (0,5 \mp \epsilon_3). \quad (135. IV)$$

Суммарные нормальные напряжения в продольных сечениях обшивки (кольцевые напряжения) равны

$$\sigma_x|_{x=\pm \frac{l}{2}} = -\frac{\rho \sigma_0}{8} \left[1 - \left(1 - \frac{\nu}{2} \right) \epsilon_1 \pm \mu \epsilon_2 \right]. \quad (136. IV)$$

Направления суммарных напряжений показаны на рис. 42.

Функции П, Ф, Паппаса $F_1(u_1, u_2)$, $F_2(u_1, u_2)$, $F_3(u_1, u_2)$ и $F_4(u_1, u_2)$ протабулированы (см. Приложение III), причем для облегчения пользования таблицами эти функции приведены в зависимости от двух аргументов α и $\eta = 2\pi\gamma$, где α и γ определяются по формулам (30. IV) и (31. IV).

Кривые функций F_1, F_2, F_3, F_4 приведены на рис. 43.

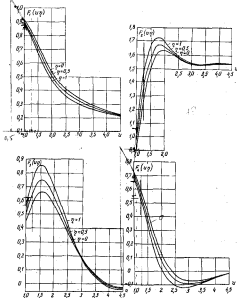


Рис. 43

Перейдем к определению напряжений в шпангоутах. Как и ранее (см. Ф-лу (78.IV)), напряжения в шпангоутах определяются по формуле

$$\sigma_{\text{шп}} = E \frac{w}{r} \left(1 - \frac{r}{2} \right) = - \frac{P r'}{t} \left(1 - \frac{r}{2} \right) (1 - \epsilon_1) = - k \frac{P r'}{t}, \quad (137.IV)$$

где

$$k = \left(1 - \frac{r}{2} \right) (1 - \epsilon_1).$$

Приведем практическую схему расчета по методу П. Ф. Папковича.

Практическая схема расчета

Исходные данные: r, l, I, P, ρ .

Определяются:

1. Параметр μ : $\mu = 0,6425 \sqrt{\frac{I}{r^4}}$.

2. Параметр γ : $\gamma = \left(\frac{0,208 P}{100 I} \right)^2 \cdot \frac{r}{10}$.

3. Параметр η : $\eta = 2\pi\gamma$.

4. По таблицам или графикам в функции от параметров μ и η функции Папковича: $F_1(\mu, \eta)$, $F_2(\mu, \eta)$, $F_3(\mu, \eta)$, $F_4(\mu, \eta)$.

5. Функция R : $R = \frac{r}{P} F_1(\mu, \eta)$.

6. Функция α_1 : $\alpha_1 = \frac{1}{1+R}$.

7. Функции $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$:

$$\alpha_2 = \alpha_1 F_2(\mu, \eta),$$

$$\alpha_3 = \alpha_1 F_3(\mu, \eta),$$

$$\alpha_4 = \alpha_1 F_4(\mu, \eta).$$

8. Суммарные нормальные напряжения в поперечных (α_1) и в продольных (α_2) сечениях обшивки как посредине пролета ($x=0$), так и у шпангоутов ($x = \pm \frac{l}{2}$):

$$\alpha_1|_{x=0} = -\frac{P}{\delta} (0,5 \pm \alpha_1), \quad \alpha_1|_{x=\pm \frac{l}{2}} = -\frac{P}{\delta} (0,5 \mp \alpha_1),$$

$$\alpha_2|_{x=0} = -\frac{P}{\delta} \left(1 - \alpha_1 \pm \alpha_2 \right), \quad \alpha_2|_{x=\pm \frac{l}{2}} = -\frac{P}{\delta} \left[1 - \left(1 - \frac{r}{2} \right) \alpha_1 \pm \alpha_2 \right].$$

9. Цепные напряжения в продольных сечениях посредине пролета

$$\alpha_{10}^0 = -\frac{P}{\delta} (1 - \alpha_1) = -k \frac{P}{\delta}.$$

10. Напряжения в шпангоутах

$$\alpha_{10} = -\frac{P}{\delta} \left(1 - \frac{r}{2} \right) (1 - \alpha_1) = -k \frac{P}{\delta},$$

где $k = \left(1 - \frac{r}{2} \right) (1 - \alpha_1)$.

Сравнение величин напряжений, определенных по точному решению П. Ф. Папковича, с величинами напряжений, определенных по приближенному решению, показывает, что погрешность, связанная с учетом проекции усилия T_1 на ось Z , не превышает пяти процентов и практически с ней считаться не следует. Графики функций Папковича F_1, F_2, F_3, F_4 показывают, что эти функции мало зависят от параметра η , следовательно, учет проекции осевого усилия T_1 на ось Z может не производиться.

§ 33. Определение напряжений в обшивке и шпангоутах прочного корпуса по методу Ю. А. Шиманского

Приведенные в § 31 и 32 расчетные схемы получены в результате решений, основанных на интегрировании дифференциального уравнения осесимметричной деформации круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной упругими ребрами жесткости. Достоинством этих решений является то, что они получены в замкнутом виде, а зависимости в решении функции являются табулированными.

В 1933 г. Ю. А. Шиманским был предложен другой метод определения напряжений в обшивке и шпангоутах, основанный на использовании метода Бубнова—Галеркина, причем выражения для прогибов оболочки и напряжений разбиваются в бесконечных рядах. Поскольку расчетная схема Ю. А. Шиманского также широко применяется в расчетной практике, целесообразно рассмотреть вывод основных формул этой схемы.

Так же как и Папко维奇, Шиманский использует основное дифференциальное уравнение осесимметричной деформации круговой цилиндрической оболочки (82. IV), полученное С. П. Тимошенко

$$\frac{Eh}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{d^3w}{dx^3} + \frac{Er}{2} \cdot \frac{dw}{dx^2} + \frac{Eh}{r^2} w = -p \left(1 - \frac{\nu}{2}\right).$$

Как и ранее, обозначим нормальные перемещения обшивки у шпангоутов w_{sh} . Оси координат выберем так, как показано на рис. 44. При этом опорные сечения обшивки будут соответствовать $x=0$ и $x=l$.

Граничные условия задачи, естественно, повторяют уже рассмотренные ранее и формулируются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} w &= w_{sh} \\ \text{при } x=0, x=l \\ \frac{dw}{dx} &= 0 \\ \text{при } x=0, x=l \end{aligned} \right\} \quad (138. IV)$$

Первое условие системы (138. IV') фиксирует равенство обжатия обшивки у шпангоута обжатия шпангоута, а второе условие (138. IV) фиксирует равенство крутящих моментов обшивки на шпангоутах.

Пусть R_{sh} — интенсивность реакции обшивки, непосредственно передаваемой шпангоуту. При осесимметричной деформации оболочки величина R_{sh} не будет меняться по периметру корпуса. Следовательно, шпангоут будет обжиматься как упругое кольцо. Величина радиального обжатия шпангоута определяется известной формулой для кольца

$$w_{sh} = -\frac{R_{sh} r^2}{Eh}. \quad (139. IV)$$

Если бы вся внешняя нагрузка передавалась шпангоуту, то интенсивность реакции шпангоута R_{sh} была бы в точности равна $R_{sh} = p$. В действительности же часть внешней нагрузки непосредственно воспринимается обшивкой, вызывая ее радиальное обжатие. При этом в обшивке появляются кольцевые сжимающие усилия T_x . Проекция такого усилия на нормаль



Рис. 44

к поверхности обшивки равно $\frac{T_2}{r}$. Величина этой проекции, приходящаяся на всю шпангоут, будет $\int_0^l \frac{T_2}{r} dx$.

В итоге интенсивность реакции обшивки на шпангоут будет

$$R_{os} = p l - \int_0^l \frac{T_2}{r} dx. \quad (140. IV)$$

Подставив в ф-лу (140. IV) T_2 из ф-лы (13. IV), придем к выражению

$$R_{os} = p l \left(1 - \frac{\mu}{2} \right) - \frac{p l}{r^2} \int_0^l w dx.$$

Тогда, согласно ф-ле (139. IV), обжатие шпангоута будет

$$w_{os} = - \frac{r^2}{E p} \left[p l \left(1 - \frac{\mu}{2} \right) - \frac{E T_2}{r^2} \int_0^l w dx \right] \quad (141. IV)$$

Однако прогиб обшивки w , входящий в интеграл выражения (141. IV), пока неизвестен, поэтому остается неизвестным и радикальное обжатие шпангоута. Прогиб обшивки w , состоящий из прогиба обшивки вместе со шпангоутом w_{os} и дополнительного прогиба обшивки между шпангоутами, можно принять в виде

$$w = w_{os} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{l} \right). \quad (142. IV)$$

Принятое выражение для w удовлетворяет граничным условиям задачи (138. IV).

Подставим выражение для w (142. IV) в ф-лу (141. IV). Получим для обжатия шпангоута следующее выражение:

$$w_{os} = - (1 - k) \left[\frac{r^2}{E p} p \left(1 - \frac{\mu}{2} \right) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right], \quad (143. IV)$$

$$k = \frac{p}{p + K},$$

где k — коэффициент, характеризующий жесткость шпангоутов.

В формулах (142. IV) и (143. IV) неизвестными являются значения f_n , т. е. амплитудные значения дополнительного прогиба обшивки между шпангоутами, соответствующие различным формам изгиба по длине ($n = 1, 2, \dots, n = \infty$). К отысканию значений f_n и сводится решение поставленной задачи.

Для разыскания параметров f_m подставим ф.л.у (142. IV) в дифференциальное уравн. (82. IV). Получим

$$\frac{E\nu}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} f_m \left(\frac{2m\pi}{l}\right)^4 \left(-\cos \frac{2m\pi x}{l}\right) + \frac{E\nu}{2} \cdot \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} f_m \left(\frac{2m\pi}{l}\right)^2 \cos \frac{2m\pi x}{l} + \\ + \frac{E\nu}{\rho} \left[w_{\text{max}} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} f_m \left(1 - \cos \frac{2m\pi x}{l}\right) \right] = -p \left(1 - \frac{\nu}{2}\right).$$

Или после подстановки w_{max} согласно выражению (143. IV), приведем к уравнению

$$\frac{E\nu}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} f_m \left(\frac{2m\pi}{l}\right)^4 \left(-\cos \frac{2m\pi x}{l}\right) + \frac{E\nu}{2} \cdot \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} f_m \left(\frac{2m\pi}{l}\right)^2 \cos \frac{2m\pi x}{l} - \\ - (1-k)p \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) - \frac{E\nu}{\rho^2} (1-k) \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} f_m + \\ + \frac{E\nu}{\rho^2} \cdot \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} f_m \left(1 - \cos \frac{2m\pi x}{l}\right) = -p \left(1 - \frac{\nu}{2}\right).$$

После приведения подобных членов получим

$$- \frac{E\nu}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} f_m \left(\frac{2m\pi}{l}\right)^4 \cos \frac{2m\pi x}{l} + \frac{E\nu}{2} \cdot \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} f_m \left(\frac{2m\pi}{l}\right)^2 \cos \frac{2m\pi x}{l} + \\ + \frac{E\nu}{\rho^2} k \cdot \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} f_m - \frac{E\nu}{\rho^2} \cdot \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} f_m \cos \frac{2m\pi x}{l} = -kp \left(1 - \frac{\nu}{2}\right).$$

Умножим обе части этого равенства на $\left(1 - \cos \frac{2m\pi x}{l}\right)$ и проинтегрируем все члены равенства в пределах от 0 до l . В результате интегрирования будем иметь

$$f_m \left[4 \frac{E\nu}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 - \frac{E\nu}{2} \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{E\nu}{\rho^2} \right] = -kp \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) - \\ - k \frac{1}{2} \cdot \frac{E\nu}{\rho^2} \sum_{m=1}^{\infty} f_m.$$

откуда

$$f_m = k \frac{-p \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{E\nu}{\rho^2} \sum_{m=1}^{\infty} f_m}{4 \frac{E\nu}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 - \frac{E\nu}{2} \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{E\nu}{\rho^2}}.$$

Введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{4\pi^2}{3(1-\nu^2)} \cdot \frac{\nu \sigma r}{R} \\ \beta &= -\frac{4\pi^2}{E} \cdot \frac{E r}{2R} \cdot \frac{E^2}{r^2} \\ \rho &= -\frac{2r}{ES} \rho \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) \end{aligned} \right\}, \quad (144. IV)$$

Тогда выражение для f_m можно будет представить в виде

$$f_m = 2k \frac{\nu - 2f_m}{\alpha m^2 - \beta m^2 + 1}.$$

Просуммируем полученное выражение для f_m от 1 до ∞ . В результате получим

$$\sum_1^{\infty} f_m = 2kr \frac{N}{1 + 2kN} = 2kNr, \quad (145. IV)$$

где

$$N = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha m^2 - \beta m^2 + 1}, \quad (146. IV)$$

$$k = \frac{1}{1 + 2kN}. \quad (147. IV)$$

Зная $\sum_1^{\infty} f_m$ и подставив ее в выражение для f_m , окончательно получим формулу для амплитудных значений прогиба обшивки между шпангоутами

$$f_m = \frac{2kr}{\alpha m^2 - \beta m^2 + 1}. \quad (148. IV)$$

Знание f_m равносильно знанию прогиба обшивки w , а знание прогиба достаточно для определения всех усилий и моментов x , следовательно, напряжений в оболочке.

Действительно, осевое усилие T_1 во всех поперечных сечениях обшивки, согласно ф-ле (10. IV), равно

$$T_1 = -\frac{E r}{2}$$

и соответствующее ему тангенс осевое напряжение σ_1^0 равно

$$\sigma_1^0 = \frac{T_1}{r} = -\frac{E r}{2R}.$$

Кольцевое усилие T_2 определяется по выражению (см. ф-лу (13. IV))

$$T_2 = \frac{E r}{r} w - r \frac{E r}{2},$$

а соответствующее ему кольцевое тангенс напряжение будет

$$\sigma_2^0 = \frac{T_2}{r} = \frac{E}{r} w - r \frac{E r}{2R}.$$

Изгибающие моменты M_1 и M_2 определяются по ф-лам (17. IV) и (18. IV), т. е.

$$M_1 = - \frac{E \nu}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{d^2 w}{dz^2}, \quad M_2 = - \nu \frac{E \nu}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{d^2 w}{dz^2},$$

а соответствующие им изгибные напряжения по выражениям

$$\sigma_1^{\text{изг}} = \pm \frac{E M_1}{I}, \quad \sigma_2^{\text{изг}} = \pm \frac{E M_2}{I}.$$

Подставив определенное по ф-ле (148. IV) значение f_m в формулу (142. IV), получим выражение для прогиба w . По приведенным зависимостям определим условия и моменты в обшивке прочного корпуса, а затем шепные и изгибные напряжения.

Приведем окончательные расчетные формулы в практическую схему расчета по методу Ю. А. Шиманского.

1. Обжатие шпангоутов

$$w_{\text{обж}} = \frac{1-\nu}{2K} \varphi R. \quad (149. IV)$$

2. Прогиб обшивки по середине пролета

$$w_{\text{ср}} = w_{\text{обж}} + 2\varphi M R. \quad (150. IV)$$

3. Суммарное осевое напряжение в обшивке у шпангоутов

$$\sigma_z|_{z=0} = - \frac{R}{\delta} \pm \frac{2\varphi R}{1-\nu^2} \delta_1 \gamma^2 \varphi R. \quad (151. IV)$$

4. Суммарное кольцевое напряжение в обшивке у шпангоутов

$$\sigma_r|_{z=0} = \frac{E w_{\text{ср}}}{r} - \nu \sigma_z|_{z=0}. \quad (152. IV)$$

5. Суммарное осевое напряжение по середине пролета

$$\sigma_z|_{z=\frac{l}{2}} = - \frac{R}{\delta} \pm \frac{2\varphi R}{1-\nu^2} \delta_1 \gamma^2 \varphi Q. \quad (153. IV)$$

6. Суммарное кольцевое напряжение по середине пролета

$$\sigma_r|_{z=\frac{l}{2}} = \frac{E w_{\text{ср}}}{r} - \nu \sigma_z|_{z=\frac{l}{2}}. \quad (154. IV)$$

Входящие в ф-лы (149. IV)–(154. IV) величины N , M , P , Q определяются по выражениям:

$$\left. \begin{aligned} N &= \sum_{m=1,2,3} \frac{1}{\alpha m^4 - \beta m^2 + \gamma} \\ M &= \sum_{1,2,3} \frac{1}{\alpha m^4 - \beta m^2 + \gamma} \\ P &= \sum_{1,2,3} \frac{m^2}{\alpha m^4 - \beta m^2 + \gamma} \\ Q &= \sum_{1,2,3} \frac{m^2 (-1)^m}{\alpha m^4 - \beta m^2 + \gamma} \end{aligned} \right\} \quad (155. IV)$$

$$\delta_1 = \frac{\delta}{r}; \quad \gamma = \frac{r}{l}. \quad (156. IV)$$

Отметим, что функции N , M , P , Q протабулированы Ю. А. Шиманским (см. Приложение III), что значительно упрощает расчеты. В качестве аргументов этих функций приняты параметры a и c , определяемые по формулам:

$$a = \frac{\gamma}{\sqrt{\kappa}}; \quad b = \frac{\delta}{\sqrt{\beta}}; \quad c = \frac{b}{a}. \quad (157. IV)$$

Практическая схема расчета

Исходные данные: c , δ , l , R , p .

Определяются:

1. Вспомогательные величины b , γ и k по выражениям (156. IV) и (143. IV).
2. Вспомогательные величины α , β , ρ по ф-лам (144. IV) и параметры a и c по выражениям (157. IV).
3. По таблицам Приложения III для найденных значений a и c величинам N , M , P , Q .
4. Значение κ по выражению (147. IV).
5. Обжатие шпангоутов по ф-ле (149. IV).
6. Прогиб обшивки в середине шпанги по ф-ле (150. IV).
7. Суммарные напряжения σ_1 и σ_2 в обшивке у шпангоутов ($x=0$, $x=l$) по ф-лам (151. IV) и (152. IV).
8. Суммарные напряжения σ_1 и σ_2 в обшивке посредине шпанги по ф-лам (153. IV) и (154. IV).
9. Напряжения в шпангоутах

$$\sigma_{\text{шп}} = \frac{E}{r} \omega_{\text{шп}}$$

Сравнение численных результатов, полученных по методу Ю. А. Шиманского, с результатами, полученными по методу П. Ф. Паркинтона, показывает их практическое совпадение, несмотря на существенно разные пути решения задачи. Поэтому обе расчетные схемы с равным успехом могут быть рекомендованы для практического использования.

§ 34. Расчет оболочки, подкрепленной в промежутке между основными шпангоутами дополнительными круговыми ребрами жесткости

В ряде практических случаев по конструктивным соображениям расстояние между основными шпангоутами принимается достаточно большим. Обеспечение устойчивости обшивки в этих случаях может быть достигнуто либо путем ее утолщения, либо путем постановки между шпангоутами промежуточных круговых ребер жесткости. Промежуточные ребра жесткости получили наиболее применение в связи с использованием сталей с высокими механическими характеристиками в качестве материала для прочного корпуса. Естественно, что с точки зрения прочности применение сталей с высокими механическими характеристиками дает возможность уменьшения толщины обшивки, причем такое уменьшение будет примерно пропорционально увеличению предела текучести материала. Поэтому исходя из расчета по напряжениям, применение сталей с высокими механическими характеристиками является весьма эффективным средством уменьшения веса корпуса. Однако уменьшение толщины обшивки неизбежно приводит к снижению ее устойчивости, что

в ряде случаев сводит к минимуму эффективность применения высокопрочных сталей, а в некоторых случаях делает их применение вообще бесполезным.

Расчеты показывают, что в таких случаях установка промежуточных ребер жесткости позволяет существенно повысить устойчивость обшивки и, как следствие этого, использовать упомянутые преимущества сталей с высокими механическими характеристиками. Поскольку промежуточные упругие ребра нашли широкое применение в конструкциях, необходимо иметь расчетные методы для определения напряжений как в самих промежуточных ребрах, так и в обшивке в районе их установки.

Определение напряжений в обшивке и шпангоутах с помощью интегрирования дифференциального уравнения осесимметричной деформации круговой цилиндрической оболочки (18. IV) дает практически одинаковые результаты с результатами, полученными при интегрировании более точного дифференциального уравнения (82. IV).

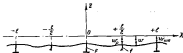


Рис. 45

Следовательно, для решения поставленной задачи нет необходимости в использовании ур-ния (82. IV), а достаточно проинтегрировать при соответствующих рассматриваемому случаю граничных условиях более простое ур-ние (18. IV) или ур-ние (20. IV).

Таким образом, исходное дифференциальное уравнение осесимметричной деформации круговой цилиндрической оболочки имеет вид

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + kw = q,$$

где в соответствии с ф-лами (19. IV)

$$EI = \frac{E\mu}{12(1-\mu^2)}; \quad k = \frac{E\mu}{r^3}; \quad q = -p \left(1 - \frac{\mu}{2}\right).$$

Характер деформации обшивки, подкрепленной основными шпангоутами и промежуточными ребрами жесткости, показан на рис. 45.

Будем считать, что промежуточные ребра жесткости установлены строго посредине шпанги. Как известно, этот случай представляет наибольший практический интерес.

Совместим начало координат с плоскостью основного шпангоута. Тогда плоскости $x=0, \pm l, \pm 2l, \pm 3l$ и т. д. будут соответствовать плоскостям основных шпангоутов, а плоскости $\pm \frac{1}{2}l, \pm \frac{3}{2}l, \pm \frac{5}{2}l$ и т. д. — плоскостям промежуточных шпангоутов.

Общий интеграл дифференциального ур-ния (20. IV) можно разыскивать в форме, предложенной Н. П. Пузыревским. Однако в рассматриваемой задаче наиболее удобно пользоваться расчетной схемой Шимсманна—Клишневича. При использовании этой схемы мы исключим

необходимость вычислять малые разности близких чисел, что часто встречается при расчете оболочки, закрепленной основными шпангоутами и промежуточными ребрами жесткости.

Пусть R_1 — интенсивность реактивной нагрузки обшивкой основной шпангоут, а R_2 — интенсивность реактивной нагрузки обшивкой промежуточных ребер жесткости. В этом случае основные шпангоуты и промежуточные ребра жесткости могут рассматриваться как равномерно обжатые упругие кольца.

Обжатие основных шпангоутов будет равно

$$\varpi_{\text{осн}} = -\frac{R_1 r^2}{E\delta} \quad (158. IV)$$

Обжатие промежуточных ребер жесткости определяется по формуле

$$\varpi_p = -\frac{R_2 r^2}{E\delta} \quad (159. IV)$$

Следовательно, прогиб обшивки будет

$$\left. \begin{aligned} \varpi &= \varpi_{\text{осн}} \\ \text{при } x=0, \pm l, \pm 2l, \pm 3l \\ \varpi &= \varpi_p \\ \text{при } x=\pm \frac{1}{2}l, \pm \frac{3}{2}l, \pm \frac{5}{2}l \end{aligned} \right\} \quad (160. IV)$$

Очевидно, интенсивность реактивного воздействия обшивки на шпангоуты и промежуточные ребра будет соответственно равна и противоположно направлена интенсивности реактивного воздействия основных шпангоутов и ребер на обшивку.

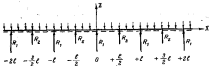


Рис. 46

Таким образом, выделенная из оболочки в направлении ее образующей балка-полоска будет нагружена, кроме внешней равномерно распределенной нагрузки, еще реакциями R_1 , сосредоточенными в сечениях $x=0$, $x=\pm l$, $x=\pm 2l$ и т. д., и R_2 , сосредоточенными в сечениях $x=\pm \frac{1}{2}l$, $\pm \frac{3}{2}l$, $\pm \frac{5}{2}l$. Поэтому расчетная схема нагрузки балки-полоски, выделенной из оболочки, имеет вид, показанный на рис. 46.

Необходимо определить прогиб обшивки по всей длине, а затем и напряжения, возникающие в обшивке, шпангоутах и ребрах.

Прежде чем перейти к изложению расчетной схемы Цинмермана—Клишневича, определим упругую линию бесконечно длинной балки жест-

кости EI , лежащей на упругом основании жесткости k и нагруженной в какой-либо точке сосредоточенной силой P (рис. 47).

Решение дифференциального уравнения изгиба балки будем записывать в виде

$$w = B_1 e^{-\alpha x} \cos \alpha x + B_2 e^{-\alpha x} \sin \alpha x + B_3 e^{+\alpha x} \cos \alpha x + B_4 e^{+\alpha x} \sin \alpha x, \quad (161. IV)$$

где

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{P}{4EI}} = \frac{\sqrt[4]{3 \pi (1-\mu^2)}}{\sqrt{rk}}. \quad (162. IV)$$

При $\mu = 0,3$

$$\alpha = \frac{1,385}{\sqrt{rk}}.$$

Выбрав начало координат под силой P , можно для правой половины балки записать следующие граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= 0 \\ EI \frac{d^2w}{dx^2} &= \frac{P}{2} \end{aligned} \right\} \text{ при } x=0. \quad (163. IV)$$

Первое условие системы (163. IV) фиксирует равенство нулю угла поворота под силой. Это следует из полной симметрии нагрузки и конструкции относительно сечения $x=0$.

Второе условие системы (163. IV) фиксирует, что перерезывающая сила равна половине силы P , что также является следствием симметрии конструкции относительно сечения $x=0$ при условии, что в этом сечении приложена сосредоточенная сила P .

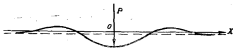


Рис. 47

Что касается граничных условий на бесконечности, то очевидно, что при $x = \infty$ прогиб балки, угол поворота, кривизна и перерезывающая сила будут равны нулю, т. е.

$$w = \frac{dw}{dx} = \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{d^3w}{dx^3} = 0. \quad (164. IV)$$

Естественно, что условия (164. IV) могут быть выполнены только в том случае, если постоянные B_3 и B_4 будут равны нулю, так как в противном случае прогибы и другие элементы изгиба обращались бы в бесконечность (при $x = \infty$), поскольку при этих постоянных имеется множитель $e^{+\alpha x}$.

Следовательно, прогиб балки будет определяться выражением

$$w = B_1 e^{-\alpha x} \cos \alpha x + B_2 e^{-\alpha x} \sin \alpha x. \quad (165. IV)$$

Подставляя ф-лу (165. IV) в граничные условия (163. IV), получим

$$-B_1 + B_2 = 0,$$

$$2\alpha^3 EI (B_1 + B_2) = \frac{P}{2}.$$

откуда

$$B_1 = B_2 = \frac{P}{8\alpha^3 EI}.$$

В результате прогиб правой половины балки определится выражением

$$w = \frac{P}{8\alpha^3 EI} e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x). \quad (166. IV)$$

Максимальный прогиб балки будет в сечении под силой, т. е. при $x=0$

$$w_{\max} = \frac{P}{8\alpha^3 EI} = \frac{P\lambda}{24}. \quad (167. IV)$$

Рассмотрим теперь левую половину балки. По аналогии граничные условия будут

$$\frac{dw}{dx} = 0,$$

$$EI \frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{P}{2}, \quad \text{при } x=0$$

$$w = \frac{dw}{dx} = \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{d^3w}{dx^3} = 0, \quad \text{при } x=-\infty$$

Для удовлетворения последнему условию необходимо положить B_1 и B_2 равными нулю, так как при $x = -\infty$ члены, содержащие B_1 и B_2 , содержат $e^{+\alpha x}$. Поэтому для левой части балки

$$w = B_3 e^{\alpha x} \cos \alpha x - B_4 e^{\alpha x} \sin \alpha x.$$

Подставляя эту формулу в граничные условия, получим

$$B_3 = B_4 = \frac{P}{8\alpha^3 EI}.$$

Следовательно, окончательно прогиб левой половины балки будет

$$w = \frac{P}{8\alpha^3 EI} e^{\alpha x} (\cos \alpha x - \sin \alpha x).$$

Сравнивая выражение для прогиба правой половины балки (166. IV) с выражением для прогиба левой половины балки, видим, что прогиб по всей длине балки может быть представлен в виде

$$w = \frac{P}{8\alpha^3 EI} e^{-\alpha ||x||} (\cos \alpha ||x|| + \sin \alpha ||x||), \quad (168. IV)$$

где символ $||$ означает абсолютную величину отстояния точки приложения силы от точки, для которой вычисляется перемещение.

Теперь рассмотрим бесконечно длинную балку на упругом основании, нагруженную совокупностью сосредоточенных сил P_i (рис. 48).

Для разыскания упругой линии балки, нагруженной рядом сосредоточенных сил P_i , приложенных в сечениях $x = c_i$, необходимо просуммировать прогибы от каждой из сил.

Прогиб балки от сосредоточенной силы P_i , приложенной в точке c_i , согласно ф-ле (168.IV) будет

$$w_i = \frac{P_i}{8a^2EI} e^{-a|x-c_i|} (\cos a|x-c_i| + \sin a|x-c_i|).$$

Суммируя влияние всех сил, получим суммарный прогиб балки от действия совокупности сосредоточенных сил P_i

$$w = \sum_i \frac{P_i}{8a^2EI} e^{-a|x-c_i|} (\cos a|x-c_i| + \sin a|x-c_i|). \quad (169.IV)$$

Выражение (169.IV) и есть общее выражение для прогиба бесконечно длинной балки, нагруженной совокупностью сил P_i .

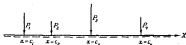


Рис. 48

Введем в рассмотрение функции Циммермана—Клишевича:

$$\left. \begin{aligned} W_0(x) &= e^{-ax} \cos ax \\ W_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-ax} (-\cos ax + \sin ax) \\ W_2(x) &= -e^{-ax} \sin ax \\ W_3(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-ax} (\cos ax + \sin ax) \end{aligned} \right\} \quad (170.IV)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функции W_0 , W_1 , W_2 и W_3 при дифференцировании переходят одна в другую, так что

$$\left. \begin{aligned} \frac{dW_0(ax)}{dx} &= a\sqrt{2} W_3(ax) \\ \frac{dW_1(ax)}{dx} &= a\sqrt{2} W_2(ax) \\ \frac{dW_2(ax)}{dx} &= a\sqrt{2} W_0(ax) \\ \frac{dW_3(ax)}{dx} &= -a\sqrt{2} W_1(ax) \end{aligned} \right\} \quad (171.IV)$$

Функции W_0 , W_1 , W_2 , W_3 табулированы. Таблицы этих функций приводятся в Приложении IV. Поэтому целесообразно полученное

выражение для прогиба балки представить именно в таких функциях. Тогда прогибы балки равны

$$w = \sum_i \frac{P_i}{4\sqrt{2} EI} W_i(x|x-c_i), \quad (172. IV)$$

а изгибающие моменты

$$M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} = \sum_i \frac{P_i}{2\sqrt{2} EI} W_i(x|x-c_i). \quad (173. IV)$$

Как функция W_2 , так и функция W_1 являются непрерывными при всяком x и четными функциями относительно $x - c_i$, т. е.

$$W_1(x - c_i) = W_1(c_i - x),$$

$$W_2(x - c_i) = W_2(c_i - x).$$

Возвратимся теперь к рассматриваемой задаче, когда выделенная из оболочки балка-полоска на упругом основании загружена, кроме внешней равномерно распределенной нагрузки интенсивности q , сосредоточенными силами R_1 и R_2 , действующими в точках, согласно рис. 46.

Прогиб выделенной балки-полоски будет равен алгебраической сумме прогибов от внешней нагрузки q и от сосредоточенных усилий R_1 и R_2 , т. е.

$$w = w_q + w_{R_1} + w_{R_2}, \quad (174. IV)$$

где w_q — прогиб от внешней нагрузки q ;

w_{R_1} — прогиб, вызванный суммой реакций основных шпангоутов;

w_{R_2} — прогиб, вызванный суммой реакций промежуточных ребер жесткости.

Внешняя нагрузка q вызывает равномерное радиальное обжатие оболочки. Следовательно, прогиб выделенной балки-полоски будет

$$w_q = \frac{q r^2}{E \delta} = - \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \frac{q r^2}{E \delta} \quad (175. IV)$$

или при $\mu = 0,3$

$$w_q = -0,85 \frac{q r^2}{E \delta}.$$

Прогиб, вызванный суммой реакций основных шпангоутов, согласно ф-ле (172. IV), равен

$$w_{R_1} = \sum_i \frac{R_i}{4\sqrt{2} EI} W_i[a(x - c_i)].$$

Выделим из этой суммы прогиб от реактивного усилия R_0 , приложенного в начале координат ($c = 0$). Получим

$$w_{R_1} = \frac{R_0}{4\sqrt{2} EI} W_1(ax) + \sum_{i=1,2,3} \frac{R_i}{4\sqrt{2} EI} W_i[a(x - c_i)].$$

Входящие под знак суммы коэффициенты $\frac{R_1}{4\sqrt{T}^2 \omega EI}$ не зависят от i и могут быть вынесены за знак суммы. В результате получим

$$w_{2x_i} = \frac{R_1}{4\sqrt{T}^2 \omega EI} \left[W_1(ax) + \sum_{i=1,2,3} W_1|x(x-c_i)| \right].$$

Принимая во внимание четность функции W_1 относительно $x-c_i$, представим эту формулу в виде

$$w_{2x_i} = \frac{R_1}{4\sqrt{T}^2 \omega EI} \left[W_1(ax) + \sum_{i=1,2,3} W_1|x c_i - ax| \right]. \quad (176.IV)$$

Шпандорты, лежащие справа от начала координат, имеют абсциссы

$$c_1 = +l \quad \text{при } i = 1,$$

$$c_2 = +2l \quad \text{при } i = 2,$$

$$c_3 = +3l \quad \text{при } i = 3,$$

$$\dots \dots \dots$$

а слева от начала координат

$$c_1 = -l \quad \text{при } i = 1,$$

$$c_2 = -2l \quad \text{при } i = 2,$$

$$c_3 = -3l \quad \text{при } i = 3,$$

$$\dots \dots \dots$$

Таким образом, для правой части балки-полоски

$$c_i = +il \text{ и } xc_i = +ilx = +i2x, \text{ где } i = 1, 2, 3, \dots,$$

а для левой части

$$c_i = -il \text{ и } xc_i = -ilx = -i2x, \text{ где } i = 1, 2, 3, \dots$$

Подставляя xc_i в ф-лу (176.IV), получим выражение для прогиба балки-полоски от реактивных усилий основных шпандортов

$$w_{2x_i} = \frac{R_1}{4\sqrt{T}^2 \omega EI} \left[W_1(ax) + \sum_{i=1,2,3,\dots} (W_1|i2x - ax| + W_1|i2x + ax|) \right]. \quad (177.IV)$$

Остается определять прогиб от реактивных усилий промежуточных ребер жесткости. Этот прогиб, согласно ф-ле (173.IV), будет равен

$$w_{2x_i} = \sum_{i=1,2,3} \frac{R_2}{4\sqrt{T}^2 \omega EI} W_1|x(x-c_i)| = \frac{R_2}{4\sqrt{T}^2 \omega EI} \sum_{i=1,2,3} W_1|x c_i - ax|. \quad (178.IV)$$

Промежуточные ребра жесткости, лежащие справа от начала координат, имеют абсциссы

$$c_1 = +\frac{1}{2}l \quad \text{при } i=1,$$

$$c_3 = +\frac{3}{2}l \quad \text{при } i=3,$$

$$c_5 = +\frac{5}{2}l \quad \text{при } i=5,$$

а слева от начала координат

$$c_1 = -\frac{1}{2}l \quad \text{при } i=1,$$

$$c_3 = -\frac{3}{2}l \quad \text{при } i=3,$$

$$c_5 = -\frac{5}{2}l \quad \text{при } i=5.$$

Таким образом, для правой части балки-полоски

$$c_i = +i\frac{l}{2} \text{ и } \alpha c_i = +i\alpha\frac{l}{2} = +i\alpha, \text{ где } i=1, 3, 5, \dots$$

для левой же части

$$c_i = -i\frac{l}{2} \text{ и } \alpha c_i = -i\alpha\frac{l}{2} = -i\alpha, \text{ где } i=1, 3, 5, \dots$$

Подставляя значения αc_i в ф-лу (178.IV), получим для прогиба балки-полоски от реактивных усилий промежуточных ребер жесткости следующее выражение:

$$w_{\alpha c_i} = \frac{B_2}{4\sqrt{2}E\ell} \left[\sum_{i=1,3,5} (W_1|i\alpha - \alpha\ell| + W_2|i\alpha + \alpha\ell|) \right]. \quad (179.IV)$$

Таким образом, в соответствии с ф-лой (174.IV) получим следующее выражение для прогиба балки-полоски, выделенной из оболочки, подкрепленной основными шпангоутами и промежуточными ребрами жесткости и нагруженной равномерно распределенной внешней нагрузкой:

$$w = -\left(1 - \frac{\rho}{2}\right) \frac{p\ell^2}{2E} + \frac{B_2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}E\ell} \left[W_1(\alpha\ell) + \sum_{i=1,3,5} (W_1|2i\alpha - \alpha\ell| + W_2|2i\alpha + \alpha\ell|) \right] + \frac{B_2\sqrt{2}}{8\sqrt{2}E\ell} \left[\sum_{i=1,3,5} (W_1|i\alpha - \alpha\ell| + W_2|i\alpha + \alpha\ell|) \right]. \quad (180.IV)$$

Здесь α определяется по ф-ле (162.IV)

$$\alpha = \frac{H}{2} = \frac{\sqrt{2(1-\rho^2)}}{2} \cdot \frac{l}{\sqrt{Eh}}. \quad (181.IV)$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}E\ell} = \frac{\sqrt{2(1-\rho^2)}}{2} \left(\frac{\ell}{h}\right)^{3/2}. \quad (182.IV)$$

Входящие в выражение (180. IV) реакции шпангоутов R_1 и R_2 определяются из граничных условий (160. IV) с учетом ф-л (158. IV) и (159. IV).

Подставляя выражение для прогиба (180. IV) в граничные условия (160. IV), получим два уравнения для определения неизвестных R_1 и R_2 :

$$\left. \begin{aligned} R_1 \left[\frac{\frac{1}{2} \sqrt{\mu^2}}{\sqrt[3]{2(1-\mu^2)} f} + \frac{\sqrt[3]{2}}{2} W_3(0) + \sqrt[3]{2} W_3(2a) + \sqrt[3]{2} W_3(4a) + \dots \right] + \\ + R_2 \left[\sqrt[3]{2} W_3(a) + \sqrt[3]{2} W_3(3a) + \sqrt[3]{2} W_3(5a) + \dots \right] = \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \frac{P}{a} \\ R_1 \left[\sqrt[3]{2} W_3(a) + \sqrt[3]{2} W_3(3a) + \sqrt[3]{2} W_3(5a) + \dots \right] + \\ + R_2 \left[\frac{\frac{1}{2} \sqrt{\mu^2}}{\sqrt[3]{2(1-\mu^2)} f} + \frac{\sqrt[3]{2}}{2} W_3(0) + \sqrt[3]{2} W_3(2a) + \right. \\ \left. + \sqrt[3]{2} W_3(4a) + \dots \right] = \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \frac{P}{a} \end{aligned} \right\} \quad (183. IV)$$

Отметим, что функции $W_3(u)$ с увеличением аргумента u резко убывают. Для оболочек подводных лодок аргументы u обычно достаточно велики, так что ряды, входящие в систему (183. IV), сходятся очень быстро.

Определив из системы (183. IV) значения R_1 и R_2 , мы можем их представить в виде

$$\left. \begin{aligned} R_1 = \gamma_1 \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \frac{P}{a} \\ R_2 = \gamma_2 \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \frac{P}{a} \end{aligned} \right\} \quad (184. IV)$$

После решения системы (183. IV) коэффициенты γ_1 и γ_2 становятся известными и равными

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 = \frac{R_1}{\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \frac{P}{a}} \\ \gamma_2 = \frac{R_2}{\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \frac{P}{a}} \end{aligned} \right\} \quad (185. IV)$$

Таким образом, прогиб оболочки, подкрепленной основными шпангоутами и промежуточными ребрами жесткости, будет равен

$$\begin{aligned} w = - \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \frac{P a^3}{E s} \left\{ 1 - \gamma_1 \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \left[W_3(ax) + \sum_{i=1,3,5} (W_3(2a - ax) + \right. \right. \\ \left. \left. + W_3(2a + ax)) \right] - \gamma_2 \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \left[\sum_{i=1,3,5} (W_3(ia - ax) + W_3(ia + ax)) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (186. IV)$$

Знание прогиба оболочки достаточно для определения всех усилий и моментов, а следовательно, и напряжений в любой точке оболочки.

Действительно, осевое усилие T_1 определяется по выражению (10. IV), а соответствующее ему осевое напряжение равно

$$\sigma_1^o = - \frac{E T_1}{S}.$$

Кольцевое усилие T_2 определяется по ф-ле (13. IV) и соответствующее ему кольцевое напряжение σ_2^o равно

$$\sigma_2^o = \frac{T_2}{V} = \frac{E}{r} \varphi - r \frac{E T_2}{S}.$$

Подставив сюда значение φ из ф-лы (186. IV), получим

$$\sigma_2^o = - \left(1 - \frac{r}{2} \right) \frac{E r}{V} \left\{ \left(1 - \frac{\gamma_0}{2} \sqrt{2} \left[W_3(x) + \sum_{1,2,3} (W_3 | 2n - x) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + W_3 | 2n + x) \right] - \gamma_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\sum_{1,2,3} (W_3 | m - x) + W_3 | m + x) \right] \right\} - \frac{r}{2} \cdot \frac{E r}{S}. \quad (187. IV)$$

Для определения изгибных напряжений необходимо определить изгибающие моменты.

Изгибающий момент в поперечных сечениях оболочки M_1 определяется по выражению (17. IV), а изгибающий момент в продольных сечениях оболочки M_2 — по ф-ле (13. IV).

Взяв вторую производную от прогиба w по координате x с учетом дифференциальных зависимостей (171. IV), получим следующие выражения для изгибающего момента M_1 :

$$M_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \frac{r}{2}}{V 3(1 - \nu^2)} E r^3 \left\{ \gamma_0 \sqrt{2} \left[W_1(x) + \sum_{1,2,3} (W_1 | 2n - x) + \right. \right. \\ \left. \left. + W_1 | 2n + x) \right] + \gamma_0 \sqrt{2} \left[\sum_{1,2,3} (W_1 | m - x) + W_1 | m + x) \right] \right\}. \quad (188. IV)$$

Изгибные напряжения в поперечных сечениях (осевые напряжения) будут равны

$$\sigma_1^{из} = \pm \frac{6 M_1}{V^2} = \pm 1,5 \frac{1 - \frac{r}{2}}{V 3(1 - \nu^2)} \cdot \frac{E r}{V} \left\{ \gamma_0 \sqrt{2} \left[W_1(x) + \sum_{1,2,3} (W_1 | 2n - x) + \right. \right. \\ \left. \left. + W_1 | 2n + x) \right] + \gamma_0 \sqrt{2} \left[\sum_{1,2,3} (W_1 | m - x) + W_1 | m + x) \right] \right\}. \quad (189. IV)$$

Изгибные напряжения в продольных сечениях оболочки (кольцевые напряжения) равны

$$\sigma_2^{из} = \pm \frac{6 M_2}{V^2} = r \sigma_1^{из}. \quad (190. IV)$$

Суммарные осевые и кольцевые напряжения соответственно будут

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_1^o + \sigma_1^{из} \\ \sigma_2 &= \sigma_2^o + \sigma_2^{из} \end{aligned} \right\}. \quad (191. IV)$$

Таким образом, все напряжения в оболочке определены.

В заключение определим напряжения в основных шпангоутах и в промежуточных ребрах жесткости.

Напряжения в основных шпангоутах

$$\sigma_{\text{ос}} = - \frac{R_f}{f}. \quad (192. IV)$$

Напряжения в промежуточных ребрах жесткости будут равны

$$\sigma_p = - \frac{R_f}{f}. \quad (193. IV)$$

Для удобства определения напряжений в оболочке, подкрепленной основными шпангоутами и промежуточными ребрами жесткости, составим практическую схему расчета.

Практическая схема расчета

Исходные данные: r , δ , l , F , f , p .

Определяются:

1. Параметр α по ф-ле (181. IV).
2. Слагаемые, входящие в систему (183. IV),

$$\frac{2\sqrt{r\delta}}{\sqrt{3(1-p^2)}f} \quad \text{и} \quad \frac{2\sqrt{r\delta}}{\sqrt{3(1-p^2)}f}.$$

3. Значения функций Циммермана—Клишневича

$$\begin{aligned} \sqrt{2} W_2(0), & \quad \sqrt{2} W_4(\alpha), \\ \sqrt{2} W_4(2\alpha), & \quad \sqrt{2} W_4(3\alpha), \\ \sqrt{2} W_4(4\alpha), & \quad \sqrt{2} W_4(5\alpha). \end{aligned}$$

4. Из системы двух ур-ний (183. IV) R_1 и R_2 .
5. Напряжения в основных шпангоутах и в промежуточном ребре жесткости по ф-лам (192. IV) и (193. IV).
6. Коэффициенты η_1 и η_2 по ф-лам (185. IV).
7. Прогиб обшивки w по ф-ле (186. IV).
8. Осевые и кольцевые тенные напряжения в обшивке по выражениям (186. IV) и (187. IV).
9. Осевые и кольцевые изгибные напряжения в обшивке по формулам (189. IV) и (190. IV).
10. Осевые и кольцевые суммарные напряжения в обшивке по формулам (191. IV).

В заключение сделаем одно замечание. Как видно из таблиц, функции $W_2(\alpha)$ и $W_4(\alpha)$ быстро затухают. Так, при значении m , равном 4, значение $\sqrt{2} W_2(\alpha)$ равно 0,026, а $\sqrt{2} W_4(\alpha)$ равно 0,002. Имея в виду, что практический интерес для строительной механики подводных лодок представляют значения $m=1,2$ и более, в формулах для напряжений (187. IV) и (189. IV) при суммировании достаточно удерживать лишь два члена суммы, соответствующие $i=1$ и $i=2$; остальные члены дают практически пренебрежимые добавки. Поэтому для практического

использования вместо ф-л (187, IV) и (189, IV) можно рекомендовать следующие:

$$\alpha_0^0 = - \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \frac{P}{b} \left\{1 - \gamma_0 \frac{\sqrt{2}}{2} [W_1(ax) + W_1(2a - ax) + \right. \\ \left. + W_1(2a + ax)] - \gamma_0 \frac{\sqrt{2}}{2} [W_2(a - ax) + W_2(a + ax) + \right. \\ \left. + W_2(3a - ax)]\right\} - \frac{\mu}{2} - \frac{P}{b},$$

$$\alpha_1^{00} = \pm 1,5 \frac{1 - \frac{\mu}{2}}{\sqrt{3(1 - \mu^2)}} \cdot \frac{P}{b} \left\{ \gamma_1 \sqrt{2} [W_1(ax) + W_1(2a - ax) + \right. \\ \left. + W_1(2a + ax)] + \gamma_1 \sqrt{2} [W_2(a - ax) + W_2(a + ax) + W_2(3a - ax)] \right\}.$$

§ 35. Определение напряжений в обшивке прочного корпуса в районе переборок *

Определение напряжений в обшивке прочного корпуса в районе установки поперечных переборок, рамных шпангоутов или других жестких поперечных связей представляет для строительной механики подожных

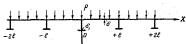


Рис. 49

лодок несомненный практический интерес. Естественно, что такая жесткая связь, как поперечная переборка, приводит к практическому исключению прогиба оболочки в месте соединения ее с прочной переборкой. На некотором удалении от переборки прогибы оболочки будут существенно возрастать, так что в оболочке появятся значительные изгибающие моменты. Поскольку оболочка, вследствие относительно малой жесткости на изгиб, слабо сопротивляется изгибу, появление больших изгибающих моментов приводит к возникновению значительных изгибных напряжений. В результате последние, суммируясь с цепными напряжениями, могут при расчетной нагрузке превысить предел текучести материала. В этом случае оболочка может разрушиться вследствие перенапряжений в относительно небольшом районе, поэтому определению напряженного состояния оболочки в районе установки поперечных переборок и рамных шпангоутов необходимо уделять должное внимание.

Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку, нагруженную внешним равномерным давлением интенсивности p . Оболочка подкреплена одинаковыми и равноотстоящими шпангоутами, а в сечении $x=0$ опирается на плоскую поперечную переборку (рис. 49).

* Решение этой задачи получено Н. С. Соловьевым.

Пусть R_1 — интенсивность радиальной загрузки обшивки поперечной переборки;

R_2 — интенсивность радиальной загрузки обшивки шпангоутов, ближайших к поперечной переборке;

R_3 — интенсивность радиальной загрузки обшивки остальных шпангоутов;

δ — толщина листов переборки.

Вследствие наличия поперечной переборки реакции R_2 для шпангоутов, удаленных от переборки на разные расстояния, будут различны. Однако, при обычных значениях параметра μ это различие является столь малым, что погрешность, связанная с учетом различия R_2 для разных шпангоутов, несомненно и практически с тем считается не следует.

Таким образом, схема загрузки оболочки показана на рис. 50. Определение напряженного состояния круговой цилиндрической оболочки при осесимметричной нагрузке, как известно, сводится к исследованию изгиба призматической балки на упругом основании при заданных граничных условиях. При этом изгибная жесткость балки на упругом основании EI , коэффициент жесткости упругого основания k и поперечная нагрузка q связаны с конструктивными размерами оболочки, ее упругими константами и величиной внешнего давления зависимостями (19.IV).

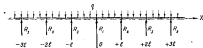


Рис. 50

Радиальное перемещение оболочки w будет равно алгебраической сумме радиальных перемещений от внешней нагрузки w_q , от реакции переборки w_{R_1} , от реакции шпангоутов w_{R_2} и w_{R_3} , т. е.

$$w = w_q + w_{R_1} + w_{R_2} + w_{R_3}. \quad (194.IV)$$

Внешняя нагрузка q вызывает равномерное радиальное обжатие оболочки. Поэтому прогиб оболочки от нагрузки q будет определяться выражением (175.IV).

Прогиб оболочки от сосредоточенной силы R_1 , приложенной в точке c_1 , будет равен

$$w_1 = \frac{R_1}{4\sqrt{2}aEI} W_1(a|x - c_1|), \quad (195.IV)$$

где a определяется по ф-ле (162.IV).

Применим ф-лу (195.IV) к действию сосредоточенной силы R_1 . Так как точка приложения R_1 находится в начале координат, то $c_1 = 0$. Следовательно, прогиб оболочки от реакции переборки R_1 будет

$$w_{R_1} = \frac{R_1}{4\sqrt{2}aEI} W_1(ax). \quad (196.IV)$$

Прогиб оболочки от реакций двух шпангоутов, ближайших к поперечной переборке, равен

$$w_{1R_2} = \sum_{j=1} \frac{R_j}{4\sqrt{T} \sigma EI} W_1 [x(x - \varepsilon_j)] = \frac{R_2}{4\sqrt{T} \sigma EI} \sum_{j=1} W_1 [x(x - \varepsilon_1)]. \quad (197. IV)$$

Известно, что функция W_1 обладает свойством симметрии, поэтому

$$W_1 [x(x - \varepsilon_1)] = W_1 [x(\varepsilon_1 - x)] = W_1 (x\varepsilon_1 - x^2).$$

Абсцисса шпангоута, лежащего справа от переборки, будет

$$\varepsilon_1 = +l, \quad x\varepsilon_1 = +xl = +2xl.$$

Абсцисса шпангоута, лежащего слева от переборки, равна

$$\varepsilon_1 = -l, \quad x\varepsilon_1 = -xl = -2xl.$$

Таким образом, прогиб оболочки, вызванный реакциями двух ближайших к переборке шпангоутов, будет равен

$$w_{1R_2} = \frac{R_2}{4\sqrt{T} \sigma EI} [W_1 (2xl - xl) + W_1 (2xl + xl)]. \quad (198. IV)$$

Определим прогиб оболочки, вызванный реакциями остальных шпангоутов w_{1R_2}

$$w_{1R_2} = \sum_{j=2,3,4} \frac{R_j}{4\sqrt{T} \sigma EI} W_1 [x(x - \varepsilon_j)] = \frac{R_2}{4\sqrt{T} \sigma EI} \sum_{j=2,3,4} W_1 (x\varepsilon_j - xl). \quad (199. IV)$$

Шпангоуты, лежащие справа от переборки (исключая уже рассмотренный ближайший к переборке шпангоут), имеют абсциссы

$$\varepsilon_2 = +2l \quad \text{при } i = 2,$$

$$\varepsilon_3 = +3l \quad \text{при } i = 3,$$

$$\varepsilon_4 = +4l \quad \text{при } i = 4,$$

а шпангоуты, лежащие слева от переборки, имеют абсциссы

$$\varepsilon_2 = -2l \quad \text{при } i = 2,$$

$$\varepsilon_3 = -3l \quad \text{при } i = 3,$$

$$\varepsilon_4 = -4l \quad \text{при } i = 4.$$

Следовательно, для шпангоутов правой части оболочки получим

$$x\varepsilon_i = +iul = +i2xl, \\ i = 2, 3, 4$$

Для шпангоутов левой части оболочки

$$x\varepsilon_i = -iul = -i2xl, \\ i = 2, 3, 4$$

Таким образом, прогиб оболочки от реакций R_2 будет равен

$$w_{1R_2} = \frac{R_2}{4\sqrt{T} \sigma EI} \sum_{j=2,3,4} [W_1 (i2xl - xl) + W_1 (i2xl + xl)]. \quad (200. IV)$$

Все составляющие радиального перемещения оболочки определены. Поэтому суммарное радиальное перемещение оболочки в соответствии с ф-лой (194.IV) равно

$$\begin{aligned} w = - \left(1 - \frac{\nu}{2} \right) \frac{R_2 r^2}{Eh} + \frac{R_1}{4\sqrt{3} \sigma E l} W_4(\alpha x) + \frac{R_2}{4\sqrt{3} \sigma E l} [W_2(2a - \alpha x) + \\ + W_2(2a + \alpha x)] + \frac{R_3}{4\sqrt{3} \sigma E l} \sum_{i=1,3,4} [W_2(2a - \alpha x) + W_2(2a + \alpha x)]. \quad (201.IV) \end{aligned}$$

Выражение (201.IV) и есть общее выражение для радиального перемещения оболочки при осесимметричной ее деформации. В этом выражении неизвестными остаются реакции переборки R_1 и шпангоутов R_2 и R_3 . Эти реакции определяются из граничных условий.

Сформулируем граничные условия.

Прогиб оболочки в месте соприкосновения ее с поперечной переборкой будет равен радиальному смещению края переборки. Из теории упругости известно, что радиальное смещение круглой пластины радиусом r и толщиной h , нагруженной в своей плоскости равномерно распределенной нагрузкой интенсивности R_1 , определяется по формуле

$$w_0 = - (1 - \nu) \frac{R_1 r}{E h_1} \quad (202.IV)$$

или для $\nu = 0,3$

$$w_0 = 0,7 \frac{R_1 r}{E h_1}.$$

Выражение (202.IV) и есть первое граничное условие. Прогиб оболочки в месте соприкосновения с ближайшим к ней шпангоутом будет равен обжатия этого шпангоута, т. е.

$$w_1 = - \frac{R_2 r^2}{E l^2}. \quad (203.IV)$$

Выражение (203.IV) есть второе граничное условие задачи.

Наконец, прогиб оболочки в месте соприкосновения с остальными шпангоутами равен обжатия этих шпангоутов, т. е.

$$w_{\infty} = - \frac{R_3 r^2}{E l^2}. \quad (204.IV)$$

Выражение (204.IV) есть третье и последнее граничное условие.

Имея общее выражение для прогиба оболочки w (201.IV) и приравняв этот прогиб в сечении $x=0$ прогибу переборки w_0 , в сечении $x=+l$ прогибу первого шпангоута w_1 и в сечении $x=+2l$ прогибу остальных шпангоутов w_{∞} , приходим к системе трех линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных R_1 , R_2 , R_3 :

$$\begin{aligned} - \left(1 - \frac{\nu}{2} \right) \frac{R_2 r^2}{E h} + \frac{R_1}{4\sqrt{3} \sigma E l} W_4(0) + \frac{2R_2}{4\sqrt{3} \sigma E l} W_4(2a) + \\ + \frac{2R_3}{4\sqrt{3} \sigma E l} \sum_{i=1,3,4} W_2(2a) = - (1 - \nu) \frac{R_1 r}{E h_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \frac{R_0^2}{2k} + \frac{R_0}{4\sqrt{2}\omega EI} W_1(2a) + \frac{R_0}{4\sqrt{2}\omega EI} [W_1(0) + W_1(4a)] + \\
& + \frac{R_0}{4\sqrt{2}\omega EI} [W_1(2a) + W_1(4a) + 2W_1(6a) + 2W_1(8a) + \dots] = -\frac{R_0 \rho^2}{2k}, \\
& - \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \frac{R_1^2}{2k} + \frac{R_1}{4\sqrt{2}\omega EI} W_1(4a) + \frac{R_1}{4\sqrt{2}\omega EI} [W_1(2a) + W_1(6a)] + \\
& + \frac{R_1}{4\sqrt{2}\omega EI} [W_1(0) + W_1(2a) + W_1(4a) + W_1(6a) + \dots] = -\frac{R_1 \rho^2}{2k}
\end{aligned}$$

или

$$\left. \begin{aligned}
& R_1 \left[1 + \frac{2(1-\mu)}{4\sqrt{3}(1-\mu^2)} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{\tau k}}{\rho} \right] + R_2 2\sqrt{2} W_1(2a) + \\
& + R_3 2 \sum_{2,3,4} \sqrt{2} [W_1(2a)] = \frac{2\left(1-\frac{\mu}{2}\right)}{4\sqrt{3}(1-\mu^2)} \rho \sqrt{\tau k} \\
& R_1 \sqrt{2} W_1(2a) + R_2 \left[1 + \sqrt{2} W_1(4a) + \frac{2}{\sqrt{3}(1-\mu^2)} \cdot \frac{2\sqrt{\tau k}}{\rho} \right] + \\
& + R_3 [\sqrt{2} W_1(2a) + \sqrt{2} W_1(4a) + 2\sqrt{2} W_1(6a) + \\
& + 2\sqrt{2} W_1(8a) \dots] = \frac{2\left(1-\frac{\mu}{2}\right)}{4\sqrt{3}(1-\mu^2)} \rho \sqrt{\tau k} \\
& R_1 \sqrt{2} W_1(4a) + R_2 [\sqrt{2} W_1(2a) + \sqrt{2} W_1(6a)] + \\
& + R_3 \left[1 + \sqrt{2} W_1(2a) + \sqrt{2} W_1(4a) + \sqrt{2} W_1(6a) + \dots \right. \\
& \left. \dots + \frac{2}{4\sqrt{3}(1-\mu^2)} \cdot \frac{2\sqrt{\tau k}}{\rho} \right] = \frac{2\left(1-\frac{\mu}{2}\right)}{4\sqrt{3}(1-\mu^2)} \rho \sqrt{\tau k}
\end{aligned} \right\} \quad (205. IV)$$

Решив систему (205. IV) относительно R_1 , R_2 и R_3 , получим значения реакций переборки R_1 и шпангоута R_2 и R_3 .

Представим значения этих реакций в виде

$$\left. \begin{aligned}
R_1 &= \frac{2\left(1-\frac{\mu}{2}\right)}{4\sqrt{3}(1-\mu^2)} k_1 \rho \sqrt{\tau k} \\
R_2 &= \frac{2\left(1-\frac{\mu}{2}\right)}{4\sqrt{3}(1-\mu^2)} k_2 \rho \sqrt{\tau k} \\
R_3 &= \frac{2\left(1-\frac{\mu}{2}\right)}{4\sqrt{3}(1-\mu^2)} k_3 \rho \sqrt{\tau k}
\end{aligned} \right\} \quad (206. IV)$$

Тогда прогиб оболочки w будет определяться по формуле

$$w = - \left(1 - \frac{\nu}{2} \right) \frac{E \rho^2}{E_1} \left\{ 1 - k_1 \sqrt{2} W_1(ax) - k_2 \left[\sqrt{2} W_1(2a - ax) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{2} W_1(2a + ax) \right] - k_3 \sum_{\lambda, \lambda', \lambda''} \left[\sqrt{2} W_1(i2a - ax) + \sqrt{2} W_1(i2a + ax) \right] \right\}. \quad (207. IV)$$

Это и есть окончательное выражение для прогиба цилиндрической оболочки в любой ее точке. Входящие в него коэффициенты k_1 , k_2 и k_3 определяются из выражений (206. IV).

Определим теперь вторую производную w по x .

Взяв вторую производную w по x и учитывая правила дифференцирования функций Цаммермана—Клэппенца, будем иметь

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = - \left(1 - \frac{\nu}{2} \right) \frac{E \rho^2}{E_1} 2a^3 \left\{ k_1 \sqrt{2} W_1(ax) + k_2 \left[\sqrt{2} W_1(2a - ax) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{2} W_1(2a + ax) \right] + k_3 \sum_{\lambda, \lambda', \lambda''} \left[\sqrt{2} W_1(i2a - ax) + \sqrt{2} W_1(i2a + ax) \right] \right\}. \quad (208. IV)$$

Знаки прогиба оболочки w и второй ее производной по координате x достаточно для определения всех усилий и моментов, а следовательно, и напряжений в рассматриваемой оболочке.

Осевое усилие T_1 и соответствующее ему осевое цепное напряжение σ_1^c определяются по ф-лам (10. IV) и (56. IV).

Кольцевое усилие T_2 и соответствующее ему кольцевое цепное напряжение определяются по ф-лам (13. IV) и (57. IV).

После подстановки w из ф-лы (207. IV) в ф-лу (57. IV), будем иметь

$$\sigma_2^c = - \left(1 - \frac{\nu}{2} \right) \frac{E \rho^2}{E_1} \left\{ 1 - k_1 \sqrt{2} W_1(ax) - k_2 \left[\sqrt{2} W_1(2a - ax) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{2} W_1(2a + ax) \right] - k_3 \sum_{\lambda, \lambda', \lambda''} \left[\sqrt{2} W_1(i2a - ax) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{2} W_1(i2a + ax) \right] \right\} - \frac{\nu}{2} \cdot \frac{E \rho^2}{E_1}. \quad (209. IV)$$

Изгибающие моменты в поперечных сечениях оболочки M_1 и соответствующие им осевые изгибные напряжения σ_1^M определяются по ф-лам (17. IV) и (102. IV).

Подставив в ф-лу (17. IV) значение $\frac{d^2 w}{dx^2}$ из ф-лы (208. IV), приходим к следующему выражению для осевого изгибающего момента в любом поперечном сечении оболочки:

$$M_1 = \frac{1 - \frac{\nu}{2}}{1 - \nu^2} \cdot \frac{\sqrt{3(1 - \nu^2)}}{6} E \rho^3 \left\{ k_1 \sqrt{2} W_1(ax) + k_2 \left[\sqrt{2} W_1(2a - ax) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{2} W_1(2a + ax) \right] + k_3 \sum_{\lambda, \lambda', \lambda''} \left[\sqrt{2} W_1(i2a - ax) + \sqrt{2} W_1(i2a + ax) \right] \right\}. \quad (210. IV)$$

Осевые изгибаемые напряжения при этом будут равны

$$\sigma_{\theta}^{(0)} = \pm \frac{6M_1}{2t} = \mp \frac{1-\mu}{1-\mu^2} \sqrt{3(1-\mu^2)} \left\{ k_1 \sqrt{2} W_1(2\alpha) + k_2 [\sqrt{2} W_1(2\alpha - \alpha\epsilon) + \sqrt{2} W_1(2\alpha + \alpha\epsilon)] + k_3 \sum_{i=1,3,5} [\sqrt{2} W_1(i2\alpha - \alpha\epsilon) + \sqrt{2} W_1(i2\alpha + \alpha\epsilon)] \right\} \quad (211. IV)$$

Изгибающий момент в продольных сечениях оболочки M_2 и соответствующие ему кольцевые изгибаемые напряжения $\sigma_{\varphi}^{(0)}$ определяются по ф-лам (15. IV) и (102. IV).

Наконец, суммарные напряжения в поперечных и продольных сечениях оболочки определяются по ф-лам (103. IV).

Таким образом, могут быть определены все величины, характеризующие деформацию оболочки. В связи с тем, что входящие в расчеты формулы функции W_1 и W_2 протабулированы, определение прогибов и напряжений не вызывает затруднений. Изложенное позволяет составить следующую практическую схему расчета оболочки в районе вербоя.

Практическая схема расчета

Исходные данные: r , l , l_1 , R , l_1 , ρ , E , μ .

Определяются:

1. Параметр α по ф-ле (181. IV).
2. Функции Цаммермана—Клишенича (см. таблицы Приложения V)

$$\sqrt{2} W_1(2\alpha), \quad \sqrt{2} W_1(4\alpha), \quad \sqrt{2} W_1(6\alpha) \dots$$

$$\sqrt{2} W_1'(2\alpha), \quad \sqrt{2} W_1'(4\alpha), \quad \sqrt{2} W_1'(6\alpha) \dots$$

3. Вспомогательные величины

$$\frac{2}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{\sqrt{rR}}{r}, \quad \frac{2(1-\mu)}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \cdot \frac{1}{k_1} \cdot \frac{\sqrt{rR}}{r}.$$

4. Коэффициенты k_1 , k_2 , k_3 из системы

$$k_1 \left[1 + \frac{2(1-\mu)}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \cdot \frac{1}{k_1} \cdot \frac{\sqrt{rR}}{r} \right] + k_2 2 \sqrt{2} W_2(2\alpha) + k_3 2 \sum_{i=1,3,5} \sqrt{2} W_2(i2\alpha) = 1,$$

$$k_1 \sqrt{2} W_2(2\alpha) + k_2 \left[1 + \sqrt{2} W_2(4\alpha) + \frac{2}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \cdot \frac{1}{k_1} \cdot \frac{\sqrt{rR}}{r} \right] +$$

$$+ k_3 [\sqrt{2} W_2(2\alpha) + \sqrt{2} W_2(4\alpha) + 2 \sqrt{2} W_2(6\alpha) + 2 \sqrt{2} W_2(8\alpha) + \dots] = 1,$$

$$k_1 \sqrt{2} W_2(4\alpha) + k_2 [\sqrt{2} W_2(2\alpha) + \sqrt{2} W_2(6\alpha)] + k_3 [1 + \sqrt{2} W_2(2\alpha) +$$

$$+ \sqrt{2} W_2(4\alpha) + \sqrt{2} W_2(6\alpha) + \dots + \frac{2}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \cdot \frac{1}{k_1} \cdot \frac{\sqrt{rR}}{r}] = 1.$$

$$* \text{ При } \mu = 0,3 \quad \frac{2}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} = 1,06, \quad \frac{2(1-\mu)}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} = 1,02.$$

5. Реакция переборки R_3 , ближайшего к переборке шпангоута R_1 и остальных шпангоутов R_2 по ф-лам (206. IV).

6. Прогиб оболочки в любой ее точке по ф-ле (207. IV).

7. Средние, изгибные и суммарные напряжения в поперечных сечениях оболочки по ф-лам (56. IV), (211. IV) и (103. IV).

8. Средние, изгибные и суммарные напряжения в продольных сечениях оболочки по ф-лам (209. IV), (102. IV) и (103. IV).

Анализ показывает, что при значениях параметров $\mu > 1,2$ можно считать, что реакции всех шпангоутов будут одинаковы.

Следовательно,

$$R_1 \approx R_2 \quad (212. IV)$$

Равенство (212. IV) позволяет значительно упростить расчетную схему и исключить необходимость решения системы трех уравнений с тремя неизвестными.

Действительно, приравняв R_1 и R_2 , из ур-ния (201. IV) получим следующее значение прогиба оболочки в любой ее точке:

$$\begin{aligned} w = & - \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \frac{p r^3}{2S} + \frac{R_1}{4 \sqrt[3]{2(1-\mu^2)}} W_d(ax) + \\ & + \frac{R_2}{4 \sqrt[3]{2(1-\mu^2)}} \sum_{i=1,2,3} [W_d(2a - ax) + W_d(2a + ax)]. \end{aligned} \quad (213. IV)$$

Приравняв, как и ранее, прогиб оболочки в сечении $x = 0$ обшивки переборки и в сечении $x = l$ — обшивки шпангоута, придем к системе двух линейных алгебраических уравнений относительно реакций R_1 и R_2 . Раскрывая определитель системы, получим

$$\begin{aligned} R_1 = & \frac{2 \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)}{\sqrt[3]{2(1-\mu^2)}} p \sqrt[3]{r^3} \frac{1 - \sqrt[3]{2} W_d(2a) - \sqrt[3]{2} W_d(4a) + \frac{2}{\sqrt[3]{2(1-\mu^2)}} \cdot \frac{1}{r} \sqrt[3]{r^3}}{\left[1 + \frac{2(1-\mu)}{\sqrt[3]{2(1-\mu^2)}} \cdot \frac{1}{\xi_1} \cdot \frac{\sqrt[3]{r^3}}{r}\right] \left[1 + \sqrt[3]{2} W_d(2a) + \right.} \\ & \left. + \sqrt[3]{2} W_d(4a) + \frac{2}{\sqrt[3]{2(1-\mu^2)}} \cdot \frac{1}{r} \sqrt[3]{r^3}\right]}, \end{aligned} \quad (214. IV)$$

$$\begin{aligned} R_2 = & \frac{2 \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)}{\sqrt[3]{2(1-\mu^2)}} p \sqrt[3]{r^3} \frac{1 - \sqrt[3]{2} W_d(2a) + \frac{2(1-\mu)}{\sqrt[3]{2(1-\mu^2)}} \cdot \frac{1}{\xi_1} \cdot \frac{\sqrt[3]{r^3}}{r}}{\left[1 + \frac{2(1-\mu)}{\sqrt[3]{2(1-\mu^2)}} \cdot \frac{1}{\xi_1} \cdot \frac{\sqrt[3]{r^3}}{r}\right] \left[1 + \sqrt[3]{2} W_d(2a) + \right.} \\ & \left. + \sqrt[3]{2} W_d(4a) + \frac{2}{\sqrt[3]{2(1-\mu^2)}} \cdot \frac{1}{r} \sqrt[3]{r^3}\right]}. \end{aligned} \quad (215. IV)$$

Представим реакции R_1 и R_2 в виде

$$R_1 = \frac{2\left(1 - \frac{\mu}{2}\right)}{\sqrt[3]{3(1-\mu^2)}} k_1 p \sqrt{r},$$

$$R_2 = \frac{2\left(1 - \frac{\mu}{2}\right)}{\sqrt[3]{3(1-\mu^2)}} k_2 p \sqrt{r},$$

где k_1 и k_2 — множители в ф-лах (214. IV) и (215. IV).

Прогиб оболочки в любом сечении x будет равен

$$w = -\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \frac{p r^2}{E h} \left\{ 1 - k_1 \sqrt{2} W_1(ax) - k_2 \sum_{1,2,3} [\sqrt{2} W_1(2a - ax) + \right. \\ \left. + \sqrt{2} W_2(2a + ax)] \right\}. \quad (216. IV)$$

Вторая производная прогиба по координате x определяется по формуле

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \frac{p r^2}{E h} 2a^2 \left\{ k_1 \sqrt{2} W_1(ax) + \right. \\ \left. + k_2 \sum_{1,2,3} [\sqrt{2} W_1(2a - ax) + \sqrt{2} W_2(2a + ax)] \right\}. \quad (217. IV)$$

Приведем практическую схему расчета для случая $\mu > 1,2$.

Практическая схема расчета

Определяются:

1. Параметр a по ф-ле (181. IV)
2. Функции Цинмермана—Клиппенберга (см. таблицу Приложения V)

$$\sqrt{2} W_1(0), \quad \sqrt{2} W_2(0),$$

$$\sqrt{2} W_1(2a), \quad \sqrt{2} W_2(2a),$$

$$\sqrt{2} W_1(4a), \quad \sqrt{2} W_2(4a).$$

3. Вспомогательные величины

$$\frac{2}{\sqrt[3]{3(1-\mu^2)}} \cdot \frac{3 \sqrt{r}}{r}, \quad \frac{2(1-\mu)}{\sqrt[3]{3(1-\mu^2)}} \cdot \frac{3}{k_1} \cdot \frac{\sqrt{r}}{r}.$$

4. Коэффициенты k_1 и k_2 по формулам

$$k_1 = \frac{1 - \sqrt{2} W_1(2a) + \frac{2}{\sqrt[3]{3(1-\mu^2)}} \cdot \frac{3 \sqrt{r}}{r} - \sqrt{2} W_2(4a)}{\left[1 + \frac{2(1-\mu)}{\sqrt[3]{3(1-\mu^2)}} \cdot \frac{3}{k_1} \cdot \frac{\sqrt{r}}{r} \right] \left[1 + \sqrt{2} W_1(2a) + \sqrt{2} W_2(4a) + \frac{2}{\sqrt[3]{3(1-\mu^2)}} \cdot \frac{3 \sqrt{r}}{r} \right]}$$

$$\text{• При } \mu = 0,3 \quad \frac{2\left(1 - \frac{\mu}{2}\right)}{\sqrt[3]{3(1-\mu^2)}} = 1,32.$$

$$k_2 = \frac{1 - \sqrt{3} W_1(2\alpha) + \frac{2(1-\nu)}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{1}{b_1} \cdot \frac{\sqrt{r^3}}{r}}{\left[1 + \frac{2(1-\nu)}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{1}{b_1} \cdot \frac{\sqrt{r^3}}{r} \right] \left[1 + \sqrt{3} W_1(2\alpha) + \sqrt{3} W_1(4\alpha) + \frac{2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{1}{b_1} \cdot \frac{\sqrt{r^3}}{r} \right]}$$

5. Реакции переборки R_1 и шпангоутов R_2 .
6. Прогиб оболочки в любой точке по ф-ле (216, IV).
7. Цепные напряжения в поперечных сечениях оболочки σ_1^0 по ф-ле (56, IV).
8. Изгибные напряжения в поперечных сечениях оболочки по формуле

$$\sigma_1^y = \mp \frac{\left(1 - \frac{\nu}{2}\right)}{1 - \nu^2} \sqrt{3(1 - \nu^2)} \frac{R_2}{b_1} \left\{ k_1 \sqrt{3} W_1(\alpha x) + \right. \\ \left. + k_2 \sum_{i=1,2} \left[\sqrt{3} W_1(2\alpha - \alpha x) + \sqrt{3} W_1(2\alpha + \alpha x) \right] \right\}.$$

9. Суммарные напряжения в поперечных сечениях оболочки по ф-ле (103, IV).
10. Цепные, изгибные и суммарные напряжения в продольных сечениях оболочки по ф-лам (57, IV), (102, IV) и (103, IV).

Практические расчеты показывают, что наличие таких жестких связей, как поперечные переборки, приводит к появлению больших изгибных напряжений в обшивке прочного корпуса обшиве переборок. Поэтому проверке прочности обшивки в районе установки переборок необходимо уделять должное внимание.

§ 36. О напряжениях в шпангоутах круговой цилиндрической оболочки

Решение Папкомова *

При определении напряжений в шпангоутах прочного корпуса мы рассматривали шпангоуты как упругие кольца, находящиеся в состоянии равномерного обжатия. При этом обжатие шпангоутов определялось по формуле

$$w = - \frac{R_{\text{об}} r^3}{E r}.$$

В действительности шпангоут представляет собой неоднородное кольцо, одинаково напряженное по всему поперечному сечению. Шпангоут состоит из стенки и свободного пояска. При этом стенка загружена по линии соприкосновения с обшивкой реактивным усилием от обшивки R_1 , а по линии соприкосновения со свободной полкой — реактивным усилием свободного пояска R_2 . Следовательно, стенка шпангоута находится в условиях осесимметричной плоской деформации, т. е. в условиях задачи Ламе (рис. 51).

Пусть r — наружный радиус стенки шпангоута; a — внутренний радиус стенки; b_1 — толщина стенки; b_2 — толщина свободного пояска; $2l_1$ — ширина свободного пояска; $\chi = \frac{a}{r}$.

* П. Ф. Папкович. О напряжениях в шпангоутах цилиндрической оболочки. Сб. НИИХ МС РККА, № 4, 1935 (по же см. в работе П. Ф. Папковича „Труды по прочности корабля“. Судостроение, 1956).

Свободный пояс можно рассматривать как цилиндрическую оболочку длиной $2l$, нагруженную посредине давлением реактивным усилием R_1 от стенки. Естественно, что наибольшие напряжения в свободном пояске возникнут в месте приложения силы R_1 , и по мере удаления от середины пояски эти напряжения будут уменьшаться.

Таким образом, как стенка шпангоута, так и его свободный поясск нагружены неравномерно, в связи с чем возникает вопрос о том, насколько точно расчетные формулы для обжатия кольца воспроизводят обжатие реального шпангоута.

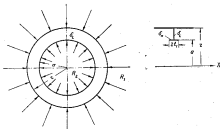


Рис. 51

Рассмотрим деформацию свободного пояска. Задача об осесимметричной деформации круговой цилиндрической оболочки сводится к задаче об изгибе балки-полоски, лежащей на сплошном упругом основании.

Дифференциальное уравнение изгиба этой балки-полоски имеет вид (см. Ф-лу (20.IV))

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + kw = 0,$$

где

$$EI = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}; \quad k = \frac{Eh_0}{a^2}.$$

Сформулируем граничные условия задачи. Как видно из рис. 52, нагрузка и конструкция рассматриваемой балки-полоски симметричны относительно сечения $x = 0$. Поэтому

$$\left. \begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= 0 \\ EI \frac{d^3 w}{dx^3} &= \frac{1}{2} R_1 \end{aligned} \right\} \text{ при } x=0. \quad (21a.IV)$$

Первое условие системы (218.IV) фиксирует равенство нулю угла поворота балки-полоски, а второе — перерезывающую силу, равную половине действующей внешней силы R_2 . Поскольку края свободного конца $x = \pm l_1$ совершенно свободны, изгибающий момент и перерезывающая сила на концах будут равны нулю. Таким образом, для других граничных условия имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varpi}{dx} &= 0 \\ \frac{d\varpi}{dx} &= 0 \\ \text{при } x &= \pm l_1 \end{aligned} \right\} \quad (219.IV)$$

Общий интеграл дифференциального уравня (20.IV) определяется выражением

$$\varpi = D_0 V_0(ax) + D_1 V_1(ax) + D_2 V_2(ax) + D_3 V_3(ax), \quad (220.IV)$$

где $V_0(ax)$, $V_1(ax)$, $V_2(ax)$, $V_3(ax)$ — четыре линейно независимых функции Пузыревского; D_0 , D_1 , D_2 , D_3 — произвольные постоянные интегрирования; коэффициент π определяется по формуле

$$\pi = \sqrt[4]{\frac{b}{4EI}} = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{\pi E_0}}. \quad (221.IV)$$



Рис. 22

Подставив решение (220.IV) граничным условиям (218.IV), получим

$$\varpi = \frac{R_2}{4EI\sqrt[4]{E_0}} [V_0(ax) + D_0 V_1(ax) + D_1 V_2(ax)]. \quad (222.IV)$$

Постоянные D_0 и D_1 определим из двух остальных граничных условий (219.IV). Подставив ф-лу (222.IV) в систему (219.IV), имеем следующую систему:

$$V_1'(a) + D_0 V_0'(a) + D_1 V_2'(a) = 0,$$

$$V_2'(a) + D_0 V_0'(a) + D_1 V_2'(a) = 0,$$

где

$$\pi = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{\pi E_0}} l_1. \quad (223.IV)$$

Учитывая правила дифференцирования функций Пузыревского, приведем эту систему уравнений к виду

$$V_1(a) - D_0 V_2(a) + D_1 V_2(a) = 0,$$

$$V_2(a) - D_0 V_1(a) - D_1 V_2(a) = 0.$$

В результате решения получим

$$D_0 = \frac{V_1(a)V_2(a) + V_2^2(a)}{V_1(a)V_1(a) + V_0(a)V_2(a)},$$

$$D_1 = \frac{V_0(a)V_2(a) - V_1^2(a)}{V_1(a)V_1(a) + V_1(a)V_2(a)}.$$

Учитывая, что при $x=0$ функции $V_1(0)$ и $V_2(0)$ равны нулю, для прогиба свободного поiska в сечении $x=0$ будем иметь следующее выражение:

$$w|_{x=0} = \frac{R_0}{4EI\sqrt{2}\alpha} D_0.$$

Подставляя сюда выражение для D_0 , будем иметь

$$w|_{x=0} = \frac{R_0}{4EI\sqrt{2}\alpha} \cdot \frac{V_1(\alpha)V_2(\alpha) + V_2^2(\alpha)}{V_1(\alpha)V_1(\alpha) + V_2(\alpha)V_2(\alpha)}$$

или

$$w|_{x=0} = \frac{R_0 \alpha^2}{2EJ_0 J_1} \cdot \frac{V_1(\alpha)V_2(\alpha) + V_2^2(\alpha)}{V_1(\alpha)V_1(\alpha) + V_2(\alpha)V_2(\alpha)} \sqrt{2}\pi. \quad (224. IV)$$

С другой стороны, если рассматривать свободный поиск как кольцо, склеенное равномерно распределенной нагрузкой интенсивности R_0 , то его обжатие определится известной формулой

$$w = \frac{R_0 \alpha^2}{E\pi}, \quad (225. IV)$$

где $\pi = 2l_0 b_0$ — площадь сечения поiska.

Более точное значение прогиба свободного поiska в сечении $x=0$ (см. ф-лу (224. IV)) может быть представлено в виде

$$w = \frac{R_0 \alpha^2}{E\pi \eta_1}, \quad (226. IV)$$

где η_1 — редукционный коэффициент рассматриваемого свободного поiska, определяемый формулой

$$\eta_1 = \frac{V_2(\alpha)V_1(\alpha) + V_2(\alpha)V_2(\alpha)}{[V_1(\alpha)V_1(\alpha) + V_2^2(\alpha)]\alpha\sqrt{2}}. \quad (227. IV)$$

Значения редукционного коэффициента η_1 для различных значений α приведены в табл. 1.

Таблица 1

α	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,20
η_1	1,000	0,999	0,997	0,992	0,979	0,974	0,431

Из таблицы видно, что до значений $\alpha < 0,4$ редукционный коэффициент η_1 близок к единице. Однако при дальнейшем увеличении α этот коэффициент существенно убывает.

Теперь найдем реакцию взаимодействия свободного поiska в стенке шпангоута R_0 . Эту реакцию можно определить из рассмотрения деформации стенки. Стенка шпангоута находится в условиях осесимметричной плоской деформации, поэтому для определения радиальных перемещений можно воспользоваться известным из теории упругости решением задачи Ламе (см. рис. 51).

Пусть w_0 — радиальное перемещение наружного края стенки шпангоута, а w_1 — радиальное перемещение ее внутреннего края. Из решения

задачи Ляме известно, что перемещения наружного края w_a и перемещение внутреннего края w_b определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} w_a &= R_1 \frac{r}{E k_0} \left(\frac{r^2 + a^2}{r^2 - a^2} + \mu \right) - R_2 \frac{r}{E k_0} \cdot \frac{2r^2}{r^2 - a^2} \\ w_b &= R_1 \frac{a}{E k_0} \cdot \frac{2r^2}{r^2 - a^2} - R_2 \frac{a}{E k_0} \left(\frac{r^2 + a^2}{r^2 - a^2} + \mu \right) \end{aligned} \right\} \quad (228. IV)$$

Приравняв радиальное перемещение внутреннего края стенки, определенное по ф-ле (228. IV), перемещению свободного конца в месте их сопряжения (226. IV), получим

$$R_2 = R_1 \frac{2r_0}{a k_1 + a k_0} \cdot \frac{\gamma_a}{\gamma_b} \quad (229. IV)$$

где $\kappa = k_0 (r - a)^2$ — площадь сечения стенки,

$$\left. \begin{aligned} \gamma_b &= \frac{a^2 + ar}{2r^2} \\ \gamma_a &= \frac{a^2 + ar}{r^2 + a^2 + \mu (r^2 - a^2)} \end{aligned} \right\} \quad (230. IV)$$

Подставив определенное по ф-ле (229. IV) значение R_2 в формулу для определения радиального перемещения наружного края стенки (228. IV), получим

$$w_a = R_1 \frac{r^2}{E k_0} \quad (231. IV)$$

где

$$F^* = \frac{2r_0 + \mu \gamma_b}{\gamma_a + \frac{a}{r} \gamma_b k_0} \gamma_b \quad (232. IV)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} k_0 &= \frac{1 - \mu^2}{\frac{r^2 + a^2}{r^2 - a^2} - \mu^2} \\ \gamma_b &= \frac{ar + r^2}{a^2 + r^2 - \mu (r^2 - a^2)} \end{aligned} \right\} \quad (233. IV)$$

Формула (232. IV) дает величину F^* , которую надо вводить в расчетные формулы вместо фактической площади сечения шпангоута. Поэтому величину F^* называют *кравдоткнутой площадью сечения шпангоутного кольца*.

§ 37. Об оценке напряженного состояния обшивки и шпангоутов прочного корпуса

Изложенные выше расчетные методы были посвящены определению напряжений, возникающих в обшивке и шпангоутах прочного корпуса при действии внешнего расчетного давления. Очевидно, прочность обшивки и шпангоутов будет обеспечена в том случае, если будет удовлетворен критерий прочности. Последний сводится к тому, что расчетные напряжения не должны превышать допустимых норм, т. е.

$$\sigma \leq \sigma_{\text{доп}}$$

Для возможности использования приведенного критерия необходимо регламентировать величины допускаемых напряжений. При этом следует иметь в виду, что вследствие неучета влияния начальной и практически неизбежной непрямолинейности круговой оболочки, выполняемые нами расчетные методы носят условный характер. Поэтому практические нормы для допускаемых напряжений должны быть согласованы с результатами натурных и модельных испытаний.

Рассмотрим сначала выбор расчетных сечений и определение норм допускаемых напряжений в обшивке прочного корпуса. Как было отмечено, суммарные напряжения в обшивке состоят из цепных напряжений (σ_c^r , σ_c^l) и изгибных напряжений ($\sigma_{\text{изг}}^r$, $\sigma_{\text{изг}}^l$).

Цепные напряжения во всех поперечных сечениях обшивки σ_c^r равны — $\frac{P^r}{S}$. Цепные напряжения в продольных сечениях обшивки σ_c^l достигают наибольшей величины (порядка — $\frac{P^r}{l}$) посредине шпангоута, т. е. в месте наибольшего обжатия оболочки, несколько уменьшаясь при приближении к переборкам. Как напряжения σ_c^r , так и напряжения σ_c^l не меняются по толщине оболочки. Таким образом, цепные напряжения σ_c^r и σ_c^l охватывают всю обшивку прочного корпуса, поэтому они относятся к категории общих напряжений. Расчеты показывают, что изгибные напряжения в поперечных сечениях обшивки $\sigma_{\text{изг}}^r$ по всей длине шпангоута (исключая небольшие участки длиной шпангоута у шпангоутов или переборок) практически невелики.

Изгибные напряжения в продольных сечениях обшивки $\sigma_{\text{изг}}^l$, составляющие 4-ю часть изгибных напряжений $\sigma_{\text{изг}}^r$, естественно, еще меньше. Кроме того, изгибные напряжения меняются по толщине по линейному закону и достигают своих наибольших значений только в крайних фибрах обшивки. Поэтому практически по всей длине шпангоута (исключая небольшие участки длины у шпангоутов или переборок) изгибными напряжениями можно пренебречь. Изгибные же напряжения в поперечных сечениях обшивки у шпангоутов, и особенно у переборок, могут быть достаточно велики, однако они носят явно выраженный местный характер и уже на расстоянии 0,11 от шпангофта уменьшаются практически вдвое. Следовательно, учет местных изгибных напряжений в поперечных сечениях обшивки представляет интерес только в сечениях у шпангоута или переборок.

Анализ напряженного состояния обшивки и шпангоутов прочного корпуса позволяет сделать следующие основные выводы в части нормирования допускаемых напряжений.

1. Основными напряжениями, определяющими прочность обшивки, являются цепные напряжения, имеющие общий характер распространения по длине и толщине обшивки.

2. Цепные напряжения в поперечных сечениях обшивки (σ_c^r) меньше цепных напряжений в ее продольных сечениях (σ_c^l) и составляют примерно половину от наибольших значений σ_c^l . Поэтому нормированию подлежат цепные напряжения только в продольных сечениях обшивки, т. е. кольцевые сжимающие напряжения σ_c^l .

3. Учитывая, что наибольшие цепные напряжения в продольных сечениях обшивки σ_c^l имеют место посредине длины шпангоута, при проверке прочности по напряжениям достаточно проверить соблюдение условия прочности только посредине длины шпангоута.

4. Ввиду малости изгибных напряжений по всей длине обшивки, исключая сечения у шпангоутов и переборок, изгибными напряжениями при оценке прочности обшивки можно пренебречь (за исключением сечений у шпангоутов и переборок).

5. В сечениях у шпангоутов, и особенно у переборок, изгибные напряжения в поперечных сечениях достаточно велики и, хотя они имеют явно выраженный местный характер, тем не менее могут оказать существенное влияние на прочность обшивки. Поэтому при проверке прочности по напряжениям учет изгибных напряжений в поперечных сечениях у шпангоутов или переборок обязателен.

6. Проверка прочности обшивки в ее поперечных сечениях у шпангоутов или переборок должна производиться либо по суммарным нормальным напряжениям ($\sigma_1 = \sigma_1' + \sigma_1''$), либо по приведенным напряжениям ($\sigma^p = \sigma_1 - \sigma_2$).

Критерии прочности обшивки имеют вид:

а) для цепных напряжений в продольных сечениях обшивки по длине шпангоута

$$\sigma_1' \leq a_1 \sigma_n \quad (234. IV)$$

где a_1 — предел текучести материала обшивки;

a_2 — коэффициент, показывающий, какую долю предела текучести должны составлять допускаемые цепные напряжения в продольных сечениях;

б) для приведенных напряжений в поперечных сечениях у шпангоутов или переборок

$$\sigma^p \leq a_1 \sigma_n \quad (235. IV)$$

где a_1 — коэффициент, показывающий, какую долю предела текучести должны составлять допускаемые приведенные напряжения в поперечных сечениях;

в) для напряжений в шпангоутах

$$\sigma_{\text{max}} \leq a_2 \sigma_n \quad (236. IV)$$

где a_2 — коэффициент, показывающий, какую долю предела текучести должны составлять напряжения в шпангоутах.

§ 38. Краткий обзор работ по устойчивости круглой цилиндрической оболочки

Вопросы устойчивости круглых цилиндрических оболочек являются наиболее важными для строительной механики подводных лодок, так как прочный корпус последних на большей части длины выполняется в виде круглой цилиндрической оболочки. Поэтому вопросам устойчивости цилиндрических оболочек посвящено много теоретических и экспериментальных работ.

Одной из первых работ, посвященных этому вопросу, была работа Лоренца,* в которой исследовалась устойчивость круглой цилиндрической оболочки, свободно опертой по концам. При этом были рассмотрены два случая нагружения оболочки:

1. Оболочка нагружена только поперечной нагрузкой.

2. Оболочка нагружена только осевой нагрузкой.

Случай совместного действия на оболочку поперечной и осевой нагрузок Лоренц не рассматривал.

* В. Лоренц. *Physikal. Zeitschrift*, 1911.

В 1913 г. Саусвелл опубликовал приближенное решение этой же задачи,* причем, так же как и Лоренц, рассмотрел изолированно случаи воздействия на оболочку осевой и поперечной нагрузок.

Для случая поперечной нагрузки была предложена следующая приближенная формула для определения критического давления:

$$P'_{cr} = E \frac{1}{r} \left[\frac{p^2}{4n(n^2-1)} \cdot \frac{r^2}{t^3} + \frac{n^2-1}{12(1-n^2)} \cdot \frac{1}{n} \right], \quad (237. IV)$$

где n — число волн, образующихся по периметру оболочки при потере устойчивости.

В 1914 г. более строгое решение задачи об устойчивости круговой цилиндрической оболочки было получено Мизесом.** При этом для критического давления автором была предложена следующая формула:

$$P'_{cr} = E \frac{1}{r} \left[\frac{1}{4n^2-1} \left(1 + \frac{n^2 r^2}{t^2 r^2} \right) + \frac{1}{12(1-n^2)} \cdot \frac{r^2}{t^3} \times \right. \\ \left. \times \left(n^2 - 1 + \frac{3n^2 - 1 - r^2}{1 + \frac{n^2 r^2}{t^2 r^2}} \right) \right]. \quad (238. IV)$$

Профессор С. П. Тимошенко*** исследовал устойчивость круговой цилиндрической оболочки при осевом сжатии.

В 1916 г. Бубнов произвел упрощение полученной Лоренцем расчетной формулы для определения критической нагрузки при поперечном давлении на оболочку.

В результате проведенного исследования для случая, когда при потере устойчивости по периметру оболочки образуется более пяти волн, Бубновым предложены следующие формулы:

$$P'_{cr} = \frac{E t}{1-n^2} \left(\frac{n}{r} \right)^2 K \left. \vphantom{\frac{E t}{1-n^2}} \right\} \\ n = k \sqrt{1 + \frac{r}{t}} \quad (239. IV)$$

где $n = \frac{\sqrt{r t}}{r}$, а K и k — коэффициенты, зависящие от n и определяемые по табл. 2.

Таблица 2

n	K	k	n	K	k
1,0	3,31	2,18	0,35	1,41	2,48
0,9	2,98	2,04	0,30	1,30	2,49
0,8	2,67	1,90	0,25	1,20	2,51
0,7	2,36	1,73	0,20	1,11	2,54
0,6	2,06	1,64	0,15	1,03	2,56
0,5	1,78	1,54	0,10	0,96	2,63
0,45	1,68	1,51	0,05	0,89	2,68
0,40	1,62	1,49	0,00	0,83	2,74

* R. Southwell, Philosophical Magazine, 1913.

** R. Mises, Zeitschrift des Vereins der deutsche Ingenieure, 1914.

*** С. П. Тимошенко, О деформациях и устойчивости цилиндрических оболочек, «Научная академическая институт», 1914.

С помощью ф-л (239.IV) и табл. 2 легко определить как критическое давление, так и число волн при потере устойчивости.

В 1929 г. Мизес* опубликовал решение задачи об устойчивости круговой цилиндрической оболочки при совместном действии поперечной и осевой нагрузок, представляющее особый интерес для строительной механики подводных лодок. При этом для критического давления Мизесом была предложена следующая формула:

$$p'_{cr} = \frac{E\delta}{r} \cdot \frac{1}{\pi + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{l} \right)^2} \left\{ \frac{1}{\left[\pi^2 \left(\frac{l}{r} \right)^2 + 1 \right]} + \frac{2}{12\pi(1-\mu^2)} \left[\pi^2 + \left(\frac{r}{l} \right)^2 \right] \right\} \quad (240.IV)$$

Это решение нашло широкое применение в расчетной практике.

Исследованию устойчивости круговых цилиндрических оболочек были посвящены более поздние работы Зандена и Тольке,** Флукте,** Шиманского**** и других авторов.

Ниже приведем решение задачи об устойчивости круговой цилиндрической оболочки, свободно опертой по концам и нагруженной осевой и поперечной нагрузками. Это решение получено исходя из изложенной в главе II общей теории устойчивости упругих тонких оболочек.

§ 39. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки, свободно опертой по концам, под действием осевого и равномерного поперечного давления

Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку, свободно опертую по концам (рис. 53).

Оболочка нагружена по торцам осевым давлением p , и по боковой поверхности поперечным давлением p . Положением любой точки срединной поверхности будем характеризовать координатами x и φ , где x — расстояние точки по образующей от одного из торцов оболочки; φ — угол, определяющий положение точки на направляющей.

В этом случае параметры Ляме и главные радиусы кривизны срединной поверхности оболочки соответственно равны

$$\left. \begin{aligned} A_1 = 1 \quad A_2 = r \\ R_1 = \infty \quad R_2 = r \end{aligned} \right\} \quad (241.IV)$$

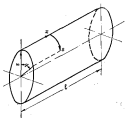


Рис. 53

* K. Mises, *Statische Festigkeit*, Springer, 1929.

** K. Zandén, P. Tölke, *Ingenieur-Archiv*, 1932.

*** W. Flügge, *Ingenieur-Archiv*, 1932.

**** Ю. А. Шиманский, Устойчивость тонких цилиндрических оболочек и изогнутых пластин, Сб. НИИВК, № 6, 1936 (то же см. в книге Ю. А. Шиманского „Спроектирование металлов подводных лодок“, Судпромгиз, 1948).

Кроме того, в силу симметрии оболочки и нагрузки относительно оси цилиндрической оболочки в первом исходном состоянии оболочки не будет испытывать деформации сдвига, т. е.

$$S^0 = 0. \quad (242. IV)$$

Подставив ф-лы (241. IV) и (242. IV) в систему (18. II), получим систему дифференциальных уравнений устойчивости круговой цилиндрической оболочки

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial S}{\partial \varphi} + F_1 &= 0 \\ \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T_1}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial M_2}{\partial \varphi} + F_2 &= 0 \\ \frac{\partial M_1}{\partial x^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial N}{\partial x \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial M_2}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r} T_2 + F_3 &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (243. IV)$$

где функции F_1 , F_2 и F_3 определяются по ф-лам (16. II). После подстановки в ур-ние (16. II) ф-л (241. IV) и (242. IV) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \alpha_1}{\partial \varphi} T_1^0 - p \alpha_2 \\ F_2 &= \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} T_1^0 + \frac{1}{r} \alpha_1 T_1^0 + p \alpha_3 \\ F_3 &= -\frac{\partial \alpha_3}{\partial x} T_1^0 + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \alpha_1}{\partial \varphi} T_1^0 \end{aligned} \right\}. \quad (244. IV)$$

Входящие в ф-лы (244. IV) углы поворота α_1 , α_2 и α_3 определяются из ф-л (21. II)–(23. II), которые после подстановки в них параметров Ляме и главных радиусов кривизны принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \\ \alpha_2 &= -\frac{\partial w}{\partial x} \\ \alpha_3 &= \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} \end{aligned} \right\}. \quad (245. IV)$$

Условия T_1^0 и T_2^0 определим из уравнений безмоментной теории. Дифференциальные уравнения равновесия круговой цилиндрической безмоментной оболочки приведены в главе I (ур-ния (28. I). При $S^0 = 0$ эти уравнения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_1^0}{\partial x} &= 0 \\ \frac{T_2^0}{r} &= -p \end{aligned} \right\}. \quad (246. IV)$$

Из второго уравнения системы (246. IV) непосредственно получаем формулу для кольцевого усилия

$$T_2^0 = -pr.$$

Интегрируя первое уравнение системы (246. IV), получим формулу для осевого усилия

$$T_1 = \text{const.}$$

Поскольку на торцы оболочки действует давление p , то суммарное осевое усилие, передающееся на оболочку, будет

$$Q = -p_1 \pi r^2,$$

а осевое усилие, приходящееся на единицу длины окружности торца,

$$T_1 = \frac{Q}{2\pi r} = -\frac{p r}{2}.$$

Следовательно, окончательно усилия исходного состояния оболочки равны

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= -\frac{p r}{2} \\ T_2 &= -p r \end{aligned} \right\} \quad (247. IV)$$

Дополнительные усилия и моменты T_1 , T_2 , S , M_1 , M_2 , N связаны с компонентами деформации зависимостями (19. III). Последние же определяются через дополнительные перемещения φ -лам (20. II). Подставим в последние параметры Лаге и главные радиусы кривизны для круговой цилиндрической оболочки, приведем к следующим выражениям для компонентов деформации:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_2 &= -\frac{\partial w}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{w}{r}, & \varepsilon_4 &= \frac{1}{r^2} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right), \\ \varepsilon &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi}, & \varepsilon &= -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial x \partial \varphi} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (248. IV)$$

Подстановкой компонентов деформации, определенных по формулам (248. IV), в ф-лы (19. III) получим выражения для дополнительных усилий T_1 , T_2 , S и дополнительных моментов M_1 , M_2 , N через дополнительные перемещения оболочки u , v и w .

После подстановки этих усилий и моментов, а также функций F_1 , F_2 и F_3 , определенных по ф-лам (244. IV), окончательно приходим к следующей системе линейных однородных дифференциальных уравнений устойчивости круговой цилиндрической оболочки:

$$\left. \begin{aligned} r^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{1+\nu}{2} \cdot \frac{r \partial^2 u}{\partial x \partial \varphi^2} - p r \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + r \chi_2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{1+\nu}{2} r \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \varphi} + \frac{1-\nu}{2} r^3 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \\ + \frac{p}{12 r^3} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} + r^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial \varphi} + r^2 (1-\nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] - r^2 \chi_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \\ p r \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} - w - \frac{p}{12 r^3} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + (2-\nu) r^3 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2 \partial \varphi} + r^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + \frac{\partial w}{\partial \varphi} + 2 r^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial \varphi} \right] - \chi_2 \left(w + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) - \chi_2 r^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (249. IV)$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{p r}{E t} \cdot \frac{1 - \mu^2}{2} \\ x_2 &= \frac{p r}{E t} (1 - \mu^2) \end{aligned} \right\} \quad (250. IV)$$

Как видно из ф-л (250. IV), величины x_1 и x_2 пропорциональны осевому давлению p , и поперечному давлению p соответственно. Интегрирование системы (249. IV) затруднительно. Решение этой системы будем искать в виде

$$\left. \begin{aligned} u &= A \sin \pi r \cos \frac{\pi x}{l} \\ v &= B \cos \pi r \sin \frac{\pi x}{l} \\ w &= C \sin \pi r \sin \frac{\pi x}{l} \end{aligned} \right\} \quad (251. IV)$$

где $2n$ — число полуовалов по периметру оболочки, образующихся при потере устойчивости;

m — число полуовалов по длине оболочки, образующихся при потере устойчивости.

Выражения (251. IV) для дополнительных перемещений удовлетворяют граничным условиям. Подстановкой выражений (251. IV) в систему (249. IV) мы придем к системе трех линейных однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A , B и C .

Решением этой системы будет либо равенство нулю A , B и C (что соответствует отсутствию потери устойчивости, так как при $A=B=C=0$ равны нулю и дополнительные перемещения u , v и w), либо равенство нулю определителя этой системы, раскрытия который получим уравнение для определения критических нагрузок

$$C_3 + \frac{p}{E t^3} C_4 = C_5 x_1 + C_6 x_2, \quad (252. IV)$$

где

$$\left. \begin{aligned} C_3 &= (1 - \mu^2) \lambda^4, \\ C_4 &= (\lambda^4 + \mu^4)^2 - 2 [\mu \lambda^6 + 3 \lambda^4 \mu^3 + (4 - \mu) \lambda^2 \mu^5 + \mu^6] + \\ &\quad + 2 (2 - \mu) \lambda^2 \mu^2 + \mu^4, \\ C_5 &= \mu^2 (\lambda^4 + \mu^4)^2 - 3 \lambda^2 \mu^2 - \mu^4, \\ C_6 &= \lambda^2 (\lambda^4 + \mu^4)^2 + \lambda^2 \mu^2, \\ \lambda &= \frac{\pi r}{l} \end{aligned} \right\} \quad (253. IV)$$

Поскольку уравнение для определения критических нагрузок (252. IV) одно, а неизвестных два (p_1 и p_2 или им соответствующие величины x_1 и x_2), то решение является неопределенным. Можно получить бесчисленное множество комбинаций критических нагрузок, удовлетворяющих уравнению (252. IV). Поэтому для определенности решения необходимо, чтобы одно из действующих усилий было задано, либо было задано их отношение.

Отметим также, что числа полуовала $2n$ и m и при потере устойчивости могут принимать любые значения. Каждой паре значений $2n$ и m соответствует одна комбинация критических нагрузок. Практический интерес, естественно, представляют лишь те значения n и m , которым соответствуют наименьшие значения критических нагрузок.

Наибольший практический интерес для кораблестроения представляет случай, когда оболочка по всей цилиндрической поверхности и по торцам нагружена одним и тем же давлением интенсивности p , т. е. случай, когда $p_1 = p$. В этом случае

$$\chi_1 = \frac{1}{3} \chi_0 \quad (254. IV)$$

Анализ показывает, что в этом практически важном случае наименьшее значение критической нагрузки всегда соответствует $m=1$, т. е. оболочка теряет устойчивость с образованием одной полуовальной дуги.

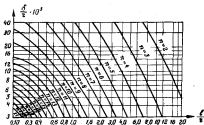


Рис. 54

Подставляя равенство (254. IV) в ф-лу (252. IV) с учетом зависимостей (253. IV), приходим, после пренебрежения малыми членами, к формуле Мингеса

$$p'_{cr} = \frac{Eh}{r} \cdot \frac{1}{n^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{nr}{t} \right)^2} \left\{ \left[n^2 \left(\frac{t}{nr} \right)^2 + 1 \right]^2 + 12n^2 (1 - \nu^2) \left[n^2 + \left(\frac{nr}{t} \right)^2 \right] \right\} \quad (255. IV)$$

Число волн n по периметру оболочки, обращающее p'_{cr} в минимум, зависит от отношения толщины оболочки к радиусу $\left(\frac{t}{r} \right)$ и длины оболочки к радиусу $\left(\frac{l}{r} \right)$.

Значения числа волн n , соответствующие минимуму критической нагрузки, можно определить из рис. 54.*

* Рисунок 54 заимствован из книги С. П. Тимошенко „Устойчивость упругих систем“, Гостехиздат, 1948.

Формула (255.IV) может быть рекомендована для определения критического давления обшивки прочного корпуса между шпангоутами. При этом длина оболочки должна быть принята равной расстоянию между шпангоутами.

Отметим, что рассмотренный общий случай действия на оболочку одновременно осевой и поперечной нагрузок позволяет получить решения как для случая действия осевой, так и для случая действия только поперечной нагрузки. Действительно, положив $p_z = 0$, а следовательно, $\chi_1 = 0$, из ур-ния (252.IV) определим χ_2 и ему соответствующее β'_{cr} для случая действия только поперечной нагрузки. Наоборот, положив $p = 0$ а, следовательно, $\chi_2 = 0$, из ур-ния (252.IV) определим χ_1 и соответствующее ему β'_{cr} для случая только продольной нагрузки.

§ 40. Использование энергетического метода для определения критического давления круговой цилиндрической оболочки

Решение Шиманского

Использование энергетического метода для определения критических нагрузок рассмотрим на решении Шиманского. В решении Шиманского также рассматривается круговая цилиндрическая оболочка, свободно опертая по концам и нагруженная осевой и поперечной нагрузками интенсивности p .

Существенным отличием этого решения от приведенных выше является учет упругости подкрепляющих оболочку ребер на устойчивость оболочки между ребрами. В рассмотренных выше решениях предполагалось, что в исходном состоянии оболочка равномерно обжата по длине, т. е. радиальное перемещение w по длине постоянно и равно таковому для безреберной оболочки.

Введем следующие дополнительные обозначения:

$k = \frac{p}{p + p_0}$ — коэффициент, характеризующий жесткость подкрепляющих оболочку ребер;

$\alpha = \frac{k}{1 + 2kR}$ — коэффициент влияния жесткости подкрепляющих ребер на устойчивость оболочки;

$T_1 = -\frac{pR}{2}$ — внешнее осевое усилие, отнесенное к единице длины направляющей.

Компоненты деформации срединной поверхности оболочки связаны с дополнительными перемещениями u , v и w зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 & u_2 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ u_3 &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{w}{r} & u_4 &= \frac{1}{r^2} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \\ u &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} & u &= -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (256.IV)^*$$

* Ю. А. Шиманский в выражении для относительного удлинения u_1 пренебрегает нелинейный член $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$. (Ю. А. Шиманский, Строительная механика подводных лодок. Судопроект, 1948).

Потенциальная энергия деформации оболочки определяется по ф-ле (114. II)

$$V = \frac{Eh}{1-\mu^2} \iint \left[(e_1 + e_2)^2 - 2(1-\mu) \left(e_1 e_2 - \frac{w^2}{R^2} \right) \right] R d\varphi dx + \\ + \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \iint [(e_1 + e_2)^2 - 2(1-\mu) (e_1 e_2 - e^2)] R d\varphi dx, \quad (257. IV)$$

где интегралы берутся по всей срединной поверхности оболочки. Для возможности использования энергетического метода необходимо задать выражения для дополнительных перемещений u , v и w .

В выражении для дополнительного прогиба оболочки будем удерживать только один член

$$w = A \sin \frac{m\pi x}{l} \sin n\varphi, \quad (258. IV)$$

Осевое перемещение u выберем исходя из следующих соображений. Так как при переходе оболочки из первого (исходного) положения во второе внешняя осевая нагрузка не меняется, то сумма осевых усилий, возникающих в любом поперечном сечении, должна равняться нулю, т. е.

$$\int_0^{2\pi} T_1 R d\varphi = 0,$$

но

$$T_1 = \frac{Eh}{1-\mu^2} (e_1 + \mu e_2).$$

Тогда

$$\frac{Eh}{1-\mu^2} R \int_0^{2\pi} (e_1 + \mu e_2) d\varphi = 0, \quad (259. IV)$$

Если учесть, что при выбранной форме w , определяемой по формуле (258. IV), $\int_0^{2\pi} w d\varphi = 0$ и пренебречь в выражении для e_2 членом $\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi}$, то интеграл

$$\int_0^{2\pi} e_2 d\varphi = 0,$$

поэтому из условия (259. IV) следует:

$$\int_0^{2\pi} e_1 d\varphi = 0. \quad (260. IV)$$

Подставляя в ф-лу (260. IV) значение e_1 из ф-лы (256. IV), приходим к равенству

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial x} d\varphi = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 d\varphi.$$

Допустим, что поперечные сечения оболочки при выпучивании остаются плоскими, т. е. перемещения u не зависят от φ . Тогда

в результате интегрирования левой и правой частей равенства будем иметь:

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{m^2 \omega^2}{E} A^2 \cos^2 \frac{\pi x}{l},$$

$$w = -\frac{1}{4} \cdot \frac{m^2 \omega^2}{E} A^2 \left(\frac{l}{4\pi} \sin \frac{2\pi x}{l} + \frac{x}{2} \right) + C,$$

где C — произвольная постоянная интегрирования.

Вследствие симметрии нагрузки и конструкции относительно сечения $x = \frac{l}{2}$ (сечение по середине пролета между шпангоутами), перемещение w в этом сечении должно быть равно нулю

$$w = 0, \quad (261. IV)$$

Из условия (261. IV) и определяется постоянная интегрирования C , которая оказывается равной

$$C = \frac{1}{16} \cdot \frac{m^2 \omega^2}{E} A^2.$$

Окончательно осевое перемещение w будет равно

$$w = -\frac{1}{16} \cdot \frac{m^2 \omega^2}{E} A^2 \left(\frac{l}{4\pi} \sin \frac{2\pi x}{l} + \frac{2x}{l} - 1 \right). \quad (262. IV)$$

Остается определить кольцевое перемещение v . Это перемещение может быть определено исходя из рассмотрения равновесия элемента оболочки (рис. 55).

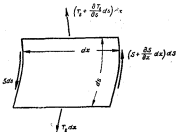


Рис. 55

Спроектируем все усилия на направление направляющей шпангоута. На левую грань выделенного элемента действует касательное уси-

ле Sds , равное $Sds = \frac{E\delta}{2(1+\mu)} \omega ds$. На правую грань, отстоящую от левой на расстоянии dx , будет действовать, очевидно, касательное усилие

$$-\left(S + \frac{\partial S}{\partial x} dx\right) dx = -\frac{E\delta}{2(1+\mu)} \left(\omega + \frac{\partial \omega}{\partial x} dx\right) dx.$$

На нижнюю грань будет действовать нормальное усилие $T_1 dx$, равное

$$T_1 dx = \frac{E\delta}{1-\mu^2} (\epsilon_1 + \mu \epsilon_2) dx$$

или, принимая $\epsilon_1 = 0$,

$$T_1 dx = \frac{E\delta}{1-\mu^2} \epsilon_2 dx.$$

На верхнюю грань, отстоящую от нижней на расстоянии ds , будет действовать нормальное усилие

$$-\left(T_2 + \frac{\partial T_2}{\partial s} ds\right) ds = -\frac{E\delta}{1-\mu^2} \left(\epsilon_2 + \frac{\partial \epsilon_2}{\partial s} ds\right) ds.$$

Проектируя эти усилия на направление направляющей цилиндра и приравняв их нулю, будем иметь

$$\frac{E}{1-\mu^2} \cdot \frac{\partial \epsilon_2}{\partial s} = -\frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x}.$$

Подставив сюда ϵ_2 и ω из ф-л (256, IV), приходим к уравнению

$$\frac{2}{(1-\mu^2)^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial s^2} = \frac{2}{(1-\mu^2)^2} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial s}. \quad (263, IV)$$

Решение дифференциального уравнения (263, IV) принимаем в виде

$$\omega = B \sin \frac{\pi s x}{l} \cos \pi r. \quad (264, IV)$$

Подставляя выражение (264, IV) в дифференциальное уравнение (263, IV), определим B . В результате получим следующее выражение для кольцевого перемещения ω :

$$\omega = -A \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{\pi^2 l^2}{R^2} \cdot \frac{\pi^2}{\pi^2}} \sin \frac{\pi s x}{l} \cos \pi r. \quad (265, IV)$$

Теперь все три компонента вектора дополнительного перемещения найдены, причем в каждый из них входит неизвестный параметр A , являющийся амплитудным значением нормального прогиба ω .

Определив по ф-лам (256, IV) компоненты деформации срединной поверхности оболочки и подставив их в выражение для потенциальной энергии деформации оболочки (257, IV), после интегрирования получим

$$\begin{aligned} V = A^2 \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \frac{\pi R}{4\pi} & \left\{ \frac{1}{1 + \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{\pi^2 l^2}{R^2} \cdot \frac{\pi^2}{\pi^2}} + \frac{1}{15\pi^2} \left[\pi^4 m^2 \left(\frac{r}{l} \right)^4 + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\pi^2 m^2 \left(\frac{r}{l} \right)^2 (\alpha^2 - \mu) + (\alpha^2 - 1)^2 \right] \right\}. \quad (266, IV) \end{aligned}$$

Формула (266. IV) определяет дополнительную потенциальную энергию деформации оболочки на перемещениях u , v и w .

Перейдем к определению работы внешних сил на этих же перемещениях. Работу внешних сил можно разделить на две составляющих: работу осевых сил T и работу поперечного давления p . Работа осевых сил будет равна произведению полной осевой силы на изменение расстояния между шпангоутами. Определим изменение расстояния между шпангоутами.

Осевые перемещения оболочки у шпангоутов определяются подстановкой в выражение (262. IV) значений $x = 0$ и $x = l$, после чего получим

$$u_{0,l} = \pm \frac{1}{8} \cdot \frac{\pi^2 w_0^2}{l} A^2.$$

Следовательно, изменение расстояния между шпангоутами будет равно

$$\Delta l = -\frac{1}{8} \cdot \frac{\pi^2 w_0^2}{l} A^2.$$

Работа осевых сил будет

$$U_1 = T_1 2\pi r \Delta l = T_1 \frac{\pi^2 w_0^2}{4} \cdot \frac{r}{l} A^2. \quad (267. IV)$$

Работу поперечного давления p можно определить вычислением работы сжимающих усилий, вызванных нагрузкой p , в меридиональных сечениях оболочки. Для этого выделим из оболочки кольцо двумя поперечными сечениями, отстоящими друг от друга на расстоянии, равном единице.

При потере устойчивости оболочки кольцевые усилия T_0 повернутся друг относительно друга на некоторый угол ϵ , вследствие чего равнодействующая усилий T_0 получит приращение ϵT_0 . Поэтому изменение усилий T_0 на устойчивость кольца определяется работой фиктивной нагрузки интенсивностью ϵT_0 , приложенной по окружности кольца. Эта работа для элемента кольца длиной $r d\varphi$ будет равна $-\frac{1}{2} \epsilon \pi T_0 r d\varphi$, а для всего кольца

$$- \frac{T_0 r}{2} \int_0^{2\pi} \epsilon \pi d\varphi. \quad (268. IV)$$

Подставляя и интегрируя ф-лу (268. IV), получим полную работу

$$U_2 = - \frac{\epsilon}{2} \int_0^l T_0 dx \int_0^{2\pi} \pi r d\varphi. \quad (269. IV)$$

Определим относительный угол поворота ϵ . Вследствие кольцевых перемещений v один конец элемента кольца длиной $ds = r d\varphi$ переместится на величину v , а другой, отстоящий от первого на расстоянии ds , на величину $v + \frac{\partial v}{\partial s} ds$. Следовательно, длина элемента увеличится на величину $\frac{\partial v}{\partial s} ds$, а относительный угол, соответствующий этому увеличению длины, будет равен $\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial s} ds$.

Вследствие перемещений w концы элемента повернутся друг относительно друга на угол $\frac{dw}{ds} ds$, поэтому суммарный относительный угол поворота, отнесенный к единице длины кольца, будет

$$\epsilon = \frac{dw}{ds} + \frac{1}{r} \cdot \frac{ds}{ds} = \frac{1}{r} \left(\frac{dw}{ds} + \frac{dr}{dr} \right).$$

Теперь подставив в полученное выражение w из ф-лы (268.IV) и r из ф-лы (268.IV), получим

$$\epsilon = -\frac{A^2}{r^2} \left(\pi^2 - \frac{1}{1 + \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{2Er^2}{r^2} \cdot \frac{\pi^2}{r^2}} \right) \sin \pi x.$$

Интеграл, входящий в ф-лу (269.IV), будет равен

$$\int_0^{\pi} \epsilon w dx = -\frac{\pi A^2}{r^2} \left(\pi^2 - \frac{1}{1 + \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{2Er^2}{r^2} \cdot \frac{\pi^2}{r^2}} \right) \sin^2 \frac{\pi x}{2}.$$

Усилие T_2 , входящее в интеграл (269.IV), Шиманский принимает соответствующим первому исходному состоянию оболочки

$$T_2 = E\delta \frac{w^2}{r} + \mu T_1,$$

причем прогиб оболочки w^2 в исходном состоянии принимается в виде

$$w^2 = w_{\text{из}} + \frac{1}{2} \sum_{m=1,2,3,\dots} f_m \left(1 - \cos \frac{2m\pi x}{l} \right).$$

Подставляя T_2 в ф-лу (269.IV), после интегрирования имеем

$$U_2 = \frac{\pi^2}{4r} [\mu r (1 - \mu) + \mu T_1] \left(\pi^2 - \frac{1}{1 + \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{2Er^2}{r^2} \cdot \frac{\pi^2}{r^2}} \right) A^2, \quad (270.IV)$$

Зная работу осевых сил и поперечного давления и суммируя их, получим суммарную работу внешних сил

$$U = T_1 \frac{2\delta w^2}{4} \cdot \frac{\pi}{r} A^2 + \frac{\pi^2}{4r} [\mu r (1 - \mu) + \mu T_1] \left(\pi^2 - \frac{1}{1 + \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{2Er^2}{r^2} \cdot \frac{\pi^2}{r^2}} \right) A^2. \quad (271.IV)$$

Приравняем работу внешних сил U приращению потенциальной энергии V . Тогда после сокращения на A^2 получим следующее окончательное выражение для критической нагрузки:

$$P_{кр} = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \frac{3}{r} \cdot \frac{1}{(1-0,85\mu)\pi^2 \frac{1-\mu}{2} \frac{(n^2-1) + \frac{\pi^2 r^2}{\rho^2}}{\frac{1-\mu}{1-\mu} n^2 + \frac{\pi^2 r^2}{\rho^2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2 r^2}{\rho^2}} \times \\ \times \left[\frac{\frac{\pi^2 r^2}{\rho^2}}{\frac{1-\mu}{1-\mu} n^2 + \frac{\pi^2 r^2}{\rho^2}} + \frac{16}{12\pi^2} \left[\frac{\pi^2 r^2}{\rho^2} + 2(n^2 - \mu) \frac{\pi^2 r^2}{\rho^2} + (n^2 - 1)^2 \right] \right]. \quad (272. IV)$$

Если при потере устойчивости оболочка разбивается на большое число волн, то $n^2 - 1 = n^2$. Положив, кроме того, $\mu = 0,3$, ф-лу (272. IV) можно привести к виду

$$P_{кр} = 1,1E \frac{3}{r} \cdot \frac{1}{(1-0,85\mu)\pi^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi r}{r} \right)^2} \left[\frac{\left(\frac{\pi r}{r} \right)^2}{2\pi^2 + \left(\frac{\pi r}{r} \right)^2} + \frac{16}{12\pi^2} \left[n^2 + \left(\frac{\pi r}{r} \right)^2 \right] \right]. \quad (273. IV)$$

Множителем $(1 - 0,85\mu)$ учитывается влияние жесткости подкрепляющих ребер на устойчивость оболочки.

§ 41. Расчетные формулы для определения критического давления оболочки прочного корпуса подводных лодок

Большое количество теоретических исследований устойчивости круглых цилиндрических оболочек привело к большому числу расчетных формул для определения критического давления. Каждая из формул учитывает те или иные факторы и выведена при некоторых допущениях. Поэтому целесообразно произвести сравнение этих расчетных формул, чтобы оценить их относительную погрешность. Такое сравнение формул и их анализ были выполнены Палконым.* Больше того, Палконю существенно упростила расчетные формулы Саусвелла и Минеса и привел их к виду, удобному для практического использования.

Основными формулами, получившими широкое распространение в расчетной практике, являются формула Саусвелла (237. IV)

$$P_{кр} = E \frac{3}{r} \left[\frac{n^2}{\pi^2(n^2-1)} \cdot \frac{r^2}{\rho^2} + \frac{n^2-1}{12(1-\mu^2)} \cdot \frac{16}{r^2} \right]$$

и две формулы Минеса (238. IV) и (240. IV)

$$P_{кр} = E \frac{3}{r} \left[\frac{1}{(n^2-1) \left(1 + \frac{\pi^2 r^2}{\rho^2} \right)} + \frac{1}{12(1-\mu^2)} \cdot \frac{16}{r^2} \left(n^2 - 1 + \frac{2n^2-1-\mu^2}{1 + \frac{\pi^2 r^2}{\rho^2}} \right) \right],$$

$$P_{кр} = E \frac{3}{r} \cdot \frac{1}{n^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi r}{r} \right)^2} \left[\frac{1}{\left[n^2 \left(\frac{1}{\pi r} \right)^2 + 1 \right]} + \frac{16}{12\pi^2(1-\mu^2)} \left[n^2 + \left(\frac{\pi r}{r} \right)^2 \right] \right].$$

* П. Ф. Палконю. Расчетные формулы для проверки устойчивости цилиндрической оболочки. Доклады ИТК. Вып. 2, 1929 (то же см. в работе П. Ф. Палконого „Труды по прочности кораблей“. Суворовка, 1939).

Как уже отмечено, ф-лы (237. IV) и (238. IV) были получены без учёта осевой нагрузки на устойчивость оболочки, а ф-ла (240. IV) учитывает и осевую нагрузку. При использовании этих формул для расчёта устойчивости обшивки между шпангоутами за величину l следует принимать расстояние между шпангоутами. Для прочих корпусов подводных лодок характерно большое количество волн, образующихся по периметру цилиндра при потере устойчивости. Это обстоятельство даёт возможность существенно упростить ф-лы (237. IV), (238. IV) и (240. IV).

Упрощение формул Саусвелла

Если ввести обозначения:

$$x = n^2 - 1, \quad (274. IV)$$

$$A = \frac{12(1-\mu^2)Eh^3}{l^3}, \quad (275. IV)$$

то формуле Саусвелла можно придать вид

$$P'_{cr} = \frac{E}{12(1-\mu^2)} \cdot \frac{h^3}{l^3} \cdot \left[\frac{A}{x(x+1)^2} + x \right]. \quad (276. IV)$$

Входящее в расчётные формулы число волн при потере устойчивости может быть произвольным, но целым. Каждому из таких чисел соответствует своё значение теоретического критического давления. Естественно, что практический интерес представляют лишь наименьшие значения этого давления, т. е. та наименьшая нагрузка на обшивку прочного корпуса, при которой последняя теряет устойчивость.

Предположим, что числа n могут быть не только целыми, но и любыми дробными числами. Тогда мы можем, пользуясь правилом определения минимума функции, определить как минимальное значение P'_{cr} , так и число n , ему соответствующее.

Допустим, что значение n , соответствующее минимуму P'_{cr} , оказалось равным 11,2. Тогда, очевидно, P'_{cr} , соответствующее целым числам n (11 и 12), будет несколько больше определённого минимального значения. Однако при достаточно большом числе n эта погрешность весьма мала, направлена в сторону увеличения запаса устойчивости и практически с нею считаться не следует.

Итак, считая, что n может принимать любые вещественные значения (как целые, так и дробные), определим минимальное значение P'_{cr} .

Взяв производную $\frac{\partial P'_{cr}}{\partial x}$ и приравняв её нулю, получим то значение x , которое обращает P'_{cr} в минимум. Это значение x определяется из формулы

$$\frac{x^2(x+1)^2}{1x+1} = A. \quad (277. IV)$$

Обычно величина A велика в сравнении с единицей. Это позволяет в ф-лах (276. IV) и (277. IV) пренебречь единицей в сравнении с x . Выполняя это, получим $x = \sqrt[3]{3A}$

и

$$P'_{cr} = \frac{EA^{0.25}}{12(1-\mu^2)} \cdot \frac{h^3}{l^3} \left(\frac{1}{3^{0.25}} + 3^{0.25} \right) = 1,75 \frac{EA^{0.25}}{12(1-\mu^2)} \cdot \frac{h^3}{l^3}. \quad (278. IV)$$

Подставив в ф-лу (278, IV) значение A из ф-лы (275, IV), будем иметь

$$p'_{cr} = 1,75\pi E \frac{\sqrt[4]{12(1-\mu^2)}}{12(1-\mu^2)} \cdot \frac{W}{r^2} \cdot \frac{r^{1/2}}{D^{3/2}} = 0,855 \sqrt[4]{1-\mu^2} \frac{E \cdot 10^{-3}}{1-\mu^2} \left(\frac{1000}{r}\right)^{3/2} \frac{1000}{l}$$

или, учитывая, что численное значение радикала $\sqrt[4]{1-\mu^2}$ при μ , отличных по величине от $\mu = 0,3$, дает погрешность, не превышающую 2—4%, имеем

$$p'_{cr} = 0,83 \frac{E \cdot 10^{-3}}{1-\mu^2} \left(\frac{1000}{r}\right)^{3/2} \frac{1000}{l}. \quad (279, IV)$$

Если принять упругие константы материала для стали равными $E = 2 \cdot 10^6$ кг/см², $\mu = 0,3$, то ф-ла (279, IV) можно привести вид

$$p'_{cr} = 18,3 \left(\frac{1000}{r}\right)^{3/2} \frac{1000}{l}. \quad (280, IV)$$

Как видно, ф-ла (280, IV) достаточно проста и не требует отыскания числа волн n , соответствующего минимальной критической нагрузке. В дальнейшем эту формулу будем называть формулой Саясвелла — Пляковича.

Упрощение первой формулы Мингеса

Перейдем к упрощению первой формулы Мингеса (238, IV), для чего введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{12(1-\mu^2) + \pi^2}{8\pi^2} \\ x &= n^2 \\ \alpha &= \frac{\pi^2 r^2}{l^2} \end{aligned} \right\}. \quad (281, IV)$$

Применительно к обшивке прочного корпуса будем считать n достаточно большим, так что можно пренебречь слагаемой в сравнении с n^2 . В этом случае первой формуле Мингеса можно придать вид

$$p'_{cr} = E \frac{W}{r^2} \cdot \frac{1}{12(1-\mu^2)} \left[\frac{A}{(x + \alpha)^2} + x + \frac{2\alpha x}{x + \alpha} \right]. \quad (282, IV)$$

Определяя минимальное значение p'_{cr} путем дифференцирования по x и приравнивания производной нулю, будем иметь

$$\frac{A(3x + \alpha)}{x^2(x + \alpha)^2} = 1 + \frac{2\alpha^2}{(x + \alpha)^2},$$

откуда значение x , обращающее критическое давление в минимум, определяется по формуле

$$x = \sqrt[4]{\frac{34}{1+3y+3y^2} \cdot \frac{1+\frac{1}{3}y}{1+y}} \quad (283. IV)$$

где $y = \frac{u}{x}$.

Таким образом, величина x входит в левую и правую части равенства (283. IV). Поэтому, зная величинами A и a , методом последовательных приближений можно найти x и y , после чего выражение для критической нагрузки примет вид

$$P'_{cr} = \frac{1,75E}{12(1-\mu^2)} \cdot \frac{u}{x^3} A^{1,25} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{3}y\right)^{1,25}}{(1+2y+3y^2)^{1,25}(1+y)^{1,25}} \times \\ \times \left[\frac{3}{4}(1+3y) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1+2y+3y^2}{1+\frac{1}{3}y} \right].$$

Сравнив выражение первой формулы Мизеса с аналогичным выражением формулы Саусвелла, получим

$$(P'_{cr})_{\text{Мизес}} = c (P'_{cr})_{\text{Саусвелл}},$$

где c — коэффициент, равный

$$c = \frac{1}{1+y} \left[\frac{1+\frac{1}{3}y}{(1+y)(1+2y+3y^2)} \right]^{1,25} \left[\frac{3}{4}(1+3y) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1+2y+3y^2}{1+\frac{1}{3}y} \right].$$

При $y = 0$, т. е. при $\left(\frac{u}{x}\right)^2 : \pi^2 = 0$, коэффициент $c = 1$, следовательно, обе сравниваемые формулы дают одинаковый результат. Для подводных лодок отношение y лежит обычно в пределах $0 < y < 1$ и, следовательно, коэффициент $c > 1$. Поэтому первая формула Мизеса дает значение критической нагрузки (применительно к корпусу подводной лодки) большее, чем формула Саусвелла.

Выражение второй формулы Мизеса

Если ввести обозначения:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\pi^2 B}{a^2 x^2} + 1 \\ B &= \frac{u a^2 \pi^2}{12(1-\mu^2) \pi} \end{aligned} \right\} \quad (284. IV)$$

то второй формуле Мизеса (240. IV) можно придать вид

$$P'_{cr} = E \frac{3\pi^2}{a^2 x^2} \cdot \frac{Bx^2 + 1}{x^2(x-0,5)}. \quad (285. IV)$$

Дифференцируя ρ'_{cr} по x и приравняв производную нулю, получим уравнение для значения x , обращающего ρ'_{cr} в минимум,

$$\frac{1}{x^2} \left(3 + \frac{2}{x-1} \right) = B. \quad (286, IV)$$

Величина B всегда является заданной. Поэтому, определив x из ф-лы (286, IV), получим следующее значение минимальной критической нагрузки:

$$\rho'_{cr} = E \frac{M^2}{2\pi^2} N, \quad (287, IV)$$

где N есть некоторый коэффициент, определяемый по формуле

$$N = \frac{Bx + 1}{x^2(x-0,3)}.$$

Анализ показывает, что величина B лежит в пределах $0 < B < 0,36$. Поэтому Папконович рекомендует в ф-ле (287, IV) вместо коэффициента N принимать величину $2,46 B^{0,79}$. Возможность такой замены иллюстрируется Папконовичем в табл. 3.

Таблица 3

x	B	N	$2,46 B^{0,79}$	x	B	N	$2,46 B^{0,79}$
2,00	0,3135	1,000	0,982	4,00	0,02500	0,0490	0,0490
2,25	0,1795	0,634	0,634	4,50	0,00261	0,0023	0,0019
2,50	0,0912	0,425	0,434	5,00	0,00039	0,0006	0,0002
3,00	0,0494	0,225	0,229	6,00	0,000033	0,00003	0,00003
3,50	0,0354	0,131	0,135	7,00	0,000003	0,000006	0,000004
4,00	0,0143	0,0824	0,0861				

Итак, заменяя в ф-ле (287, IV) значение N на $2,46 B^{0,79}$ и учитывая ф-лы (284, IV), получаем

$$\begin{aligned} \rho'_{cr} &= \frac{E M^2}{2\pi^2} 2,46 B^{0,79} = \frac{2,46}{\pi^2} \left[\frac{\pi^2}{12(1-\mu^2)} \right]^{0,79} E \left(\frac{1}{r} \right)^2 \left(\frac{r-1000}{B} \right)^{0,79} = \\ &= 0,89 (1-\mu^2)^{0,79} \frac{E \cdot 10^{-3}}{1-\mu^2} \left(\frac{1000}{r} \right)^2 \left(\frac{r-1000}{B} \right)^{0,79} \end{aligned}$$

или

$$\rho'_{cr} = 0,87 \frac{E \cdot 10^{-3}}{1-\mu^2} \cdot \left(\frac{1000}{r} \right)^2 \left(\frac{r-1000}{B} \right)^{0,79}. \quad (288, IV)$$

Для стали, принимая $E = 2 \cdot 10^6$ кг/см² и $\mu = 0,3$, ф-ле (288, IV) можно придать вид

$$\rho'_{cr} = 19,1 \left(\frac{1000}{r} \right)^2 \cdot \left(\frac{r-1000}{B} \right)^{0,79}. \quad (289, IV)$$

Эту формулу в дальнейшем будем называть формулой Минеса—Папконовича.

Формула Сазузелла—Папконовича дает более близкие к опытным результаты, чем формулы Минеса—Папконовича. К тому же она более проста, так как дает линейную зависимость между критическим давлением и площадью. Следовательно, именно эту формулу можно рекомендовать для практического использования.

В практике изостранного кораблестроения широко используется формула устойчивости цилиндрической оболочки Американского опытного бассейна,* полученная путем несколько иной обработки второй формулы Миньеса (240. IV).

Вводя обозначения:

$$y = p'_{cr} \frac{r}{E} (1 - \mu^2), \quad \alpha = \frac{\pi r}{l}, \quad \kappa = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2\beta} \right)^{3/2}, \quad (290. IV)$$

формулу (240. IV) перепишем в виде

$$y = \left[(\alpha^2 + \alpha^4) \kappa + (1 - \mu^2) \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + \alpha^4)^{3/2}} \right] \frac{1}{\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}}. \quad (291. IV)$$

Определим число волн, обращающее y в минимум, из равенства $\frac{dy}{d\alpha} = 0$ или в развернутом виде

$$(\alpha^2 + \alpha^4) \alpha^2 \kappa = (1 - \mu^2) (3\alpha^4 \alpha^2 + 2\alpha^2),$$

откуда

$$\alpha^2 + \alpha^4 = \kappa \sqrt[4]{(1 - \mu^2) \frac{6}{\alpha}}. \quad (292. IV)$$

где $\frac{6}{\alpha} = 3 + 2 \frac{\alpha^2}{\alpha^3}$.

Подставляя ф-лу (292. IV) в ф-лу (291. IV), получим

$$y = \frac{\alpha x^{3/4} \frac{(1 - \mu^2)(\kappa + 6)}{\sqrt[4]{6(1 - \mu^2)^3}}}{1 - \frac{\alpha x^{3/4}}{2 \sqrt[4]{6(1 - \mu^2)}}}. \quad (293. IV)$$

Заменив в ф-ле (290. IV) значения y согласно ф-ле (293. IV), получим

$$p'_{cr} = \frac{\frac{\pi (1 + 6) E}{36 (1 - \mu^2)^{3/4}} \left(\frac{1}{2\beta} \right)^{3/2} \frac{6}{7}}{1 - \frac{\pi \sqrt[4]{2\beta}}{4 [36 (1 - \mu^2)]^{1/4}}}. \quad (294. IV)$$

Из формул (294. IV) видно, что теоретическое критическое давление цилиндрической оболочки является функцией β или отношения $\frac{\pi}{\alpha}$. Это отношение для встречающихся на практике оболочек находится в пределах $0,6 < \frac{\pi}{\alpha} < 0,8$, и это влияние на изменение величины β невелико. Принимая среднее значение $\frac{\pi}{\alpha} = 0,75$, получим

$$p'_{cr} = 0,82 \frac{E \cdot 10^{-9}}{1 - \mu^2} \cdot \frac{\left(\frac{1000}{r} \right)^{3/2} \frac{1000}{l}}{1 - 0,02 \frac{\sqrt[4]{rl^3}}{l}}. \quad (295. IV)$$

* Виноградский и Трилинат. Устойчивость тонкостенных цилиндрических оболочек под действием внешнего давления. Труды АСМЕ, Т. 56, № 11, 1934.

Для стали с $E = 2 \cdot 10^6$ кг/см² и $\mu = 0,3$ получим следующую окончательную формулу:

$$P_{cr} = \frac{18,5 \left(\frac{1000}{r} \right)^2 \frac{1000}{l}}{1 - \frac{0,03}{l} \sqrt{r^4}}, \quad (296, IV)$$

§ 42. Причины расхождения теоретических и экспериментальных результатов. Учет величинных факторов

Экспериментальному исследованию устойчивости крутовых цилиндрических оболочек, нагруженных равномерным внешним давлением, посвящено большое количество работ. При этом исследования охватывают широкий диапазон конструкций, начиная от маленьких моделей, выполненных из бумаги и фотопленки, до больших натуральных конструкций. Основным и наиболее важным выводом этих исследований является расхождение между теоретическими значениями критических нагрузок и их действительными значениями, зафиксированными в опытах. При этом важно отметить, что опытные значения критических нагрузок оказались меньше теоретических.

В ряде опытов действительные критические давления оказались меньше расчетных в 2—3 раза. Столь большое несоответствие экспериментальных и теоретических результатов заставляло ученых многих стран заниматься исследованием причин этого несоответствия. Каковы же эти причины?

1. Влияние на устойчивость минимума модуля Юнга

Во все расчетные формулы для определения критических нагрузок оболочек (как впрочем и в расчетные формулы для определения критических нагрузок стержней и пластин) входит множителем модуль продольной упругости E материала, из которого выделена оболочка. При пользовании теоретическими формулами в последние обычно подставляют модуль продольной упругости, соответствующий начальному линейному участку диаграммы растяжения—сжатия (рис. 56). Такая подстановка является вполне оправданной, если возникающие в оболочке напряжения не превышают при расчетной критической нагрузке предела пропорциональности материала.

На рисунке 56 по оси абсцисс отложены относительные удлинения

образца, а по оси ординат — соответствующие им напряжения. На диаграмме σ_0 и ϵ_0 — напряжения и деформации, соответствующие пределу пропорциональности, а σ_1 и ϵ_1 — соответствующие пределу текучести материала.

Модуль продольной упругости E есть тангенс угла между касательной к кривой напряжения—деформация и осью абсцисс. Видно, что до предела пропорциональности этот модуль является постоянным и равным таковому в нулевой точке. За пределом пропорциональности

модуль E начинает уменьшаться, что неизбежно приводит к уменьшению жесткости, а следовательно, и к уменьшению устойчивости.

Если при критической нагрузке, определенной по расчетным формулам, напряжения в оболочке лежат за пределами пропорциональности, то фактический модуль Юнга будет ниже модуля, соответствующего линейному участку диаграммы $\sigma-\epsilon$, и, следовательно, действительные критические давления оболочки $p_{кр}$ будут меньше их теоретических значений $p'_{кр}$.

В этом одна из главных причин расхождения опытных и теоретических результатов. Поэтому расхождения теоретических и опытных данных, вызванные отступлениями от закона Гука, являются не погрешностью расчетных формул, а погрешностью, вызванной распространением расчетных формул за пределы, до которых эти формулы сохраняют свою строгость.

В связи с тем, что построение теории устойчивости оболочек при нелинейной зависимости между напряжениями и деформациями связано с большими математическими трудностями, целесообразно воспользоваться полученными выше расчетные формулы, вводя в них соответствующий поправочный коэффициент, учитывающий отступления от закона Гука.

Для большей наглядности изложения проанализируем сначала влияние изменения закона Гука на устойчивость стержней. Рассмотрим центрально сжатый прismaticеский стержень, свободно опертый по концам. Пусть сжимающая нагрузка на стержень равна критической, а соответствующие ей напряжения и деформации первого исходного состояния σ_0 и ϵ_0 показаны на рис. 57, а. Будем считать, что вплоть до точки C диаграммы материал стержня упруг, т. е. кривая разгрузки совпадает с кривой нагрузки, хотя точка C и лежит выше предела пропорциональности материала. Таким образом, мы имеем линейную зависимость между напряжениями и деформациями, хотя материал остается вполне упругим, и кривая разгрузки повторяет кривую нагрузки.

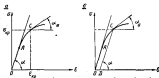


Рис. 57

Модуль Юнга до предела пропорциональности есть $E = \lg \alpha$, а модуль Юнга в точке C есть $E_t = \lg \alpha_t$, где α_t — угол, образованный касательной к кривой напряжение—деформации и осью абсцисс в точке C . В связи с этим модуль E_t часто называют касательным модулем упругости.

Если при напряжениях, соответствующих точке C , произвести малое изменение нагрузки, то связь между напряжениями и деформациями будет определяться касательным модулем E_t . При исследовании устойчивости

мы даем бесконечно малое отклонение от исходного положения равновесия, поэтому для стержня, находящегося под критической нагрузкой, дополнительные напряжения изгиба весьма малы в сравнении с начальными напряжениями сжатия, в связи между напряжениями изгиба и деформациями определяется не модулем E , а касательным модулем E_s . Следовательно, в дифференциальное уравнение изогнутой кривой и в выражение для критической нагрузки будет входить касательный модуль E_s .

В рассмотренном случае поправочный коэффициент к теоретической формуле устойчивости будет равен

$$\gamma_2 = \frac{E_s}{E}. \quad (297. IV)$$

где γ_2 — поправочный коэффициент, учитывающий влияние отступлений от закона Гука на устойчивость.

Рассмотрим теперь более сложный случай, когда при критической нагрузке напряжения в стержне выше предела упругости материала и им соответствует точка C (рис. 57, б).

В этом случае при увеличении нагрузки рост сжимающих напряжений будет происходить по кривой нагрузки (касательный модуль в точке C есть E_s), а при уменьшении нагрузки уменьшение сжимающих напряжений (разгрузка) происходит по прямой CD , угол наклона которой к оси абсцисс равен углу наклона начального участка диаграммы напряжения—деформация. Следовательно, модуль Юнга при разгрузке будет равен начальному модулю Юнга E . Таким образом, если теперь стержню, находящемуся под действием критической нагрузки с напряжениями сжатия, соответствующими точке C , дать малое отклонение от прямолинейной формы, то в волокнах, находящихся на вогнутой стороне, вследствие изгиба будет увеличение сжимающих напряжений, причем зависимость напряжений от деформаций будет определяться касательным модулем E_s , а в волокнах, находящихся на выпуклой стороне, будет происходить уменьшение сжимающих напряжений (разгрузка), причем зависимость напряжений от деформаций будет определяться модулем E . Считая, что поперечное сечение стержня при изгибе остается плоским, будем иметь следующую картину распределения дополнительных изгибных напряжений.

Если r — радиус кривизны упругой линии стержня при его отклонении от положения равновесия, то максимальные дополнительные сжимающие напряжения будут равны $\frac{E_s \cdot \xi_1}{r}$, а максимальные дополнительные растягивающие напряжения равны $\frac{E \cdot \xi_2}{r}$, где ξ_1 и ξ_2 — отстояния крайних волокон стержня от нейтральной оси его поперечного сечения. Положение нейтральной оси определяется равенством нулю равнодействующей дополнительных растягивающих и сжимающих напряжений. Из этого условия для стержня прямоугольного сечения получаем $E \xi_2^2 = E_s \xi_1^2$. Но $\xi_1 + \xi_2 = \delta$, где δ — высота поперечного сечения стержня. Решив эти уравнения относительно ξ_1 и ξ_2 , получим

$$\xi_1 = \frac{\sqrt{E_s}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_s}}, \quad \xi_2 = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_s}} \delta.$$

Дополнительный изгибающий момент, определяемый напряжениями, показанными на рис. 58, будет равен

$$M = \frac{E\delta_1}{\rho} \cdot \frac{\delta_1}{2} \cdot \frac{2}{3}\delta = \frac{E\delta_1}{12\rho} \cdot \frac{4E\delta_2}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_1})^2}.$$

где δ — ширина сечения стержня. Но $\frac{\delta\delta_1}{12} = I$ — момент инерции поперечного сечения стержня, поэтому

$$M = \frac{1}{\rho} I \frac{4EE_1}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_1})^2}.$$

Сравнивая эту формулу с обычной формулой изгиба стержня $M = \frac{1}{\rho} IE$, видим, что вместо модуля Юнга E в расчетную формулу входит величина $E_{sp} = \frac{4EE_1}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_1})^2}$.

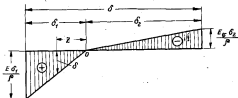


Рис. 58

Эту величину называют приведенным модулем нормальной упругости. В случае превышения напряжениями предела упругости материала в расчетные формулы устойчивости стержня следует вводить не модуль Юнга E , а приведенный модуль E_{sp} . Следовательно, в этом случае поправочный коэффициент η_2 будет равен

$$\eta_2 = \frac{E_{sp}}{E} = \frac{4E_1}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_1})^2}. \quad (208, IV)$$

Если задана диаграмма сжатия образца, то величина касательного модуля E_1 легко может быть определена для любой точки диаграммы.

Так обстоит дело в отношении устойчивости стержней.

Что касается влияния отступлений от закона Гука на устойчивость оболочек, то необходимо отметить, что это влияние мало изучено. Трудность изучения данного вопроса состоит в том, что даже в наиболее простом случае, когда оболочка в первом исходном состоянии является безмоментной и равномерно напряжена, при потере устойчивости в оболочке возникает сложное напряженное состояние. Дополнительные напряжения, возникающие при потере устойчивости, состоят из чистых

напряжений (напряжений от усилий) и изгибных напряжений (напряжений от моментов), при этом цепные и изгибные напряжения действуют в продольных и поперечных сечениях и меняются как по длине оболочки, так и по ее периметру.

Учет влияния отступлений от закона Гука в этих условиях оказывается чрезвычайно трудной задачей. Поэтому можно рекомендовать для определения поправочного коэффициента η либо пользоваться табли-

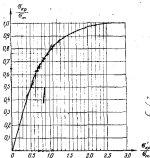


Рис. 59

цей, рекомендованной Ю. А. Шиманским (см. Приложение V), либо графиком, приведенным на рис. 59.

2. Влияние на устойчивость других нелинейных факторов (начальная погрешность оболочки, неоднородность материала, пульсации нагрузки и другие)

Как было отмечено, одной из причин несоответствия теоретических формул с экспериментальными являются отклонения материала от закона Гука. Однако опыты показывают, что в ряде случаев экспериментальные значения критических нагрузок ниже их теоретических значений даже тогда, когда возникающие в оболочке напряжения не превосходят предела пропорциональности материала. В этих условиях закон Гука удовлетворяется, и причины расхождения опыта с теорией кроются в других факторах, из которых необходимо остановиться.

Отметим, что разобранный нами выше общий теорем устойчивости упругого равновесия и все приведенные решения относятся к так называемой классической теории устойчивости. Классическая теория устойчивости исходит из того, что при критической нагрузке два положения равновесия (первое исходное и второе явное) бесконечно близки друг другу, т. е. из перемещения при критической нагрузке отличаются на бесконечно малые величины.

Следовательно, чтобы перевести оболочку из первого исходного состояния равновесия во второе новое, необходимо оболочке в первом исходном состоянии дать бесконечно малые дополнительные перемещения. Поэтому классическую теорию устойчивости иногда называют теорией малых отклонений или теорией малых возмущений, а в последние годы распространилось наименование теории устойчивости «с малым».

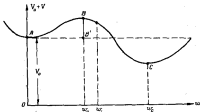


Рис. 60

При исследовании устойчивости оболочек, кроме того, мы исходили из предположения, что оболочка имеет идеальную круговую форму, материал ее сплошь однороден и изотропен, толщина оболочки постоянна и равна δ , а действующая нагрузка приложена чисто статически, т. е. совершенно отсутствует пульсация нагрузки. Все эти условия, естественно, являются математической идеализацией действительности, так как реальная оболочка всегда имеет неизбежную начальную погреш, а материал также не может быть совершенно однородным. Толщина оболочки, вследствие неравномерности прокатки или литья, меняется в определенных пределах. Не исключается также при производстве опытов некоторая пульсация нагрузки. Все эти факторы в той или иной мере влияют на критическую нагрузку оболочки.

Перейдем к рассмотрению устойчивых и неустойчивых форм упругого равновесия оболочек, выходя за пределы классической теории устойчивости, т. е. не ограничиваясь рассмотрением равновесных форм, бесконечно близких друг другу. Напомним при этом, что в положении устойчивого равновесия потенциальная энергия оболочки имеет минимум, а в положении неустойчивого равновесия — максимум.

Определим, имеются ли другие равновесные формы при нагрузках, меньших критической нагрузки, определенной по классической теории. Отметим, что речь будет идти о таких положениях равновесия, которые отличаются друг от друга не на бесконечно малые величины перемещений, а на большие конечные перемещения. На рис. 60 приведена кривая, показывающая зависимость абсолютной и дополнительной потенциальной энергии оболочки от величины дополнительного перемещения w при некотором значении внешнего давления, меньшем критического давления, определенного по классической теории устойчивости.

Пусть критическое давление для оболочки, определенное по формулам классической теории, равно 150 кг/см^2 и пусть кривая, изображенная на рис. 60, соответствует давлению 100 кг/см^2 . На рис. 60 приняты следующие обозначения:

V_0 — потенциальная энергия, соответствующая верному исходному состоянию (дополнительное перемещение w равно нулю);

V — дополнительная потенциальная энергия;

$V_0 + V$ — суммарная потенциальная энергия.

Из рисунка видно, что оболочка при данной нагрузке имеет три положения упругого равновесия (точки A , B и C). При этом точки A и C соответствуют устойчивому равновесию (потенциальная энергия имеет минимум), а точка B — неустойчивому равновесию (потенциальная энергия имеет максимум.)

Если подойти к исследованию устойчивости с точки зрения классической теории, т. е. дать оболочке начальное бесконечно малое отклонение от положения равновесия, то после удаления причины, вызвавшей отклонение оболочки, последняя вернется к своей исходной форме.

Теперь перейдем к исследованию устойчивости с точки зрения конечных перемещений, которые могут быть произвольными. Для этого оболочке, находящейся в исходном и устойчивом «в малом» положении равновесия, дадим не бесконечно малое отклонение, а отклонение w , причем $w > w_c$. Тогда, после удаления причины, вызвавшей отклонение, оболочка уже не вернется в положение A , а перейдет в положение C , которое также является устойчивым. На приведенном рисунке энергетический уровень в точке C ниже, чем в точке A , хотя в принципе он может быть и выше, чем в точке A . Из изложенного следует, что оболочка, устойчивая в «малом», оказывается неустойчивой в «большом» и для того чтобы ее вывести из исходного равновесного положения, необходимо дать отклонение $w > w_c$, т. е. преодолеть энергетический барьер, ордината которого равна BB' .

Таким образом, можно констатировать, что если имеются условия для преодоления энергетического барьера (соответствующая начальная погрешка, возможные дефекты материала, пульсации нагрузки), то уже при рассматриваемой нагрузке 100 кг/см^2 оболочка потеряет устойчивость, хотя критическая нагрузка, определяемая классической теорией, равна 150 кг/см^2 .

Теперь дадим общую картину возможных равновесных положений оболочки, причем по оси ординат будем откладывать величину дополнительной потенциальной энергии, а по оси абсцисс — величину дополнительного прогиба при различных значениях параметра внешнего давления (рис. 61).*

Для удобства исследования величины дополнительной потенциальной энергии, дополнительного прогиба, а также величины внешнего давления приведены не в абсолютных, а в относительных значениях. На рис. 61 приведены кривые, соответствующие шести значениям безразмерного параметра нагрузки p .

Отметим, что для рассмотренной оболочки критическому давлению, даваемому классической теорией, соответствует безразмерный параметр нагрузки $p = 7,2$.

* Рисунок 61 заимствован из монографии А. С. Вольфра «Гибкие пластины и оболочки». Гостехиздат, 1966.

Пусть, например, внешнее давление $\bar{p}=3,0$ (кривая I). Из графика видно, что при этой нагрузке может быть только одна форма упругого равновесия, соответствующая $\bar{w}=0$. Это положение является устойчивым, так как дополнительные потенциальные энергии $\bar{V}$ минимальны как по отношению к бесконечно малым перемещениям, так и по отношению к конечным перемещениям.

Рассмотрим кривую II ($\bar{p}=3,8$). При этой нагрузке возможны уже две формы равновесия, соответствующие: первая — дополнительному прогибу $\bar{w}=0$ и вторая — прогибу $\bar{w}=1,05$. Первая форма является устойчивой, а вторая — безразличной. Уровень энергии для второй формы выше, чем для первой, и для перехода оболочки во второе положение необходимо преодолеть энергетический барьер.

Всем значениям $\bar{p}$, больше 3,8, соответствуют три равновесные формы.

На кривой III (внешнее давление $\bar{p}=4,2$) две равновесные формы, соответствующие: первая $\bar{w}=0$ и вторая $\bar{w}=2,15$, являются устойчивыми, а третья форма при $\bar{w}=1,05$ — неустойчивой. В данном случае имеем равенство энергетических уровней двух устойчивых форм.

Величина энергетического барьера, необходимого для перехода из первого устойчивого „в малом“ положения равновесия в неустойчивое, здесь меньше, чем у кривой II.

На кривой IV (внешнее давление $\bar{p}=5,5$), так же как и на кривой III, три равновесные формы: две устойчивые ($\bar{w}=0$ и $\bar{w}=2,8$) и одна неустойчивая ($\bar{w}=0,5$). Важно отметить, что энергетический уровень, соответствующий второй устойчивой форме ($\bar{w}=2,8$), ниже энергетического уровня для первого из них исходного положения, а величина энергетического барьера ниже, чем у кривой III.

Кривая V соответствует критической нагрузке, определенной по классической теории ($\bar{p}=7,2$). При этом первоначальная форма равновесия будет безразличной по отношению к соседним бесконечно близким формам (энергетический барьер равен нулю).

Наконец, кривая VI соответствует $\bar{p}=8$. Прогибу $\bar{w}=0$ соответствует неустойчивое равновесие, причем одной из форм (устойчивых) соответствуют отрицательные значения $\bar{w}$.

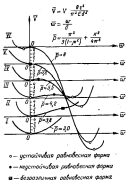


Рис. 61

Изложенные рассуждения позволяют дать полную картину возможных равновесных форм оболочки при различных нагрузках. Так, очевидно, в диапазоне нагрузок, соответствующих $0 < \bar{p} < 3,8$, исходная форма равновесия является устойчивой при любых отклонениях от положения равновесия как больших, так и малых.

Если какой-либо возмущающий фактор (начальная кривизна, дефекты материала, пульсации нагрузки и т. д.) вызовет отклонения оболочки от исходного состояния, то по удалении этого фактора исходная форма равновесия обязательно восстановится.

В диапазоне же нагрузок $3,8 < \bar{p} < 7,2$ будет иметь место другая картина. Если возмущающий фактор в состоянии преодолеть энергетический барьер, оболочка скачкообразно (с хлопком) перейдет в новое устойчивое равновесное положение (изогнутое), минуя промежуточную неустойчивую форму. Вероятность перехода к изогнутой равновесной форме по мере увеличения нагрузки возрастает, так как энергетический барьер при этом уменьшается. Наконец, при $\bar{p} = 7,2$ энергетический барьер равен нулю, и оболочка теряет устойчивость без наличия возмущающих факторов.

Изложенное позволяет сделать следующие важные выводы.

1. Оболочка, устойчивая «в малом», т. е. устойчивая в соответствии с классической теорией устойчивости, может быть неустойчивой «в большом», т. е. при некоторых конечных отклонениях от исходного равновесного состояния.

2. Для того чтобы перевести оболочку из исходного равновесного положения в другое равновесное положение, необходимо преодолеть энергетический барьер.

3. Энергетический барьер преодолевается либо приложением внешних возмущений (пульсация нагрузки), либо наличием соответствующей начальной кривизны, дефектов материала и т. д.

4. Всегда существует некоторая величина внешнего давления, ниже которой оболочка устойчива как в «малом», так и в «большом». Следовательно, никакие отклонения не могут вывести оболочку из исходной устойчивой равновесной формы.

Эта величина давления и называется нижним критическим давлением.

5. По мере возрастания нагрузки от нижнего критического давления до величины критической нагрузки, определенной по классической теории, энергетический барьер уменьшается, следовательно, для его преодоления необходимы меньшие возмущения, и вероятность потери устойчивости возрастает. При этом потеря устойчивости происходит с хлопком, и оболочка, минуя промежуточное неустойчивое положение, переходит в новое изогнутое устойчивое положение.

6. При критической нагрузке, определенной по классической теории, энергетический барьер равен нулю, и оболочка теряет устойчивость практически без внешних возмущений. Поэтому критическое давление, определенное по классической теории, называется верхним критическим давлением.

Нелинейная теория устойчивости оболочек выходит за рамки настоящего курса, поэтому ограничимся некоторыми дополнительными замечаниями.

Прежде всего не у всех оболочек может иметь место картина, изложенная выше. Может оказаться, что оболочка вплоть до верхнего критического давления имеет только одну равновесную форму. Поэтому

в последнем случае нижнее критическое давление будет отсутствовать, а оболочка будет терять устойчивость без удлова.

Наконец, может возникнуть вопрос, почему потеря устойчивости оболочки является опасной, хотя оболочка при потере устойчивости теряет исходную форму равновесия и приобретает новую устойчивую изогнутую форму? Необходимо сразу же отметить, что критическую нагрузку в общем случае нельзя отождествлять с разрушающей нагрузкой, так как последняя всегда выше критической.

Таким образом, потерянная устойчивость оболочки в принципе может выдержать еще доопределяемую нагрузку. Величина этого промещения зависит от того, какие напряжения возникают в оболочке при потере устойчивости. Однако важно иметь в виду, что так как исходное состояние обычно является безмоментным или близким к нему, то при отсутствии потери устойчивости, вплоть до разрушения, состояние оболочки будет безмоментным. Естественно, что безмоментное состояние является наиболее эффективным, так как в наибольшей мере используются прочностные характеристики материала оболочки.

При потере устойчивости оболочка приобретает новую изогнутую форму упругого равновесия, при этом, кроме поперечных напряжений или напряжений от усилий, существующими оказываются напряжения от изгиба. Материал оболочки работает как на поперечные напряжения, так и на изгибные, и, следовательно, несущая способность оболочки уменьшается.

Для корпусов подводных лодок потеря устойчивости особенно опасна. Дело в том, что величины напряжений, возникающих в корпусах подводных лодок при расчетной нагрузке, настолько велики, что при потере устойчивости оболочка не в состоянии воспринять возникающие изгибные напряжения и разрушается. Таким образом, для корпусов подводных лодок мы вправе отождествлять критическую нагрузку с разрушающей.

Таблица 4

Расчетные формулы	δ , см										
	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4
(280.IV)	0,45	0,57	0,69	0,80	0,90	0,99	1,06	1,10	1,15	1,18	1,21
(289.IV)	0,42	0,52	0,62	0,72	0,81	0,88	0,93	0,97	1,00	1,03	1,04
(273.IV)	0,30	0,36	0,43	0,50	0,57	0,62	0,72	0,76	0,78	0,80	0,83

Ю. А. Шиманский рекомендует определять критические давления по теоретическим формулам классической теории устойчивости, вводя в них соответствующие поправочные коэффициенты η . Для критического давления обшивки в пролете между шпангоутами Шиманский рекомендует определять теоретическое критическое давление по ф-ле (273.IV), а поправочный коэффициент η , учитывающий всевозможные факторы, по формуле

$$\eta = 1 - \frac{\delta^2}{8}, \quad (293.IV)$$

где δ — толщина обшивки в сантиметрах.

Так как в расчетной практике, кроме ф-лы (273.IV), используются также ф-лы (280.IV) и (289.IV), то Ю. А. Шиманский приводит

таблица поправочных коэффициентов (табл. 4), основанная на сравнении теоретических результатов с экспериментальными.*

Существенным недостатком как ф-лы (299.IV), так и табл. 4 является то обстоятельство, что поправочные коэффициенты η зависят только от толщины обшивки δ . Между тем, абсолютная величина толщины не является определяющей для учета величинных факторов.

Определяющим будет отношение толщины к радиусу $\left(\frac{\delta}{r}\right)$ и к расстоянию между ребрами $\left(\frac{l}{T}\right)$, так как очевидно, что для геометрически подобных оболочек поправочные коэффициенты должны быть одинаковыми. Поэтому с погрешностью в безопасную сторону можно рекомендовать принимать поправочный коэффициент**

$$\eta_0 = 0,70 \text{ при использовании ф-лы (280.IV);}$$

$$\eta_0 = 0,60 \quad : \quad : \quad : \quad (289.IV);$$

$$\eta_0 = 0,50 \quad : \quad : \quad : \quad (273.IV).$$

Итак, действительное критическое давление должно определяться по формуле

$$P_{кр} = \eta_1 \eta_2 P'_{кр} \quad (300.IV)$$

где η_1 — поправочный коэффициент, учитывающий влияние на устойчивость начальной погиба, неоднородности материала и других факторов;

η_2 — поправочный коэффициент, учитывающий влияние на устойчивость отклонений от закона Гука.

Для определения коэффициента η_2 нужно предварительно найти наибольшие целые напряжения в продольных сечениях обшивки σ_1^0 , соответствующие давлению $\eta_1 P'_{кр}$ по формуле

$$\sigma_1^0 = -k_1^0 \frac{P'}{\delta} = -k_2^0 \eta_1 \frac{P'_{кр}}{\delta}, \quad (301.IV)$$

а затем уже по этой величине напряжений с помощью графика рис. 39 или таблицы Приложения V найти коэффициент η_2 .

Практическая схема расчета

Исходные данные: r , $\delta_{сн}$ (спецификационная толщина обшивки), l , F .
Определяются:

1. Расчетная толщина обшивки

$$\delta = \delta_{сн} - \Delta,$$

2. Теоретическое значение критического давления по формуле Саусвелла—Павловича (280.IV).

3. Коэффициент η_1 . Для ф-лы (280.IV) он принимается равным 0,7.

4. Из расчета прочности обшивки коэффициент $k_2^0 = 1 - \epsilon_k$.

* Таблица заимствована из книги Ю. А. Шиманского „Строительная механика полых оболочек“. Судпромгиз, 1948.

** В „Справочнике по строительной механике корабля“, а. 2 рекомендуется принимать значение η_0 равным 0,6—0,8.

6. Наибольшие напряжения в продольных сечениях обшивки поперечные шпангоуты, соответствующие нагрузке $\gamma_0 R'_{кр}$

$$\sigma'_{кр} = -k_1^2 \gamma_0 \frac{R'_{кр} l^2}{8}.$$

6. Поправочный коэффициент γ_0 по таблице Приложения V или по графику рис. 39.

7. Действительное критическое давление для обшивки по формуле

$$R_{кр} = \gamma_0 \gamma_1 R'_{кр}.$$

8. Проверяется удовлетворение критерия устойчивости обшивки $R_{кр} > p$, где p — расчетное давление.

§ 43. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной поперечными упругими ребрами жесткости

При исследовании устойчивости круговой цилиндрической оболочки между шпангоутами мы считали, что при потере устойчивости обшивка шпангоуты сохраняют свою круговую форму.

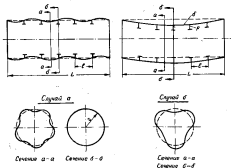


Рис. 62

Это допущение не всегда выполняется, и при недостаточной жесткости шпангоутов оболочка теряет устойчивость вместе со шпангоутами. Отличные эти формы потери устойчивости показано на рис. 62.

Из рисунка видно, что в случае «а» теряет устойчивость только обшивка между шпангоутами, а шпангоуты сохраняют свою круговую форму. В случае же «б» шпангоуты теряют устойчивость вместе с обшив-

кой, поэтому последний случай иногда называют потерей устойчивости отсеза в целом.

Исследованию устойчивости круглых цилиндрических оболочек, подкрепленных упругими кольцевыми ребрами (шпангоутами), посвящены работы П. А. Соколова,^{*} Ф. Флюгге^{**} и других авторов. Ниже приводится решение этой задачи, прикладываемое Флюгге, как относительно более простое.



Рис. 63

Пусть оболочка загружена по цилиндрической поверхности внешним давлением p , а по торцам — внешним давлением p_1 . Требуется определить критическую нагрузку для такой оболочки.

Если по длине отсеза шпангоутов достаточно много, все они одинаковы и отстоят на равных расстояниях друг от друга, то реальную оболочку со шпангоутами можно заменить эквивалентной ей оболочкой без шпангоутов. Рассмотрим, как

производится такая замена. Для этого возьмем сначала оболочку без шпангоутов (рис. 63).

Зависимость между усилиями и моментами, с одной стороны, и компонентами деформации срединной поверхности, с другой, определяется формулой (122.1). Приведем их и здесь, так как они необходимы для дальнейших рассуждений:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{E\delta}{1-\mu^2} (u_1 + \nu u_2), & M_1 &= \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} (u_1 + \nu u_2), \\ T_2 &= \frac{E\delta}{1-\mu^2} (u_1 + \nu u_2), & M_2 &= \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} (u_1 + \nu u_2), \\ S &= \frac{E\delta}{2(1+\mu)} v, & H &= \frac{E\delta^3}{12(1+\mu)} v. \end{aligned}$$

Рассмотрим сначала осевое и кольцевое усилия T_1 и T_2 . Эти усилия являются усилиями, отнесенными к единице длины. Поэтому усилия, передающиеся через сечение оболочки, площадь которого равна $\delta \times 1$ см, будут равны

$$\begin{aligned} T_1 \cdot 1 &= \frac{E}{1-\mu^2} \delta \cdot 1 (u_1 + \nu u_2), \\ T_2 \cdot 1 &= \frac{E}{1-\mu^2} \delta \cdot 1 (u_1 + \nu u_2). \end{aligned}$$

В данном случае $\delta \times 1$ см есть площадь сечения оболочек длиной 1 см и толщиной δ . В левой части этих равенств стоят усилия, а в правой — соответствующие им деформации. Коэффициенты пропорциональности определяют жесткость при растяжении—сжатии этой оболочки. Таким образом, жесткости при растяжении—сжатии в осевом и кольцевом направлениях равны друг другу и равны $\frac{E}{1-\mu^2} \delta \cdot 1$.

^{*} П. А. Соколов, Устойчивость тонкой цилиндрической оболочки, подкрепленной упругими круглыми ребрами жесткости при действии поперечной и продольной нагрузок. ПАМ, т. 1, 1933.

^{**} Ф. Флюгге, Ingenieur Archiv, т. 3, 1932.

т. е. равны произведению модуля нормальной упругости (исправленного на наличие двухосного напряженного состояния) на площадь рассматриваемого сечения (2×1 см).

Если рассмотреть теперь осевое усилие, передающееся через участок кольца, дуга которого равна l , то это усилие, очевидно, будет равно

$$T_1 l = \frac{E}{1-\mu^2} B (a_1 + \mu a_1).$$

В данном случае жесткость участка оболочки, дуга которого равна l и толщина δ , будет $\frac{E}{1-\mu^2} B$, где B — площадь сечения рассматриваемого участка оболочки (на рис. 63 эта площадь заштрихована).

Аналогично, если взять участок оболочки длиной l , то кольцевое усилие, передающееся через этот участок, будет

$$T_2 l = \frac{E}{1-\mu^2} M (a_2 + \mu a_2).$$

Видно, что в данном случае жесткость при растяжении—сжатии и кольцевом направлении участка оболочки длиной l и толщиной δ равна $\frac{E}{1-\mu^2} B$. Таким образом, жесткость при растяжении—сжатии



Рис. 64



Рис. 65

в осевом и кольцевом направлениях оказалась равной, что является естественным следствием равенства жесткостей оболочки на единицу длины как в кольцевом, так и в осевом направлениях. Совершенно аналогично жесткость при изгибе в осевом и кольцевом направлениях участка оболочки длиной l см будет равна

$$\frac{E \theta \cdot 1}{12(1-\mu^2)} = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \frac{1 \cdot \theta}{12},$$

т. е. равна произведению модуля нормальной упругости (исправленного на наличие двухосного напряженного состояния) на главный момент инерции сечения оболочки. Если из оболочки выделять участок с дугой равной l , то жесткость при изгибе выделенного участка как в осевом, так и в кольцевом направлениях будет равна $\frac{E}{1-\mu^2} \cdot \frac{\theta}{12}$.

Пусть теперь рассмотренная оболочка подкреплена большим числом одинаковых и равноотстоящих шпангоутов, площадь поперечного сечения каждого из которых равна F и расстояние между которыми равно l (рис. 64).

Так как шпангоуты установлены только в кольцевом направлении, то, очевидно, жесткость оболочки в осевом направлении не изменится.

Следовательно, для выделенного из оболочки участка, длина дуги которого l , жесткость при растяжении—сжатии и жесткость при изгибе в осевом направлении будут соответственно равны

$$\frac{E}{1-\mu^2} B, \quad \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \frac{D^3}{12}.$$

В кольцевом направлении жесткость оболочки при растяжении—сжатии и при изгибе существенно изменится. Действительно, если мы выделим из оболочки участок длиной l (рис. 65), то при растяжении—сжатии этого участка в кольцевом направлении сопротивление растяжению—сжатию будет оказывать не только обшивки оболочки площадью сечения $l \cdot \delta$, но и шпангоут площадью сечения F . Таким образом, суммарная площадь сечения, сопротивляющаяся растяжению—сжатию в кольцевом направлении, равна

$$a_1 = B + F. \quad (302. IV)$$

Дополнительная площадь шпангоута F приводит к увеличению жесткости оболочки в кольцевом направлении на величину EF .

Таким образом, полная жесткость на растяжение—сжатие в кольцевом направлении участка оболочки длиной l будет равна

$$K_l = \frac{E}{1-\mu^2} B + EF. \quad (303. IV)$$

Для расчетов удобнее пользоваться не абсолютными значениями жесткостей, усилий и моментов, а относительными, т. е. значениями жесткостей, усилий и моментов, приходящихся на единицу длины средней нормальности. Поэтому разделим равенство (302. IV) на l , получим

$$\frac{B}{l} = \delta + \frac{F}{l}. \quad (304. IV)$$

Здесь $\frac{B}{l}$ — суммарная площадь сечения обшивки и шпангоута, отнесенная к единице длины оболочки. Величину $\delta + \frac{F}{l}$ будем называть приведенной толщиной оболочки $\delta_{\text{пр}}$, т. е.

$$\delta_{\text{пр}} = \delta + \frac{F}{l}. \quad (305. IV)$$

Площадь сечения участка оболочки длиной l см будет равна

$$a_{\text{пр}} = \left(\delta + \frac{F}{l} \right) \cdot l = \delta_{\text{пр}} \cdot l. \quad (306. IV)$$

Эту площадь будем называть *приведенной площадью обшивки со шпангоутом*.

Разделив теперь жесткость K_l на длину участка l , получим приведенную жесткость на растяжение—сжатие в кольцевом направлении обшивки со шпангоутом, приходящуюся на единицу длины оболочки

$$\delta_{\text{пр}} = \frac{K_l}{l}. \quad (307. IV)$$

Изложенные рассуждения привели нас к замене (при рассмотрении растяжения—сжатия в кольцевом направлении) реальной оболочки толщиной δ со шпангоутом площадью сечения F фактивной оболоч-

кой без шпангоутов, имеющей толщину, равную приведенной толщине $\delta_{\text{пр}} = \delta + \frac{F}{l}$ (рис. 65).

При деформации растяжения—сжатия в кольцевом направлении обе оболочки эквивалентны друг другу. При этом необходимо отметить, что у фиктивной оболочки при кольцевом растяжении слой толщиной δ сопротивляется как кольцевому удлинению ϵ_ϕ , так и осевому удлинению ϵ_z , а слой толщиной $\frac{F}{l}$ сопротивляется только кольцевому удлинению ϵ_ϕ .

Перейдем теперь к рассмотрению изгиба оболочки в кольцевом направлении. При изгибе в кольцевом направлении в поперечном изгибающем моменте будет участвовать как обшивка, так и шпангоут. Для участка оболочки длиной l , кроме жесткости обшивки на изгиб $\frac{E}{1-\mu} \cdot \frac{B^3}{12}$, будет жесткость шпангоута на изгиб EI , где I — главный момент инерции шпангоута вместе с присоединенным пояском

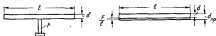


Рис. 66

обшивки. Следовательно, суммарная жесткость на изгиб в кольцевом направлении участка обшивки длиной l вместе со шпангоутом будет равна

$$D_1 = \frac{E}{1-\mu} \cdot \frac{B^3}{12} + EI. \quad (308. IV)$$

Во всех практических случаях жесткость обшивки на изгиб ничтожно мала в сравнении с изгибной жесткостью шпангоутов, так как $\frac{B^3}{12} \ll l$, поэтому в выражении (308. IV) первым слагаемым можно пренебречь в сравнении со вторым. В этом случае изгибная жесткость в кольцевом направлении участка оболочки длиной l будет равна EI .

Определяя относительную жесткость, т. е. жесткость единицы длины оболочки со шпангоутами, получим приведенную жесткость на изгиб в кольцевом направлении обшивки со шпангоутами

$$D_{11} = \frac{EI}{l}. \quad (309. IV)$$

Следовательно, изгибную жесткость шпангоутов мы как бы равномерно распределили по длине оболочки.

Резюмируя изложенное, можно отметить, что установка кольцевых шпангоутов привела к тому, что жесткость оболочки при растяжении—сжатии в изгибе в кольцевом направлении возросла, а в осевом направлении, равно как и жесткость при сдвиге и кручении, осталась прежней. Таким образом, мы пришли к анизотропной оболочке, причем эта анизотропия создана не материалом, который является изотропным, а конструктивными мероприятиями (установкой шпангоутов). Такая анизотропия называется конструктивной анизотропией.

В итоге оболочка со шпангоутами сведена к конструктивно-анизотропной оболочке, имеющей в кольцевом направлении жесткость при растяжении—сжатии $\frac{Eh}{1-\mu^2} + E\frac{F}{r}$ и при изгибе $\frac{EF}{r}$. Жесткость же при растяжении—сжатии и изгибе в осевом направлении, а также жесткость при сдвиге и кручении остались прежней.

Отметим, что пренебрежение жесткостью при изгибе обшивки в сравнении с жесткостью при изгибе шпангоутов позволяет в уравнениях равновесия пренебречь изгибающим моментом M_1 и крутящим моментом H в сравнении с изгибающим моментом M_2 .*

В итоге получаем следующие формулы для усилий и моментов, которые необходимо ввести в систему уравнений устойчивости:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{Eh}{1-\mu^2} (u_1 + \mu u_2) \\ T_2 &= \frac{Eh}{1-\mu^2} (u_2 + \mu u_1) + \frac{EF}{r} u_2 \\ S &= \frac{Eh}{2(1+\mu)} w \\ M_2 &= \frac{EF}{r} u_2 \end{aligned} \right\} \quad (240. IV)$$

Выпишем теперь систему уравнений устойчивости в усилиях и моментах (см. систему (243. IV)) с учетом пренебрежения моментами M_1 и H в сравнении с моментом M_2 . Получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial S}{\partial \varphi} + F_1 &= 0 \\ \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial M_2}{\partial \varphi} + F_2 &= 0 \\ \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial M_2}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} T_2 + F_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (241. IV)$$

где, согласно ф-лам (244. IV),

$$\begin{aligned} F_1 &= -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_2}{\partial \varphi} T_1^I - \rho \sigma_1, \\ F_2 &= -\frac{\partial \sigma_2}{\partial x} T_1^I + \frac{1}{r} \sigma_1 T_1^I + \rho \sigma_2, \\ F_3 &= -\frac{\partial \sigma_2}{\partial x} T_1^I + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_2}{\partial \varphi} T_1^I. \end{aligned}$$

Здесь T_1^I , T_1^I — осевые и кольцевые усилия в первом исходном состоянии, определенные по безмоментной теории. Для цилиндрической оболочки эти усилия равны

$$T_1^I = -\frac{pR}{2}, \quad T_2^I = -pR.$$

* Ф. Фиксте решал задачу без этого допущения, которое значительно упрощает решение.

Углы поворота α , α_1 , α_2 определяются по ф-лам (245.IV):

$$\alpha_1 = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{v}{r},$$

$$\alpha_2 = - \frac{\partial w}{\partial \xi},$$

$$\alpha_3 = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Подставив условия T_1^I и T_2^I , а также углы α_1 , α_2 и α_3 в ф-лам (244.IV), получим выражения для F_1 , F_2 , F_3 через перемещения u , v и w . Заменяя в системе уравнений устойчивости (311.IV) условия T_1 , T_2 , S и момент M_3 их значениями согласно ф-лам (310.IV), приходим к системе линейных однородных дифференциальных уравнений устойчивости в перемещениях u , v и w

$$\left. \begin{aligned} r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} r \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \eta} + r \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + r \chi_1 \left(\frac{\partial v}{\partial x \partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{1+\mu}{2} r \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \eta} + \frac{1-\mu}{2} r^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + s \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) + a_1 \left(\frac{\partial u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \right) - r^2 \chi_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 0 \\ r \frac{\partial v}{\partial x} + s \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} - w \right) - a_1 \left(\frac{\partial u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \right) - \chi_2 \left(\frac{\partial u}{\partial \eta^2} + w \right) - \chi_1 r^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (312.IV)$$

В уравнениях (312.IV):

$$\left. \begin{aligned} \chi_1 &= \frac{r r'}{E s} \cdot \frac{1-\mu^2}{2} \\ \chi_2 &= \frac{r r'}{E s} (1-\mu^2) \\ s &= \frac{b_0 (1-\mu^2)}{t} \\ a_1 &= \frac{t}{\chi_2 r^2} (1-\mu^2) \end{aligned} \right\} \quad (313.IV)$$

Решение дифференциальных уравнений устойчивости будем искать в виде

$$\left. \begin{aligned} u &= A \sin \lambda x \cos \frac{m \pi y}{L} \\ v &= B \cos \lambda x \sin \frac{m \pi y}{L} \\ w &= C \sin \lambda x \sin \frac{m \pi y}{L} \end{aligned} \right\} \quad (314.IV)$$

где 2π — число полуволн, образующихся по периметру оболочки при потере устойчивости обшивки со шпангоутами;

m — число полуволн, образующихся по длине оболочки при потере устойчивости обшивки со шпангоутами.

Подставляя выражение для дополнительных перемещений u , v и w , согласно ф-лам (314.IV), в систему дифференциальных уравнений устойчивости, приходим к системе трех линейных однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A , B и C . Эта система имеет

отличные от нуля решения лишь в том случае, если определитель, составленный из коэффициентов при A , B и C , обращается в нуль.

Приравняв определитель нулю, приходим к следующему уравнению для определения критических нагрузок:

$$C_1 + C_2\lambda = C_3\lambda^2 + C_4\lambda^3, \quad (315. IV)$$

где

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \lambda^4 \\ C_2 &= (\lambda^2 - 1)^2 [\lambda^4 + s(2\lambda^2 + \lambda^2)\lambda^2] \\ C_3 &= \lambda^4\lambda^2 + s(2\lambda^2 + \lambda^2)\lambda^4 - s(3\lambda^2 + \lambda^2)\lambda^3 \\ C_4 &= \lambda^2 + s\lambda^2\lambda^2(2\lambda^2 + \lambda^2 + 1) \\ \lambda &= \frac{\pi x r}{L} \end{aligned} \right\} \quad (316. IV)$$

Так как уравнение устойчивости одно, а неизвестных два (p_1 и p или пропорциональные им величины χ_1 и χ_2), то решение остается неопределенным, т. е. можно подобрать бесчисленное множество комбинаций p_1 и p , при которых оболочка теряет устойчивость. Эти комбинации, удовлетворяющие уравнениям (315. IV), и дают критические нагрузки на оболочку, подкрепленную шпангоутами. Так как числа полуволн при потере устойчивости могут принимать разные значения, то практический интерес представляют лишь те значения n и m , при которых критические нагрузки являются наименьшими.

Наибольший практический интерес для кораблестроения представляет случай действия на оболочку по всей цилиндрической поверхности и по торцам равномерного давления интенсивности p , т. е. случай, когда $p_1 = p$. Тогда,

$$\chi_1 = \frac{1}{2} \chi_2 \quad (317. IV)$$

Подставив ф-лу (317. IV) в выражение (315. IV), получаем следующее выражение для определения критического давления:

$$\chi_2 = \frac{C_1 + C_2\lambda}{C_3 + \frac{1}{2}C_4}$$

или с учетом ф-л (313. IV) и (316. IV) имеем

$$P'_{кр} = \frac{E\lambda}{(1-\nu^2)r} \cdot \frac{\lambda^4 + s_1(\lambda^2 - 1)[\lambda^4 + s(2\lambda^2 + \lambda^2)\lambda^2]}{\lambda^4\lambda^2 + s(2\lambda^2 + \lambda^2)\lambda^4 - s(3\lambda^2 + \lambda^2)\lambda^3 + \frac{1}{2}[\lambda^2 + s\lambda^2\lambda^2(2\lambda^2 + \lambda^2 + 1)]} \quad (318. IV)$$

Формулой (318. IV) и определяется теоретическое критическое давление оболочки, подкрепленной упругими шпангоутами. Необходимо отметить, что в рассматриваемом нами случае действия на оболочку поперечной и осевой нагрузок интенсивности p число полуволн m по длине оболочки следует принимать равным единице, так как при больших значениях m теоретическое критическое давление возрастает. Тщательный анализ ф-лы (318. IV) показывает, что она может быть существенно упрощена. В большинстве практических случаев величина $\frac{E}{1-\nu^2}$

мала в сравнении с толщиной оболочки. Поэтому, пренебрегая $\frac{r}{T}$ по сравнению с толщиной, мы отождествляем приведенную толщину оболочки с ее фактической толщиной. Физическая пренебрежение $\frac{r}{T}$ по сравнению с δ означает neglect дополнительно создаваемой жесткости шпангоутов при растяжении—сжатии в кольцевом направлении. Такое пренебрежение идет в безопасную сторону и дает небольшую погрешность. Пренебрегая $\frac{r}{T}$ по сравнению с k , получим

$$z = \frac{\left(1 + \frac{r}{T}\right)(1 - r^2)}{k} \approx (1 - r^2).$$

Подставив значение z , а также α в ф-лу (318. IV), после пренебрежения малыми членами получим

$$p'_{cr} = \frac{E}{n^2 - 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{nr}{T}\right)^2} \left[\frac{r}{r^2} (n^2 - 1)^2 + \frac{5}{r} - \frac{\left(\frac{nr}{T}\right)^4}{\left[n^2 + \left(\frac{nr}{T}\right)^2\right]^2} \right]. \quad (319. IV)$$

Формула (319. IV) и есть окончательная формула для определения критического давления оболочки, подкрепленной упругими шпангоутами. Число волн n , образующихся при потере устойчивости по периметру оболочки, необходимо выбрать таким, чтобы p'_{cr} было наименьшим. Отметим, что в большинстве практических случаев это значение n лежит в пределах $2 < n < 5$. Поэтому расчет выполняется для нескольких значений n , после чего и определяется наименьшее значение p'_{cr} .

Рассмотрим предельный случай, когда длина оболочки L (расстояние между переборками или другими жесткими опорами) бесконечно велика. В этом случае мы имеем бесконечно длинную оболочку, подкрепленную равноотстоящими упругими шпангоутами. Подставив в ф-лу (319. IV) $L = \infty$, будем иметь

$$p'_{cr} = \frac{EI}{r^3} (n^2 - 1). \quad (320. IV)$$

В случае бесконечно длинной оболочки, подкрепленной упругими шпангоутами, теоретическое критическое давление зависит только от изгибной жесткости шпангоутов EI . При этом p'_{cr} всегда будет наименьшим при $n = 2$. Подставляя $n = 2$ в ф-лу (320. IV), получим

$$p'_{cr} = \frac{3EI}{r^3}. \quad (321. IV)$$

Формула (321. IV) известна как формула М. Леви для критического давления кругового кольца, изгибная жесткость которого обозначена через EI , а ширина — через L . Эта формула исторически предшествовала ф-ле (319. IV).

Установка переборок приводит к тому, что на устойчивость оболочки вместе со шпангоутами, оказывает влияние не только изгибная жесткость шпангоутов, но и жесткость на растяжение—сжатие и сдвиг обшивки. Таким образом, наличие переборок приводит к повышению устойчивости подкрепленной оболочки.

§ 44. Введение поправочных коэффициентов

Сравнение теоретических значений критического давления с экспериментальными показывает, что ф-ла (319. IV) дает завышенные значения критического давления. Причины расхождения теоретических и экспериментальных результатов совершенно аналогичны рассмотренным при исследовании устойчивости обшивки между шпангоутами. Эти причины достаточно подробно изложены в § 42, поэтому вторично производить их подробный анализ нецелесообразно. Отметим лишь основные из них.

1. В результате наличия начальной погни, неоднородности материала и других дефектов обшивки, подкрепляемых упругими шпангоутами, может терять устойчивость при давлении меньшем, чем критическое, определенное ф-лой (319. IV). Такая возможность связана с тем, что классическая теория устойчивости оболочек дает верное критическое давление. Учет же местных факторов приводит к определению нижнего критического давления, соответствующего потере устойчивости с большими перемещениями и происходящего с хлопком.

Учет этих факторов будем производить умножением теоретического критического давления на поправочный коэффициент η . Хотя принципиально поправочный коэффициент η зависит от конструктивных размеров обшивки и шпангоутов, из начальной погни и других неучитываемых факторов и в каждом частном случае он имеет свое значение, для единообразия будем принимать его таким же, как и для обшивки между шпангоутами.

2. В большинстве случаев возникающие при критической нагрузке напряжения превосходят предел пропорциональности, а иногда и предел текучести материала. Между тем выведенные выше расчетные формулы получены в предположении удовлетворения закону Гука, т. е. эти формулы справедливы до достижения напряжениями предела пропорциональности. Естественно, что уменьшение модуля Юнга приводит к снижению критического давления. Учет влияния отступления от закона Гука на устойчивость будем производить умножением теоретического давления на коэффициент η_2 . Для нахождения этого коэффициента необходимо определять снижающие напряжения в шпангоутах при нагрузке $P = \eta_1 P_{кр}$. Затем, зная величину напряжений, определить по графику рис. 59 или таблице Приложения V поправочный коэффициент η_2 . Окончательное действительное критическое давление будет равно

$$P_{кр} = \eta_1 \eta_2 P_{кр}^0 \quad (322. IV)$$

Определение входящего в ф-лу (319. IV) момента инерции шпангоута с присоединенным пояском обшивки требует некоторых пояснений. Очевидно, при определении главного момента инерции шпангоута с присоединенным пояском обшивки необходимо знать ширину присоединенного пояска, которая будет всегда больше ширины присоединенного пояска при асимметричном обжатии, т. е.

$$I_{кр} > 1,55 \sqrt{R}, \quad (323. IV)$$

где $I_{кр}$ — ширина присоединенного пояска обшивки.

На практике же при определении момента инерции шпангоута в расчет вводят не $I_{кр}$, а I , т. е. считают, что I момент инерции шпангоута необходимо внести обшивку на всей длине шпанги. Поскольку $I_{кр}$ может быть меньше I , иногда складывается впечатление, что введенное в присоединенный попроск всей площади сечения обшивки

по длине шпанды приведет к большой ошибке и притом в опасную сторону. В действительности это не так. Анализ показывает, что увеличение присоединенного поиска обшивки в несколько раз приводит к сравнительно небольшому увеличению момента инерции шпангоута. Из ф-лы (319.IV) видно, что второе слагаемое вообще не зависит от момента инерции шпангоута, поэтому увеличение ρ'_{sp} будет меньше, чем увеличение I . Наконец, большими значениями ρ'_{sp} соответствуют большие значения напряжений в шпангоутах и, следовательно, меньшие поправочные коэффициенты η_b . Поэтому действительные значения критического давления в обоих рассматриваемых случаях (шпангоуты с полным присоединенным поиском обшивки шириной l и шпангоуты с ограниченным поиском обшивки шириной $l_{ог}$) оказываются близкими. Исходя из этого можно рекомендовать при определении момента инерции шпангоута принимать ширину присоединенного поиска обшивки равной l .

Необходимо также учесть следующее обстоятельство. При выводе расчетных формул устойчивости в качестве расчетного радиуса мы принимали радиус срединной поверхности обшивки. В действительности центр обшивки со шпангоутами и кольцевым направлением производит относительно нейтральной оси шпангоута вместе с присоединенным поиском обшивки. Поэтому в первое слагаемое ф-лы (319.IV) необходимо вместо радиуса обшивки r вводить радиус шпангоута $r_{шп}$, т. е. определять ρ'_{sp} по формуле

$$\rho'_{sp} = \frac{E}{n^2 - 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{nr}{L} \right)^2} \left\{ \frac{I}{r_{шп}^4 l} (n^2 - 1)^2 + \frac{3}{r} \cdot \frac{\left(\frac{nr}{L} \right)^4}{\left[n^2 + \left(\frac{nr}{L} \right)^2 \right]^2} \right\}. \quad (324.IV)$$

На практике, однако, радиус $r_{шп}$ мало отличается от радиуса обшивки r , так что величина Δr мала в сравнении с радиусом обшивки r . Поэтому в большинстве практических случаев в ф-ле (319.IV) можно сохранять радиус обшивки r в обоих слагаемых. Если же величина Δr достаточно велика в сравнении с радиусом r , то ρ'_{sp} необходимо определять по ф-ле (324.IV). Очевидно, при установке внутренних шпангоутов использование ф-лы (319.IV) вместо ф-лы (324.IV) дает погрешность в безопасную сторону, а при установке наружных шпангоутов, наоборот, в опасную сторону. Отмеченное обстоятельство следует иметь в виду при проверке устойчивости наружных шпангоутов. Приведем практическую схему расчета устойчивости шпангоутов.

Практическая схема расчета

Исходные данные: r , $\delta_{шп}$ (спецификационная толщина обшивки), l , F , l , L .

Определяются:

1. Расчетная толщина обшивки $\delta = \delta_{шп} - \Delta$.
2. Теоретические критические давления для шпангоутов, соответствующие $n = 2, 3, 4$ и 5 по формуле

$$\rho'_{sp} = \frac{E}{n^2 - 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{nr}{L} \right)^2} \left\{ \frac{I}{r_{шп}^4 l} (n^2 - 1)^2 + \frac{3}{r} \cdot \frac{\left(\frac{nr}{L} \right)^4}{\left[n^2 + \left(\frac{nr}{L} \right)^2 \right]^2} \right\}.$$

3. Расчетное критическое давление $P'_{кр}$, как наименьшее из рассмотренных значений.

4. Поправочный коэффициент $\gamma_1 = 0,7$.

5. Коэффициент k

$$k = \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) (1 - \epsilon_1).$$

6. Напряжение в шпангоутах, соответствующее давлению $\gamma_1 P'_{кр}$

$$\sigma'_{шп} = -k \gamma_1 \frac{P'_{кр} r}{\delta}.$$

7. Поправочный коэффициент γ_2 по таблице Приложения V или по графику рис. 59 для данной стали.

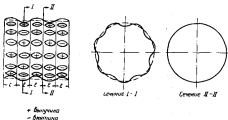


Рис. 67

8. Действительное критическое давление для шпангоутов по формуле $P_{кр} = \gamma_2 \gamma_1 P'_{кр}$.

9. Удовлетворение критерия устойчивости шпангоутов $P_{кр} \geq p$, где p — расчетное давление.

В заключение отметим, что определение критической нагрузки обшивки и шпангоутов прочного корпуса имеет очень важное значение. Удовлетворение критерия прочности по напряжениям еще не гарантирует прочный корпус от разрушения, так как при проверке прочности по напряжениям мы исходили из того, что обшивка и шпангоуты прочного корпуса после деформации сохраняют свою круговую форму, т. е. не теряют устойчивости. Поэтому критерии прочности, являясь необходимыми критериями, не являются в то же время достаточными. При потере устойчивости обшивки между шпангоутами в ней появляется большое число вмятин и выпуклостей (рис. 67), чередующихся между собой в шахматном порядке. Вследствие появления вмятин и выпуклостей в обшивке возникают большие дополнительные изгибные напряжения,

сильно снижающие несущую способность обшивки. В общем случае критическую нагрузку нельзя отождествлять с разрушающей, так как последняя может превышать первую в несколько раз. Степень превышения разрушающей нагрузкой над критической определяется степенью напряженного состояния обшивки в момент потери устойчивости. Стремление в наибольшей мере добиться рациональной конструкции прочного корпуса привело к относительно высокой норме ценных допускаемых напряжений в продольных сечениях обшивки. Многочисленные эксперименты показывают, что при достаточно больших цепных напряжениях потеря устойчивости обшивки приводит к полному разрушению прочного корпуса. Поэтому в таких случаях критическую нагрузку можно отождествлять с разрушающей. Отсюда то большое внимание, которое уделяется проверке устойчивости обшивки и шпангоутов в расчетной практике.

§ 45. О расчете конических частей прочного корпуса

Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку, подкрепленную шпангоутами. Пусть эта оболочка спроектирована рационально, т. е. при заданном расчетном давлении p и при выбранных радиусе r , толщине δ , шпанки l и профиле шпангоутов удовлетворяет установленным нормам прочности и устойчивости и одновременно не имеет излишних запасов. Уменьшение радиуса такой цилиндрической оболочки при сохранении неизменными ее толщины, шпанки и профиля шпангоута приводит к понижению цепных напряжений в оболочке и в шпангоутах и к повышению их устойчивости, т. е. к излишним против требуемых запасам прочности и устойчивости обшивки и шпангоутов, а следовательно, и к ненужному утяжелению веса оболочки.

Аналогичная картина имеет место и в конических оболочках, образующих оконечности прочного корпуса. Если оставлять δ , l и F без изменения по всей длине конуса, то запасы прочности и устойчивости оконечностей прочного корпуса будут расти с уменьшением радиуса корпуса. Другими словами, по мере приближения к коническим переборкам прочного корпуса его конструкция будет становиться все более нерациональной как по весовым, так и по габаритным характеристикам. Поэтому, естественно, встает вопрос о допустимом уменьшении толщин оболочки и площади шпангоута с уменьшением радиуса конусных частей прочного корпуса. Обычно эту задачу заменяют задачей об определении тех радиусов конуса $r_1^{\text{пр}}$ и $r_1^{\text{уст}}$, начиная с которых возможен переход на заданную меньшую толщину обшивки δ_1 и профиль шпангоута (l_1 , F_1). Строгого решения задачи о напряженном состоянии и об устойчивости конической оболочки, подкрепленной шпангоутами, нет. Поэтому обычно в каждой шпанки конической оболочки применяют расчетные формулы, относящиеся к подкрепленной шпангоутами цилиндрической оболочке, принимая за расчетный радиус наибольший радиус в данной шпанки.

Рассмотрим сначала определение того наибольшего радиуса конуса в шпанки $r_1^{\text{пр}}$, начиная с которого можно перейти на ближайшую меньшую спецификационную (по ГОСТ) толщину обшивки δ_1 . Из условия прочности, этот радиус должен быть не больше значением $r_1^{\text{пр}}$, где

$$r_1^{\text{пр}} = \delta_1 \frac{E_1 \cos \alpha}{p} \quad (325. IV)$$

В ф-ле (325. IV) α — угол между образующей и осью конуса.

Из условия устойчивости этот радиус в первом приближении может быть определен по выражению

$$r_1^0 = 100k_1 \left(\frac{16,5 \gamma_0 \gamma_2}{\rho} \cdot \frac{1000}{l} \right)^{1/4}. \quad (326. IV)$$

В первом приближении коэффициент γ_2 принимается из расчета цилиндрической части прочного корпуса. Вычислив в первом приближении r_1^0 , определяют по графику рис. 41 коэффициент A_2^0 и по ф-ле (280. IV) $\rho_{\text{эф}}$. Затем вычисляют

$$\sigma_{\text{эф}} = A_2^0 \gamma_1 \frac{\rho_{\text{эф}} r_1^0}{k_2}.$$

По этому значению $\sigma_{\text{эф}}$ определяют новый уточненный коэффициент γ_2 и потом уже r_1^0 во втором приближении. Уточнения производят несколько раз, пока значения r_1^0 , полученные в двух последовательных приближениях, практически не совпадут. Обычно оказывается достаточно второго приближения.

Из двух значений радиуса r_1^0 , определенных по выражениям (325. IV) и (326. IV), за расчетный принимается больший.

Если конус достаточно длинный, то производят определение радиуса r_1^0 , начиная с которого можно перейти на меньшую по ГОСТ спецификационную толщину. Естественно, что действительные радиусы, при которых целесообразен переход к меньшим толщинам, практически будут определяться шириной листов, регламентированной ГОСТ.

Рассмотрим теперь определение радиуса шпангоута конусной части прочного корпуса $r_1^{\text{пр}}$, начиная с которого возможен переход на меньшей по высоте заданный профиль шпангоута с новым собственным моментом инерции I_1 и площадью сечения F_1 . Поскольку обычно $r_1^0 > r_1^{\text{пр}}$, то $r_1^{\text{пр}}$ нужно определять при $z = z_0$. Момент инерции нового профиля с присоединенным пояском обшивки H_1 при этом будет

$$I_1 = i_1 + \frac{H_1^3}{12} + \left(z_0 + \frac{z_1}{2} \right) \frac{F_1}{1 + \frac{F_1}{F_2}}.$$

Если пренебречь разгружающим действием поперечных переборок на устойчивость и принять запас устойчивости равным 1,5, то из ф-лы (321. IV) можно получить

$$I_1 > 0,25 \left(\frac{r_1^{\text{пр}}}{100} \right)^4 \rho l,$$

откуда

$$r_1^{\text{пр}} = 100 \sqrt[4]{\frac{4 I_1}{\rho l}}. \quad (327. IV)$$

ГЛАВА V

РАСЧЕТ ПРОЧНОСТИ РУБОК

§ 46. Классификация рубок

Все рубки подводных лодок в зависимости от формы их поперечного сечения можно разделить на три группы:

- 1) круговые;
- 2) эллиптические;
- 3) овальные.

Как следует из приведенных наименований, поперечные сечения рубок являются окружностями, эллипсами или овалами. Наибольшее распространение получили круговые цилиндрические рубки как наиболее простые конструкции.

В зависимости от конструктивного оформления различают безреберные рубки и рубки, подкрепленные ребрами жесткости. В первом случае устойчивость обшивки рубок оказывается достаточной для восприятия внешнего расчетного давления, а возникающие в обшивке изгибающие моменты столь незначительны, что не требуют установки ребер жесткости. Такие рубки рассчитываются по безмоментной теории. Если же устойчивость обшивки рубок мала, а возникающие изгибающие моменты велики и не могут быть восприняты обшивкой, то в этих случаях рубки подкрепляются ребрами жесткости. Следовательно, основным назначением ребер жесткости рубок является восприятие больших изгибающих моментов и повышение устойчивости обшивки.

Анализ показывает, что если высота рубок невелика, то вследствие влияния крайних условий по концам рубки (влияние крышки рубки и прочного корпуса) ее обшивка находится в безмоментном напряженном состоянии и может быть рассчитана по формулам безмоментной теории.

Необходимо отметить, что вследствие наличия изгиба расчет по безмоментной теории может привести в некоторых случаях к погрешности, направленной в опасную сторону. Поэтому окончательный выбор конструктивных элементов рубок должен производиться исходя из общей теории тонких оболочек.

Прежде чем перейти к расчету прочности рубок, необходимо определить расчетные нагрузки. Так же как и прочный корпус, рубки нагружены внешним гидростатическим давлением, которое изменяется с изменением глубины погружения. Поэтому в качестве расчетной нагрузки для рубок принимается расчетное давление, принятое при расчете основных элементов прочного корпуса.

§ 47. Расчет прочности и устойчивости круговых цилиндрических рубок

Круговые цилиндрические рубки являются наиболее распространенным типом рубок. Так же как и для прошого корпуса, круговое сечение рубок является наиболее рациональным, так как обеспечивает необходимую прочность и устойчивость при наименьшем весе.

Конструктивная схема круговой цилиндрической рубки показана на рис. 68. Круговая рубка представляет собой замкнутую круговую цилиндрическую оболочку, подкрепленную кольцевыми ребрами жесткости. Роль ребер жесткости состоит в обеспечении устойчивости оболочки и восприятии изгибающих моментов, вызванных начальными отклонениями от правильной круговой формы (в отличие от овальных и эллиптических

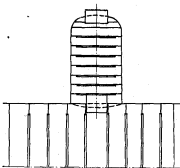


Рис. 68

рубок, ребра которых воспринимают значительные изгибающие моменты, возникающие в оболочке эллиптического или овального сечения даже без начальных отклонений). Сверху рубка жестко соединена с крышкой рубки, представляющей собой либо сферическую оболочку, либо сочетание сферической и тороидальной оболочек. В нижней части рубка жестко соединена с прочным корпусом.

Вследствие симметрии нагрузки и конструкции относительно оси рубки, последние по всей своей высоте, исключая лишь небольшой участок в месте присоединения к прочному корпусу, находится в состоянии осесимметричной деформации. Методы расчета осесимметричной деформации круговых цилиндрических оболочек, подкрепленных ребрами жесткости, подробно рассмотрены в главе IV, поэтому повторять их здесь излишнеобразно. Ограничимся приведением практической схемы расчета круговых цилиндрических рубок.

Для выполнения практического расчета по круглым цилиндрическим рубкам можно рекомендовать следующую расчетную схему (см. § 32, 42 и 44).

Практическая схема расчета

Исходные данные:

r — радиус рубки;

δ — толщина обшивки;

l — расстояние между ребрами жесткости;

L — высота рубки;

P — площадь поперечного сечения ребра жесткости;

I — момент инерции ребра жесткости вместе с присоединенным пояском обшивки относительно нейтральной оси;

p — расчетное давление;

E, ν — упругие константы материала рубки.

Проверка прочности обшивки и ребер жесткости

Определяются:

$$1. \text{ Параметр } \alpha: \alpha = 0,6425 \frac{l}{\sqrt{r\delta}}.$$

$$2. \text{ Параметр } \gamma: \gamma = \left(\frac{0,303 r}{1065} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{p}{16}.$$

$$3. \text{ Параметр } \pi: \pi = 2 \pi \gamma.$$

4. Функции Панковича $F_1(\alpha_1, \alpha_2)$, $F_2(\alpha_1, \alpha_2)$ по таблицам или графикам в зависимости от параметров α и γ .

$$5. \text{ Функция } R: R = \frac{P}{P} F_1(\alpha_1, \alpha_2).$$

$$6. \text{ Функции } \epsilon_1 \text{ и } \epsilon_2:$$

$$\epsilon_1 = \frac{1}{1+R},$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_1 F_2(\alpha_1, \alpha_2).$$

7. Целое напряжение в продольных сечениях рубки по формуле между ребрами жесткости

$$\sigma_z = -\frac{Pr}{\delta} (1 - \epsilon_1) = -R \frac{Pr}{\delta}.$$

8. Напряжение в ребрах жесткости по формуле

$$\sigma_{\text{из}} = -\frac{Pr}{\delta} \left(1 - \frac{\epsilon_1}{2} \right) (1 - \epsilon_2) = -R \frac{Pr}{\delta}.$$

Проверка устойчивости обшивки и ребер жесткости

Определяются:

1. Теоретическое критическое давление обшивки по формуле

$$p'_{\text{кр}} = 18,3 \left(\frac{100 r}{r} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{100 r}{l}.$$

2. Теоретическое критическое напряжение обшивки, соответствующее давлению $p'_{\text{кр}}$, по формуле

$$\sigma'_{\text{кр}} = \epsilon_0 R \frac{p'_{\text{кр}} r}{\delta}.$$

3. Для данной стали поправочный коэффициент γ_2 по графику рис. 59 или по таблице Приложения V.

4. Действительное критическое напряжение обшивки рубки по формуле

$$P_{cr} = \gamma_1 \gamma_2 P'_{cr}$$

5. Теоретическое критическое давление для ребер жесткости по формуле

$$P'_{cr} = \frac{E}{\mu^2 - 1 + \frac{1}{2} \mu} \left[\frac{t}{\mu^2} (\mu^2 - 1)^2 + \frac{3}{t} \cdot \frac{a^2}{(\mu^2 + 1) \mu} \right],$$

где $\mu = \frac{\pi r}{l}$.

6. Теоретическое критическое напряжение для ребер жесткости, соответствующее давлению $\gamma_1 P'_{cr}$, по формуле

$$\zeta_{cr} = \gamma_1 k \frac{P'_{cr} r}{t}$$

7. Для данной стали поправочный коэффициент γ_2 по графику рис. 59 или по таблице Приложения V.

8. Действительное критическое давление для ребер жесткости по формуле

$$P_{cr} = \gamma_1 \gamma_2 P'_{cr}$$

§ 48. Расчет цилиндрических оболочек произвольного поперечного сечения по безмоментной теории

Исследование напряженного состояния искривленных цилиндрических оболочек с плавной формой поперечного сечения показывает, что для относительно коротких оболочек изгибающие моменты и соответствующие им изгибные напряжения сравнительно малы, и расчет таких оболочек можно производить по безмоментной теории. Наличие опор в торцевых сечениях (крайних рубки и промывной корпус) обеспечивает цилиндрической оболочке рубки практически безмоментное состояние.

Получим расчетные формулы для определения напряжений и прогибов безмоментной цилиндрической оболочки произвольного поперечного сечения.

Теперь уже нельзя расчет прочности оболочки заменить расчетом изгиба балки-полоски, лежащей на сплошном упругом основании, как это делалось для круговой оболочки. Объясняется это тем, что условия работы балки-полоски, вырезанной из искривленной оболочки, будут различны: они будут зависеть от местоположения той образующей оболочки, линия которой мы выделим балку-полоску. Для решения таких задач приходится применять общую теорию тонких оболочек. При этом имеется в виду, что конструкция оболочки удовлетворяет условиям существования безмоментного напряженного состояния, согласно которым цилиндрическая оболочка должна быть достаточно короткой, иметь поперечное сечение плавного очертания с плавным изменяющимся толщиной, радиусом кривизны сечения и плавным изменением нагрузки, действующей на оболочку.

Применяя безмоментную теорию, т. е. пренебрегая изгибом оболочки, мы тем самым как бы ослабляем ее по сравнению с действительностью, и поэтому определяемые по безмоментной теории деформации и внутренние напряжения оказываются несколько больше деформаций и внутренних напряжений, определенных по моментной теории.

Пусть имеем тонкую цилиндрическую оболочку произвольного поперечного сечения (рис. 69). Линиями главной кривизны в данном случае будут направляющие z и образующие x цилиндра, которые и примем в качестве криволинейных ортогональных координат поверхности (рис. 69, а). При этом криволинейная координата x будет измеряться вдоль образующей от одного из оснований цилиндра, а криволинейная координата z — вдоль направляющей от одной из образующих цилиндра.

Перемещения u , v и w отсчитываются по направлениям касательных к криволинейным координатам x , z и по нормали e_r .

Пусть длина оболочки L , тогда ее торцевые сечения будут определяться координатами $x=0$ и $x=L$. Обозначим радиус кривизны поперечного сечения оболочки через $r(x)$. Этот радиус будет функцией только криволинейной координаты x .

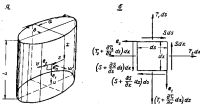


Рис. 69

Пусть оболочка нагружена равномерным внешним давлением p . Под действием этого давления в оболочке возникают усилия, показанные на рис. 69, б. Усилие T_1 направлено вдоль по образующей, а усилие T_2 — по касательной к направляющей.

Для определения возникающих в оболочке усилий воспользуемся полученной в § 17 системой дифференциальных уравнений равновесия элемента оболочки, находящейся в безмоментном напряженном состоянии (128, I). Подставим в эту систему дифференциальных уравнений значения параметров Ляме срединной поверхности некрутовой цилиндрической оболочки $A_1=A_2=1$, а также значения главных радиусов кривизны $R_1=\infty$, $R_2=r(x)$.

В результате приходим к следующей системе двух дифференциальных и одного алгебраического уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_1^0}{\partial x} + \frac{\partial S^0}{\partial z} + q_1 &= 0 \\ \frac{\partial S^0}{\partial x} + \frac{\partial T_2^0}{\partial z} + q_2 &= 0 \\ T_2^0 &= q_2 r(x) \end{aligned} \right\} \quad (1. V)$$

Полученная система интегрируется в замкнутом виде. При этом одно из основных условий безмоментной оболочки T_2^0 дается в явном виде. Это условие не зависит от x , т. е. по длине оболочки не меняется.

Сделав аналогичную подстановку A_1 , A_2 и R_1 , R_2 в систему (130. I), получим систему дифференциальных уравнений для определения перемещений безмоментной цилиндрической оболочки:

$$\left. \begin{aligned} u_1^0 &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Eh} (T_1^0 - \nu T_2^0) \\ u_2^0 &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{w}{r(x)} = \frac{1}{Eh} (T_1^0 - \nu T_2^0) \\ w^0 &= \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2(1+\nu)}{Eh} S^0 \end{aligned} \right\} \quad (2.V)$$

Полученная система также интегрируется в замкнутом виде.

Поскольку на оболочку действует только равномерное внешнее давление, в полученных уравнениях (1.V) и (2.V) следует положить $\phi_1 = \phi_2 = 0$; $\phi_3 = -p$. Тогда вместо системы (1.V) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_1^0}{\partial x} + \frac{\partial S^0}{\partial s} &= 0 \\ \frac{\partial S^0}{\partial s} + \frac{\partial T_2^0}{\partial s} &= 0 \\ T_2^0 &= -p r(x) \end{aligned} \right\} \quad (3.V)$$

Прежде чем производить интегрирование полученных систем дифференциальных уравнений (2.V) и (3.V), необходимо принять граничные условия на торцевых сечениях некруговой оболочки. Граничные условия могут быть приняты в виде следующих двух вариантов.

Статически определяемый вариант

$$\left. \begin{aligned} T_1^0 &= 0 \\ v &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{при } x=0, x=L, \quad (4.V)$$

Статически неопределяемый вариант

$$\left. \begin{aligned} u &= 0 \\ w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{при } x=0, x=L, \quad (5.V)$$

Теперь произведем интегрирование системы (3.V). Из третьего уравнения системы (3.V) условие T_2^0 уже определено и равно

$$T_2^0 = -p r(x).^*$$

Подставляя (6.V) во второе уравне (3.V), получим

$$\frac{\partial S^0}{\partial x} - p \frac{dr}{dx} = 0.$$

* В дальнейшем $r(x)$ для краткости обозначим через r .

Принтегрировав полученное равенство по x , придем к следующему выражению для касательного усилия S^0 :

$$S^0 = p x \frac{dr}{dx} + f_1(x),$$

где $f_1(x)$ — неизвестная функция.

В силу симметрии оболочки, граничных условий и нагрузки относительно среднего сечения $x = \frac{l}{2}$, касательные усилия в этом сечении должны отсутствовать, что дает основание записать

$$p \frac{l}{2} \cdot \frac{dr}{dx} + f_1(x) = 0,$$

откуда находим значение неизвестной функции

$$f_1(x) = -p \frac{l}{2} \cdot \frac{dr}{dx}.$$

Таким образом, функция $f_1(x)$ определена, и касательное усилие будет равно

$$S^0 = -p \left(\frac{l}{2} - x \right) \frac{dr}{dx}. \quad (7. V)$$

Взяв производную по x от (7. V) и подставив ее в первое уравне (3. V), получим

$$\frac{dr^2}{dx} - p \left(\frac{l}{2} - x \right) \frac{dr}{dx} = 0.$$

Принтегрировав последнее равенство по x , будем иметь

$$T_1^0 = p \left[x \frac{l-x}{2} \cdot \frac{dr}{dx} + f_2(x) \right], \quad (8. V)$$

где $f_2(x)$ — вторая неизвестная функция. Далее происходит разделение решения, заключающееся в том, какой вариант граничных условий будет принят для определения в последующем неизвестных функций.

Рассмотрим сначала статически определяемый вариант граничных условий, а затем статически неопределяемый вариант.

Статически определяемый вариант граничных условий

Используя граничные условия (4. V), из выражения (8. V) находим $f_2(x) = 0$, и усилие T_1^0 оказывается равным

$$T_1^0 = p x \frac{l-x}{2} \cdot \frac{dr}{dx}. \quad (9. V)$$

Таким образом, при данном варианте граничных условий мы определили все усилия, не прибегая к определению перемещений оболочки. Однако это не всегда оказывается возможным. Выпишем окончательные формулы для усилий цилиндрической оболочки при статически определяемом варианте граничных условий:

$$\left. \begin{aligned} T_1^0 &= p x \frac{l-x}{2} \cdot \frac{dr}{dx} \\ T_2^0 &= -p r(x) \\ S^0 &= -p \left(\frac{l}{2} - x \right) \frac{dr}{dx} \end{aligned} \right\}. \quad (10. V)$$

Формулы (10. V) при заданной форме поперечного сечения и размерах оболочки дают возможность определить усилия в любой точке оболочки.

Перейдем теперь к определению перемещений. Для этого подставим полученные значения усилий (10. V) в систему (2. V), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{p}{Eh} \left[\mu r + \frac{x(L-x)}{2} \cdot \frac{dr}{dx} \right] \\ \frac{dv}{dr} + \frac{w}{r} &= - \frac{p}{Eh} \left[r + \mu \frac{x(L-x)}{2} \cdot \frac{dr}{dx} \right] \\ \frac{dw}{dr} + \frac{dv}{dx} &= - \frac{2(1+\mu)}{Eh} p \left(\frac{L}{2} - x \right) \frac{dr}{dx} \end{aligned} \right\} \quad (11. V)$$

Пронтегрировав первое уравнение по x , находим

$$u = \frac{px}{Eh} \left[\mu r - \frac{x}{2} \left(\frac{1}{3} x - \frac{1}{2} L \right) \frac{dr}{dx} \right] + f_1(x),$$

где $f_1(x)$ — третья неизвестная функция. Эта функция может быть определена из условия отсутствия перемещения u в среднем сечении оболочки в силу симметрии граничных условий, т. е. из условия $u = 0$ при $x = \frac{L}{2}$. Это условие дает

$$f_1(x) = \frac{pL}{2Eh} \left(\mu r + \frac{1}{12} L^2 \frac{dr}{dx} \right).$$

Окончательное выражение для u принимает следующий вид:

$$u = -\mu \frac{px}{Eh} \left(\frac{L}{2} - x \right) - \frac{1}{6} \cdot \frac{p}{Eh} \left(x^2 - \frac{3}{2} Lx^2 + \frac{1}{4} L^3 \right) \frac{dr}{dx} + f_1(x). \quad (12. V)$$

Подставляя выражение (12. V) в третье из уравнений (11. V) и интегрируя по x , находим

$$v = - \frac{(2+\mu)px(L-x)}{24Eh} \cdot \frac{dr}{dx} + \frac{px}{24Eh} (x^3 - 2Lx^2 + L^3) \frac{dr}{dx} + f_2(x).$$

Для того чтобы перемещение v удовлетворяло второму граничному условию (4. V), достаточно приравнять нулю четвертую неизвестную функцию

$$f_2(x) = 0.$$

Обычно наибольший интерес представляет величина прогиба цилиндрической оболочки w , которая может быть непосредственно определена из второго уравнения системы (11. V)

$$w = - \frac{px}{Eh} \left[r + x(x-L) \frac{dr}{dx} + \frac{x}{24} (x^3 - 2Lx^2 + L^3) \frac{dr}{dx} \right]. \quad (13. V)$$

Таким образом определены и перемещения, имеющие место в любой точке некруговой цилиндрической оболочки.

Перейдем теперь к определению напряжений и перемещений для случая жесткой заделки оболочки по краям (отсутствие перемещений u), что соответствует второму варианту граничных условий.

Рассмотрим статически неопределимый вариант граничных условий (5. V). Естественно, что при этом варианте граничных условий нельзя сразу определить неизвестную функцию $f_2(x)$, входящую в выражение (8. V) для условия T_1^0 , поскольку граничные условия заданы с перемещениями. Подставив значения T_1^0 и T_2^0 в первое уравнение (2. V), получим

$$\frac{d\pi}{dx} = \frac{p}{Lk} \left[\mu r + \frac{x(L-x)}{2} \cdot \frac{d^2 r}{dx^2} + f_2(x) \right].$$

Принтегрировав это выражение по x , будем иметь

$$\pi = \frac{px}{2k} \left[\mu r + \frac{x}{2} \left(\frac{x}{2} - \frac{L}{2} \right) \frac{d^2 r}{dx^2} + f_2(x) \right] + f_1(x),$$

где $f_1(x)$ — новая неизвестная функция. Для определения $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеем два граничных условия (5. V).

Из условия на краю $x = 0$ получаем

$$f_1(x) = 0.$$

Из условия на краю $x = L$ находим

$$f_2(x) = \mu r + \frac{1}{12} L^2 \frac{d^2 r}{dx^2}.$$

Следовательно, перемещение π будет равно

$$\pi = - \frac{px^2}{12kL} (2x^2 - 3Lx + L^2) \frac{d^2 r}{dx^2}. \quad (14. V)$$

Используя найденное значение $f_2(x)$ в выражении (8. V), для T_1^0 получим

$$T_1^0 = - \frac{p}{2} \left[\left(x^2 - Lx + \frac{1}{6} L^2 \right) \frac{d^2 r}{dx^2} + 2\mu r \right]. \quad (15. V)$$

Подставив выражение для π (14. V) в третье уравнение (2. V), после интегрирования по x приходим к зависимости

$$v = \frac{px^2}{24kL} (x-L)^2 \frac{d^2 r}{dx^2} + \frac{(1+\mu)px}{2k} (x-L) \frac{dr}{dx} + f_3(x), \quad (16. V)$$

в которой для выполнения граничных условий необходимо положить $f_3(x) = 0$.

Далее, из второго уравнения непосредственно определяем

$$w = - \frac{pr}{2k} \left[r + \frac{2+\mu}{2} x(x-L) \frac{d^2 r}{dx^2} + \frac{1}{24} x^2 (x-L)^2 \frac{d^3 r}{dx^3} \right]. \quad (17. V)$$

В заключение приведем окончательные формулы для усилий при втором варианте граничных условий:

$$\left. \begin{aligned} T_1^0 &= - \frac{p}{2} \left[\left(x^2 - Lx + \frac{1}{6} L^2 \right) \frac{d^2 r}{dx^2} + 2\mu r \right] \\ T_2^0 &= - pr(x) \\ S^0 &= - p \left(\frac{L}{2} - x \right) \frac{dr}{dx} \end{aligned} \right\}. \quad (18. V)$$

Из формул (10. V) и (18. V) видно, что при стремлении длины оболочки L к бесконечности усилия T^0 и S^0 также стремятся к бесконечности. Поэтому приведенные формулы к оболочкам достаточно большой длины неприменимы. При расчете длинных оболочек необходимо учитывать деформации изгиба. Этот результат вполне естественен, так как для достаточно длинных оболочек никакая формулировка граничных условий не может ограничить перемещений чистого изгиба в средней части длины оболочки.



Рис. 70

Приведенные формулы неприменимы для оболочек, поперечное сечение которых составлено из цилиндрических пластин постоянного радиуса кривизны, поскольку в этом случае в месте сопряжения радиусов R_1 и R_2 (рис. 70) имеет место разрыв непрерывности и поэтому в таких сечениях возникают значительные напряжения изгиба.

§ 49. Расчет прочности эллиптических рубок *

Применим полученные в предыдущем параграфе формулы для определения усилий, напряжений и перемещений, возникающих в эллиптических рубках. При этом используем формулы статически определенного варианта как наиболее отвечающего условиям работы прочных рубок, поскольку торцевые сечения последних имеют возможность сближаться.

Примем следующие обозначения (рис. 71):

- a — большая полуось эллипса;
- b — малая полуось эллипса;
- φ — угол, образуемый нормалью к эллипсу с его малой осью;
- $r(\varphi)$ — радиус кривизны эллипса;
- e — эксцентриситет эллипса

$$e = \frac{c}{a}, \quad e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2};$$

F — фокус эллипса.

Радиус кривизны эллипса $r(\varphi)$ определяется по выражению, известному из аналитической геометрии

$$r(\varphi) = \frac{b^3}{a} \cdot \frac{1}{(1 - e^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}}. \quad (19. V)$$

Во все формулы предыдущего параграфа входят произвольные от радиуса кривизны r по x

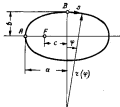


Рис. 71

* В данном параграфе использована материал статьи В. В. Новикова (В. В. Новиков). Определение напряжений в эллиптических безреберных рубках под действием. „Судостроение“, № 5, 1946.

до четвертого порядка включительно. Определим их с помощью выражения (19. V), принимая во внимание соотношение $ds = r d\varphi$. В результате получим

$$\left. \begin{aligned} r(\varphi) &= \frac{R^2}{a} \cdot \frac{1}{(1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}} \\ \frac{dr}{ds} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{\frac{3}{2}}{2} \epsilon^2 \frac{\sin 2\varphi}{1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi} \\ \frac{d^2r}{ds^2} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dr}{ds} \right) = -\frac{3\epsilon}{2a} \cdot \frac{\cos 2\varphi - \epsilon^2 \cos^3 \varphi}{\sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi}} \\ \frac{d^3r}{ds^3} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{d^2r}{ds^2} \right) = \frac{3\epsilon^2}{R^2} \epsilon^2 \left[1 - \frac{3}{4} \epsilon^2 - \frac{1}{2} \epsilon^2 \left(1 - \frac{1}{2} \epsilon^2 \right) \cos^2 \varphi \right] \sin 2\varphi \\ \frac{d^4r}{ds^4} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{d^3r}{ds^3} \right) = \frac{15\epsilon^3}{R^2} \epsilon^2 (1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi)^{1/2} \left[\left(1 - \frac{3}{4} \epsilon^2 \right) \cos 2\varphi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \epsilon^2 \left(1 - \frac{1}{2} \epsilon^2 \right) (\cos^2 \varphi - 3 \sin^2 \varphi) \cos^2 \varphi \right] \end{aligned} \right\} \quad (20. V)$$

Подставляя соотношения (20. V) в зависимости (10. V), приходим к следующим формулам для усилий:

$$\left. \begin{aligned} T_1^0 &= -\rho K \frac{L-x}{2} \cdot \frac{3\epsilon}{2a} \cdot \frac{\cos 2\varphi - \epsilon^2 \cos^3 \varphi}{\sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi}} \\ T_2^0 &= -\rho \frac{R^2}{a} \cdot \frac{1}{(1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}} \\ S^0 &= \rho \left(\frac{L}{2} - x \right) \frac{3}{2} \epsilon^2 \frac{\sin 2\varphi}{1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (21. V)$$

Так как при расчетах прочности нас интересуют наибольшие значения усилий, напряжений и перемещений, то и произведем их определение.

Усилие T_1^0 достигает максимума при наибольшем значении r , т. е. в концах малой полуоси эллипса ($\varphi = 0$)

$$T_{1\max}^0 = -\rho \frac{a^2}{R} \quad (22. V)$$

а соответствующее ему максимальное напряжение равно

$$\sigma_{1\max} = -\frac{\rho a^2}{R\delta} \quad (23. V)$$

Касательное усилие достигает наибольшего значения в торцевых сечениях ободочки ($x = 0$ и $x = L$). Определим, в какой точке направляющей этих сечений касательное напряжение имеет максимальное значение. Поскольку усилие S^0 пропорционально $\frac{dr}{ds}$, то и максимум S^0 соответствует максимуму $\frac{dr}{ds}$. Взяв производную по φ от $\frac{dr}{ds}$ и при-

равная ее нулю, определим значение φ , при котором усилие S^0 имеет максимум. Получим

$$\cos 2\varphi - \epsilon^2 \cos^2 \varphi = 0,$$

откуда

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2-\epsilon^2}} \cdot \sin \varphi = \frac{\sqrt{1-\epsilon^2}}{\sqrt{2-\epsilon^2}}.$$

Подставляя эти значения в третью ф-лу (21.V), находим

$$S_{\max}^0 = \frac{3}{4} \rho L \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right), \quad (24.V)$$

а соответствующее ему касательное напряжение равно

$$\tau_{\max}^0 = \frac{3}{4} \cdot \frac{\rho L}{b} \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right). \quad (25.V)$$

Что касается усилия T_1^0 , то оно достигнет наибольшего значения в среднем поперечном сечении оболочки $\left(x = \frac{L}{2}\right)$. В поперечном сечении оболочки по длине направляющей эллипса усилие T_1^0 четырежды меняет свой знак при значениях угла φ , лежащих между 0 и 2π . При этом экстремальные значения усилия принимаются в концах большой (точка A) и малой (точка B) полуосей, определяясь при этом равенств

$$\left. \begin{aligned} T_{1\max}^0 &= \frac{3}{8} \cdot \frac{\rho a L^2}{b^3} \epsilon^2 \\ T_{1\min}^0 &= -\frac{3}{8} \cdot \frac{\rho L^2}{b} \epsilon^2 \end{aligned} \right\}. \quad (26.V)$$

Соответствующие этим усилиям напряжения будут

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{1\max}^0 &= \frac{3}{8} \cdot \frac{\rho a L^2}{b^3} \epsilon^2 \\ \sigma_{1\min}^0 &= -\frac{3}{8} \cdot \frac{\rho L^2}{8b} \epsilon^2 \end{aligned} \right\}. \quad (27.V)$$

Наибольшее значение получается в поперечном сечении на конце большой оси, однако в этих сечениях напряжения будут растягивающими, а торцовое сжатие рубки (которое до сих пор не учитывалось, а теперь должно быть учтено) на них в данных сечениях вычитается. Поэтому, чтобы получить максимальное σ_1^0 , надо вычитать его в конце малой оси эллипса и добавять к нему напряжения сжатия от давления на крышу рубки. Последние могут быть определены по формуле

$$\sigma_1^0 = -\epsilon \frac{\rho b}{4}, \quad (28.V)$$

в которой коэффициент ϵ ограничен пределами $\frac{1}{2} < \epsilon < 1$. Для рассматриваемой цели его можно положить равным среднему значению $\epsilon = 0,75$. Суммируя второе выражение (27.V) с выражением для напряжения от давления на крышу рубки (28.V), получим следующую

окончательную формулу для максимального значения нормального напряжения:

$$\sigma_{\max}^0 = -\frac{3}{4} \cdot \frac{p^2}{E} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{L^3}{R^3} \cdot \epsilon^2 \right). \quad (29. V)$$

Выпишем формулы для наибольших напряжений, возникающих в прочих рубках эллиптического сечения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\max}^0 &= -\frac{3}{4} \cdot \frac{p^2}{E} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{L^3}{R^3} \cdot \epsilon^2 \right) \\ \sigma_{\max}^0 &= -\frac{p\sigma^2}{2R} \\ \sigma_{\max}^0 &= \frac{3}{4} p \frac{L}{E} \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (30. V)$$

Из перемещений наибольший интерес представляет перемещение w (прогиб оболочки). Это перемещение можно определить, подставив зависимости (20. V) в выражение (13. V). В результате получим следующие значения этого перемещения в конце большой $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ и малой $(\varphi = 0)$ полуосей:

$$w_a = \frac{pR^2}{2EG} \left[-\frac{R^2}{a^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{L^3 R^3}{a^4} \epsilon^2 + \frac{5}{32} \cdot \frac{L^3}{a^2 R} \epsilon^2 \left(1 - \frac{1}{4} \epsilon^2 \right) \right], \quad (31. V)$$

$$w_b = -\frac{pR^2}{2EG} \left[1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{L^3}{a^2} \epsilon^2 + \frac{5}{32} \cdot \frac{L^3}{a^2} \epsilon^2 \left(1 - \frac{\epsilon^2}{4} \right) \right]. \quad (32. V)$$

Из формул (31. V) и (32. V) видно, что под действием внешнего давления большая полуось увеличивается, а малая укорачивается, т. е. поперечное сечение превращается в эллипс большего эксцентриситета.

В заключение необходимо остановиться на расчете устойчивости эллиптических рубок.

Приближенно, с ошибкой в безопасную сторону, устойчивость эллиптической рубки можно определить, пользуясь схемой, изображенной на рис. 72. Другими словами, вместо расчета устойчивости овальной оболочки производится расчет эквивалентной цилиндрической оболочки, радиус которой равен наибольшему радиусу кривизны эллипса. При этом для расчета используются формулы круговых цилиндрических оболочек. Такой расчет приводит к преуменьшению теоретического критического давления, которое в отдельных случаях доходит до 40–50%. Поэтому Б. И. Савлов рекомендует* для встречающихся на практике соотноше-



Рис. 72

* Б. И. Савлов. Устойчивость оболочек, имеющих форму эллиптического цилиндра. ЦНИИ им. А. Н. Крылова. Л., 1948.

ний геометрических элементов овальных оболочек приближенное значение теоретического критического давления определять по формуле

$$P_{кр} = \frac{P_1 + P_2}{2}, \quad (33. V)$$

где P_1 — критическое давление, определенное по формуле Мизеса для цилиндрической оболочки, имеющей радиус, равный наибольшему радиусу кривизны эллипса;

P_2 — то же для цилиндрической оболочки, имеющей радиус, равный большей полуоси эллипса.

Такое определение критического давления дает погрешность только на 5—10% и притом так же направленную в безопасную сторону.

Ниже приводится практическая схема расчета прочности и устойчивости эллиптических рубок.

Практическая схема расчета

Исходные данные:

a — большая полуось эллипса, см;

b — малая полуось эллипса, см;

L — высота рубки, см;

δ — толщина рубки, см;

p — расчетное внешнее давление, кг/см².

Требуется определить возникающие в рубке наибольшие напряжения и проверить ее устойчивость.

Определение наибольших напряжений и прогибов производится по формулам:

$$\sigma_{\max}^x = -\frac{3}{4} \cdot \frac{p\delta^2}{4} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{L^2}{a^2} \epsilon^2 \right),$$

$$\sigma_{\max}^y = -\frac{p\delta^2}{8},$$

$$\tau_{\max}^z = \frac{3}{4} \cdot \frac{p\delta^2}{4} \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right),$$

$$w_x = \frac{p\delta^4}{8E\delta^3} \left[-\frac{b^2}{a^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{L^2 b^2}{a^2} \epsilon^2 + \frac{5}{32} \cdot \frac{L^4}{a^4} \epsilon^2 \left(1 - \frac{3}{4} \epsilon^2 \right) \right],$$

$$w_y = -\frac{p\delta^4}{8E\delta^3} \left[1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{L^2}{a^2} \epsilon^2 + \frac{5}{32} \cdot \frac{L^4}{a^4} \epsilon^2 \left(1 - \frac{L^2}{4} \right) \right].$$

Проверка устойчивости рубки производится по формулам для круговой цилиндрической оболочки, причем в упомянутые формулы вводится наибольший радиус эллипса $r = R = \frac{a^2}{b}$ и вместо толщины — высота рубки L .

При более точном определении устойчивости можно воспользоваться ф-лой (33. V) или методикой, рекомендованной в работе В. И. Селезова.

ГЛАВА VI

РАСЧЕТ СФЕРИЧЕСКИХ ПЕРЕБОРОК

§ 50. Основные понятия

Сферические переборки нашли широкое применение в конструкциях корпуса подводных лодок. Достаточно сказать, что у всех подводных лодок концевые переборки прочного корпуса являются сферическими, сопряженные с конической или цилиндрической частями прочного корпуса либо непосредственно, либо посредством торообразных переходных участков.

Помимо концевых переборок, сферические переборки применяются в качестве межотсечных, ограничивающих водонепроницаемые отсеки. Примерные схемы установки переборок показаны на рис. 73.

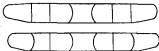


Рис. 73

Плоская переборка подводной лодки представляет собой круглую пластину, подкрепленную вертикальным и горизонтальным набором. Этот набор разбивает обшивку переборки на ряд плоских прямоугольных пластин, непосредственно воспринимающих гидростатическое давление и передающих всё усилие на набор. Последний представляет собой систему перекрестных балок. Пластины переборки, являясь в большинстве случаев пластинами конечной жесткости, работают как на изгиб, так и на растяжение. Набор же переборок работает в основном на изгиб и на срез, поэтому при достаточно большом топерном давлении для обеспечения прочности плоских переборок необходимо устанавливать сравнительно большие балки в виде шельфов.

Работа сферических переборок принципиально отлична. Сферическая переборка работает в основном на растяжение или сжатие (а зависимость от направления действия давления), и только в сравнительно небольшой зоне у опорного контура переборка работает и на изгиб. При

этом необходимо отметить, что изгибные напряжения быстро затухают по мере удаления от осязного контура.

То обстоятельство, что сферические переборки работают в основном в безмоментном состоянии, дает возможность спроектировать легкие и достаточно прочные безнаборные сферические переборки. Вместе с тем необходимо отметить, что сферические переборки обладают одним существенным недостатком. При восприятии давления с выпуклой стороны сферы возникающие в переборке напряжения являются растягивающими. В этом случае потери устойчивости переборки исключены, и переборка может воспринять достаточно большое гидростатическое давление. При действии давления с выпуклой стороны в переборке возникают сжимающие напряжения. При этом переборка может потерять устойчивость, если действующее давление превышает критическую величину. Таким образом, при действии давления с выпуклой стороны определяющим фактором является устойчивость сферической переборки. Анализ показывает, что вследствие отмеченного обстоятельства, величина давления, которое может воспринять сферическая переборка с выпуклой стороны, в несколько раз меньше величине давления, которое может воспринять переборка с вогнутой стороны. Последнее обстоятельство привело к широкому использованию сферических переборок для отсеков-убежищ. Сферические переборки, ограничивающие отсеки-убежища, устанавливаются таким образом, чтобы их центры кривизны находились вне отсеков-убежищ. Применение сферических переборок для корпусов подводных лодок потребовало разработки методов расчета их прочности и устойчивости. В следующих параграфах приводится метод расчета прочности сферических переборок, предложенный П. Ф. Папковичем.*

§ 51. Компоненты деформации срединной поверхности сферических оболочек

Рассмотрим незамкнутую сферическую оболочку (рис. 74). В качестве координатных линий выберем меридианы и параллели сферы, являющиеся линиями главной кривизны сферической оболочки. При этом оба главных радиуса кривизны R_1 и R_2 равны друг другу и равны радиусу сферы r_0 , т. е.

$$R_1 = R_2 = r_0. \quad (1. VI)$$

Положение любой точки на меридиане будем определять углом θ , отсчитываемым от вершины сферы, а положение точки на параллельном круге — углом φ , отсчитываемым от выбранного меридиана. Таким образом, углы θ и φ есть координатные параметры α_1 и α_2 .

Приращение дуги меридиана будет равно

$$ds_1 = r_0 d\theta$$

и, следовательно, параметр Ламе

$$A_1 = r_0.$$

Приращение дуги параллельного круга равно

$$ds_2 = \overline{OC} d\varphi = r_0 \sin \theta d\varphi$$

* П. Ф. Папкович. Стреловидная механика корабля. Ч. I. Т. II, «Морской транспорт», 1947.

и, следовательно, второй параметр Ляме будет

$$A_2 = r_0 \sin \theta.$$

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= r_0 \\ A_2 &= r_0 \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (2. VI)$$

Итак, главные радиусы кривизны и параметры Ляме сферической поверхности определены.

Вектор перемещений любой точки срединной поверхности оболочки разложим на три составляющих:

- u — перемещение в направлении касательной к меридиану;
- v — перемещение в направлении касательной к параллельному кругу;
- w — перемещение в направлении нормали к срединной поверхности (к центру сферы).

Тогда

$$\mathbf{K} = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + w\mathbf{e}_3$$

где $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ — единичные орты, направленные по касательной к меридиану, по касательной к параллельному кругу и по нормали к срединной поверхности (к центру сферы) соответственно.

Относительное удлинение в направлении касательной к меридиану обозначим через ϵ_1 , а в направлении касательной к параллельному кругу — через ϵ_2 . Аналогично изменение кривизны меридиана обозначим через κ_1 , а изменение кривизны параллельного круга через κ_2 . Кроме того, пусть σ — сдвиг момента срединной поверхности, а τ — его кручение.



Рис. 75

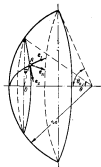


Рис. 74

При решении задачи прочности сферических переборок ограничимся случаем симметричной деформации сферической оболочки под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивности p , приложенной с внутренней стороны переборки (рис. 75). Этот случай представляет наибольший практический интерес. Действительно, конструкция сферической переборки симметрична относительно оси, проходящей через вершину сферы, крайние условия (условия закрепления сферической переборки) также симметричны относительно этой оси. Наконец, гидростатическое давление p на переборку можно также

считать симметричным относительно оси, поскольку при достаточно большом гидростатическом давлении изменением интенсивности давления по высоте переборки можно пренебречь.

В случае осесимметричной деформации сферической оболочки будем иметь

$$\varphi = 0, \quad \alpha = 0, \quad \tau = 0. \quad (3. VI)$$

Кроме того, при симметричной деформации все перемещения, деформации, усилия и моменты не будут меняться при изменении угла φ , так что производные упомянутых величин по φ будут равны нулю.

Учитывая это обстоятельство, а также выражения (1. VI) и (2. VI), можно легко показать, что, применительно к срединной поверхности сферической оболочки, ф-лы (77.1) для компонентов деформации из общей теории принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{r_0} \left(\frac{dx}{d\theta} - w \right) & \varepsilon_2 &= \frac{1}{r_0} \left(\frac{d^2 w}{d\theta^2} + \frac{dw}{d\theta} \right) \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{r_0} (x \operatorname{ctg} \theta - w) & \varepsilon_4 &= \frac{1}{r_0} \operatorname{ctg} \theta \left(\frac{dx}{d\theta} + w \right) \end{aligned} \right\}. \quad (4. VI)$$

Таким образом, ф-лами (4. VI) дается связь между компонентами деформации и перемещениями срединной поверхности при симметричной деформации сферической оболочки.

В общей теории были получены формулы для определения угла поворота нормали e_3 вокруг осей e_1 и e_2 при деформации срединной поверхности (см. ф-лы (53.1)). Обозначим угол поворота нормали вокруг e_2 через χ , а угол поворота нормали вокруг e_1 через ψ . Тогда, согласно ф-лам (53.1), получим

$$\left. \begin{aligned} \chi &= \frac{1}{r_0} \left(\frac{dx}{d\theta} + w \right) \\ \psi &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (5. VI)$$

Угол поворота элемента меридиана вокруг оси e_2 (угол χ) будет использован в качестве одного из основных неизвестных при решении уравнений равновесия сферической оболочки. Сопоставляя выражения (4. VI) и (5. VI), можно заметить, что изменения кривизмы ε_1 и ε_2 связаны с углом χ следующими зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{r_0} \cdot \frac{d\chi}{d\theta} \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{r_0} \cdot \chi \operatorname{ctg} \theta \end{aligned} \right\}. \quad (6. VI)$$

§ 52. Уравнения равновесия симметричной деформации сферических оболочек

При осесимметричной деформации оболочки касательное усилие S и крутящий момент H равны нулю, т. е. $S = 0$, $H = 0$. Кроме того, $T_{1\theta}$, $T_{2\theta}$, $M_{1\theta}$, $M_{2\theta}$ и N_2 также равны нулю.

Таким образом, из всех усилий и моментов при рассмотрении условий равновесия элемента оболочки необходимо учитывать следующие.

1. Нормальное усилие T_1 , направленное по касательной к меридиану, или нормальное усилие в площадках, перпендикулярных меридиану.

2. Нормальное усилие T_2 , направленное по касательной к параллельному кругу, или нормальное усилие в площадках, перпендикулярных параллельному кругу.

3. Изгибающий момент M_1 , действующий в площадках, перпендикулярных меридиану.

4. Изгибающий момент M_2 , действующий в площадках, перпендикулярных параллельному кругу.

Подставив в уравнения равновесия тонких оболочек (99. I) и (103. I) параметры Ламе и главные радиусы кривизны, получим систему трех уравнений равновесия симметричной деформации сферической оболочки:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{ds} (T_1 \sin \theta) - T_2 \cos \theta + N_1 \sin \theta &= 0 \\ \frac{d}{ds} (N_1 \sin \theta) - (T_1 + T_2) \sin \theta - \rho r_0 \sin \theta &= 0 \\ \frac{d}{ds} (M_1 \sin \theta) - M_2 \cos \theta - N_1 r_0 \sin \theta &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (7. VI)$$

К интегрированию системы (7. VI) и сводится решение поставленной задачи.

Общее решение системы (7. VI) можно представить в виде суммы частного решения и общего интеграла однородной системы. В качестве частного решения можно принять безмоментное решение

$$\left. \begin{aligned} T_1^0 - T_2^0 &= -\frac{E r_0}{2} \\ N_1, M_1, M_2 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (8. VI)$$

Непосредственной подстановкой ф-л (8. VI) в систему (7. VI) можно убедиться, что безмоментное решение (8. VI) удовлетворяет системе уравнений равновесия осесимметричной деформации сферических оболочек.

Согласно закону Гука

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{E} (T_1 - \nu T_2) \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{E} (T_2 - \nu T_1) \end{aligned} \right\}. \quad (9. VI)$$

Подставив в ф-лы (9. VI) частные решения T_1^0 и T_2^0 по выражениям (8. VI), получим следующие выражения для компонентов деформации, соответствующие этому частному решению:

$$\epsilon_1^0 - \epsilon_2^0 = -\frac{E r_0}{2E} (1 - \nu). \quad (10. VI)$$

Подставляя зависимости (10. VI) в первые два уравня (4. VI), найдем

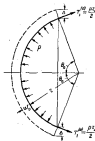
$$\begin{aligned} u_0 &= 0, \\ w_0 &= \frac{pr_0^2}{2Eh} (1 - \nu). \end{aligned}$$

Таким образом, частное решение уравнений равновесия осесимметричной деформации сферической оболочки (8. VI) дает

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= 0 \\ v_0 &= 0 \\ w_0 &= \frac{pr_0^2}{2Eh} (1 - \nu) \end{aligned} \right\}. \quad (11. VI)$$

В этом случае радиус сферы изменяется на величину w_0 . Для замкнутой сферы, нагруженной равномерно распределенным давлением, безмоментное решение является общим решением, так что безмоментное напряженное состояние является единственным возможным. Если же

мы имеем не полную сферу, а лишь ее часть, ограниченную углом ϑ_0 , то для обеспечения безмоментного состояния этого сферического сегмента необходимо помимо внешнего давления p загрузить сферу на краю $\vartheta = \vartheta_0$ распределенными по всему контуру нормальными усилиями, касательными к меридианам и радиальными.



$$T_1 = \frac{pr_0^2}{2}. \quad (12. VI)$$

При этом опорная конструкция в виде круговой цилиндрической оболочки, в которую вставляется сферический сегмент, должна обеспечить нормальное перемещение w сферической оболочки на ее краю $\vartheta = \vartheta_0$ равное

$$w = w_0 = \frac{pr_0^2}{2Eh} (1 - \nu).$$

Рис. 76

Обозначим проекцию этого нормального перемещения на направление любого радиуса опорного контура сферической оболочки через Δ_0 . Тогда

$$\Delta_0 = w_0 \sin \vartheta_0 = \frac{pr_0^2}{2Eh} (1 - \nu) \sin \vartheta_0. \quad (13. VI)$$

Величина Δ_0 есть не что иное, как изменение радиуса опорного контура сферической оболочки или, что то же, изменение радиуса окружности совмещения сферической оболочки с цилиндрической (рис. 76).

Чтобы опорный контур цилиндрической оболочки воспринял растягивающие усилия T_1 , возникающие в сферической переборке на краю

$\theta = \theta_0$, необходимо наличие в самой цилиндрической оболочке по контуру соединения со сферической оболочкой равномерно распределенных сжимающих усилий, величины которых равны

$$T_1 = -\frac{P_0}{2}.$$

Однако при действии сжимающих усилий цилиндрическая оболочка не увеличивает своего радиуса, а уменьшает его, поэтому в действительности безмоментное состояние сферической оболочки не может иметь места.

Для отыскания искомого напряженного состояния необходимо к частному решению системы добавить решение однородных уравнений, которое позволило бы привести расчетное состояние переборки в соответствие с устройством опорного контура. Поэтому перейдем к отысканию общего интеграла однородных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\theta} (T_1 \sin \theta) - T_2 \cos \theta + N_1 \sin \theta &= 0 \\ \frac{d}{d\theta} (N_1 \sin \theta) - (T_1 + T_2) \sin \theta &= 0 \\ \frac{d}{d\theta} (M_1 \sin \theta) - M_2 \cos \theta - N_1 r_0 \sin \theta &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (14. VI)$$

Исключив из первых двух уравнений T_2 , получим

$$\frac{d}{d\theta} (N_1 \sin \theta \cos \theta - T_1 \sin \theta \sin \theta) = 0,$$

откуда

$$T_1 = N_1 \operatorname{ctg} \theta + \frac{C}{\sin^2 \theta}, \quad (15. VI)$$

где C — произвольная постоянная интегрирования.

Для определения T_2 через N_1 подставим ф-лу (15. VI) в первое уравнение системы (14. VI). Получим

$$\frac{dN_1}{d\theta} \cos \theta - N_1 \sin \theta - \frac{C}{\sin^3 \theta} \cos \theta + N_1 \sin \theta - T_1 \cos \theta = 0,$$

откуда

$$T_2 = \frac{dN_1}{d\theta} - \frac{C}{\sin^3 \theta}. \quad (16. VI)$$

Из выражений (15. VI) и (16. VI) видно, что при $\theta = 0$, т. е. в вершине сферы, усилия T_1 и T_2 обращаются в бесконечность при любых заданных на краю усилиях, что, естественно, не может иметь места. Поэтому постоянную C следует положить равной нулю.

Таким образом, интересующие нас решения однородных уравнений дадут

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= N_1 \operatorname{ctg} \theta \\ T_2 &= \frac{dN_1}{d\theta} \end{aligned} \right\}. \quad (17. VI)$$

Теперь обратимся к третьему уравнению системы (14.VI). Известно, что в оболочке изгибающие моменты связаны с изменениями кривизны зависимостями (122.1)

$$M_1 = D(\kappa_1 + \nu \kappa_2),$$

$$M_2 = D(\kappa_2 + \nu \kappa_1),$$

где $D = \frac{Eh}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость оболочки.

Подставив в третье уравнение (14.VI) эти выражения изгибающих моментов M_1 и M_2 , предварительно заменив в них κ_1 и κ_2 согласно зависимостям (6.VI), получим

$$\frac{d^2\chi}{ds^2} + \frac{d\chi}{ds} \operatorname{ctg} \theta - \chi(\nu + \operatorname{ctg}^2 \theta) = \frac{N_1 r_0^2}{D}. \quad (18.VI)$$

Уравнением (18.VI) устанавливается связь между углом поворота меридиана χ и перерезывающим усилием N_1 , вытекающая из уравнений равновесия оболочки.

Недостающую вторую зависимость получим из рассмотрения условий непрерывности срединной поверхности оболочки. Для этого выпишем выражения для компонентов деформации ϵ_1 , ϵ_2 и угла поворота меридиана χ (см. Форм. (4.VI) и (5.VI))

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{r_0} \left(\frac{du}{ds} - w \right) \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{r_1} (u \operatorname{ctg} \theta - w) \\ \chi &= \frac{1}{r_0} \left(\frac{dw}{ds} + u \right) \end{aligned} \right\} \quad (19.VI)$$

Продифференцировав второе равенство (19.VI) по s , получим

$$r_0 \frac{dw}{ds} = \frac{du}{ds} \operatorname{ctg} \theta - \frac{u}{\sin^2 \theta} - \frac{dw}{ds}.$$

Сложив это равенство с третьим равенством (19.VI), после исключения w получим

$$r_0 \chi = \left(\frac{du}{ds} - u \operatorname{ctg} \theta \right) \operatorname{ctg} \theta - r_0 \frac{dw}{ds}.$$

Из первых двух равенств (19.VI) следует:

$$r_0 (\epsilon_1 - \epsilon_2) = \frac{du}{ds} - u \operatorname{ctg} \theta$$

Рис. 77

и поэтому χ можно представить в виде

$$\chi = (\epsilon_1 - \epsilon_2) \operatorname{ctg} \theta = \frac{dr_1}{dr_2}.$$

Заменяя в этом равенстве ϵ_1 и ϵ_2 через усилия T_1 и T_2 с помощью выражений (9.VI), будем иметь

$$Eh\chi = (1+\nu)(T_1 - T_2) \operatorname{ctg} \theta = \frac{d}{ds}(T_2 - \nu T_1).$$

Подставив в полученное равенство $T_1 \equiv T_2$ из ф-л (17, VI), окончательно получим

$$\frac{d^2 N_1}{d\theta^2} + \frac{dN_1}{d\theta} \operatorname{ctg} \theta + N_1 (\mu - \operatorname{ctg}^2 \theta) = -E\delta\chi. \quad (20, \text{VI})$$

Уравнение (20, VI) и есть второе уравнение, связывающее перерезывающую силу N_1 с углом поворота χ и вытекающее из условий силовости сферической оболочки.*

Таким образом, мы пришли к следующей системе двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 N_1}{d\theta^2} + \frac{dN_1}{d\theta} \operatorname{ctg} \theta + N_1 (\mu - \operatorname{ctg}^2 \theta) &= -E\delta\chi \\ \frac{d^2 \chi}{d\theta^2} + \frac{d\chi}{d\theta} \operatorname{ctg} \theta - \chi (\mu + \operatorname{ctg}^2 \theta) &= -\frac{N_1 r_0^2}{D} \end{aligned} \right\}, \quad (21, \text{VI})$$

к интегрированию которой и сводится решение поставленной задачи. Отметим, что система (21, VI) была получена Райснером. Определив N_1 и χ , мы можем легко определять все усилия и моменты, а также изменения кривизны и изменения радиуса опорного контура по формулам:

$$T_1 = N_1 \operatorname{ctg} \theta, \quad T_2 = \frac{dN_1}{d\theta}, \quad (22, \text{VI})$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{r_0} \cdot \frac{d\chi}{d\theta}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{r_0} \chi \operatorname{ctg} \theta, \quad (23, \text{VI})$$

$$\left. \begin{aligned} M_1 = D(\alpha_1 + \mu\alpha_2) &= \frac{D}{r_0} \left(\frac{d\chi}{d\theta} + \mu\chi \operatorname{ctg} \theta \right) \\ M_2 = D(\alpha_2 + \mu\alpha_1) &= \frac{D}{r_0} \left(\chi \operatorname{ctg} \theta + \mu \frac{d\chi}{d\theta} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (24, \text{VI})$$

Что касается величины Δ , то если учесть нормальное перемещение $u_0 = -r_0\alpha_2$, а также зависимости (9, VI) и (22, VI), для случая загрузки сферической оболочки только контурными усилиями (рис. 77) она будет равна

$$\Delta_1 = -r_0\alpha_2 \sin \theta_0 = -\frac{r_0}{E\delta} (T_1 - \mu T_2) \sin \theta_0 = -\frac{r_0 \sin \theta_0}{E\delta} \left(\frac{dN_1}{d\theta} - \mu N_1 \operatorname{ctg} \theta_0 \right). \quad (25, \text{VI})$$

§ 53. Приближенное решение Гекселера

Точное решение системы (21, VI) приводит к выражениям в так называемых гипергеометрических рядах от комплексного аргумента. Упомянутые ряды весьма плохо сходятся, так что их использование для решения практических задач крайне затруднительно. Анализ точного решения показывает, что у сферических оболочек, центральный угол которых превышает $20-30^\circ$, деформации, вызываемые приложениями к ее контуру внешними силами, очень быстро затухают по мере удаления от этого контура. При этом важно отметить, что в том районе, где влияние усилий, приложенных к контуру, заметно, величина $\frac{d^2 \chi}{d\theta^2}$

* Уравнение (20, VI) легко может быть получено из общей уравнений неразрывности (§3, I).

велика в сравнении с $\chi \operatorname{ctg} \theta$, величина же $\frac{dN_1}{ds}$ велика в сравнении с $\frac{dN_2}{ds} \operatorname{ctg} \theta$ и $\chi \operatorname{ctg}^2 \theta$. Поэтому Геккелер предложил во всех полученных зависимостях отбрасывать величинами $(\quad) \operatorname{ctg} \theta$ в сравнении с величинами $\frac{d(\quad)}{ds}$ и величинами $\frac{d(\quad)}{ds} \operatorname{ctg} \theta$ и $(\quad) \operatorname{ctg}^2 \theta$ в сравнении с величинами $\frac{d^2(\quad)}{ds^2}$. Это позволяет систему (21. VI) и зависимости (22. VI), (24. VI) и (25. VI) привести к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_1}{ds} &= -E\chi \\ \frac{d\chi}{ds} &= \frac{r_0^2}{D} N_1 \end{aligned} \right\}, \quad (26. \text{VI})$$

$$T_1 = N_1 \operatorname{ctg} \theta, \quad T_2 = \frac{dN_1}{ds}, \quad (27. \text{VI})$$

$$M_1 = \frac{D}{r_0} \frac{d\chi}{ds}, \quad M_2 = \frac{D}{r_0} \mp \frac{d\chi}{ds}, \quad (28. \text{VI})$$

$$\Delta_1 = -\frac{r_0 \sin \theta}{E\chi} \frac{dN_1}{ds}. \quad (29. \text{VI})$$

Подстановка χ из первого ур-ния (26. VI) во второе, получим

$$\frac{dN_1}{ds^2} + \frac{Er_0^2}{D} N_1 = 0. \quad (30. \text{VI})$$

Если для дуги меридиана, измеряемой от вершины сферической оболочки ($\theta = 0$), ввести обозначение

$$s = r_0 \theta, \quad (31. \text{VI})$$

то вместо ф-лы (30. VI), будем иметь

$$\frac{dN_1}{ds^2} + \frac{Er_0^2}{D r_0^2} N_1 = 0 \quad (32. \text{VI})$$

или, подставив значение цилиндрической жесткости D ,

$$\frac{dN_1}{ds^2} + \frac{12(1-\nu^2)}{r_0^3 h^3} N_1 = 0. \quad (33. \text{VI})$$

Уравнение (33. VI) аналогично дифференциальному уравнению изгиба призматической балки, лежащей на сплошном упругом основании и нагруженной внешними силами только на краях. Это уравнение подробно рассмотрено в главе IV и в дополнительных комментариях не нуждается. Таким образом, допущения Геккелера позволили достаточно сложную задачу свести к задаче интегрирования дифференциального уравнения изгиба балки, лежащей на сплошном упругом основании. Разница между ур-нием (33. VI) и уравнением изгиба балки на сплошном упругом основании состоит лишь в том, что в последнем в качестве неизвестного входит нормальный прогиб w , а во рассматриваемой сила N_1 . Для приведения рассматриваемой задачи к еще более полному сходству с задачей об изгибе балки, лежащей на сплошном упругом

основания, П. Ф. Павловитя предложил принять за основную неизвестную не перерезывающую силу N_1 , как это делал Геккелер, а нормальный прогиб w .

Заменив в ф-лах (9. VI) α и α_0 их выражениями из ф-л (4. VI), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{dw}{d\theta} - w &= \frac{r_2}{2k} (T_1 - \mu T_2) \\ \mu \operatorname{ctg} \theta - w &= \frac{r_2}{2k} (T_2 - \mu T_1) \end{aligned} \right\} \quad (34. VI)$$

откуда, исключив w , получим

$$\frac{dw}{d\theta} - \mu \operatorname{ctg} \theta = \frac{r_2(1+\mu)}{2k} (T_1 - T_2).$$

Заменим в этом уравнении T_1 и T_2 их выражениями через перерезывающую силу N_1 согласно ф-лам (27. VI). В результате такой замены придем к уравнению

$$\frac{dw}{d\theta} - \mu \operatorname{ctg} \theta = \frac{r_2(1+\mu)}{2k} \left(\frac{dN_1}{d\theta} - N_1 \operatorname{ctg} \theta \right).$$

Интегрируя это уравнение по θ , получим следующее выражение для перемещения w :

$$w = \frac{r_2(1+\mu)}{2k} N_1 \div f_0 \sin \theta, \quad (35. VI)$$

где f_0 — произвольная постоянная.

Из второго уравнения (34. VI) следует:

$$w = -\frac{r_2}{2k} (T_2 - \mu T_1) + \mu \operatorname{ctg} \theta.$$

Заменив в этой зависимости T_2 и T_1 их выражениями через N_1 из ф-л (22. VI) и учитывая (35. VI), получим

$$w = \frac{r_2}{2k} \left[\frac{dN_1}{d\theta} - \mu N_1 \operatorname{ctg} \theta - (1+\mu) N_1 \operatorname{ctg} \theta \right] + f_0 \cos \theta. \quad (36. VI)$$

Но согласно допущениям Геккелера величина $N_1 \operatorname{ctg} \theta$ мала в сравнении с $\frac{dN_1}{d\theta}$. Поэтому вместо ф-лы (36. VI) будем иметь

$$w = -\frac{r_2}{2k} \cdot \frac{dN_1}{d\theta} + f_0 \cos \theta. \quad (37. VI)$$

Выясним физический смысл постоянной f_0 . Для этого спроектируем перемещение w и u на плоскость параллельных кругов и на ось $\theta = \pi$. Получим

$$\left. \begin{aligned} u &= f_0 \sin \theta \\ w &= -\frac{r_2}{2k} \cdot \frac{dN_1}{d\theta} + f_0 \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (38. VI)$$

Пусть Δ — уменьшение радиуса параллельного круга, а f — перемещение оболочки вдоль оси $\theta = \pi$. Тогда (см. рис. 77)

$$\Delta = w \sin \theta - u \cos \theta,$$

$$f = w \cos \theta + u \sin \theta$$

или, если учесть ф-лы (38. VI),

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= -\frac{r_0}{E\delta} \cdot \frac{dN_1}{ds} \sin \theta \\ f - f_0 &= -\frac{r_0}{E\delta} \cdot \frac{dN_1}{ds} \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (39. VI)$$

Из второго ур-ния (39. VI) следует, что f_0 — смещение оболочки как твердого тела.

Условимся отсчитывать нормальный прогиб w и перемещение u не от начального положения оболочки, а от смещенного (как твердое тело). Тогда, вместо выражений для перемещений u и w (38. VI) и их проекций на плоскость параллельных кругов и ось $\theta = \pi$ (39. VI), будем иметь

$$\left. \begin{aligned} u &= 0 \\ w &= -\frac{r_0}{E\delta} \cdot \frac{dN_1}{ds} \end{aligned} \right\} \quad (40. VI)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= w \sin \theta \\ f - f_0 &= w \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (41. VI)$$

Равенства (40. VI) и (41. VI) позволяют ввести в дифференциальное уравнение (32. VI) величину w вместо N_1 .

Действительно, продифференцировав ур-ние (32. VI) по θ и умножив полученный результат на $\frac{r_0}{E\delta}$, получим

$$\frac{d}{ds} \left(-\frac{r_0}{E\delta} \cdot \frac{dN_1}{ds} \right) + \frac{E\delta}{Dr_0^2} \left(-\frac{r_0}{E\delta} \cdot \frac{dN_1}{ds} \right) = 0.$$

Заменяя в последнем уравнении $\frac{r_0}{E\delta} \cdot \frac{dN_1}{ds}$ на w , приходим к выражению

$$\frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{E\delta}{Dr_0^2} w = 0 \quad (42. VI)$$

или

$$\frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{12(1-\mu^2)}{r_0^3 h^3} w = 0. \quad (43. VI)$$

Уравнение (43. VI) совпадает с дифференциальным уравнением изгиба балки на сплошном упругом основании (для случая однородной задачи, т. е. при $p = 0$) не только по форме, но и по размерности основных величин, входящих в это уравнение.

Угол поворота χ согласно ф-лам (3. VI) равен

$$\chi = \frac{1}{r_0} \left(u + \frac{dw}{ds} \right).$$

Так как в нашем случае $u = 0$, то окончательно угол поворота меридиана будет

$$\chi = \frac{1}{r_0} \cdot \frac{dw}{ds} = \frac{dw}{ds}. \quad (44. VI)$$

Как видим, угол поворота χ связан с нормальным перемещением w оболочки таким же образом, как и для балки.

Аналогично из ф-л (26. VI) и (28. VI) с помощью ф-лы (44. VI) можно получить

$$\left. \begin{aligned} M_2 &= D \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \\ M_2 &= \mu M_1 = \mu D \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \\ N_1 &= D \frac{\partial w}{\partial s} \end{aligned} \right\} \quad (45. VI)$$

Из формул (45. VI) следует, что и изгибающий момент M_2 и перерезывающая сила N_1 связаны с нормальным прогибом такими же зависимостями, как и для прямых балок.

Согласно ф-лам (27. VI) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= N_1 \operatorname{ctg} \theta \\ T_1 &= \frac{\partial N_1}{\partial s} \end{aligned} \right\} \quad (46. VI)$$

Спроектируем усилия T_1 и N_1 на плоскость параллельных кругов (рис. 78). Для усилий P , растягивающих переборку в плоскости круга широт, получим

$$P = N_1 \sin \theta + T_1 \cos \theta = \frac{N_1}{\sin \theta}. \quad (47. VI)$$

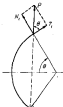


Рис. 78

Таким образом, для сферической переборки, нагруженной с погнутой стороны поперечной (радиальной) равномерно распределенной нагрузкой p , мы получили следующие частные решения:

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= \frac{p r_0^2}{32 D} (1 - \mu) \\ T_1^0 &= T_2^0 = - \frac{p r_0}{2} \\ M_1^0 &= M_2^0 = N_1^0 = 0 \\ P^0 &= T_1^0 \cos \theta = - \frac{p r_0}{2} \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (48. VI)$$

а для сферической переборки, нагруженной распределенными усилиями и моментами только по краям, следующие общие решения однородных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= D \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} & T_1 &= N_1 \operatorname{ctg} \theta \\ M_2 &= \mu D \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} & T_1 &= \frac{\partial N_1}{\partial s} = - \frac{E \nu}{r_0} w \\ N_1 &= D \frac{\partial w}{\partial s} & P &= \frac{N_1}{\sin \theta} = \frac{D}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial w}{\partial s} \end{aligned} \right\} \quad (49. VI)$$

При этом нормальный прогиб w определяется дифференциальным уравнением

$$D \frac{d^2 w}{ds^2} + kw = 0, \quad (50. VI)$$

где

$$k = \frac{E_0}{r_0^2}. \quad (51. VI)$$

Как для частного решения системы (7. VI), так и для общего решения однородной системы углы поворота χ , а также перемещения Δ по направлению, перпендикулярному оси $\theta = 0$, и f по направлению оси $\theta = \pi$ связаны с w зависимостями

$$\left. \begin{aligned} \chi &= \frac{dw}{ds} \\ \Delta &= w \sin \theta \\ f &= w \cos \theta - w_0 \end{aligned} \right\}. \quad (52. VI)$$

где w_0 — константа, определяемая из условий закрепления координатной системы по отношению к оболочке.

Так как общий интеграл системы дифференциальных уравнений деформации оболочки представляет собой сумму частного решения и общего решения однородной системы, то при симметричной деформации сферической оболочки под действием равномерно распределенной радиальной нагрузки и крайних условий окончательно будем иметь следующие зависимости:

$$\left. \begin{aligned} \chi &= \frac{dw}{ds} & M_1 &= D \frac{d^2 w}{ds^2} & T_1 &= N_1 \sin \theta - \frac{Pr_0}{2} \\ \Delta &= w \sin \theta & M_2 &= \nu D \frac{d^2 w}{ds^2} & T_2 &= -\frac{E_0}{r_0} \left(w - \frac{q}{k} \right) - \frac{Pr_0}{2} \\ f &= w \cos \theta - w_0 & N_2 &= D \frac{dw}{ds} & P &= \frac{N_1}{\sin \theta} - \frac{Pr_0}{2} \cos \theta \end{aligned} \right\}. \quad (53. VI)$$

в которых w определяется из уравнений

$$\left. \begin{aligned} D \frac{d^2 w}{ds^2} + kw &= q \\ q &= p \frac{1-\nu}{2} \\ k &= \frac{E_0}{r_0^2} \end{aligned} \right\}. \quad (54. VI)$$

Приведенные зависимости (53. VI) и (54. VI) позволяют распространить теорию изгиба балок на сплошном упругом основании на общий случай осесимметричной деформации сферических оболочек.

Анализ показывает, что в районе опорного контура в сферической переборке возникают значительные изгибающие моменты, однако эти моменты и им соответствующие изгибные напряжения быстро затухают по мере удаления от опорного контура. Поэтому для обеспечения достаточной прочности относительно небольшой участок у опорного контура

сферической переборки делается утолщением, так что сферическая переборка имеет ступенчато-переменную толщину. Аналогично значительные изгибающие моменты и им соответствующие изгибные напряжения возникают и в цилиндрической оболочке в районе соединения ее со сферической оболочкой. В связи с этим небольшой район цилиндрической оболочки также утолщается для обеспечения необходимой прочности. Поэтому получение интересующих нас результатов требует предварительного рассмотрения изгиба цилиндрической оболочки ступенчато-переменной толщины.

§ 54. Изгиб цилиндрической оболочки ступенчато-переменной толщины

Дана бесконечно длинная цилиндрическая оболочка радиусом r и толщиной δ_0 , усиленная на протяжении конечного участка длиной до толщины δ_1 (рис. 79).

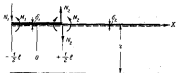


Рис. 79

Требуется определить, какое перерезывающее усилие N_1 и изгибающий момент M_1 необходимо приложить к утолщенному участку оболочки, чтобы нормальное перемещение оболочки w и угол поворота χ принял заданное значение. Если такие же зависимости составить и для свободного края сферической оболочки, то, приняв за основные неизвестные радиальное и угловое перемещения, можно определить упругое взаимодействие сферической и цилиндрической оболочек.

В рассматриваемом случае цилиндрическую оболочку можно представить как бесконечное множество одинаковых и одинаково нагруженных балок-полосок, не имеющих никаких других опор кроме упругого основания. При этом каждая балка-полоска нагружена поперечными усилиями, приложенными к определенному сечению (см. рис. 79), еще и равномерно распределенной нагрузкой. Необходимые расчетные зависимости для балок-полосок ступенчато-переменной толщины можно получить, комбинируя решение для балки-полоски конечной длины (рис. 80), не имеющей никаких опор, кроме упругого основания, с соответствующим решением для бесконечно длинной балки-полоски постоянного сечения. При



Рис. 80

этом для балки-полоски конечной длины нужно найти зависимости, связывающие усилия, приложенные к ее концам, с перемещениями этих концов. Для балки-полоски бесконечной длины необходимо получить зависимости между перемещениями и нагрузкой свободного конца.

Симметричная деформация балки конечной длины

Перейдем к рассмотрению деформации балки-полоски конечной длины, причем для простоты выкладки рассмотрим отдельно симметричную деформацию относительно середины ее длины $x=0$ и антисимметричную относительно этого же сечения.

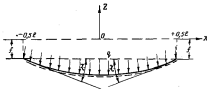


Рис. 81

Допустим, что балка конечной длины, нагруженная в дополнение к равномерно распределенной нагрузке интенсивности q усилиями, приложенными к ее концам, получила на обоих концах следующие прогибы и углы поворота (рис. 81):

$$\left. \begin{aligned} w &= f & \text{при } x &= \pm 0,5l \\ \frac{dw}{dx} &= +\chi & \text{при } x &= -0,5l \\ \frac{dw}{dx} &= -\chi & \text{при } x &= +0,5l \end{aligned} \right\}. \quad (55. VI)$$

Необходимо определить, какие усилия надо приложить к концам балки, чтобы получить эти прогибы и углы поворота.

В главе IV нами была получена формула для прогиба симметрично нагруженной балки-полоски на упругом основании (см. ф-лу (28. IV))

$$w = \frac{q}{k} + D_1 V_2(\alpha x) + D_2 V_1(\alpha x),$$

где V_1 и V_2 — функции Пузыревского.

Подставляя выражение для w в граничные условия (55. VI), легко определить постоянные A_1 и A_2 . В результате для прогиба балки будем иметь

$$\begin{aligned} w &= \frac{q}{k} + \left(f - \frac{q}{k}\right) \frac{V_2(\alpha x) V_1(\alpha) + V_2(\alpha x) V_2(\alpha)}{V_2(\alpha) V_1(\alpha) + V_2(\alpha) V_2(\alpha)} + \\ &+ \frac{\chi}{\alpha} \cdot \frac{V_2(\alpha x) V_2(\alpha) - V_1(\alpha x) V_2(\alpha)}{\sqrt{2} [V_2(\alpha) V_2(\alpha) + V_2(\alpha) V_2(\alpha)]}, \end{aligned} \quad (56. IV)$$

$$\alpha = \frac{\pi d}{2}, \quad (57, VI)$$

$$x = \sqrt{\frac{E}{4GJ}}. \quad (58, VI)$$

Дифференцируя выражение для прогиба и двояжды и трижды по x , получим следующие формулы для изгибающего момента и перерезывающей силы:

$$M = 2EI\alpha^2 \left\{ \left(f - \frac{q}{k} \right) \frac{-V_2(\alpha x) V_1(\alpha) + V_2(\alpha x) V_2(\alpha)}{V_2(\alpha) V_1(\alpha) + V_1(\alpha) V_2(\alpha)} + \right. \\ \left. + \frac{x}{\alpha} \cdot \frac{-V_2(\alpha x) V_2(\alpha) - V_2(\alpha x) V_2(\alpha)}{\sqrt{2} [V_2(\alpha) V_1(\alpha) + V_1(\alpha) V_2(\alpha)]} \right\}, \quad (59, VI)$$

$$N = 2EI\alpha^2 \left\{ \left(f - \frac{q}{k} \right) \frac{2 [-V_1(\alpha x) V_2(\alpha) - V_2(\alpha x) V_2(\alpha)]}{\sqrt{2} [V_2(\alpha) V_1(\alpha) + V_1(\alpha) V_2(\alpha)]} + \right. \\ \left. + \frac{x}{\alpha} \cdot \frac{-V_1(\alpha x) V_2(\alpha) + V_2(\alpha x) V_2(\alpha)}{V_2(\alpha) V_1(\alpha) + V_1(\alpha) V_2(\alpha)} \right\}. \quad (60, VI)$$

Формулы (59, VI) и (60, VI) дают значения изгибающего момента и перерезывающей силы в любом сечении x . Подставив $x = \pm 0,5d$, получим значения изгибающего момента и перерезывающей силы на концах балки

$$M|_{x=\pm 0,5d} = -2EI\alpha^2 \left\{ \left(f - \frac{q}{k} \right) b(\alpha) + \frac{x}{\alpha} c(\alpha) \right\} \\ N|_{x=\pm 0,5d} = \mp 2EI\alpha^2 \left\{ \left(f - \frac{q}{k} \right) a(\alpha) + \frac{x}{\alpha} b(\alpha) \right\} \quad (61, VI)$$

где

$$a(\alpha) = \frac{2 [V_1^2(\alpha) + V_2^2(\alpha)]}{\sqrt{2} [V_2(\alpha) V_1(\alpha) + V_1(\alpha) V_2(\alpha)]} \\ b(\alpha) = \frac{\sqrt{2} [V_1(\alpha) V_2(\alpha) - V_1(\alpha) V_2(\alpha)]}{\sqrt{2} [V_2(\alpha) V_1(\alpha) + V_1(\alpha) V_2(\alpha)]} \\ c(\alpha) = \frac{V_2^2(\alpha) + V_2^2(\alpha)}{\sqrt{2} [V_2(\alpha) V_1(\alpha) + V_1(\alpha) V_2(\alpha)]} \quad (62, VI)$$

Но согласно ф-лам (42, IV) и (44, IV) имеем

$$\left. \begin{aligned} a(\alpha) &= 2\alpha r_1(\alpha) \\ b(\alpha) &= \frac{2\alpha^2}{3} \chi_2(\alpha) \\ c(\alpha) &= \frac{1}{2\alpha} \cdot \frac{1}{r_2(\alpha)} \end{aligned} \right\}, \quad (63, VI)$$

где $r_1(\alpha)$, $r_2(\alpha)$ — функции Папповича, а $\chi_2(\alpha)$ — функция Бубнова, причём

$$r_2(\alpha) = \frac{1}{2\alpha} \cdot \frac{\alpha h \operatorname{Im} \alpha + \alpha h \operatorname{Im} \alpha}{\alpha h \operatorname{Im} \alpha + \alpha h \operatorname{Im} \alpha}.$$

Подставив ф-лы (63.VI) в (61.VI), окончательно получим следующие формулы, связывающие перерезывающую силу и изгибающий момент на конце балки с прогибом и углом поворота конца балки, деформированной симметрично относительно ее срединки:

$$\begin{aligned} M_{x=+0,5\ell} &= - \left[\frac{4E}{12} \chi_1(u) \left(f - \frac{q}{k} \right) + \frac{2E}{J} \cdot \frac{3}{\pi_0(u)} \right] \\ N_{x=+0,5\ell} &= \mp \left[\frac{4E}{2} \pi_1(u) \left(f - \frac{q}{k} \right) + \frac{4E}{12} \chi_2(u) \chi \right] \end{aligned} \quad (64.VI)$$

Вспомогательные функции $\pi_1(u)$, $\pi_0(u)$ и $\chi_2(u)$ протабулированы (см. Приложение I).

Антисимметричная деформация балки конечной длины

Перейдем теперь к рассмотрению случая антисимметричной деформации балки конечной длины, лежащей на упругом основании. Допустим, что с помощью усилий, приложенных только к концам балки, мы вызвали следующие прогибы и углы поворота ее концов (рис. 82):

$$\left. \begin{aligned} w &= \pm \Delta f \\ \frac{dw}{dx} &= \pm \Delta \chi \\ \text{при } x &= \pm 0,5\ell \end{aligned} \right\} \quad (65.VI)$$

Необходимо определить, какие усилия надо приложить к концам балки, чтобы получить заданные Δf и $\Delta \chi$. Для случая антисимметричной



Рис. 82

деформации балки на упругом основании прогиб будет определяться выражением

$$w = A_1 V_1(ax) + A_2 V_2(ax),$$

где V_1 и V_2 — функции Пузыревского. Подставив эту зависимость в граничные условия (65.VI), легко определить постоянные A_1 и A_2 . Окончательно для прогиба балки будем иметь следующее выражение:

$$\begin{aligned} w &= \Delta f \frac{V_1(ax) V_2(a) - V_2(ax) V_1(a)}{V_1(a) V_2(a) - V_2(a) V_1(a)} + \\ &+ \frac{\Delta \chi}{a} \frac{-V_1(ax) V_2(a) + V_2(ax) V_1(a)}{\sqrt{2} [V_1(a) V_2(a) - V_2(a) V_1(a)]} \end{aligned} \quad (66.VI)$$

Изгибающие моменты и перерезывающие силы в любом сечении x , соответствующие этому прогибу, будут равны

$$\Delta M = 2EI\alpha^2 \left\{ \Delta f - \frac{V_2(x) V_2(x) - V_1(x) V_3(x)}{V_1(x) V_2(x) - V_3(x) V_4(x)} + \right. \\ \left. + \frac{\delta \chi}{\alpha} \cdot \frac{V_2(x) V_2(x) + V_1(x) V_4(x)}{\sqrt{2} [V_1(x) V_2(x) - V_3(x) V_4(x)]} \right\}, \quad (67. VI)$$

$$\Delta N = 2EI\alpha^2 \left\{ -\Delta f \frac{2 [V_2(x) V_1(x) + V_2(x) V_3(x)]}{\sqrt{2} [V_1(x) V_2(x) - V_3(x) V_4(x)]} + \right. \\ \left. + \frac{\delta \chi}{\alpha} \cdot \frac{V_2(x) V_2(x) + V_2(x) V_4(x)}{V_1(x) V_2(x) - V_3(x) V_4(x)} \right\}. \quad (68. VI)$$

Подставив в ф-лы (67. VI) и (68. VI) значение $x = \pm 0,5l$, получим следующие выражения изгибающих моментов и перерезывающих сил на концах балки:

$$\Delta M|_{x=\pm 0,5l} = \pm 2EI\alpha^2 \left[-\Delta f e(\alpha) + \frac{\delta \chi}{\alpha} f(\alpha) \right] \\ \Delta N|_{x=\pm 0,5l} = 2EI\alpha^2 \left[-\Delta f d(\alpha) + \frac{\delta \chi}{\alpha} e(\alpha) \right] \quad (69. VI)$$

где

$$\left. \begin{aligned} d(\alpha) &= \frac{2 [V_2^2(\alpha) + V_1^2(\alpha)]}{\sqrt{2} [V_1(\alpha) V_2(\alpha) - V_3(\alpha) V_4(\alpha)]} \\ e(\alpha) &= \frac{\sqrt{2} [V_2(\alpha) V_1(\alpha) + V_2(\alpha) V_3(\alpha)]}{\sqrt{2} [V_1(\alpha) V_2(\alpha) - V_3(\alpha) V_4(\alpha)]} \\ f(\alpha) &= \frac{V_1^2(\alpha) + V_2^2(\alpha)}{\sqrt{2} [V_1(\alpha) V_2(\alpha) - V_3(\alpha) V_4(\alpha)]} \end{aligned} \right\} \quad (70. VI)$$

или, учитывая зависимости (62. VI) и (63. VI), можно получить

$$\left. \begin{aligned} d(\alpha) &= \frac{2c(\alpha)}{\delta(\alpha)} = \frac{3}{2\alpha^2} \cdot \frac{1}{\gamma_0(\alpha)} \cdot \frac{1}{\gamma_2(\alpha)} \\ e(\alpha) &= \frac{1}{\delta(\alpha)} = \frac{3}{2\alpha^2} \cdot \frac{1}{\gamma_1(\alpha)} \\ f(\alpha) &= \frac{a(\alpha)}{2b(\alpha)} = \frac{3}{2\alpha} \cdot \frac{v_1(\alpha)}{\gamma_1(\alpha)} \end{aligned} \right\} \quad (71. IV)$$

Подставив ф-лы (71. VI) в ф-лы (69. VI), получим

$$\Delta M|_{x=\pm 0,5l} = \mp \left[\frac{12EI}{l^3} \cdot \frac{1}{\gamma_2(\alpha)} \Delta f - \frac{6EI}{l} \cdot \frac{c_1(\alpha)}{\gamma_2(\alpha)} \Delta \chi \right] \\ \Delta N|_{x=\pm 0,5l} = -\frac{24EI}{l^3} \cdot \frac{1}{\gamma_0(\alpha)} \cdot \frac{1}{\gamma_1(\alpha)} \Delta f + \frac{12EI}{l} \cdot \frac{1}{\gamma_1(\alpha)} \Delta \chi \quad (72. VI)$$

Формулы (72. VI) и дают тесную связь между изгибающим моментом и перерезывающей силой на концах балок в перемещении и углом поворота этого конца при антисимметричной деформации относительно средин пролета балки.

Суммируя решение для симметричной деформации (64. VI) с решением для антисимметричной деформации (72. VI), легко определить значения изгибающих моментов и перерезывающих сил в опорных сечениях балки конечной длины, лежащей на сплошном упругом основании при любом смещении ее концов.

Решение для бесконечно длинной балки, свободный конец которой произвольным образом смещен

Для определения изгибающего момента и перерезывающей силы в месте перехода одной толщины балки в другую необходимо получить

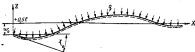


Рис. 83

решение для бесконечно длинной балки (рис. 83), один конец которой имеет перемещение и угол поворота, заданные равенствами

$$\left. \begin{aligned} w &= w_0 \\ \frac{dw}{dx} &= \chi_0 \end{aligned} \right\} \quad \text{при } x=0,5l. \quad (73. VI)$$

Общее выражение для прогиба бесконечно длинной балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой, имеет вид

$$w = \frac{q}{k} + A_1 e^{-\alpha(x-0,5l)} \cos \alpha(x-0,5l) + A_2 e^{-\alpha(x-0,5l)} \sin \alpha(x-0,5l).$$

Определяя с помощью граничных условий (73. VI) постоянные A_1 и A_2 , можно выражение для прогиба балки представить в виде

$$w = \frac{q}{k} + \left(w_0 - \frac{q}{k} \right) e^{-\alpha(x-0,5l)} [\cos \alpha(x-0,5l) + \sin \alpha(x-0,5l)] + \frac{\chi_0}{\alpha} e^{-\alpha(x-0,5l)} \sin \alpha(x-0,5l). \quad (74. VI)$$

Следовательно, изгибающий момент и перерезывающая сила в любом сечении x будут равны:

$$M = 2EI\alpha^2 \left\{ \left(w_0 - \frac{q}{k} \right) e^{-\alpha(x-0,5l)} [-\cos \alpha(x-0,5l) + \sin \alpha(x-0,5l)] - \frac{\chi_0}{\alpha} e^{-\alpha(x-0,5l)} \cos \alpha(x-0,5l) \right\}, \quad (75. VI)$$

$$N = 4EI\alpha^3 \left\{ \left(w_0 - \frac{q}{k} \right) e^{-\alpha(x-0,5l)} \cos \alpha(x-0,5l) + \frac{\chi_0}{2\alpha} e^{-\alpha(x-0,5l)} [\cos \alpha(x-0,5l) + \sin \alpha(x-0,5l)] \right\}. \quad (76. IV)$$

Для конца балки ($x = +0,5l$) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= 4El\alpha^3 \left[\left(w_1 - \frac{x}{k} \right) + \frac{x}{2\alpha} \right] \\ M_1 &= 2El\alpha^2 \left[- \left(w_1 - \frac{x}{k} \right) - \frac{x}{\alpha} \right] \end{aligned} \right\} \quad (77. VI)$$

С помощью ф-л (64. VI), (72. VI) и (77. VI) можно разыскать те усилия N_1 и M_1 , которые надо приложить к концу равномерно нагруженной бесконечно длинной балки ступенчато-переменной толщины, чтобы вызвать у ее края заданные перемещения.

Распространение полученных результатов на оболочку цилиндрической оболочки ступенчато-переменной толщины

При симметричной относительно оси цилиндра деформации цилиндрической оболочки в расчетные формулы вместо изгибной жесткости балки El , коэффициента жесткости k и параметра α необходимо подставить

$$\left. \begin{aligned} EI &= \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} = \frac{Eh^3}{10,32} \\ k &= \frac{Eh}{r^2} \\ \alpha &= 0,5425 \frac{l}{\sqrt{rR_0}} \end{aligned} \right\} \quad (78. VI)$$

Для утолщенной части оболочки, где $b = b_1$, будем иметь

$$EI = \frac{Eh_1^3}{10,32}, \quad k = \frac{Eh_1}{r^2}, \quad \alpha = 0,5425 \frac{l}{\sqrt{rR_0}}. \quad (79. VI)$$

На всем остальном протяжении оболочки

$$EI = \frac{Eh_0^3}{10,32}, \quad k = \frac{Eh_0}{r^2}, \quad \alpha = \frac{1,285}{\sqrt{rR_0}}. \quad (80. VI)$$

Перепишем формулы для изгибающего момента и поперечной силы с учетом зависимостей (79. VI) и (80. VI). Для утолщенной части оболочки получим:

$$\left. \begin{aligned} (IN)_{x=+0,5l} &= \pm \left\{ \frac{qR^2}{12} 6r_1(a) - \frac{R_1R^2}{12r^2} \left[6r_1(a) \frac{l}{r} + \chi_2(a)\chi \right] \right\} \\ (M)_{x=+0,5l} &= \frac{qR^2}{12} \chi_2(a) - \frac{R_1R^2}{12r^2} \left[\chi_2(a) \frac{l}{r} + \frac{6}{(2\alpha)^2} \cdot \frac{\chi}{r_0(a)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (81. VI)$$

$$\left. \begin{aligned} (\Delta N)_{x=+0,5l} &= - \frac{Eh_1^3}{32R^2\chi_2(a)r} \left[\frac{2}{\chi_2(a)} \cdot \frac{\Delta f}{r} - \Delta\chi \right] \\ (\Delta M)_{x=+0,5l} &= \mp \frac{Eh_1^3}{32R^2\chi_2(a)r} \left[\frac{\Delta f}{r} - \frac{r_1(a)}{2} \Delta\chi \right] \end{aligned} \right\} \quad (82. VI)$$

Для неоттощенной части оболочки имеем

$$\left. \begin{aligned} \Delta N_0 &= -\frac{q^2}{12} \cdot \frac{12}{2a^2} + \frac{E_0^2 \rho}{320r} \left(4u^* \frac{w_0}{r} + \chi_0 \right) \\ M_0 &= \frac{q^2}{12} \cdot \frac{2}{(2a^2)r} - \frac{E_0^2 \rho}{320r} \left(\frac{w_0}{r} + \frac{1}{2a^2} \chi_0 \right) \end{aligned} \right\} \quad (83. VI)$$

При выводе ф-л (81. VI)–(83. VI) принято $\mu = 0,3$. Под величиной q следует понимать

$$q = \left(1 - \frac{\mu}{2} \right) p = 0,85p.$$

Входящий в ф-лы (83. VI) вспомогательный аргумент $2u^*$ равен

$$2u^* = \frac{1,28M}{\sqrt{rE_0}}. \quad (84. VI)$$

Определения усилий и перемещений одной толщиной оболочки в другую

Примем обозначения (см. рис. 79):

N_1 и M_1 — перерезывающая сила и изгибающий момент на свободном краю утолщенной части оболочки;

w_1 и χ_1 — радиальное перемещение и угол поворота свободного края оболочки;

N_2 и M_2 — перерезывающая сила и изгибающий момент в месте перехода одной толщиной оболочки в другую;

w_2 и χ_2 — радиальное перемещение и угол поворота в месте перехода одной толщиной оболочки в другую.

Все усилия и перемещения, перечисленные выше, выражаются через N , ΔN , M , ΔM , f , Δf , χ , $\Delta \chi$ следующим образом:

$$N_1 = (N)_{x=0,2} + (\Delta N)_{x=0,2} \quad (85. VI)$$

$$M_1 = (M)_{x=0,2} + (\Delta M)_{x=0,2}$$

$$N_2 = (N)_{x=+0,2} + (\Delta N)_{x=+0,2} \quad (86. VI)$$

$$M_2 = (M)_{x=+0,2} + (\Delta M)_{x=+0,2}$$

$$\chi_1 = \chi + \Delta \chi \quad (87. VI)$$

$$w_1 = f - \Delta f$$

$$\chi_2 = -\chi + \Delta \chi \quad (88. VI)$$

$$w_2 = f + \Delta f$$

Если ввести обозначения:

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{E_0^2}{320 \chi_2 (a) l} \\ A_1 &= \frac{E_0 \rho}{12 a^2} + \frac{E_0^2}{320 \chi_2 (a) l} = \frac{\mu \cdot 0,36}{12 a^2 \chi_1} \chi_1 (a) = \frac{(2a)^2}{36} \chi_1 (a) \end{aligned} \right\} \quad (89. VI)$$

то выражения для переориентирующей силы и изгибающего момента в месте перехода толщин оболочки можно будет записать в виде

$$\left. \begin{aligned} IN_1 &= \frac{q_0^2}{12} \epsilon_{p_1}(u) - K \left[6k_{p_1}(u) \frac{f}{l} + k_{\chi_1}(u) \chi + \frac{2}{r_0(u)} \cdot \frac{\Delta f}{l} - \Delta \chi \right] \\ M_1 &= \frac{q_0^2}{12} \chi_1(u) - K \left[k_{\chi_1}(u) \frac{f}{l} + \frac{6k_1}{(2u)^2} \cdot \frac{2}{r_0(u)} + \frac{\Delta f}{l} - \frac{r_1(u)}{2} \Delta \chi \right] \end{aligned} \right\} \quad (90, VI)$$

Основным назначением утолщения цилиндрической оболочки прочного корпуса в районе крепления сферической переборки является передача этому утолщению тех сжимающих усилий, которые должны быть восприняты опорным контуром переборки. При этом переборка будет находиться в состоянии, весьма близком к простому растяжению.

Если утолщенная часть имеет достаточно большую длину, то, очевидно, в восприятии усилий, передаваемых сферической переборкой, будет участвовать не весь утолщенный участок, а лишь его часть. Следовательно, такое утолщение неэкономично. С другой стороны, удлинение утолщенной части цилиндра увеличивает заделку контура сферической переборки на цилиндре, что неизбежно приводит к повышению в сферической переборке больших изгибающих моментов. Поэтому чтобы весь материал утолщения участвовал в выполнении своего основного назначения в возможно большей мере, желательно проектировать утолщенную часть обшивки возможно более толстой и короткой. Тогда продольные фибры утолщения не будут искривляться и будут работать в одинаковых условиях, а заделка сферической переборки окажется минимальной.

При этих условиях у правильно сконструированного утолщения аргумент u должен быть невелик, а разность между углом χ_1 с одной стороны, и углом $2 \frac{\Delta f}{l}$ и $\Delta \chi$ с другой, невелика по сравнению с углом поворота свободного края χ . Поэтому за основные неизвестные удобнее принимать не $\frac{\Delta f}{l}$ и $\Delta \chi$, а малые разности, определяемые равенствами

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{\Delta f}{l} - \chi_1 &= 2\phi \\ \chi_1 - \Delta \chi &= \chi \end{aligned} \right\} \quad (91, VI)$$

Положим в равенствах (90, VI)

$$\left. \begin{aligned} \frac{f}{l} &= \frac{m_1}{l} + \frac{\Delta f}{l} = \frac{m_1}{l} + \frac{1}{2} \chi + \phi \\ \frac{\Delta f}{l} &= \frac{1}{2} \chi_1 + \phi \\ \Delta \chi &= \chi_1 - \chi \end{aligned} \right\} \quad (92, VI)$$

тогда эти равенства примут вид

$$\left. \begin{aligned} IN_1 &= \frac{q_0^2}{12} b_1' - K \left(a_1' \phi + a_2' \chi + b_1' \frac{m_1}{l} + b_2' \chi \right) \\ M_1 &= \frac{q_0^2}{12} b_2' - K \left(a_1' \phi + a_2' \chi + b_1' \frac{m_1}{l} + b_2' \chi \right) \end{aligned} \right\} \quad (93, VI)$$

где величины α'_1 , α'_2 и α'_3 определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \alpha'_1 &= \frac{2}{r_1(u)} + 6k_{1p_1}(u) \\ \alpha'_2 &= 1 + k_{1x_1}(u) \\ \alpha'_3 &= \frac{r_1(u)}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{r_1(u)}{r_0(u)} \end{aligned} \right\}. \quad (94. VI)$$

Величины b'_1 , b'_2 , ..., b'_4 определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} b'_1 &= 6p_1(u) & b'_2 &= X_1(u) \\ b'_3 &= 6k_{1p_1}(u) & b'_4 &= k_1 X_2(u) \\ b'_5 &= \frac{1-r_1(u)}{r_0(u)} + 3k_{1p_1}(u) & b'_6 &= \frac{1-r_1(u)}{2} + \frac{k_1}{2} X_1(u) \end{aligned} \right\}. \quad (95. VI)$$

Очевидно, в месте перехода утолщенной части оболочки в неутолщенную должна быть обеспечена непрерывность деформаций. Для этого в равенствах (83. VI) можно положить

$$\left. \begin{aligned} w_2 &= w_1 = w_1 + 2\Delta f = w_1 + R_1 + 2\Delta \\ X_1 &= X_2 = X_1 - 2X \end{aligned} \right\}. \quad (96. VI)$$

Для обеспечения условий равновесия необходимо, чтобы

$$\left. \begin{aligned} N_2 &= N_1 \\ M_2 &= M_1 \end{aligned} \right\}. \quad (97. VI)$$

Подставим в ф-лы (83. VI) вместо w_2 , X_2 , N_2 и M_2 их значения согласно ф-лам (96. VI) и (97. VI). Получим

$$\left. \begin{aligned} \Delta N_1 &= -\frac{E^0}{12} b'_1 + K \left(\alpha'_1 \delta + \alpha'_2 X + b'_3 \frac{w_1}{r} + b'_4 X_1 \right) \\ \Delta M_1 &= \frac{E^0}{12} b'_5 + K \left(\alpha'_1 \delta + \alpha'_2 X + b'_4 \frac{w_1}{r} + b'_6 X_1 \right) \end{aligned} \right\}. \quad (98. VI)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha'_1 &= 2k_1 4\pi^2 \\ \alpha'_2 &= -2k_1 \\ \alpha'_3 &= 2k_1 \frac{1}{2\sigma^2} \end{aligned} \right\}. \quad (99. VI)$$

$$\left. \begin{aligned} b'_1 &= \frac{12}{2\sigma^2} & b'_2 &= \frac{6}{(2\sigma^2)^2} \\ b'_3 &= k_1 4\pi^2 & b'_4 &= -k_1 \\ b'_5 &= k_1 (1 + 4\pi^2) & b'_6 &= -k_1 \left(1 + \frac{1}{2\sigma^2} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (100. VI)$$

откуда

$$k_1 = \frac{E^0 \delta}{120\sigma^2} + \frac{0.011}{2\sigma^2} X_1(u) - \frac{1}{6} \left(2\pi \frac{b_1}{r_1} \right)^2 X_2(u). \quad (101. VI)$$

Приравняв перерезывающие силы и изгибающие моменты, даваемые Ф-лами (98, VI) и (93, VI), получим два уравнения для распределения ϕ и χ :

$$\left. \begin{aligned} a_1 \phi + a_2 \chi &= \frac{1}{K} \cdot \frac{q_0^2}{12} b_1 - \frac{q_0}{I} b_3 - \chi_1 b_4 \\ a_3 \phi + a_4 \chi &= \frac{1}{K} \cdot \frac{q_0^2}{12} b_2 - \frac{q_0}{I} b_4 - \chi_1 b_5 \end{aligned} \right\} \quad (102, VI)$$

В формулах (102, VI):

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= a'_1 + a''_1 = 2 + a_1 \\ a_2 &= a'_2 + a''_2 = 1 - a_1 \\ a_3 &= a'_3 + a''_3 = \frac{2}{3} + a_2 \end{aligned} \right\} \quad (103, VI)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 2 \frac{1 - \mu_2(u)}{\nu_0(u)} + 6k_2 \mu_1(u) + 2k_3 4u^2 \\ a_2 &= -k_1 \chi_2(u) + 2k_4 \\ a_3 &= -\frac{1}{2} [1 - \mu_1(u)] + \frac{1}{6} \cdot \frac{\chi_2(u) - \mu_2(u)}{\nu_0(u)} + \frac{2k_4}{3u^2} \end{aligned} \right\} \quad (104, VI)$$

Величины $b_1, b_2, \dots, b_5$ определяются по выражениям:

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= b'_1 + b''_1 = 6\mu_1(u) + \frac{12}{2u^2} \\ b_2 &= b'_2 + b''_2 = \chi_2(u) - \frac{6}{(2u^2)^2} \\ b_3 &= b'_3 + b''_3 = 6k_2 \mu_1(u) + k_3 4u^2 \\ b_4 &= b'_4 + b''_4 = k_1 \chi_2(u) - k_5 \\ b_5 &= b'_5 + b''_5 = \frac{1 - \mu_2(u)}{\nu_0(u)} + 3k_1 \mu_1(u) + k_2 (1 + 4u^2) \\ b_6 &= b'_6 + b''_6 = \frac{1 - \mu_1(u)}{2} + \frac{k_1}{2} \chi_2(u) - k_2 \left(1 + \frac{1}{2u^2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (105, VI)$$

Необходимо отметить, что разности $1 - \mu_2(u)$ и $1 - \mu_1(u)$, входящие в выражения (104, VI) и (105, VI), при малых значениях аргумента u соизмеримы с величиной k_1 , поэтому отбрасывать в этих равенствах члены, содержащие $1 - \mu_2(u)$ и $1 - \mu_1(u)$, нельзя. Так как величины $1 - \mu_2(u)$ и $1 - \mu_1(u)$ представляют малые разности близких чисел, удобнее эти разности представить в виде рядов от аргумента u . Сделав такое разложение, получим

$$\begin{aligned} 1 - \mu_1(u) &= 1 - \frac{1}{2u} \cdot \frac{\sin 2u + \sin 2u}{\sin 2u + \cos 2u} = 1 - \frac{1 + \frac{(2u)^0}{2!} + \frac{(2u)^2}{4!} + \frac{(2u)^4}{8!} + \dots}{1 + \frac{(2u)^0}{4!} + \frac{(2u)^2}{8!} + \frac{(2u)^4}{12!} + \dots} = \\ &= \frac{\frac{(2u)^0}{4!} \cdot \frac{4}{3} + \frac{(2u)^2}{8!} \cdot \frac{8}{3} + \frac{(2u)^4}{12!} \cdot \frac{12}{3} + \dots}{1 + \frac{(2u)^0}{4!} + \frac{(2u)^2}{8!} + \frac{(2u)^4}{12!} + \dots} \end{aligned}$$

$$1 - p_1(u) = 1 - \frac{1}{u} \cdot \frac{\sin 3u - \cos 3u}{\sin 2u + \sin 2u} = 1 - \frac{\frac{(2u)^2}{2} + \frac{(2u)^4}{8} + \frac{(2u)^6}{120} + \dots}{u \left[\frac{3u}{1!} + \frac{(2u)^2}{2!} + \frac{(2u)^4}{4!} + \dots \right]} =$$

$$= \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{(2u)^2}{2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{(2u)^4}{8} + \frac{6}{3} \cdot \frac{(2u)^6}{120} + \dots}{1 + \frac{(2u)^2}{2!} + \frac{(2u)^4}{4!} + \frac{(2u)^6}{6!} + \dots}$$

или, окончательно,

$$1 - p_1(u) = \frac{(2u)^2}{30} \cdot \frac{1 + (2u)^2 \frac{4!}{8!} \cdot \frac{10}{5} + (2u)^4 \frac{6!}{12!} \cdot \frac{15}{15} + \dots}{1 + \frac{(2u)^2}{2!} + \frac{(2u)^4}{4!} + \frac{(2u)^6}{6!} + \dots} \quad (106. VI)$$

$$1 - p_2(u) = \frac{(2u)^2}{180} \cdot \frac{1 + (2u)^2 \frac{8!}{2!} \cdot \frac{6}{3} + (2u)^4 \frac{8!}{24!} \cdot \frac{9}{7} + \dots}{1 + \frac{(2u)^2}{2!} + \frac{(2u)^4}{4!} + \frac{(2u)^6}{6!} + \dots}$$

Аналогично функцию $X_2(u)$ можно представить в виде

$$X_2(u) = \frac{3}{2u^2} \cdot \frac{\sin 2u - \sin 2u}{\sin 2u + \sin 2u} =$$

$$= \frac{1 + \frac{6}{6 \cdot 7} \cdot \frac{(2u)^2}{2!} + \frac{6}{10 \cdot 11} \cdot \frac{(2u)^4}{4!} + \frac{6}{14 \cdot 15} \cdot \frac{(2u)^6}{6!} + \dots}{1 + \frac{(2u)^2}{2!} + \frac{(2u)^4}{4!} + \frac{(2u)^6}{6!} + \dots} \quad (107. VI)$$

а разность функций $X_2(u) - p_2(u)$ в виде

$$X_2(u) - p_2(u) = \frac{(2u)^2}{30} \left[\frac{1 + (2u)^2 \frac{4!}{8!} \cdot \frac{10}{5} + (2u)^4 \frac{6!}{12!} \cdot \frac{15}{15} + \dots}{1 + \frac{(2u)^2}{2!} + \frac{(2u)^4}{4!} + \frac{(2u)^6}{6!} + \dots} - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{14} \cdot \frac{1 + \frac{182}{165} (2u)^2 \frac{8!}{2!} + \frac{17}{13} (2u)^4 \frac{8!}{12!} + \dots}{1 + \frac{(2u)^2}{2!} + \frac{(2u)^4}{4!} + \frac{(2u)^6}{6!} + \dots} \right] \quad (108. VI)$$

Определив с помощью ф-л (103. VI)–(108. VI) все коэффициенты, входящие в систему (102. VI), можно легко решить эту систему. Для практических расчетов удобнее решить эту систему в общем виде, т. е. представить ϕ и X в явном виде. Решив систему (102. VI) относительно ϕ и X , получим

$$\phi = \frac{b_1 a_2 - b_2 a_1}{a_1 a_2 - a_2^2} \cdot \frac{q^2}{12K} - \frac{b_1 a_2 - b_2 a_1}{a_1 a_2 - a_2^2} \cdot \frac{w_1}{l} -$$

$$- \frac{b_1 a_2 - b_2 a_1}{a_1 a_2 - a_2^2} X_1$$

$$X = \frac{-b_1 a_2 + b_2 a_1}{a_1 a_2 - a_2^2} \cdot \frac{q^2}{12K} - \frac{-b_1 a_2 + b_2 a_1}{a_1 a_2 - a_2^2} \cdot \frac{w_1}{l} -$$

$$- \frac{-b_1 a_2 + b_2 a_1}{a_1 a_2 - a_2^2} X_1$$

Определив из ф-л (109. VI) β и χ , из равенств (96. VI) можно будет найти ω_0 и χ_0 или равные им значения ω_1 и χ_1 .

Найденные же значения ω_0 и χ_0 позволяют с помощью ф-л (83. VI) определять N_0 и M_0 или равные им значения N_1 и M_1 , т. е. перерезывающую силу и изгибающий момент в месте перехода утолщенной части оболочки в неутолщенную.

Таким образом, в результате не сложных, но очень громоздких преобразований N_1 и M_1 выражены через ω_1 и χ_1 . Перейдем к определению связи между условиями N_1 и M_1 на свободном краю оболочки и перемещениями ω_1 и χ_1 этого края.

Определение связи между условиями N_1 и M_1 и перемещениями ω_1 и χ_1

Из равенств (85. VI) с учетом ф-л (81. VI), (82. VI) и (89. VI) следует:

$$\left. \begin{aligned} iN_1 &= -\frac{q_0^2}{12} 6\rho_1(u) + K \left[6k\rho_1(u) \frac{f}{l} + k\chi_1(u)\chi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{\rho_0(u)} \cdot \frac{\delta f}{l} + \Delta\chi \right] \\ M_1 &= -\frac{q_0^2}{12} \chi_1(u) - K \left[k\chi_1(u) \frac{f}{l} + \frac{\chi_1(u)}{6\rho_0(u)} \chi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\delta f}{l} + \frac{\rho_1(u)}{2} \Delta\chi \right] \end{aligned} \right\} \quad (110. VI)$$

т.е., приняв во внимание ф-лы (92. VI), получим

$$\left. \begin{aligned} iN_1 &= -d_1 \frac{q_0^2}{12} + K \left(d_2 \frac{\omega_1}{l} + d_3 \chi_1 - e_1 \delta - e_2 \chi \right) \\ M_1 &= -d_2 \frac{q_0^2}{12} - K \left(d_4 \frac{\omega_1}{l} + d_5 \chi_1 - e_3 \delta - e_4 \chi \right) \end{aligned} \right\} \quad (111. VI)$$

где величинам $d_1, d_2, \dots, d_5$ определяются по выражениям:

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= 6\rho_1(u) & d_3 &= \chi_1(u) \\ d_3 &= 6k\rho_1(u) & d_4 &= k\chi_1(u) \\ d_5 &= 3k\rho_1(u) - \frac{1-\rho_1(u)}{\rho_0(u)} & d_5 &= k \cdot \frac{\chi_1(u)}{2} - \frac{1-\rho_1(u)}{2} \end{aligned} \right\} \quad (112. VI)$$

а величины e_1, e_2, e_3 равны

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \frac{2}{\rho_0(u)} - 6k\rho_1(u) = 2 - e_1 \\ e_2 &= 1 - k\chi_1(u) = 1 - e_2 \\ e_3 &= \frac{\chi_1(u)}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{\chi_1(u)}{\rho_0(u)} = \frac{1}{3} - \frac{1-\rho_1(u)}{2} - \\ &\quad - \frac{1}{6} \cdot \frac{\chi_1(u) - \rho_1(u)}{\rho_0(u)} = \frac{1}{3} - e_3 \end{aligned} \right\} \quad (113. VI)$$

Входящие в ф-лы (113, VI) величины ϵ_1 , ϵ_2 и ϵ_3 определяются по выражениям

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= 6k_1 p_1(u) - \frac{2(1 - p_0(u))}{r_0(u)^2} \\ \epsilon_2 &= k_1 X_2(u) \\ \epsilon_3 &= \frac{1 - p_1(u)}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{X_2(u) - p_0(u)}{r_0(u)} \end{aligned} \right\}. \quad (114, VI)$$

Подставив значения ϕ и X из ф-л (109, VI) в ф-лы (111, VI), будем иметь

$$\left. \begin{aligned} LN_1 &= -\frac{r_0^2}{12} A_1 + K \left(A_3 \frac{w_1}{r} + A_2 X_1 \right) \\ M_1 &= \frac{r_0^2}{12} A_2 - K \left(A_4 \frac{w_1}{r} + A_3 X_1 \right) \end{aligned} \right\}. \quad (115, VI)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= d_1 + \epsilon_1 \frac{b_1 a_2 - b_2 a_1}{a_1 a_2 - a_2^2} + \epsilon_2 \frac{-b_1 a_1 + b_2 a_2}{a_1 a_2 - a_2^2} \\ A_2 &= d_2 + \epsilon_2 \frac{b_1 a_2 - b_2 a_1}{a_1 a_2 - a_2^2} + \epsilon_3 \frac{-b_1 a_1 + b_2 a_2}{a_1 a_2 - a_2^2} \end{aligned} \right\}. \quad (116, VI)$$

Если ввести обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{b_1 a_2 - b_2 a_1}{a_1 a_2 - a_2^2} & \gamma_2 &= \frac{b_2 a_2 - b_1 a_1}{a_1 a_2 - a_2^2} \\ \gamma_3 &= \frac{b_2 a_1 - b_1 a_2}{a_1 a_2 - a_2^2} & \gamma_4 &= \frac{b_1 a_1 - b_2 a_2}{a_1 a_2 - a_2^2} \end{aligned} \right\}, \quad (117, VI)$$

то формулы (116, VI) примут вид

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= d_1 + \gamma_0 b_1 + \gamma_2 b_2 \\ A_2 &= d_2 + \gamma_3 b_1 + \gamma_4 b_2 \end{aligned} \right\}. \quad (118, VI)$$

Аналогично величины A_3 , A_2 , A_5 и A_4 определяются равенствами:

$$\left. \begin{aligned} A_3 &= d_3 + \gamma_0 b_1 + \gamma_2 b_2 \\ A_4 &= d_4 + \gamma_3 b_1 + \gamma_4 b_2 \\ A_5 &= d_5 + \gamma_1 b_1 + \gamma_3 b_2 \\ A_6 &= d_6 + \gamma_2 b_1 + \gamma_4 b_2 \end{aligned} \right\}. \quad (119, VI)$$

Равенства (115. VI) и устанавливают искомую связь между усилиями N_1 и M_1 на свободном краю утолщенной части оболочки и перемещениями w_1 и χ_1 этого края.

Формулы (115. VI) относятся к той части цилиндрической оболочки, для которой ось Ox совпадает с внутренней нормалью к сечению, нагруженному усилиями N_1 и M_1 (рис. 84, а). Для той части оболочки, по отношению к которой ось Ox направлена в сторону внешней нормали (рис. 84, б), нужно в ф-лах (115. VI) изменить знаки у N и χ , тогда они примут вид

$$\left. \begin{aligned} DN_1^{(0)} &= \frac{2E}{1-\nu} A_1^{(0)} - K \left[A_1^{(0)} \frac{w_1}{r} - A_1^{(0)} \chi_1 \right] \\ DM_1^{(0)} &= \frac{2E}{1-\nu} A_1^{(0)} - K \left[A_1^{(0)} \frac{w_1}{r} - A_1^{(0)} \chi_1 \right] \end{aligned} \right\} \quad (120. VI)$$

В формулах (120. VI) и (116. VI) величина A_1 и $A_1^{(0)}$ зависит от конструкции оболочки, но не зависит от направления оси Ox . Если

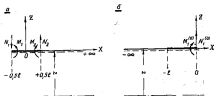


Рис. 84

обе части цилиндрической оболочки, примыкающие к сферической оболочке, одинаковы, то $A_1^{(0)} = A_1$. В случае же, когда обе части оболочки не одинаковы, то величины $A_1^{(0)}$ определяются по формулам, аналогичным ф-лам (118. VI) и (119. VI).

Преобразование формул (117. VI) для случая малого аргумента „ α “

У правильно сконструированных оболочек аргумент α для утолщенной части очень мал. Поэтому величины k_1 и k_2 , а также все величины α_1 и α_2 , входящие в ф-лы (103. VI) и (113. VI), получаются малыми в сравнении с единицей. Поэтому для более точного вычисления влияний параметров k_1 и k_2 на величину коэффициентов η_1 , входящих в ф-лы (118. VI) и (119. VI), лучше не вычислять η_1 непосредственно из ф-л (117. VI), а вычислять путем подстановки в ф-лы (117. VI) величин α_1 и α_2 из ф-л (103. VI) и (113. VI).

Сделав это, получим следующие выражения для η_1 , η_2 , η_3 и η_4 :

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= \frac{(2-\nu_1)\left(\frac{2}{3}+\nu_1\right)-(1-\nu_1)(1-\nu_2)}{(2+\nu_1)\left(\frac{2}{3}+\nu_1\right)-(1-\nu_1)^2} \\ \eta_2 &= \frac{(1-\nu_2)\left(\frac{2}{3}+\nu_1\right)-\left(\frac{1}{3}-\nu_1\right)(1-\nu_2)}{(2+\nu_1)\left(\frac{2}{3}+\nu_1\right)-(1-\nu_1)^2} \\ \eta_3 &= \frac{(1-\nu_1)(2+\nu_1)-(2-\nu_1)(1-\nu_2)}{(2+\nu_1)\left(\frac{2}{3}+\nu_1\right)-(1-\nu_1)^2} \\ \eta_4 &= \frac{\left(\frac{1}{3}-\nu_1\right)(2+\nu_1)-(1-\nu_1)(1-\nu_2)}{(2+\nu_1)\left(\frac{2}{3}+\nu_1\right)-(1-\nu_1)^2} \end{aligned} \right\} \quad (121. VI)$$

§ 55. Основные зависимости изгиба сферических переборок ступенчато-переменной толщиной

Задача об осесимметричной деформации сферических оболочек, так же как и задача об осесимметричной деформации круговой цилиндрической оболочки, сводится к исследованию изгиба балки на сложном упругом основании. Поэтому естественно, что полученные результаты по исследованию изгиба цилиндрической оболочки ступенчато-переменной толщины можно распространить на сферические переборки ступенчато-переменной толщиной. При этом необходимо иметь в виду следующие особенности сферических переборок ступенчато-переменной толщиной. Толщина сферических переборок подводных лодок определяется обычно из условия, что в случае загрузки переборки давлением, соответствующим предельной глубине погружения, местные растягивающие напряжения в сферической переборке должны быть достаточно велики. Поэтому обычно у сферических переборок отношение радиуса переборки r_0 к ее толщине в неутоньшенной части $\frac{r_0}{h_0}$ составляет величину порядка 400—500. В этом случае величина α , равная $\alpha = \frac{1,285}{\sqrt{r_0 h_0}}$, является величиной порядка $\alpha = \frac{35-38}{r_0}$.

С другой стороны, радиус сферических переборок подводных лодок превышает радиус их опорного контура в 3—3,5 раза, поэтому угол β_0 для таких переборок близок к величине 0,3, и, следовательно, длина дуги меридиана от полюса до опорного контура является величиной порядка $\alpha_0 = 0,3r_0$. В этом случае величина $e^{-\alpha\alpha_0}$ близка к $e^{-\alpha\alpha_0} = e^{-\alpha} \approx \frac{1}{500}$. Поэтому деформацию оболочки, вызываемую действием усилий, приложенных к опорному контуру, можно считать затухающей в центре оболочки практически до нуля. Это обстоятельство позволяет рассмотреть участок сферической оболочки между ее опорным контуром и полюсом как участок бесконечно длинный. Именно поэтому в все основные результаты § 54 можно распространить на случай осесимметричной деформации сферических переборок ступенчато-переменной толщиной.

Вместе с тем отметим и отличительные особенности расчета сферических переборок.

1. Если для цилиндрических оболочек приведенная нагрузка q выражается через внешнее равномерное давление p зависимостью $q = p \left(1 - \frac{r}{2}\right)$, то для сферических переборок приведенная нагрузка q будет определяться равенством $q = p \frac{1-r}{2}$.

Таким образом, при $r = 0,3$ для цилиндрической оболочки приведенная нагрузка $q = 0,85 p$, а для сферической переборки $q = 0,35 p$.

2. Если для цилиндрической оболочки дифференциальным уравнением изгиба балки, лежащей на сплошном упругом основании, определяется перемещение w , направленное перпендикулярно к оси оболочки, то для сферической оболочки этим уравнением определяется не перемещение по направлению к оси, которое мы обозначили через Δ , а радиальное перемещение w . При этом последнее связано с Δ зависимостью (§3, VI)

$$\Delta = w \sin \theta.$$

3. У цилиндрических оболочек направленная к оси нагрузка свободных краев определяется непосредственно перерезывающей силой $N_1 = D \frac{dw}{dx}$. У сферических же оболочек между нагрузкой P , нормальной к оси оболочки, и перемещением w имеет место более сложная связь (см. формулу (§3, VI))

$$P = \frac{N_1}{\sin \theta} - \frac{Pr_0}{2} \cos \theta.$$

4. При свободном выборе направленной отсчета угол θ (от полюса) направление $ds = r_0 d\theta$ совпадает у сферических оболочек с направлением внешней нормали к контурному сечению, ограничивающему ее протяженность. Поэтому усилия $N_1^{(0)}$ и $M_1^{(0)}$, приложенные к контуру оболочки, должны быть связаны с углом поворота χ_0 и перемещением опорного контура w_1 формулами (§20, VI). Из этого следует, что распределенные вдоль контура сферических переборок усилия P и моменты $M_1^{(0)}$ связаны с радиальным перемещением w_1 и угловым перемещением χ_0 зависимостями

$$\left. \begin{aligned} P &= -\frac{E_0 r_0}{2} \cos \theta_0 + \frac{1}{\sin \theta_0} \left[\frac{E_0}{12} A_1 - \frac{K}{7} \left(\frac{w_1}{r} A_2 - \chi_0 A_3 \right) \right] \\ M_1^{(0)} &= \frac{E_0 r_0}{12} A_2 - K \left(\frac{w_1}{r} A_3 - \chi_0 A_4 \right) \end{aligned} \right\} \quad (122, VI)$$

На контуре эти же усилия связаны с перемещением Δ и углом χ_0 равенствами

$$\left. \begin{aligned} P &= -\frac{E_0 r_0}{2} \cos \theta_0 + \frac{1}{\sin \theta_0} \left[\frac{E_0}{12} A_1 - \frac{K}{7} \left(\frac{\Delta}{r} \cdot \frac{A_2}{\sin \theta_0} - \chi_0 A_3 \right) \right] \\ M_1^{(0)} &= \frac{E_0 r_0}{12} A_2 - K \left(\frac{\Delta}{r} \cdot \frac{A_3}{\sin \theta_0} - \chi_0 A_4 \right) \end{aligned} \right\} \quad (123, VI)$$

В формулах (122, VI) и (123, VI) θ_0 — угол, определяющий границу сферической переборки, а коэффициенты A_1, A_2, A_3, A_4 и A_5 определяются в соответствии с рекомендациями § 54.

**§ 56. Раскрытие статической неопределенности
взаимодействия прочного корпуса подводных лодок
и их сферических переборок**

Крепление сферических переборок к цилиндрической оболочке прочного корпуса подводных лодок осуществляется так, как показано

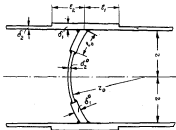


Рис. 56

на рис. 56. В соответствии с приведенным рисунком имеем следующие исходные данные:

- r — радиус цилиндрической части прочного корпуса;
- δ_1 — толщина обшивки прочного корпуса;
- δ_2 — толщина утолщенной части обшивки прочного корпуса;
- l_1 и l_2 — длины утолщенной части обшивки прочного корпуса;
- r_0 — радиус сферической переборки;
- δ_2 — толщина сферической переборки;
- δ_1 — толщина утолщенной части сферической переборки;
- l_0 — длина утолщенной части сферической переборки, измеренная по дуге сферы.

Необходимо рассчитать на прочность сферическую переборку, т. е. определить те напряжения, которые возникают в сферической переборке при действии на нее внешнего равномерного давления интенсивности p . Средняя часть сферической переборки рассчитывается по ф-лам (48, VI). Усилия и моменты, возникающие в опорном сечении переборки и прилегающих к нему сечениях утолщенной части обшивки прочного корпуса, определяются путем приравнивания угловых и линейных перемещений прочного корпуса лодки и вставляемой в него сферической переборки.

Практический интерес представляют два расчетных случая.

1. Аварие лодки при погружении на предельную глубину. В этом случае схема загрузки переборки и прилегающей к ней части прочного корпуса показана на рис. 56.

2. Загрузка при испытании отката лодки во время ее постройки. В этом случае схема загрузки конструкции показана на рис. 87.

Очевидно, при деформации сферической и цилиндрической оболочек угол соединения этих оболочек будет находиться в равновесии под действием приложенных в этом узле усилий и моментов.

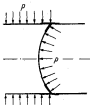


Рис. 86



Рис. 87

Введем обозначения (рис. 88):

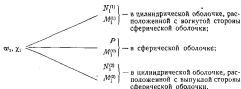
- M_1^D — перерезывающая сила в сечении цилиндрической оболочки, примыкающем к сферической переборке со стороны ее вогнутости;
- M_1^D — изгибающий момент в этом же сечении цилиндрической оболочки;
- N_1^D — перерезывающая сила в сечении цилиндрической оболочки, примыкающем к сферической переборке со стороны ее выпуклости;
- M_1^D — изгибающий момент в этом же сечении цилиндрической оболочки;
- P — усилие, растягивающее опорный контур сферической переборки и направленное перпендикулярно оси;
- M_1^D — изгибающий момент в сечении сферической переборки, примыкающем к цилиндрической оболочке.

Таким образом, упомянутые усилия и моменты приложены в точке сопряжения всех трех оболочек или, точнее, в сечениях оболочек, примыкающих к этой точке.

Пусть в результате деформации радиус цилиндрической оболочки в месте установки переборки увеличился на величину ω , а угол поворота примыкающих к сферической оболочке сечений оказался равным χ . Тогда с помощью зависимостей § 53 и 54 можно определить для каждой из этих оболочек усилия и моменты



Рис. 88



Допустим, что с помощью этих зависимостей мы получим:

а) для сферической переборки

$$\left. \begin{aligned} P &= -\frac{P_0}{2} \cos \xi_0 + \frac{2q_0^2}{12} \cdot \frac{A_1^{(2)}}{\sin \xi_0} - \frac{K_2}{\xi_0} \cdot \frac{A_2^{(2)}}{\sin^2 \xi_0} \Delta + \frac{K_3}{\xi_0} \cdot \frac{A_3^{(2)}}{\sin \xi_0} \chi \\ M_1^{IV} &= \frac{q_0 A_1^{(2)}}{12} A_2^{(2)} - \frac{K_2}{\xi_0} \cdot \frac{A_2^{(2)}}{\sin \xi_0} \Delta + K_3 A_3^{(2)} \chi \end{aligned} \right\}, \quad (124. VI)$$

б) для части цилиндрической оболочки, расположенной с вогнутой стороны сферической переборки,

$$\left. \begin{aligned} N_1^{IV} &= -\frac{q_0 A_1^{(2)}}{12} A_1^{(2)} + \frac{K_1}{\xi_0} A_2^{(2)} w_1 + \frac{K_2}{\xi_0} A_1^{(2)} \chi_1 \\ M_1^{IV} &= \frac{q_0 A_1^{(2)}}{12} A_2^{(2)} - \frac{K_1}{\xi_0} A_1^{(2)} w_1 - K_2 A_2^{(2)} \chi_1 \end{aligned} \right\}, \quad (125. VI)$$

в) для части цилиндрической оболочки, расположенной с выпуклой стороны сферической переборки,

$$\left. \begin{aligned} N_1^V &= \frac{q_0 A_1^{(2)}}{12} A_1^{(2)} - \frac{K_1}{\xi_0} A_2^{(2)} w_1 + \frac{K_2}{\xi_0} A_2^{(2)} \chi_1 \\ M_1^V &= \frac{q_0 A_1^{(2)}}{12} A_2^{(2)} - \frac{K_2}{\xi_0} A_1^{(2)} w_1 + K_3 A_2^{(2)} \chi_1 \end{aligned} \right\}. \quad (126. VI)$$

В формулах (124.VI)–(126.VI):

- q_0 — приведенная нагрузка для сферической переборки;
- q_1 — приведенная нагрузка для части цилиндрической оболочки, расположенной на вогнутой стороне сферической переборки;
- q_2 — приведенная нагрузка для части цилиндрической оболочки, расположенной на выпуклой стороне сферической переборки.

Очевидно, перемещение цилиндрической оболочки по направлению к оси цилиндра в точке соприкосновения со сферической переборкой w_1 будет равно проекции на плоскость осязного круга радиального смещения w сферической переборки. Точно так же угол поворота сферической переборки в точке соприкосновения с цилиндрической оболочкой χ будет равен углу поворота цилиндрической оболочки в этой же точке χ_1 . Таким образом, условие непрерывности деформации

ния узла соединения цилиндрической оболочки со сферической имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= \varpi_3 \\ \chi &= \chi_1 \end{aligned} \right\} \quad (127, VI)$$

Условие равновесия узла соединения сферической оболочки с цилиндрической требует выполнения равенств

$$\left. \begin{aligned} M_1^{(3)} + P &= M_1^{(0)} \\ M_2^{(3)} + M_1^{(3)} &= M_1^{(0)} \end{aligned} \right\} \quad (128, VI)$$

Подставляя в уравнения равновесия (128, VI) значения $A_1^{(3)}$, $M_1^{(0)}$ и P согласно ф-лам (124, VI)—(126, VI) и учти равенства (127, VI), получим следующие два уравнения для определения неизвестных ϖ_1 и χ_1 :

$$\begin{aligned} \left[\frac{K_6}{l_6} \cdot \frac{A_1^{(3)}}{\sin \vartheta_6} + \frac{K_1}{l_1} A_1^{(1)} + \frac{K_2}{l_2} A_2^{(3)} \right] \varpi_1 - \left[\frac{K_2}{l_2} \cdot \frac{A_2^{(0)}}{\sin \vartheta_2} - \frac{K_1}{l_1} A_1^{(1)} + \frac{K_2}{l_2} A_2^{(3)} \right] \chi_1 = \\ = - \frac{2\sigma_2^2}{12} \cos \vartheta_2 + \frac{2\sigma_6}{12} \cdot \frac{A_1^{(3)}}{\sin \vartheta_6} + \frac{q_1 l_1}{12} A_1^{(1)} + \frac{q_2 l_2}{12} A_2^{(3)}, \end{aligned} \quad (129, VI)$$

$$\begin{aligned} - \left[\frac{K_2}{l_2} \cdot \frac{A_1^{(3)}}{\sin \vartheta_2} - \frac{K_1}{l_1} A_1^{(1)} + \frac{K_2}{l_2} A_2^{(3)} \right] \varpi_1 + [K_2 A_2^{(3)} + K_1 A_2^{(0)} + K_2 A_2^{(3)}] \chi_1 = \\ = - \frac{q_1 l_1^2}{12} A_1^{(3)} + \frac{q_1 l_1^2}{12} A_1^{(0)} - \frac{q_2 l_2^2}{12} A_2^{(3)}. \end{aligned} \quad (130, VI)$$

В этих уравнениях необходимо положить:
при определении коэффициентов $A_1^{(3)}$

$$\left. \begin{aligned} 2\mu &= \frac{1,385 \vartheta_2}{\sqrt{r A_1^{(3)}}} & \frac{K_2}{l_2} &= \frac{E}{691} \left(\frac{\vartheta_1}{l_1} \right)^2 \frac{1}{\sin(\vartheta)} \\ 2\mu^* &= \frac{1,385 \vartheta_6}{\sqrt{r A_1^{(3)}}} & A_2 &= \frac{1}{6} \left(2\mu \frac{\vartheta_2}{l_2} \right)^2 \chi_2(\mu) \end{aligned} \right\} \quad (131, VI)$$

при определении коэффициентов $A_1^{(0)}$

$$\left. \begin{aligned} 2\mu &= \frac{1,385 \vartheta_2}{\sqrt{r A_1^{(0)}}} & \frac{K_1}{l_1} &= \frac{E}{691} \left(\frac{\vartheta_1}{l_1} \right)^2 \frac{1}{\sin(\vartheta)} \\ 2\mu^* &= \frac{1,385 \vartheta_6}{\sqrt{r A_1^{(0)}}} & A_2 &= \frac{1}{6} \left(2\mu \frac{\vartheta_2}{l_1} \right)^2 \chi_2(\mu) \end{aligned} \right\} \quad (132, VI)$$

при определении коэффициентов $A_1^{(3)}$

$$\left. \begin{aligned} 2\mu &= \frac{1,385 \vartheta_2}{\sqrt{r A_1^{(3)}}} & \frac{K_1}{l_1} &= \frac{E}{691} \left(\frac{\vartheta_1}{l_1} \right)^2 \frac{1}{\sin(\vartheta)} \\ 2\mu^* &= \frac{1,385 \vartheta_6}{\sqrt{r A_1^{(3)}}} & A_2 &= \frac{1}{6} \left(2\mu \frac{\vartheta_2}{l_1} \right)^2 \chi_2(\mu) \end{aligned} \right\} \quad (133, VI)$$

Что касается величин q_0 , q_1 и q_2 , то при загрузке сферической переборки со стороны вогнутости давлением интенсивности p следует принимать (при $\mu = 0,3$)

$$q_0 = -0,35 p. \quad (134. VI)$$

При аварийном давлении на переборку (см. рис. 86)

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= 0 \\ q_2 &= +0,85 p \end{aligned} \right\}. \quad (135. VI)$$

При испытании переборки на сжатие (см. рис. 87)

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= -0,85 p \\ q_2 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (136. VI)$$

Определив из ур-ний (129. VI) и (130. VI) неизвестные ω_0 и χ_1 , можно по ф-лам (124. VI)–(126. VI) легко найти перерезывающие силы и изгибающие моменты, а затем и напряжения. При решении системы ур-ний (129. VI) и (130. VI) гораздо удобнее принять за основные не величины ω_1 и χ_1 , а величины

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \frac{K_1}{L_1} \cdot \frac{\omega_1}{L_1} \\ Y_1 &= \frac{K_2}{L_2} \chi_1 \end{aligned} \right\}. \quad (137. VI)$$

Поделив ур-ние (129. VI) на L_1 и ур-ние (130. VI) на L_2 , эти уравнения можно привести к виду

$$\left. \begin{aligned} C_1 X_1 - C_2 Y_1 &= p \beta_1 \\ -C_3 X_1 + C_4 Y_1 &= p \beta_2 \end{aligned} \right\}, \quad (138. VI)$$

где

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{A_1^{(0)}}{12 \mu L_1} + \frac{(K_1 + L_1^2)}{(K_1 + L_1^2)} A_1^{(1)} + \frac{(K_2 + L_2^2)}{(K_2 + L_2^2)} A_1^{(2)} \\ C_2 &= \frac{A_1^{(1)}}{12 \mu L_1} - \frac{(K_1 + L_1^2)}{(K_1 + L_1^2)} \cdot \frac{L_1}{L_1} A_1^{(1)} + \frac{(K_2 + L_2^2)}{(K_2 + L_2^2)} \cdot \frac{L_2}{L_2} A_1^{(1)} \\ C_3 &= A_1^{(1)} + \frac{(K_1 + L_1^2)}{(K_2 + L_2^2)} \left(\frac{L_1}{L_2} \right)^2 A_1^{(1)} + \frac{(K_1 + L_1^2)}{(K_2 + L_2^2)} \left(\frac{L_1}{L_2} \right)^2 A_1^{(1)} \end{aligned} \right\}. \quad (139. VI)$$

а величинам β_1 и β_2 равны

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= \frac{p_0}{24 L_1} \cos \theta_0 + \frac{q_0}{p} \cdot \frac{A_1^{(0)}}{12 \sin \theta_0} + \frac{q_1}{p} \cdot \frac{L_1}{L_1} \cdot \frac{A_1^{(1)}}{12} + \frac{q_2}{p} \cdot \frac{L_2}{L_2} \cdot \frac{A_1^{(2)}}{12} \\ \beta_2 &= -\frac{q_0}{p} \cdot \frac{A_1^{(0)}}{12} + \frac{q_1}{p} \cdot \frac{L_1^2}{L_1^2} \cdot \frac{A_1^{(1)}}{12} - \frac{q_2}{p} \cdot \frac{L_2^2}{L_2^2} \cdot \frac{A_1^{(1)}}{12} \end{aligned} \right\}. \quad (140. VI)$$

Определив из ур-ний (138. VI) величины $\frac{N_2}{r}$ и $\frac{Y_2}{r}$, можно определить условия и моменты по формулам:

а) для сферической переборки

$$\left. \begin{aligned} P &= r l_0 \left[\frac{r_0}{2l_0} \cos \zeta_0 + \frac{g_0}{r} \cdot \frac{A_1^{(0)}}{12 \sin \zeta_0} - \frac{N_0}{r} \cdot \frac{A_0^{(0)}}{\sin^2 \zeta_0} + \frac{Y_0}{r} \cdot \frac{A_0^{(0)}}{\sin \zeta_0} \right] \\ M_1^{(0)} &= r l_0^2 \left[\frac{g_0}{r} \cdot \frac{A_1^{(0)}}{12} - \frac{N_0}{r} \cdot \frac{A_1^{(0)}}{\sin \zeta_0} + \frac{Y_0}{r} \cdot A_1^{(0)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (141. VI)$$

б) для цилиндрической оболочки, расположенной на вогнутой стороне сферической переборки

$$\left. \begin{aligned} M_1^{(0)} &= r l_0 \left[-\frac{g_1}{r} \cdot \frac{l_0}{\zeta_0} \cdot \frac{A_1^{(0)}}{12} + \frac{N_1}{r} \cdot \frac{(K_1, l_1^2)}{(K_0, l_0^2)} A_2^{(0)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{Y_1}{r} \cdot \frac{(K_1, l_1^2)}{(K_0, l_0^2)} \cdot \frac{l_0}{\zeta_0} A_3^{(0)} \right] \\ M_1^{(1)} &= r l_0^2 \left[\frac{g_1}{r} \cdot \frac{l_1^2}{\zeta_1^2} \cdot \frac{A_2^{(0)}}{12} - \frac{N_1}{r} \cdot \frac{(K_1, l_1^2)}{(K_0, l_0^2)} \cdot \frac{l_0}{\zeta_0} A_4^{(0)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{Y_1}{r} \cdot \frac{(K_1, l_1^2)}{(K_0, l_0^2)} \cdot \frac{l_1^2}{\zeta_0^2} A_5^{(0)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (142. VI)$$

в) для цилиндрической оболочки, расположенной на выпуклой стороне сферической переборки

$$\left. \begin{aligned} M_1^{(0)} &= r l_0 \left[\frac{g_1}{r} \cdot \frac{l_0}{\zeta_0} \cdot \frac{A_1^{(0)}}{12} - \frac{N_1}{r} \cdot \frac{(K_1, l_1^2)}{(K_0, l_0^2)} A_2^{(0)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{Y_1}{r} \cdot \frac{(K_1, l_1^2)}{(K_0, l_0^2)} \cdot \frac{l_0}{\zeta_0} A_3^{(0)} \right] \\ M_1^{(1)} &= r l_0^2 \left[\frac{g_1}{r} \cdot \frac{l_1^2}{\zeta_1^2} \cdot \frac{A_2^{(0)}}{12} - \frac{N_1}{r} \cdot \frac{(K_1, l_1^2)}{(K_0, l_0^2)} \cdot \frac{l_0}{\zeta_0} A_4^{(0)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{Y_1}{r} \cdot \frac{(K_1, l_1^2)}{(K_0, l_0^2)} \cdot \frac{l_1^2}{\zeta_0^2} A_5^{(0)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (143. VI)$$

После определения условий и моментов остается найти возникающие в конструкции напряжения. При этом особое внимание следует обратить на

а) напряжения в сварном шве, крепящем сферическую переборку к цилиндрической части прочного корпуса;

б) напряжения в меридиональных сечениях цилиндрической оболочки (дольные кольцевые напряжения);

в) полные напряжения в поперечных сечениях цилиндрической оболочки в месте соединения ее со сферической переборкой;

г) растягивающие напряжения в сферической переборке вдали от опорного контура;

д) полные напряжения в опорных сечениях сферической переборки.

Кроме того, необходимо проверить величины напряжений в местах перехода одной толщины в другую.

Напряжения в сварном шве, крепящем сферическую переборку к цилиндрической оболочке

Пусть сварное соединение сферической переборки с цилиндрической оболочкой имеет вид, показанный на рис. 89, причем a — калибр шва, $b = 0,7a$ — опорное сечение шва; c — радиус шва по обе стороны сферической переборки. Тогда напряжения в сварном шве, крепящем сферическую переборку к цилиндрической оболочке, определяются по формуле



Рис. 89

$$\sigma_{sw} = \frac{p}{2\delta} \pm \frac{M_1^{(0)}}{\delta r}. \quad (144. VI)$$

Средние по толщине сжимающие напряжения в нормальных сечениях цилиндрической оболочки

Эти напряжения, если воспользоваться Ф-лой (87. IV) и обозначениями (137. VI), можно вычислить по выражению

$$(\sigma_r^0)_n = \frac{p}{r} w_1 + r \frac{p}{2\delta} - r \frac{p}{2\delta} + \frac{k}{r} \cdot \frac{E}{[E_0 \mu_0^2]} X_n \quad (145. VI)$$

где давление p считается положительным при внешнем давлении на рассматриваемую цилиндрическую часть, а напряжения σ_r^0 считаются положительными, если они сжимающие.

Полные напряжения в поперечных сечениях цилиндрической оболочки в месте соединения со сферической переборкой

Полные напряжения в поперечных сечениях цилиндрической оболочки в месте соединения ее со сферической переборкой состоят из целых напряжений в поперечных сечениях (от усилия T_1) и изгибных напряжений (от момента $M_1^{(0)}$ или $M_1^{(2)}$) и могут быть вычислены по формуле

$$(\sigma_1)_n = \sigma_1^0 + \sigma_1^{(2)} = - \frac{p r}{2\delta} \pm \frac{6 M_1^{(2)}}{\delta^2}. \quad (146. VI)$$

Растягивающие напряжения в сферической переборке вдали от опорного контура

Растягивающие напряжения в сферической переборке вдали от опорного контура определяются по формуле

$$(\sigma_r^0)_n = \frac{p r_0}{2\delta_0^2}. \quad (147. VI)$$

Полные напряжения в опорном сечении сферической переборки

Полные напряжения в опорном сечении сферической переборки состоят из осевых напряжений $\sigma_z^{(0)}$ (от условия $T_1^{(0)}$) и изгибных напряжений $\sigma_{\theta}^{(0)}$ (от момента $M_1^{(0)}$), т. е.

$$(\sigma_z)_{\text{оп}} = \frac{T_1^{(0)}}{q} \pm \frac{6M_1^{(0)}}{(q_0^2)^{1/2}}, \quad (148. VI)$$

где, согласно ф-лам (53. VI),

$$T_1^{(0)} = P - \frac{P_0^2}{2}(1 - \cos \theta_0). \quad (149. VI)$$

Для определения полных напряжений в местах перехода одной толщины оболочки в другую необходимо в ф-лы (146. VI) и (148. VI) подставить вместо $M_1^{(0)}$ и $T_1^{(0)}$ значения изгибающих моментов $M_2^{(0)}$ и $T_2^{(0)}$ в этих переходных сечениях. Величины же λ_1 и $\lambda_2^{(0)}$ следует заменить на λ_2 и $\lambda_2^{(0)}$.

Следует отметить, что в случае, когда сферическая переборка является концевой (рис. 90), уравнения равновесия несколько упрощаются, так как $M_2^{(0)}$ и $M_1^{(0)}$ равны нулю.

В заключение отметим, что утолщенную часть цилиндрической оболочки, которая создает распор сферической переборки, т. е. препятствует смещению ее опорных концов, называют иногда распорным кольцом.



Рис. 90

§ 57. Практическая схема расчета прочности сферической переборки

Для расчета прочности сферической переборки должны быть заданы r , λ_1 , λ_2 , I_1 , I_2 , r_0 , θ_0^L , θ_0^R , I_0 и P .

Необходимо определить напряжения в сферической переборке и в цилиндрической оболочке в районе установки переборки.

Определение коэффициентов $K_1^{(0)}$ (Сферическая переборка)

Определяются:

1. Значения параметров μ и μ^* по формулам

$$\mu = \frac{0.6135\lambda_1}{\sqrt{r_0 K_1^{(0)}}}, \quad \mu^* = \frac{0.6135\lambda_2}{\sqrt{r_0 K_2^{(0)}}}.$$

2. Из таблиц функций Вуобова—Палкояича функции $\varphi_0(\mu)$, $\mu_1(\mu)$, $\chi_1(\mu)$.

3. Значение

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{E}{0.91} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 \frac{1}{\chi_1(\mu)}.$$

4. Значения коэффициентов k_1 и k_2

$$k_1 = \frac{(2\pi)^4}{36} \chi_2(u), \quad k_2 = \frac{1}{6} \left(2\pi \frac{\mu_2^2}{\mu_1} \right)^2 \chi_2(u).$$

5. Значения a_1 , a_2 и a_3 по формулам

$$a_1 = 2 \frac{1 - \mu_2(u)}{\mu_2(u)} + 6k_1 p_1(u) + 2k_2 4u^2,$$

$$a_2 = -k_1 \chi_2(u) + 3k_2,$$

$$a_3 = -\frac{1}{2} |1 - \mu_1(u)| + \frac{1}{6} \left[\frac{\chi_2(u) - \mu_2(u)}{\mu_2(u)} \right] + \frac{2k_2}{2u}.$$

Примечание. В случае, если разности $1 - \mu_1(u)$, $1 - \mu_2(u)$ и $\chi_2(u) - \mu_2(u)$ окажутся малыми разностями близкое число, то из значений определяются по формулам (108. VI)–(108. VII).

6. Величины a_1 , a_2 и a_3 :

$$a_1 = 6k_1 p_1(u) - 2 \frac{1 - \mu_2(u)}{\mu_2(u)},$$

$$a_2 = k_1 \chi_2(u),$$

$$a_3 = \frac{1 - \mu_1(u)}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{\chi_2(u) - \mu_2(u)}{\mu_2(u)}.$$

7. Коэффициенты γ_1 , γ_2 , γ_3 и γ_4 по формулам:

$$\gamma_1 = \frac{(2 - \epsilon_2) \left(\frac{2}{3} + \epsilon_1 \right) - (2 - \epsilon_2)(1 - \epsilon_2)}{(2 + \epsilon_1) \left(\frac{2}{3} + \epsilon_2 \right) - (1 - \epsilon_2)^2},$$

$$\gamma_2 = \frac{(1 - \epsilon_2) \left(\frac{2}{3} + \epsilon_2 \right) - \left(\frac{1}{3} - \epsilon_1 \right) (1 - \epsilon_2)}{(2 + \epsilon_1) \left(\frac{2}{3} + \epsilon_2 \right) - (1 - \epsilon_2)^2},$$

$$\gamma_3 = \frac{(1 - \epsilon_2)(2 + \epsilon_1) - (2 - \epsilon_2)(1 - \epsilon_2)}{(2 + \epsilon_1) \left(\frac{2}{3} + \epsilon_2 \right) - (1 - \epsilon_2)^2},$$

$$\gamma_4 = \frac{\left(\frac{1}{3} - \epsilon_1 \right) (2 + \epsilon_1) - (1 - \epsilon_2)(1 - \epsilon_2)}{(2 + \epsilon_1) \left(\frac{2}{3} + \epsilon_2 \right) - (1 - \epsilon_2)^2}.$$

8. Величины d_1 , d_2 , d_3 , ..., d_6 по формулам:

$$d_1 = 6\mu_1(u),$$

$$d_2 = \chi_2(u),$$

$$d_3 = 6k_1 p_1(u),$$

$$d_4 = k_1 \chi_2(u),$$

$$d_5 = 3k_2 p_1(u) - \frac{1 - \mu_2(u)}{\mu_2(u)},$$

$$d_6 = k_2 \frac{\chi_2(u)}{2} - \frac{1 - \mu_2(u)}{2}.$$

9. Величины $b_1, b_2, \dots, b_5$:

$$b_1 = 6r_1(u) + \frac{12}{2a^2}, \quad b_2 = \chi_1(u) - \frac{6}{(2a^2)^2},$$

$$b_3 = 6b_{2r_1}(u) + b_2 4a^2, \quad b_4 = b_1 \chi_2(u) - b_2,$$

$$b_5 = \frac{1-r_2(u)}{r_2(u)} + 3b_{2r_1}(u) + b_2(1 + 4a^2),$$

$$b_6 = \frac{1-r_2(u)}{2} + \frac{b_2}{2} \chi_2(u) - b_2 \left(1 + \frac{1}{2a^2}\right).$$

10. Искомые коэффициенты $A_i^{(2)}$ по формулам:

$$A_1^{(2)} = d_1 + \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2, \quad A_2^{(2)} = d_2 + \gamma_3 b_1 + \gamma_4 b_2,$$

$$A_3^{(2)} = d_3 + \gamma_5 b_2 + \gamma_6 b_4, \quad A_4^{(2)} = d_4 + \gamma_7 b_1 + \gamma_8 b_2,$$

$$A_5^{(2)} = d_5 + \gamma_9 b_2 + \gamma_{10} b_6, \quad A_6^{(2)} = d_6 + \gamma_{11} b_1 + \gamma_{12} b_2.$$

Определение коэффициентов $A_i^{(1)}$

(Цилиндрическая оболочка, расположенная с конгустой стороны сферической переборки)

Определяются:

1. Значения параметров μ и μ^* по формулам

$$\mu = \frac{0.64351}{\sqrt{r k_1}}, \quad \mu^* = \frac{0.64351}{\sqrt{r k_2}}.$$

2. Из таблиц функций Бесселя—Панковича функции $r_0(\mu)$, $r_1(\mu)$ и $\chi_2(\mu)$.

3. Значение

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{E}{\alpha W} \left(\frac{k_2}{k_1} \right)^2 \frac{1}{2a(u)},$$

4. Значения коэффициентов b_1 и b_2

$$b_1 = \frac{(2a)^2}{2b} \chi_2(u), \quad b_2 = \frac{1}{a} \left(2a \frac{k_2}{k_1} \right)^2 \chi_2(u).$$

Далее производится вычислительные операции 5, 6, 7, 8, 9 и 10, проведенные при определении коэффициентов $A_i^{(2)}$.

В результате операции 10 находятся значения коэффициентов $A_i^{(1)}$, $A_2^{(1)}$, $A_3^{(1)}$, $A_4^{(1)}$, $A_5^{(1)}$ и $A_6^{(1)}$.

Определение коэффициентов $A_i^{(2)}$

(Цилиндрическая оболочка, расположенная с выпуклой стороны сферической переборки)

Определяются:

1. Значения параметров μ и μ^* по формулам

$$\mu = \frac{0.64351}{\sqrt{r k_1}}, \quad \mu^* = \frac{0.64351}{\sqrt{r k_2}}.$$

2. Из таблиц функций Бесселя—Гипковича значения функций $\rho_0(u)$, $\rho_1(u)$, $\chi_1(u)$.

3. Значения

$$\frac{K_2}{\xi} = \frac{E}{6,35} \left(\frac{b}{\xi} \right)^2 \frac{1}{\sin(u)}.$$

4. Значения коэффициентов k_1 и k_2

$$k_1 = \frac{E \sin^2 u}{2\xi} \chi_1(u), \quad k_2 = \left(2u \frac{\partial}{\partial u} \right)^2 \chi_1(u).$$

Далее производится вычислительные операции 5, 6, 7, 8, 9 и 10.

В результате операции 10 вычисляются значения коэффициентов $A_1^{(2)}$, $A_2^{(2)}$, $A_3^{(2)}$, $A_4^{(2)}$ и $A_5^{(2)}$.

Примечание. Обычно сферический переборки устанавливается накрываемой части цилиндрической оболочки, так что $I_1 = I_2$. В этом случае необходимость в определении коэффициентов $A_2^{(2)}$ отпадает, ибо $A_2^{(2)} = A_1^{(2)}$.

Определение нагрузок для сферической переборки и цилиндрической части прочного корпуса

В случае аварийного затопления отсека (см. рис. 86) необходимо принимать:

1. Для сферической переборки $q_0 = -0,35p$.
2. Для прочного корпуса $q_1 = 0$, $q_2 = +0,85p$.

В случае испытаний отсека на стапеле (см. рис. 87) необходимо принимать:

1. Для сферической переборки $q_0 = 0,55p$.
2. Для прочного корпуса $q_1 = -0,85p$, $q_2 = 0$.

Раскрытие статической неопределенности задачи и определение усилий и моментов

Определяются:

1. Коэффициенты C_1 , C_2 и C_3 по формулам:

$$C_1 = \frac{A_1^{(2)}}{\sin^2 u_0} + \frac{(K_1 + \frac{E}{\xi})}{(K_1 + \frac{E}{\xi})} A_1^{(1)} + \frac{(K_2 + \frac{E}{\xi})}{(K_2 + \frac{E}{\xi})} A_2^{(1)},$$

$$C_2 = \frac{A_1^{(2)}}{\sin u_0} - \frac{(K_1 + \frac{E}{\xi})}{(K_1 + \frac{E}{\xi})} \cdot \frac{I_1}{b} A_1^{(1)} + \frac{(K_2 + \frac{E}{\xi})}{(K_2 + \frac{E}{\xi})} \cdot \frac{I_2}{b} A_2^{(1)},$$

$$C_3 = A_1^{(2)} + \frac{(K_1 + \frac{E}{\xi})}{(K_2 + \frac{E}{\xi})} \left(\frac{I_1}{b} \right)^2 A_1^{(1)} + \frac{(K_2 + \frac{E}{\xi})}{(K_2 + \frac{E}{\xi})} \left(\frac{I_2}{b} \right)^2 A_2^{(1)}.$$

2. Значения коэффициентов β_1 и β_2 по формулам

$$\beta_1 = \frac{r_0}{2a_0} \cos \theta_0 + \frac{q_0}{p} \cdot \frac{A_1^{(2)}}{12 \sin u_0} + \frac{q_1}{p} \cdot \frac{I_1}{b} \cdot \frac{A_1^{(1)}}{12} + \frac{q_2}{p} \cdot \frac{I_2}{b} \cdot \frac{A_2^{(1)}}{12},$$

$$\beta_2 = -\frac{q_0}{p} \cdot \frac{A_1^{(2)}}{12} + \frac{q_1}{p} \cdot \frac{I_1}{b} \cdot \frac{A_1^{(1)}}{12} - \frac{q_2}{p} \cdot \frac{I_2}{b} \cdot \frac{A_2^{(1)}}{12}.$$

3. Неизвестные X_0 и Y_0 из системы двух уравнений

$$\begin{aligned} C_1 X_0 - C_2 Y_0 &= p \beta_1, \\ -C_3 X_0 + C_4 Y_0 &= p \beta_2. \end{aligned}$$

4. Отношения

$$\frac{X_2}{p} \text{ и } \frac{Y_2}{p}.$$

5. Усилия и моменты в сферической переборке в узле соединения с цилиндрической частью прочного корпуса.

Усилие P , растягивающей переборку в плоскости опорного круга, по формуле

$$P = p l_0 \left[\frac{l_2}{2 l_1} \cos \theta_1 + \frac{X_2}{p} \cdot \frac{A_1^{(0)}}{12 \sin \theta_1} - \frac{X_2}{p} \cdot \frac{A_1^{(0)}}{\sin^2 \theta_1} + \frac{Y_2}{p} \cdot \frac{A_1^{(0)}}{\sin \theta_1} \right].$$

Изгибающий момент M_2 по формуле

$$M_2^{(0)} = p l_0^2 \left[\frac{X_2}{p} \cdot \frac{A_2^{(0)}}{12} - \frac{X_2}{p} \cdot \frac{A_2^{(0)}}{\sin \theta} + \frac{Y_2}{p} \cdot A_2^{(0)} \right].$$

6. Перерезывающая сила $N_1^{(1)}$ и изгибающий момент $M_1^{(1)}$ для цилиндрической оболочки, которая расположена с выпуклой стороны сферической переборки, по формулам

$$\begin{aligned} N_1^{(1)} &= p l_0 \left[\frac{q_1}{p} \cdot \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{A_1^{(1)}}{12} + \frac{X_2}{p} \cdot \frac{(K_1 + l_1^2)}{(K_2 + l_2^2)} A_1^{(1)} + \frac{Y_2}{p} \cdot \frac{(K_1 + l_1^2)}{(K_2 + l_2^2)} \cdot \frac{l_1}{l_2} A_1^{(1)} \right], \\ M_1^{(1)} &= p l_0^2 \left[\frac{q_1}{p} \cdot \frac{l_1^2}{l_2^2} \cdot \frac{A_1^{(1)}}{12} - \frac{X_2}{p} \cdot \frac{(K_1 + l_1^2)}{(K_2 + l_2^2)} \cdot \frac{l_1}{l_2} A_1^{(1)} - \frac{Y_2}{p} \cdot \frac{(K_1 + l_1^2)}{(K_2 + l_2^2)} \cdot \frac{l_1}{l_2} A_1^{(1)} \right]. \end{aligned}$$

7. Перерезывающая сила $N_1^{(2)}$ и изгибающий момент $M_1^{(2)}$ для цилиндрической оболочки, которая расположена с вогнутой стороны сферической переборки, по формулам

$$\begin{aligned} N_1^{(2)} &= p l_0 \left[\frac{q_1}{p} \cdot \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{A_1^{(2)}}{12} - \frac{X_2}{p} \cdot \frac{(K_1 + l_1^2)}{(K_2 + l_2^2)} A_1^{(2)} + \frac{Y_2}{p} \cdot \frac{(K_1 + l_1^2)}{(K_2 + l_2^2)} \cdot \frac{l_1}{l_2} A_1^{(2)} \right], \\ M_1^{(2)} &= p l_0^2 \left[\frac{q_1}{p} \cdot \frac{l_1^2}{l_2^2} \cdot \frac{A_1^{(2)}}{12} - \frac{X_2}{p} \cdot \frac{(K_1 + l_1^2)}{(K_2 + l_2^2)} \cdot \frac{l_1}{l_2} A_1^{(2)} + \frac{Y_2}{p} \cdot \frac{(K_1 + l_1^2)}{(K_2 + l_2^2)} \cdot \frac{l_1}{l_2} A_1^{(2)} \right]. \end{aligned}$$

Определение напряжений

При проверке прочности определению подлежат:

1. Напряжения в сварном шве, крепящем переборку к цилиндрической части прочного корпуса.

2. Кольцевые цепные напряжения в меридиональных сечениях цилиндрической оболочки у опорного контура.

3. Суммарные напряжения в поперечных сечениях цилиндрической оболочки у опорного контура.

4. Цепные напряжения в сферической переборке вдали от опорного контура.

5. Суммарные напряжения в опорном сечении сферической переборки.

Упомянутые напряжения определяются по формулам:

1. Напряжения в сварном шве

$$\sigma_{\text{сш}} = \frac{P}{2\delta} \pm \frac{M_1^{(P)}}{W},$$

2. Кольцевые цапные напряжения в меридиональных сечениях цилиндрической оболочки

$$(\sigma_1)_{r=0} = P \frac{Pr}{2E_1} + \frac{q_1}{r} \cdot \frac{E}{(E_1 + E)} K_1,$$

3. Суммарные напряжения в поперечных сечениях цилиндрической оболочки

$$(\sigma_1)_{r=0} = - \frac{Pr}{2E_1} \pm \frac{6M_1^{(P)}}{q_1^2}.$$

4. Цапные напряжения в сферической переборке вдоль от опорного контура

$$(\sigma_1)_{r=R} = (\sigma_1)_{r=0} = \frac{Pr}{2\delta_2}.$$

5. Суммарные напряжения в опорном сечении сферической переборки

$$(\sigma_1)_{r=R} = \frac{P_1^{(P)}}{q_1} \pm \frac{6M_1^{(P)}}{(q_1^2)^{1/2}},$$

где

$$P_1^{(P)} = P - \frac{P\delta_2}{2} (1 - \cos \theta_0).$$

После определения напряжений проверяется удовлетворение критерия прочности:

а) для напряжений в сварном шве

$$\sigma_{\text{сш}} \leq \alpha \sigma_s,$$

где σ_s — предел текучести материала;

α — коэффициент, показывающий, какую долю предела текучести материала составляют допускаемые напряжения в сварном шве;

б) для цапных напряжений в сферической переборке и в цилиндрической оболочке

$$\sigma_1^2 \leq \alpha_1 \sigma_s,$$

где α_1 — коэффициент, показывающий, какую долю предела текучести материала составляют допускаемые цапные напряжения;

в) для суммарных напряжений в сферической переборке и цилиндрической оболочке

$$\sigma \leq b \sigma_s,$$

где b — коэффициент, показывающий, какую долю предела текучести составляют допускаемые суммарные напряжения.

§ 58. Определение теоретического критического давления для сферической переборки

Одной из отличительных особенностей сферических переборок является сравнительно небольшая величина нагрузки, которую может выдержать сферическая переборка со стороны выпуклости. Отмеченная особенность сферических переборок объясняется тем, что при действии на переборку с ее выпуклой стороны давления жидкости или газа в переборке возникают ценные сжимающие напряжения, могущие привести к потере устойчивости переборки. Если действующее на переборку давление достигнет критической величины, переборка теряет устойчивость и на ее поверхности образуются вмятины и выпучины. При принятых достаточно высоких допускаемых значениях ценных напряжений потеря устойчивости сферической переборки приводит к разрушению последней, поэтому критическое давление на переборку является для нее опасной нагрузкой. Для исключения потери устойчивости сферических переборок в эксплуатационных условиях необходимо определить критическое давление и проверять выполнение условия устойчивости

$$P_{кр} > P, \quad (150, VI)$$

Здесь $P_{кр}$ — критическая нагрузка на переборку;
 P — действующая нагрузка.

Для возможности использования критерия (150, VI) необходимо знать метод определения критической нагрузки для сферической оболочки.

В главе II была получена следующая система уравнений устойчивости для оболочек произвольной формы (см. ф-лы (9, II) и (15, II)):

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_1 T_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 S}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_2} S - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_1 \right) + \frac{N_1}{R_1} + F_1 &= 0 \\ \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_2 S}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 T_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} S - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} T_1 \right) + \frac{N_2}{R_1} + F_2 &= 0 \\ \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_2 N_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 N_2}{\partial \alpha_2} \right) - \frac{T_1}{R_1} - \frac{T_2}{R_2} + F_3 &= 0 \\ \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_1 M_3}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2 H}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} H - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_2 \right) &= N_1 \\ \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_2 H}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 M_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} H - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_2} M_1 \right) &= N_2 \end{aligned} \right\} \quad (151, VI)$$

где F_1 , F_2 и F_3 определяются ф-лами (10, II).

В задачах устойчивости оболочек напряжения от моментов сонапряжены с напряжениями от усилий. В этом случае, как доказал профессор Х. М. Муштарли, в формулах для изменения кривизны и кручения можно пренебречь перемещениями u и v . Тогда получим

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 &= -\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right) \\ \kappa_2 &= -\frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \right) \\ \tau &= -\frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (152, VI)$$

Из формул (152, VI) следует:

$$x_1 + x_2 = \Delta w, \quad (153, \text{VI})$$

где символ Δ обозначает оператор Лапласа. Подставив в четвертое и пятое уравнения системы (151, VI) вместо изгибающих и крутящих моментов их выражения через изменения кривизмы и кручения (см. формулы (122, I)), получим

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= D \left[\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial(x_1 + x_2)}{\partial x_1} - \frac{1-\nu}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_2 x_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_2}{\partial x_1} x_1 - \frac{\partial A_2 \tau}{\partial x_2} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \tau \right) \right] \\ N_2 &= D \left[\frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial(x_1 + x_2)}{\partial x_2} - \frac{1-\nu}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_1 x_1}{\partial x_2} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} x_2 - \frac{\partial A_1 \tau}{\partial x_1} - \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \tau \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (154, \text{VI})$$

При $w = 0$ и $v = 0$ относительные удлинения и сдвиг выражаются с помощью следующих зависимостей:

$$x_1 = \frac{w}{R_1}, \quad x_2 = \frac{w}{R_2}, \quad \tau = 0. \quad (155, \text{VI})$$

В этом случае выражения, стоящие в квадратных скобках формул (154, VI), можно привести к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_2 x_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_2}{\partial x_1} x_1 - \frac{\partial A_2 \tau}{\partial x_2} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \tau &= \frac{A_2}{R_1 R_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial A_1 x_1}{\partial x_2} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} x_2 - \frac{\partial A_1 \tau}{\partial x_1} - \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \tau &= \frac{A_1}{R_2 R_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Следовательно, перерезывающие силы N_1 и N_2 будут равны

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= -D \frac{1}{A_1} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{1-\nu}{R_1 R_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) \\ N_2 &= -D \frac{1}{A_2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} + \frac{1-\nu}{R_1 R_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (156, \text{VI})$$

Далее необходимо отметить, что в задачах о потере устойчивости величина нормального перемещения w при дифференцировании существенно возрастает. Поэтому в формулах (156, VI) вторыми слагаемыми можно пренебречь в сравнении с первыми слагаемыми. Таким образом, окончательные выражения для перерезывающих сил N_1 и N_2 будут иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= -D \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} \\ N_2 &= -D \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} \end{aligned} \right\} \quad (157, \text{VI})$$

При сделанном допущении о возможности пренебрежения в формулах для изменений кривизмы и кручения перемещениями w и v оказывается, что в первом и втором уравнениях устойчивости (151, VI) можно пренебречь перерезывающими силами N_1 и N_2 . Подставив N_1 и N_2 из ф-л (157, VI) в третье уравнение системы (151, VI) и прене-

брегая в первых двух уравнениях (151. VI) перерезывающими силами, будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_2 T_1}{\partial s_1} + \frac{\partial A_1 S}{\partial s_2} + \frac{\partial A_2}{\partial s_2} S - \frac{\partial A_1}{\partial s_1} T_1 \right) + F_1 &= 0 \\ \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_2 S}{\partial s_1} + \frac{\partial A_1 T_2}{\partial s_2} + \frac{\partial A_2}{\partial s_1} S - \frac{\partial A_1}{\partial s_2} T_2 \right) + F_2 &= 0 \\ D \Delta \Delta w + \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} + F_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (158. VI)$$

Следуя В. З. Власову, введем функцию напряжений Φ , связанную с условиями T_1 , T_2 и S следующими зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= -\frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial}{\partial s_2} \left(\frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial s_1} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial s_1} \left(\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial s_1} \right) \\ T_2 &= -\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial s_2} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial s_2} \left(\frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial s_2} \right) \\ S &= \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s_1 \partial s_2} - \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial s_2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial s_1} - \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial s_2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (159. VI)$$

Подставив ф-лы (159. VI) в два первых ур-ия (158. VI), можно убедиться, что они с точностью до малых величины будут удовлетворены. Что касается третьего уравнения, то оно примет вид

$$D \Delta \Delta w - K(\Phi) + F_3 = 0, \quad (160. VI)$$

где K — дифференциальный оператор, определяемый равенством

$$K(\Phi) = \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial s_1} \left(\frac{1}{A_2} \cdot \frac{A_1}{A_1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial s_1} \right) + \frac{\partial}{\partial s_2} \left(\frac{1}{A_1} \cdot \frac{A_2}{A_2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial s_2} \right) \right]. \quad (161. VI)$$

Уравнением (160. VI) дается первое условие, связывающее прогиб w и функцию напряжений Φ . Второе условие, связывающее величины w и Φ , получим из уравнений неразрывности (см. ф-лы (83. I)). Введя в третье уравнение неразрывности (83. I) вместо величин x_1 , x_2 и s их выражения через w согласно ф-лам (152. VI), а вместо t_1 , t_2 и s их выражения через Φ (предварительно выразив t_1 , t_2 и s через T_1 , T_2 и S), получим

$$\frac{1}{R_2} \Delta \Delta \Phi + K(w) = 0. \quad (162. VI)$$

Уравнением (162. VI) дается второе условие, связывающее прогиб w и функцию напряжений Φ .

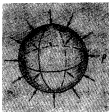


Рис. 51

Таким образом, мы получили два уравнения

$$\left. \begin{aligned} D\Delta\Delta w - K(\Phi) + F_s = 0 \\ \frac{1}{2R} \Delta\Delta\Phi + K(\pi) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (163. VI)$$

Рассмотрим сферическую оболочку, нагруженную внешним равномерным давлением интенсивности p (рис. 91). Для сферической оболочки главные радиусы кривизны R_1 и R_2 равны r_s .

В этом случае оператор K превращается в обычный оператор Лапласа Δ , разделенный на r_s . Поэтому для сферической оболочки будем иметь

$$\left. \begin{aligned} D\Delta\Delta w - \frac{1}{r_s} \Delta\Phi + F_s = 0 \\ \frac{1}{2R} \Delta\Delta\Phi + \frac{1}{r_s} \Delta w = 0 \end{aligned} \right\} \quad (164. VI)$$

Из первого ур-ния (164. VI) имеем

$$\Delta\Phi = r_s D\Delta\Delta w + F_s r_s \quad (165. VI)$$

После подстановки ф-лы (165. VI) во второе уравнение системы (164. VI) получим

$$\Delta(r_s D\Delta\Delta w + F_s r_s) + \frac{2R}{r_s} \Delta w = 0$$

или

$$\Delta\left(D\Delta\Delta w + F_s + \frac{2R}{r_s} w\right) = 0 \quad (166. VI)$$

При действии внешнего равномерного давления на замкнутую сферическую оболочку исходное или начальное состояние оболочки является безмоментным. При этом

$$\left. \begin{aligned} T_1^I = T_2^I = -\frac{E r_s}{2} \\ S^I = 0 \end{aligned} \right\} \quad (167. VI)$$

Тогда, согласно ф-лам (10. II), для величины F_s получим

$$\begin{aligned} F_s = \left(-\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial x_1} a_1\right) T_1^I + \left(\frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial a_2}{\partial x_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_2} a_2\right) T_2^I = \\ = -\frac{E r_s}{2} \cdot \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} (A_1 a_1) - \frac{\partial}{\partial x_1} (A_2 a_2)\right], \end{aligned} \quad (168. VI)$$

но согласно ф-лам (21. II) и (22. II)

$$a_1 = \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad a_2 = -\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1}$$

и, следовательно,

$$F_s = -\frac{E r_s}{2} \Delta w. \quad (169. VI)$$

Подставив ф-лу (169. VI) в ур-ние (168. VI), приходим к уравнению

$$\Delta \left(D\Delta\omega - \frac{E\epsilon}{2} \Delta\omega + \frac{E\epsilon}{r_0^2} \omega \right) = 0. \quad (170. VI)$$

При потере устойчивости сферической оболочки на ее поверхности образуется большое число волн. Следуя В. Э. Власову, приходим

$$\Delta\omega = -n^2\omega, \quad (171. VI)$$

где n^2 — некоторый параметр.

Подставив ф-лу (171. VI) в ур-ние (170. VI), получим

$$\Delta\omega \left(Dn^2 - \frac{E\epsilon}{2} n^2 + \frac{E\epsilon}{r_0^2} \right) = 0. \quad (172. VI)$$

Величина $\Delta\omega$ не может быть равна нулю, ибо при $\Delta\omega = 0$ и прогибы оболочки ω будут также равны нулю. Равенство же прогибов нулю свидетельствует об отсутствии потери устойчивости оболочки, поэтому для удовлетворения ф-лы (172. VI) необходимо положить равной нулю выражение, стоящее в скобках,

$$Dn^2 - \frac{E\epsilon}{2} n^2 + \frac{E\epsilon}{r_0^2} = 0. \quad (173. VI)$$

Уравнение (173. VI) и есть искомое уравнение для определения критического давления p сферической оболочки. Решив ур-ние (173. VI) относительно p , будем иметь

$$p'_c = \frac{2}{r_0} \left(Dn^2 + \frac{E\epsilon}{r_0^2} \right). \quad (174. VI)$$

В формуле (174. VI) n — пока неизвестный параметр. Как и ранее, будем интересоваться лишь минимальным значением критического давления.

Взяв производную $\frac{dp'_c}{dn}$ и приравняв ее нулю, получим

$$\frac{dp'_c}{dn} = \frac{2}{r_0} \left(2Dn - \frac{2E\epsilon}{r_0^2} \right) = 0,$$

откуда

$$2Dn - \frac{2E\epsilon}{r_0^2} = 0$$

и n , обращающее критическое давление в минимум, будет равно

$$n^2 = \sqrt{\frac{E\epsilon}{D\epsilon^2}}. \quad (175. VI)$$

Подставив ф-лу (175. VI) в ф-лу (174. VI) после приведения подобных членов, получим окончательно

$$p'_c = \frac{2}{\sqrt{2(1-\nu^2)}} E \left(\frac{\epsilon}{r_0} \right)^2. \quad (176. VI)$$

По формуле (176, VI) и определяется теоретическое значение критического давления для замкнутой сферической оболочки. Эта формула была впервые предложена Целли* и носит его имя.

Если положить $\mu = 0,3$, то ф-лу (176, VI) можно привести к виду

$$P'_{кр} = 1,2E \left(\frac{\lambda}{r_0} \right)^2. \quad (177, VI)$$

Для стальных оболочек при $E = 2,0 \cdot 10^6$ кг/см² получим

$$P'_{кр} = 240 \left(\frac{100\lambda}{r_0} \right)^2. \quad (178, VI)$$

Последняя формула нашла широкое применение при проверке устойчивости сферических оболочек.

Соответствующее критическому давлению критическое напряжение определяется по формуле

$$\sigma'_{кр} = \frac{P'_{кр} r_0}{\delta} = \frac{1}{\sqrt{3}(1-\mu^2)} E \frac{\lambda}{r_0}. \quad (179, VI)$$

В заключение следует отметить, что при потере устойчивости сферической оболочки, соответствующей приведенной классической или линейной теории устойчивости, на поверхности сферы образуется большое число волн, поэтому решение для замкнутой сферы может быть использовано и для незамкнутой сферы при условии, что на поверхности незамкнутой сферы образуется не менее одной полуволны.

§ 59. Введение поправочных коэффициентов

При исследовании устойчивости цилиндрических оболочек было отмечено, что экспериментальные значения критических нагрузок оказываются много ниже теоретических значений критических давлений, определенных по расчетным формулам. Это несоответствие между фактической критической нагрузкой и ее расчетной величиной еще в большей мере свойственно сферическим оболочкам.

Как и ранее, отнесенные несоответствия будем учитывать введением поправочных коэффициентов η_1 и η_2 , так что действительное критическое давление следует определять по формуле

$$P_{кр} = \eta_1 \eta_2 P'_{кр}, \quad (180, VI)$$

где η_1 — поправочный коэффициент, учитывающий влияние начальной погрешности, неоднородности материала и другие случайные факторы;

η_2 — поправочный коэффициент, учитывающий влияние отступлений от закона Гука.

Как показал Т. Карман, для сферических оболочек разница между верхним критическим давлением, определенным исходя из рассмотренной выше классической теории устойчивости, и нижним критическим давлением, определенным с учетом возможности больших отклонений от положения равновесия, оказывается очень большой. При этом на поверхности сферы образуется с кликом одна или несколько вместо обычного волнообразования, даваемого классической теорией. Величина же нижнего критического давления примерно в 3—3,5 раза меньше определенного по

* R. Zöllig, Dissertation, Zürich, 1915.

ф-ле (178. VI). Поэтому Т. Карман предложил определять критическое давление не по формуле Целли (178. VI), а по формуле

$$P'_{cr} = 65 \left(\frac{100 \delta_0^2}{r_0} \right)^2, \quad (181. VI)$$

что эквивалентно введению в формулу Целли поправочного коэффициента $\eta_0 \approx 0,3$. Таким образом, используя формулу Кармана (181. VI), мы должны ограничиться введением только поправочного коэффициента η_0 (на отступление от закона Гукса).

Определив при заданных размерах оболочки P'_{cr} , находим напряжения в оболочке, соответствующие этой нагрузке,

$$\sigma'_{cr} = - \frac{P'_{cr} r_0}{2\delta_0}. \quad (182. VI)$$

Затем, в зависимости от марки стали по графику рис. 59 или таблице Приложения V находим поправочный коэффициент η_0 .

Действительное критическое давление будет равно

$$P_{cr} = \eta_0 P'_{cr}. \quad (183. VI)$$

§ 40. Практическая схема расчета устойчивости сферической переборки

Для построения схемы расчета устойчивости сферических переборок принимаются исходные данные:

r_0 — радиус сферической переборки;

δ_0 — толщина сферической переборки;

E и ν — упругие константы материала оболочки.

Необходимо определить действительное критическое давление для сферической переборки.

Определяются:

1. Теоретическое значение критического давления по формуле Кармана

$$P'_{cr} = 65 \left(\frac{100 \delta_0^2}{r_0} \right)^2, \\ \text{(для стали)}$$

или

$$P'_{cr} = 0,3 \frac{2}{\sqrt{2(1-\nu^2)}} E \left(\frac{\delta_0^2}{r_0} \right)^2, \\ \text{(для любых материалов)}$$

2. Целевые сжимающие напряжения в сферической переборке по формуле

$$\sigma'_{cr} = - \frac{P'_{cr} r_0}{2\delta_0}.$$

3. Поправочный коэффициент η_0 по графику рис. 59 или таблице Приложения V.

4. Искомое значение критического давления для сферической переборки по формуле $P_{cr} = \eta_0 P'_{cr}$.

5. Удовлетворение критерия устойчивости сферической переборки

$$P_{cr} \geq P.$$

ГЛАВА VII

РАСЧЕТ ПЛОСКИХ ПЕРЕБОРОК

§ 61. Классификация переборок

По своему назначению плоские переборки подводных лодок разделяются на следующие виды:

1. Переборки равнопрочные с прочным корпусом (переборки, ограничивающие прочный корпус, переборки прочных пистерн). Они рассчитываются на давление, соответствующее расчетной глубине погружения.

2. Переборки, обеспечивающие непотопляемость отсеков до заданного по спецификации давления (переборки внутри корпуса, которые могут подвергнуться действию давления в случае аварийного затопления отсека в подводном положении).

3. Переборки, обеспечивающие надводную непотопляемость подводных лодок. Эти переборки рассчитываются на давление 0,5—1,0 атм.

Расчет прочности для каждого вида переборок принципиально остается одним и тем же, за исключением некоторых особенностей.

При расчете плоских переборок должна быть проверена прочность и устойчивость листов переборки и ее стоек. Необходимость такой проверки объясняется совместностью работы прочного корпуса и переборок, поскольку при обжатии прочного корпуса в листах и наборе переборок появляются напряжения сжатия.

Примем следующий порядок расчета плоской переборки. Сначала рассмотрим расчет прочности жестких пластин и пластин конечной жесткости, считая, что сама теория их расчета известна из курса строительной механики корабля. Затем рассмотрим расчет листов переборок на устойчивость, после чего уже остановимся на расчете балок набора переборок. В заключение расчета переборок коснемся выбора элементов профиля балок набора.

§ 62. Расчет пластин переборок

Пластин переборок, в зависимости от характера возникающих в них напряжений, разделяются на жесткие, конечной жесткости и гибкие.

Рассмотрим расчет прочности жестких пластин и пластин конечной жесткости как наиболее типичных для корпусных конструкций.

1. Расчет прочности жестких пластин

В жестких пластинах при действии поперечной нагрузки изгибные напряжения значительно превосходят по величине другие напряжения.

В том случае, когда контур пластины прямоугольный, а поперечная нагрузка равномерно распределена и напряжения на опорных кромках жестких пластин не превосходят предела текучести материала, расчет прочности пластины выполняется по обычной схеме.

Поскольку используемые при этом зависимости потребуются в последующем, приведем формулы для расчета жестких пластин.

Примем следующие обозначения:

- a — длинная сторона опорного контура;
- b — короткая сторона опорного контура;
- t — толщина пластины;
- w — максимальная стрелка прогиба в центре пластины;
- M_1 — наибольший изгибающий момент в центре пластины в сечении, параллельном короткой стороне;
- M_2 — то же, но в сечении, параллельном длинной стороне;
- M_1' — наибольший изгибающий момент в середине коротких кромок;
- M_2' — то же, но в середине длинных кромок.

Расчетные формулы при этом имеют вид

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= k_1 p b^2 & M_2 &= k_2 p b^2 \\ M_1' &= k_3 p b^2 & M_2' &= k_4 p b^2 \\ w &= k_5 \frac{p b^4}{E t^3} \end{aligned} \right\} \quad (1. VII)$$

Коэффициенты k_i определяются из таблиц Приложений VI, VII, VIII в зависимости от отношения сторон пластины a/b и условий закрепления ее на опорном контуре. Вычисление напряжений производится по формуле

$$\sigma_i = \frac{6 M_i}{t^2} = \alpha p \left(\frac{b}{100 T} \right)^2, \quad (2. VII)$$

где

$$\alpha = 6 \cdot 10^4 k_i.$$

Если известна величина давления p и допустимого напряжения $\sigma_{\text{доп}}$, то толщина пластины может быть определена по формуле

$$t = \frac{6 M_2}{\sigma_{\text{доп}}} = b \sqrt{\frac{6 k_2 p}{\sigma_{\text{доп}}}}. \quad (3. VII)$$

В том случае, когда у жестко заделанной по контуру пластины напряжения в опорных сечениях превосходят предела текучести материала, напряженное состояние пластины будет отличаться от предполагаемого, и приведенными формулами пользоваться уже нельзя. Этот случай был рассмотрен В. Ф. Сагал, который исходил из следующих соображений.

Вклязал он рассматривает пластину, вытянутую в одном направлении. Это дает основание исследование изгиба пластины заменить исследованием изгиба выделенной из нее балки-полоски единичной ширины, жестко заделанной по концам и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивности p .

При изгибе балки-полоски в упругой зоне имеем $\sigma = \frac{M}{W} = \frac{6M_1}{b}$. Изгибные напряжения в крайних волокнах опорного сечения балки достигнут величины σ , при изгибающем моменте, равном

$$(M_1)_{\text{уп}} = W\sigma = \frac{b}{8}\sigma_0. \quad (4. \text{ VII})$$

Предельное значение изгибающего момента будет

$$(M_1)_{\text{пр}} = T\sigma_1 = \frac{b}{4}\sigma_1. \quad (5. \text{ VII})$$

Таким образом, до образования в опорном сечении пластического шарнира изгибающий момент может быть еще увеличен в 1,5 раза. Отметим, что в действительности такое увеличение недопустимо, поскольку оно связано с чрезмерными прогибами балки-полоски. В процессе дальнейшей деформации принимается, что опорный изгибающий момент остается постоянным. Это позволяет рассматривать балку как свободно опертую и нагруженную помимо равномерного давления еще постоянными моментами по концам M_0 . Тогда изгибающий момент в пролете будет равен

$$M_2 = \frac{\rho b^2}{8} - M_0. \quad (6. \text{ VII})$$

Предполагая, что напряжения в пролете не превосходят предела текучести, будем иметь

$$\sigma_2 = \frac{M_2}{W} = \frac{6M_2}{b}. \quad (7. \text{ VII})$$

или, если воспользоваться выражением (6. VII),

$$\sigma_2 = 0,75\rho\left(\frac{b}{t}\right)^2 - \frac{6M_0}{b}.$$

Если вместо M_0 принять его максимальное значение, даваемое зависимостью (4. VII), то для напряжений в пролете с некоторым преувеличением имеем

$$\sigma_2 = 0,75\rho\left(\frac{b}{t}\right)^2 - \sigma_0. \quad (8. \text{ VII})$$

Приняв вместо M_0 его максимальное значение, даваемое выражением (5. VII), получим преуменьшенный результат

$$\sigma_2 = 0,75\rho\left(\frac{b}{t}\right)^2 - 1,5\sigma_0. \quad (9. \text{ VII})$$

Затем аналогичная формула выводится В. Ф. Сегаль и для пластины с конечным отношением сторон. У таких пластин максимальный изгибающий момент будет иметь место в середине длинных сторон.

Допустим, что напряжения в опорных сечениях пластины достигли предела текучести, а опорные моменты равны M_0 . Определим максимальный изгибающий момент в пролете, считая пластину свободно опертую и нагруженной по краям возмущенными по величине опорными моментами M_0 . Закон распределения изгибающих моментов по длине каждой кромки пластины примем таким, какой имеет место до появления пластических деформаций (рис. 92).

Неточность этого допущения состоит в том, что опорные моменты у краев кромок будут в действительности несколько больше, и опора опорных моментов оказывается несколько более подвижной (см. рис. 92). Таким образом, напряжения в пролете будут определены с некоторым преувеличением.

Задачу решим с использованием метода наложения, рассматривая следующие частные случаи:

1. Пластина свободно опята и нагружена только равномерным поперечным давлением.

2. Пластина нагружена равномерным давлением и моментами M_0 , приложенными только по жестко заделанным коротким краям.

3. Пластина нагружена равномерным давлением и моментами M_0 , приложенными только по длинным жестко заделанным краям.

Изгибающий момент в пролетном сечении, параллельном длинной стороне, для первого случая определяется выражением

$$M_1^{(1)} = k_1^{(1)} p b^2.$$

Коэффициент $k_1^{(1)}$ берется из таблицы Приложения VI.

Определим, какое влияние оказывает опорный момент, действующий по коротким краям $M_0^{(2)}$, на изгибающий момент в пролете M_1 , действующий в сечении, параллельном длинной кромке. При этом считаем, что длинные кромки свободно оперты. При таком закреплении кромок пластины опорный момент на коротких краях равен $M_0^{(2)} = k_2^{(2)} p b^2$, а изгибающий момент посередине пластины в сечении, параллельном длинной кромке, будет $M_2 = k_2^{(2)} p b^2$.

Коэффициенты $k_1^{(2)}$ и $k_2^{(2)}$ берутся из таблицы Приложения VIII при $a > b$.

Таким образом, изгибающие моменты, приложенные по коротким сторонам $M_0^{(2)}$, уменьшают изгибающий момент в пролете на величину

$$\Delta M_1 = [k_2^{(2)} - k_1^{(2)}] p b^2.$$

В том случае, если изгибающие моменты на коротких опорных краях будут равны M_0 , изгибающий момент в пролете M_1 уменьшится на величину

$$\Delta M_1^{(2)} = \frac{\Delta M_2}{M_1^{(1)}} M_1 = \frac{k_2^{(2)} - k_1^{(2)}}{k_1^{(1)}} M_0.$$

При наличии M_0 только на длинных сторонах аналогично получим, что изгибающий момент в пролете уменьшится на величину

$$\Delta M_1^{(3)} = \frac{k_1^{(3)} - \bar{k}_1^{(3)}}{k_1^{(1)}} M_0.$$

причем коэффициенты $\bar{k}_1^{(3)}$ и $\bar{k}_2^{(3)}$ берутся из таблицы Приложения VIII при $a < b$.



Рис. 92

Таким образом, минимальный изгибающий момент в пролёте для рассматриваемого искомого сложного случая можно определить так:

$$M_0 = M_2^{(1)} - \beta_1 M_2^{(2)} - \beta_2 M_2^{(3)}$$

или

$$M_0 = k_2^{(2)} \rho b^2 - \beta_2 M_2,$$

где

$$\beta_2 = \frac{k_2^{(1)} - k_2^{(3)}}{k_2^{(2)}} + \frac{\bar{k}_2^{(1)} - \bar{k}_2^{(3)}}{k_2^{(2)}}.$$

Если за M_0 принять его минимальное значение согласно выражению (4. VII), то напряжения в пролёте пластины будут

$$\sigma_2 = \alpha_2 \rho \left(\frac{b}{100\eta} \right)^2 - \beta_2 \sigma_1, \quad (10. VII)$$

где $\alpha_2 = 6 \cdot 10^4 k_2^{(2)}$. Величина напряжений получится с некоторым занижением, так как в действительности опорный момент будет несколько больше M_0 .

Если исходить из максимального значения M_0 согласно ф-ле (5. VII), то напряжения в пролёте будут несколько преувеличены и равны

$$\sigma_2 = \alpha_2 \rho \left(\frac{b}{100\eta} \right)^2 - 1,5 \beta_2 \sigma_1. \quad (11. VII)$$

Аналогичным путём можно получить выражение для напряжений в пролётном сечении, параллельном короткой стороне пластины,

$$\sigma_1 = \alpha_1 \rho \left(\frac{b}{100\eta} \right)^2 - \beta_1 \sigma_2, \quad (12. VII)$$

где

$$\alpha_1 = 6 \cdot 10^4 k_1^{(2)}, \quad \beta_1 = \frac{k_1^{(1)} - k_1^{(3)}}{k_1^{(2)}} + \frac{\bar{k}_1^{(1)} - \bar{k}_1^{(3)}}{k_1^{(2)}}.$$

В практических расчётах обычно принимают $M_0 \approx 1,32 W$ и потому в ф-лах (10. VII) и (12. VII) перед коэффициентами β_1 и β_2 следует поставить множитель 1,3, при этом расчётные формулы будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_2 &= \alpha_2 \rho \left(\frac{b}{100\eta} \right)^2 - 1,3 \beta_2 \sigma_1 \\ \sigma_1 &= \alpha_1 \rho \left(\frac{b}{100\eta} \right)^2 - 1,3 \beta_1 \sigma_2 \end{aligned} \right\} \quad (13. VII)$$

Проверка прочности пластин производится по приведенным напряжениям, т. е. напряжениям, соответствующим действительной деформации,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\text{норм}} &= E \varepsilon = \sigma_1 - \mu \sigma_2 < \sigma_1 \\ \sigma_{\text{норм}} &= E \varepsilon = \sigma_2 - \mu \sigma_1 < \sigma_2 \end{aligned} \right\} \quad (14. VII)$$

Поскольку $a \gg b$, то $\sigma_{\text{норм}} > \sigma_{\text{норм}}$ и потому при проверке прочности достаточно воспользоваться только вторым условием соотношений

(14. VII). Подставляя в него α_2 из-4, из зависимости (13. VII), получим следующее условие прочности для пролетного сечения пластины:

$$\alpha_2 = \alpha p \left(\frac{b}{100} \right)^2 = 1,3\beta \alpha_1 < \sigma_y \quad (15. VII)$$

где $\alpha = \alpha_2 - \beta \alpha_1$; $\beta = \beta_2 - \beta_1 \beta_1$.

Значения коэффициентов α и β при $\mu = 0,3$ даны в табл. 5.*

В частном случае, когда $\frac{a}{b} = \infty$ и относительное удлинение $\alpha_1 = 0$, получаем следующее условие для проверки прочности:

$$\alpha_{\text{доп}} = (1 - \mu^2) \alpha_2 < \sigma_y$$

или, учитывая зависимость (15. VII) и принимая $\mu = 0,3$, имеем

$$\alpha_{\text{доп}} = 6825p \left(\frac{b}{100} \right)^2 = 1,180 \alpha_1 \quad (16. VII)$$

Из формулы (15. VII) получаем следующее выражение для определения наименьшей толщины пластины, у которой на опорных кромках имеют место пластические деформации:

$$t_{\text{min}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha_1 + 1,3\beta \alpha_1}} \cdot \frac{b}{100} \sqrt{\rho} \quad (17. VII)$$

Формулы (15. VII) и (17. VII) используются при расчете прочных межотсечных переборок.

Для того чтобы убедиться, что рассчитанная пластина относится к классу жестких, пользуются соотношением

$$\frac{\eta_{\text{max}}}{t} < 0,3 \quad (18. VII)$$

В противном случае пластина относится к пластинкам конечной жесткости, и изложенной методикой расчета пользоваться уже нельзя.

2. Расчет пластины конечной жесткости

К пластинкам конечной жесткости относятся пластины, у которых помимо изгибных напряжений возникают значительные поперечные напряжения. Поперечные напряжения обычно имеют место при условии, если опорные кромки пластины лишены возможности сближаться.

Прочность листов переборок определяется величиной суммарных напряжений в пролете пластины, а жесткость — величиной наибольшей стрелки прогиба при действии на пластину расчетной нагрузки.

В том случае, когда напряжения на опорных кромках превосходят предел текучести материала, существенно может измениться величина суммарных расчетных напряжений, возникающих в центре пластины. Поэтому определение напряжений на опорных кромках имеет целью проверить, переходит ли там напряжения за предел текучести или нет.

Если напряжения на кромках не превосходят предела текучести, пластину можно рассматривать как жестко закрепленную по кромкам.

* Таблица 5 заимствована из книги В. Ф. Савина „Строительная механика полыхых дощек“, Судгипротранс, 1949.

Если окажется, что предел текучести материала на кромках превзойден, то за действительные напряжения в пролете и за действительную стрелку прогиба пластины принимаются средние арифметические из значений, полученных для свободно открытой и жестко закрепленной пластины.

Определение напряжений в пластинках конечной жесткости, свободно открытых на жесткий контур, одна сторона которого велика по сравнению с другой, производится по формулам (при $E = 2,15 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$; $\nu = 0$; $\mathfrak{M} = 0$):^{*}

$$\sigma = \frac{1000}{t^2 k} \cdot \frac{E_1}{F} \left(\frac{t}{b} \right)^2 \approx \frac{38}{F t^2 k} \left(\frac{100t}{b} \right)^2,$$

$$q = \frac{E_1 t^3}{3} \left(\frac{t}{b} \right)^3 \approx 80 t^3 \left(\frac{100t}{b} \right)^3,$$

$$\sigma_1 = q \div \frac{3}{4} F \left(\frac{b}{t} \right)^3 \chi_0(u),$$

$$\omega_1 = \frac{b}{32} \cdot \frac{F}{E_1} \left(\frac{b}{t} \right)^3 \varphi_0(u) \approx 6,9 t \left(\frac{b}{100t} \right)^3 \varphi_0(u),$$

где b — длина короткой стороны опорного контура;

t — толщина пластины;

F — величина внешней нагрузки;

$E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}$ — приведенный модуль Юнга (при $\nu = 0,30$ $E_1 = 1,10E$);

$k = \frac{F}{F+t}$ — коэффициент распора, характеризующий возможность сближения длинных сторон опорного контура, где F — площадь сечения связей (распоры), препятствующих сближению длинных сторон опорного контура, отнесенная к единице длины опорного контура;

κ — коэффициент, характеризующий степень заделки пластины на опорном контуре ($0 < \kappa < 1$);

q — полное напряжение, возникающее вследствие невозможности свободного сближения длинных сторон опорного контура;

$\mathfrak{M}$ — момент реактивной пары, приходящийся на единицу длины пластины, определяемый по формуле $\mathfrak{M} = \kappa \mathfrak{M}_0$. Здесь $\mathfrak{M}_0$ — момент реактивной пары в случае полного закрепления пластины на опорном контуре;

$\alpha^2 = \frac{30}{E_1 t^3} q$ — аргумент, характеризующий величину изгиба тонкой пластины и служащий мерой ее гибкости;

σ_1 — наибольшее напряжение в середине ненагруженной поверхности пластины;

σ_2 — наибольшее напряжение у опорного контура (при $\kappa = 1,0$);

ω_1 — наибольшая стрелка прогиба.

Порядок расчета заключается в следующем. По заданным размерам пластины b и t , нагрузке F и коэффициенту распора k вычисляются величины $lg v$. Далее, при помощи таблиц вспомогательных функций Приложения IX находят аргумент u и значения функций $\chi_0(u)$ и $\varphi_0(u)$, соответствующие найденной величине $lg v$. Найдя значения величин κ ,

* Формулы заимствованы из Справочника по строительной механике корабля. Т. 2. Судостроение, 1968.

$\chi_0(u)$ и $\tau_0(u)$, по приведенным формулам вычисляют среднее напряжение q , полное напряжение σ_1 и наибольшую стрелку прогиба w_1 .

В том случае, если пластина жестко закреплена на опорном контуре, используются следующие формулы (при $E = 2,15 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$; $\nu = 1$; $2l = 2l_0$):

$$\sigma_1 = \frac{16q}{\sqrt{R}} \cdot \frac{E_1}{P} \left(\frac{r}{b} \right)^2 = \frac{38}{P\sqrt{R}} \left(\frac{16q}{b} \right)^2,$$

$$q = \frac{E_1 b^2}{8} \left(\frac{r}{b} \right)^2 = 80b^2 \left(\frac{16q}{b} \right)^2,$$

$$\sigma_1 = q + \frac{P}{4} \left(\frac{b}{r} \right)^2 \chi_1(u),$$

$$\sigma_2 = q + \frac{P}{2} \left(\frac{b}{r} \right)^2 \chi_2(u),$$

$$w_1 = \frac{1}{32} \cdot \frac{P}{E_1} \left(\frac{b}{r} \right)^4 \tau_0(u) \approx 1,48t \left(\frac{b}{100r} \right)^4 \tau_1(u).$$

Порядок расчета аналогичен предыдущему случаю. Определив при помощи таблицы Приложения IX по аргументу u значения функций $\chi_1(u)$, $\chi_2(u)$ и $\tau_1(u)$, соответствующие найденной величине $16q$, по приведенным формулам вычисляют среднее напряжение q , полное напряжение σ у опорного контура σ_0 , среднее напряжение σ_1 и наибольшую стрелку прогиба w_1 .

§ 63. Исследование устойчивости листов переборок

При проверке устойчивости отсека прочного корпуса предполагают, что ограничивающие его переборки являются жесткими в своей плоскости. Поэтому для суждения о том, являются ли плоские переборки жесткими опорами для обшивки прочного корпуса, необходимо проверить, не потеряют ли листы переборки устойчивости при обжатии прочного корпуса.

Для исследования устойчивости листов переборок необходимо знать условия взаимодействия между цилиндрической оболочкой прочного корпуса и переборкой в месте их соединения. Условия взаимодействия определяются из условия равенства радиального перемещения переборки и перемещения неподкрепленной поперечными ребрами жесткости цилиндрической оболочки. Цилиндрическая оболочка рассматривается неподкрепленной потому, что это значительно упрощает исследование, не внося существенной погрешности в результат.

1. Деформация переборки

При рассмотрении деформации переборки малым числом будем пренебрегать. Тогда переборку можно будет уподобить круговому диску толщиной t , подверженному обжатию приложенными по контуру равномерно распределенными усилиями взаимодействия интенсивности q . Сжимающие напряжения в таком диске одинаковы во всех точках и во всех площадках и равны $\sigma = -\frac{q}{t}$. Поэтому относительное сжатие в направлении радиуса переборки будет

$$\epsilon = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \sigma_2) = -\frac{q}{Et} (1 - \nu) \quad (19. VII)$$

и соответствующее уменьшение радиуса переборки равно

$$\Delta_a = \pi r = -\frac{\pi r^2}{E t} (1 - \mu). \quad (20. VII)$$

2. Деформация цилиндрической оболочки

Перемещение круговой цилиндрической оболочки под действием сил взаимодействия с поперечной переборкой q определяется выражением

$$\Delta_a = \frac{q r^2}{2 E t} \cdot \frac{\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}}{\sqrt{r k}} f(\alpha), \quad (21. VII)$$

где

$$\alpha = \frac{l}{\sqrt{r k}} \cdot \frac{\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}}{2}.$$

При $\mu = 0,3$

$$\Delta_a = 0,6425 \frac{q}{2 E t} \cdot \frac{r^2}{\sqrt{r k}} f(\alpha). \quad (22. VII)$$

где

$$\alpha = 0,6425 \frac{l}{\sqrt{r k}}.$$

Значения функции $f(\alpha)$ приведены в табл. 6.*

Таблица 6

α	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,5	2,0	2,5	2,7	3,0	4,0
$f(\alpha)$	20,0	10,0	6,66	5,00	4,00	3,34	2,86	2,51	2,24	2,02	1,466	1,371	1,122	1,094	1,049	1,020

Выражение (21. VII) получено путем решения задачи об изгибе круговой цилиндрической оболочки длиной l , нагруженной по поперечу z средним сечением нагрузкой интенсивности q (рис. 93).

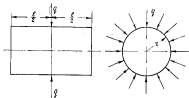


Рис. 93

Эта задача в свою очередь сводится к задаче об изгибе сосредоточенной силой q балки, лежащей на сплошном упругом основании.

* Таблица заимствована из книги В. Ф. Сосны „Строительная механика подводной лодки“. Судостроение, 1940.

Постоянные интегрирования, входящие в выражение общего интеграла, определялись из условия

$$\left. \begin{aligned} w' &= 0 \\ D\Delta w &= q \end{aligned} \right\} \text{ при } x = 0.$$

Так как влияние переборки на перемещения оболочки затухает быстро, практически на протяжении одной шпации, то для определения Δ_0 можно пользоваться аналогичным решением для бесконечно длинной оболочки, для которой $f(x) = 1$.

Радиальное перемещение круговой цилиндрической оболочки под действием равномерного нормального давления p , как было уже получено ранее (см. Ф-лу (147.1)), определяется выражением

$$\Delta = \frac{pr^2}{Eh} \left(1 - \frac{\nu}{2} \right). \quad (23. \text{ VII})$$

3. Определение усилий взаимодействия

Уравнение для определения усилий взаимодействия можно записать исходя из равенства радиальных перемещений поперечной переборки и цилиндрической оболочки в месте их соединения

$$\Delta_0 = \Delta - \Delta_1 \quad (24. \text{ VII})$$

или, в размерном виде,

$$\frac{pr^2}{Eh} \left(1 - \frac{\nu}{2} \right) = \frac{qr}{Et} (1 - \nu) + \frac{qr^2}{2Et} \cdot \frac{\sqrt{2(1-\nu^2)}}{\sqrt{r\lambda}} f(x),$$

откуда находим

$$q = \frac{1 - \frac{\nu}{2}}{\frac{h}{t} (1 - \nu) + \frac{r}{\sqrt{r\lambda}} \cdot \frac{\sqrt{2(1-\nu^2)}}{2} f(x)} pr. \quad (25. \text{ VII})$$

При $\nu = 0,3$

$$q = \frac{0,85pr}{0,7\frac{h}{t} + 0,6425\sqrt{\frac{r}{\lambda}} f(x)}. \quad (26. \text{ VII})$$

В практических расчетах можно принимать $f(x) = 1$, в тогда Ф-ла (26. VII) примет вид

$$q = \frac{0,85pr}{0,7\frac{h}{t} + 0,6425\sqrt{\frac{r}{\lambda}}}. \quad (27. \text{ VII})$$

4. Определение критических напряжений пластин

Теперь можем перейти к определению критических напряжений пластин переборки. Будем рассматривать пластину размерами $a \times b$, как это обычно принимается, свободно опертой на контур и нагруженной по длинным краям равномерной нагрузкой интенсивности q (рис. 94). При этом имеет место погрешность, направленная в безопасную сторону.

Если перпендикулярно сторонам a действуют сжимающие напряжения $\sigma_1 = \frac{P}{2}$, то сжимающие напряжения σ_1 , перпендикулярные коротким сторонам b и соответствующие моменту потери устойчивости, определяются с помощью одной из трех формул, рассматриваемых ниже.

Если задано сжимающее или растягивающее напряжение σ_1 , то можно определять величину и знак напряжения σ_2 , при котором нарушается устойчивость пластин.

Введем обозначения:

a — длина сторон контура пластины, нагруженных заданной нагрузкой;

b — длина сторон контура пластины, нагружку на которые требуется определить.

Если заданное напряжение σ_1 удовлетворяет неравенству

$$\sigma_1 < -\sigma_2^0 \left(5 + 2 \frac{b^2}{a^2} \right),$$

где

$$\sigma_2^0 = \frac{E\pi^2}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{\pi}{a^2} \approx 2 \cdot 10^9 \frac{\pi}{a^2},$$

то устойчивость пластины нарушается при напряжении σ_2 , определенном выражением

$$\sigma_2 = -\frac{\pi^2 a^2}{12} \sigma_1 - \sigma_2^0 \left(\frac{b}{a} + a^2 \frac{a}{b} \right)^2.$$

Входящее в это выражение целое число n должно удовлетворять условию

$$-(\sigma_2^0 (2n^2 + 2n + 1 + 2 \frac{b^2}{a^2})) < \sigma_1 < -\sigma_2^0 (2n^2 - 2n + 1 + 2 \frac{b^2}{a^2}).$$

Если заданное напряжение σ_1 удовлетворяет неравенству

$$\sigma_1 > \sigma_2^0 \left(4 \frac{b^2}{a^2} - 1 \right),$$

то устойчивость пластины нарушается при напряжении σ_2 , определенном выражением

$$\sigma_2 = -\frac{a^2}{\pi^2 b^2} \sigma_1 - \sigma_2^0 \left(n \frac{b}{a} + \frac{a}{n b} \right)^2.$$

Входящее в это выражение целое число n должно удовлетворять условию

$$\sigma_2^0 \left[n^2 (n+1)^2 \frac{b^2}{a^2} - 1 \right] > \sigma_1 > \sigma_2^0 \left[n^2 (n-1)^2 \frac{b^2}{a^2} + 1 \right].$$

Если заданное напряжение σ_1 не удовлетворяет ни одному из приведенных выше неравенств, то устойчивость пластины нарушается при напряжении σ_2 , определенном выражением

$$\sigma_2 = -\frac{a^2}{12} \sigma_1 - \sigma_2^0 \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right)^2.$$

Рис. 34

Наличие рассмотренных выше трех формул объясняется тем, что существует ряд совокупных значений σ_1 и σ_2 , при которых может быть нарушена устойчивость пластины, в зависимости от размеров пластины и числа получающихся при потере ею устойчивости полуволн n .

После того как критическое напряжение σ_0 , при котором пластина терпит устойчивость, определено, приступаем к проверке ее устойчивости с учетом совместного сжатия со стойками переборки.

Приближенные значения средних напряжений сжатия в листе переборки со стойками, имеющими площадь поперечного сечения F , будут

$$\sigma_2 = \frac{q\delta}{H + F} = \frac{q}{1 + \frac{F}{H}}. \quad (28. VII)$$

Из сравнения напряжений σ_1 и σ_2 судят об устойчивости рассчитываемой пластины, а следовательно, и переборки.

Критерием устойчивости листов переборки служит неравенство

$$\sigma_1 < \sigma_2. \quad (29. VII)$$

Если это неравенство не выполняется, то толщина листов δ должна определяться из условия обеспечения устойчивости пластины переборки при расчетном давлении p .

Заметим, что к моменту проектирования прочного корпуса профиль стоек переборок еще не определен и поэтому площадь их сечения F неизвестна. В первом приближении можно рекомендовать принимать F по прототипу для близкой однотипной конструкции. В последующем, когда F точно будет определена, производят уточнение расчета.

§ 64. Расчет прочности балок набора переборок

Для расчета прочности балок набора переборок необходимо знать приходящую на них нагрузку. Распределение нагрузки на балки набора производится обычным порядком, как это принято при расчете перекрытий надводных кораблей. Если нагрузка воспринимается одновременно и вертикальными стойками (балками главного направления) и горизонтальными шельфами (поперечные связи), то распределение нагрузки между балками можно принять в соответствии с рис. 96.

Если вся нагрузка непосредственно приходится на стойки (балки главного направления), а последние в свою очередь передают давление в виде сжатостягивающих сил на поперечные связи, то определение погонной нагрузки для стоек производится по формуле

$$q = p\delta, \quad (30. VII)$$

где p — давление на переборку в кг/см^2 ;

δ — ширина пластины (расстояние между стойками) в см.

При определении погонной нагрузки на крайнюю стойку учитывается, что половина давления воспринимается контуром переборки, т. е. прочным корпусом. После распределения нагрузки, приходящейся на переборку, между балками набора производится определение усилий взаимодействия между ними, что дает возможность перейти к расчету стоек и шельфа в отдельности.

Вычисление необходимых для расчета изгибающих моментов и передаваемых сил производится обычным порядком по общим правилам строительной механики.

Несколько проще получается расчет, когда жесткость перекрестной балки оказывается весьма большой по сравнению с жесткостью стоек. В этом случае стойки могут рассматриваться как балки, имеющие жесткие опоры.

Наличие податливости опор может изменять величину реакций взаимодействия между балками набора и существенно повлиять на расчетные значения усилий. В этом случае можно рекомендовать следующий метод последовательных приближений для расчета балок набора.

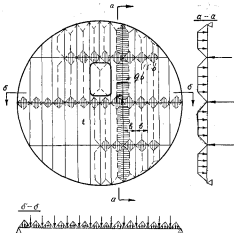


Рис. 56

Определяют реакции взаимодействия между стойками и шельфами, принимая последние за жесткие опоры. При этом предполагается производится определение расчетных изгибающих моментов M_1 и перерезывающих сил N_1 , по которым подбираются профили балок. Имея профили балок набора в первом приближении, можно уточнить усилия взаимодействия между ними исходя из расчета прогибов в точках их пересечения.

Определив уточненные значения реакций, находят новые значения расчетных M_2 и N_2 , которые могут отличаться от ранее определен-

ных до 30% в зависимости от конструкции переборки. После этого производится подбор профиля балок набора во втором приближении.

Достаточно выполнение одного такого расчета для определенного типа конструкции, чтобы оценить влияние податливости, которое в отдельных случаях (например, мощный шпальф) может и не учитываться.

§ 45. Подбор профиля балок набора*

Подбор элементов профиля балок набора производится после того, как окончательно установлена толщина листов переборки и известны расчетные значения изгибающего момента M и перерезывающей силы N . В подавляющем числе случаев балки набора имеют тавровый профиль, который вместе с присоединенным пояском листа переборок образует уже двутавровое сечение. Профиль выбирается таким образом, чтобы нормальные и касательные напряжения не превосходили допустимых для них норм при действии расчетной нагрузки на переборку.

Следует заметить, что на элементы профиля (стенку и пояска) влияют характер воспринимаемых ими усилий. Если определяющей оказывается перерезывающая сила, то возрастает площадь стенки при умеренной ее высоте. Если определяющим является изгибающий момент, то возрастает высота стенки и площади свободных поясков.

После того как будут подготовлены необходимые зависимости, рассмотрим каждый из упоминавшихся случаев загрузки балок в отдельности.

1. Определение минимального момента сопротивления

Для решения задачи о подборе профиля выведем формулу для вычисления минимального момента сопротивления двутаврового профиля. Одновременно представится возможным исследовать влияние отдельных частей профиля на величину его момента сопротивления.

Введем обозначения (рис. 96):

- S — площадь сечения меньшего пояска;
- S' — площадь сечения большего пояска;
- ω — площадь поперечного сечения стенки.

Пренебрегая толщиной поясков по сравнению с высотой балки A , измеряемой между центрами тяжести поясков, и принимая за ось сравнения ось меньшего пояска, найдем

а) площадь сечения профиля

$$A = S' + S + \omega,$$

б) статический момент этой площади относительно оси сравнения

$$B = AS' + \frac{1}{2} A\omega,$$

в) расстояние нейтральной оси площади сечения от оси сравнения

$$A_1 = \frac{B}{A} = A \frac{S' + 0,5\omega}{S' + S + \omega}.$$



Рис. 96

* Определение минимального момента сопротивления сечению и подбор вспомогательного сечения составного профиля приведены по П. Ф. Писовскому (П. Ф. Писовский и др. Строительная механика корабля. Ч. 1. Т. II, „Морской транспорт“, 1945).

г) момент инерции площади сечения относительно нейтральной оси

$$I = S'A^2 + a \left(\frac{h}{3} \right)^2 + \frac{a^3}{12} = \frac{a^3}{A} = S'A^2 + \frac{a^3}{3} = \frac{A^3 (S' + 0,25a)^2}{S' + S + a} =$$

$$= A^2 \frac{\left(S' + \frac{a}{3} \right) (S' + S + a) - \left(S' + \frac{a}{3} \right)^2}{S' + S + a} = A^2 \frac{S'S + \frac{a}{3} \left(S' + S + \frac{a}{4} \right)}{S' + S + a}, \quad (31. VII)$$

д) наименьший момент сопротивления сечения

$$W = \frac{I}{h_1} = A \frac{S'S + \frac{a}{3} \left(S' + S + \frac{a}{4} \right)}{S' + \frac{a}{3}} = A \frac{3S'S + aS - aS + \frac{a}{3} \left(S' + S + \frac{a}{4} \right)}{2S' + a} =$$

$$= A \left(S + \frac{a}{6} - \frac{4S' - 2S + a}{2S' + a} \right), \quad (32. VII)$$

Формулу (32. VII), предложенную Н. Г. Вульфовым, удобно записать в виде

$$W = A \left(S + \frac{a}{k} \right), \quad (33. VII)$$

где

$$k = 6 \frac{3S' + a}{4S' - 2S + a}. \quad (34. VII)$$

Из формулы (34. VII) видно, что k изменяется в пределах от 3 до 6. Точное значение этого коэффициента в каждом частном случае может быть определено с помощью таблицы Приложения X. Из ф-лы (33. VII) видно, что наибольшее влияние на величину W оказывает площадь меньшего пояса S .

2. Приближенное выражение для приведенной площади стенки профиля

Общим выражением для определения касательных напряжений в стенке профиля является известная формула

$$\tau = \frac{NS}{I}, \quad (35. VII)$$

где l — толщина стенки профиля;

N — величина перерезывающей силы в данном сечении;

I — момент инерции сечения относительно поперечной оси;

S — статический момент относительно нейтральной оси части площади сечения, отсекаемого горизонтальной прямой, проходящей через точку, для которой определяется касательное напряжение.

Обозначим

$$\alpha = \frac{N}{S}, \quad (36. VII)$$

Тогда ф-ла (35. VII) можно будет придать вид

$$\tau = \frac{N'}{\alpha},$$

Таким образом, $\bar{\omega}$ является той приведенной площадью сечения стенки, по которой равномерно распределяется перерезывающая сила N , вызывая в ней касательные напряжения, равные τ . Из ф-лы (35. VII) видно, что касательные напряжения τ для различных точек сечения (по высоте профиля) имеют различные значения, так как толщина стенки t и момент инерции I для данного профиля — величинами постоянными, а статический момент S — величина переменная. Значение приведенной площади стенки $\bar{\omega}$ при S_0 , вычисленном относительно нейтральной оси профиля, оказывается связанным с истинной площадью ω зависимостью $\bar{\omega} = (0,80—0,85) \omega$, справедливой при $\frac{h}{t} \approx 3$.

Таким образом, окончательно будем иметь

$$\tau = \frac{N}{A_1 \omega}, \quad (37. VII)$$

где $A_1 = 0,80—0,85$.

Учитывая некоторые запасы в расчетном давлении, этот коэффициент для расчета в первом приближении иногда полагают равным $A_1 \approx 1,0$.

3. Выбор минимального сечения стенки составного профиля исходя из сопротивления ее перерезывающей силе

При рассмотрении этого случая подлежат определению высота h и толщина t стенки. Как высота стенки h , так и ее толщина t являются для данной площади $\omega = ht$ величинами, связанными между собой. Поэтому предел увеличения h лимитируется в какой-то мере уменьшением толщины t . Толщина стенки выбирается, с одной стороны, из соображений жонки, т. е. толщина стенки не должна быть меньше некоторого предела t_0 , с другой стороны, из соображений устойчивости стенки, т. е. отношение $m = \frac{h}{t}$ не должно превосходить некоторой определенной величины.

Величина m , вполне гарантирующая устойчивость стенки профиля, определяется в зависимости от предела текучести материала и для наиболее распространенных марок сталей равна

$$\left. \begin{aligned} m &= 2200 \text{ кг/см}^2 & m < 80 \\ m &= 3000 \text{ кг/см}^2 & m < 70 \\ m &= 4000 \text{ кг/см}^2 & m < 60 \end{aligned} \right\} \quad (38. VII)$$

Зная отношение m и площадь сечения стенки профиля, можно определить его высоту. Действительно, $t = \frac{\omega}{h}$ и одновременно $t = \frac{h}{m}$.

Таким образом, $\frac{\omega}{h} = \frac{h}{m}$, откуда

$$h = \sqrt{\omega m}, \quad (39. VII)$$

Подставив в выражение (39. VII) минимально необходимое значение площади стенки, равное

$$\omega \approx \frac{\bar{\omega}}{0,85} = \frac{N}{0,85 \tau_{\text{кат}}}, \quad (40. VII)$$

получим

$$h = h_{\min} = \sqrt[3]{\frac{N_m}{0,88 \tau_{\min}}}.$$

Соответствующая этой высоте толщина стенки профиля будет

$$t = \frac{h_{\min}}{m} = \sqrt[3]{\frac{N}{0,88 \tau_{\min}}} \cdot \frac{1}{m}. \quad (41. VII)$$

Если полученная таким образом толщина стенки t будет больше t_0 , назначенной из соображений износа, то на найденных значениях $h_{\min}$ и t можно остановиться.

Если же соотношение $t > t_0$ не удовлетворяется, то следует принять $t = t_0$ и максимальную высоту стенки определять по формуле

$$h_{\max} = \frac{\sigma}{t_0} = \frac{N}{0,88 \tau_{\min} t_0}. \quad (42. VII)$$

4. Выбор поперечного сечения стенок составного профиля исходя из сопротивления им изгибающего момента

До сих пор мы рассматривали расчет двутаврового профиля, считая, что основное значение имеет перегибающая сила N . Однако на практике часто бывает, что доминирующее значение имеет не N , а изгибающий момент M . Необходимый момент сопротивления определится из условия

$$W = \frac{M_{\max}}{\sigma_{\max}}. \quad (43. VII)$$

Далее определим оптимальную высоту стенки профиля, обеспечивающую наименьший вес профиля при заданном W .

Площадь поперечного сечения собственно профиля определяется формулой

$$F = S + \alpha, \quad (44. VII)$$

Момент сопротивления сечения профиля с присоединенным пояском учетом переборки, согласно выражению (33. VII), имеет вид

$$W = h \left(S + \frac{\alpha}{h} \right),$$

откуда

$$S = \frac{W}{h} - \frac{\alpha}{h}. \quad (45. VII)$$

Устойчивость стенки обеспечивается, если соблюдено условие $\frac{h}{t} = m$ и, следовательно,

$$\alpha = h t = \frac{h^2}{m}. \quad (46. VII)$$

Подставляя в ф-лу (44. VII) выражение (46. VII), получим

$$F = \frac{W}{h} + \frac{h^2}{m} \cdot \frac{h-1}{h}.$$

Площадь сечения профиля, определяемая этим равенством, обращается в минимум при k , удовлетворяющем уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial k} = -\frac{W}{k^2} + \frac{2(k-1)}{k} \cdot \frac{A}{k} = 0,$$

откуда

$$k_{\text{opt}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \frac{Wm}{A} \frac{k}{k-1}}. \quad (47. \text{ VII})$$

Толщина стенки, соответствующая этой высоте, равна

$$t = \frac{A_{\text{opt}}}{m} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \frac{W}{m^2} \cdot \frac{k}{k-1}}. \quad (48. \text{ VII})$$

В том случае, когда $t < t_0$, оптимальную высоту профиля определяем из условия изгиба его стенки. Тогда равенство (43. VII) принимает вид

$$S = \frac{W}{k} - \frac{a}{k} = \frac{W}{k} - \frac{M_0}{k},$$

следовательно,

$$F = a + S = M_0 + \frac{W}{k} - \frac{M_0}{k} = \frac{W}{k} + \frac{k-1}{k} M_0.$$

Взяв производную от функции F по k и приравняв ее нулю, получаем

$$\frac{\partial F}{\partial k} = -\frac{W}{k^2} + \frac{k-1}{k} t_0 = 0,$$

откуда

$$k_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{k}{k-1} \cdot \frac{W}{t_0}}. \quad (49. \text{ VII})$$

Подставляя в ф-лу (49. VII) предельные значения k , равные 6 и 3, получим

$$\left. \begin{aligned} k_{\text{opt}} &= 1,10 \sqrt{\frac{W}{t_0}} \\ k_{\text{opt}} &= 1,23 \sqrt{\frac{W}{t_0}} \end{aligned} \right\} \quad (50. \text{ VII})$$

или, при среднем значении коэффициента,

$$k_{\text{opt}} = 1,16 \sqrt{\frac{W}{t_0}}. \quad (51. \text{ VII})$$

Соответственно подставляя значения $k=6$ и $k=3$ в ф-лу (47. VII), получим

$$\left. \begin{aligned} k_{\text{opt}} &= 0,84 \sqrt[3]{Wm} \\ k_{\text{opt}} &= 0,91 \sqrt[3]{Wm} \end{aligned} \right\} \quad (52. \text{ VII})$$

или, приняв среднее значение коэффициента перед радикалом, имеем

$$k_{\text{ср}} = 0,681^{\frac{1}{3}} \sqrt{m}. \quad (53. \text{ VII})$$

При выполнении практических расчетов можно пользоваться ф-лой (51. VII) в том случае, если толщина стенки определена из условия изгиба, а ф-лой (53. VII) — в остальных случаях.

Полученная в результате выполнения этого расчета площадь стенки должна быть проверена на восприятие передатывающей силы N .

Теперь все необходимые зависимости для подбора элементов двутаврового профиля подготовлены. Практический подбор элементов профиля будет приведен в следующем параграфе.

§ 66. Практическая схема расчета плоской переборки

Требуется произвести расчет плоской поперечной переборки, укрепленной стойками и шельфом. Расстояние между стойками и положение шельфа известны.

Порядок выполнения расчета может быть следующим:

1. Производится определение толщины пластины по ф-лам (3. VII) или (17. VII) в зависимости от величины напряжений, возникающих в опорных сечениях пластины. После этого по ф-ле (1. VII) вычисляется прогиб w_{max} .

2. Определяется, к какому классу относится рассматриваемая пластина:

если $\frac{w_{\text{max}}}{f} \leq 0,30$, то к жестким пластинам;

если $\frac{w_{\text{max}}}{f} > 0,30$, то к пластинам конечной жесткости.

В зависимости от класса пластины и продолжается дальнейший расчет. При этом обращается внимание на напряжения, возникающие на опорных кромках. Если они превосходят предел текучести материала, то за действительные напряжения и прогибы принимается среднее арифметическое для жестко заданной и свободно опертой пластины.

Расчет считается окончанным, если наибольшее общее напряжение в центре пластины не превосходит $\sigma_{\text{доп}}$.

3. Производится исследование устойчивости листов переборки в таком порядке:

а) по формуле (26. VII) определяются усилия взаимодействия q между переборкой и прочим корпусом, а затем напряжение $\sigma_1 = \frac{q}{f}$. Критическое напряжение σ_k определяем, используя неравенства § 63;

б) определяются средние напряжения сжатия в листе переборки со стойкой σ_2 по ф-ле (38. VII), причем площадь стоек F в первом приближении принимается по прототипу;

в) производится сравнение напряжений σ_1 и σ_2 . Если $\sigma_1 \leq \sigma_2$, то устойчивость листов переборки считается обеспеченной.

4. В соответствии с методикой расчета балок, изложенной в § 64, производим расчет балок набора. Предварительно между балками распределяется нагрузка, приходящаяся на всю переборку, после чего определяются усилия взаимодействия между балками, считая, что они опираются на жесткие опоры. Находим расчетные значения M_{max} и N_{max} в результате построения эпюр для каждой балки.

5. В соответствии с § 65 производим подбор профиля двутавровых балок, используя полученные значения N_{max} и M_{max} . Считаем, что опре-

действующим является изгибающий момент. В этом случае порядок расчета такой:

а) из формулы (40. VII) находим необходимую площадь стенки ω ;

б) оптимальную высоту стенки балки k_{opt} определяем по ф-ле (52. VII), если же толщина стенки t задана из условия износа, то по ф-ле (51. VII). В этих формулах W находится по выражению (43. VII), а m выбирается в зависимости от α , материала по соотношениям (38. VII).

Таким образом, находим $\alpha_1 = k_{opt}t$. При этом α_1 должно удовлетворять условию $\alpha_2 > \alpha_1$;

в) ширина большого пояска S' принимается равной $0,7k$, но не более $1/6 a$. Площадь меньшего пояска определяется по ф-ле (54. VII)

$$S_1 = \frac{W}{k} - \frac{\omega}{kS} \quad (54. VII)$$

Определив S_1 в первом приближении, уточним с помощью таблиц Приложения X значение k в зависимости от отношений $\frac{S'}{S}$ и $\frac{\omega}{S}$. После этого находим второе приближение $S_2 = \frac{W}{k} - \frac{\omega}{k}$, на котором обычно и заканчивается подбор площади меньшего пояска.

Таким образом, элементы профиля вылены:

г) определяется момент сопротивления полученного профиля по ф-ле (32. VII), а также его момент инерции, вычисленный по формуле

$$I = Wk_1 = k^3 \left(S + \frac{\omega}{k} \right) \frac{S' + 0,5\omega}{S' + S + \omega};$$

д) в том случае, когда определяющим является не изгибающий момент, а перерезывающая сила N , минимальная высота стенки вычисляется по ф-ле (40. VII)

$$k = k_{min} = \sqrt{m\omega} = \sqrt{\frac{N\omega}{0,85\sigma_{max}}},$$

а толщина

$$t = \frac{k_{min}}{m}.$$

В последующем расчет ведется в соответствии с п. „а“ и „г“.

6. После того как элементы профиля балок в первом приближении определены, можно уточнить условия взаимодействия между ними с учетом податливости опор, поскольку теперь имеется профиль балок в первом приближении. До этого такой расчет выполнить было бы нельзя. Для раскрытия статической неопределимости взаимодействия между балками составляют уравнения исходя из равенства просадок балок в узлах. После этого определяются уточненные значения расчетных усилий M_{max} и N_{max} . По новым значениям M_{max} и N_{max} находятся элементы балок во втором приближении в соответствии с п. 5.

7. После уточнения элементов балок набора производим повторный расчет устойчивости пластин в соответствии с п. 3.

8. После окончательного выбора элементов балок набора производим поверочный расчет прочности по формулам

$$\sigma = \frac{M_{max}}{W} \leq \sigma_{\sigma},$$

$$\tau = \frac{N}{S\sigma_{\tau}} \leq \tau_{\sigma}.$$

9. Определяем напряжения в сварных швах, соединяющих полки со стенкой, по формуле

$$\tau = \frac{N}{d_{\text{сш}}} \leq \tau_{\text{сш}},$$

где d — диаметр шва.

10. Определяем вес переборки, складывающийся из веса листов и набора.

Следует заметить, что доминирующее влияние на вес переборки оказывают листы переборки, а не ее набор. Поэтому необходимо уделить внимание выбору оптимального соотношения размеров пластин. Может оказаться, что увеличение числа стоек даст возможность снизить толщину листов переборки и получить в результате выигрыш в весе.

ГЛАВА VIII

РАСЧЕТ СОСТАВНЫХ ШПАНГОУТОВ, СОСТОЯЩИХ ИЗ КРУГОВЫХ СТЕРЖНЕЙ

§ 67. Основные понятия, определения и допущения

При расчете конструкций корпуса подводных лодок возникает необходимость расчета составных шпангоутов, под которыми понимают шпангоуты, составленные из круговых стержней различного радиуса кривизны. С точки зрения строительной механики составные шпангоуты представляют собою сложные криволинейные рамы.

Под сложной криволинейной рамой понимается рама, в одном из узлов которой сходится более чем два стержня и при этом хотя бы один из них должен быть криволинейным. Такие сложные криволинейные рамы можно встретить в районе средней шестерни, в районе бортовых отсеков полуторакорпусных и двуторпусных подводных лодок.

Прежде чем перейти непосредственно к расчету составных шпангоутов, получим необходимые расчетные зависимости для кругового стержня, жестко заделанного на одном конце и различным образом нагруженного на другом.

При выводе этих зависимостей используются следующие допущения, которые положены в основу расчета составных шпангоутов.

1. Каждый шпангоутом воспринимается гидростатическое давление, приходящееся на одну шпанцу.

2. Деформациями сжатия (растяжения) и скрутки можно пренебречь по сравнению с деформацией изгиба. Это же относится и к потенциальной энергии соответствующей деформации.

3. Круговые стержни, входящие в составной шпангоут, считаются достаточно жесткими. Это дает основание при определении изгибающего момента в текущем сечении кругового стержня исходить из его первоначальной формы.

4. Кильцы и брашты, соединяющие между собой круговые стержни составного шпангоута, считаются бесконечно жесткими по сравнению с жесткостью круговых стержней.

5. При расчете конструкций составных шпангоутов будем учитывать присоединенный весок обшивки шириною, равной шпанце, для прочного корпуса и шириною $1,55 \sqrt{r\delta}$ для легкого корпуса.

6. Круговые стержни составного шпангоута считаем стержнями малой кривизны, к исследованию напряженного состояния которых применимы зависимости, полученные для прямых стержней.

Под стержнем малой кривизны понимается такой круговой стержень, для которого имеет место соотношение:

$$r' > 6\lambda, \quad (1. VIII)$$

где r' — радиус кривизны нейтральной оси стержня;

λ — его высота.

При выполнении соотношения (1. VIII) расчет круговых стержней можно производить по формулам для прямых стержней.

Для упрощения расчета составных шпангоутов используются введенные В. Ф. Сегаль леммы об усадках, вызываемых в круговых стержнях равномерно распределенным по их периметру гидростатическим давлением.

Использование лемм и линейность рассматриваемых ниже задач даст возможность применять метод заложения к расчету составных шпангоутов и, таким образом, свести исследование сложной задачи к исследованию ряда более простых задач.

В настоящей главе будет изложена методика расчета и приведены основные зависимости для определения напряжений, возникающих в стержнях составного шпангоута, а также те требования, которые должны быть соблюдены конструктором при правильном конструировании составных шпангоутов.

Упомянутые зависимости и выводы будут получены на примере расчета составного шпангоута в районе средней цистерны однокорпусной подводной лодки.

В заключение главы будут рассмотрены различные варианты составных шпангоутов, выведены формулы для исследования устойчивости кругового шпангоута и его части и приведен пример конструирования и определения напряжений в составном шпангоуте.

§ 68. Некоторые случаи загрузки круговых стержней *

При расчете составного шпангоута прочного корпуса требуется иметь выражения для определения угла поворота и линейного перемещения свободного конца различным образом загруженного кругового стержня поперечного сечения.

Подготовим эти зависимости. Будем считать нагрузку положительной, если она увеличивает кривизну стержня. Определим величину перемещений свободного конца стержня, считая, что потенциальная энергия растяжения и сдвига стержня пренебрежимо мала по сравнению с потенциальной энергией изгиба стержня, которая определится выражением

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2(x)}{EI} dx, \quad (2. VIII)$$

где l — длина криволинейной оси стержня;

x — координата, отсчитываемая вдоль криволинейной оси стержня;

$M(x)$ — изгибающий момент в сечении, определенном координатой x ;

EI — жесткость стержня на изгиб.

* В параграфы 68 и 69 использованы зависимости из статьи В. Ф. Сегаль „К расчету рам с круговыми стержнями“, Сб. НИВК, № 2, 1934 (то же см. в книге П. Ф. Папковича „Средоточные напряжения морских“, Ч. 1. Т. II. „Морской транспорт“, 1947).

Обозначим:

M — сосредоточенный момент;

X и Y — силы, действующие в направленных, параллельных нормали и касательной к оси стержня у заданного конца;

x и y — перемещения свободного конца по направлениям сил X и Y .

Для определения перемещений свободного конца стержня воспользуемся теоремой Кастильяно: «Производная от потенциальной энергии системы по обобщенной силе равняется обобщенному перемещению по направлению действия обобщенной силы».

Первый случай загрузки кругового стержня (рис. 97). Для вычисления потенциальной энергии изгиба стержня по выражению (2. VIII) найдем значение изгибающего момента в текущем сечении $M-\beta$, определенном значением центрального угла β .

Взяв момент всех сил, расположенных справа относительно рассматриваемого сечения, приходим к следующему выражению для изгибающего момента:

$$M(\beta) = M + Xr(\sin \alpha - \sin \beta) + Yr(\cos \beta - \cos \alpha). \quad (3. VIII)$$

Используя теорему Кастильяно и учитывая выражения (2. VIII) и (3. VIII), можно определить угол поворота свободного конца кругового стержня по выражению

$$\varphi = \frac{\partial V}{\partial M} = \frac{r}{EI} \int_0^{\alpha} M(\beta) \frac{\partial M(\beta)}{\partial M} d\beta.$$

Так как $\frac{\partial M(\beta)}{\partial M} = 1$, то

$$\varphi = \frac{r}{EI} \int_0^{\alpha} M(\beta) d\beta$$

или, подставив сюда выражение для $M(\beta)$ согласно зависимости (3. VIII), будем иметь

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{r}{EI} \int_0^{\alpha} [M + Xr(\sin \alpha - \sin \beta) + Yr(\cos \beta - \cos \alpha)] d\beta = \\ &= \frac{Mr}{EI} \alpha + \frac{Xr^2}{EI} (\alpha \sin \alpha + \cos \alpha - 1) + \frac{Yr^2}{EI} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha). \end{aligned}$$

Вводя обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \theta_1(\alpha) &= \alpha \\ \theta_2(\alpha) &= \sin \alpha - \alpha \cos \alpha \\ \theta_3(\alpha) &= \alpha \sin \alpha - 1 + \cos \alpha \end{aligned} \right\}. \quad (4. VIII)$$



Рис. 97

придем к следующему окончательному выражению для угла поворота свободного конца стержня:

$$\varphi = \frac{Mr^3}{EI} \vartheta_1(\alpha) + \frac{Nr^3}{EI} \vartheta_2(\alpha) + \frac{Yr^3}{EI} \vartheta_3(\alpha). \quad (3. \text{ VIII})$$

Определим перемещение стержня по направлению действия силы Y

$$v = \frac{\partial V}{\partial Y} = \frac{r}{EI} \int_0^{\beta} M(\beta) \frac{\partial M(\beta)}{\partial Y} d\beta \quad (6. \text{ VIII})$$

или, подставляя в зависимость (6. VIII) выражение (3. VIII) и учитывая

$$\frac{\partial M(\beta)}{\partial Y} = r(\cos \beta - \cos \alpha),$$

получим

$$\begin{aligned} v &= \frac{r^2}{EI} \int_0^{\beta} [M + Nr(\sin \alpha - \sin \beta) + Yr(\cos \beta - \cos \alpha)] (\cos \beta - \cos \alpha) d\beta = \\ &= \frac{Mr^3}{EI} \int_0^{\beta} (\cos \beta - \cos \alpha) d\beta + \frac{Nr^3}{EI} \int_0^{\beta} (\sin \alpha - \sin \beta) (\cos \beta - \cos \alpha) d\beta + \\ &\quad + \frac{Yr^3}{EI} \int_0^{\beta} (\cos \beta - \cos \alpha)^2 d\beta = \frac{Mr^3}{EI} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) + \\ &\quad + \frac{Nr^3}{EI} \left(\cos \alpha - \frac{3}{4} \cos 2\alpha - \frac{\alpha}{2} \sin 2\alpha - \frac{1}{4} \right) + \frac{Yr^3}{EI} \left(\alpha + \frac{\alpha}{2} \cos 2\alpha - \frac{3}{4} \sin 2\alpha \right) \end{aligned}$$

или

$$v = \frac{Mr^3}{EI} \vartheta_1(\alpha) + \frac{Nr^3}{EI} \vartheta_2(\alpha) + \frac{Yr^3}{EI} \vartheta_3(\alpha), \quad (7. \text{ VIII})$$

где

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1(\alpha) &= \alpha - \frac{\alpha}{2} \cos 2\alpha - \frac{3}{4} \sin 2\alpha \\ \vartheta_2(\alpha) &= \cos \alpha - \frac{3}{4} \cos 2\alpha - \frac{\alpha}{2} \sin 2\alpha - \frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \quad (8. \text{ VIII})$$

Определим перемещение конца стержня по направлению действия силы X

$$u = \frac{\partial V}{\partial X} = \frac{r}{EI} \int_0^{\beta} M(\beta) \frac{\partial M(\beta)}{\partial X} d\beta$$

или, учитывая зависимость (3, VIII),

$$\begin{aligned} u &= \frac{r^2}{EI} \int_0^{\alpha} [M + Kr(\sin \alpha - \sin \beta) + Yr(\cos \beta - \cos \alpha)] (\sin \alpha - \sin \beta) d\beta = \\ &= \frac{Mr^2}{EI} \int_0^{\alpha} (\sin \alpha - \sin \beta) d\beta + \frac{Kr^2}{EI} \int_0^{\alpha} (\sin \alpha - \sin \beta)^2 d\beta + \frac{Yr^2}{EI} \int_0^{\alpha} (\cos \beta - \cos \alpha) \times \\ &\times (\sin \alpha - \sin \beta) d\beta = \frac{Mr^2}{EI} (\alpha \sin \alpha - 1 + \cos \alpha) + \frac{Kr^2}{EI} \left(\alpha - \frac{\alpha}{2} \cos 2\alpha + \right. \\ &\left. + \frac{3}{4} \sin 2\alpha - 2 \sin \alpha \right) + \frac{Yr^2}{EI} \left(\cos \alpha - \frac{3}{4} \cos 2\alpha - \frac{1}{2} \alpha \sin 2\alpha - \frac{1}{4} \right). \end{aligned}$$

Окончательное выражение для перемещения свободного конца стержня по направлению действия силы X имеет следующий вид:

$$u = \frac{Mr^2}{EI} \theta_1(\alpha) + \frac{Kr^2}{EI} \theta_2(\alpha) + \frac{Yr^2}{EI} \theta_3(\alpha), \quad (9, \text{VIII})$$

где

$$\theta_1(\alpha) = \alpha - \frac{\alpha}{2} \cos 2\alpha - 2 \sin \alpha + \frac{3}{4} \sin 2\alpha, \quad (10, \text{VIII})$$

Функции $\theta_i(\alpha)$ представляют собой функции изгиба сил на соответствующие им перемещения r , u и v . Аналогичным путём можно получать выражения для перемещения свободного конца кругового стержня при других видах его загрузки. Приведём некоторые результаты, опуская сами выкладки.

Второй случай загрузки (рис. 98). Круговой стержень на одном конце жестко заделан, а на другом конце загружен сосредоточенным моментом M и силами: T , направленной по касательной к оси стержня, и N , направленной по нормали к его оси.



Рис. 98 *

Выражения для углового перемещения φ и перемещений t и v по направлениям касательной и нормали к оси стержня на его свободном конце имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{Mr}{EI} H_1(\alpha) + \frac{Tr^2}{EI} H_2(\alpha) + \frac{Nr^2}{EI} H_3(\alpha) \\ t &= \frac{Mr^2}{EI} H_2(\alpha) + \frac{Tr^2}{EI} H_1(\alpha) + \frac{Nr^2}{EI} H_4(\alpha) \\ v &= \frac{Mr^2}{EI} H_3(\alpha) + \frac{Tr^2}{EI} H_4(\alpha) + \frac{Nr^2}{EI} H_5(\alpha) \end{aligned} \right\}, \quad (11, \text{VIII}).$$

где

$$\left. \begin{aligned} H_1(\alpha) &= \alpha \\ H_2(\alpha) &= \alpha - \sin \alpha \\ H_3(\alpha) &= 1 - \cos \alpha \\ H_4(\alpha) &= \frac{3}{2} \alpha - 2 \sin \alpha + \frac{1}{4} \sin 2\alpha \\ H_5(\alpha) &= \frac{3}{4} - \cos \alpha + \frac{1}{4} \cos 2\alpha \\ H_6(\alpha) &= \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (12. VIII)$$

Третий случай загрузки (рис. 99). Один конец стержня жестко заделан, а другой загружен сосредоточенным моментом M и силами U и V , направленными по хорде и нормали к ней.

Выражения для перемещений в направлении действующих усилий имеют следующий вид:



Рис. 99

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{Mr}{EI} \Phi_1(\alpha) + \frac{Vy^2}{EI} \Phi_2(\alpha) + \frac{Uy^3}{EI} \Phi_3(\alpha) \\ u &= \frac{Mr^2}{EI} \Phi_4(\alpha) + \frac{Vy^2}{EI} \Phi_5(\alpha) + \frac{Uy^3}{EI} \Phi_6(\alpha) \\ w &= \frac{My^2}{EI} \Phi_7(\alpha) + \frac{Vy^2}{EI} \Phi_8(\alpha) + \frac{Uy^3}{EI} \Phi_9(\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (13. VIII)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(\alpha) &= \alpha \\ \Phi_2(\alpha) &= 2 \sin \frac{\alpha}{2} - \alpha \cos \frac{\alpha}{2} \\ \Phi_3(\alpha) &= \alpha \sin \frac{\alpha}{2} \\ \Phi_4(\alpha) &= \alpha + \frac{\alpha}{2} \cos \alpha - \frac{3}{2} \sin \alpha \\ \Phi_5(\alpha) &= 1 - \cos \alpha - \frac{\alpha}{2} \sin \alpha \\ \Phi_6(\alpha) &= \alpha - \frac{\alpha}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (14. VIII)$$

Четвертый случай загрузки (рис. 100). Один конец стержня жестко заделан, а другой свободен. Круговой стержень загружен

равномерным внешним давлением интенсивности q . Угловое перемещение и перемещение по направлениям касательной и нормали к оси свободного конца стержня будут следующими:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{qr^3}{EI} \psi_1(\alpha) \\ t &= \frac{qr^3}{EI} \psi_2(\alpha) \\ n &= \frac{qr^3}{EI} \psi_3(\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (15. \text{VIII})$$

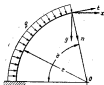


Рис. 100

где

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(\alpha) &= \alpha - \sin \alpha - H_2(\alpha) \\ \psi_2(\alpha) &= \frac{3}{2} \alpha - 2 \sin \alpha + \frac{1}{4} \sin 2\alpha = H_3(\alpha) \\ \psi_3(\alpha) &= \frac{3}{4} - \cos \alpha + \frac{1}{4} \cos 2\alpha = H_4(\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (16. \text{VIII})$$

Выражения для углового перемещения свободного конца стержня и перемещений по направлениям касательной и нормали к оси у заданного сечения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{qr^3}{EI} \Omega_1(\alpha) \\ y &= \frac{qr^3}{EI} \Omega_2(\alpha) \\ x &= \frac{qr^3}{EI} \Omega_3(\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (17. \text{VIII})$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1(\alpha) &= \alpha - \sin \alpha \\ \Omega_2(\alpha) &= \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha - \frac{3}{2} \alpha \cos \alpha \\ \Omega_3(\alpha) &= \cos \alpha + \frac{\alpha}{2} \cos 2\alpha + \frac{3}{2} \alpha \sin \alpha - \frac{3}{2} \end{aligned} \right\} \quad (18. \text{VIII})$$

Пятый случай изгиба (рис. 101). Круговой стержень нагружен по концам моментами M_1 и M_2 и сжимающим усилием V . Требуется определить углы поворота φ_1 и φ_2 и сближение концов ϑ .

Принимая углы поворота положительными при вращении по часовой стрелке, получаем следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= - \left[\frac{M_1 r}{EI} T_1(\alpha) + \frac{M_2 r}{EI} T_2(\alpha) + \frac{V r^2}{EI} T_3(\alpha) \right] \\ \varphi_2 &= \frac{M_1 r}{EI} T_1(\alpha) + \frac{M_2 r}{EI} T_2(\alpha) + \frac{V r^2}{EI} T_3(\alpha) \\ \vartheta &= \frac{M_1 r^2}{EI} T_4(\alpha) + \frac{M_2 r^2}{EI} T_5(\alpha) + \frac{V r^3}{EI} T_6(\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (19. \text{VIII})$$

$$\left. \begin{aligned} T_1(\alpha) &= \frac{2\alpha - \alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{4(1 - \cos \alpha)} \\ T_2(\alpha) &= \frac{4\alpha \sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{4(1 - \cos \alpha)} \\ T_3(\alpha) &= \sin \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \\ T_4(\alpha) &= \alpha + \frac{\alpha}{2} \cos \alpha - \frac{3}{2} \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (20, \text{VIII})$$

С помощью приведенных зависимостей (4, VIII) — (19, VIII) можно производить расчеты довольно разнообразных криволинейных рам, составленных из круглых стержней.

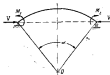


Рис. 101

Если возникает необходимость расчета кругового стержня с нагрузкой, отличной от рассмотренной, то получение необходимых зависимостей не встретит затруднений и всегда может быть выполнено аналогично предыдущему.

Если центральные углы круговых стержней окажутся достаточно малыми ($\alpha < 1$), в выражениях для перемещений δ и v определение функций влияния требует вычисления малых разностей близких величин, и

тогда удобнее пользоваться разложениями этих функций в степенные ряды по α .

Если требуется определять перемещение стержня в направлении, по которому никакое из приложенных усилий не действует, поступают следующим образом. В этом направлении прикладывают фиктивную (фактически отсутствующую) силу, направление действия которой совпадает с направлением подлежащего определению перемещения. Так, например, если требуется определить угол поворота для данного сечения, то в этом сечении прикладывают сосредоточенный момент, если подымают определенную линейное перемещение, то по требующемуся направлению прикладывают сосредоточенную силу.

В последующем с фиктивной силой поступают так же, как с фактически действующей: подсчитывают потенциальную энергию с учетом действия фиктивной силы, затем, используя теорему Кастальяно, определяют перемещение. Полагая в полученном выражении для перемещения фиктивную силу равной нулю, находим подлежащее определению перемещение.

§ 68. Использование зависимостей § 68 для решения частных задач

Полученные в § 68 зависимости оказывают весьма полезными при рассмотрении некоторых частных задач, решение которых связано с раскрытием статической неопределенности.

Пусть жестко заделанный по концам круговой стержень нагружен сосредоточенной силой, приложенной посредине (рис. 102).

В силу симметрии достаточно рассмотреть половину стержня (рис. 103). Проведя через точку приложения силы угол поворота

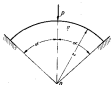


Рис. 102



Рис. 103

и перемещение стержня по направлению касательной и используя зависимости (11. VIII), получаем систему двух уравнений для определения неизвестных T и M :

$$\frac{M}{r} H_2(\alpha) + T H_3(\alpha) + \frac{P}{2} H_4(\alpha) = 0,$$

$$\frac{M}{r} H_3(\alpha) + T H_4(\alpha) + \frac{P}{2} H_5(\alpha) = 0.$$

Подставляя в эту систему значения функций H_i из ф-л (12. VIII) и решая ее, получаем следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} T &= -\frac{P}{2} \cdot \frac{\alpha \cos 2\alpha - 3 \sin 2\alpha + 4 \sin \alpha - \alpha}{2\alpha^2 + \alpha \sin 2\alpha - 4 \sin^2 \alpha} \\ M &= -\frac{Pr}{2} \cdot \frac{3\alpha + 3 \sin 2\alpha - \alpha \cos 2\alpha - 2\alpha \cos \alpha - 6 \sin \alpha}{2\alpha^2 + \alpha \sin 2\alpha - 4 \sin^2 \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (21. \text{ VIII})$$

Таким образом, по заданному значению силы P можно для любого угла α и радиуса r стержня определить изгибающий момент и распор.

Пусть имеем круговой жестко заделанный стержень, у которого $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (рис. 104). Тогда зависимости (21. VIII) примут вид

$$\left. \begin{aligned} T &= -\frac{4-\pi}{2\pi-8} Pr \approx -0,462Pr \\ M &= -\frac{2\pi-6}{\pi^2-8} Pr \approx -0,152Pr \end{aligned} \right\} \quad (22. \text{ VIII})$$

Изгибающий момент на опоре определится выражением

$$M_{\text{оп}} = M + Tr + \frac{P}{2} r = -\frac{3\pi-\frac{\pi^2}{2}+2}{\pi^2-8} Pr \approx -0,111Pr. \quad (23. \text{ VIII})$$

В том случае, когда сила приложена к замкнутому круговому стержню ($\alpha = \pi$), получаем следующую схему загрузки (рис. 106) и следующие значения усилий:

$$\left. \begin{aligned} T &= 0 \\ M &= -\frac{1}{\pi} pr \end{aligned} \right\} \quad (24. \text{ VIII})$$

Момент же на концах горизонтального диаметра равен

$$M_1 = \frac{pr}{2} - \frac{pr}{\pi} = \frac{\pi-2}{2\pi} pr \approx 0,182pr. \quad (25. \text{ VIII})$$



Рис. 106



Рис. 105

В качестве второго примера рассмотрим определение усилий в замкнутом круговом стержне сечением F с установленным в нем пиллерсом AB сечением F_1 (рис. 106). Замкнутый круговой стержень загружен

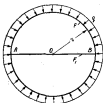


Рис. 106

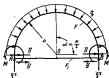


Рис. 107

внешним равномерным давлением интенсивности p . Выясним, насколько изменится изгибающий момент в круговом стержне в месте установки пиллерса. В силу симметрии конструкции и нагрузки можно рассмотреть лишь половину замкнутого кругового стержня (рис. 107).

Уравнения для определения изгибающего момента M и усилия распора Y можно составить, приравнивая, с одной стороны, горизонтальное перемещение кольца обхватно пиллерсу y , с другой стороны,

приравнявая нулю (вследствие симметрии конструкции и нагрузок) угол поворота кругового стержня в точках A и B . Поскольку вертикальные силы уравновешиваются с распределенной нагрузкой, равенство нулю угла поворота можно записать так:

$$\varphi - \frac{Mr}{EI} \alpha - \frac{Yr^3}{EI} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) = 0. \quad (26. VIII)$$

Перемещение точки B к центру вследствие обжатия кругового стержня равномерным давлением можно определить, используя закон Гука, по следующему выражению:

$$\Delta r = \frac{\sigma r^3}{EF}.$$

Перемещение в этом же направлении точки B кругового стержня под действием момента M и усилия распора Y согласно выражению (7. VIII), равно

$$v = \frac{Mr^3}{EI} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) - \frac{Yr^3}{EI} \left(\alpha \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \alpha - \frac{3}{4} \sin 2\alpha \right).$$

Обжатие пиллерса на длине OB равно

$$\Delta OB = \frac{Yr}{EF_1}.$$

Приравнявая перемещение точки B кругового стержня обжатию пиллерса, получаем второе уравнение для определения неизвестных M и Y :

$$\frac{Mr^3}{EI} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) - \frac{Yr^3}{EI} \left(\alpha \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \alpha - \frac{3}{4} \sin 2\alpha \right) + \frac{\sigma r^3}{EF} = \frac{Yr}{F_1 F}. \quad (27. VIII)$$

Подставляя в уравня (26. VIII) и (27. VIII) угол $\alpha = \frac{\pi}{2}$, получим

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{1}{\frac{\pi^3}{8} - 1 + \frac{Y}{F_1 F} \cdot \frac{\pi}{2}} \cdot \frac{I}{r} q \\ Y &= \frac{1}{\frac{\pi}{4} - \frac{3}{8} + \frac{Y}{F_1 F}} \cdot \frac{I}{r} \cdot \frac{q}{r} \end{aligned} \right\} \quad (28. VIII)$$

Из выражения (28. VIII) видно, что величина момента возрастает с ростом площади поперечного сечения пиллерса F_1 . При $F_1 \rightarrow \infty$ получаем

$$M_{\max} = \frac{8}{2\pi - 1} \cdot \frac{I}{r} q \approx 4,3 \frac{I}{r} q. \quad (29. VIII)$$

Величина же изгибающего момента, получаемого вследствие обжатия кругового стержня при отсутствии пиллерса, будет равна

$$M_{\max} = q \frac{I}{r}.$$

В заключение рассмотрим раскрытие статической неопределенности криволинейной рамы (рис. 108). С такого рода рамами приходится сталкиваться при расчете набора шестерни (рис. 109). В последнем случае в расчетной схеме (см. рис. 108) стержень 2—3 считается абсолютно жестким.

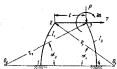


Рис. 108



Рис. 109

Как будет показано ниже, для такой криволинейной рамы характерной будет являться нагрузка в виде сосредоточенного момента M и сил P и T .

Для раскрытия статической неопределенности мысленно разрежем раму в узле 2 и заменим действие одной части на другую неизвестными

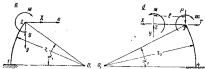


Рис. 110

реактивными усилиями X , Y и M , подлежащими определению. Для определения этих усилий составим три уравнения, приравняв перемещения стержней в узле 2.

Напишем выражения для перемещения конца стержня 1—2, используя ранее полученные зависимости (рис. 110):

$$\left. \begin{aligned} z_2 &= \frac{Mr_1^2}{EI_1} \vartheta_1(x_1) + \frac{Nr_1^2}{EI} \vartheta_2(x_1) + \frac{Yr_1^2}{EI} \vartheta_3(x_1) \\ y_2 &= \frac{Mr_1^2}{EI_1} \vartheta_4(x_1) + \frac{Nr_1^2}{EI_2} \vartheta_5(x_1) + \frac{Yr_1^2}{EI_3} \vartheta_6(x_1) \\ x_2 &= \frac{Mr_1^2}{EI_1} \vartheta_7(x_1) + \frac{Nr_1^2}{EI_4} \vartheta_8(x_1) + \frac{Yr_1^2}{EI_5} \vartheta_9(x_1) \end{aligned} \right\} \quad (30. \text{ VIII})$$

С другой стороны, перемещение точки 2 стержня 2—3—4 можно определять как сумму перемещений узла 3 стержня 3—4 и стержня

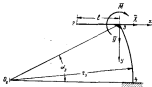


Рис. III

2—3 (см. рис. III, б). Приведя момент M и силы X и Y к узлу 3, получим момент и усилия, изображенные на рис. III,

$$\left. \begin{aligned} \bar{M} &= M - Yr \\ \bar{Y} &= Y \\ \bar{X} &= X \end{aligned} \right\}. \quad (31. VIII)$$

Используя зависимости (5. VIII), (7. VIII) и (9. VIII) для кругового стержня, нагруженного силами $\bar{X}$, $\bar{Y}$ и $\bar{M}$, получим следующие выражения для перемещений:

$$\left. \begin{aligned} v_2 &= \frac{\bar{M}r_2^2}{EI_0} \theta_1(z_2) + \frac{\bar{Y}r_2^2}{EI_0} \theta_2(z_2) - \frac{\bar{X}r_2^2}{EI_0} \theta_3(z_2) \\ y_2 &= -\frac{\bar{M}r_2^2}{EI_0} \theta_2(z_2) + \frac{\bar{Y}r_2^2}{EI_0} \theta_1(z_2) - \frac{\bar{X}r_2^2}{EI_0} \theta_3(z_2) \\ x_2 &= \frac{\bar{M}r_2^2}{EI_0} \theta_3(z_2) - \frac{\bar{Y}r_2^2}{EI_0} \theta_2(z_2) + \frac{\bar{X}r_2^2}{EI_0} \theta_1(z_2) \end{aligned} \right\}. \quad (32. VIII)$$

При этом считаем угол поворота φ положительным при вращении по часовой стрелке, а перемещения y_2 и x_2 положительными в том случае, если они направлены по положительным направлениям осей y и x .

В силу абсолютной жесткости стержня 2—3 перемещения точки 2 определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} v_2 &= v_3 \\ y_2 &= y_3 - h\varphi_3 \\ x_2 &= x_3 \end{aligned} \right\}. \quad (33. VIII)$$

Подставляя выражения (31. VIII) в ф-лы (32. VIII), а последние в выражения (33. VIII) и принимая полученные значения перемещений перемещения, определенным по зависимостям (30. VIII) соответственно, получим три уравнения для определения неизвестных реактивных усилий X , Y и M :

$$\left. \begin{aligned} M(a_1 + a_1') + Y(a_2 + a_2' - la_1) + X(a_2' - a_2) - 3Ma_1 + Pa_2 - Ta_2 \\ M(b_1 + la_1 - b_1') - Y(b_2 + b_2' + lb_1 + Pa_2 - la_2) - \\ - X(la_2 + b_2' - b_2) = 3M(b_1 + a_1) + T(b_2 - la_2) + P(la_2 - b_2) \\ M(c_1' + c) + Y(c_2' - lc_1 - c_2) + X(c_2' + c_2) - 3Mc_1 - Pc_2 + Tc_2 \end{aligned} \right\} \quad (34. \text{ VIII})$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{r_1^2}{EI_1} \theta_1(z_1) & a_2 &= \frac{r_2^2}{EI_2} \theta_2(z_2) & a_3 &= \frac{r_3^2}{EI_3} \theta_3(z_3) \\ b_1 &= \frac{r_2^2}{EI_2} \theta_2(z_2) & b_2 &= \frac{r_2^2}{EI_2} \theta_2(z_2) & b_3 &= \frac{r_3^2}{EI_3} \theta_3(z_3) \\ c_1 &= \frac{r_1^2}{EI_1} \theta_1(z_1) & c_2 &= \frac{r_1^2}{EI_1} \theta_1(z_1) & c_3 &= \frac{r_3^2}{EI_3} \theta_3(z_3) \\ a_1' &= \frac{r_1^2}{EI_1} \theta_1(z_1) & a_2' &= \frac{r_1^2}{EI_1} \theta_1(z_1) & a_3' &= \frac{r_1^2}{EI_1} \theta_1(z_1) \\ b_1' &= \frac{r_1^2}{EI_1} \theta_1(z_1) & b_2' &= \frac{r_1^2}{EI_1} \theta_1(z_1) & b_3' &= \frac{r_1^2}{EI_1} \theta_1(z_1) \\ c_1' &= \frac{r_1^2}{EI_1} \theta_1(z_1) & c_2' &= \frac{r_1^2}{EI_1} \theta_1(z_1) & c_3' &= \frac{r_1^2}{EI_1} \theta_1(z_1) \end{aligned} \right\} \quad (35. \text{ VIII})$$

Решив полученную систему уравнений (34. VIII) и определив силы X , Y и момент M , можно легко вычислить численные изгибающие моменты, перегибающие силы и сжимающие усилия в любом сечении рамы.

Такого рода расчет рекомендуется выполнять в том случае, если изменением длин стержней, входящих в состав рамы, можно пренебречь. Если изменением длин стержней, входящих в состав рамы, можно пренебречь, расчет такого рода рам может быть значительно упрощен, что будет показано ниже.

§ 76. Изгиб пологого стержня с жестко заделанными концами *

а. Определение усилий, возникающих в пологом круговом стержне

Под пологим круговым стержнем понимают такой круговой стержень, у которого длина значительно больше стрелки прогиба, т. е. $l \gg f$.

Рассмотрим задачу по определению усилий, возникающих в пологом стержне, жестко заделанном по концам и нагруженном продольным сжа-

* Метод расчета стержней извлечен из книги П. Ф. Патковича „Строительная механика корабля“. Ч. I. Г. Е., „Морской транспорт“, 1947.

мающим усилием T . Решение этой задачи и выводы из нее будут использованы при расчете составных шпингоутов.

Будем считать полый стержень (рис. 112) достаточно жестким и пренебрегать его упругими перемещениями в направлении оси OY по сравнению с начальной стрелкой погиби f . Стрелка текущей погиби y в сечении, определенном углом θ , находится по выражению

$$y = r(\cos \theta - \cos \alpha),$$

Используя соотношения

$$\cos \theta - 1 = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

$$\cos \alpha - 1 = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

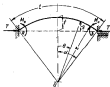


Рис. 112

и имея в виду, что углы α и θ малы, получим

$$y = \frac{r}{2}(\alpha^2 - \theta^2). \quad (36. \text{ VIII})$$

Приняв в ф-ле (36. VIII) $\theta = 0$, получим выражение для наибольшей стрелки погиби f

$$y_{\max} = f = \frac{r}{2} \alpha^2. \quad (37. \text{ VIII})$$

Изгибающий момент в текущем сечении пологого стержня, определенном углом θ , равен

$$M = M_0 + T\theta, \quad (38. \text{ VIII})$$

где M_0 — неизвестный реактивный момент. Если учесть формулу (36. VIII), то будем иметь

$$M = M_0 + T \frac{r}{2} (\alpha^2 - \theta^2). \quad (39. \text{ VIII})$$

Произведем определение неизвестного реактивного момента M_0 . В силу жесткой заделки концов стержня, используя теорему Кастigliано, можно записать

$$\frac{\partial V}{\partial M_0} = 0, \quad (40. \text{ VIII})$$

Выражение потенциальной энергии изгиба кругового стержня имеет вид

$$V = \frac{1}{2} \int_0^\alpha \frac{M^2}{EI} r d\theta,$$

и потому уравне (40. VIII) можно переписать в таком виде:

$$\frac{\partial V}{\partial M_0} = \frac{r}{EJ} \int_{-a}^a M \frac{\partial M}{\partial M_0} d\theta = 0$$

или, поскольку коэффициент, стоящий перед интегралом, отличен от нуля, а согласно выражению (38. VIII) $\frac{\partial M}{\partial M_0} = 1$, можем записать

$$\int_{-a}^a M d\theta = 0. \quad (41. \text{VIII})$$

Подставляя значение изгибающего момента (39. VIII) в выражение (41. VIII), будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \left[M_0 + T \frac{r}{2} (x^2 - \theta^2) \right] d\theta &= 2aM_0 + T \frac{r}{2} \left(x^2 \theta - \frac{\theta^3}{3} \right) = \\ &= 2aM_0 + \frac{2}{3} T r a^3 = 0, \end{aligned}$$

откуда находим

$$M_0 = -\frac{2}{3} T \frac{r a^3}{2} \quad (42. \text{VIII})$$

или, учитывая ф-лу (37. VIII), получим следующее окончательное выражение для опорного момента:

$$M_0 = -\frac{2}{3} T f. \quad (43. \text{VIII})$$

Подставляя ф-лу (43. VIII) в выражение для текущего значения изгибающего момента (38. VIII), получим

$$M = M_0 + T y = -\frac{2}{3} T f + T y = T \left(y - \frac{2}{3} f \right). \quad (44. \text{VIII})$$

Расчетным изгибающим моментом может быть изгибающий момент как в средней части пролета, так и у опор. Для определения изгибающего момента в середине пролета M_1 подставим в выражение (44. VIII) значение $y = f_{\text{max}}$. В результате получим

$$M_1 = T \left(f_{\text{max}} - \frac{2}{3} f \right) = T \left(f - \frac{2}{3} f \right) = \frac{1}{3} T f. \quad (45. \text{VIII})$$

Из рассмотрения значений изгибающих моментов, даваемых выражениями (43. VIII) и (45. VIII), приходим к выводу, что такое же напряженное состояние пологого стержня может быть получено при

следующем его нагружении продольной силой T (рис. 113). При такой загрузке в опорных сечениях и в сечениях посредине пролета возникают изгибающие моменты, совпадающие по величине и по знаку с моментами, даваемыми ф-лами (43. VIII) и (45. VIII) исходной задачи (см. рис. 112).

Таким образом, если использовать схему, приведенную на рис. 113, то отпадает необходимость каждый раз проводить раскрытие статической неопределенности при сжатии продольной силой жестко заданных по концам пологих стержней. При таком нагружении пологого стержня (см. рис. 113) его концевые сечения не поворачиваются. С этой точки зрения стержень ведет себя как идеально прямой центрально нагруженный стержень. Однако концы рассматриваемого стержня сближаются при этом не только под влиянием сжатия, но и под влиянием изгиба. Если стрелка начальной погиби стержня f мала по сравнению с его длиной l , то суммарное укорочение хорды ab получается пропорциональным с укорочением от простого сжатия, а последнее пренебрежимо мало.



Рис. 113

Рассмотрим вопрос, при каких соотношениях между стрелкой начальной погиби стержня f и длиной его l можно пренебрегать сближением концов стержня, происходящим вследствие его изгиба.

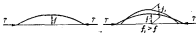


Рис. 114

Необходимость рассмотрения этого вопроса вызвана тем, что при значительном сближении концов стержня происходит интенсивное увеличение начальной стрелки погиби стержня f , что ведет к существенному изменению возникающих в стержне моментов (рис. 114).

2. Определение сближения концов пологого стержня

Рассматриваемый пологий стержень (см. рис. 113) находится в условиях сложного изгиба. С одной стороны, он сжимается под действием постоянных по величине усилий, с другой стороны, он подвергается деформации изгиба под действием меняющихся по его длине изгибающих моментов.

Таким образом, полное сближение концов стержня будет состоять из двух частей

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2, \quad (46. VIII)$$

где Δl_1 — сближение концов стержня под действием сжимающих сил;
 Δl_2 — сближение концов стержня под действием изгибающих моментов.

Сближение концов пологого стержня под действием силы T , как известно, равно

$$\Delta l_1 = \frac{Tl}{EF} = \frac{Trl_2}{EF}, \quad (47. \text{ VIII})$$

где F — площадь поперечного сечения стержня.

Сближение концов стержня, происходящее вследствие его изгиба, можно определять, используя теорему Кастальньо, по выражению

$$\Delta l_2 = \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{r}{EF} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} M \frac{\partial M}{\partial T} d\theta. \quad (48. \text{ VIII})$$

Предварительно, воспользовавшись соотношением (42. VIII), представим выражение для изгибающего момента (39. VIII) в виде

$$M = T \frac{r}{2} \left(\frac{\pi^2}{3} - \theta^2 \right). \quad (49. \text{ VIII})$$

Подставляя теперь это выражение в зависимость (48. VIII), будем иметь

$$\Delta l_2 = \frac{T r^3}{4EF} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{3} - \theta^2 \right)^2 d\theta = \frac{2T}{45} \cdot \frac{r^3 l^3}{EF}. \quad (50. \text{ VIII})$$

Таким образом, полное сближение концов стержня будет равно

$$\Delta l = \frac{T r l_2}{EF} + \frac{2T}{45} \cdot \frac{r^3 l^3}{EF} = \frac{T r l_2}{EF} \left(1 + \frac{1}{45} \cdot \frac{r^2 l^2}{r^2} \right) = \frac{T l}{EF} \left(1 + \frac{\pi^2}{180} \cdot \frac{R^2}{\rho^2} \right), \quad (51. \text{ VIII})$$

где $\rho^2 = \frac{I}{F}$ — радиус инерции поперечного сечения стержня.

Второй член в выражении (51. VIII) характеризует влияние изгиба стержня на сближение его концов.

Определим, каковы должны быть соотношения элементов кругового пологого стержня, чтобы этот член составлял не более 10% от первого члена. Полагая $\frac{\pi^2}{180} \cdot \frac{R^2}{\rho^2} = 0,10$, найдем, что угол α не должен превышать величины

$$\alpha < \sqrt{18} \frac{R}{l} \approx 4,25 \frac{R}{l}. \quad (52. \text{ VIII})$$

В том случае, когда сближение концов пологого стержня от изгиба и сжатия одинаково, имеем следующее значение половины центрального угла стержня:

$$\alpha < \sqrt{180} \frac{R}{l} \approx 13,5 \frac{R}{l}. \quad (53. \text{ VIII})$$

Большая часть круговых стержней, входящих в состав шлангоутных рам, имеет угол α , лежащий в пределах, данных выражениями (52. VIII) и (53. VIII).

Поскольку при α , определяемом по выражению (53. VIII), сближением концов его еще можно пренебречь, усилия, возникающие в стержне, могут быть определены с помощью схемы загрузки стержня, показанной на рис. 113.

При этом возникающие в стержне напряжения могут быть подсчитаны по формулам:

для опорного сечения

$$\sigma = -\frac{T}{F} \pm \frac{2}{3} \cdot \frac{M}{W_1}, \quad (54. \text{ VIII})$$

для сечения в середине пролета

$$\sigma = -\frac{T}{F} \pm \frac{1}{3} \cdot \frac{M}{W_1}, \quad (55. \text{ VIII})$$

где W_1 — момент сопротивления поперечного сечения стержня для соответствующего крайнего волокна.

Верхние знаки относятся к наружным (верхним) волокнам, а нижние — к внутренним (нижним) волокнам.

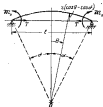


Рис. 115

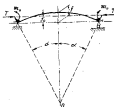


Рис. 116

В том случае, когда значение угла α превышает $13,5 \frac{\pi}{4}$, для установления влияния изгиба стержня на сближение его концов следует воспользоваться более точными зависимостями.

Рассмотрим свободно опертый стержень, находящийся под действием сжимающей силы T и моментов M_0 , приложенных к его концам (рис. 115).

Угол поворота опорных сечений и сближение концов при изгибе кругового стержня определяются с помощью выражений (5. VIII) и (7. VIII)

$$(\varphi)_{\alpha=0} = -(\varphi)_{\alpha=2\alpha} = \frac{1}{EI} [M_0 R \alpha + T R^2 (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)], \quad (56. \text{ VIII})$$

$$\Delta l_1 = \frac{2}{EI} \left[M_0 R^2 (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) + T R^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \cos 2\alpha - \frac{3}{4} \sin 2\alpha \right) \right]. \quad (57. \text{ VIII})$$

Заметим, что ф-ла (57. VIII) в отличие от ф-лы (7. VIII) дает сближение концов стержня с центральным углом 2α .

Из формулы (56. VIII) видно, что вращение концевых сечений стержня будет отсутствовать, если к ним приложить момент M_0 , определяемый выражением

$$M_0 = -Tr \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} - \cos \alpha \right) = -Tr \frac{r^3}{2} \left(1 - \frac{\alpha^2}{16} + \frac{\alpha^4}{384} - \dots \right). \quad (53. \text{VIII})$$

Таким образом, чтобы устранить вызываемое силами T вращение опорных сечений, нужно эти силы приложить не по хорде, а по прямой, параллельной этой хорде и отстоящей от нее на расстоянии f_0 (рис. 116), определяемом выражением

$$f_0 = r \frac{r^2}{2} \left(1 - \frac{\alpha^2}{16} + \frac{\alpha^4}{384} - \dots \right).$$

Сравнив величину f_0 со стрелкой прогиба дуги

$$f = r(1 - \cos \alpha) = r \frac{r^2}{2} \left(1 - \frac{\alpha^2}{12} + \frac{\alpha^4}{360} - \dots \right),$$

получим

$$f_0 = \frac{2}{3} f \frac{1 - \frac{\alpha^2}{16} + \frac{\alpha^4}{384} - \dots}{1 - \frac{\alpha^2}{12} + \frac{\alpha^4}{360} - \dots} \approx \frac{2}{3} f \left(1 - \frac{\alpha^2}{60} + \dots \right). \quad (59. \text{VIII})$$

Как видно из ф-лы (59. VIII), если α не превышает одного радиана, то с точностью до 1,5%

$$f_0 \approx \frac{2}{3} f. \quad (60. \text{VIII})$$

Что касается сближения концов стержня, вызываемого только изгибом, то оно может быть определено с помощью ф-л (57. VIII) и (58. VIII) по выражению

$$\begin{aligned} \Delta l_0 = \frac{2T}{EI} r^3 \left[\alpha + \frac{\pi}{2} \cos 2\alpha - \frac{3}{4} \sin 2\alpha - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)^2 \right] \approx \frac{2}{45} \cdot \frac{Tr^3}{EI} \left(1 - \frac{1}{7} \alpha^2 + \frac{23}{210} \alpha^4 - \dots \right). \end{aligned} \quad (61. \text{VIII})$$

Если α не превышает радиана, то результаты, подставленные по этой формуле, отличаются от результатов, даваемых приближенной ф-лой (50. VIII), не более чем на 13%.

В обычных конструкциях составных шевингутов отношение $\frac{l}{r}$ редко превышает 20. Поэтому при $\alpha \leq 0,5$ множитель $1 + \frac{\alpha^2}{180} \cdot \frac{l^2}{r^2}$ выражения (51. VIII) не превышает 1,5, и осевыми деформациями кругового стержня можно пренебречь.

Все это позволяет при раскрытии статической неопределимости составных рам рассматривать круговые стержни как соответствующей длины прямые стержни, если их центральные углы 2α удовлетворяют условиям

$$2\alpha \leq 1 \quad (62. \text{VIII})$$

и

$$2\alpha \leq 30 \frac{l}{r}. \quad (63. \text{VIII})$$

При несоблюдении неравенства (62. VIII) зависимость (60. VIII) следует заменить более точной зависимостью (61. VIII), а выражение (60. VIII) — выражением (69. VIII). При несоблюдении условия (62. VIII) подлежит каждый раз особому рассмотрению вопрос о том, в какой мере можно пренебрегать осевой деформацией круговых стержней, входящих в составные шпангоуты.

§ 71. Основные леммы о действии равномерного давления, приложенного к круговым стержням

С помощью леммы действие равномерного гидростатического давления может быть сведено, с одной стороны, к нагрузке, вызывающей простое сжатие или растяжение круговых стержней, а с другой стороны, к нагрузке, вызывающей их изгиб. Это дает возможность сложные деформационные состояния конструкций рассматривать состоящими из ряда простейших деформаций. В настоящем параграфе будут рассмотрены основные леммы, разработанные В. Ф. Сегалем.*

Лемма I. Круговой стержень радиуса r , загруженный по периметру равномерно распределенным нормальным давлением интенсивности q , а по торцам сосредоточенными силами $q\tau$, направленными по касательным к оси стержня, найдетс в условиях простого сжатия (растяжения).



Рис. 117



Рис. 118

Для доказательства леммы определим, чему равен изгибающий момент в произвольно выбранном сечении $m-m$ кругового стержня радиуса r (рис. 117).

Обозначим через M^q момент от нагрузки q относительно точки C , а через $M^{q\tau}$ — момент от сосредоточенной силы $q\tau$ относительно той же точки C .

Очевидно, эти моменты M^q и $M^{q\tau}$ будут различны, а изгибающий момент, действующий в сечении $m-m$, будет равен их сумме. Используя одно из свойств гидростатического давления, можно равномерное давление интенсивности q , приложенное к дуге AC , заменить давлением той же интенсивности, но приложенным к хорде AC , тогда

$$M^q = qAC \frac{AC}{2}. \quad (64. \text{ VIII})$$

* В. Ф. Сегаль, Строительная механика подводной лодки, Судостроение, 1949.

Из прямоугольного треугольника AKO имеем

$$AC = 2r \sin \alpha$$

и, следовательно,

$$M^C = 2qr^2 \sin^2 \alpha. \quad (65. \text{ VIII})$$

Момент от сосредоточенной силы qr относительно точки C равен

$$M^{C'} = -qrCD.$$

Из прямоугольного треугольника ADC имеем

$$CD = AC \sin \alpha = 2r \sin^2 \alpha$$

и, следовательно,

$$M^{C'} = -2qr^2 \sin^2 \alpha.$$

Изгибающий момент в сечении $m-\alpha$ от нагрузки q и силы qr определяется выражением

$$M = M^C + M^{C'} = 2qr^2 \sin^2 \alpha - 2qr^2 \sin^2 \alpha = 0.$$

Поскольку сечение $m-\alpha$ было выбрано произвольно, то каков бы другое сечение мы ни взяли, изгибающий момент в нем также будет отсутствовать. Это говорит о том, что рассматриваемый стержень находится в состоянии простого сжатия.

Если рассмотренный круговой стержень загрузить не внешним, а внутренним равномерным давлением (рис. 118), то он будет находиться в состоянии простого растяжения. Доказательство леммы для этого случая ничем не отличается от предыдущего. В заключение следует заметить, что в рассмотренной лемме нагрузка, приложенная к круговому стержню, является статически уравновешенной, а чем можно легко убедиться.

Примечание. Следует иметь в виду, что приведенная лемма доказана в предположении непрерывности оси кругового стержня.

Поскольку лемма широко используется при расчете конструкций изогнутых труб, представляется интерес отметить некоторые подробности, касающиеся за счет наименьших данных практически встречающихся круговых стержней при их нагружении.

Пусть R — площадь поперечного сечения кругового стержня, тогда напряженное состояние будет $\sigma = \frac{qr}{R}$. Относительное удлинение кругового стержня равно

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{qr}{ER}.$$

С другой стороны, $\epsilon = \frac{\Delta r}{r}$, и изменение радиуса кругового стержня определится выражением

$$\Delta r = \epsilon r = \frac{qr^2}{ER}.$$

Радиальное перемещение w , определенное тем выражением, весьма мало по сравнению с радиусом кругового стержня r , что видно из следующего соотношения:

$$\frac{w}{r} = \frac{qr}{ER} = \frac{\sigma}{E}.$$

Поскольку в практически встречающихся конструкциях модуль Юнга равен $2 \cdot 10^6$ кг/см², а напряжения в круговых стержнях достигают всего нескольких тысяч атмосфер, то w составляет от r не более 0,001, а потому наименьшие длины стержней может не приниматься во внимание.

Лемма 2. Равномерно распределенная нормальная нагрузка интенсивности q , приложенная к двум пересекающимся круговым стержням радиусов r_1 и r_2 , может быть представлена в виде двух составляющих.

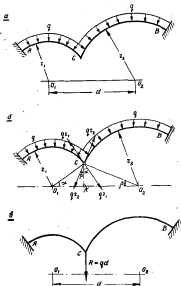


Рис. 119

Первая составляющая будет вызывать в стержнях простое сжатие (растяжение) силами $q r_1$ и $q r_2$. Вторая составляющая равномерно нормальной нагрузки может быть представлена в виде сосредоточенной силы R величиною $q d$ (где d — расстояние между центрами кривых стержней), приложенной в точке пересечения стержней и направленной перпендикулярно к прямой, соединяющей центры их кривых (рис. 119, в).

Для доказательства леммы приложим в точке пересечения стержней C две пары взаимно уравновешивающихся сил q_1 и q_2 , направленных по касательным к стержням (рис. 119, б). От этого напряженное состояние стержней не изменится.

Согласно лемме 1 сосредоточенные силы q_1 и q_2 , направленные вверх совместно с равномерно распределенной нормальной нагрузкой интенсивности q , вызовут в стержнях простое сжатие силами q_1 и q_2 .

Равнодействующая оставшихся сил q_1 и q_2 направлена по прямой CK , перпендикулярной к $\overline{O_1O_2}$. Убедимся в этом, спроектировав q_1 и q_2 на направления CK и $\overline{O_1O_2}$. В результате получим

$$q_1 \cos \alpha + q_2 \cos \beta = q (\overline{O_1K} + \overline{KO_2}) = q \overline{O_1O_2} = qd = R,$$

$$q_1 \sin \alpha - q_2 \sin \beta = q (\overline{CK} - \overline{CK}) = 0.$$

Приведенные выражения подтверждают правильность предположения, что равнодействующая сил q_1 и q_2 направлена перпендикулярно к прямой $\overline{O_1O_2}$, а ее величина равна

$$R = qd, \quad (66. \text{ VIII})$$

где $d = \overline{O_1O_2}$. Таким образом, лемма доказана.

Разделение действия гидростатического давления на два давления обладает определенным напряжением, возникающим в круговых стержнях. Так, полное напряжение будет складываться из напряжения сжатия (растяжения), которое возникает от первой нагрузки, и напряжения изгиба от действия сосредоточенной силы R и дополнительного напряжения сжатия (растяжения) от этой же силы. Для определения напряжений, возникающих в стержне от действия второй нагрузки, необходимо проанализировать предварительно раскрытые статической неопределимости задачи (см. рис. 119, в) путем использования выражений § 68 для угла поворота и перемещений, как это было уже показано на частных примерах § 69.

В заключение следует сказать несколько слов в отношении определения направления равнодействующей R для некоторых частных случаев, показанных на рис. 120.

Как видим, равнодействующая R не всегда направлена в сторону прямой, соединяющей центры кривизны круговых стержней. В некоторых частных случаях (см. рис. 120, б и в) она может быть направлена от прямой $\overline{O_1O_2}$. Для определения направления R в частных случаях рекомендуется пользоваться правилом: если угол γ между прямыми $\overline{O_1C}$ и $\overline{O_2C}$ отсчитывается против часовой стрелки, равнодействующая R направлена к прямой $\overline{O_1O_2}$ (см. рис. 120, а), если этот угол отсчитывается по часовой стрелке, то R направлена от прямой $\overline{O_1O_2}$ (см. рис. 120, б).

Случай, приведенный на рис. 120, в, следует рассматривать как исключение. Здесь равнодействующая R направлена всегда в сторону дуги меньшего радиуса.

Выше были рассмотрены случаи внешнего приложения равномерного давления.

Если давление внутреннее, то направление R меняется на обратное (см. рис. 120, а).

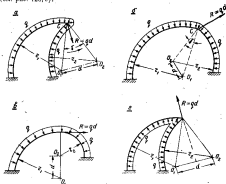


Рис. 120

Частным случаем рассмотренной леммы будет, очевидно, случай, когда одна из кривых стержней заменен прямолинейным стержнем (рис. 121). Представляет интерес, как тогда определяется величина и направление равнодействующей R .

Приложим в точке C по касательной к кривому стержню две равные и противоположно направленные силы $q\ell$ и перпендикулярно к прямолинейному стержню две силы $\frac{q\ell}{2}$. Направленная вверх сила $q\ell$ уравнивается равномерным давлением q , вызвав в кривом стержне сжатие, а сила $\frac{q\ell}{2}$ уравнивается половиной нагрузки q стержня $\overline{O_1C}$. Аналогично предыдущему можно показать, что оставшиеся силы могут быть приведены к силе R , направленной к $\overline{O_1O_2}$. При этом, конечно, прямолинейный стержень находится в сложном напряженном состоянии, испытывая изгиб и сжатие. Величина сил, сжимаю-

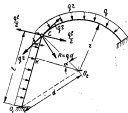


Рис. 121

шей прямой стержень, будет равняться $q\delta \cos \alpha$ или, из прямоугольного треугольника O_1AC , qO_1K . Таким образом, сжимающая стержень сила равна произведению интенсивности давления q на отстояние прямого стержня от центра кругового стержня.

Рассмотренная лемма будет использована при расчете составных шлангов.

Лемма 3. Равномерно распределенное нормальное давление интенсивности q , приложенное к двум круговым стержням и соединяющему их ригелю,* может быть представлено в виде двух составляющих. Первая составляющая будет вызывать в стержнях простое сжатие (растяжение) силами $q\tau_1$ и $q\tau_2$. Вторая составляющая равномерного давления может быть сведена к сосредоточенной силе $R=q\delta$, приложенной в точке пересечения стержней и направленной перпендикулярно к прямой, соединяющей их центры кривизмы (рис. 122).

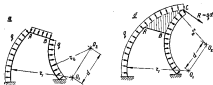


Рис. 122

На основании свойства равномерного гидростатического давления вместо ригеля AB можно рассматривать криволинейный треугольник ACB , нагруженный также равномерным давлением q по внешнему контуру. К полученной таким образом задаче полностью применима лемма 2, чем доказывается справедливость леммы 3.

Перенос, с соблюдением условий статики, сосредоточенную силу $q\delta$ в точку A или B , можно прийти к другим случаям усилий, к которым сводится действие равномерного давления интенсивности q . При этом следует иметь в виду, что такой перенос возможен лишь в области абсолютно твердого тела, за которое в рассматриваемом случае принимается район линии ACB .

Приведенная лемма дает возможность легко определять (используя чертёж) усилия, приложенные к концам стержней, соединенных ригелем.

Лемма 4. Равномерно распределенная нормальная нагрузка интенсивности q , приложенная к двум круговым стержням радиусов r_1 и r_2 , соединенных жестким ригелем (рис. 123, а), может быть представлена в виде двух составляющих. Первая составляющая вызывает в стержнях простое сжатие или растяжение силами $q\tau_1$ и $q\tau_2$. Вторая составляющая может быть сведена к трем силам: двум, направленным по соответствующим хордам круговых стержней, и третьей силе, перпендикулярной одной из хорд.

* Под ригелем понимается абсолютно жесткий стержень.

Прикладываем в точках A и B равны (рис. 123, б) равные, но противоположно направленные силы $q\bar{r}_1$ и $q\bar{r}_2$ и используя лемму 1, сразу можно выделить первую часть нагрузки, вызывающую в крутых стержнях простое сжатие (стержень $1A$) или растяжение (стержень $2B$) и являющуюся статически уравновешенной. Таким образом, первая часть нагрузки оказывается доказанной.

Оставшуюся нагрузку (рис. 123, в) отнесем ко второй составляющей равномерного давления.

Прежде чем продолжить доказательство леммы, напомним понятие об определяющих отрезках.

Рассматривая выражения для сил, приложенных к ригелю AB , можно заметить, что они представляют собою произведение одной и той же интенсивности внешнего давления q на различные линейные размеры $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, AB . Так, сила $q\bar{r}_1$ соответствует отрезок $\bar{r}_1$; сила $q\bar{r}_2$ — отрезок $\bar{r}_2$; сила qAB — отрезок AB . Поэтому отрезки $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ и AB можно рассматривать как те же силы, уменьшенные в q раз, т. е. как силы в масштабе q . Используя эту особенность, рассмотрение сил, приложенных к ригелю AB , можно заменить рассмотрением отрезков $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ и AB , имеющих название определяющих отрезков.

Зная величину определяющих отрезков, можно найти приложенные к раме силы путем простого умножения величины отрезка на интенсивность внешнего давления q . Определяющие отрезки должны быть определенным образом направлены.

Для того чтобы найти направление определяющего отрезка, условимся соответствующую силу поворачивать на 90° против часовой стрелки. И, наоборот, чтобы по направлению определяющего отрезка найти направление силы, условимся поворачивать его на 90° по часовой стрелке.

Таким образом, с определяющими отрезками следует обращаться, как с векторами.

Продолжим доказательство леммы. Итак, сила $q\bar{r}_1$ соответствует определяющий отрезок $\bar{O}_1A$, сила $q\bar{r}_2$ — отрезок $\bar{BO}_2$. При обозначении

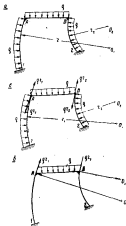


Рис. 123

определяющих отрезков будем, как обычно, обозначать их от начала к концу.*

Возьмем в середине отрезка $\overline{AB}$ точку C (рис. 124), тогда этот отрезок разобьется на два отрезка: $\overline{AC}$ и $\overline{CB}$. Соединим точку C с центрами круговых дуг O_1 и O_2 . Тогда $\overline{O_1C}$ можно рассматривать в качестве равнодействующего отрезков $\overline{O_1A}$ и $\overline{AC}$, а $\overline{CO_2}$ — равнодействующего отрезков $\overline{CB}$ и $\overline{BO_2}$. Замыкающим же отрезком отрезков $\overline{O_1C}$ и $\overline{CO_2}$ является $\overline{O_1O_2}$. При этом, по каким бы направлениям ни раскладывались отрезки $\overline{O_1C}$ и $\overline{CO_2}$, величина $\overline{O_1O_2}$ не изменится, и равновесие системы сил нарушено не будет.

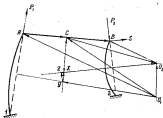


Рис. 124

Разложим отрезки $\overline{O_1C}$ и $\overline{CO_2}$ по направлениям перпендикуляров к хордам $\overline{IA}$, $\overline{2B}$ и радиусу $\overline{AB}$. В результате получаем, что замыкающий вектор $\overline{O_1O_2}$ заменен векторами $\overline{O_1Y}$, $\overline{YX}$ и $\overline{XO_2}$.

Выполняя переход от определяющих отрезков к силам путем поворота первых на 90° по часовой стрелке и умножения на q , получим следующие силы:

$$\begin{aligned} P_1 &= q\overline{O_1Y}, \text{ направленную по хорде } \overline{IA}; \\ P_2 &= q\overline{XO_2}, \text{ направленную по хорде } \overline{2B}; \\ S_1 &= q\overline{YX}, \text{ направленную по радиусу } \overline{AB}. \end{aligned}$$

Поскольку, согласно лемме, перенапрягающую силу S_1 требуется направить перпендикулярно к одной из хорд, разложим вектор $\overline{YX}$ на векторы $\overline{YZ}$ и $\overline{ZX}$. Тогда определяющий отрезок $\overline{YZ}$ и будет соответствовать перенапрягающей силе S_1 , перпендикулярной к хорде $\overline{2B}$.

* В дальнейшем для упрощения изложения определяющие отрезки будем называть отрезками.

з определяющий отрезок $\overline{ZX}$ добавится к определяющему отрезку $\overline{XO_1}$, отчего величина силы P_2 увеличится. Окончательно имеем

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= q\overline{O_1Y} \\ P_2 &= q\overline{ZO_2} \\ S &= q\overline{YZ} \end{aligned} \right\}. \quad (67. VIII)$$

Таким образом, лемма доказана. Рассмотренная лемма имеет большое практическое значение. Так, из третьего выражения ф-л (67. VIII) видно, что для того, чтобы перекашивающая сила отсутствовала, необходимо равенство нулю определяющего отрезка $\overline{YZ}$. Последнее будет иметь место только в том случае, если перпендикуляры $\overline{O_1Y}$, $\overline{XO_2}$ и $\overline{CY}$ пересекнутся в одной точке, а это будет иметь место в том случае, если точки 1, A, B, 2 будут лежать на окружности.

Таким образом, для ответа на вопрос наличия или отсутствия перекашивающей силы достаточно убедиться, лежат ли концы круговых стержней на окружности. Если окажется, что один-либо из четырех точек не лежит на окружности, необходимо изменить длину одного из стержней так, чтобы все четыре точки оказались на окружности. При этом перекашивающее усилие S пропадет.

Рассмотренная лемма позволяет также легко определить усилия, направленные по хордам круговых стержней. Пусть, например, требуется определить усилия, действующие по хордам круговых стержней конструкции, показанной на рис. 125. Для нахождения этих усилий требуется произвести построение определяющих отрезков, по которым затем можно найти сами усилия

$$P_1 = q\overline{O_1h}, \quad P_2 = q\overline{O_2h}.$$

Что касается направления усилий, то следует руководствоваться изложенным выше правилом перехода от направляющего отрезка к силе. В случае приложения давления q к рассмотренным круговым стержням с противоположной стороны, направления сил и соответствующих им определяющих отрезков, естественно, должны измениться на обратное.

Практический интерес представляет следующее свойство шарнирных полнот, в качестве которых можно рассмотреть конструкцию (рис. 126). Конструкция загружена внешним равномерным давлением. Шарнирный полнот, составленный из жестких звеньев, шарниры которых расположены на окружности, и нагруженный равномерным давлением, находится в равновесии (рис. 126, а).

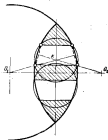


Рис. 125

Косвенно используя рассмотренную лемму, А. А. Курдюмов предложил доказательство приведенного положения, основанное на следующем.*

1. Равнодействующая равномерного давления, приложенного к дугам, имеющим равные хорды, равны по величине.

2. Шарнирный многогон, составленный из жестких звеньев произвольной формы и нагруженный равномерно распределенным давлением, находится в равновесии, если все шарниры расположены на окружности.

Считая первое положение уже доказанным, а второе его следствием, равномерного давления, приложенного по контуру шарнирного многогона, не нарушая равновесия системы, можно заменить равномерным давлением по кольцу. Поскольку в равномерно нагруженном кольце изгиб отсутствует, введение шарниров в его сечения равновесия не нарушает.

Из этого следует, что многогон, шарниры которого лежат на окружности, находится в равновесии.

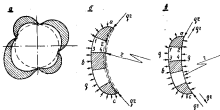


Рис. 126

Для вывода условий отсутствия перекоса рассмотрим часть рамы (рис. 126, б), нагруженную по наружному контуру давлением q , действие остальной части заменено силами qR , направленными по касательным.

Загружая мысленно внутренний контур двумя равными и противоположными силами qR в распределенным давлением q , видим, что напряженное состояние рамы не изменится. При этом приходим к выводу, что изгиб рамы вызывается असосторожным равномерным давлением (рис. 126, в).

Рассматривая любую из криволинейных безраскосных рам, например, 1—2—3—4, можно заменить давление на периметр 3—с—4 давлением на отрезок 3—4, а давление на периметр 1—с—2 — давлением на отрезок 1—2. Таким образом, изгиб безраскосной рамы 1—2—3—4 вызывается равномерным давлением, действующим по периметру.

На основании второго положения перекоса будет отсутствовать, если все узлы будут расположены на окружности.

* А. А. Курдюмов. Навыгосейфизка форми аки в составнах шпангоутах подводных лодок. „Судостроение“, № 2, 1945.

Нами рассмотрены основные законы о действии гидростатического давления, приложенного к круговым стержням. На их основе можно получить ряд других законов.

§ 72. Расчет составного шпангоута однокорпусной подводной лодки

1. Конструктивная и расчетная схемы шпангоута

После определения усилий, возникающих в пологом стержне, и рассмотрения основных законов можно перейти к рассмотрению напряженного состояния составных шпангоутов, расчет которых будет показан на примере расчета шпангоута однокорпусной подводной лодки в районе средней цистерны. Конструктивная схема такого шпангоута показана на рис. 127.

Внешнее давление интенсивности q приложено к круговому шпангоуту ADB с площадью и моментом инерции поперечного сечения F_1 и I_1 и к круговому шпангоуту крыши средней цистерны ACB с площадью и моментом инерции поперечного сечения F_2 и I_2 . К части кругового шпангоута AKB с площадью и моментом инерции поперечного сечения F_3 и I_3 внешнего давления непосредственно не приложено. В узлах A и B поставлены усиленные кницы, а по оси симметрии — бранета $СК$.

Требуется определить те напряжения, которые возникают в стержнях составного шпангоута, находящегося под действием внешнего давления.

Применим следующий метод решения этой задачи.

1. Рассмотрим сначала более простую задачу (рис. 128, а), после рассмотрения которой возвратимся к решению исходной сложной задачи (см. рис. 127).

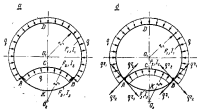


Рис. 128

2. Используя рассмотренные законы, разложим внешнюю нагрузку рамы (см. рис. 128, а) на составляющие, вызывающие простое сжатие

(растяжение) круговых стержней и их изгиб. При этом используем метод наложения, и сложную задачу представим в виде ряда простых задач. При рассмотрении простых задач используем полученные ранее результаты по изгибу круговых стержней.

3. После рассмотрения простых задач рассмотрим вопрос о выборе правильной формы клин и брант.

4. Путем наложения найденных выше отдельных решений получим выражения для определения напряжений, возникающих в стержнях исходной сложной задачи.

2. Разложение конструктивно сложной задачи на три простые задачи

Пользуясь методом наложения и леммой 1, представим задачу для упрощенной конструктивной схемы (см. рис. 128, а) в виде трех простых задач. Для этого приложим в узлах A и B по две равные и противоположно направленных силы qr_1 и qr_2 по направлению касательных к круговым стержням. Равновесие криволинейной рамы от этого нарушено не будет.

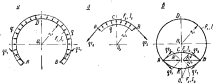


Рис. 129

Выделяя из рассматриваемой схемы загрузки криволинейной рамы группы сил и рассматривая их в отдельности, можно прийти к следующим трем задачам (рис. 129, а, б, в).

Согласно лемме 1, показанные в задаче 1 (см. рис. 129, а) силы взаимно уравновешиваются, вызывая в круговом стержне напряжения сжатия, величина которых равна

$$\sigma_1 = -\frac{qr_1}{r_1}. \quad (68. \text{ VIII})$$

В задаче 2 (см. рис. 129, б), согласно той же лемме, силы также взаимно уравновешиваются, вызывая в стержне напряжения растяжения,

$$\sigma_2 = \frac{P_1 r_2}{r_2}. \quad (69. \text{ VIII})$$

В задаче 3 (см. рис. 129, в) все оставшиеся силы являются внешне приложенными ко всей криволинейной раме.

Согласно лемме 2, силы qr_1 и qr_2 , приложенные в точки A , приводятся к одной силе R , равной $R = q\overline{O_1O_2}$, к направленной перпендикулярно к прямой $\overline{O_1O_2}$. Такая же сила будет иметь место и в точке B .

Эти силы равны по величине, действуют по одной и той же прямой AB и направлены в разные стороны. Поэтому силы, отнесенные к задаче 3, также являются статически уравновешенными. Под дейст-

внеш сил $\bar{R}$ в круговых стержнях составного шлангоута возникают напряжения сжатия и напряжения изгиба. Для определения этих напряжений рассмотрим, как распределяются между круговыми стержнями AKB , ACB , ADB усилия и изгибающие моменты, являющиеся результатом действия силы R (рис. 130).

Для этой задачи 3, в свою очередь, разобьем еще на три отдельные задачи (рис. 131).

Для определения неизвестных сил R_1 , R_2 , R_3 и моментов M_1 , M_2 , M_3 требуется раскрыть статическую неопределенность задачи 3. Следуя П. Ф. Палковичу, используем метод деформаций. При этом будем исходить из того, что соединение стержней в узлах A и B можно считать абсолютно жестким. Поэтому углы поворота стержней, сходящихся в узлы, будут

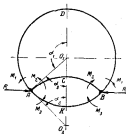


Рис. 130



Рис. 131

одинаковыми между собой и равными углу поворота узла $\bar{\theta}$. Сближения концов каждого из стержней должны быть равны линейному сближению узлов A и B , которое обозначим через f .

Приравняв угол поворота узла $\bar{\theta}$ углу поворота конца каждого из стержней θ_1 , θ_2 , θ_3 , а также линейное перемещение узла f линейным перемещением концов каждого из стержней f_1 , f_2 , f_3 , получим шесть уравнений для определения шести неизвестных: R_1 , R_2 , R_3 , M_1 , M_2 , M_3 .

3. Составление системы уравнений, раскрывающей статическую неопределенность задачи 3

При раскрытии статической неопределенности сложной криволинейной рамы (см. рис. 130) пренебрегаем деформацией от изменения длины осей, а также сдвигами и сжатиями составляющих ее стержней.

При рассмотрении деформации каждого из стержней сложной криволинейной рамы в отдельности мы фактически имеем дело с одной и той же задачей, показанной на рис. 132.

При рассмотрении этой задачи представляют интерес выражения для угла поворота и перемещения концевых сечений стержня A и B , происходящих под действием приложенных сил R_i и моментов M_i . Для этого случая в § 68 были получены формулы (см. Ф-лы (5. VIII) и (7. VIII)), которые запишем применительно к рассматриваемой задаче

$$\theta_1 = -\frac{M_i r_i^3}{EI_i} \theta_1(x_i) + \frac{R_i r_i^3}{EI_i} \theta_2(x_i),$$

$$f_1 = -\frac{M_i r_i^3}{EI_i} \theta_3(x_i) + \frac{R_i r_i^3}{EI_i} \theta_4(x_i),$$

где r_i — радиус нейтральной оси кругового стержня, определенный по выражению $r_i^2 = r_1^2 - e_i^2$;

e_i — отстояние нейтральной оси от наружной кромки i -го стержня.

Отстояние считается положительным, если радиус нейтральной оси меньше радиуса загруженной кромки (рис. 133). Функции $\theta_1(x_i)$, $\theta_2(x_i)$ и $\theta_3(x_i)$ определяются по выражениям (4. VIII) и (8. VIII).

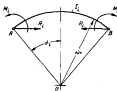


Рис. 132

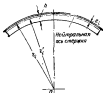


Рис. 133

Как упоминалось, вследствие жесткого крепления между собой концов стержней с помощью книц, углы поворота концов стержней θ_1 , θ_2 , θ_3 и линейные перемещения f_1 , f_2 , f_3 можно считать одинаковыми, на основании чего запишем следующие уравнения равенства угловых и линейных деформаций:

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \theta_2 = -\theta_3 = \theta \\ f_1 &= f_2 = f_3 = f \end{aligned} \right\} \quad (70. VIII)$$

Записывая в развернутом виде ур-ния (70. VIII) с помощью Ф-л (5. VIII) и (7. VIII), получим следующую систему уравнений для определения неизвестных R_i и M_i :

для стержня ADB

$$\frac{M_1 r_1'}{EI_1} \delta_1(x_1) + \frac{R_1 (r_1')^3}{EI_1} \delta_2(x_1) - \delta_2 = 0$$

$$\frac{M_1 (r_1')^3}{EI_1} \delta_2(x_1) + \frac{R_1 (r_1')^5}{EI_1} \delta_3(x_1) + \frac{q(r_1') l^2}{EI_1} - f_1 = f$$

для стержня ACB

$$\frac{M_2 r_2'}{EI_2} \delta_1(x_2) + \frac{R_2 (r_2')^3}{EI_2} \delta_2(x_2) - \delta_2 = 0$$

$$\frac{M_2 (r_2')^3}{EI_2} \delta_2(x_2) + \frac{R_2 (r_2')^5}{EI_2} \delta_3(x_2) - \frac{q(r_2') l^2}{EI_2} - f_2 = f$$

(71. VIII)

для стержня AKB

$$\frac{M_3 r_3'}{EI_3} \delta_1(x_3) + \frac{R_3 (r_3')^3}{EI_3} \delta_2(x_3) - \delta_2 = -\delta$$

$$\frac{M_3 (r_3')^3}{EI_3} \delta_2(x_3) + \frac{R_3 (r_3')^5}{EI_3} \delta_3(x_3) - f_3 = f$$

В системе (71. VIII) содержится шесть уравнений, а число неизвестных равно восьми: $R_1, R_2, R_3, M_1, M_2, M_3, \delta, f$. Для возможности решения задачи систему (71. VIII) дополним уравнениями равновесия узлов, которые имеют вид

$$\left. \begin{aligned} R_1 + R_2 + R_3 &= R \\ M_1 + M_2 + M_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (72. VIII)$$

Порядок определения неизвестных следующий. Пользуясь системой ур-ний (71. VIII), выразим неизвестные реакции R_1, R_2, R_3 и моменты M_1, M_2, M_3 через неизвестные δ и f , то есть получим зависимости

$$\left. \begin{aligned} R_i &= \varphi_i(\delta, f) \\ M_i &= \psi_i(\delta, f) \end{aligned} \right\} \quad (73. VIII)$$

Подставляя выражения реакций и моментов (73. VIII) в ур-ния (72. VIII), находим значения δ и f . Используя полученные значения δ и f в выражении (73. VIII), находим реакции R_i и моменты M_i .

Таким образом, статическая неопределимость задачи 3 оказывается раскрытой.

4. Анализ работы составного шасси и выбор выгодных очертаний винт и брант

Анализируя решения, полученные для ряда сложных криволинейных рин, обычно встречаются с тем фактом, что основная часть сил R и моменты M воспринимается не стержнем ADB , а стержнями ACB и AKB (см. рис. 130). Это объясняется тем, что жесткость стержня ADB в отношении линейных и угловых деформаций оказывается значительно

* Эти члены увеличивают (уменьшают) моменты стержней за счет их сжатия (растяжения).

меньшей по сравнению с танковой для стержней ACB и AKB из-за того, что центральный угол 2α первого стержня значительно больше углов $2\alpha_1$ и $2\alpha_2$ остальных двух стержней. Стержнем ADB будет воспринято не более 5% от силы, приложенной ко всей раме. Следовательно, участием стержня ADB в восприятии силы R можно пренебречь, при этом будет иметь место погрешность, направленная в безопасную сторону. В дальнейшем будем считать, что сила R воспринимается только стержнями ACB и AKB .

Максимальная величина изгибающего момента (рис. 134) в этих стержнях оказывается равной

$$M_{\max} \approx \frac{1}{4} q \delta c, \quad (74. VIII)$$

где c — наибольшее расстояние между круговыми стержнями ACB и AKB .

Под действием этого изгибающего момента в стержнях ACB и AKB возникают значительные напряжения изгиба. Для уменьшения этих напряжений между стержнями устанавливаются бракеты и усиленные нити. При этом конструкция принимает вид безраскосной фермы (рис. 135).

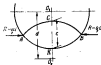


Рис. 134



Рис. 135

Расчет этой безраскосной фермы сводится к определению усилий, возникающих в стержнях ad , cd , ed и bd . Ввиду симметрии конструкции и нагрузки достаточно рассмотреть усилия, возникающие в стержнях ad и cd . Поэтому будем рассматривать не всю конструкцию $ACBK$, а ее половину ACK (рис. 136). Эта конструкция будет работать в наиболее

выгодных условиях с точки зрения прочности лишь тогда, когда силу R , приложенную к криволинейной раме, можно разложить на две составляющие: T_2 и T_1 , направленные по хордам соответствующих стержней ad и cd (см. рис. 136). При этом третья (перекрывающая) сила S , направленная перпендикулярно к хорде одного из стерж-

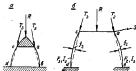


Рис. 136

ней, должна отсутствовать. Наличие силы S нежелательно по тем соображениям, что под действием ее в стержнях возникают значительные изгибающие моменты даже в том случае, когда сила S значительно меньше сил T_1 и T_2 . Поэтому при конструировании составного шпан-

гоута силу S стремится сделать равной нулю. Последнее может быть выполнено путем выбора соответствующей формы книц и бракет.

Для отсутствия перекашивающей силы кницы и бракет должны быть выбраны таким образом, чтобы концы круговых стержней лежали на окружности (см. рис. 125). Сказанное подтверждается леммой 4. Сформулированное условие отсутствия перекашивающей силы S и является условием выбора правильных очертаний книц и бракет.

Рамы, в стержнях которых отсутствуют перекашивающие усилия, будем называть правильно сконструированными рамами в том смысле, что оба криволинейных стержня рамы оказываются в максимальной степени разгруженными от изгиба. При этом в круговым стержням будут приложены силы T_1 и T_2 , направленные по хордам. Величина этих сил может быть найдена с помощью определяющих отрезков (см. рис. 124 и 125). Считая стержни ab и cd полосоми и используя схему § 69 (см. рис. 113), можно по ф-лам (54. VIII) и (55. VIII) легко вычислять напряжения, возникающие в этих стержнях. Однако не следует забывать, что ф-лы (54. VIII) и (55. VIII) справедливы для случая, когда на составной шпигеут действует только сосредоточенная сила R , приложенная в узлах A и B (задача 3).

Помимо этого при определении суммарных напряжений в стержнях следует учесть зависимости (68. VIII) и (69. VIII), полученные в результате рассмотрения задач 1 и 2.

3. Расчет правильно сконструированных рам

Будем считать, что составной шпигеут (см. рис. 127) сконструирован правильно, и его круговые стержни в районе средней кластеры удовлетворяют условиям (53. VIII) и (62. VIII), в силу чего в этих стержнях будут возникать напряжения, определяемые в соответствии с выражениями (54. VIII) и (55. VIII), (см. рис. 113). Однако, как уже говорилось, при определении суммарных напряжений следует дополнительно учесть решения задач 1 и 2.

Выведем расчетные формулы для определения напряжений, возникающих в каждом из круговых стержней ADB , ACB и AKB (см. рис. 127). Напомним, что на рис. 136 стержень ab является частью кругового стержня ACB , нагруженного распределенным давлением q , а стержень cd — частью стержня AKB , который распределенной нагрузки не несет. Согласно задаче 1 и принятым допущениям, в стержне ADB возникают только напряжения сжатия

$$\sigma_1 = -\frac{\sigma_1}{R_1}. \quad (75. VIII)$$

Круговой стержень ab испытывает гидростатическое давление, а также действие сжимающего усилия T_2 (задача 2), поэтому возникающие в нем напряжения будут складываться из напряжений, определенных по выражениям (54. VIII), (55. VIII) и (69. VIII), т. е. определятся по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_2 &= -\frac{\sigma_2}{R_1} - \frac{T_2}{S} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{T_2 f_2}{W_f} \\ \sigma_3 &= -\frac{\sigma_3}{R_1} + \frac{T_2}{S} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{T_2 f_2}{W_f} \end{aligned} \right\} \quad (76. VIII)$$

где W_1' и W_2' — моменты сопротивления, определенные для крайних волокон присоединенного и свободного поясков бруса аб шестерни;

б) посредине пролета бруса в присоединенном (α_2^I) и в свободном (α_2^{IV}) поясах профиля

$$\left. \begin{aligned} \alpha_2^I &= \frac{4r_2 - T_2}{F_2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{T_2 f_2}{W_2'} \\ \alpha_2^{IV} &= \frac{4r_2 - T_2}{F_2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{T_2 f_2}{W_2'} \end{aligned} \right\} \quad (77. VIII)$$

Круговой стержень cd не испытывает гидростатического давления, и поэтому возникающие в нем напряжения будут складываться из напряжений, вызываемых лишь сжимающей продольной силой T_3 и будут равны:

а) в опорных сечениях нижней части шпангоута в присоединенном (α_3^I) и в свободном (α_3^{IV}) поясах профиля

$$\left. \begin{aligned} \alpha_3^I &= -\frac{T_3}{F_3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{T_3 f_3}{W_3'} \\ \alpha_3^{IV} &= -\frac{T_3}{F_3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{T_3 f_3}{W_3'} \end{aligned} \right\} \quad (78. VIII)$$

б) посредине пролета в присоединенном (α_3^I) и в свободном (α_3^{IV}) поясах шпангоута

$$\left. \begin{aligned} \alpha_3^I &= -\frac{T_3}{F_3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{T_3 f_3}{W_3'} \\ \alpha_3^{IV} &= -\frac{T_3}{F_3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{T_3 f_3}{W_3'} \end{aligned} \right\} \quad (79. VIII)$$

где W_3' и W_3'' — моменты сопротивления стержня cd , определенные для крайних волокон присоединенного и свободного поясков нижней части шпангоута.

Во всех приведенных формулах наибольшая стрелка прогиба стержня f_3 связана с центральным углом 2α , рассчитываемой дуги каждого из стержней l_3 и его радиусом r_3 следующим соотношением (см. Ф-лу (37.VIII)):

$$f_3 = \frac{(r_3 - r_0) \cos \alpha}{2} = \frac{r_0^2}{8(r_3 - r_0)}, \quad (80. VIII)$$

так как $\alpha_1 = \frac{l_3}{2(r_3 - r_0)}$.

Этим соотношением и рекомендуется пользоваться для более точного определения f_3 , поскольку снятые с чертежа значения f_3 (особенно когда они малы) могут иметь значительную погрешность.

Сформулированное выше условие отсутствия перекашивающего усилия, предложенное В. Ф. Сегаль, является приближенным и справед-

ливым в тех случаях, когда контур, к которому приложено гидростатическое давление, практически совпадает с нейтральной осью кругового стержня. В том случае, когда такого совпадения нет или нижние контуры шпангоута по профилю сильно отличаются от профиля бруса крыла элерона, необходимо подойти к выбору формы книц и бракет более строго, как это предложено П. Ф. Папковичем.*

Рассмотрим более точное решение задачи. Пусть имеется сложная рама, действию гидростатического давления на которую свелось в результате к двум силам q_1 и q_2 , приложенным к круговым стержням в точках B_1 и B_2 (рис. 137, а).

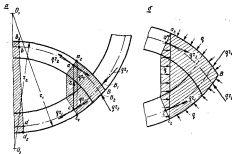


Рис. 137

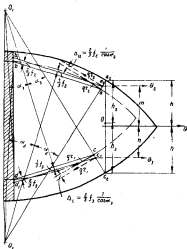
Равновесие рамы не нарушится, если в точке a приложить две равные и противоположно направленные силы q_2 , касательные в этой точке к дуге B_2ab , а в точке c — силы q_1 , касательные в этой точке к дуге B_1cd . Таким же равновесие не нарушится, если кницу вдоль всего ее диаметра $a_1B_1C_1$ дополнительно загрузить равномерной нагрузкой интенсивности q (см. рис. 137, б). Тогда силы q_1 и q_2 , показанные на рис. 137, б, уравновесят нагрузку q , распределенную вдоль дуг B_2a_1 и B_1c_1 , и действие на раму исходных сил q_1 и q_2 , приложенных в точках B_1 и B_2 , сведется к действию двух оставшихся сил q_1 и q_2 , приложенных в точках a и c , и к силе $Q = qa_1c_1$, распределенной равномерно вдоль линии a_1c_1 , длину которой обозначим через 2δ .

Разложим теперь эти три силы на силы T_1 и T_2 , направленные параллельно хордам ab и cd и вызывающие эксцентричное сжатие круговых стержней, соответствующее рис. 113, и на силу S , направленную вдоль a_1c_1 и пересекающую рассматриваемое поле рамы.

* П. Ф. Папкович, *Спроектирование килевых кораблей*, Ч. I, Т. II, «Морской транспорт», 1947.

Для этого предварительно проведем линию a_1b_1 , параллельную хорде ab и отстоящую от нее на $\frac{2}{3}f_1$, а линию c_1d_1 , параллельную хорде cd и отстоящую от нее на $\frac{2}{3}f_2$ (рис. 138).

Разложим силу Q на две параллельные ей силы Q_1 и Q_2 , приложенные в точках a_1 и a_2 . Кроме того, в эти же точки перенесём силы $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$.



1988

Таким образом, вместо сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, приложенных в точках A и C , и силы $\vec{Q}$, приложенной посредине отрезка AC , в результате будем иметь систему следующих четырех сил:

Q_1 is Q_2 —A TOADIE Q_1

$$qF_n \cap Q_n = \emptyset \text{ тогда } \pi_n$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \Delta_a &= \frac{1}{12} \cdot \frac{d_1^2}{r_2} \cdot \frac{1}{\cos \alpha_2} \\ \Delta_c &= \frac{1}{12} \cdot \frac{d_2^2}{r_1} \cdot \frac{1}{\cos \alpha_1} \end{aligned} \right\} \quad (85. \text{ VIII})$$

Определив Δ_a и Δ_c и зная с чертежа величины m , n и h , можно найти по ф-ле (82. VIII) величины b_1 и b_2 и по ф-ле (81. VIII) силы Q_1

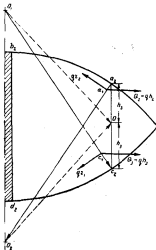


Рис. 140

и Q_2 . Заменяя теперь силы, приложенные в точках a_1 и c_1 , определяющими отрезками, представляющими собою в масштабе q (рис. 140) сами силы. Для силы $q r_1$ возьмем определяющий отрезок $\overline{O_1 a_1}$, для силы $q r_2$ — отрезок $\overline{O_2 a_2}$, силы же Q_1 и Q_2 определяются отрезками $\overline{O a_1}$ и $\overline{O c_2}$.

Сложив геометрически определяющие отрезки $\overline{D_1c_1}$ и $\overline{c_1D_2}$, получим отрезок $\overline{D_1D_2}$, который будет определять равнодействующую сил q_1 и q_2 в Q . Точно так же равнодействующую сил q_2 и q_3 в Q можно выразить отрезком $\overline{D_2D_3}$, сложив геометрически определяющие отрезки $\overline{a_2D_2}$ и $\overline{D_2D_3}$.

Для того чтобы определить, какая сила действует вдоль a_1b_1 (рис. 141), сжимающая стержень ab , и вдоль c_1d_1 , сжимающая стержень cd ,

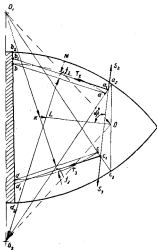


Рис. 141

и какая сила действует вдоль a_1c_1 , вызванная перекос рамы, достаточно разложить по этим направлениям определяющие отрезки $\overline{D_1D}$ и $\overline{D_2D}$ и найти силы, соответствующие этим отрезкам.

Разложим определяющий отрезок $\overline{D_1D}$ на направление, перпендикулярное к a_1c_1 , и направление, перпендикулярное к a_1b_1 . Определяю-

шие отрезки по данным направлениям, очевидно, будут $\overline{OL}$ и $\overline{LO_2}$, а определяемые этими отрезками силы,

$$T_1 = q\overline{LO_2}, \quad (86. \text{ VIII})$$

$$S_1 = q\overline{OL}. \quad (87. \text{ VIII})$$

Разложив аналогичным образом определяющий отрезок $\overline{O_1O_2}$ по-лучим

$$T_2 = q\overline{O_1L}, \quad (88. \text{ VIII})$$

$$S_2 = q\overline{O_1O_2}. \quad (89. \text{ VIII})$$

Заметим, что силы S_1 и S_2 направлены в противоположные стороны, и поэтому они могут быть заменены одной силой S

$$S = S_2 - S_1 = q\overline{KL}, \quad (90. \text{ VIII})$$

направленной от точки a_1 к точке c_2 , если точка k лежит левее точки L , и в обратном направлении, если точка k окажется правее точки L .

Чтобы перекашивающее усилие S равнялось нулю, необходимо так подобрать размеры brackets и кинны, ограничивающих рассматриваемое поле рамы, чтобы перпендикуляры, опущенные из точки O_1 на хорду cd , из O_2 на хорду ad и из O на прямую a_2c_2 , пересеклись в одной точке. Если этого добиться, то сила S обратится в нуль, и круговые стержни ab и cd будут работать в наиболее благоприятных условиях. Направления, возникающие в этих стержнях, определяются по ф-лам (76. VIII) и (79. VIII), а усилие $qr_2 = T_2$, входящее в числитель, определяется по равенству

$$qr_2 - T_2 = q(r_2 - \overline{LO_2})$$

или

$$qr_2 - T_2 = q\overline{ML}. \quad (91. \text{ VIII})$$

Итак, для того чтобы проверить, правильно ли сконструировано поле рассмотренной рамы, следует:

1. Соединить точку пересечения внутренних кромок бруса и кинны с центром окружности бруса O_2 и на полученном таким образом радиусе-векторе зафиксировать точку a — точку пересечения его с нейтральной осью бруса, точку a_1 , отстоящую от точки a на величину Δ_1 , и точку a_2 — точку пересечения радиуса с окружностью, вдоль которой приложена нагрузка q .

2. Соединить точку пересечения внутренних кромок шпангоута и кинны с центром окружности шпангоута O_1 и зафиксировать на полученном таким образом радиусе-векторе точки c , c_1 и c_2 .

3. На прямой, соединяющей точки a_2 и c_2 , найти с помощью ф-л (82. VIII) положение точки O .

4. Опустить перпендикуляры из точки O на прямую, соединяющую точки a_1 и c_1 , а из центров O_1 и O_2 — на хорды cd и ad .

Если все три перпендикуляра пересекутся в одной точке, то можно считать, что поле рамы сконструировано правильно, и для расчета круговых стержней ab и cd можно использовать ф-лы (76. VIII) — (79. VIII). В противном случае следует либо изменить форму brackets и кинны, либо, что менее целесообразно, рассчитать раму с учетом перекашивающей силы S .

В большинстве случаев условие неперекативаемости рамы эквивалентно условию пересечения в одной точке трех перпендикуляров, возводимых из середины отрезков a_1b_1 , a_2c_2 , c_1b_1 . Другими словами, необходимо, чтобы точки a_2 , b_2 , c_2 и d_2 лежали на одной окружности, как показано на рис. 142. Это условие неперекативаемости рамы является приближенным и всегда может быть проверено с помощью изложенного выше строгого условия П. Ф. Папковича, который рекомендует следующий практический порядок конструирования рассматриваемых рам.

1. Форма brackets выбирается такою, чтобы точки a_2 , b_2 , c_2 и d_2 были расположены на одной окружности.

2. С помощью изложенных выше построений выясняется, равна ли перекативающая сила S нулю.

3. Если $S=0$, то расчет рамы выполняется по зависимостям (78, VIII) — (79, VIII). Если $S \neq 0$ и влияние этой силы не выходит за пределы допустимого, то прибавляют вызванные ею напряжения к напряжениям, полученным от сил T_2 и T_3 , и суммарные напряжения сравнивают с допустимыми. Если сила S чрезмерно велика, то следует изменить форму brackets или кинцы, зафиксировав положение любых трех точек из a_2 , b_2 , c_2 и d_2 и выбрав положение четвертой точки таким образом, чтобы свести силу S к минимуму.

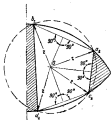


Рис. 142

6. Характер работы составного шпангоута при испытании средней цистермы на стапеле

Представляет интерес вопрос, как изменится напряженное состояние рассмотренного составного шпангоута при испытании средней цистермы на стапеле. Загрузка составного шпангоута при испытании на стапеле показана на рис. 143. Выясним, насколько отличаются условия работы отдельных частей составного шпангоута при погружении подводной лодки (в рабочих условиях прочного корпуса, см. рис. 127) и при испытании на стапеле.

Так в рабочих условиях:

а) круговой стержень ADB работает на простое сжатие силой $q\tau_1$;

б) круговой стержень ACB растянут силой $q\tau_1$;

в) круговые стержни ACB и AKB воспринимают сжимающие усилия $q\vec{O_1O_2}$, направленные навстречу друг другу.

В условиях испытания на стапеле:

а) круговой стержень ADB не напряжен;

б) круговой стержень AKB растягивается силой $q\tau_1$, а круговой стержень ACB — силой $q\tau_1$;

в) вся конструкция, состоящая из круговых стержней ACB и AKB , сжимается силами $q\vec{O_1O_2}$, величина и направление которых такие же, как и при погружении подводной лодки.



Рис. 143

Таким образом, можно сделать следующий вывод. Испытание на сталиле средней шпестерны позволит проверить прочность кругового стержня $АКВ$. Что касается кругового стержня $АКВ$, то возникающие в нем напряжения от действия сжимающего условия $q\overline{O_1O_2}$ при погружении подводной лодки в значительной мере компенсируются появлением при испытании на сталиле растягивающей силы $q\overline{r_1}$, что изменяет тем самым условия работы в благоприятную сторону.

Верхняя ветвь составного шпангоута, как уже отмечено, испытанию практически не подвергается.

§ 73. Различные варианты составных шпангоутов подводных лодок

Помимо рассмотренного случая могут встретиться многочисленные другие конструкции составных шпангоутов. Некоторые из них показаны на рис. 144, а, б, в, г.

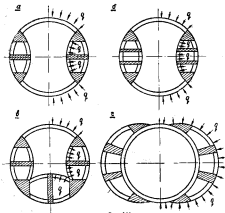


Рис. 144

Расчет этих составных шпангоутов имеет свои особенности, на которых мы и остановимся.

Заметим, что расчет основного шпангоута следует производить не только на действие внешнего давления, соответствующего случаю погружения подводной лодки, но и на внутреннее давление при испытании прочного корпуса, его конструкций или отдельных шпестерн на сталиле.

Рассмотрим, как можно произвести расчет прочности составных шпангоутов, считая, что они сконструированы правильно, т. е. входящие в их состав стержни в максимальной степени разгружены от изгиба.

1. Составной шпангоут в районе бортовых кассет

Расчет такого составного шпангоута (рис. 144, а) ничем не отличается от рассмотренного выше случая. Как и в рассмотренном составном шпангоуте (см. рис. 127), действие равномерного внешнего гидростатического давления можно разделить на две части:

- 1) нагрузку, не вызывающую изгиб составного шпангоута;
- 2) нагрузку, вызывающую его изгиб.

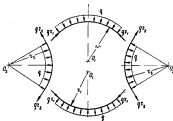


Рис. 145

Первая часть нагрузки вызывает сжатие верхнего и нижнего круговых стержней силой Q_1 и растяжение боковых круговых стержней силой Q_2 (рис. 145). Нагрузка, вызывающая изгиб, состоит из двух сил $q\overline{O_1O_2}$, направленных навстречу друг другу перпендикулярно к прямой $\overline{O_1O_2}$ (рис. 146). При этом круговые стержни ab и cd , концы которых лежат на окружности, оказываются нагруженными продольными сжимающими силами соответственно $T_1 = q\overline{O_1A}$ и $T_2 = q\overline{AO_2}$. Каждый из круговых стержней подвержен изгибу в той же мере, как это имеет место при нагрузке, показанной на рис. 113.

Переходя к рассмотрению составного шпангоута (см. рис. 144, б) можно ответить, что его изгиб будет вызван той же силой $q\overline{O_1O_2}$ (рис. 147). При этом расчет полей рамы $abcd$ и $efgh$ ничем не отличается от рассмотренного случая. Что касается расчета полей Adm , то, поскольку при расчете жестких рам на изгиб мы определяем плечи всех действующих на раму усилий, исходя из первоначальной формы рамы, можно считать части рамы, расположенные выше прямой Am и ниже прямой Im , недеформируемыми в той же мере, в какой считаем недеформируемой линию Acm при расчете полей $abcd$.

Сказанное дает основания все предыдущие рассуждения применять и к расчету поля $B_{\text{вн}}$. Основное условие, которое при этом должно быть

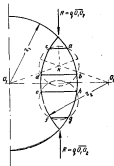


Рис. 146

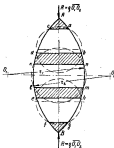


Рис. 147

выполнено, заключается в том, чтобы все brackets, соединяющие основное шпангоутное кольцо со шпангоутом внутренних цистерн, практически не деформировались под действием приходящихся на них усилий.

2. Составные шпангоуты в районе бортовых и средней цистерн

Эти шпангоуты (рис. 144, в) также можно рассматривать находящимися под действием двух нагрузок:

а) не вызывающей изгиба круговых стержней (рис. 148);

б) вызывающей изгиб рамы (рис. 149) и состоящей из следующих сил:

$$\begin{aligned} R_1 &= q \overline{Q_1 Q_2}, & R_3 &= q \overline{Q_1' Q_2'}, \\ R_1' &= q \overline{Q_1' Q_2'}, & R_3' &= q \overline{Q_1 Q_2}. \end{aligned}$$

При этом нагрузка каждого из полей бортовых цистерн аналогична нагрузке рассмотренного выше поля составных шпангоутов.

Несколько менее ясным может оказаться вопрос о расчете средней цистерны. Однако на помощь здесь приходит основная предпосылка о неизменности первоначальной формы жестких рам при определении возникающих моментов. Эта предпосылка позволяет бортовые цистерны считать недеформируемыми.

При использовании данного предположения нагрузка средней цистерны не изменится от прикладывания к бортовой цистерне любой совокупности взаимно уравновешивающихся сил. Прибавив к фактической на-

грузке рассчитываемой рамы равномерно распределенное внешнее давление q , направленное внутрь бортовой цистерны (рис. 150, а), придем



Рис. 149

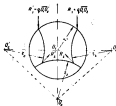


Рис. 150

к нагрузке, изображенной на рис. 150, б. Эта нагрузка вызывает в наборе средней цистерны такой же изгиб, как две направленные навстречу друг другу силы $R = q \overline{O_1 O_2}$, приложенные в точках А и В (см. рис. 150, а).

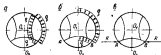


Рис. 151

Сказанное выше о расчете набора бортовых цистерн распространяется и на расчет набора средней цистерны. Аналогично может быть рассчитан и составной шпангоут, показанный на рис. 144, г.

3. Составной шпангоут, составный из трех круговых стержней

В заключение рассмотрим расчет шпангоутной рамы, составленной из трех круговых стержней (рис. 151).

При конструировании такого рода шпангоута важно в значительной мере разгрузить от изгиба его круговые стержни, что можно выполнить путем установки распор. При этом задача сводится к отысканию тех усилий, действию которых подвергается каждая из распор.

Согласно лемме 2 все три дуги будут разгружены от изгиба, если к концам круговых стержней ADB и AEC по направлениям касательных будут приложены сжимающие их усилия q_1 , а по концам кругового стержня BFC усилия q_2 .

Равнодействующая круговых стержней ADB и AEC , складываясь, дает усилие $R_1 = q\overline{O_1O_2}$, направленное перпендикулярно к прямой $\overline{O_1O_2}$. Разлагая это усилие по направлению стержней AB и AC , получим, что усилие, сжимающее распорку AB , равняется $S_1 = q\overline{O_1O}$, усилие же, сжимающее распорку AC , есть $S_2 = q\overline{O_2O}$, где $\overline{O_1O}$ и $\overline{O_2O}$ — соответствующие отрезки, снимаемые с перпендикуляров, восстановленных из середины каждой из распорок AB и AC соответственно.

Аналогично равнодействующая давлений круговых стержней ADB и BFC в точке B есть сила $R_2 = q\overline{O_1O_2}$, направленная перпендикулярно к отрезку $\overline{O_1O_2}$.

Эта сила, будучи разложена на составляющие по направлению BA и BC , дает силу $S_1 = q\overline{OO_1}$, сжимающую распорку AB , и силу $S_2 = q\overline{OO_2}$, сжимающую распорку BC .

Отрезки $\overline{OO_1}$ и $\overline{OO_2}$ лежат на нормалях к прямым AB и BC .

Аналогично равнодействующая давлений, приложенных к дугам AEC и CFB в точке C ($R_3 = q\overline{O_1O_2}$), дает в направлении CA силу $S_2 = q\overline{O_2O}$, сжимающую распорку AC , и в направлении BC силу $S_1 = q\overline{O_1O}$, сжимающую распорку BC .

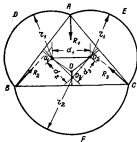


Рис. 150

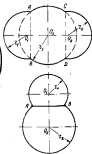


Рис. 152

Таким образом, для определения усилий, воспринимаемых каждой из распорок, достаточно:

а) опустить из концов отрезка $\overline{O_1O_2}$, соединяющего центры дуг ADB и AEC , перпендикуляры на линии AB и AC ;

б) соединить с центром O_2 дуги BFC точку O — точку пересечения продолжений двух только что упомянутых перпендикуляров. Тогда усилия, сжимающие распорки, выразятся формулами:

для распорки AB

$$S_1 = S_2 = q\overline{OO_1}, \quad (92. \text{VIII})$$

для пиллерса AC

$$S_1 = S_2 = q \overline{OO_1}, \quad (93. \text{ VII})$$

для пиллерса BC

$$S_1 = S_2 = q \overline{O_1O}. \quad (94. \text{ VIII})$$

На эти условия и требуется рассчитывать распорки AB , BC и AC , чтобы разгрузить в максимальной мере круговые стержни от изгиба.

Точно так же могут быть определены условия, на которые следует рассчитывать распорки AB и CD шпангоутных колец, изображенных на рис. 152.

§ 74. Круговой шпангоут, одна ветвь которого расположена внутри, а другая снаружи прочного корпуса

Иногда по конструктивным соображениям одну часть шпангоута устанавливают снаружи, а другую внутри обшивки прочного корпуса (рис. 153, а). При таком выполнении шпангоута помалывается необходимость более точного определения его напряженного состояния. Круговой шпангоут при умеренном внешнем давлении во всех своих сечениях испытывает деформации сжатия. В том случае, когда нейтральная ось шпангоута не является окружностью, шпангоут под действием внешнего давления может испытывать значительные деформации изгиба, несмотря на то, что контур, к которому приложено это давление, и имеет круговую форму (рис. 153, б).

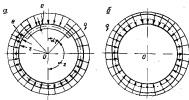


Рис. 153

Рассмотрим наиболее часто встречающийся на практике случай, когда профиль обеих ветвей шпангоута одинаков.

Под действием внешнего давления, помимо сжатия в местах соединения ветвей, возникают значительные деформации изгиба, вызванные действием двух пар сил $T = qR$, которые передаются с одной ветви шпангоута на другую (рис. 154). Тогда величина изгибающего момента, приложенного в месте соединения ветвей шпангоута, определится выражением

$$M = 27qR, \quad (95. \text{ VIII})$$

Под действием этих моментов и будет происходить изгиб-шпангоута (рис. 156). Такие изгибающие моменты воспринимаются обеими ветвями шпангоута в неодинаковой мере, следовательно, надо определить, в какой мере каждая из ветвей участвует в восприятии этих изгибающих момен-



Рис. 154



Рис. 155

тов, предполагая, что $\alpha \ll \pi$. За основные неизвестные примем изгибающие моменты на концах вертикальной оси шпангоута M_1 и M_2 . Выражение для изгибающего момента в текущем сечении шпангоута можно записать в такой форме:

$$M = M_1 \varphi_1(\alpha) + M_2 \varphi_2(\alpha) + \mathfrak{M} \varphi_3(\alpha), \quad (96. \text{ VIII})$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(\alpha) &= \frac{1}{2} (1 + \cos \alpha) \\ \varphi_2(\alpha) &= \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha) \\ \varphi_3(\alpha) &= -\frac{1}{2} (1 - \cos \alpha) + \frac{1}{\alpha} \end{aligned} \right\}. \quad (97. \text{ VIII})$$

При этом угол α отсчитываем от верхней точки кольца.

Используя теорему Кастальнюко, можно написать следующие выражения:

$$\frac{\partial V}{\partial M_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial M_2} = 0,$$

развернув которые и учитывая, что EI от α не зависит, получим систему для определения M_1 и M_2 :

$$M_1 \int_0^\pi \varphi_1^2(\alpha) d\alpha + M_2 \int_0^\pi \varphi_1(\alpha) \varphi_2(\alpha) d\alpha = -\mathfrak{M} \int_0^\pi \varphi_1(\alpha) \varphi_3(\alpha) d\alpha,$$

$$M_1 \int_0^\pi \varphi_2(\alpha) \varphi_1(\alpha) d\alpha + M_2 \int_0^\pi \varphi_2^2(\alpha) d\alpha = -\mathfrak{M} \int_0^\pi \varphi_2(\alpha) \varphi_3(\alpha) d\alpha.$$

* Решение задачи при отсутствии этого предположения также получено П. Ф. Павловским в книге „Средостовые механизмы корабля“. Ч. I. Г. П. „Морской транспорт“, 1947.

Подставив в эти уравнения значения функций φ_1 , φ_2 , φ_3 согласно ф-лам (97, VIII), и принимая во внимание, что

$$\int_0^{2\pi} \varphi_1^2(\alpha) d\alpha = \int_0^{2\pi} \varphi_2^2(\alpha) d\alpha = \frac{3}{8} \pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \varphi_1(\alpha) \varphi_2(\alpha) d\alpha = \frac{1}{4} \pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \varphi_1(\alpha) \varphi_3(\alpha) d\alpha = -\frac{1}{8} \pi + \frac{1}{2} (\alpha_2 - \sin \alpha_2),$$

$$\int_0^{2\pi} \varphi_2(\alpha) \varphi_3(\alpha) d\alpha = -\frac{3}{8} \pi + \frac{1}{2} (\alpha_2 + \sin \alpha_2),$$

окончательно будем иметь

$$3M_1 + M_2 = \left[1 - \frac{4}{\pi} (\alpha_2 - \sin \alpha_2) \right] M,$$

$$M_1 + 3M_2 = \left[3 - \frac{4}{\pi} (\alpha_2 + \sin \alpha_2) \right] M,$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{M}{\pi} (2 \sin \alpha_2 - \alpha_2) \\ M_2 &= \frac{M}{\pi} (\pi - \alpha_2 - 2 \sin \alpha_2) \end{aligned} \right\} \quad (98, \text{VIII})$$

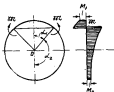


Рис. 156

Эпюра изгибающего момента имеет вид, показанный на рис. 156. Наибольшего своего значения изгибающий момент достигает в месте соединения ветвей шпангоута. При определении напряжений, возникающих в шпангоуте, следует к напряжениям изгиба прибавить напряжения сжатия, и суммарные напряжения вычислять по формуле

$$\sigma = \pm \frac{M}{W} + \frac{T}{F}.$$

§ 75. Устойчивость кругового шпангоута и его части

1. Устойчивость кругового шпангоута

Под действием внешнего равномерного давления интенсивности q , приложенного к круговому шпангоуту радиуса r , в последнем возникают усилия сжатия $q r$. При этом изгибающие моменты и перерезывающие силы в его сечениях отсутствуют.

С увеличением внешнего давления до некоторой определенной величины круговая форма шпангоута перестает быть устойчивой формой равновесия.

По аналогии с устойчивостью цилиндрической оболочки та величина внешнего давления, при которой круговая форма шпангоута перестает быть устойчивой, называется критическим давлением.

Для определения величины критического давления используем метод интегрирования дифференциального уравнения нейтрального равновесия, считая, что имеет место наличие малого отклонения шпангоута от его первоначальной круговой формы. При получении шпангоутом малого отклонения от первоначальной формы в его поперечных сечениях появятся изгибающие моменты, величина которых будет определяться изменением кривизны оси шпангоута

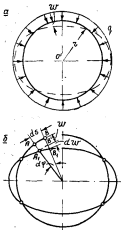


Рис. 157

жесткости A, B' (равномерное обжатие) и последующего поворота относительно точки A_1 . Поэтому и изменение кривизны будет состоять из двух частей, каждая из которых будет соответствовать одному из названных перемещений.

Равномерное обжатие кругового шпангоута под действием внешнего давления на величину w приводит к следующему изменению кривизны:

$$\kappa_1 = \frac{1}{r-w} - \frac{1}{r} = \frac{w}{r(r-w)} \approx \frac{w}{r^2}. \quad (100, VIII)$$

Изменение кривизны за счет поворота элемента A, B' является результатом неравномерного распределения перемещений w по периметру шпангоута при потере им устойчивости. Определим это дополни-

$$M = EI \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) = EI \kappa, \quad (99, VIII)$$

где r — радиус кривизны после приложения давления; r_0 — его начальное значение.

Преобразуем известное выражение (99, VIII) таким образом, чтобы изменение кривизны шпангоута $\kappa = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}$ выражалось через его радиальное перемещение w , положительные направления которых отсчитываются к центру шпангоута (рис. 157, а).

Будем характеризовать деформации шпангоута радиальными перемещениями w , считая их малыми по сравнению с r . Для определения изменения кривизны рассмотрим деформацию элемента шпангоута AB (рис. 157, б).

После деформации этот элемент займет положение A_1B_1 . Это положение элемент может занять путем прихода в по-

тельное изменение кривизны. Согласно общему определению, кривизна вычисляется по формуле

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds}. \quad (101. \text{ VIII})$$

Угол $d\theta$ в рассматриваемом случае представляет поворот сечения элемента в точке B_1 относительно сечения в точке B' или, что то же самое, угол между касательными к дугам A_1B' и A_1B_1 в точках B_1 и B' (рис. 156).

Определим этот угол, считая, что расстояние между точками A_1 и B' в процессе деформации шпангоута не изменяется.

Из рисунка 157 видно, что при перемещении точки A в положение A_1 касательная поворачивается на угол

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi}.$$

В точке B , отстоящей от точки A на расстоянии $ds = r d\varphi$, угол поворота касательной будет

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} + \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi^2} d\varphi \right).$$

Интересующий нас угол поворота касательных $d\theta$ будет равен

$$d\theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi^2} d\varphi.$$

Рис. 158

При этом, в соответствии с (101. VIII) дополнительное изменение кривизны определяется выражением

$$\kappa_2 = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \varphi^2} \quad (102. \text{ VIII})$$

и, следовательно, суммарное изменение кривизны будет

$$\kappa = \kappa_1 + \kappa_2 = \frac{1}{r^2} \left(\varpi + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \varphi^2} \right). \quad (103. \text{ VIII})$$

Тогда равенство (99. VIII) можно записать в таком виде:

$$\frac{EI}{r^2} \left(\varpi + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \varphi^2} \right) = -M. \quad (104. \text{ VIII})$$

Будем считать, что положительный изгибающий момент увеличивает кривизму стержня. Для согласования знаков перемещения и момента в правой части выражения (104. VIII) поставим минус, поскольку положительному перемещению ϖ к центру соответствует отрицательный изгибающий момент.

Для дальнейшего решения задачи определим изгибающий момент в произвольном сечении шпангоута, получившего отклонения от первоначального положения. Это отклонение характеризуется появлением нескольких волн по его периметру. Будем предполагать, что образовавшиеся волны имеют одинаковую длину и высоту.

Выразим изгибающий момент, действующий в любом сечении шпангоута, через внешнюю нагрузку.

В узлах, являющихся точками перегиба, изгибающие моменты, очевидно, будут равны нулю. Если узлы лежат на окружности, то в них можно ввести шарниры, поскольку в данном случае шарнирный полигон, нагруженный равномерным давлением, находится в равновесии. При этом в узлах, лежащих на окружности (которую будем называть узловым кругом шпангоута), будут приложены силы $q\tau$, направленные по касательной к узловому кругу (рис. 159).

Определим изгибающий момент, действующий в сечении B . На основании свойства равномерного давления q можно кривую AB заменить ломаной ACB , к которой приложено то же самое давление q . Согласно



Рис. 159



Рис. 160

лемме 1, в точке C будет действовать сосредоточенное усилие $q\tau$, которое совместно с давлением q , приложенным к отрезку BC , вызовет в сечении B изгибающий момент

$$M_B = q\tau w + \frac{q\tau^2}{2}. \quad (105. \text{ VIII})$$

Ввиду малости w по сравнению с r вторым членом выражения (105. VIII) можно пренебречь и принять

$$M = q\tau w. \quad (106. \text{ VIII})$$

При этом уравнение изгиба (104. VIII) запишется так:

$$\frac{EI}{\rho^2} \left(\frac{d^2 w}{ds^2} + w \right) = -q\tau w. \quad (107. \text{ VIII})$$

Введя обозначение

$$\kappa^2 = 1 + \frac{q\tau^2}{EI}, \quad (108. \text{ VIII})$$

придем к следующему дифференциальному уравнению изгиба:

$$w'' + \kappa^2 w = 0, \quad (109. \text{ VIII})$$

общим интегралом которого будет

$$w = C_1 \cos \kappa s + C_2 \sin \kappa s.$$

Поскольку образующиеся при потере устойчивости шпангоута по его периметру волны приняты одинаковыми, то w должно быть периоди-

ческой функцией угла θ , что будет иметь место, если принять α целым числом.

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 примем за начало отсчета угла точку, например A , лежащую на узловом круге (рис. 160). Тогда можно записать следующие граничные условия:

$$\psi = 0 \quad \text{при } \theta = 0,$$

$$\psi = \psi_{\text{max}} = \psi_0 \quad \text{при } \theta = \frac{2\pi}{2\alpha} = \frac{\pi}{\alpha}.$$

Выражение для изогнутой оси кругового шпангоута примет вид

$$\psi = \psi_0 \sin \alpha \theta, \quad (110. \text{ VIII})$$

где α — число волн, образующихся по окружности.

Для образования α волн внешнее давление, согласно выражению (106. VIII), должно быть равным

$$q_0 = \frac{(n^2 - 1) EI}{r^3}. \quad (111. \text{ VIII})$$

Из выражения (111. VIII) видно, что с увеличением числа волн, образующихся при потере устойчивости, критерия нагрузка шпангоута возрастает.

Практический интерес представляет наименьшее давление, при котором может наступить потеря устойчивости. Произведем его определение.

При $\alpha = 1$ отсутствует отклонение кругового шпангоута от первоначального положения, т. е. он находится в состоянии устойчивого равновесия. Поэтому минимальному значению q_0 будет соответствовать $\alpha = 2$, при котором

$$q_0 = \frac{3EI}{r^3}. \quad (112. \text{ VIII})$$

Другие формы потери устойчивости кольца, соответствующие случаям $\alpha > 2$, возможны только при наложении на кольцо дополнительных связей, которые исключают возможность потери устойчивости с образованием двух волн.

Следует обратить внимание на то, что выражением (112. VIII) дается значение интенсивности внешнего давления q , могущего вызвать потерю устойчивости изолированного шпангоута.

Поскольку шпангоут работает в составе прочного корпуса, то при определении q_0 нужно учесть разгружающее влияние поперечных ребер.

3. Устойчивость защемленного кругового стержня *

Аналогично решается задача об устойчивости равномерно нагруженного кругового стержня (рис. 161).

Искаженная форма стержня при потере им устойчивости показана на чертеже пунктиром.

Дифференциальное уравнение изгиба в этом случае имеет вид

$$\psi'' + \alpha^2 \psi = 0, \quad (113. \text{ VIII})$$

* Определение критического давления для часте кольца заимствовано из книги С. П. Тимошенко «Курс теории упругости». Ч. II. Петросград, 1914.

$$\alpha_1^2 = 1 + \frac{q_0^2}{EI}, \quad (114. VIII)$$

а общий интеграл

$$w = C_1 \sin \alpha_1 \gamma + C_2 \cos \alpha_1 \gamma.$$

Поскольку перемещение на левой опоре отсутствует, то, очевидно,

$$C_2 = 0 \text{ и } w = C_1 \sin \alpha_1 \gamma. \quad (115. VIII)$$

Постоянная интегрирования C_1 представляет собой наибольшее отклонение стержня от первоначального положения.

Действительно, так как α_1 представляет собой число волн, образующихся на длине стержня при потере им устойчивости, то величина угла γ_1 определяется выражением

$$\gamma_1 = \frac{2\pi}{4k_1} = \frac{\pi}{2k_1},$$

подставляя которое в выражение (115. VIII), получим

$$C_1 \sin \frac{\pi}{2} = w_0,$$

откуда

$$C_1 = w_0.$$

В силу отсутствия перемещения w на правом конце стержня

$$w = C_1 \sin \alpha_1 \gamma = 0, \quad \alpha_1 \gamma = 2n\pi,$$

где n — целое число.

На выражении (114. VIII) находим экстремальное значение внешнего давления

$$q_0 = \frac{EI}{r^2} \left(\frac{4n^2\pi^2}{\gamma^2} - 1 \right). \quad (116. VIII)$$

Интересующее нас наименьшее критическое давление будет при $n = 1$

$$q_0 = \frac{EI}{r^2} \left(\frac{4\pi^2}{\gamma^2} - 1 \right). \quad (117. VIII)$$

При значении $\gamma = \pi$ получаем результат, совпадающий с ф-лой (112. VIII), что и следовало ожидать.

Однако при небольших значениях γ в ф-ле (117. VIII) можно пренебречь единицей по сравнению с большим числом $\frac{4\pi^2}{\gamma^2}$, тогда получим

$$q_0 = q_0' = \frac{4EI\pi^2}{\gamma^2 r^2}. \quad (118. VIII)$$

Сравним ф-лу (118. VIII) с формулой для прямого, свободно опертого стержня той же длины, сжатого продольной силой,

$$T_0 = \frac{EI\pi^2}{(r/2)^2} \quad (119. VIII)$$

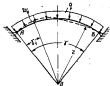


Рис. 161

видим, что для кругового стержня с малым углом γ поперечная критическая нагрузка в четыре раза больше критической сжимающей силы для прямого стержня той же длины. Объясняется это тем, что для первой искривленной формы кругового стержня прогиб w по середине пролета должен обращаться в нуль.

При беспределах уменьшении γ полная искривленная форма для кругового стержня совпадает со второй формой для прямого стержня.

Из приведенной формулы видно, что появление шарниров в шпангоутном кольце в значительной степени уменьшает его устойчивость.

§ 76. Практическая схема расчета составного шпангоута

Дано: конструктивная схема и схема нагрузки составного шпангоута (см. рис. 127).

Требуется определить возникающие в шпангоуте напряжения и проверить его устойчивость. Последовательность выполнения расчета может быть принята следующей:

1. Предварительно находим моменты инерции I_x поперечного сечения круговых стержней с присоединенными к ним поясками обшивки прочного корпуса ширину, равной шпации. После этого производим определение моментов сопротивления для крайних полоним присоединенного W'_x и свободного W''_x поясков круговых стержней.

2. Проверим составной шпангоут с точки зрения рациональности его конструкции, а именно:

а) правильности выбора очертаний книц и бракет (§ 71, § 72, п. 5);
б) возможности отнесения нижних круговых стержней к полоним стержням (проверка соотношений (62. VIII), (63. VIII)).

3. Производим вычисление напряжений в стержнях составного шпангоута по ф-лам (76. VIII) — (79. VIII), в которых f_c определяются по ф-лам (80. VIII). Для определения неизвестных сжимающих усилий T_1 и T_2 необходимо знать их определяющие отрезки, которые находятся согласно рис. 126.

4. Выполним проверку устойчивости шпангоута, заключающуюся в проверке устойчивости шпангоута в целом (см. ф-лу (112. VIII)). При учете разгружающего влияния поперечных переборок используется ф-ла (324. IV). Критическое давление определяется по формуле

$$q_{кр} = \pi^2 E I_x / l^2. \quad (120. VIII)$$

При проверке устойчивости стержней, составляющих шпангоут, используется ф-ла (117. VIII). Получающаяся при этом погрешность направлена в безопасную сторону за счет того, что ф-ла (117. VIII) выведена для случая шарнирного опирания концов стержня, а то время как в действительности имеет место некоторая их заделка. В первую очередь на устойчивость проверятся верхний стержень. Нижние стержни опасней их вызывают, если их профиль одинаков с профилем верхнего стержня.

ГЛАВА IX

РАСЧЕТ НЕКРУГОВЫХ ШПАНГОВУТОВ

§ 77. Виды некруговых шпангоутов

Шпангоуты прочного корпуса подводной лодки в оконечностях, исходя из соображений размещения и более полного использования внутреннего объема корпуса, иногда выполняют не кругового сечения, а овального.

Овальное сечение часто имеет также поперечное сечение прямых рубок. Таким образом, появляется необходимость расчета некруговых шпангоутов.

Некруговые шпангоуты могут быть выполнены либо эллиптического сечения, либо составлены из круговых стержней различного радиуса.

Наиболее часто встречаются овальные шпангоуты, составленные из двух пар круговых стержней (рис. 162). В технологическом отношении изготовление таких шпангоутов является наиболее простым.

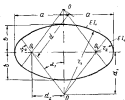


Рис. 162

Соотношения, полученные для круговых стержней в § 68, оказываются весьма полезными при расчете такого рода шпангоутов.

В настоящей главе будут рассмотрены расчеты некругового шпангоута, составленного из круговых стержней, и эллиптического шпангоута. При этом следует помнить, что профиль некругового шпангоута определяется, как правило, исходя из его сопротивления изгибу, а то время как профиль кругового шпангоута определяется его сопротивлением сжатию, т. е., по существу, устойчивостью.

§ 78. Расчет некруговых шпангоутов, состоящих из круговых стержней различного радиуса

1. Разрешение статической неопределенности

Пусть жесткости по отношению к изгибу круговых стержней радиусов r_1 и r_2 соответствуют EI_1 и EI_2 (см. рис. 162).

Высота профилей обеих стержней различна, поэтому расстояния линий приложения нагрузки q от нейтральных осей стержней e_1 и e_2 также различны.

Если бы отсутствовал поворот сечений шпангоута в месте перехода одного кругового стержня в другой, то во всех поперечных сечениях кругового стержня радиуса r_1 действовало бы сжимающее усилие $q r_1$, а в поперечных сечениях стержня радиуса r_2 — сжимающее усилие $q r_2$.



Рис. 163

Наличие поворота переходных сечений шпангоута приводит к появлению в круговых стержнях значительных дополнительных напряжений изгиба. Рассмотрим раздельно деформацию сжатия и деформацию изгиба овального шпангоута.

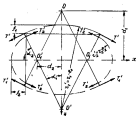


Рис. 164

Для выделения из общей деформации овала простого сжатия приложим в его переходных сечениях равные, но противоположно направленные силы $q r_1$ и $q r_2$, касательные к нейтральным осям круговых стержней (рис. 165).

Условия $T_1 = q r_1$ и $T_2 = q r_2$, совместно с гидростатическим давлением q , согласно лемме I, вызовут в круговых стержнях простое сжатие.

Остальные усилия $T'_1 = q r'_1$ и $T'_2 = q r'_2$, действующие в четырех переходных сечениях овала (рис. 164), вызовут изгиб и некоторое дополнительное сжатие круговых стержней.

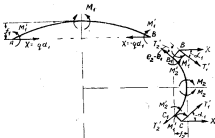


Рис. 165

Определим горизонтальную составляющую усилий T'_1 и T'_2 , которые будут восприниматься только круговыми стержнями, очерченными из точек O и O' . Она оказывается равной

$$X = (T'_2 - T'_1) \cos \alpha_1 = q (r_2 - r_1) \cos \alpha_1 = -q d_1. \quad (1. IX)$$

Вертикальная составляющая усилий T'_1 и T'_2 , воспринимаемая только стержнями, очерченными из точек O_1 и O'_1 , равняется

$$Y = (T'_1 - T'_2) \sin \alpha_1 = q (r_1 - r_2) \sin \alpha_1 = q d_2. \quad (2. IX)$$

Используя уравнения статики, можно получить следующее соотношение между изгибающими моментами M'_1 и M'_2 , действующими в переходном сечении в стержнях радиуса r'_1 и r'_2 (рис. 165):

$$\begin{aligned} M'_1 &= M'_2 - (e_1 - e_2) (T'_1 + X \cos \alpha_1) = \\ &= M'_2 - (e_2 - e_1) (q r_1 \sin^2 \alpha_1 + q r_2 \cos^2 \alpha_1). \end{aligned} \quad (3. IX)$$

Приравняв друг другу угол поворота круговых стержней AB и BB_1C_1C в переходном сечении и используя равенство (3. VIII), получим уравнение для определения неизвестного момента M'_1 :

$$\frac{r'_1}{2EI_1} [M'_1 \Phi_1(\alpha_1) + r'_1 X \Phi_2(\alpha_1)] + \frac{r'_2}{2EI_2} [M'_2 \Phi_1(\alpha_2) + r'_2 Y \Phi_2(\alpha_2)] = 0, \quad (4. IX)$$

где $r'_1 = r_1 - e_1$; $r'_2 = r_2 - e_2$.

Используя соотношения (1. IX) — (3. IX), можно уравнению (4. IX) придать вид

$$M_1' \left[\frac{r_1'}{2I_1} \delta_1(a_1) + \frac{r_1'}{2I_1} \delta_1(a_2) \right] - (e_2 - e_1) \frac{r_1'}{2I_1} \delta_1(a_2) (qr_1 \sin^2 a_1 + qr_2 \cos^2 a_1) + \\ + \frac{(r_1')^2}{2I_1} q d_1 \delta_1(a_2) - \frac{(r_1')^2}{2I_2} q d_2 \delta_1(a_2). \quad (5. IX)$$

Решив уравнение (5. IX) относительно M_1' , получим

$$M_1' = qr_1' d_1 \frac{\delta_1(a_2) - \left(\frac{r_2'}{r_1'} \right)^2 \frac{I_1}{I_2} \cdot \frac{d_2}{d_1} \delta_1(a_2)}{a_1 + \frac{r_2'}{r_1'} \cdot \frac{I_1}{I_2} a_2} + \\ + q(e_2 - e_1) (r_1 \sin^2 a_1 + r_2 \cos^2 a_1) \frac{\frac{r_2'}{r_1'} \cdot \frac{I_1}{I_2} a_2}{a_1 + \frac{r_2'}{r_1'} \cdot \frac{I_1}{I_2} a_2}. \quad (6. IX)$$

Подставляя найденное значение M_1' в выражение (3. IX), найдем значение M_2'

$$M_2' = qr_1' d_1 \frac{\delta_1(a_2) - \left(\frac{r_2'}{r_1'} \right)^2 \frac{I_1}{I_2} \cdot \frac{d_2}{d_1} \delta_1(a_2)}{a_1 + \frac{r_2'}{r_1'} \cdot \frac{I_1}{I_2} a_2} - q(e_2 - e_1) \frac{a_1 (r_1 \sin^2 a_1 + r_2 \cos^2 a_1)}{a_1 + \frac{r_2'}{r_1'} \cdot \frac{I_1}{I_2} a_2}. \quad (7. IX)$$

Выражения для изгибающих моментов, действующих на концах полуосей овала, запишутся в виде следующих соотношений:

$$\left. \begin{aligned} M_2 &= M_1' + Xf_1 = M_1' - qd_1 f_1 \\ M_2 &= M_2' + Yf_1 = M_2' + qd_2 f_2 \end{aligned} \right\} \quad (8. IX)$$

непосредственно следующих из рис. 165.

3. Выбор основных элементов овала

Определим зависимости между элементами овала и длинами его полуосей, для чего обратимся к рис. 162. Из рассмотрения рисунка следует, что

$$d_1 = d \cos a_1, \quad d_2 = d \sin a_1 \quad (9. IX)$$

и

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= b + d_1 = b + d \cos a_1 \\ r_2 &= a - d_2 = a - d \sin a_1 \end{aligned} \right\} \quad (10. IX)$$

Из выражений (10. IX) можно определить, что

$$d = r_1 - r_2 = \frac{a-b}{\sin \alpha_2 + \cos \alpha_1 - 1}. \quad (11. IX)$$

После этого из выражений (9. IX) можно найти значения d_1 и d_2 . Остальные элементы овала определяются следующими зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} r_1' &= r_1 - e_1 & f_1 &= r_1' (1 - \cos \alpha_1) \\ r_2' &= r_2 - e_2 & f_2 &= r_2' (1 - \cos \alpha_2) \end{aligned} \right\} \quad (12. IX)$$

Величины e_1 и e_2 определяются в процессе подбора сечений круговых стержней, из которых образуется овальный шпильгонт. В первом приближении их можно принять равными нулю.



Рис. 166

При $\alpha_1 = 0$ овал обращается в две полуокружности, соединенные прямыми линиями, а при $\alpha_1 = 2 \arctg \frac{b}{a}$ имеет вид, показанный на рис. 166.

Разность радиусов, от которой в конечном счете зависит изгиб овала, является при заданных значениях a и b функцией угла α_1 (см. ф-лу (11. IX)) и обращается в минимум при $\alpha_1 = 45^\circ$. Поэтому увеличение угла α_1 больше 45° нецелесообразно ни с точки зрения увеличения полноты овала, ни с точки зрения разгрузки его от изгибающих моментов. При достаточно малых значениях отношения $b : a$ увеличить угол α_1 даже до 45° затруднительно. Поэтому угол α_1 выбирают несколько меньше 45° .

3. Определение наименьших длин полуосей овала

Наименьшие длины полуосей овала в результате его деформации можно определять, если воспользоваться соотношениями (9. VIII) и (7. VIII), то выражением:

$$\begin{aligned} \delta a &= -\frac{(r_1')^3}{E I_1} [M_1' \vartheta_2(\alpha_1) + r_1' X \vartheta_4(\alpha_1)] + \\ &+ \frac{(r_2')^3}{E I_2} [M_2' \vartheta_2(\alpha_2) + r_2' Y \vartheta_4(\alpha_2)], \end{aligned} \quad (13. IX)$$

$$\begin{aligned} \delta b &= -\frac{(r_1')^3}{E I_1} [M_1' \vartheta_2(\alpha_1) + r_1' X \vartheta_4(\alpha_1)] - \\ &- \frac{(r_2')^3}{E I_2} [M_2' \vartheta_2(\alpha_2) + r_2' Y \vartheta_4(\alpha_2)], \end{aligned} \quad (14. IX)$$

Подставляя в выражения (13.IX) и (14.IX) значения M'_1 и M'_2 из ф-л (6.IX) и (7.IX), а X и Y из ф-л (1.IX) и (2.IX), будем иметь

$$\left. \begin{aligned} 2a &= q \frac{(r'_1)^2}{E I_1} [(a-b) m_1 + (e_1 - e_2) n_1] \\ -2b &= q \frac{(r'_1)^2}{E I_1} [(a-b) m_2 + (e_2 - e_1) n_2] \end{aligned} \right\}, \quad (15.IX)$$

где m_1, m_2, n_1, n_2 — некоторые определенные отвлеченные числа.

Выражения (15.IX) получены в предположении, что нагрузка q мала, и, следовательно, изменение формы овала незначительно. Если на овал действует значительная внешняя нагрузка q , вызывающая существенное изменение формы овала, то полученные результаты в первом приближении можно исправить. Для этого подставим в ф-лы (15.IX) вместо исходной разности $a - b$ значение $a_1 - b_1$, соответствующее нагруженному состоянию овала, будем иметь

$$a_1 - b_1 = (a + 2a) - (b + 2b).$$

В результате получим следующую систему уравнений для определения $2a$ и $2b$:

$$\left. \begin{aligned} 2a &= q(a-b) \frac{(r'_1)^2}{E I_1} m_1 + q(e_1 - e_2) \frac{(r'_1)^2}{E I_1} n_1 + \\ &\quad + q \frac{(r'_1)^2}{E I_1} m_1 (2a - 2b) \\ 2b &= -q(a-b) \frac{(r'_1)^2}{E I_1} m_2 - q(e_2 - e_1) \frac{(r'_1)^2}{E I_1} n_2 - \\ &\quad - q \frac{(r'_1)^2}{E I_1} m_2 (2a - 2b) \end{aligned} \right\}, \quad (16.IX)$$

которую можно переписать в таком виде:

$$\left[1 - q \frac{(r'_1)^2}{E I_1} m_1 \right] 2a + q \frac{(r'_1)^2}{E I_1} m_1 2b = q(a-b) \frac{(r'_1)^2}{E I_1} m_1 +$$

$$+ q(e_1 - e_2) \frac{(r'_1)^2}{E I_1} n_1$$

$$+ q \frac{(r'_1)^2}{E I_1} m_2 2a + \left[1 - q \frac{(r'_1)^2}{E I_1} m_2 \right] 2b = -q(a-b) \frac{(r'_1)^2}{E I_1} m_2 -$$

$$- q(e_2 - e_1) \frac{(r'_1)^2}{E I_1} n_2.$$

В результате находим

$$\delta a = q \frac{(r_1')^3}{E I_1} \left[\frac{(a-b)m_1}{1 - \frac{q}{q_0}} + \frac{(n_1 - n_2) \left[n_1 - (m_1 n_1 - m_2 n_2) q \frac{(r_1')^3}{E I_1} \right]}{1 - \frac{q}{q_0}} \right], \quad (17. IX)$$

$$\delta b = -q \frac{(r_1')^3}{E I_1} \left[\frac{(a-b)m_2}{1 - \frac{q}{q_0}} + \frac{(n_1 - n_2) \left[n_2 - (m_1 n_1 - m_2 n_2) q \frac{(r_1')^3}{E I_1} \right]}{1 - \frac{q}{q_0}} \right], \quad (18. IX)$$

где

$$q_0 = \frac{E I_1}{(r_1')^3} \cdot \frac{1}{m_1 + m_2}. \quad (19. IX)$$

Из выражений (17. IX) и (18. IX) видно, что с увеличением гидростатического давления q приращение длины полуосей овала происходит не пропорционально возрастанию q , а приблизительно пропорционально выражению

$$\frac{q}{1 - \frac{q}{q_0}}, \quad (20. IX)$$

где q_0 определяется выражением (19. IX) и является приближенным значением эйлеровой нагрузки на овал.

Для учета этого обстоятельства изгибающие моменты, определяемые по формулам (6. IX), (7. IX) и (8. IX), следует умножить на множитель $k = \frac{1}{1 - \frac{q}{q_0}}$, который всегда больше единицы.

§ 19. Расчет эллиптических шпангоутов *

1. Определим величины изгибающих моментов без учета изменения длины полуосей

Определим величину изгибающих моментов, возникающих в шпангоуте эллиптического сечения, нагруженного внешним равномерным давлением интенсивности q . При определении изгибающих моментов примем следующие предположения.

1. Нейтральная ось шпангоута совпадает с контуром, к которому приложено внешнее давление q .

2. Деформациями сдвига и сжатия (растяжения) пренебрегаем по сравнению с деформацией изгиба.

3. Поперечное сечение шпангоута постоянно по всему периметру.

4. При расчете эллиптических шпангоутов будем учитывать присоединенный пояс обшивки шириною $1,55 \sqrt{R}$, где r — наибольший радиус кривизны, но не более шпация.

5. Рассматриваемый шпангоут является достаточно жестким, что позволяет при определении изгибающего момента исходить из его первоначальной формы.

* Метод расчета эллиптических шпангоутов заимствован из статьи В. В. Новожилова "Расчет прочности эллиптического шпангоута подводной судна". Сб. НИИВК МС РККА, № 4, 1935 (то же см. в работе П. Ф. Павлова "Труды по строительной механике корабля", Т. 2, Судпроект, 1962).

В силу симметрии как нагрузки, так и конструкции эллиптического шпангоута относительно его осей, будем рассматривать не весь шпангоут, а лишь четвертую его часть, показанную на рис. 167.

Раскрытие статической неопределимости эллиптического шпангоута произведем с помощью теоремы Кастельяно.

Изгибающий момент в произвольном сечении шпангоута с координатами x и y определяется следующим выражением (см. рис. 167):

$$M = M_1 - R(a - x) + \\ + \frac{q}{2} [(a - x)^2 + y^2], \quad (21. IX)$$



Рис. 167

где a и b — полуоси эллипса.

Учитывая, что $R = qa$, $x^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2} y^2$, выражение (21. IX) можно представить в виде

$$M = M_1 - \frac{q}{2} \cdot \frac{a^2 - b^2}{b^2} y^2. \quad (22. IX)$$

Неизвестный момент M_1 можно определить из условия неповорачиваемости конечных сечений.

Развернув выражение для определения M_1

$$\frac{\delta V}{\delta M_1} = \int_0^b M_1 \frac{\delta M}{\delta M_1} ds = 0,$$

будем иметь

$$M_1 \int_0^b ds - \frac{q}{2} \cdot \frac{a^2 - b^2}{b^2} \int_0^b y^2 ds = 0,$$

откуда

$$M_1 = \frac{q}{2} \cdot \frac{a^2 - b^2}{b^2} \cdot \frac{\int_0^b y^2 ds}{\int_0^b ds}. \quad (23. IX)$$

Для вычисления интегралов выражения (23. IX) воспользуемся параметрической формой задания эллипса

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta.$$

В этом случае квадрат дифференциала дуги эллипса будет равен

$$(ds)^2 = (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta) (d\theta)^2 = [a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 \theta] (d\theta)^2.$$

Используя выражение для квадрата эксцентриситета эллипса $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$, дифференциал дуги эллипса можно записать в виде

$$ds = a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta} d\theta, \quad (24. IX)$$

С помощью ф-лы (24. IX) выражению для момента M_1 (23. IX) можно придать вид

$$M_1 = \frac{q}{2} \cdot \frac{a^2 - b^2}{b^2} \cdot \frac{K}{L}, \quad (25. IX)$$

где

$$\left. \begin{aligned} K &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2 ds = ab^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \psi \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi} d\psi \\ L &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ds = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi} d\psi \end{aligned} \right\} \quad (26. IX)$$

Выражения (26. IX) представляют собою эллиптические интегралы. Эллиптические интегралы в конечном виде не могут быть определены, однако их можно вычислить с любой степенью точности, разложив подынтегральные выражения по правилу бинома Ньютона. Ограничиваясь малыми порядками e^2 , получим

$$\left. \begin{aligned} K &= ab^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{e^2}{2} \cos^2 \psi\right) \sin^2 \psi d\psi = ab^2 \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{e^2}{8}\right) \\ L &= a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{e^2}{2} \cos^2 \psi\right) d\psi = a \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{e^2}{4}\right) \end{aligned} \right\} \quad (27. IX)$$

В результате имеем

$$M_1 = \frac{q}{2} \cdot \frac{a^2 - b^2}{b^2} \cdot \frac{ab^2}{a} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{e^2}{8}}{1 - \frac{e^2}{4}} \approx \frac{q}{4} a^2 e^2 \left(1 + \frac{e^2}{8}\right). \quad (28. IX)$$

Изгибающий момент в конце малой оси получим, если в выражение (22. IX) вместо y подставим b .

Принимая подстановку, будем иметь следующее выражение для M_2 :

$$M_2 = M_1 - \frac{q}{2} (a^3 - b^3) = M_1 - \frac{q}{2} a^2 e^2 = - \frac{q}{4} a^2 e^2 \left(1 - \frac{e^2}{8}\right). \quad (29. IX)$$

Выражения (28. IX) и (29. IX) изгибающих моментов M_1 и M_2 справедливы для достаточно жестких шпангоутов, деформацией которых после их нагружения можно пренебречь.

Если же жесткость шпангоутов мала и деформации после нагружения шпангоутов оказываются значительными, то определение величин изгибающих моментов следует производить с учетом изменения длин полуосей эллиптического шпангоута.

3. Определение величины изменения длин полуосей эллиптического шпангоута

Для определения величины изменения полуосей эллиптического шпангоута воспользуемся теоремой Кастальяно аналогично тому, как определялись перемещения концов круговых стержней.

Окончательные выражения для перемещений валикатического шпингоута в направлении его полуосей будут

$$z_a = - \int_0^1 \left(M_{1,y} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \sigma^2 y^2 \right) \frac{dz}{EI},$$

$$z_b = - \int_0^1 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \sigma^2 y^2 x - M_{1,x} \right) \frac{dz}{EI}.$$

Ограничиваясь при вычислении интегралов малыми порядками σ^2 , можно эти выражения привести к виду

$$z_a \approx \frac{\sigma^2 \sqrt{ab}}{12EI} \sigma^2, \quad (30. IX)$$

$$z_b \approx \frac{\sigma^2 \sqrt{ab}}{12EI} \sigma^2. \quad (31. IX)$$

Найдем новое значение эксцентриситета эллипса и уточним полученные выражения (30. IX) и (31. IX) путем подстановки в них новых значений длин полуосей. Новое значение эксцентриситета определим по выражению

$$e_1^2 = \frac{(a + \frac{1}{2} z_a)^2 - (b - \frac{1}{2} z_b)^2}{(a + \frac{1}{2} z_a)^2}.$$

Ограничиваясь, как и раньше, малыми порядками σ^2 , получим*

$$e_1^2 = \frac{\left(a + \frac{1}{2} z_a\right)^2 - (b - \frac{1}{2} z_b)^2}{\left(a + \frac{1}{2} z_a\right)^2} =$$

$$= \frac{a^2 b + 4ab z_a}{a^2 + 2ab z_a} \approx \frac{a^2 - b^2}{a^2} + \frac{4b}{a^2} z_a = e_0^2 + \frac{4b}{a^2} z_a. \quad (32. IX)$$

Подставляя найденное значение e_1^2 в ф-лу (31. IX), получим

$$z_b = \frac{\sigma^2 \sqrt{ab}}{12EI} \left(e_0^2 + \frac{4b}{a^2} z_a \right).$$

Решая это уравнение относительно z_b , находим

$$z_b = \frac{\frac{\sigma^2 \sqrt{ab}}{12EI} e_0^2}{1 - \frac{\sigma^2 \sqrt{ab}}{3EI}}. \quad (33. IX)$$

Формула (33. IX) дает результат, близкий к полученному по выражению (31. IX) до тех пор, пока $\frac{\sigma^2 \sqrt{ab}}{3EI}$ значительно меньше единицы.

* Если отбросить слагаемые (30. IX) и (31. IX), получим $\frac{z_a}{z_b} = \frac{b}{a}$, откуда $z_a = \frac{b}{a} z_b$.

Условие равенства нулю знаменателя выражения (33. IX) определяет критическое давление эллиптического шпангоута

$$q_{cr} = \frac{32E}{\sqrt{ab^3}}. \quad (34. IX)$$

Следует иметь в виду, что соотношения (32. IX) и (33. IX) получены в предположении малости $\frac{3b}{a}$ по сравнению с единицей.

3. Определение эллипсы изгибающих моментов с учетом деформации полусей

Для учета эллипсы деформации полусей эллипса на величину изгибающих моментов в конце большой и малой полусей, подставим в выражения (28. IX) и (29. IX) новое значение эксцентриситета. Согласно выражению (32. IX), пишем

$$e_1^2 = e_0^2 + \frac{4b}{a^2} \delta b.$$

Выражение (33. IX) с помощью (34. IX) можно представить в виде

$$\delta b = \frac{\frac{32E}{12EF} \sqrt{ab} \cdot e_0^2}{1 - \frac{32E}{32EF} \sqrt{ab}} \approx \frac{a^2}{4b} \cdot \frac{\frac{q}{q_{cr}} e_0^2}{1 - \frac{q}{q_{cr}}} \quad (35. IX)$$

и, следовательно,

$$e_1^2 = e_0^2 \left(1 + \frac{\frac{q}{q_{cr}}}{1 - \frac{q}{q_{cr}}} \right) = \frac{e_0^2}{1 - \frac{q}{q_{cr}}}. \quad (36. IX)$$

Подставляя ф-лу (36. IX) в выражения (28. IX) и (29. IX), окончательно получим

$$M_1 = \frac{q a^3}{4} \cdot \frac{e_0^2}{1 - \frac{q}{q_{cr}}} \left[1 + \frac{e_0^2}{8 \left(1 - \frac{q}{q_{cr}} \right)} \right], \quad (37. IX)$$

$$M_2 = - \frac{q a^3}{4} \cdot \frac{e_0^2}{1 - \frac{q}{q_{cr}}} \left[1 - \frac{e_0^2}{8 \left(1 - \frac{q}{q_{cr}} \right)} \right]. \quad (38. IX)$$

Формула (37. IX) всегда дает большее значение момента по сравнению со значением, получаемым по выражению (28. IX).

Допустим, что эллиптический шпангоут имеет двойной запас устойчивости $q_{cr} = 2q$, тогда результаты, полученные по ф-лам (28. IX) и (37. IX), могут различаться больше чем в два раза. Учитывая относительно малость принимаемого запаса прочности для рассчитываемых конструкций, легко видеть, насколько большее значение имеет учет деформации, появляющейся после приложения нагрузки.

Если обратиться к выражению (35. IX), то из него следует, что при $q = q_{cr}$ эксцентриситет e_1^2 обращается в бесконечность, что невозможно, поскольку $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$.

Такое несоответствие является результатом предположения пренебрежимости Δb по сравнению с a и b , что в момент потери устойчивости не выполняется. Поэтому все зависимости этого параграфа следует считать неверными вблизи давления $q \approx q_{кр}$. Но в то же время она достаточно точна при деформациях малых по сравнению с размерами самого шпангоута (например, деформация $\Delta b > 0,05 b$ является уже недопустимой, поскольку при ней ф-ла (35. IX) приводит к большой погрешности).

Что касается определения напряжений в двух характерных сечениях шпангоутов, то они вычисляются по формуле:

а) на конце большой полуоси эллипса

$$\sigma_1 = -\frac{q(a + \Delta a)}{F} \pm \frac{M_1}{W_1}, \quad (39. IX)$$

б) на конце малой полуоси эллипса

$$\sigma_2 = -\frac{q(b - \Delta b)}{F} \pm \frac{M_2}{W_2}. \quad (40. IX)$$

где F — площадь поперечного сечения;

W_1 и W_2 — моменты сопротивления в конце большой и малой полуосей для внутренних и внешних волокон.

В эллиптических шпангоутах с большим эксцентриситетом изгибающие моменты оказываются настолько значительными, что для их восприятия приходится сильно разнать поперечные сечения колыма. При этом $q_{кр}$ оказывается настолько большим, что давлением q по сравнению с $q_{кр}$ можно пренебречь.

Формулы (30. IX) и (31. IX) могут оказаться весьма полезными при оценке жесткости конструкции, являющейся с точки зрения прочности приемлемой.

4. Определение тангентальной сжимающей силы

Аналогично предыдущему рассмотрим четвертую часть эллиптического шпангоута (рис. 168). Перерезывающая сила в сечении шпангоута, определяемом нормалью NN , представляет собою проекцию на эту нормаль сил, действующих справа от этого сечения, а именно:

$$Q = qa \cos \alpha - \int q \cos(N, \alpha) dx,$$

где N, α — угол между нормалью NN и нормалью к произвольному сечению αx .

Так как

$$\int q \cos(N, \alpha) dx = qNA = qKA \cos \alpha,$$

то

$$Q = q(a - KA) \cos \alpha = qOK \cos \alpha.$$

Расстояние OK может быть вычислено по уравнению нормали к эллипсу $OK = a^2/x$, откуда $Q = qa^2/x \cos \alpha$.

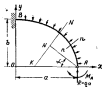


Рис. 168

Из тригонометрии известно, что

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{x^2}{y^2}}} = \frac{1}{a \sqrt{1 - e_0^2 \frac{x^2}{y^2}}}.$$

Поэтому окончательно получаем следующее выражение для перерезывающей силы:

$$Q = \frac{qxy}{b \sqrt{1 - e_0^2 \frac{x^2}{y^2}}} e_0^2 \quad (41. IX)$$

Перерезывающая сила достигает максимума при $x \approx \frac{a}{\sqrt{2}}$ и $y \approx \frac{b}{\sqrt{2}}$.

Если же точнее определять координаты, где перерезывающая сила достигает максимума, то будем иметь

$$x \approx \frac{a}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{e_0^2}{8} \right); \quad y \approx \frac{b}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{e_0^2}{8} \right).$$

При этом значение перерезывающей силы будет

$$Q_{\max} \approx \frac{qay_0^2}{2 \sqrt{1 - \frac{e_0^2}{2}}} = \frac{qay_0^2}{2} \left(1 + \frac{e_0^2}{4} \right).$$

Подставляя окончательное значение эксцентриситета по ф-ле (36. IX), получим

$$Q_{\max} \approx \frac{qy}{2} \cdot \frac{e_0^2}{1 - \frac{e_0}{4\varphi}} \left[1 + \frac{e_0^2}{4 \left(1 - \frac{e_0}{4\varphi} \right)} \right] \quad (42. IX)$$

3. Взаимосвязь усилий на валлерс с одной из осей

Рассмотрим один из вариантов конструктивного выполнения эллиптического шпангоута, когда последний усилен путем установки валлерс по направлению большой или малой оси эллипса.

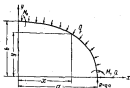


Рис. 359

обжатия валлерс. Пусть ось валлерс совпадает с большой осью эллипса. Рассматривая опять четвертую часть эллиптического шпангоута

(рис. 169), найдем, что изгибающий момент в его произвольном сечении определяется выражением

$$M = M_1 - \frac{qa^2}{2s} \epsilon_0^2 y^2 + yQ. \quad (43. IX)$$

Условие неперемещаемости сечения у конца большой полуоси записывается так:

$$\frac{\partial V}{\partial M_1} = \frac{1}{EI} \int_0^l \left(M_1 - \frac{qa^2}{2s} \epsilon_0^2 y^2 + yQ \right) ds = 0.$$

Условие равенства смещения этого сечения шпангоута и обжатия пиллерса имеет вид

$$\frac{\partial V}{\partial Q} = \frac{1}{EI} \int_0^l \left(M_1 - \frac{qa^2}{2s} \epsilon_0^2 y^2 + yQ \right) y ds = \frac{2Qs}{EF_1},$$

где F_1 — площадь сечения пиллерса.

Для последующих уравнения образуют систему для определения неизвестных M_1 и Q :

$$\left. \begin{aligned} M_1 \int_0^l ds - \frac{qa^2}{2s} \epsilon_0^2 \int_0^l y^2 ds + Q \int_0^l y ds &= 0 \\ M_1 \int_0^l y ds - \frac{qa^2}{2s} \epsilon_0^2 \int_0^l y^3 ds + Q \int_0^l y^2 ds &= \frac{2Qsl}{F_1} \end{aligned} \right\}. \quad (44. IX)$$

Решая эти уравнения относительно M_1 и считая, что пиллерс является абсолютно жестким на сжатие и растяжение, получим

$$M_1 = -\frac{qa^2 \epsilon_0^2}{2s} \cdot \frac{\left(\int_0^l y^2 ds \right)^2 - \int_0^l y ds \int_0^l y^3 ds}{\int_0^l ds \int_0^l y^2 ds - \left(\int_0^l y ds \right)^2}. \quad (45. IX)$$

Приближенные значения интегралов, входящих в выражение (45. IX), равны

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l ds &= \frac{\pi}{2} a \left(1 - \frac{\epsilon_0^2}{4} \right) & \int_0^l y ds &= ab \left(1 - \frac{\epsilon_0^2}{6} \right) \\ \int_0^l y^2 ds &= \frac{\pi}{4} ab^2 \left(1 - \frac{\epsilon_0^2}{8} \right) & \int_0^l y^3 ds &= \frac{2}{3} ab^3 \left(1 - \frac{\epsilon_0^2}{10} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (46. IX)$$

Подставляя эти значения интегралов в ф-лу (45. IX), получим

$$M_1 \approx \frac{qa^2e_0^2}{2} \cdot \frac{\frac{\pi^2}{18} \left(1 - \frac{e_0^2}{4}\right) - \frac{2}{3} \left(1 - \frac{4}{18}e_0^2\right)}{\frac{\pi^2}{8} \left(1 - \frac{8}{8}e_0^2\right) - \left(1 - \frac{e_0^2}{3}\right)} \approx$$

$$\approx -0,105 qa^2e_0^2 (1 + 0,077 e_0^2) \approx -0,105 qa^2e_0^2. \quad (47. IX)$$

Если решить ур-ния (44. IX) относительно Q , то получим

$$Q \approx 0,567 \frac{2\pi^2}{8} e_0^2 (1 + 0,012 e_0^2) \approx 0,567 \frac{\pi^2}{4} e_0^2. \quad (48. IX)$$

Изгибающий момент M_2 в сечении у конца малой полуоси определяется по ф-ле (43. IX). Подстановка в эту формулу b вместо y и значений M_1 и Q , согласно ф-лам (47. IX) и (48. IX), дает

$$M_2 \approx -0,038 qa^2e_0^2. \quad (49. IX)$$

Из выражений (47. IX) и (49. IX) видно, что наибольшим является изгибающий момент M_1 , действующий в конце большой полуоси. Однако напряжения не всегда имеют наибольшие значения именно в этих сечениях. Объясняется это тем, что напряжения, возникающие в штампуе, обусловлены не только изгибающим моментом, но и сжимающим усилием, являющимся функцией радиуса кривизны и достигающим наибольшего значения в конце малой полуоси.

Перерывающая сила достигнет наибольшего значения в сечении у конца полуоси a и определяется по ф-ле (48. IX), а сила, сжимающая пиллерс, по формуле

$$P = 2Q = 1,134 q \frac{\pi^2}{8} e_0^2. \quad (50. IX)$$

Если пиллерс установлен не по большой, а по малой осм, то будем иметь следующие выражения:

изгибающий момент в месте установки пиллерса

$$M_1 = 0,105 qa^2e_0^2, \quad (51. IX)$$

сила, сжимающая пиллерс, будет равна

$$P = 2Q = -1,134 qa^2e_0^2. \quad (52. IX)$$

В этом случае наибольшие напряжения возникают всегда в крайнем внутреннем волокне вблизи пиллерса и определяются по выражению

$$\sigma = \frac{M_2}{W} + \frac{q^b}{r}. \quad (53. IX)$$

Следует отметить, что пиллерс, установленный вдоль малой полуоси, находится в состоянии сжатия.

ГЛАВА X

РАСЧЕТЫ МЕСТНОЙ ПРОЧНОСТИ

§ 80. Основные понятия

В корпусе подводной лодки имеется много различного рода местных подкреплений. Эти подкрепления корпуса предназначены для выполнения одной из двух основных функций: либо восприятия различных местных нагрузок, приложенных к конструкциям корпуса, либо восстановления прочности корпуса в районах его ослабления, вызванного теми или иными причинами.

К числу подкреплений, предназначенных для выполнения первой из отмеченных функций, относятся ледовые подкрепления, подкрепления под торпедные аппараты, механизмы и устройства, подкрепления в районе подъемных рымов и т. д. Эти подкрепления ничем не отличаются от подкреплений надводных кораблей, и поэтому в настоящей главе их расчеты прочности не рассматриваются.

Вторую группу подкреплений составляют подкрепления корпуса в районе его ослаблений. Наличие в прочном корпусе подводных лодок различных вырезов для люков, шахт, а также отдельных выемки или выпучки, полученных в период постройки корпуса вследствие сварки или в период его эксплуатации, также приводит к ослаблению прочного корпуса. Хотя это ослабление и является местным, т. е. охватывает сравнительно небольшой район у выреза или выемки, тем не менее оно может быть причиной разрушения прочного корпуса. Поэтому расчетам местной прочности корпуса во всех случаях необходимо уделять серьезное внимание.

Рассмотрение влияния начальной погни в обшивке и шпангоутах прочного корпуса на его прочность и устойчивость выходит за рамки программы курса. Отметим лишь, что действующими нормами и правилами регламентируются величины допускаемых начальных отклонений обшивки и шпангоутов от правильной формы, при которых эти местные отклонения практически не влияют на прочность и устойчивость корпуса. Поэтому расчеты местной прочности в данном случае производятся только в тех районах, где фактическая начальная погни превышает допускаемые нормы.

Так как большой практический интерес представляет исследование прочности корпуса в районе ослаблений, вызванных наличием вырезов и выпучек гребных валов, то ограничимся рассмотрением вопроса местной прочности только в упомянутых районах.

§ 81. Расчет прочности подкреплений вырезов

Вырезы в обшивке прочного корпуса, как правило, имеют круговое очертание, и только в районе торпедоогруженных люков вырезы имеют овальную форму.

Все вырезы в прочном корпусе могут быть разделены на три группы:

1. Вырезы, расположенные между шпангоутами.
2. Вырезы, разрезающие один шпангоут.
3. Вырезы, разрезающие несколько шпангоутов.

Естественно, что характер подкреплений корпуса в районе выреза будет зависеть от того, к какой из перечисленных групп принадлежит рассматриваемый вырез.

Вырез, расположенный между шпангоутами

Вырезы этой группы являются наиболее распространенными на подводных лодках. Наличие выреза резко изменяет характер напряженного состояния прочного корпуса в районе выреза. При этом концентрируются зоны концентрации напряжений, т. е. такие зоны, в которых напряжения превышают значения средних, или номинальных, напряжений вне ослабленного вырезом района. Величина концентрации напряжений характеризуется теоретическим коэффициентом концентрации α , представляющим собой отношение максимального напряжения в районе концентрации σ_{max} к среднему, или номинальному, напряжению в неослабленном сечении σ_0 , то есть

$$\alpha = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_0}. \quad (1. X)$$

Обычно расстояние между шпангоутами прочного корпуса мало в сравнении с его радиусом, так что отношение радиуса выреза r_v к радиусу прочного корпуса r ограничено величиной

$$\frac{r_v}{r} \leq 0,2. \quad (2. X)$$

При таком соотношении концентрация напряжений приблизительно может быть определена для случая наличия круглого выреза в плоской пластине, подвергнутой действию сжимающих усилий в двух взаимно перпендикулярных направлениях (рис. 170). Если обшивка прочного корпуса находится в безмоментном напряженном состоянии, то кольцевые и осевые линии напряжения определяются по выражениям

$$\sigma_\theta = -\frac{P}{3}, \quad \sigma_r = -\frac{P}{3k}. \quad (3. X)$$

Величины σ_θ и σ_r определенные по ф-лам (3. X), будем называть средними, или номинальными, напряжениями.

Для случая многого выреза в плоской пластине, нагруженной растягивающими или сжимающими равномерно распределенными усилиями в одном направлении, теоретический коэффициент концентрации напряжений равен трем, т. е. максимальные напряжения в районе концентрации в три раза превышают номинальные напряжения. Загрузив плоскую пластину с вырезом цепными усилиями σ_θ^0 и σ_r^0 в двух взаимно перпендикулярных направлениях и используя решение Кирша для каждого из этих усилий, получим следующие значения максимальных кольцевых

и осевых напряжений в характерных точках A и B , лежащих на концах продольного и поперечного диаметров выреза (см. рис. 170):

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_1)_{\max} &= 3\sigma_0 - \sigma_0 = -\frac{3\sigma_0}{2} + \frac{\sigma_0}{2} = -2,5 \frac{\sigma_0}{2} \\ (\sigma_1)_{\min} &= 3\sigma_0 - \sigma_0 = -3 \frac{\sigma_0}{2} + \frac{\sigma_0}{2} = -0,5 \frac{\sigma_0}{2} \end{aligned} \right\} \quad (4. X)$$

Из формул (4. X) видно, что наличие выреза приводит к концентрации лишь кольцевых напряжений или напряжений в продольных сечениях вблизи точки A . При этом коэффициент концентрации $\alpha=2,5$, т. е. наибольшие напряжения в районе выреза в два с половиной раза превышают номинальное напряжение в не ослабленном вырезом продольном сечении. Из этого, конечно, не следует, что в прочности корпуса в результате ослабления вырезом будет снижена в 2,5 раза.

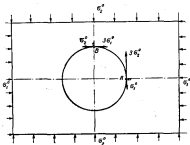


Рис. 170

Действительно, определенный выше коэффициент концентрации напряжений относится к чисто упругой задаче. После достижения напряжения в наиболее опасной точке у выреза предела пропорциональности происходит перераспределение напряжений по ослабленному продольному сечению оболочки. Напряжения в точке A при дальнейшем увеличении нагрузки растут медленнее, чем в близлежащих точках (вследствие уменьшения модуля Юнга за пределом пропорциональности), происходит некоторое выравнивание напряжений и уменьшение коэффициента концентрации. Поэтому влияние концентрации напряжений на прочность определяется не теоретическим коэффициентом концентрации, а так называемым эффективным коэффициентом концентрации. Под эффективным коэффициентом концентрации понимается отношение разрушающей нагрузки оболочки без выреза к разрушающей нагрузке при наличии выреза. Иначе говоря, эффективный коэффициент

концентрации показывает, во сколько раз наличие выреза снижает фактическую прочность оболочки. Эффективный коэффициент концентрации всегда меньше теоретического.

Возникает вопрос о тех подкреплениях, которые необходимо ввести для обеспечения необходимой прочности корпуса. Отметим, что в настоящее время нет теоретических решений, позволяющих определить напряженное состояние корпусных конструкций в районе подкрепленного выреза.* Поэтому обычно даются лишь практические рекомендации по подкреплению вырезов, приемлемость которых подтверждена экспериментальным путем. Рассмотрим эти рекомендации.



Рис. 171

При решении вопроса о подкреплении любого выреза в прочном корпусе подводных лодок необходимым и обязательным условием является полная компенсация потерянной площади сечения. Если толщина обшивки в ослабленном сечении равна δ , а радиус выреза r_n , то потерянная площадь сечения обшивки (или площадь ослабления) будет

$$F_n = 2r_n\delta. \quad (6. X)$$

Таким образом, эта площадь должна быть компенсирована установкой подкрепляющих связей. Недостатком частью подкрепления всех вырезов на подводных лодках является наличие комингсов. Поэтому подкрепление рассматриваемых вырезов может быть осуществлено тремя путями:

- 1) установкой комингса (рис. 171);
- 2) установкой комингса и сварного утолщенного листа (рис. 172);
- 3) установкой комингса и накладного листа (рис. 173).

В случае, когда подкрепление выреза осуществляется установкой только комингса, потерянная площадь сечения корпуса компенсируется дополнительной площадью сечения комингса. Если радиус выреза равен r_n , а толщина комингса равна t_n , то эффективная высота комингса, засчитываемая в его сечение, оказывается равной

$$b_n = 1,53 \sqrt{r_n t_n}$$

и эффективная площадь сечения комингса

$$F_n = 2b_n t_n = 3,1 t_n \sqrt{r_n t_n}. \quad (6. X)$$

* Решения о напряженном состоянии цилиндрической оболочки в районе круглого или эллиптического выреза получены в работе А. И. Лурье (ИММ, Т. X, Вып. X 1946)

для случая, когда $\frac{r_n}{r} \leq \sqrt{\frac{8}{r}}$, и в кандидатской диссертации И. Г. Васильева (ИИИ, 1958) для случая, когда $\frac{r_n}{r} \leq 0,5$.

Так как эта площадь сечения должна быть равна потерянной площади F_n , то

$$3,1t_s \sqrt{r_s t_n} = 2r_s \delta,$$

откуда для необходимой толщины конингса будем иметь

$$t_s = 3 \sqrt[3]{0,4 \frac{r_s}{\delta}}. \quad (7. X)$$

Выполнение условия (7. X) и обеспечит необходимую прочность подкрепления.

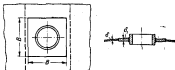


Рис. 172

Наиболее распространенным является подкрепление выреза конингсом и утолщенным сварным листом (см. рис. 172). В рассматриваемом случае площадь сечения подкрепления равна

$$F_1 = 3,1t_s \sqrt{r_s t_n} + (B - 2r_s)(\delta_1 - \delta), \quad (8. X)$$

где B — ширина сварного утолщенного листа;

δ_1 — толщина сварного утолщенного листа.

Приравняв F_1 потерянной площади сечения обшивки, получим

$$3,1t_s \sqrt{r_s t_n} + (B - 2r_s)(\delta_1 - \delta) = 2r_s \delta. \quad (9. X)$$

Из этого равенства и определяются те соотношения t_s , B и δ_1 , которые обеспечивают полную компенсацию потерянной площади сечения. Поскольку неизвестных три, а уравнение одно, можно найти бесчисленное множество соотношений между t_s , B и δ_1 , обеспечивающих удовлетворение равенства (9. X). Обычно ширина утолщенного листа B находится в пределах



Рис. 173

$$2r_s < B < 4r_s, \quad (10. X)$$

т. е. ширина утолщенного листа находится в пределах от полутора до двух диаметров выреза.

Подставив ф-лу (10. X) в ф-лу (9. X), получим те соотношения между толщиной конингса t_s и толщиной утолщенного листа δ_1 , которые обеспечивают компенсацию потерянной площади.

В том случае, когда устанавливается комингс и накладной лист (см. рис. 173), условие компенсации потерянной площади сечения будет

$$3,14 r_1 \sqrt{r_1 t_1} + (B - 2r_2) \delta_2 = 2r_2 \delta_2 \quad (11. X)$$

где δ_2 — толщина накладного листа.

Выполнение подкреплений в соответствии с приведенными рекомендациями обеспечивает необходимую местную прочность корпуса в районе выреза.

Вырез, разрезающий один шпангоут

Все изложенные рекомендации по подкреплению выреза, расположенного между шпангоутами, остаются обязательными и для случая, когда вырез разрезает только один шпангоут.* Однако эти рекомендации, являясь необходимыми, не являются достаточными. Действительно, при рассмотрении концентрации напряжений в цилиндрической оболочке, вызванной наличием малого выреза, мы считали, что напряженное состояние оболочки на некотором удалении от выреза является безмоментным и осесимметричным, а возникающие в оболочке кольцевые и осевые напряжения равны соответственно $-\frac{E\epsilon}{2}$ и $-\frac{E\epsilon}{2}$. Это допущение было вполне оправданным в случае малого выреза между шпангоутами, так как влияние изгиба оболочки, вызванного наличием выреза, было незначительным и росту изгибных прогибов оболочки препятствовали шпангоуты, ограничивающие вырез. Естественным, чем больше отношение радиуса выреза к радиусу оболочки, т. е. чем больше исходное состояние будет отличаться от осесимметричного, тем больше будет влияние изгиба оболочки на концентрацию напряжений. Коэффициент концентрации будет возрастать и за счет дополнительного изгиба оболочки. Однако оболочки в силу малой изгибной жесткости плохо сопротивляются изгибу. Именно этим и объясняется установка шпангоутов или ребер, обеспечивающая необходимую изгибную жесткость оболочки.

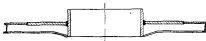


Рис. 174

Следовательно, в случае, когда вырез разрезает один шпангоут, кроме компенсации потерянной площади сечения, необходимо компенсировать потерянную изгибную жесткость шпангоута.

Условие компенсации изгибной жесткости шпангоута имеет вид

$$2 \frac{t_0 \delta_2^3}{12} \geq I_{\text{шп}} \quad (12. X)$$

где δ_2 — полная высота комингса;

$I_{\text{шп}}$ — главный момент инерции шпангоута с присоединенным пояском обшивки.

* В рассматриваемом случае в потерянную площадь необходимо включать площадь сечения шпангоута F .

Поскольку $l_{\text{из}}$ является величиной заданной, а l , выбирается исходя из требования компенсации потерянной площади сечения выреза, по ф-ле (12. X) легко определить полную высоту конька. Отметим, что концы перерезанного вырезом шпангоута должны быть жестко соединены с коньком либо непосредственно путем приварки к последнему, либо с помощью переходных книц (рис. 174).

Вырез, разрезающий несколько шпангоутов,

В рассматриваемом случае, как правило, на каждом шпангоуте должны быть установлены съемные бимсы, обеспечивающие компенсацию потерянной площади сечения обшивки и шпангоутов. Однако съемные бимсы не обеспечивают достаточной жесткости оболочки в районе выреза. В то же время потерянная изгибная жесткость вследствие разрезания нескольких шпангоутов оказывается достаточно большой. Условие компенсации изгибной жесткости имеет вид

$$2I_{\text{б}} \frac{K_{\text{б}}^2}{l^2} > n I_{\text{из}} \quad (13. X)$$

где n — число разрезанных вырезом шпангоутов.

В некоторых случаях установка съемных бимсов оказывается невозможной, тогда потерянная площадь сечения компенсируется установкой утолщенного листа.

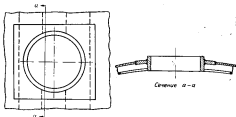


Рис. 175

Конструктивная схема подкрепления вырезов в рассматриваемом случае показана на рис. 175.

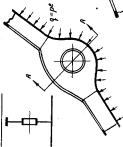
Здесь, как и в предыдущем случае, разрезаемые шпангоуты должны быть жестко соединены с коньком выреза.

§ 82. Расчет местной прочности корпуса в районе выкружек

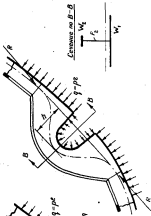
В районе выхода из прочного корпуса гребных валов, а также в районе торсионоразружочных люков, в обшивке и шпангоутах прочного корпуса устраиваются специальные выкружки, т. е. местные выступы или впадины, имеющие круглую или овальную форму. Схема выкружки гребного вала показана на рис. 176.

a

Сечение по А-А



б



Выкружки бывают обращены выпуклостью наружу (см. рис. 176, а) и внутрь (см. рис. 176, б) прочного корпуса. В первом случае подкрепление разрезанными шпангоутами сравнительно легко выполнить в виде киля с вырезами для вала. Эти килы с подкрепленными кромками выполняют роль распора. Если выкружка обращена выпуклостью внутрь прочного корпуса и не лежит в плоскости полупереборки, то конструкция ее подкрепления подлежит расчету прочности. Этот расчет выполняется при следующих двух весьма грубых допущениях: считается, что шпангоуты работают изолированно и что напряжения в шпангоутах можно вычислять, пользуясь формулами для прямых брусьев. При расчете подкреплений выкружки следовало бы поступать так же, как при расчете составных шпангоутов в районе прочных штепсеров, т. е. считать, что основной шпангоут прочного корпуса сжимается силой qr , выкружка растягивается силой qr_0 , а конструкция подкрепления изгибается силой $R = q \cdot \overline{OO}_1$ (рис. 177). Однако поскольку основной шпангоут гораздо податливее

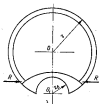


Рис. 177

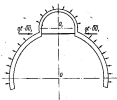


Рис. 178

выкружки, то можно считать, что вся сила R воспринимается только выкружкой. Более того, ввиду приближенности расчета можно пренебречь силой qr_0 , и тогда $R = qr$. В этом случае изгибающий момент в опасном сечении выкружки будет (см. рис. 176, б)

$$M = Ra = qra, \quad (14. X)$$

где a — отстояние нейтральной оси опасного сечения выкружки от линии действия сил.

Таким образом, местное подкрепление шпангоутов в районе выкружки должно быть рассчитано на восприятие как сжимающего усилия R , так и изгибающего момента M . Напряжения в обшивке выкружки и в свободном поясе подкрепления выкружки вычисляются при этом по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{сжм} &= -\frac{qr}{F_1} - \frac{qra}{W_1} \\ \sigma_{изг} &= -\frac{qr}{F_2} + \frac{qra}{W_2} \end{aligned} \right\} \quad (15. X)$$

где W_1 и W_2 — моменты сопротивления выкружки в опасном сечении.

При сравнительно малой высоте выкружек подкрепление шпангоута осуществляется местным усилением шпангоута, так чтобы суммарные напряжения в нем от сжатия и изгиба не превышали установленных допустимых норм. При сравнительно большой высоте выкружек изгибающий момент оказывается столь значительным, что осуществить местное подкрепление шпангоута затруднительно по конструктивным соображениям (чрезмерно большая высота шпангоута), хотя принципиально такое подкрепление возможно. В этих случаях (применительно к выкружкам для торпедотопроузных люков) рекомендуется устанавливать съемные прямолинейные распорки (съемные бимсы, рис. 178). В этом случае шпангоут в районе выкружки может иметь усиленный профиль, обеспечивающий прочность и устойчивость.

Что касается съемных распорок (съемных бимсов), то они должны быть проверены как на прочность, так и на устойчивость. Сжимающее усилие, действующее на съемную распорку, будет равно

$$R = p l \cdot \overline{OO}_x \quad (16. X)$$

При этом важно отметить те требования, которым должно удовлетворять конструктивное оформление распорок. Во-первых, ось распорки должна быть прямолинейной и практически совпадать с хордой, соединяющей центры тяжести концевых сечений перерезанного основного шпангоута. Во-вторых, сжимающее усилие должно передаваться на распорку не через болтовое соединение, а через непосредственное, плотное прижатие сопряжения поверхностей опорных конструкций.

Таблица функций Буткова—Павловича

x	$\varphi_0(x)$	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$	$\varphi_4(x)$	$\varphi_5(x)$	$\varphi_6(x)$
0,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,2	0,999	1,000	0,999	1,000	1,000	0,999	1,000
0,3	0,998	0,999	0,998	0,999	0,999	0,998	1,000
0,4	0,979	0,988	0,983	0,986	0,987	0,987	0,989
0,5	0,950	0,990	0,959	0,991	0,993	0,988	0,948
0,6	0,901	0,979	0,919	0,983	0,985	0,936	0,908
0,7	0,827	0,931	0,856	0,967	0,973	0,882	0,978
0,8	0,731	0,835	0,781	0,946	0,956	0,838	0,967
0,9	0,619	0,899	0,680	0,917	0,931	0,755	0,948
1,0	0,498	0,852	0,591	0,878	0,899	0,678	0,920
1,1	0,380	0,795	0,494	0,836	0,859	0,602	0,889
1,2	0,272	0,728	0,406	0,774	0,813	0,531	0,856
1,3	0,178	0,653	0,327	0,712	0,761	0,470	0,814
1,4	0,100	0,573	0,252	0,645	0,705	0,417	0,769
1,5	0,037	0,492	0,208	0,576	0,648	0,373	0,723
1,6	-0,013	0,411	0,164	0,509	0,591	0,337	0,681
1,7	-0,052	0,328	0,129	0,444	0,537	0,308	0,639
1,8	-0,081	0,264	0,101	0,384	0,483	0,285	0,598
1,9	-0,102	0,201	0,075	0,328	0,439	0,265	0,561
2,0	-0,117	0,141	0,062	0,279	0,397	0,249	0,527
2,2	-0,133	0,054	0,037	0,197	0,325	0,224	0,469
2,4	-0,136	-0,009	0,021	0,136	0,269	0,204	0,424
2,6	-0,127	-0,061	0,011	0,082	0,226	0,189	0,387
2,8	-0,114	-0,074	0,006	0,060	0,193	0,177	0,366
3,0	-0,098	-0,085	0,002	0,038	0,167	0,169	0,353
3,2	-0,081	-0,087	-0,000	0,023	0,146	0,186	0,311
3,4	-0,064	-0,082	-0,000	0,012	0,129	0,167	0,263
3,6	-0,049	-0,073	-0,002	0,006	0,115	0,150	0,278
3,8	-0,036	-0,063	-0,002	0,002	0,104	0,132	0,263
4,0	-0,024	-0,052	-0,002	-0,001	0,096	0,125	0,250
4,2	-0,015	-0,041	-0,002	-0,002	0,085	0,119	0,238
4,4	-0,008	-0,031	-0,001	-0,003	0,078	0,114	0,227
4,6	-0,002	-0,022	-0,001	-0,003	0,071	0,109	0,217
4,8	0,001	-0,015	-0,001	-0,002	0,065	0,104	0,208
5,0	0,004	-0,009	-0,001	-0,002	0,060	0,100	0,200

Таблица функций Бесселя

x	$J_1(x_1, x_2)$					$J_2(x_1, x_2)$					$J_3(x_1, x_2)$					$J_4(x_1, x_2)$				
	-1,5	0,5	1,0	1,5	2,0	-1,0	0,0	0,5	1,0	1,5	-1,0	0,0	0,5	1,0	1,5	-0,5	0,0	0,5	1,0	1,5
1,0	0,935	0,920	0,905	0,890	0,875	0,852	0,835	0,820	0,805	0,790	0,770	0,750	0,735	0,720	0,705	0,746	0,735	0,719	0,705	0,690
1,4	0,800	0,779	0,759	0,739	0,720	0,700	0,689	0,679	0,669	0,659	0,639	0,629	0,619	0,609	0,599	0,640	0,630	0,610	0,595	0,580
1,8	0,630	0,606	0,580	0,550	0,530	0,500	0,485	0,465	0,450	0,435	0,410	0,390	0,375	0,360	0,345	0,385	0,375	0,355	0,340	0,325
2,15	0,535	0,495	0,455	0,425	0,405	0,375	0,359	0,335	0,320	0,305	0,275	0,250	0,235	0,220	0,205	0,245	0,235	0,215	0,200	0,185
2,50	0,440	0,405	0,360	0,330	0,300	0,270	0,250	0,230	0,215	0,200	0,170	0,145	0,130	0,115	0,100	0,140	0,130	0,110	0,095	0,080
3,0	0,359	0,320	0,285	0,250	0,200	0,160	0,135	0,120	0,105	0,090	0,060	0,040	0,030	0,015	0,000	0,035	0,030	0,015	0,000	-0,015
3,5	0,305	0,265	0,230	0,195	0,155	0,115	0,090	0,075	0,060	0,045	0,020	0,005	0,000	-0,015	-0,030	-0,010	-0,005	-0,020	-0,035	-0,050
4,0	0,259	0,220	0,180	0,140	0,100	0,060	0,040	0,025	0,010	0,000	0,000	-0,010	-0,020	-0,035	-0,050	-0,015	-0,010	-0,025	-0,040	-0,055
4,5	0,234	0,200	0,160	0,120	0,080	0,040	0,020	0,010	0,000	0,000	-0,010	-0,020	-0,030	-0,045	-0,060	-0,020	-0,015	-0,030	-0,045	-0,060

Значения функций N , M , P и Q

$\alpha \backslash c$	0,0	0,5	0,7	0,8	0,9
Функция N					
0,325	2,916	2,943	2,983	3,063	3,167
0,350	2,863	2,886	2,924	2,983	2,993
0,375	2,811	2,831	2,870	2,950	2,950
0,400	2,759	2,800	2,838	2,876	2,478
0,425	2,710	2,740	2,778	2,836	2,867
0,450	2,663	2,690	2,728	2,767	2,799
0,475	2,614	2,647	2,685	2,724	2,751
0,500	2,573	2,597	2,636	2,677	2,707
0,55	1,737	1,767	1,840	1,773	2,086
0,60	1,869	1,453	1,482	1,528	1,803
0,65	1,218	1,279	1,322	1,366	1,486
0,70	1,086	1,156	1,200	1,266	1,363
0,75	0,983	1,054	1,098	1,165	1,259
0,80	0,888	0,967	1,006	1,073	1,176
0,85	0,800	0,879	0,918	0,988	1,087
0,90	0,730	0,789	0,839	0,906	1,018
0,95	0,666	0,718	0,761	0,831	0,963
1,0	0,590	0,644	0,689	0,759	0,891
1,1	0,494	0,559	0,600	0,676	0,773
1,2	0,383	0,412	0,444	0,500	0,568
1,3	0,285	0,303	0,330	0,386	0,474
1,4	0,228	0,256	0,277	0,318	0,376
1,5	0,181	0,206	0,222	0,246	0,291
1,6	0,143	0,164	0,176	0,196	0,232
1,7	0,117	0,130	0,141	0,156	0,185
1,8	0,0940	0,1046	0,1124	0,128	0,167
1,9	0,0788	0,0874	0,0934	0,1045	0,1286
2,0	0,0632	0,0729	0,0780	0,0844	0,1060
2,1	0,0536	0,0586	0,0624	0,0672	0,0780
2,2	0,0434	0,0478	0,0509	0,0546	0,0622
2,3	0,0368	0,0404	0,0426	0,0465	0,0518
2,4	0,0312	0,0344	0,0364	0,0396	0,0442
2,5	0,0268	0,0292	0,0308	0,0336	0,0376
2,6	0,0232	0,0242	0,0259	0,0274	0,0315
2,7	0,0199	0,0210	0,0220	0,0236	0,0267
2,8	0,0170	0,0182	0,0188	0,0202	0,0230
2,9	0,0148	0,0158	0,0164	0,0178	0,0199
3,0	0,0130	0,0140	0,0144	0,0156	0,0170
3,1	0,0112	0,0120	0,0126	0,0136	0,0150
3,2	0,0102	0,0108	0,0112	0,0120	0,0130
Функция M					
0,325	1,390	1,720	1,740	1,766	1,795
0,350	1,580	1,600	1,626	1,665	1,696
0,375	1,473	1,496	1,528	1,565	1,600
0,400	1,385	1,410	1,440	1,470	1,507
0,425	1,310	1,335	1,367	1,397	1,428
0,450	1,243	1,270	1,290	1,317	1,355
0,475	1,187	1,216	1,240	1,268	1,305
0,500	1,140	1,170	1,196	1,222	1,262
0,550	1,068	1,093	1,117	1,147	1,186
0,600	0,996	1,023	1,053	1,100	1,150

$\alpha \backslash c$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,55	0,026	0,076	1,011	1,054	1,118
0,70	0,053	0,099	0,928	1,008	1,097
0,75	0,066	0,092	0,903	0,980	1,040
0,80	0,143	0,808	0,849	0,900	1,000
0,85	0,084	0,747	0,792	0,855	0,958
0,90	0,028	0,699	0,726	0,800	0,904
0,95	0,070	0,632	0,677	0,741	0,820
1,00	0,516	0,575	0,620	0,687	0,800
1,1	0,416	0,472	0,510	0,575	0,694
1,2	0,309	0,383	0,410	0,464	0,566
1,3	0,284	0,303	0,326	0,370	0,450
1,4	0,210	0,240	0,260	0,297	0,356
1,5	0,168	0,191	0,207	0,234	0,280
1,6	0,134	0,152	0,166	0,183	0,222
1,7	0,109	0,123	0,133	0,145	0,178
1,8	0,0844	0,0988	0,102	0,1165	0,138
1,9	0,0738	0,0826	0,0866	0,0914	0,1088
2,0	0,0612	0,0678	0,0728	0,0792	0,0884
2,1	0,0500	0,0564	0,0592	0,0644	0,0726
2,2	0,0412	0,0458	0,0488	0,0528	0,0588
2,3	0,0344	0,0384	0,0406	0,0438	0,0486
2,4	0,0282	0,0320	0,0338	0,0364	0,0408
2,5	0,0230	0,0272	0,0286	0,0304	0,0340
2,6	0,0186	0,0232	0,0244	0,0258	0,0288
2,7	0,0148	0,0196	0,0208	0,0224	0,0248
2,8	0,0100	0,0150	0,0158	0,0164	0,0216
2,9	0,0084	0,0114	0,0122	0,0130	0,0166
3,0	0,0120	0,0126	0,0132	0,0148	0,0162
3,1	0,0106	0,0112	0,0118	0,0120	0,0140
3,2	0,0098	0,0101	0,0104	0,0116	0,0122

Функция Р

0,308	32,7	33,3	33,5	34,9	34,7
0,350	26,4	28,9	27,3	27,4	28,3
0,373	21,1	21,5	21,9	22,3	22,8
0,406	17,2	17,6	17,8	18,2	18,6
0,428	14,4	14,7	14,9	15,2	15,5
0,458	12,2	12,4	12,6	12,9	13,2
0,478	10,4	10,55	10,75	11,0	11,3
0,500	8,8	9,00	9,25	9,45	9,65
0,55	6,45	6,70	6,85	7,00	7,40
0,60	5,13	5,38	5,54	5,43	5,78
0,65	4,03	4,17	4,24	4,35	4,59
0,70	3,24	3,38	3,46	3,59	3,73
0,75	2,65	2,77	2,85	2,90	3,10
0,80	2,18	2,30	2,38	2,47	2,60
0,85	1,83	1,93	1,99	2,10	2,25
0,90	1,55	1,64	1,70	1,80	1,94
0,95	1,32	1,39	1,45	1,55	1,67
1,00	1,13	1,205	1,25	1,34	1,48
1,1	0,934	0,912	0,900	1,26	1,12
1,2	0,833	0,884	0,723	0,784	0,874
1,3	0,690	0,630	0,560	0,605	0,690
1,4	0,574	0,500	0,430	0,465	0,535
1,5	0,292	0,312	0,300	0,380	0,414
1,6	0,228	0,248	0,263	0,295	0,325
1,7	0,185	0,200	0,211	0,258	0,284

$\frac{t}{d}$	0,0	0,5	0,7	0,8	0,9
1,8	0,1450	0,1805	0,1934	0,1828	0,2048
1,9	0,1280	0,1524	0,1592	0,1472	0,1688
2,0	0,1004	0,1078	0,1134	0,1100	0,1270
2,1	0,0804	0,0878	0,0918	0,0878	0,1080
2,2	0,0674	0,0748	0,0784	0,0804	0,0970
2,3	0,0550	0,0624	0,0658	0,0680	0,0874
2,4	0,0470	0,0540	0,0574	0,0592	0,0808
2,5	0,0404	0,0478	0,0514	0,0538	0,0760
2,6	0,0348	0,0420	0,0458	0,0480	0,0702
2,7	0,0302	0,0378	0,0418	0,0440	0,0654
2,8	0,0264	0,0340	0,0384	0,0408	0,0604
2,9	0,0232	0,0312	0,0358	0,0384	0,0570
3,0	0,0200	0,0280	0,0328	0,0358	0,0542
3,1	0,0174	0,0258	0,0308	0,0338	0,0512
3,2	0,0150	0,0238	0,0290	0,0320	0,0488

Функция Q

0,325	0,156	0,150	0,146	0,138	0,130
0,350	0,154	0,140	0,133	0,123	0,115
0,375	0,153	0,137	0,129	0,119	0,110
0,400	0,151	0,135	0,127	0,117	0,108
0,425	0,150	0,134	0,126	0,116	0,107
0,450	0,148	0,132	0,124	0,114	0,105
0,475	0,147	0,131	0,123	0,113	0,104
0,500	0,147	0,130	0,122	0,112	0,103
0,550	0,145	0,129	0,121	0,111	0,102
0,600	0,144	0,128	0,120	0,110	0,101
0,650	0,143	0,127	0,119	0,109	0,100
0,700	0,142	0,126	0,118	0,108	0,099
0,750	0,141	0,125	0,117	0,107	0,098
0,800	0,140	0,124	0,116	0,106	0,097
0,850	0,139	0,123	0,115	0,105	0,096
0,900	0,138	0,122	0,114	0,104	0,095
0,950	0,137	0,121	0,113	0,103	0,094
1,0	0,136	0,120	0,112	0,102	0,093
1,1	0,135	0,119	0,111	0,101	0,092
1,2	0,134	0,118	0,110	0,100	0,091
1,3	0,133	0,117	0,109	0,099	0,090
1,4	0,132	0,116	0,108	0,098	0,089
1,5	0,131	0,115	0,107	0,097	0,088
1,6	0,130	0,114	0,106	0,096	0,087
1,7	0,129	0,113	0,105	0,095	0,086
1,8	0,128	0,112	0,104	0,094	0,085
1,9	0,127	0,111	0,103	0,093	0,084
2,0	0,126	0,110	0,102	0,092	0,083
2,1	0,125	0,109	0,101	0,091	0,082
2,2	0,124	0,108	0,100	0,090	0,081
2,3	0,123	0,107	0,099	0,089	0,080
2,4	0,122	0,106	0,098	0,088	0,079
2,5	0,121	0,105	0,097	0,087	0,078
2,6	0,120	0,104	0,096	0,086	0,077
2,7	0,119	0,103	0,095	0,085	0,076
2,8	0,118	0,102	0,094	0,084	0,075
2,9	0,117	0,101	0,093	0,083	0,074
3,0	0,116	0,100	0,092	0,082	0,073
3,1	0,115	0,099	0,091	0,081	0,072
3,2	0,114	0,098	0,090	0,080	0,071

Таблица функций Циммермана—Клиссевича

u	$W_0(u)$	$\sqrt{2} W_1(u)$	$W_2(u)$	$\sqrt{2} W_3(u)$	u	$W_0(u)$	$\sqrt{2} W_1(u)$	$W_2(u)$	$\sqrt{2} W_3(u)$
0,06	1,000	-1,000	0,999	1,000	0,51	0,534	-0,334	-0,293	0,817
0,07	0,999	-0,999	-0,999	1,000	0,52	0,516	-0,321	-0,285	0,811
0,08	0,998	-0,998	-0,998	1,000	0,53	0,506	-0,309	-0,278	0,806
0,09	0,997	-0,997	-0,999	0,999	0,54	0,500	-0,299	-0,269	0,800
0,10	0,996	-0,996	-0,998	0,998	0,55	0,492	-0,289	-0,260	0,794
0,06	0,995	-0,995	-0,998	0,998	0,56	0,484	-0,281	-0,253	0,787
0,06	0,940	-0,984	-0,087	0,998	0,57	0,476	-0,271	-0,246	0,781
0,07	0,939	-0,985	-0,086	0,998	0,58	0,468	-0,262	-0,237	0,775
0,08	0,938	-0,986	-0,084	0,994	0,59	0,461	-0,252	-0,228	0,769
0,09	0,919	-0,938	-0,082	0,992	0,60	0,453	-0,243	-0,219	0,763
0,10	0,900	-0,919	-0,080	0,991	0,61	0,445	-0,234	-0,211	0,757
0,11	0,890	-0,792	-0,096	0,989	0,62	0,438	-0,225	-0,203	0,750
0,12	0,881	-0,774	-0,106	0,987	0,63	0,430	-0,217	-0,204	0,744
0,13	0,871	-0,757	-0,114	0,985	0,64	0,423	-0,208	-0,205	0,738
0,14	0,861	-0,740	-0,121	0,983	0,65	0,416	-0,200	-0,206	0,732
0,15	0,851	-0,722	-0,129	0,980	0,66	0,408	-0,091	-0,207	0,725
0,16	0,841	-0,706	-0,136	0,977	0,67	0,401	-0,083	-0,208	0,719
0,17	0,832	-0,689	-0,143	0,974	0,68	0,394	-0,075	-0,209	0,713
0,18	0,822	-0,672	-0,150	0,971	0,69	0,387	-0,068	-0,210	0,706
0,19	0,812	-0,656	-0,156	0,968	0,70	0,380	-0,060	-0,210	0,700
0,20	0,802	-0,640	-0,163	0,965	0,71	0,373	-0,052	-0,221	0,693
0,21	0,793	-0,624	-0,169	0,962	0,72	0,366	-0,045	-0,221	0,687
0,22	0,783	-0,608	-0,175	0,958	0,73	0,359	-0,038	-0,221	0,681
0,23	0,774	-0,592	-0,181	0,955	0,74	0,352	-0,031	-0,222	0,674
0,24	0,764	-0,577	-0,187	0,951	0,75	0,346	-0,024	-0,222	0,668
0,25	0,755	-0,562	-0,193	0,947	0,76	0,339	-0,017	-0,222	0,661
0,26	0,745	-0,547	-0,198	0,943	0,77	0,332	-0,010	-0,222	0,655
0,27	0,736	-0,532	-0,204	0,939	0,78	0,325	-0,004	-0,222	0,648
0,28	0,726	-0,517	-0,209	0,935	0,79	0,319	0,003	-0,222	0,642
0,29	0,717	-0,503	-0,214	0,931	0,80	0,313	0,009	-0,222	0,635
0,30	0,708	-0,489	-0,219	0,927	0,81	0,307	0,016	-0,222	0,629
0,31	0,699	-0,475	-0,224	0,922	0,82	0,301	0,022	-0,222	0,623
0,32	0,689	-0,461	-0,228	0,918	0,83	0,294	0,028	-0,222	0,616
0,33	0,680	-0,447	-0,233	0,913	0,84	0,288	0,033	-0,222	0,610
0,34	0,671	-0,434	-0,237	0,908	0,85	0,282	0,039	-0,221	0,603
0,35	0,662	-0,420	-0,242	0,904	0,86	0,276	0,045	-0,221	0,597
0,36	0,653	-0,407	-0,246	0,900	0,87	0,270	0,050	-0,220	0,590
0,37	0,644	-0,394	-0,250	0,894	0,88	0,264	0,055	-0,220	0,584
0,38	0,635	-0,381	-0,254	0,889	0,89	0,259	0,061	-0,219	0,578
0,39	0,626	-0,369	-0,257	0,884	0,90	0,253	0,066	-0,219	0,571
0,40	0,617	-0,356	-0,261	0,878	0,91	0,247	0,071	-0,218	0,565
0,41	0,608	-0,344	-0,265	0,873	0,92	0,241	0,076	-0,217	0,559
0,42	0,600	-0,332	-0,268	0,868	0,93	0,235	0,080	-0,216	0,552
0,43	0,591	-0,320	-0,271	0,862	0,94	0,230	0,085	-0,216	0,546
0,44	0,583	-0,308	-0,274	0,857	0,95	0,225	0,090	-0,215	0,540
0,45	0,574	-0,297	-0,277	0,852	0,96	0,220	0,094	-0,214	0,533
0,46	0,565	-0,285	-0,280	0,846	0,97	0,214	0,099	-0,213	0,527
0,47	0,557	-0,274	-0,283	0,840	0,98	0,209	0,103	-0,212	0,521
0,48	0,549	-0,263	-0,286	0,835	0,99	0,204	0,107	-0,211	0,515
0,49	0,541	-0,252	-0,288	0,829	1,00	0,199	0,111	-0,210	0,508
0,50	0,532	-0,242	-0,291	0,823					

u	$W_0(u)$	$\sqrt{2} W_1(u)$	$W_2(u)$	$\sqrt{2} W_3(u)$	u	$W_0(u)$	$\sqrt{2} W_1(u)$	$W_2(u)$	$\sqrt{2} W_3(u)$
1,05	0,174	0,129	-0,384	0,478	3,10	-0,045	0,047	-0,002	-0,043
1,10	0,181	0,146	-0,397	0,448	3,20	-0,041	0,038	0,002	-0,043
1,15	0,189	0,160	-0,389	0,418	3,30	-0,036	0,031	0,006	-0,042
1,20	0,199	0,172	-0,399	0,390	3,40	-0,032	0,024	0,009	-0,043
1,25	0,209	0,182	-0,373	0,362	3,50	-0,028	0,018	0,011	-0,039
1,30	0,213	0,199	-0,363	0,336	3,60	-0,025	0,012	0,012	-0,037
1,35	0,207	0,196	-0,352	0,310	3,70	-0,021	0,006	0,013	-0,034
1,40	0,202	0,201	-0,348	0,285	3,80	-0,018	0,004	0,013	-0,031
1,45	0,206	0,205	-0,323	0,261	3,90	-0,015	0,001	0,014	-0,029
1,50	0,216	0,207	-0,323	0,236	4,00	-0,012	-0,002	0,014	-0,026
1,55	0,204	0,208	-0,312	0,217	4,10	-0,010	-0,004	0,014	-0,023
1,60	-0,006	0,208	-0,302	0,196	4,20	-0,007	-0,006	0,013	-0,020
1,65	-0,016	0,207	-0,191	0,176	4,30	-0,005	-0,007	0,012	-0,018
1,70	-0,024	0,205	-0,181	0,158	4,40	-0,004	-0,008	0,012	-0,016
1,75	-0,031	0,202	-0,171	0,140	4,50	-0,002	-0,009	0,011	-0,013
1,80	-0,038	0,199	-0,161	0,123	4,60	-0,001	-0,009	0,010	-0,011
1,85	-0,045	0,195	-0,151	0,106	4,70	-0,000	-0,009	0,009	-0,009
1,90	-0,049	0,199	-0,142	0,088	4,80	0,001	-0,009	0,008	-0,008
1,95	-0,053	0,185	-0,132	0,069	4,90	0,001	-0,009	0,007	-0,006
2,00	-0,056	0,179	-0,123	0,067	5,00	0,002	-0,008	0,007	-0,005
2,05	-0,059	0,174	-0,114	0,065	5,10	0,002	-0,008	0,006	-0,003
2,10	-0,062	0,168	-0,106	0,044	5,20	0,002	-0,008	0,005	-0,002
2,15	-0,064	0,161	-0,098	0,024	5,30	0,003	-0,007	0,004	-0,001
2,20	-0,065	0,155	-0,090	0,004	5,40	0,003	-0,006	0,004	-0,001
2,25	-0,069	0,148	-0,082	0,005	5,50	-0,003	-0,006	0,003	-0,000
2,30	-0,067	0,142	-0,073	0,008	5,60	0,003	-0,005	0,002	0,000
2,35	-0,067	0,135	-0,068	0,004	5,70	0,003	-0,005	0,002	0,000
2,40	-0,067	0,128	-0,061	-0,006	5,80	0,003	-0,004	0,000	0,000
2,45	-0,067	0,122	-0,053	-0,011	5,90	0,003	-0,004	0,000	0,002
2,50	-0,066	0,115	-0,045	-0,017	6,00	0,002	-0,003	0,000	0,002
2,55	-0,065	0,108	-0,044	-0,021	6,20	0,002	-0,001	0,000	0,002
2,60	-0,064	0,102	-0,038	-0,025	7,00	0,001	0,000	-0,001	0,001
2,65	-0,062	0,096	-0,033	-0,029	7,20	0,000	0,000	-0,002	0,000
2,70	-0,061	0,090	-0,029	-0,032	8,00	0,000	0,000	-0,000	0,000
2,75	-0,059	0,084	-0,024	-0,036					
2,80	-0,057	0,078	-0,020	-0,037					
2,85	-0,055	0,072	-0,017	-0,039					
2,90	-0,053	0,067	-0,013	-0,040					
2,95	-0,051	0,061	-0,010	-0,041					
3,00	-0,049	0,056	-0,007	-0,042					

$$W_0(u) = e^{-u} \cos u,$$

$$\sqrt{2} W_1(u) = e^{-u} (\sin u - \cos u),$$

$$W_2(u) = e^{-u} \sin u,$$

$$\sqrt{2} W_3(u) = e^{-u} (\cos u + \sin u).$$

Таблица исправленных критических напряжений и поправочных коэффициентов γ_0 для различных сталей

Теоретическое значение критического напряжения	Обыкновенная сталь $\sigma_T = 2200 \text{ кг/см}^2$		Сталь повышенной сопротивляемости $\sigma_T = 3000 \text{ кг/см}^2$		Марганцевая сталь $\sigma_T = 4000 \text{ кг/см}^2$	
$\sigma_{кр}$	$\sigma_{кр}$	γ_0	$\sigma_{кр}$	γ_0	$\sigma_{кр}$	γ_0
0	0	—	0	—	0	—
200	200	1,00	200	1,00	200	1,00
400	400	1,00	400	1,00	400	1,00
600	580	0,93	580	0,93	580	0,93
800	730	0,90	730	0,95	730	0,95
1000	890	0,88	940	0,94	940	0,94
1200	1020	0,85	1110	0,92	1120	0,92
1400	1150	0,83	1280	0,90	1300	0,90
1600	1280	0,80	1440	0,88	1480	0,91
1800	1390	0,78	1600	0,86	1630	0,90
2000	1480	0,74	1740	0,87	1800	0,90
2200	1570	0,71	1880	0,84	1940	0,88
2400	1640	0,68	2020	0,84	2100	0,87
2600	1720	0,66	2140	0,82	2240	0,86
2800	1780	0,64	2260	0,81	2380	0,85
3000	1840	0,62	2400	0,80	2500	0,83
3200	1890	0,59	2540	0,78	2640	0,82
3400	1940	0,57	2680	0,76	2760	0,81
3600	1990	0,55	2800	0,74	2900	0,80
3800	2020	0,53	2910	0,71	3000	0,79
4000	2060	0,51	2980	0,69	3100	0,77
4200	2100	0,50	3060	0,68	3200	0,76
4400	2140	0,49	3200	0,66	3300	0,75
4600	2180	0,47	3290	0,64	3380	0,74
4800	2200	0,46	3300	0,62	3440	0,73
5000	2220	0,44	3360	0,61	3520	0,70
5200	2260	0,41	3400	0,60	3580	0,69
5400	2280	0,42	3500	0,58	3640	0,67
5600	2320	0,41	3540	0,56	3720	0,66
5800	2340	0,40	3580	0,57	3780	0,65
6000	2360	0,39	3620	0,55	3820	0,64
6200	2420	0,37	3700	0,52	3940	0,60
7000	2480	0,35	3840	0,49	4040	0,57
7500	2500	0,33	3920	0,47	4140	0,55
8000	2540	0,32	3960	0,45	4240	0,53
8500	2580	0,30	3980	0,42	4380	0,51
9000	2600	0,29	3900	0,41	4420	0,49
9500	2640	0,28	3940	0,39	4500	0,47
10 000	2670	0,27	3920	0,38	4580	0,46

Нормы толщин абразивных жестяных пластин
(пластина свободна вращаться на жестком контуре)

$\frac{R_1}{a+b}$	R_1	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
1,0	0,0443	0,0479	0,0499	0,0479	0,338	0,439	0,430	0,065	0,25	0,25	0,25
1,1	0,0530	0,0563	0,0591	0,0553	0,346	0,440	0,440	0,064	—	—	—
1,2	0,0610	0,0626	0,0650	0,0626	0,353	0,456	0,455	0,062	0,26	0,265	0,265
1,3	0,0697	0,0694	0,0724	0,0693	0,357	0,465	0,468	0,061	—	—	—
1,4	0,0770	0,0746	0,0783	0,0753	0,363	0,479	0,478	0,059	0,265	0,266	0,266
1,5	0,0840	0,0800	0,0842	0,0812	0,368	0,485	0,485	0,057	—	—	—
1,6	0,0906	0,0850	0,0893	0,0863	0,366	0,485	0,481	0,054	0,267	0,268	0,268
1,7	0,0964	0,0886	0,0936	0,0906	0,367	0,486	0,480	0,052	—	—	—
1,8	0,1017	0,0919	0,0979	0,0949	0,368	0,491	0,489	0,050	0,271	0,267	0,267
1,9	0,1064	0,0957	0,1017	0,0985	0,369	0,494	0,502	0,048	—	—	—
2,0	0,1106	0,0984	0,1044	0,1017	0,370	0,496	0,503	0,046	0,272	0,264	0,264
2,0	0,1226	0,0994	0,1064	0,1135	0,371	0,496	0,505	0,031	0,273	0,410	0,410
4,0	0,1490	0,0984	0,1226	0,1226	0,371	0,506	0,502	0,024	0,272	0,455	0,455
6,0	0,1416	0,0975	0,1246	0,1246	0,371	0,506	0,500	0,019	0,272	0,452	0,452
∞	0,1422	0,0976	0,1260	0,1260	0,371	0,506	0,500	0	0,272	0,506	0,506

Матр. таблица аббревиатур жестких пластин
(пластина жестко закреплена на жестком контуре)

a/b	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9	k_{10}	k_{11}
1.0	0.0108	0.0029	0.0029	0.0013	0.0017	0.452	0.452	0.449	0.449	0.200	0.200
1.1	0.0105	0.0034	0.0034	0.0038	0.0054	0.412	0.448	0.430	0.473	0.203	0.221
1.2	0.0101	0.0031	0.0030	0.0054	0.0052	0.381	0.471	0.457	0.493	0.205	0.200
1.3	0.0210	0.0024	0.0027	0.0053	0.0066	0.352	0.450	0.462	0.506	0.206	0.306
1.4	0.0227	0.0035	0.0040	0.0066	0.0074	0.327	0.506	0.464	0.509	0.206	0.200
1.5	0.0241	0.0004	0.0008	—	0.0053	0.305	0.517	0.465	0.515	0.205	0.202
1.6	0.0251	0.0150	0.0061	0.0071	0.0084	—	—	0.465	0.518	0.205	0.343
1.7	0.0260	0.0082	0.0042	0.0071	0.0067	—	—	0.465	0.519	0.204	0.202
1.8	0.0267	0.0074	0.0400	0.0071	0.0021	—	—	0.465	0.520	0.203	0.200
1.9	0.0272	0.0045	0.0400	0.0071	0.0076	—	—	0.465	0.518	0.202	0.207
2.0	0.0276	—	—	0.0071	0.0029	—	—	0.465	0.515	0.202	0.204
3.0	0.0279	—	—	0.0071	0.0072	—	—	0.465	0.510	0.201	0.412
4.0	0.0282	—	—	0.0071	0.0033	—	—	0.465	0.505	0.201	0.452
5.0	0.0284	—	—	0.0071	0.0033	—	—	0.465	0.505	0.200	0.450
∞	0.0284	—	—	0.0071	0.0033	—	—	0.465	0.500	0.200	0.500

Наиб. точная абсолютная жесткость пластин
(влажность воздуха параллельная срезу, а другая сторона свободна от нагрузки)

$\frac{a+b}{b}$	$a > b$						$a < b$					
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1,0	0,0014	0,0032	0,0044	0,0068	0,0088	0,0114	0,0014	0,0032	0,0044	0,0068	0,0088	0,0114
1,1	0,0076	0,0079	0,0089	0,0098	0,0108	0,0118	0,0076	0,0079	0,0089	0,0108	0,0118	0,0129
1,2	0,0049	0,0048	0,0057	0,0068	0,0078	0,0088	0,0049	0,0048	0,0057	0,0078	0,0088	0,0097
1,3	0,0025	0,0026	0,0037	0,0047	0,0058	0,0068	0,0025	0,0026	0,0037	0,0058	0,0068	0,0079
1,4	0,0004	0,0006	0,0017	0,0027	0,0037	0,0048	0,0004	0,0006	0,0017	0,0027	0,0037	0,0048
1,5	0,0002	0,0003	0,0005	0,0008	0,0012	0,0016	0,0002	0,0003	0,0005	0,0008	0,0012	0,0016
1,6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	—	—	—	—	—	—
1,7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	—	—	—	—	—	—
1,8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	—	—	—	—	—	—
1,9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	—	—	—	—	—	—
2,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	—	—	—	—	—	—
4,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	—	—	—	—	—	—
5,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	—	—	—	—	—	—
∞	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Примечания: а — длина свободной опорной стороны; б — длина жестко закрепленной стороны.

Таблица плоских пластин конечной жесткости

α	При $\nu = 0$			При $\nu = 1$			
	$\lg \nu$	$\eta_1(\alpha)$	$\eta_2(\alpha)$	$\lg \nu$	$\eta_1(\alpha)$	$\eta_2(\alpha)$	$\eta_3(\alpha)$
3,0*	1,503*	-0,380	-0,449	2,500*	11,201	13,49	7,348
2,5*	2,251*	-0,660	-0,720	2,166*	2,703	3,05	2,066
2,0*	2,740*	-1,021	-1,102	2,056*	1,672	1,799	1,426
1,5*	3,713*	11,38	11,680	2,005*	1,290	1,343	1,192
1,0*	3,660*	1,644	1,702	2,177*	1,111	1,130	1,074
0,5*	3,182*	1,113	1,116	2,443*	1,029	1,030	1,017
0	∞	1,000	1,000	∞	1,000	1,000	1,000
0,5	3,033	0,908	0,905	2,421	0,996	0,992	0,984
1,0	2,687	0,711	0,704	2,090	0,809	0,804	0,809
1,5	2,377	0,532	0,511	1,867	0,617	0,768	0,620
2,0	2,115	0,380	0,307	1,685	0,715	0,673	0,606
2,5	1,898	0,281	0,268	1,524	0,617	0,563	0,536
3,0	1,690	0,213	0,200	1,377	0,529	0,467	0,672
3,5	1,518	0,160	0,153	1,244	0,453	0,388	0,604
4,0	1,359	0,120	0,120	1,120	0,398	0,320	0,563
4,5	1,218	0,107	0,097	1,005	0,335	0,267	0,549
5,0	1,090	0,098	0,079	0,898	0,291	0,224	0,440
5,5	0,972	0,074	0,066	0,798	0,254	0,189	0,447
6,0	0,865	0,063	0,055	0,700	0,223	0,162	0,417
6,5	0,764	0,054	0,042	0,617	0,197	0,130	0,391
7,0	0,671	0,047	0,041	0,535	0,175	0,121	0,367
7,5	0,594	0,041	0,036	0,457	0,156	0,106	0,347
8,0	0,520	0,036	0,031	0,383	0,141	0,093	0,328
8,5	0,455	0,033	0,028	0,313	0,127	0,082	0,311
9,0	0,393	0,029	0,025	0,246	0,115	0,074	0,296
9,5	0,332	0,026	0,022	0,183	0,105	0,066	0,283
10,0	0,278	0,024	0,020	0,122	0,096	0,060	0,270
10,5	0,225	0,021	0,018	0,064	0,088	0,054	0,259
11,0	0,096	0,020	0,017	0,009	0,081	0,050	0,248
11,5	0,039	0,018	0,015	1,565	0,075	0,046	0,238
12,0	1,084	0,016	0,014	1,908	0,069	0,042	0,229

* Структуральные значения величин α , $\lg \nu$ и $\lg \nu_1$.

Значения коэффициента k

$\frac{\sigma}{\sigma_s}$ \ $\frac{\sigma}{\sigma_s}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	3,0	4,0	5,0	10	20
0	3,00	3,07	3,14	3,21	3,27	3,33	3,39	3,50	3,60	3,69	3,76	3,86	3,94	4,00	4,29	4,67	5,14	5,90	6,90
0,1	3,10	3,23	3,30	3,36	3,42	3,46	3,54	3,65	3,75	3,84	3,93	4,00	4,08	4,14	4,41	4,77	5,22	5,95	6,95
0,2	3,20	3,41	3,48	3,54	3,60	3,66	3,71	3,82	3,91	4,00	4,08	4,15	4,23	4,29	4,55	4,89	5,30	6,00	6,90
0,3	3,33	3,66	3,67	3,73	3,79	3,85	3,90	4,06	4,16	4,17	4,25	4,32	4,38	4,44	4,69	5,00	5,37	6,04	6,94
0,4	3,74	3,82	3,89	3,94	4,00	4,05	4,10	4,26	4,27	4,26	4,44	4,50	4,57	4,62	4,84	5,12	5,46	6,09	6,99
0,5	4,00	4,07	4,13	4,18	4,23	4,28	4,32	4,42	4,50	4,57	4,63	4,70	4,75	4,80	5,05	5,35	5,65	6,23	7,13
0,6	4,28	4,25	4,40	4,45	4,49	4,54	4,58	4,67	4,73	4,80	4,85	4,91	4,96	5,00	5,16	5,49	5,72	6,30	7,18
0,7	4,62	4,67	4,71	4,78	4,80	4,84	4,87	4,93	5,00	5,05	5,10	5,14	5,19	5,22	5,37	5,53	5,72	6,30	6,93
0,8	5,03	5,03	5,07	5,10	5,13	5,17	5,20	5,25	5,29	5,33	5,37	5,40	5,44	5,46	5,57	5,69	5,80	6,40	6,90
0,9	5,45	5,44	5,50	5,52	5,54	5,56	5,57	5,60	5,62	5,65	5,67	5,68	5,70	5,72	5,83	5,90	5,90	6,50	6,95
1,0	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00	6,90	6,90

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- И. Г. Бубнов. Строительная механика корабля. Ч. I. СПб., 1912.
- И. Г. Бубнов. Строительная механика корабля. Ч. II. СПб., 1914.
- А. С. Вельмир. Гибкие пластинки и оболочки. Гостехиздат, 1958.
- В. В. Новожилов. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, 1961.
- В. В. Новожилов. Основы нелинейной теории упругости. Гостехиздат, 1968.
- П. Ф. Панкович. Строительная механика корабля. Ч. I. Т. II. „Морской транспорт“, 1947.
- П. Ф. Панкович. Строительная механика корабля. Ч. II. Судпромгиз, 1941.
- В. Ф. Сегаль. Строительная механика подводной лодки. Судпромгиз, 1960.
- С. П. Тимошенко. Устойчивость упругих систем. ОГИЗ, 1948.
- С. П. Тимошенко. Пластинки и оболочки. ОГИЗ, 1948.
- Ю. А. Шиманский. Строительная механика подводных лодок. Судпромгиз, 1968.
- Ю. А. Шиманский. Справочник по судостроению. Т. II и III. Техиздат, 1934.
- Справочник по строительной механике корабля под общей редакцией Ю. А. Шиманского. Т. I и II. Судостроение, 1969.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	5
Обозначения, принятые в книге	9

ГЛАВА I

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

1. Основные определения, гипотезы и допущения	11
2. Криволинейные координаты поверхности	13
3. Правила дифференцирования векторов по криволинейным координатам α_1 и α_2	14
4. Условие Коши—Гаусса	20
5. Перемещение оболочек	22
6. Деформации оболочек	27
7. Уравнения неразрывности деформаций срединной поверхности	34
8. Напряжения	36
9. Усилья и моменты	37
10. Условия равновесия элементов оболочки	42
11. Потенциальная энергия деформации оболочки	46
12. Зависимости между усильями и моментами и деформациями срединной поверхности оболочки	49
13. Граничные условия	52
14. Два пути решения задач теории оболочек	54
15. Теги напряженного состояния оболочек	56
16. Основные определения безмоментной теории оболочек	56
17. Основные уравнения безмоментной теории оболочек	58
18. Граничные условия в безмоментной теории	60
19. Условия существования безмоментного напряженного состояния	62
20. Расчет безмоментной круговой цилиндрической оболочки, нагруженной всторонним равномерным давлением давлением	63
21. Расчет безмоментной круговой усеченной конической оболочки, нагруженной всторонним равномерным давлением давлением	67

ГЛАВА II

УСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

22. Устойчивые и неустойчивые формы упругого равновесия	72
23. Системы уравнений устойчивости	75
24. Граничные условия	86
25. Энергетический метод определения критических нагрузок	87

ГЛАВА III

РАСЧЕТНЫЕ НАГРУЗКИ ДЛЯ ПРОЧНОГО КОРПУСА

26. Основные понятия	90
27. Входящие силы, действующие на корпус цилиндрической оболочки	94
28. Расчетные нагрузки для прочного корпуса	97
29. Особенности расчетов прочного корпуса	100

ГЛАВА IV

РАСЧЕТ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРОЧНОГО КОРПУСА

	Стр.
§ 30. Основные моменты расчета прочности корпуса	162
§ 31. Определение напряжений в оболочке и шпангоута прочного корпуса	163
§ 32. Более точное решение задачи о напряжениях в оболочке и шпангоуте прочного корпуса	163
§ 33. Определение напряжений в оболочке и шпангоута прочного корпуса по методу Ю. А. Шиманского	168
§ 34. Расчет оболочек, подкрепленных в промежуток между основными шпангоутами дополнительными круговыми ребрами жесткости	169
§ 35. Определение напряжений в оболочке прочного корпуса в районе переборок	162
§ 36. О материалах и шпангоутах круговой цилиндрической оболочки. Решение Пашовича	161
§ 37. Об оценке напряженного состояния оболочек и шпангоутов прочного корпуса	165
§ 38. Крайний обзор работ по устойчивости круговой цилиндрической оболочки	167
§ 39. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки, свободной отбортовки по краям, под действием осевого и радиального поперечного давлений	169
§ 40. Использование энергетического метода для определения критического давления круговой цилиндрической оболочки. Решение Шиманского	174
§ 41. Расчетные формулы для определения критического давления оболочек прочного корпуса поновыми законами	180
§ 42. Правилами раскладки подкрепительных и подкрепительных ребрами жесткости. Учет различных факторов	185
§ 43. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной поперечными упругими ребрами жесткости	197
§ 44. Введение поправочных коэффициентов	206
§ 45. О расчете конечных частей прочного корпуса	209

ГЛАВА V

РАСЧЕТ ПРОЧНОСТИ РУБОВ

§ 46. Классификация рубов	211
§ 47. Расчет прочности и устойчивости круговых цилиндрических рубов	212
§ 48. Расчет цилиндрических оболочек промежуточного поперечного сечения по бимоментной теории	214
§ 49. Расчет прочности цилиндрических рубов	220

ГЛАВА VI

РАСЧЕТ СФЕРИЧЕСКИХ ПЕРЕБОРОК

§ 50. Основные понятия	225
§ 51. Коэффициенты деформации средней толщины сферических оболочек	226
§ 52. Уравнения равновесия сферической деформации сферической оболочки	228
§ 53. Приближенное решение Гесснера	233
§ 54. Игнорирование сферической оболочки ступенчато-переменной толщиной	239
§ 55. Основные зависимости между сферическими переборками ступенчато-переменной толщиной	254
§ 56. Раскрытие статической неопределенности валами прочного корпуса подованных локот и из сферических переборок	266
§ 57. Практическая схема расчета прочности сферической переборки	263
§ 58. Определение теоретического критического давления для сферической переборки	269
§ 59. Введение поправочных коэффициентов	274
§ 60. Практическая схема расчета устойчивости сферической переборки	275

ГЛАВА VII

РАСЧЕТ ПЛОСКИХ ПЕРЕБОРОК

§ 61. Классификация переборок	276
§ 62. Расчет плоских переборок	276

	Стр.
§ 63. Исследование устойчивости листов переборок	283
§ 64. Расчет прочности балок набора переборок	287
§ 65. Подбор профиля балок набора	289
§ 66. Практическая схема расчета плоской переборки	294

ГЛАВА VIII

РАСЧЕТ СОСТАВНЫХ ШПАНГОУТОВ, СОСТОЯЩИХ ИЗ КРУГОВЫХ СТЕРЖНЕЙ

§ 67. Основные понятия, определения и допущения	297
§ 68. Некоторые случаи загрузки круговых стержней	298
§ 69. Использование зависимостей § 68 для решения частных задач	304
§ 70. Момент пологого стержня с жестко заданными концами	316
§ 71. Основные формулы о действии равномерного давления, приложенного к круговому стержню	317
§ 72. Расчет составного шпангоута однокорпусной подлодки лодки	327
§ 73. Различные варианты составных шпангоутов подлодочных лодок	342
§ 74. Круговой шпангоут, одна часть которого расположена внутри, а другая — снаружи прочного корпуса	347
§ 75. Устойчивость кругового шпангоута и его части	349
§ 76. Практическая схема расчета составного шпангоута	355

ГЛАВА IX

РАСЧЕТ НЕКРУГОВЫХ ШПАНГОУТОВ

§ 77. Виды некруговых шпангоутов	356
§ 78. Расчет некруговых шпангоутов, состоящих из круговых стержней различного радиуса	356
§ 79. Расчет эллиптических шпангоутов	362

ГЛАВА X

РАСЧЕТ МЕСТНОЙ ПРОЧНОСТИ

§ 80. Основные понятия	377
§ 81. Расчет прочности накрываемой широким	372
§ 82. Расчет местной прочности корпуса в районе вытравки	377
Приложения	381
Использованная литература	396