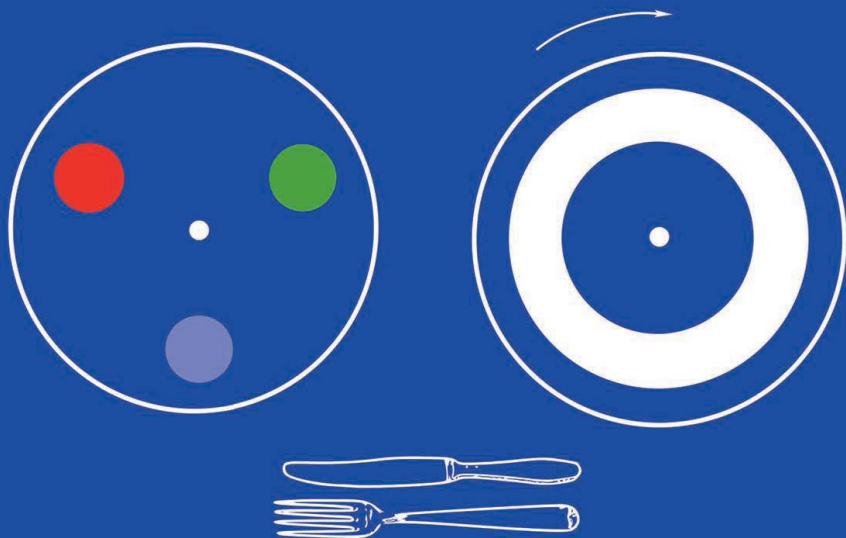


А. В. Смилга

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ НА ОБЕД



А. В. Смилга

Квантовая теория поля на обед

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2019

УДК 530.1

ББК 22.31

С50

Смилга А. В.

Квантовая теория поля на обед. Электронное издание.

М.: МЦНМО, 2019.

432 с. ISBN 978-5-4439-3365-8

В книге предпринята попытка объяснить, что такое квантовая теория поля, на полупопулярном эвристическом уровне.

В ней также рассказывается о нашем нынешнем понимании физики элементарных частиц и об учёных, сформировавших эту область науки.

Для всех интересующихся современной физикой.

Подготовлено на основе книги:

Смилга А. В. Квантовая теория поля на обед. — М.: МЦНМО, 2019. — 432 с. — ISBN 978-5-4439-1365-0

Научно-популярное издание

12+

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)241-08-04.
<http://www.mccme.ru>

ISBN 978-5-4439-3365-8

© Смилга А. В.

© МЦНМО, 2019.

*Посвящается памяти
Доктора Лизы*

Предисловие к русскому изданию

Эта книга представляет собой авторский перевод книги «Digestible Quantum Field Theory», вышедшей в начале 2016 года в издательстве «Springer». Я попытался в ней разъяснить этот непростой предмет человеку, который не собирается заниматься квантовой теорией поля профессионально (для таких людей написано много хороших учебников), но любопытен и хочет узнать, как выглядит современная теория фундаментальных взаимодействий. Однако, некоторое знание математики и физики (в рамках первых трёх курсов университета) необходимо для понимания книги.

Читателю предлагается праздничный обед из восьми перемен. Первые две части книги написаны на полупопулярном эвристическом уровне. Затем в части *Кулинарные тайны* я даю дополнительную информацию, нужную для понимания центральных частей книги — *Первых* и *Вторых* блюд. Читатель, успешно справившийся с ними, сможет отдохнуть в пятой части, где я не пишу формул и рассказываю не о науке, а о некоторых замечательных учёных прошлого века, кому мы обязаны нашим сегодняшним знанием. На *Десерт* я рассказываю об общей теории относительности и предлагаю также читателю попробовать некоторые сладкие спекуляции, касающиеся суперсимметрии и квантовой гравитации.

Меню

Предисловие к русскому изданию	4
--	---

Часть I. Аперитив

Глава 1. Введение	11
1.1. Благодарности	17
Глава 2. Единицы. Фундаментальные константы. Некоторые обозначения	19

Часть II. Закуски

Глава 3. Наше представление о Вселенной	27
3.1. Элементарные частицы	28
3.2. Гравитационное взаимодействие	32
3.3. Электромагнитное взаимодействие	34
3.4. Сильное взаимодействие	37
3.5. Слабое взаимодействие	40
Глава 4. Кубическое здание физических теорий	43
4.1. Классическая механика	43
4.2. Релятивистская механика	44
4.3. Квантовая механика	46
4.4. Релятивистская квантовая механика	51
4.5. Нерелятивистская теория поля	57
4.6. Релятивистская теория поля	59
4.7. Квантовая теория поля	61
4.8. Не в кубе	72
Глава 5. Становление Стандартной модели	75
5.1. Деревья	75
5.2. Петли. Диаграммная техника. Расходимости и перенормировка	81
5.3. От атомных ядер к глюонным струям	87
5.4. От β -распада к бозону Хиггса	100

Часть III. Кулинарные тайны

Глава 6. Группы и алгебры	117
6.1. Скаляры. Векторы. Тензоры	117
6.1.1. Евклидово пространство	117
6.1.2. Пространство Минковского	119
6.2. Конечные группы	121

6.3. Группы Ли	122
6.3.1. Ортогональные группы	123
6.3.2. Группа Лоренца	125
6.3.3. Унитарные группы	127
6.3.4. Представления	129
6.4. Грассманова алгебра	135
Глава 7. Ликбез по теореме	138
7.1. Нерелятивистская механика	138
7.2. Сила Лоренца	143
7.3. Полевые теории	146
Глава 8. Сечения и амплитуды	156
8.1. Кинематика	156
8.2. Борновское приближение. Высшие поправки	161
8.3. Интегралы по траекториям	168

Часть IV. Первые блюда

Глава 9. Фермионные поля	179
9.1. Первый блин	180
9.2. Грассмановы волны в дираковском море	183
9.3. Электромагнитные взаимодействия. Уравнение Дирака	190
Глава 10. Диаграммы Фейнмана	197
10.1. Кинематика	197
10.2. Потенциальное рассеяние	199
10.3. Теория скалярного поля	201
10.4. Скалярная электродинамика	204
10.5. Спинорная электродинамика	207
10.6. Петли	210

Часть V. Вторые блюда

Глава 11. Квантовая хромодинамика	219
11.1. Лагранжиан КХД	219
11.2. Правила Фейнмана. Асимптотическая свобода. Конфайнмент	223
11.3. Ноябрьская революция и кварконий	228
11.4. Лёгкие мезоны и барионы	236
11.5. Киральная симметрия и её нарушение	244
11.5.1. Киральная симметрия в КХД	244
11.5.2. Спонтанное нарушение симметрии. Теорема Голдстоуна	246
11.5.3. Кварковый конденсат. Псевдоскалярные псевдоголдстоуны	252

11.6. Природа масс адронов. Магнитные моменты барионов	256
Глава 12. Теория электрослабых взаимодействий	259
12.1. Теория Ферми. Слабые токи	259
12.2. Механизм Хиггса	267
12.2.1. Абелев случай	267
12.2.2. Неабелев случай	270
12.3. Стандартная модель: бозонный сектор	271
12.4. Стандартная модель: фермионы	274
12.4.1. Калибровочные взаимодействия	274
12.4.2. Массы	279
12.4.3. Поколения и их смешивание	281
12.5. Новая территория зоопарка	282
12.6. Осцилляции нейтрино	287
12.7. Парадоксы и фокусы Стандартной модели.	
Их возможное разоблачение	291
12.7.1. Парадоксы	291
12.7.2. Суперсимметрия и Великое объединение	293

Часть VI. Нормандская пауза

Глава 13. Рассказы о физиках	299
13.1. Ричард Фейнман	299
13.1.1. Взломщик сейфов	300
13.1.2. Барабанщик	302
13.1.3. Художник	304
13.2. Лев Ландау	306
13.2.1. Молодость	308
13.2.2. Харьков. Минимум Ландау	310
13.2.3. Арест. Бомба	313
13.2.4. Авария	315
13.3. Карен Тер-Мартirosян. ИТЭФ	317

Часть VII. Десерт

Глава 14. Суперсимметрия	325
14.1. Электрон в магнитном поле	327
14.2. Грассманово описание	334
14.3. Полевые теории	338
14.4. За и против	346
Глава 15. Общая теория относительности	354
15.1. Искривлённое пространство-время	355
15.1.1. Математика	355
15.1.2. Физика	361

15.2. Лагранжианы. Уравнения движения. Их решения	365
15.2.1. Гравитационные волны	367
15.2.2. Решение Шварцшильда и чёрные дыры	369
15.2.3. Решение Фридмана и космология	372
Глава 16. Загадка квантовой гравитации	380
16.1. Попытки пертурбативных вычислений	380
16.1.1. Рассеяние гравитонов	380
16.1.2. Чем плоха неперенормируемость?	382
16.1.3. Супергравитация	388
16.2. Нарушение причинности. Парадокс Хоукинга	391
16.3. Струны	397
16.3.1. Бозонные струны	398
16.3.2. Суперструны	402
16.3.3. Жалобы педантов	404
16.4. Грёзы автора	406
16.4.1. Вселенная как мыльный пузырь	406
16.4.2. Жизнь с духами	409

Часть VIII. Кофе

Рекомендуемая литература	417
Предметный указатель	420
Указатель имен	428

Часть I

Аперитив

Глава 1

Введение

Полвека назад, когда автор был немножко моложе, чем сейчас, и хуже знал различные науки, он тем не менее науками интересовался. Особенно физикой. Среди вещей, которые я не понимал тогда, но хотел понять, была теория относительности. Не будучи ещё готовым изучать этот предмет по соответствующему тому Ландау и Лифшица, я должен был искать ответ в популярных книгах.

Первая книга, которую я прочитал на эту тему, была «Теория относительности для миллионов» Мартина Гарднера. Эта книга была адресована широкой ненаучной аудитории и не содержала ни единой формулы. Автор пытался объяснить основные релятивистские эффекты (замедление времени и парадокс близнецов, сокращение длин, эквивалентность между энергией и массой и т. д.) без формул, а только словами. Должен сказать, что в моем случае Гарднеру это не удалось. Я ничего не понял.

Однако вторая моя попытка была более успешной. Мне попала в руки «Азбука теории относительности» Клементы Дарелла¹. В этой книге были формулы. Они меня не слишком испугали, потому что к тому времени я уже прочитал школьный учебник математики и получил некоторое представление о том, что могут значить символы x , y и даже $\sqrt{z}$. Помимо корней в этой книге содержались ясные и педагогичные объяснения, как упомянутые выше растяжение времени и сжатие расстояний могут быть выведены из двух эйнштейновских постулатов специальной теории относительности. И я это понял.

Позднее я прочитал много других хороших популярных статей и книг. Конечно, среди них были книги Перельмана: «Занимательная физика», «Занимательная математика», «Занимательная астрономия» и проч. Я вспоминаю статью Гелл-Манна «Восьмеричный путь» (про кварковую модель и классификацию «элементарных» частиц, играющую ту же роль, что таблица Менделеева для атомов).

¹ Оригинальное заглавие книги Дарелла — «Readable Relativity». Я использовал эту модель для английского заглавия книги.

Ещё позже я с интересом и удовольствием прочитал «Первые три минуты» Стивена Вайнберга про рождение Вселенной и про то, что случилось в первые три минуты её существования. В это время я был уже студентом-старшекурсником. Но книгу Вайнберга может читать и способный школьник, несмотря на (а я бы сказал — *благодаря*) наличию некоторых простых алгебраических соотношений.

Физика — это всё-таки точная наука. И слово *точная* значит, что она выражается на языке математики. И без математики физику понять нельзя.

Разумеется, существует математика разного уровня. Если говорить о специальной теории относительности, то её вполне можно достаточно хорошо постичь, не выходя за пределы элементарной алгебры с квадратными корнями. Чтобы *полностью* её понять (на несколько более высоком уровне, чем понимал её Эйнштейн в 1905 г., когда он писал свои знаменитые статьи), надо быть также знакомым с векторным и тензорным анализом и элементами теории групп.

Как читатель уже, наверное, догадался, в *этой* книге, посвящённой квантовой теории поля, формулы *будут* присутствовать. Более того, необходимый уровень знания математики в нашем случае существенно выше, чем тот, что нужен для постижения специальной теории относительности. Книга написана так, чтобы быть понятной неспециалистам, но она вряд ли будет доступна 12-летним школьникам, даже очень способным. Целевая аудитория моей книги — это люди, которые уже изучили физику на университетском уровне.

Собственно, в этом и состоял мой главный побудительный мотив к написанию этой книги. Я знаю много инженеров, математиков, химиков, физиков других специальностей, которые хотят узнать, что такое *квантовая хромодинамика*, или *Стандартная модель*, но которые не хотят или не могут потратить на это изрядное количество времени, необходимое, чтобы постичь эти науки на профессиональном уровне.

Первые две части книги (первые две перемены обеда, на который я вас приглашаю) написаны для них. Для их чтения необходимо владеть не только элементарной алгеброй, но также элементарным анализом и линейной алгеброй на уровне первых двух университетских курсов (обычные и частные производные, обычные и кратные интегралы, дифференциальные уравнения, матрицы). Необходимо также знать общую физику на уровне двух-трёх курсов университета. Я также предполагаю знание теории относительности и основ квантовой механики.

Лучший известный мне курс общей физики написан Фейнманом. Но вообще-то знакомство с «Фейнмановскими лекциями по физике» — достаточное, но не необходимое условие для чтения первых двух частей книги. Эти части написаны достаточно популярно. В некотором смысле начало книги даже *более* популярно, чем упоминавшаяся выше книга Дарелла по специальной теории относительности. В то время как человек, прочитавший книгу Дарелла, получает весьма ясное понимание предмета, мы не можем обещать того же человеку, который ограничит знакомство с нашей книгой двумя первыми её частями.

К сожалению, квантовая теория поля намного сложнее СТО, и знание стандартного университетского курса физики недостаточно, чтобы понять по-настоящему, что это такое. Во вводной части книги мы в основном ограничиваемся тем, что *анонсируем* результаты и даём там, где это возможно, эвристические объяснения. Но мы не *выводим* эти результаты строго.

По этому поводу можно сделать следующее общее замечание. Законы физики формулируются на математическом языке. Но между физикой и математикой есть существенная разница, и есть существенная разница между тем, как студент обычно изучает эти науки. Разные области математики хотя и связаны между собой, но эта связь не такая тесная. Эксперт по функциональному анализу может плохо знать теорию групп или теорию чисел, и наоборот. Теория групп и функциональный анализ — это разные логические системы, основанные на разных системах аксиом. Их можно изучать отдельно и независимо. Конечно, лучше, когда математик знает не одну только свою область, но и соседние. Широкая математическая культура даёт перспективу и помогает в работе. Она желательна. Но не обязательна.

Но в физике всё по-другому. У физика по сути дела всего один объект исследования — мир, в котором мы живём. Разные физические явления тесно связаны друг с другом, и их математические описания часто очень похожи. Одно и то же волновое уравнение $\square f = 0$ описывает свет, звук и морской прибой. Поэтому невозможно изучать физику раздел за разделом. Невозможно, например, изучить на достаточно высоком уровне оптику, не имея представления о механике (и в том числе о теоретической механике), об уравнениях Максвелла и проч.

Студента, изучающего физику, можно сравнить с деталью, обрабатываемой на токарном станке. Он приобретает нужную форму только после определённого числа сделанных оборотов.

В старших классах хорошей школы он делает первый оборот, получая поверхностное представление о всех областях физики. Он может теперь вычислить траекторию пушечного ядра и ёмкость конденсатора.

Второй оборот — это университетский курс общей физики. Студент, в частности, узнаёт там, что свет по своей природе — это электромагнитные волны, решение уравнений Максвелла для электромагнитного поля.

Третий оборот — это курс теорфизики.

Несколько подобных оборотов претерпит и наш читатель. Первый такой оборот — это вторая «закусочная» часть. В главах 3, 4 читатель увидит панорамную «аэросъёмку» Вселенной и узнает о разных типах фундаментальных взаимодействий. В главе 5 мы не спускаемся с облаков сильно вниз, но фокусируемся на главном предмете книги, квантовой теории поля, и даём поверхностное — в основном словесное — описание современных теорий трёх фундаментальных взаимодействий: электромагнитного, сильного и слабого.

Пятая глава — это последняя из наших закусок, и читатель, который почувствует, что он уже заморил червячка, не захочет больше тратить время на застолье и предпочтёт обратиться к более важным своим делам, может не читать всё остальное, кроме разве что части VI, *Нормандской паузы* нашего обеда¹, где нет формул и я рассказываю не о физике, а о физиках — Фейнмане, Ландау, Тер-Мартirosяне — и делюсь с терпеливым читателем некоторыми своими личными воспоминаниями.

Но если читатель захочет пройти второй оборот и узнать, как утверждения, сделанные в первых пяти главах, выводятся и доказываются, мы его приглашаем отведать четыре питательных блюда, поданные в четвёртой и пятой частях книги. В частности, главы 11 и 12 посвящены двум основным составным частям современной квантовой полевой теории (известной под неприязательным именем «Стандартная модель»). В этих главах детально описываются теория сильных взаимодействий и объединённая теория электромагнитных и слабых взаимодействий.

¹ «Нормандская пауза» (*trou normand* по-французски, не путать с «нормандской четвёркой») — это специальное блюдо в традиционной праздничной французской трапезе — бокал кальвадоса или что-то подобное. Нормандская пауза позволяет пирующему переварить уже поглощённую пищу и приготовиться к десерту.

Однако чтобы понять эти главы, читатель должен расширить свои знания по математике, классической и квантовой механике. Вся необходимая дополнительная информация даётся в части «Кулинарные тайны».

Глава 6 — это очень краткий курс по теории групп. Даются сведения, необходимые для понимания математической формулировки полевых теорий, описанных в главах 10—12. Я также ввожу в этой математической главе понятие антикоммутирующих грассмановых чисел — они необходимы для описания фермионных полей, о которых мы рассказываем в главе 9.

В §7.1 я кратко описываю лагранжев и гамильтонов формализмы теоретической механики. Этот материал, вероятно, не нов для нашего читателя. Но в последующих параграфах главы 7 я рассказываю о применении методов теоретической механики к классической теории поля. Пожалуйста, посмотрите эти разделы: в стандартном университетском курсе эти вопросы обычно не затрагиваются.

Глава 8 посвящена теории рассеяния в квантовой механике и тому, как амплитуда упругого рассеяния может быть описана на языке диаграмм. Мы выводим диаграммное представление для *нерелятивистской* амплитуды вполне точно и строго (в релятивистском случае это будет не так).

Надо сказать, что, хотя части III—V нельзя назвать популярным чтением, в *некотором* смысле они популярны. Я попытался дать там только *минимальные* технические детали, необходимые для понимания смысла описываемых теорий на некотором уровне, но это ещё не профессиональный уровень! Например, в главе 10 мы будем обсуждать фейнмановские диаграммы. Я попытаюсь объяснить, откуда они берутся, какие аналитические выражения для амплитуд рассеяния им соответствуют. Но я не выведу строго правила Фейнмана для построения амплитуд и не научу читателя, как делать с их помощью точные вычисления. Я упомяну, но не буду объяснять по существу некоторые достаточно сложные теоретические вопросы (наподобие квантовых аномалий). Я познакомлю читателя с понятием фейнмановского интеграла по траекториям, но это знакомство будет поверхностным.

Студент, который захочет всё это узнать, должен обратиться к более серьёзным книгам, прежде всего к блестящей книге Энтони Зи «Квантовая теория поля в двух словах» (М., 2009). Она написана на уровне, близком к профессиональному, но с множеством наглядных

педагогических объяснений. Ну и есть, конечно, очень хороший современный учебник: «Введение в квантовую теорию поля» Пескина и Шрёдера.

В качестве «Десертов» я предлагаю отведавать сладкие спекуляции. Глава 14 посвящена суперсимметрии. Суперсимметрия — это симметрия между бозонами (частицами с целым спином) и фермионами (у которых спин полуцелый). Мы не знаем сейчас, реализуется эта симметрия в природе или нет, т.е. мы знаем, что она не реализуется *точно*, — у известных нам бозонов и фермионов совершенно разные массы, но суперсимметрия может быть *приближённой* и она может проявляться только на глубинном уровне — на малых расстояниях и соответственно при больших энергиях. Мы приводим аргументы в пользу этой гипотезы в конце главы 12 и в главе 14. Но даже если в конечном счёте окажется, что наш мир ни в каком смысле не суперсимметричен, идея этой симметрии настолько красива, что я не смог удержаться от того, чтобы вставить её в эту книгу.

Основная тема книги — квантовая теория поля. Но есть одна теория поля, которая известна сегодня только в своей классической ипостаси и которая холодно отвергает все наши попытки её проквантовать. Я имею в виду *гравитацию*. Мы обсудим классическую теорию гравитации, *общую теорию относительности*, в главе 15.

Последняя глава посвящена загадке квантовой гравитации, теории струн (наиболее популярный сегодня кандидат на роль гипотетической Единой теории всего) и моим собственным еретическим идеям на этот счёт. Эта глава и в меньшей степени глава 14 сложнее остальных. Они адресованы возможному читателю, который уже изучил Стандартную модель достаточно хорошо — по нашей книге или по другим книгам — и хочет поразмыслить вместе с автором о том, какая ещё более фундаментальная теория лежит в её основе.

У нашей книги есть одна черта, которую я хотел бы отметить. Это частые перекрёстные ссылки в обоих направлениях — на предыдущие и на последующие её разделы. Эти ссылки необходимы. В самом деле, книга содержит довольно много материала, и нельзя ожидать, что читатель удержит в голове всё, что он узнал, читая главу 5, к тому времени, когда он приступит к изучению одиннадцатой и двенадцатой глав. Напоминание необходимо. А имея в виду, что многие читатели не будут удовлетворены эвристичным размахиванием рук в главах 4 и 5, мы даём там ссылки на последующие части



Рис. 1.1. Кладка кирпичей ёлочкой в куполе флорентийского собора

книги, где те же вопросы обсуждаются с большей строгостью и доказательностью.

Мы берём в этом смысле пример с великого архитектора XV века Филиппо Брунеллески, который в кладке величественного собора Санта Мария дель Фьоре во Флоренции клал кирпичи «ёлочкой», так что многие кирпичи располагались вертикально (см. рис. 1.1). Эти вертикальные кирпичи обеспечивали опору стенам купола и не давали им обрушиться во время постройки. Мы надеемся, что наши перекрёстные ссылки сыграют похожую роль.

1.1. Благодарности

Оригинальная версия этой книги написана по-английски. Английский язык для меня не родной; он достаточно хорош, чтобы писать научные статьи, но мои английские тексты более общего плана с неизбежностью изобилуют ошибками, раздражающими англоязычного читателя. «Моя такого не хотела» и поэтому я долго не принимался за написание этой книги (а идея написать подобную полупопулярную книгу существовала у меня давно). Быть может, эта книга так никогда и не была бы написана (по крайней мере, по-английски), если бы Хью Джонс, профессор Imperial College в Лондоне, не взял бы на себя роль добровольного редактора, не предложил бы мне откорректировать мой английский стиль во всей

книге! Проф. Джонс сделал также много весьма ценных замечаний по содержанию книги. Я ему чрезвычайно благодарен.

Я также благодарен Жан-Полю Блезе, Аркадию Вайнштейну, Андрею Варламову, Игорю Клебанову, Хайнриху Лютвилеру, Алексею Морозову, Анке Туреану, Масуду Чайчану и Михаилу Шапошникову, которым я показывал рукопись книги, за ценные замечания. Я благодарю Татьяну Елецкую, которая нарисовала рисунки 4.2 и 15.1, Альбану Смилга за сотворение Вселенной (см. рис.16.7) и Олега Канчели, переславшего мне фото на рис. 13.4 из своего архива.

Глава 2

Единицы. Фундаментальные константы. Некоторые обозначения

В книге используются разные единицы измерения. Часто (но не всегда) мы будем измерять массу в килограммах, а расстояние в метрах, как предписывается международной системой единиц СИ. Однако, хотя эта система хорошо обслуживает практические нужды, для студента, изучающего физику, СИ очень плоха. Это относится не столько к метрам и килограммам, сколько к её ужасным электрическим единицам.

Основная электрическая единица в СИ — это ампер. В результате закон Кулона

$$F^{SI} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 r}{r^3}. \quad (2.1)$$

содержит эзотерический фактор $1/(4\pi\epsilon_0)$, не имеющий абсолютно никакого физического смысла и отвлекающий внимание студента от более существенных вещей. (Разумеется, физику можно выучить и используя СИ, но просто ϵ_0 делает эту задачу немного более сложной.)

Даже в блестящих «Фейнмановских лекциях», к сожалению, используются амперы. Причина этого в том, что книга Фейнмана была написана на базе курса лекций, который он прочёл в Калтехе. И он должен был использовать официальную международную систему, предписываемую министерствами образования во всех странах, включая США. Но наша книга не курируется министерствами, и мы свободны в нашем выборе.

Ни ϵ_0 , ни μ_0 в книге больше не встретятся. Когда мы будем писать явные формулы, описывающие физику электромагнитных взаимодействий, мы будем часто использовать систему СГС, где длина измеряется в сантиметрах, масса в граммах и время в секундах. Единицы всех остальных физических величин выражаются через эти три основные единицы. Например, единица электрического заряда q в этой системе (её иногда называют *статкулоном*) есть $\text{г}^{1/2} \cdot \text{см}^{3/2} \cdot \text{с}^{-1}$, как

следует из кулоновского закона, записанного в форме

$$F = \frac{q_1 q_2 r}{r^3}, \quad (2.2)$$

без каких-либо дополнительных факторов.

Система СГС удобнее и нагляднее, чем СИ, но для изучения релятивистской квантовой теории она не лучшая. Самая удобная (не во всех случаях, но во многих) система — это так называемая *естественная система*, или *система теоретиков*.

Идея проста. В физике есть несколько основных фундаментальных констант, в частности постоянная Планка $\hbar$ и скорость света c . Эти константы входят во все формулы. Мы можем, однако, выбрать систему единиц, где $\hbar = c = 1$. В этом случае формулы упростятся и их *существенная* структура проявится более чётко.

Такой выбор приводит к достаточно радикальным последствиям, которые могут с первого взгляда показаться странными и нежелательными. Прежде всего, ввиду условия $c = 1$, длина и время измеряются теперь в одних и тех же единицах. Вместо метров и сантиметров длина измеряется в световых секундах! Впрочем, любители научно-фантастической литературы и популярных книг по астрономии, привыкшие к тому, что расстояние измеряется в световых годах, вряд ли окажутся этим шокированы. А физики знают, что в релятивистской теории время и расстояние имеют схожую природу, что лучше выражается, если они измеряются в одних и тех же единицах.

Для тех, кто всё ещё не чувствует себя комфортно, я предлагаю представить почти плоский мир с очень сильной гравитацией, так что перемещения в вертикальном направлении намного более ограничены, чем в нашем мире. Не будет ли тогда пространственная ось z «ощущаться» совсем по-другому, не так, как оси x и y ? И не будет ли в повседневной жизни тогда естественно измерять высоту и горизонтальные расстояния в разных единицах?¹ Представим теперь живущего в этом мире физика, местного Эйнштейна, который обнаружил, что высота и длина имеют на самом деле одну и ту же

¹ На самом деле это частично справедливо и для нашего мира с его умеренной гравитацией. Средневековые монголы измеряли расстояния в конских переходах. И, разумеется, эта единица использовалась только для координат x и y , но никак не для z . Разные единицы для x , y и z традиционно используются также в Англии: высоты измеряются в футах, а длины — в ярдах и милях.

природу. И он предлагает измерять их в одних и тех же единицах. Мне кажется, это предложение можно было бы назвать разумным.

В этой системе скорость безразмерна, она измеряется в долях c . Энергия и импульс имеют ту же размерность, что масса, и измеряются в тех же единицах.

Условие $\hbar = 1$ приводит к ещё более радикальным последствиям. Из массы m и констант $\hbar$ и c можно смастерить величину, имеющую размерность длины:

$$l_C = \frac{\hbar}{mc}. \quad (2.3)$$

Если m — это масса частицы, то величина (2.3) называется её комптоновской длиной. Эта величина имеет вполне определённый смысл в свете квантового корпускулярно-волнового дуализма. Электрон и другие частицы имеют волновые свойства. Частице с импульсом p отвечает дебройлевская волна длины $\lambda = 2\pi\hbar/p$. Умноженная на 2π комптоновская длина — это длина волны релятивистской частицы с импульсом¹ $p = mc$, что отвечает скорости

$$v = \frac{pc^2}{E} = \frac{pc^2}{\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}} = \frac{c}{\sqrt{2}}. \quad (2.4)$$

Комптоновская длина — это приблизительный предел, за которым (при меньших расстояниях) обычная нерелятивистская квантовая механика перестаёт быть применимой.

В системе $\hbar = c = 1$ комптоновская длина частицы — это просто её обратная масса. В этой системе расстояния измеряются не в метрах и не в (световых) секундах, но в обратных (квантово-световых) килограммах!

Точнее, обычно всё же не в килограммах. В микромире и килограмм, и грамм — слишком большие и неудобные единицы. Традиционно массы и энергии элементарных частиц измеряются в электронвольтах. Один электронвольт (обозначаемый эВ) — это энергия, которую электрон приобретает при прохождении конденсатора с разностью потенциалов в один вольт. Иначе говоря,

$$1 \text{ эВ} = |e| \cdot (1 \text{ В}) \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}, \quad (2.5)$$

где e — заряд электрона. На практике используются также килоэлектронвольты ($1 \text{ кэВ} = 10^3 \text{ эВ}$), мегаэлектронвольты ($1 \text{ МэВ} = 10^6 \text{ эВ}$),

¹ Строго говоря, по историческим причинам l_C называется *приведённой* комптоновской длиной, а собственно комптоновская длина — это как раз $2\pi l_C$. Но мы всюду будем работать только с l_C и будем называть комптоновской длиной именно эту величину.

гигаэлектронвольты ($1 \text{ ГэВ} = 10^9 \text{ эВ}$) и тераэлектронвольты ($1 \text{ ТэВ} = 10^{12} \text{ эВ}$).

Ввиду условия $c = 1$ эти единицы используются также для измерения импульсов и масс.

Например, масса электрона есть $m_e = 511 \text{ кэВ}$, масса протона есть $m_p = 938 \text{ МэВ}$ и т. д.

И для расстояний используются не метры, а их малые доли. Популярны *ангстрем* ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}$), характерный размер атома, и *ферми* ($1 \text{ Ф} = 10^{-15} \text{ м}$) — характерный размер атомного ядра. Как только что было сказано, расстояния можно также измерять в обратных массовых единицах. Так, $1 \text{ Ф} \approx 3,3 \cdot 10^{-24} \text{ с} \approx (200 \text{ МэВ})^{-1}$.

Сведения о различных единицах и значениях наиболее важных фундаментальных констант сведены в таблицу.

Таблица 1. Единицы и фундаментальные константы

	имя	символ	величина
единицы	ангстрем	$\text{\AA}$	10^{-10} м
	ферми	Ф	$10^{-15} \text{ м} \approx (200 \text{ МэВ})^{-1}$
	электронвольт	эВ	$1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} \approx 11600 \text{ К}$
	градус Кельвина	К	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж}$
константы	скорость света	c	$3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
	постоянная Планка	$\hbar$	$1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
	постоянная Ньютона	G_N	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ (СИ)} \approx (1,22 \cdot 10^{19} \text{ ГэВ})^{-2}$
	заряд электрона	e	$-4,8 \cdot 10^{-10} \text{ ед. СГС} \approx -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
	постоянная тонкой структуры	$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$	$1/137$
	масса электрона	m_e	$9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг} \approx 511 \text{ кэВ}$
	масса протона	m_p	$1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \approx 938 \text{ МэВ}$

Обратите особое внимание на величину Ньютоновской гравитационной константы. В естественных единицах

$$G_N = \frac{1}{m_p^2}, \quad m_p \approx 1,22 \cdot 10^{19} \text{ ГэВ} \approx 2,2 \cdot 10^{-5} \text{ г}. \quad (2.6)$$

Масса m_p называется планковской массой. В обычных единицах

$$m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G_N}}. \quad (2.7)$$

В принципе можно использовать «сверхъестественную» систему единиц, где все массы безразмерны, измеряются в долях от планков-

ской массы. В этой системе масса электрона очень мала:

$$m_e \approx 4,2 \cdot 10^{-23}, \quad (2.8)$$

То же относится и к другим элементарным частицам, у них у всех массы на много порядков меньше планковской, или, что то же самое, планковская масса, сравнимая с массой амёбы, на много порядков превышает массы элементарных частиц.

Помимо планковской массы, можно определить планковские фундаментальную длину и фундаментальное время. В обычных единицах

$$l_p = \sqrt{\frac{\hbar G_N}{c^3}} \approx 1,6 \cdot 10^{-35} \text{ м}, \quad t_p = \sqrt{\frac{\hbar G_N}{c^5}} \approx 5,4 \cdot 10^{-44} \text{ с}. \quad (2.9)$$

Работая в своей системе, теоретики обычно наводят в ней окончательный марафет, используя *хэвисайдовское* определение электрического заряда, $q_{\text{хэвисайд}} = \sqrt{4\pi} q_{\text{сгс}}$. Тогда закон Кулона приобретает фактор 4π в знаменателе, но уравнения Максвелла (4.31) и лагранжиан, из которого они следуют, не содержат π .

В хэвисайдовских естественных единицах, которые мы в основном будем использовать, постоянная тонкой структуры равна

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}. \quad (2.10)$$

Во всей книге мы используем сигнатуру плоской метрики Минковского $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ и будем делать аккуратное различие между ковариантными и контравариантными векторами и тензорами (мы напомним, что это такое, в п. 6.1.2). Обычно такое различие малорелевантно, но в некоторых случаях это не так. Координатный 4-вектор определён как $x^\mu = (ct, \mathbf{x})$. Соответственно $\partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)$. Для всех остальных четырёхмерных векторов мы принимаем соглашение $V^\mu = (V_0, \mathbf{V})$ и, значит, $V_\mu = (V_0, -\mathbf{V})$. Мы также будем использовать матричные 4-векторы: двумерные квадратные матрицы

$$\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \boldsymbol{\sigma}), \quad \bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\boldsymbol{\sigma}), \quad (2.11)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — матрицы Паули¹, и четырёхмерные матрицы Дирака

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

удовлетворяющие алгебре Клиффорда: $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1}$.

¹ Выполняется тождество $\sigma^\mu \bar{\sigma}_\mu = 4 \cdot \mathbb{1}$.

Последнее замечание относится к нашей конвенции для символов сопряжения. Звёздочка $*$ будет означать комплексное сопряжение обычных чисел. Символ † будет использоваться для комплексного сопряжения грассмановых чисел и для эрмитова сопряжения операторов. А чёрточка $-$ будет использоваться для дираковского сопряжения биспиноров [см. формулу (9.45)] и для обозначения античастиц (p — протон, а $\bar{p}$ — антипротон).

ЧАСТЬ II

Закуски

Глава 3

Наше представление о Вселенной

Не знаю, каким я могу казаться миру, но самому себе я представляюсь ребёнком, который играет на берегу и развлекается тем, что иногда отыскивает красивую раковину или камешек, более яркий, чем обычно, в то время как великий океан неисследованной истины расстилается передо мной.

И. Ньютон

Когда Ньютон это писал, люди только начали изучать природу, и ньютоновский образ был не таким уж большим преувеличением. В то время единственным известным фундаментальным законом природы был найденный Ньютоном камешек — закон универсального гравитационного притяжения. Люди не имели понятия об атомной структуре материи, не знали, почему горит Солнце, что такое солнечный свет и многое, многое другое.

С того времени прошло более трехсот лет, и ситуация изменилась радикально. Сегодня мы знаем до известного предела, какова структура материи, знаем, что зажигает Солнце. За немногими исключениями, которые мы будем обсуждать позже, мы понимаем в общих чертах, как устроен мир, в котором мы живём, от малых масштабов, вплоть до $\sim 10^{-18}$ м (что на восемь порядков мельче атома), до масштаба $\sim 10^{26}$ м (размер наблюдаемой части Вселенной). В этих пределах океан истины сегодня исследован и картографирован.

Вселенная была рождена 13 миллиардов лет, назад в результате *Большого взрыва*. В этот начальный момент Вселенная имела нулевой размер и бесконечную температуру. Затем она начала быстро расширяться и охлаждаться. Она всё ещё расширяется: удалённые галактики с большой скоростью убегают от нас, и чем дальше от нас они, тем быстрее они убегают.

Честно говоря, мы не знаем, что случилось в *самый момент* взрыва. Более того, мы не уверены, что такой момент существовал. И уж совсем неясен вопрос, что происходило до Большого взрыва. В популярных и научных книгах часто говорится, что Время

и Пространство были созданы в момент взрыва и поэтому вопрос «что было раньше?» бессмыслен. Но такой ответ просто фиксирует границу наших знаний. Верно, что во фридмановском космологическом решении классических уравнений общей теории относительности время и пространство создаются в момент Большого взрыва. Но проблема в том, что в этот самый момент классическая теория попросту не применима. Квантовые эффекты в этом случае существенны, а квантовая теория гравитации пока не построена...

В чём мы уверены — так это в том, что было время, когда наша Вселенная была очень маленькой и горячей. Мы начинаем более или менее понимать её динамику с момента $t \approx 10^{-10}$ с после Взрыва, когда Вселенная уже охладилась до температуры¹ $T \approx 100 \text{ ГэВ} \approx 10^{15} \text{ К}$.

3.1. Элементарные частицы

Вселенная не пуста, а наполнена *материей*. Есть разные виды материи. Иногда физики говорят о различных *фундаментальных полях*, а иногда о различных *элементарных частицах*, представляющих элементарные возбуждения (кванты) этих полей. Температура Вселенной, о которой мы только что говорили, примерно совпадает со средней энергией одной такой частицы.

Все известные элементарные частицы перечислены в таблице 2. Обсудим эту таблицу. В ней фигурируют четыре типа частиц.

Прежде всего имеются *калибровочные бозоны*² — медиаторы хорошо известных четырёх типов *фундаментальных взаимодействий*: сильного, слабого, электромагнитного и гравитационного. Медиатор электромагнитного взаимодействия — это фотон. Читатель его видел. Медиатор гравитационного взаимодействия называется *гравитоном*. Существование гравитационных волн (представляющих когерентные потоки большого числа гравитонов) было предсказано Эйнштейном сто лет назад. А три года назад их удалось наблюдать экспериментально — мы расскажем об этом подробно в главе 15. Медиаторы слабых взаимодействий суть так называемые *промежуточные бозоны*, $W^\pm$ и Z . Их существование было тоже вначале предсказано теоретически, и потом они были открыты в экспериментах на

¹Сегодняшняя её температура (температура реликтового излучения) составляет примерно 2,7 К.

²Читатель, наверное, понимает слово *бозон* — это частица с целым спином, которая любит находиться в компании своих товарок. Но он, вероятно, не понимает ещё слово *калибровочный*. Он поймёт это, дочитав нашу книгу до середины.

Таблица 2. Элементарные частицы

название		масса	электри- ческий заряд (в единицах $ e $)	спин	участие во взаимодействиях
калибровочные бозоны	гравитон (G)	0	0	2	гравитационное
	фотон (γ)	0	0	1	гравитационное, электромагнитное
	глюон (g)	0	0	1	гравитационное, сильное
	$W^{\pm}$	80 ГэВ	± 1	1	гравитационное, электромагнитное, слабое
	Z	91 ГэВ	0	1	гравитационное, слабое
лептоны	электрон (e^{-})	511 кэВ	-1	1/2	гравитационное, электромагнитное, слабое
	электронное нейтрино (ν_e)	$< 0,12$ эВ	0	1/2	гравитационное, слабое
	мюон (μ^{-})	106 МэВ	-1	1/2	гравитационное, электромагнитное, слабое
	мюонное нейтрино (ν_{μ})	$< 0,12$ эВ	0	1/2	гравитационное, слабое
	тау лептон (τ^{-})	1,78 ГэВ	-1	1/2	гравитационное, электромагнитное, слабое
	тау нейтрино (ν_{τ})	$< 0,12$ эВ	0	1/2	гравитационное, слабое
кварки	верхний (u)	3 МэВ	2/3	1/2	все взаимодействия
	нижний (d)	6 МэВ	-1/3	1/2	все взаимодействия
	странный (s)	150 МэВ	-1/3	1/2	все взаимодействия
	очарованный (c)	1,35 ГэВ	2/3	1/2	все взаимодействия
	прелестный (b)	4,8 ГэВ	-1/3	1/2	все взаимодействия
	топ (t)	170 ГэВ	2/3	1/2	все взаимодействия
бозон Хиггса (H)		125 ГэВ	0	0	гравитационное, слабое

ускорителях. Медиатор сильного взаимодействия называется глюоном¹. В противоположность фотону, гравитону, $W^{\pm}$ и Z, глюоны

¹От английского *glue*, клей. Глюоны как бы склеивают кварки в протонах, нейтронах и других наблюдаемых сильно взаимодействующих частицах (адронах).

не наблюдались *непосредственно*. Такое наблюдение невозможно по особой (достаточно необычной) причине. Оказывается, индивидуальный глюон, так же как индивидуальный кварк, не может существовать в гордом свободном одиночестве, отдельно от других глюонов и кварков. Это явление называется *конфайнментом*, и мы будем подробно обсуждать его позже.

Следующая группа — это лептоны, самый известный их представитель — это электрон. Слово «лептон» происходит от греческого *λεπτός*, что значит «лёгкий». Действительно, электрон легче большинства других частиц. Нейтрино ещё легче: мы даже не знаем точно сегодня, насколько они легки. Непосредственные измерения дают для их масс только верхние пределы¹. Но тау-лептон не особенно лёгок. Он почти в два раза тяжелее протона. На самом деле лептоны отличаются от других типов частиц не своими массами, а своей динамикой. В отличие от кварков, они не взаимодействуют с глюонами и не участвуют, таким образом, в сильных взаимодействиях. Быть может, лучше было бы их назвать «слабонами» (не знаю, как это по-гречески).

Имеется 6 типов (физики говорят — *ароматов*) кварков. Есть лёгкие кварки (особенно легки верхний и нижний кварки), а есть тяжёлые. Кварки участвуют во всех четырёх взаимодействиях. Слово «кварк» ввёл в оборот Мюррей Гелл-Манн. Он заимствовал его из «Поминок по Финнегану» Джойса, где это слово несло неясный мистический смысл. Но по-немецки *der Quark* значит творог.

Кварки и лептоны объединены в три семейства (они называются *поколениями*). Каждое поколение включает пару лептонов и пару кварков. Пары (или *дублеты*) (ν_e, e) и (u, d) образуют первое поколение. Пары (ν_μ, μ) и (c, s) — второе поколение, а пары (ν_τ, τ) и (t, b) — третье поколение².

Имена *верхний* и *нижний* у кварков первого поколения (по-английски — *up* и *down*) просто указывают на их позицию в дублете, представленном как $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$. Имена *странный*, *очарованный* и *прекрасный* (*strange*, *charmed* и *beautiful*) говорят о силе поэтического вооб-

¹ Мы знаем, однако, что какая-то маленькая, но ненулевая масса у нейтрино есть. Это следует из анализа так называемых нейтринных осцилляций. Мы расскажем об этом в § 12.6.

² На самом деле жизнь более сложна: поколения смешиваются. Но время обсуждать это явление ещё не пришло.

ражения современных физиков. Но воображение это дало осечку, когда потребовалось назвать самый тяжёлый кварк. *Топ* — это английское *top* (в русской научной литературе не прижилось другого слова), что снова значит «верхняя компонента дублета». Соответственно, буква *b* в названии кварка пятого аромата чаще расшифровывается сегодня не как *beautiful*, а как *bottom*.

И кварки, и лептоны несут спин¹ $1/2$.

Фермионы друг друга не любят. Их социальные манеры столь плохи, что два тождественных фермиона просто не могут находиться в одном и том же квантовом состоянии (так называемый *принцип запрета Паули*).

У каждого фермиона, перечисленного в таблице, есть свой антифермион. Антиэлектрон называется *позитроном*. У позитрона такая же масса, как у электрона, но противоположный (положительный) электрический заряд. Античастица к *u*-кварку обозначается $\bar{u}$. Его электрический заряд противоположен заряду *u*-кварка и равен $-2/3$. Что касается бозонов, они большей частью совпадают со своими античастицами. Это верно для гравитона, фотона, *Z*-бозона, бозона Хиггса и в некотором смысле также для глюона. W^+ и W^- являются античастицами друг для друга.

Заметим здесь, что обычная материя — атомы и ядра — сделана из лёгких фермионов первого поколения: кварки *u* и *d* и электроны. Но, как было уже замечено, кварки не существуют в свободном состоянии ввиду конфайнмента. Мы видим составные объекты — протон, сделанный из двух *u*-кварков и одного *d*-кварка, и нейтрон, сделанный из двух *d*-кварков и одного *u*-кварка.

Четвёртая группа элементарных частиц немногочислена. У неё есть всего один представитель, частица Хиггса. Она описывается скалярным полем. Поэтому у неё нулевой спин, а следовательно, это бозон², который любит своих товарищей. Бозон Хиггса участвует в двух взаимодействиях из четырёх — гравитационном и слабом. Однако он участвует также в двух других, менее известных типах взаимодействий, не отмеченных в нашей таблице. Это *хиггсовское самодействие*, благодаря которому эта частица получает мас-

¹ Вероятно, читатель это знает, но я напомним, что спин частицы — это её собственный угловой момент. Спин измеряется в единицах $\hbar$, т. е. когда мы говорим, что спин электрона есть $1/2$, мы имеем в виду, что его угловой момент равен $\hbar/2$.

² Все частицы с целым спином — бозоны, а частицы с полуцелым спином — фермионы. Это утверждение будет пояснено позже.

су, и *взаимодействие Юкавы*, дающее массу кваркам и лептонам. У этих взаимодействий нет калибровочных посредников. Юкавское взаимодействие и особенно хиггсовское самодействие играют важную роль в построении Стандартной модели, они делают теоретическое описание самосогласованным. Но они не заметны, когда мы смотрим на мир вокруг нас и проводим ускорительные эксперименты при доступных, не очень высоких энергиях¹.

С другой стороны, два из четырёх отмеченных в таблице калибровочных взаимодействий действуют на больших расстояниях и весьма заметны в повседневной жизни. (Яблоки падают — это гравитационное взаимодействие. Солнце светит — это электромагнитное взаимодействие.) Сильное и слабое взаимодействие действуют на малых расстояниях — один ферми и меньше. Они ответственны за структуру материи на микроуровне.

Поговорим теперь более подробно о роли во Вселенной, которую они играют.

3.2. Гравитационное взаимодействие

В микромасштабе гравитационное взаимодействие чрезвычайно слабо, сила гравитационного притяжения между двумя электронами на 43 порядка меньше, чем сила их электрического отталкивания². Однако в космическом масштабе гравитационное взаимодействие становится главным — именно оно определяет глобальную структуру Вселенной. Это связано с *универсальностью* гравитационного притяжения — чем больше вы берёте вещества, тем больше гравитационные силы. Структура солнечной системы (законы Кеплера и т. д.) определяется гравитацией, это было уже известно Ньютону. Но закон Ньютона

$$F = -\frac{G_N m_1 m_2}{r^2} \quad (3.1)$$

— это нерелятивистский предел эйнштейновской общей теории относительности. ОТО даёт релятивистские поправки. В ближнем космосе релятивистские эффекты, конечно, невелики, но не полностью незаметны.

¹ Эти взаимодействия *непосредственно* не проявляются даже на крупнейшем существующем ускорителе — Большом адронном коллайдере возле Женевы с длиной кольца около 30 км.

² Отношение 10^{-43} есть просто m_e^2/α , где m_e выражено в планковских единицах, см. формулу (2.8).

Один из таких эффектов — это влияние гравитационного поля на течение времени. На спутниках оно течёт чуть-чуть быстрее, чем на земной поверхности. Для спутников системы GPS, помещённых на высокую орбиту (около 20 000 км высоты), часы убегают вперёд примерно на 38 микросекунд за сутки¹. Кажется, что 38 мкс — это немного, но это не так. Принять во внимание этот эффект при конструировании систем GPS и ГЛОНАСС было совершенно необходимо. Иначе они бы просто не заработали.

Наиболее яркое предсказание ОТО — это существование *чёрных дыр*. Чёрные дыры — массивные и плотные космические объекты. Будучи очень массивными и обычно очень плотными, они обладают таким сильным гравитационным полем, что ничего, включая свет, не может вырваться из них наружу.

Чтобы понять смысл этого явления, теория относительности на самом деле не очень нужна. Каждый знает, что если бросить вверх мячик, то он упадёт потом на землю. Но если запустить вверх ракету со скоростью больше второй космической $\approx 11,2$ км/с, то она на Землю уже не вернётся. На Солнце, где гравитация сильнее земной, скорость убегания больше и составляет уже ≈ 620 км/с. Чёрная дыра — это объект, где скорость убегания равна или превышает максимальную возможную в нашем мире скорость — скорость света.

Элементарное школьное вычисление в рамках закона Ньютона даёт следующую оценку для размера чёрной дыры массы M :

$$r_g \approx \frac{2G_N M}{c^2}. \quad (3.2)$$

Как ни удивительно, эта оценка *в точности* совпадает с результатом (15.25), полученным в результате аккуратного вычисления в рамках ОТО. Величина (3.2) называется *гравитационным радиусом* тела данной массы. Для Земли гравитационный радиус невелик, всего ≈ 1 см. Для Солнца побольше — около 3 км. Всё же он значительно меньше истинного размера Солнца, что говорит о том, что Солнце *не есть* чёрная дыра.

В центре Млечного Пути, нашей галактики, сидит чёрная дыра с массой, в 4 миллиона раз превышающей солнечную. Её гравитационный радиус и, следовательно, размер составляет ≈ 13 миллио-

¹ Говоря более точно, есть два эффекта. Часы на спутнике *отстают* от земных часов на ≈ 7 мкс за сутки, потому что спутник движется — это эффект специальной теории относительности, но уходят вперёд на 45 мкс за сутки ввиду разности гравитационных потенциалов — это эффект ОТО.

нов километров. Млечный Путь не исключение; массивные чёрные дыры были найдены в центре почти всех достаточно больших галактик. На очень далёких расстояниях (в миллиарды световых лет) существуют сверхмассивные чёрные дыры с массами вплоть до миллиарда солнечных и больше. Размер таких дыр (они называются *квазарами*) сопоставим с размером нашей солнечной системы.

Сделаем замечание по поводу плотности чёрных дыр. Как видно из формулы (3.2), она падает с ростом массы, $\rho \sim 1/M^2$. Для дыры с массой порядка солнечной эта плотность составляет

$$\rho_{\text{чд}}(M_{\odot}) \sim 10^{16} \frac{\text{г}}{\text{см}^3}, \quad (3.3)$$

что на пару порядков больше ядерной. Но для сверхмассивного квазара она составляет всего $\sim 10^{-2} \text{ г/см}^3$ — меньше, чем у воды!

Солнце не чёрная дыра и никогда не станет таковой, даже если его ядерное горючее иссякнет. Но звёзды с массой в десятки солнечных вполне могут закончить свою жизнь взрывом с превращением в чёрную дыру. Естественный вопрос — почему? Откуда берётся этот масштаб $\sim M_{\odot}$, при превышении которого коллапс звезды в чёрную дыру становится возможным? Ответ заключается в том, что характерные массы звёзд определяются борьбой между силами гравитационного и сильного взаимодействия и компромиссным соглашением между ними. Мы получим оценку для $M_{\odot}$ довольно скоро, в § 3.4 этой главы, посвящённом сильным взаимодействиям.

3.3. Электромагнитное взаимодействие

Кулоновская сила (2.2) пропорциональна произведению двух электрических зарядов $q_1 q_2$. В отличие от массы, которая всегда положительна, заряды и их произведения могут быть обоих знаков. Разноимённые заряды притягиваются, а одноимённые отталкиваются. В большом куске вещества (в кирпиче, в планете) положительные и отрицательные заряды очень точно скомпенсированы. Поэтому кулоновское притяжение или отталкивание в макромасштабе практически не проявляется.

Я сказал «практически», потому что мы можем, конечно, зарядить кошку, расчёсывая её янтарным гребнем. Но кошка потеряет при этом очень и очень малую долю своих электронов¹. Для метал-

¹ Между прочим, слово *электрон* происходит от греческого корня, означающего *янтарь*.

лического шарика, заряжаемого генератором ван де Графа, эта доля побольше. Она может достигать солидных значений $\sim 10^{-17}$. В нашей жизни незаменимую роль сегодня играют технологии, основанные на использовании макроскопических зарядов и токов. Но на космическом масштабе кулоновские силы играют очень малую роль.

С другой стороны, кулоновские силы определяют микроскопическую структуру материи. Атомы состоят из положительно заряженных ядер и отрицательно заряженных электронов. Характерный размер атома, выраженный в естественных единицах, составляет

$$l_{\text{ат}} \sim \frac{1}{m_e \alpha}, \quad (3.4)$$

что отвечает примерно одному ангстрему.

Все остальные силы, с которыми мы сталкиваемся в повседневной жизни, — силы давления, реакции опоры (которая, в частности, не даёт читателю провалиться сквозь землю вместе со своим креслом), силы трения и т. д. — все они имеют электромагнитную природу и вызваны кулоновским взаимодействием между зарядами в контактирующих телах.

Мы все знаем, что плотность воды составляет примерно 1 г/см^3 и что все другие жидкости и твёрдые тела имеют сравнимые плотности. Приблизительную оценку характерной плотности обычного вещества можно провести исходя из первых принципов. Действительно, в жидкостях и твёрдых телах атомы упакованы довольно плотно, так что характерное расстояние между атомами имеет тот же порядок, что атомный размер. У водорода масса атома близка к $m_p \gg m_e$. Таким образом, грубая оценка плотности жидкого водорода есть

$$\rho_H = \frac{m_p}{l_{\text{ат}}^3} \sim m_p (m_e \alpha)^3. \quad (3.5)$$

В обычных единицах это даёт $\rho_H \approx 11,2 \text{ г/см}^3$, что, конечно, слишком много — фактическая плотность меньше примерно в 160 раз. Такое расхождение вызвано тем, что:

- (3.4) — это характерный боровский радиус водородного атома и его диаметр в два раза больше;
- жидкий и твёрдый водород, существующие в природе, сделаны из молекул H_2 , так что расстояния между атомами H там раза в три больше атомного размера.

Но всё же оценка (3.5) даёт правильный порядок величины плотности обычного вещества. Провести настоящее *вычисление* и опре-

делить с разумной точностью численный коэффициент, на который надо умножить оценку (3.5), чтобы получить реальную плотность водорода, воды или (что может быть проще) простого ионного кристалла типа Na—Cl, — чрезвычайно трудная техническая задача. Необходимо решить очень сложную многотельную квантовомеханическую проблему. Насколько мне известно¹, она пока, к сожалению, не решена.

Оценка (3.5) сделана для плотности обычного вещества при малых температурах и давлениях. Сжимая вещество, можно сделать его намного плотнее. В центре Солнца плотность вещества составляет $\sim 150 \text{ г/см}^3$. В нейтронных звёздах она может достигать ядерной плотности и превышать её, вплоть до $8 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3$.

Что касается обычного вещества, можно оценить не только его характерную плотность, но также характерную упругость и прочность. Количественная мера упругости — это модуль Юнга E . Под прочностью обычно имеют в виду *предел прочности* — механическое напряжение, выше которого происходит разрушение материала. Предел прочности измеряется в тех же единицах, что модуль Юнга, но по некоторым несущественным для нас причинам в несколько сот раз меньше.

Физическая размерность модуля Юнга такая же, как у давления, — сила, делённая на площадь, или энергия, делённая на объём. Её можно оценить как характерную энергию внешних атомных оболочек $\sim m_e \alpha^2$, делённую на $l_{\text{ат}}^3$. В обычных единицах отсюда получаем

$$E \sim \frac{m_e^4 e^{10}}{\hbar^8} \approx 3 \cdot 10^{13} \text{ Па.} \quad (3.6)$$

Снова получилась слишком большая оценка. На самом деле модуль Юнга стали есть примерно $E \sim 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$. У алмаза он составляет $\sim 10^{12} \text{ Па}$. Но для так называемых *карбинных наночастиц*² модуль Юнга достигает значений (3.6).

Главное, что нужно вынести из этого обсуждения, — это тот факт, что атомная и молекулярная структура обычного вещества определяется кулоновскими силами между электронами и ядрами и что

¹ Я не эксперт в квантовой химии, но спрашивал экспертов, и никто из них не смог мне дать ссылку на статью, где было бы проделано такое модельно-независимое вычисление.

² Не очень знаю, что это такое.

существенные её характеристики зависят от массы протона, массы и заряда электрона и от планковской константы.

Мы до сих пор обсуждали только имеющие электромагнитную природу свойства материи, из которой сделан наш привычный мир, но этот мир наполнен также электромагнитным излучением: свет, СВЧ волны в микроволновке на вашей кухне, радиоволны...

3.4. Сильное взаимодействие

Сильное взаимодействие отвечает за структуру атомных ядер — так же как электромагнитное взаимодействие отвечает за структуру атомов и молекул. Атомное ядро состоит из протонов и нейтронов; это физики поняли почти сразу после того, как нейтрон был открыт в 1932 г.

Протоны и нейтроны (у этих частиц есть общее имя: *нуклоны*; они имеют одинаковые свойства по отношению к сильному взаимодействию и различаются только электрическим зарядом — протон положительно заряжен, а нейтрон нейтрален) притягивают друг друга на малых расстояниях порядка одного ферми. Размер нуклонов имеет тот же порядок.

В отличие от электромагнитных сил, которые действуют и на больших, и на малых расстояниях, сильное взаимодействие короткодействующее и на больших расстояниях экспоненциально спадает. Мы не готовы ещё обсуждать его *природу*, и единственное замечание, которое мы хотим сделать прямо сейчас, — это то, что в естественных единицах размер протона имеет тот же порядок, что его обратная масса $m_p^{-1} \approx 0,2 \text{ Ф}$.

Масса протона m_p есть в некотором смысле *фундаментальная константа* сильного взаимодействия. В отличие от электромагнитной фундаментальной константы, безразмерной постоянной тонкой структуры α , сильная фундаментальная константа размерна.

Мы можем исполнить теперь наше старое обещание и оценить массу Солнца и других звёзд.

Когда запасы ядерного горючего внутри звезды подходят к концу, давление излучения не может больше противостоять силам гравитационного притяжения. В результате размер звезды сокращается, а плотность возрастает. Некоторые звёзды (в том числе наше Солнце) проводят/проведут заключительную часть своей жизни в виде медленно остывающего белого карлика. Размер белых карликов мал, намного меньше, чем у обычных звёзд. Он имеет тот же порядок, что земной диаметр.

Более массивные звёзды кончают жизнь взрывом, становясь *сверхновыми*. Во время взрыва звёзды сбрасывают свои внешние слои, обнажая чрезвычайно плотное внутреннее ядро. Это ядро наблюдается как *пульсар*. Другое имя для него — *нейтронная звезда*. По существу нейтронная звезда представляет одно гигантское ядро. Нейтронная звезда с массой, равной солнечной, имеет размер ~ 10 км.

Такое ядро может быть стабильным, так что звезда больше не схлопывается, медленно остывая, но может оказаться и нестабильным. В последнем случае гравитационные силы превышают внутреннее давление и нейтронная звезда коллапсирует, образуя чёрную дыру. Это происходит, когда гравитационная энергия связи превышает внутреннюю энергию звезды, т. е. её массу. Мы приходим к следующему условию коллапса:

$$\frac{G_N M^2}{R} \gtrsim M, \quad (3.7)$$

где M — масса звезды, а R — её радиус. Масса звезды и её радиус связаны соотношением $M \sim \rho R^3$, где ρ — плотность. Из предыдущего обсуждения ясно, что характерная плотность ядерной материи есть $\rho \sim m_p^4$. Подставляя это выражение в формулу (3.7) и принимая во внимание соотношение (2.6), мы получаем верхнюю границу для массы звезды, за которой с необходимостью рано или поздно происходит коллапс:

$$M^* = \frac{m_{pl}^3}{m_{prot}^2} \approx 3,7 \cdot 10^{30} \text{ кг}, \quad (3.8)$$

что примерно вдвое превышает солнечную массу, $M_\odot \approx 2 \cdot 10^{30}$ кг.

Как ни удивительно, эта грубая оценка оказывается весьма точной. Более аккуратный анализ, основанный на известных теоретических моделях ядерной материи, даёт так называемый *предел Ландау—Оппенгеймера—Волкова* для массы нейтронной звезды: $M^* \approx 3M_\odot$.

Пожалуйста, не смешивайте этот предел с более известным *пределом Чандрасекара* $M_C \approx 1,4M_\odot$. Предел Чандрасекара — это условие стабильности белых карликов, сделанных не из ядерного вещества, а из так называемой вырожденной электронной материи. Не будем вдаваться в дальнейшие подробности. Просто обратите внимание на то, что предел Ландау—Оппенгеймера—Волкова несколько превышает предел Чандрасекара. Массы всех пульсаров находятся в интервале между этими двумя пределами:

$$1,4M_\odot < M_{\text{пульсара}} < 3M_\odot. \quad (3.9)$$

Другими словами, белый карлик с массой, лежащей в этом интервале, в конечном счёте превращается в нейтронную звезду, а белый карлик с ещё большей массой коллапсирует в чёрную дыру.

Но интересны не астрофизические детали, а само существование замечательного соотношения (3.8), выражающего характерные звёздные массы¹ через фундаментальные константы сильного и гравитационного взаимодействий.

Вернёмся на нашу маленькую холодную планету. Как уже говорилось, сильное взаимодействие играет и на ней важную роль, скрепляя в ядрах протоны и нейтроны. Однако не всякий набор протонов и нейтронов может образовать связанную систему. Например, один протон и один нейтрон такую связанную систему образуют (это ядро дейтерия, тяжёлого изотопа водорода), но два протона вместе не держатся: прежде всего, по определённой причине, связанной с принципом запрета Паули, они притягиваются друг к другу ядерными силами слабее, чем протон и нейтрон, и, во-вторых, в этом случае присутствует также кулоновское отталкивание. Система из двух протонов и одного нейтрона стабильна (это ядро ^3He), но система из трёх протонов и одного нейтрона нестабильна и такого ядра нет.

Сильные взаимодействия короткодействующие, и это значит, что нуклон чувствует присутствие только своих непосредственных соседей. Таким образом, полная энергия связи ядра пропорциональна общему числу нуклонов A . А электромагнитные взаимодействия дальнедействующие, и соответствующий *положительный* вклад в энергию и массу ядра растёт как αZ^2 , где α — постоянная тонкой структуры и Z — число протонов (то есть заряд ядра, совпадающий с атомным номером соответствующего элемента). Для стабильности необходимо выполнение условия типа²

$$\alpha Z^2 - A < 0. \quad (3.10)$$

¹Массы всех звёзд имеют этот порядок величины. Тела со слишком маленькой массой — меньше, чем примерно $0,1M_{\odot}$ — обладают слишком слабой гравитацией. Они не настолько сжаты и нагреты, чтобы зажглось их термоядерное горючее. Это планеты, а не звёзды. С другой стороны, если масса звезды превышает, скажем, десяток солнечных масс, то звезда очень быстро горит и сгорает с неминуемым дальнейшим коллапсом в чёрную дыру.

²Это, скорее, общая идея такого условия. Фактическая оценка энергии ядра, дающая условие его стабильности, несколько более сложна.

Другими словами, для того чтобы ядро оставалось стабильным, доля протонов должна уменьшаться с ростом его массы. Тяжёлые ядра, содержащие слишком много протонов, разрываются на части кулоновскими силами.

Но мы пока не понимаем, почему в природе нет ядер, сделанных исключительно из нейтронов — из двух нейтронов, из сотни, из миллиона... Объяснение будет дано через минуту.

3.5. Слабое взаимодействие

Вскоре после открытия Беккерелем радиоактивности в 1896 г. были выделены три её типа: α , β и γ . Мы знаем сейчас, что гамма-радиоактивность — это излучение энергичных фотонов возбуждёнными ядрами. Очевидно, это электромагнитный процесс.

Альфа-радиоактивность — это излучение α -частиц. Каждая такая частица представляет собой плотно упакованную систему из двух протонов и двух нейтронов — ядро ${}^4\text{He}$. В процессе α -излучения играют роль как электромагнитное, так и сильное взаимодействия.

Наконец, бета-радиоактивность — это излучение ядрами энергичных электронов. Поначалу люди думали, что эти электроны были спрятаны, прежде чем вырваться наружу, в родительских ядрах. Но теперь мы понимаем, что это не так. В ядрах никаких электронов нет. Это невозможно в силу гейзенберговского принципа неопределённости. Действительно, размер ядра мал, порядка одного ферми. Лёгкий электрон, локализованный в такой малой области, должен был бы согласно этому принципу иметь большой ультрарелятивистский импульс. Он немедленно выскочил бы наружу.

Электроны *рождаются* в процессе излучения. Они рождаются в результате распада внутриядерных нейтронов:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e. \quad (3.11)$$

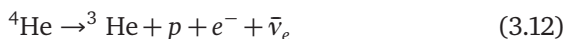
Словами этот процесс выражается так: нейтрон превращается в протон, испуская при этом электрон и антинейтрино¹. Нейтрино и антинейтрино взаимодействуют с веществом очень слабо, и зарегистрировать антинейтрино, испущенное нейтроном во время его

¹Мы постепенно приближаемся к непосредственной теме нашей книги: распад нейтрона — это настоящий квантово-полевой процесс. В обычных университетских курсах квантовой механики изучается только излучение фотонов, но не рассматривается излучение других частиц.

распада, очень трудно. Это было сделано только в 1956 году, через полвека после открытия бета-радиоактивности.

Так вот, нейтронно-избыточные ядра нестабильны именно потому, что составляющие их нейтроны распадаются.

Возникает естественный вопрос — а почему не распадаются и все другие ядра, где есть нейтроны? Дело здесь в законе сохранения энергии. Нейтрон тяжелее протона на 1,3 МэВ. Электрон весит 0,5 МэВ, так что распад *свободного* нейтрона энергетически возможен. Но нейтроны в ядрах не свободны. Масса ядра меньше суммы масс составляющих нуклонов. Есть энергия связи. Например, для ${}^4\text{He}$ полная энергия связи составляет 28,3 МэВ, а у ${}^3\text{He}$ равна она всего 7 МэВ. Таким образом, гипотетический процесс



запрещён законом сохранения энергии, и ядро ${}^4\text{He}$ стабильно.

Но для ядер с большой долей нейтронов бета-распад оказывается возможным¹.

Другими словами, существование конечного числа стабильных ядер и, значит, конечного числа элементов с разнообразными химическими свойствами, наличие богатой химии, биохимии и жизни становится возможным благодаря «совместным усилиям» сильного, электромагнитного и слабого взаимодействий. А для существования обогреваемых звёздами планет, на которых жизнь может развиваться, необходима также гравитация. Похоже, Вольтер зря смеялся

¹Зная основы квантовой механики, легко понять, почему это так. Рассмотрим предельный случай *нейтрония*, ядра, состоящего из одних нейтронов. Принцип запрета Паули говорит, что два нейтрона не могут занимать одно и то же квантовое состояние. В результате нейтроны занимают лестницу энергетических состояний, простирающуюся по энергии от дна потенциальной ямы до некоторого уровня. Распадается «крайний» нейтрон, занимающий верхний уровень. Что касается протона, в который превратился распавшийся нейтрон, то он падает на самое дно ямы, и его потенциальная энергия намного ниже энергии нейтрона-родителя. Такой распад энергетически ещё более выгоден, чем распад свободного нейтрона.

Внимательный читатель может удивиться: а как же тогда нейтронные звёзды? Почему там нейтроны не распадаются? Дело в том, что при обсуждении стабильности ядер мы не учитывали гравитацию и предполагали, что рождённые в распаде электроны вылетают из ядра. Но в нейтронной звезде рождённые электроны удерживаются гравитацией. Дополнительные частицы увеличивают давление и как следствие — энтропию и гиббсовскую свободную энергию, что делает такой процесс невыгодным. В экстремальных условиях сверхвысоких давлений и плотностей звезда пытается, наоборот, избавиться от этих лишних электронов и «вдавливает» их в протоны, превращая последние в нейтроны.

над Панглоссом и Лейбницем за их убеждение, что мы живём в лучшем из миров. Они были правы: в мире, где значения фундаментальных констант были бы сдвинуты совсем ненамного, мы жить не смогли бы.

Что касается слабого взаимодействия, то оно используется в мироздании также для того, чтобы избавиться от совсем ненужных для его удобного обустройства частиц из второго и третьего поколений. Например, мюон, тяжёлый аналог электрона из второго поколения, распадается, как и нейтрон, на три частицы:

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu. \quad (3.13)$$

Так же поступают тау-лептон и кварки s, c, b, t . Нестабильны и бозоны $W^\pm, Z, H$. Они распадаются на две частицы.

Когда я был студентом и читал популярные статьи про физику частиц, меня смущало то, что слабое взаимодействие проявляется в основном в *распадах*. Ведь общеупотребительный смысл слова «взаимодействие» подразумевает существование как минимум двух взаимодействующих агентов. На пальцевом эвристическом уровне на это можно ответить, что нейтрон или мюон взаимодействуют с продуктами своего распада. Позже мы дадим научные и детальные объяснения того, что физики сегодня понимают под словом «взаимодействие». Но прямо сейчас можно отметить, что помимо процессов распада типа (3.11) и (3.13) имеются также связанные с ними процессы рассеяния (физики называют их *кросс-каналами*)

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+, \quad \nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_e + \mu^- \quad (3.14)$$

и т. д. Здесь взаимодействие имеет место во всех смыслах.

Слабость слабого взаимодействия означает, что вероятность этих процессов очень мала по сравнению, скажем, с вероятностью рассеяния проходящих через обычное вещество электронов. Если вернуться к распадам (3.11) и (3.13), то слабость взаимодействия также проявляется в малой вероятности этих распадов и, соответственно, в больших временах жизни. Среднее время жизни мюона составляет 2,2 мкс. Это на много порядков больше характерных времён жизни нестабильных сильно взаимодействующих и сильно распадающихся частиц $\tau_{\text{сильное}} \sim 10^{-23}$ с. Нейтрон же (который может взаимодействовать и сильно, но распадается он слабо) живёт ≈ 17 минут. На фоне 10^{-23} с это просто вечность!

Глава 4

Кубическое здание физических теорий

Физика — это наука, изучающая основные законы нашего мира. В предыдущей главе мы очень кратко рассказали о том, как мир, в котором мы живём, выглядит на больших и на малых масштабах, из чего он сделан, как функционирует.

Главный источник знания в физике — это эксперименты и наблюдения. Но систематизировать и по-настоящему *понять* наблюдаемые факты и явления — это работа теоретика. В этой главе мы поговорим о методах, которые использует теоретик, чтобы проанализировать наблюдения и вывести на их основе фундаментальные законы природы, сформулированные на точном математическом языке, что позволяет делать точные проверяемые на опыте предсказания.

4.1. Классическая механика

Систематическое изучение физики начинается в школе и потом в университете с изучения ньютоновских законов классической механики. Они представляют фундамент всего здания теоретической физики. И краеугольный камень в этом фундаменте — это первый и второй законы Ньютона.

Первый закон говорит о нечувствительности всех остальных законов физики относительно выбора системы отсчёта, коль скоро эта система инерциальна. Другими словами, эти законы инвариантны относительно *преобразований Галилея*, связывающих разные инерциальные системы отсчёта.

Второй закон

$$F = m\ddot{x} \quad (4.1)$$

— это *уравнение движения*. Левая часть этого замечательного соотношения есть сила, действующая на интересующее нас тело. Эту силу можно вычислить исходя из других физических законов, описывающих взаимодействие данного тела с его окружением. Правая часть пропорциональна ускорению. Определив ускорение и зная начальные условия — положение и скорость тела в момент $t = 0$, мы

можем решить то, что математики называют *задачей Коши*, и определить положение тела в более поздние моменты — его траекторию.

Для более сложных классических систем с несколькими точечными массами или имеющими ненулевой размер твёрдыми телами рассмотрение немного сложнее, но принцип тот же — зная взаимодействие наших тел между собой и с их окружением, мы выводим уравнения движения, систему дифференциальных уравнений с временными производными, и формулируем для них задачу Коши. Решение этой задачи и даёт временную эволюцию системы.

У классической механики есть две основные области применения. Во-первых, это механика в её исторической ипостаси — наука, описывающая поведение различных механизмов. И во-вторых, это небесная механика, позволяющая анализировать и предсказывать движение небесных тел.

Хорошо известна история открытия Нептуна в 1846 г. Астрономы изучали движение Урана и обнаружили определённые отклонения его траектории от предсказанной. Они предположили, что эти отклонения можно объяснить, постулировав существование некой новой, не известной до тех пор планеты, которая притягивает Уран и возмущает его движение. Приняв эту гипотезу, Урбан Леверье вычислил положение и массу этой новой планеты. Он попросил Иоганна Галле из Берлинской обсерватории посмотреть на небо, тот это сделал и увидел Нептун¹

4.2. Релятивистская механика

Она описывает движение тел со скоростями, сравнимыми со скоростью света. Она также основана на законах Ньютона, но в модифицированной форме.

- Постулируется обобщённый вариант принципа относительности Галилея, и утверждается, что совпадают не только результаты любого *механического* эксперимента, проведённого один раз на суше, а другой — в замкнутой каюте корабля, плавно плывущего

¹ Планета Нептун не была известна грекам и римлянам и не играла поэтому роли в классической античной астрологии. То же, кстати, касается Урана, открытого только в XVIII в. Современные астрологи включили в свои схемы эти новые планеты, но называют их *трансцендентными*.

Написав это, я глянул из любопытства Википедию и узнал, что Плутон, открытый в 1930 г., уже тоже включён в астрологические расчёты. Но немного более массивный Эрис, открытый в 2005 г., — ещё нет.

по спокойному морю, но то же относится и к любым *оптическим* экспериментам, т. е. невозможно обнаружить движение Земли (нашего большого космического корабля) относительно несуществующего эфира.

- Уравнение (4.1) записывается теперь в виде

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right). \quad (4.2)$$

Из сформулированного выше принципа относительности Эйнштейна выводятся *преобразования Лоренца*, связывающие пространственные и временные координаты (x, t) в покоящейся системе отсчёта с такими же координатами (x', t') в движущейся системе. Если движение происходит со скоростью v в направлении оси x , то преобразования Лоренца имеют вид

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \\ x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Когда скорости интересующих нас тел малы, преобразования Лоренца сводятся к преобразованиям Галилея,

$$\begin{aligned} t' &= t, & x' &= x - vt, \\ y' &= y, & z' &= z, \end{aligned} \quad (4.4)$$

не затрагивающим время. Релятивистские эффекты представляют тогда малые поправки.

Но при скоростях порядка c кинематика кардинально другая. Мы не видим вокруг себя макроскопических тел, движущихся настолько быстро. Но для микротел, элементарных частиц, релятивистские скорости совершенно обычны. Релятивистская механика описывает движение частиц в ускорителях, их последующие реакции и распады. Космические лучи, приходящие на Землю из глубин космоса, также содержат релятивистские и ультрарелятивистские частицы.

Ускорители — это специально сделанные человеком физические приборы. Космические лучи рождаются в различных естественных ускорителях¹. Можно задать вопрос: а могут ли существовать в при-

¹ В частности, лучи сверхвысоких энергий, возможно, рождаются во время взрывов сверхновых.

роде релятивистские частицы без того, чтобы их специально кто-то ускорил или что-то ускорило? Присутствуют ли такие частицы в обычном веществе, например в диване, на котором отдыхает сейчас наш дорогой читатель¹?

Ответ на этот вопрос положителен. Характерная скорость атомных электронов на внутренней оболочке составляет $\sim (Z\alpha)c$, где Z — заряд ядра и α — постоянная тонкой структуры. Для водорода мы получаем немного, примерно одну сотую скорости света. Но в диване есть не только водород. Для железа ($Z = 26$) получаем одну пятую скорости света, и здесь релятивистские эффекты уже начинают играть роль. А для свинца или золота [предположим, что читатель(ница) носит обручальное кольцо] скорость превышает половину световой...

4.3. Квантовая механика

Для микрочастиц теряет смысл понятие классической траектории движения. Причина этого — знаменитый принцип неопределённости Гейзенберга,

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (4.5)$$

где Δx есть неопределённость, с которой измеряется координата частицы и Δp — неопределённость, с которой измеряется импульс. Невозможно одновременно измерить обе эти величины со сколь угодно высокой точностью.

Вспомним почему. Чтобы точно определить положение частицы (например, электрона), нужно на него *посмотреть*. А что значит *смотреть* и *видеть*? Чтобы увидеть какой-то объект, мы освещаем его лампочкой и наблюдаем рассеянный свет. При этом положение объекта определяется с точностью, не превышающей длину волны света. Однако световая волна состоит из отдельных фотонов. Энергия фотона составляет²

$$E = pc = \hbar\omega. \quad (4.6)$$

¹ Когда философ хочет дать пример материального объекта, он обычно пишет: «например, стол», поскольку стол, на котором он пишет, находится у него перед глазами. Но мне хочется вести обсуждение, имея в виду *читательскую* точку зрения.

² Люди рассказывают, что в одном из университетов, точное название и географическое положение которого сейчас трудно установить, произошла следующая история.

Студент сдавал устный экзамен по квантовой механике. Профессор видит, что студент практически ничего не знает, и, желая задать ему самый элементарный

Фотон бьёт по электрону и передаёт ему значительную долю своего импульса. Информация о величине импульса электрона до столкновения при этом в значительной степени теряется.

Для физика неизмеримые вещи не существуют. Таким образом, мы отказываемся от понятия траектории электрона $\mathbf{x}(t)$ и вводим понятие электронной волновой функции $\Psi(\mathbf{x}, t)$. Волновая функция комплексна, но величина $|\Psi(\mathbf{x}, t)|^2$, разумеется, вещественна. Она определяет плотность вероятности, с которой электрон находится (может быть при измерении найден) в точке $\mathbf{x}$. Интеграл

$$P = \int |\Psi(\mathbf{x}, t)|^2 d^3x \quad (4.7)$$

даёт вероятность найти электрон *где-нибудь*. Если электрон стабилен, не распадается и ни во что не превращается, если он только один и никакой посторонний электрон не вскакивает в нашу теорию и наш эксперимент снаружи (таковы стандартные исходные посылки нерелятивистской квантовой механики), такая полная вероятность равна единице.

Три предыдущих абзаца составили курс квантовой механики самого базового уровня. Переходим на следующий уровень.

Основное динамическое уравнение квантовой механики описывает не временную эволюцию положения частицы, её траекторию, а временную эволюцию её волновой функции:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi, \quad (4.8)$$

где $\hat{H}$ — определённый дифференциальный оператор, называемый *гамильтонианом*¹.

Гамильтониан частицы, движущейся во внешнем потенциальном поле, есть

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V(\mathbf{x}). \quad (4.9)$$

вопрос, показывает ему формулу (4.6) и просит объяснить смысл входящих туда величин.

- Что такое, например, ω ?
- Постоянная Планка! — отвечает студент.
- А что такое тогда $\hbar$? — спрашивает удивлённый профессор.
- Высота этой планки!

¹ Этот термин происходит от имени *Гамильтон*. Вильям Гамильтон умер в 1865 г. и изучал классическую механику, ничего не зная о квантовой. В главе 7 мы подробно будем обсуждать введённое Гамильтоном понятие классического гамильтониана и проясним связь между классическим и квантовым гамильтонианами.

Уравнение (4.8) называется *уравнением Шрёдингера*. Оно записано в самой общей форме, включающей временную зависимость. Как и для классических уравнений движения, мы можем сформулировать для него задачу Коши: зная волновую функцию в начальный момент, мы можем определить $\Psi(\mathbf{x}, t)$ в более поздние моменты.

Однако такая формулировка оказывается неудобной с практической точки зрения и нефизичной. Действительно, невозможно следить за временной эволюцией волновой функции во всех пространственных точках. Как вы собираетесь это измерять?

На основе соотношения (4.8) можно, однако, сформулировать две другие, вполне физические задачи.

1. Во-первых, это задача о *стационарных состояниях*. Предположим, что наша волновая функция представляет собой произведение некоторой функции пространственных координат и некоторой функции времени:

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x})\chi(t). \quad (4.10)$$

Подставляя это выражение в формулу (4.8), мы получаем систему двух уравнений,

$$i\hbar \frac{d\chi}{dt} = E\chi(t), \quad (4.11)$$

$$\hat{H}\psi(\mathbf{x}) = E\psi(\mathbf{x}), \quad (4.12)$$

где E — некоторая константа. Решение уравнения (4.11) тривиально:

$$\chi(t) = C \exp\left\{-\frac{iEt}{\hbar}\right\}. \quad (4.13)$$

Второе уравнение (*стационарное уравнение Шрёдингера*) можно решить при наложении определённых граничных условий на $\psi(\mathbf{x})$.

Например, имея в виду, что нормировочный интеграл (4.7) равен единице и, значит, конечен, мы можем потребовать, чтобы функция $\psi(\mathbf{x})$ обращалась в нуль на пространственной бесконечности. Тогда оказывается, что решения уравнения (4.12) существуют только при определённых значениях постоянной E (которая, разумеется, есть не что иное, как энергия системы). Иначе говоря, возможные значения энергии квантовой системы *квантуются*. Набор всех допустимых энергий называется *спектром* гамильтониана.

В таком квантовании нет ничего загадочного. Математическая причина здесь та же, что для наличия дискретного набора частот, с которыми может колебаться гитарная струна или барабан.

Для гамильтониана (4.9) с вещественным потенциалом $V(\mathbf{x})$ не слишком «дикого» вида спектр веществен, и это весьма приятно. Действительно, будь E комплексным, норма фактора $\chi(t)$ в решении (4.13) росла бы или затухала со временем. Мы не могли бы тогда нормировать полную вероятность (4.7) на единицу, и основное предположение этой главы, что частицы не рождаются и не исчезают, не выполнялось бы.

Квалифицированный читатель, изучавший квантовую механику в университете, должен сейчас запротестовать:

— Как это энергии всегда квантуются? Автор, кажется, забыл о системах с непрерывным спектром! Например, — продолжает разъярённый читатель, — для свободной частицы, когда потенциал отсутствует, $V(\mathbf{x}) = 0$, решения стационарного уравнения (4.12) имеют вид

$$\psi(\mathbf{x}) = C \exp\left\{\frac{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{\hbar}\right\} \quad (4.14)$$

с произвольной положительной энергией

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}. \quad (4.15)$$

Нет автор это не забыл. Заметьте, однако, что решение (4.14) не удовлетворяет нашему условию нормировки $P = 1$. Это условие можно наложить, только если не позволить частице свободно двигаться во всём пространстве, а поместить её в *фиктивный* конечный пространственный ящик размера L и наложить на его границы некоторые условия. Проще всего наложить периодические граничные условия:

$$\psi(x + L, y, z) = \psi(x, y + L, z) = \psi(x, y, z + L) = \psi(x, y, z). \quad (4.16)$$

Но тогда допустимые импульсы $\mathbf{p}$ начинают квантоваться:

$$\mathbf{p} = \frac{2\pi\hbar\mathbf{n}}{L}, \quad (4.17)$$

где $\mathbf{n}$ — целочисленный вектор. Квантуются также энергии (4.15). В физически интересном пределе $L \rightarrow \infty$ интервалы между уровнями становятся очень малыми, но для любого конечного сколь угодно большого L спектр дискретен.

Если мы хотим сохранить нормировку $P = 1$, мы должны выбрать значение $C = 1/\sqrt{L^3}$ для фактора C в формуле (4.14). Так как L не имеет в этом случае физического смысла, люди часто не вводят этот фиктивный регуляризующий параметр, выбирая $C = 1$. Но следует

помнить о том, что непрерывный спектр всегда *можно* при желании дискретизовать наложением граничных условий (4.16), и именно возможность такой регуляризирующей дискретизации даёт математическое обоснование «кошерности» квантовых систем с непрерывным спектром и позволяет с ними безбоязненно работать.

2. Вторая важная задача, которая рассматривается в квантовой механике, — это задача *рассеяния*.

Рассмотрим временное уравнение Шрёдингера (4.8) с потенциалом, локализованным в конечной пространственной области около начала координат, $V(|\mathbf{x}| \rightarrow \infty) = 0$. Но вместо того, чтобы изучать временную эволюцию волновой функции во всём временном интервале, мы будем интересоваться только тем, что случилось в далёком прошлом, $t \sim -\infty$, и тем, что произойдёт в далёком будущем, $t \sim \infty$. Предположим также, что частица не болтается всё это время возле начала координат в области действия потенциала, но была бесконечно далеко от этой области при $t = -\infty$ и снова уйдёт бесконечно далеко при $t = \infty$. Ни в далёком прошлом, ни в далёком будущем частица не чувствует действия потенциала и ведёт себя как свободная. Её волновая функция в обоих этих случаях представляет собой плоскую волну (4.14). При $t = -\infty$ туда входит начальный *входящий* импульс $\mathbf{p}_{\text{in}}$, а при $t = \infty$ — *выходящий* импульс $\mathbf{p}_{\text{out}}$. Так как по дороге частица могла пройти через область с ненулевым потенциалом, где на неё действовали силы, $\mathbf{p}_{\text{in}}$ и $\mathbf{p}_{\text{out}}$ не обязательно совпадают. Можно спросить теперь, чему равна вероятность (или, скорее, комплексная амплитуда вероятности) того, что частица действительно изменит свой импульс — рассеется.

Мы продолжим это обсуждение в главе 8. После того как мы хорошо поймём, что такое эта *амплитуда рассеяния* и как её вычислять, для нас будет намного проще понять, как задача рассеяния ставится и решается в квантовой полевой теории.

Когда скалярное произведение характерного импульса $\mathbf{p}_{\text{хар}}$ и характерного расстояния $\mathbf{x}_{\text{хар}}$ становится велико по сравнению с $\hbar$ (это произведение имеет размерность действия и в самом деле имеет смысл характерного действия частицы $S_{\text{хар}}$), волновая функция (4.14) быстро осциллирует. В этом случае можно рассмотреть волновую функцию, локализованную в малой пространственной области (*волновой пакет*), и убедиться в том, что траектория её центра $\mathbf{x}_{\text{центр волнового пакета}}(t)$ описывается классическим уравнением, совпадающим со вторым законом Ньютона.

В этом состоит содержание знаменитого *принципа соответствия*: квантовая динамика переходит в классическую, когда характерное действие частицы намного превышает $\hbar$. Похожий принцип соответствия связывает волновую оптику с геометрической. Когда оптический путь (или, более точно, релевантная разность оптических путей) становится велик по сравнению с длиной волны, можно не принимать во внимание волновую природу света и пользоваться законами геометрической оптики.

4.4. Релятивистская квантовая механика

Мы не ушли пока далеко от начала этой главы, и ещё не поздно объяснить, по какой логике она строится. Вначале мы вспомнили самую основу физики, ньютоновскую механику. Потом мы показываем, как из этой основы, из этого корня вырастают все остальные ветви физического знания. Мы обсудили релятивистскую механику — что происходит, когда скорости частиц становятся сравнимы со световыми и параметр $\kappa_{\text{рел}} = v_{\text{хар}}/c$ не мал. И в предыдущем параграфе мы рассказали о поведении квантовомеханических систем с характерным действием, сравнимым с $\hbar$, когда не мал параметр $\kappa_{\text{квант}} = \hbar/S_{\text{хар}}$.

Возникает естественный вопрос: а что происходит, когда не малы оба параметра $\kappa_{\text{рел}}$ и $\kappa_{\text{квант}}$? Возможен ли роман между c и $\hbar$ и может ли этот роман увенчаться счастливым и плодотворным союзом? И будут ли плоды такого союза, дети релятивистского отца и квантовой матери (релятивистской матери и квантового отца?), здоровыми и счастливыми?

Ответ такой. Нельзя сказать, чтобы релятивистско-квантовый роман был так же весел и безоблачен, как любовь Папагено и Папагены. Он больше похож на любовную историю Тамино и Памины: после многих приключений и после того, как герои успешно проходят суровые Испытания, следует хэппи-энд, и хор славит зарю новой релятивистской квантовой эры.

Но нам до этого ещё далеко. Давайте начнём с того, что попытаемся скрестить релятивистское и квантовое описания способом, который кажется наиболее естественным, и попытаемся вывести релятивистское уравнение Шрёдингера. Обыкновенное уравнение Шрёдингера (4.8) с гамильтонианом (4.9) инвариантно относительно преобразований Галилея (4.4), но не относительно преобразований Лоренца (4.3). Нетрудно, однако, его модифицировать так, что-

бы обеспечить лоренцеву инвариантность. Взгляните на уравнение

$$\left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right)\Psi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (4.18)$$

где

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (4.19)$$

есть оператор Даламбера (и Δ — это, конечно, лапласиан).

Можно заметить следующее.

1) Оператор $\square$ инвариантен относительно преобразований (4.3),

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \Delta'. \quad (4.20)$$

Чтобы это увидеть, достаточно вспомнить, что выражение

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (d\mathbf{x})^2 \quad (4.21)$$

(интервал между двумя близкими событиями) инвариантно относительно преобразований Лоренца. Мы обсудим всё это подробнее в главе 6.

2) Уравнение (4.18) можно записать в шрёдингеровской форме (включающей только первые временные производные) как¹

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = c \sqrt{m^2 c^2 - \hbar^2 \Delta} \Psi. \quad (4.22)$$

Неприятен появляющийся здесь квадратный корень. Прежде всего, непонятно, какой знак корня надо выбирать. В уравнении (4.22) мы выбрали положительный знак. Но почему? И что делать, когда подкоренное выражение близко к нулю? Как поступать с точками ветвления?

Впрочем, все эти вопросы не возникают, если волновая функция *достаточно гладкая*, если её пространственные производные не слишком велики, так что $|\Delta \Psi| \ll \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} |\Psi|$.

В этом случае можно разложить правую часть уравнения (4.22) по параметру

$$\kappa = \frac{\hbar^2 \Delta}{m^2 c^2}.$$

Ограничиваясь линейным членом разложения, мы воспроизводим стандартное свободное нерелятивистское уравнение Шрёдингера. Высшие члены разложения дают релятивистские поправки.

¹ Уравнение (4.18) получается отсюда квадрированием: подействуйте на обе части уравнения (4.22) оператором $i\hbar \partial / \partial t$ и выразите после этого $i\hbar \partial \Psi / \partial t$ в правой части согласно тому же уравнению (4.22).

В присутствии потенциала мы должны добавить его в правую часть уравнения (4.22) и получить уравнение

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = [c\sqrt{m^2c^2 - \hbar^2 \Delta} + V(\mathbf{x})]\Psi. \quad (4.23)$$

При желании можно избавиться от квадратного корня и записать

$$\left[\frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} V(\mathbf{x}) \right)^2 - \Delta + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right] \Psi(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (4.24)$$

С этим уравнением мы можем заново решить стандартные задачи из учебника по квантовой механике и посмотреть, как видоизменяются их решения при учёте релятивистских поправок. Для атома водорода, например, спектр *релятивистского* гамильтониана (4.23) немного сдвигается по сравнению с боровским¹:

$$E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2} + \delta_n. \quad (4.25)$$

Не все знают, что, работая над своей знаменитой статьёй, опубликованной в январе 1926 г. в журнале «Zeitschrift für Physik», Эрвин Шрёдингер не только написал и решил для водорода нерелятивистское уравнение (4.8), но вывел также уравнение (4.23), решил его и определил поправки δ_n . Однако его постигло жестокое разочарование: результат расчёта не совпадал с экспериментом! В главном приближении боровский спектр получался правильно, но вычисленные поправки с экспериментом не совпадали.

С точки зрения этических стандартов третьего тысячелетия дальнейшее поведение Шрёдингера выглядит странно. Прежде всего он начал сомневаться, стоит ли ему публиковать эту статью. Он ведь смог вывести из своего уравнения только известный спектр $E_n \propto 1/n^2$, который Бор вывел ранее в рамках своей так называемой *старой квантовой теории*. Шрёдингер хотел определить релятивистские поправки к спектру, но это у него не получилось.

В конце концов он статью всё же опубликовал, но выбросил из неё все релятивистские формулы. Вот почему уравнение (4.18) [и его обобщение (4.24) для задач с потенциалом] не носит, вместе с уравнением (4.8), имя Шрёдингера, но называется обычно уравнением Клейна—Гордона в честь Оскара Клейна и Вальтера Гордона, которые переоткрыли это уравнение на основе того, что они прочли в январской статье Шрёдингера.

¹ δ_n имеют порядок $\alpha^2 E_n^{(0)}$.

Но это несправедливо по отношению к Владимиру Фоку, который также переоткрыл это уравнение в 1926 г., через пару месяцев после Клейна, но за пару месяцев до Гордона. Надо сказать, что эта история служит блестящей иллюстрацией хорошо известного *принципа Арнольда*¹. Не оспаривая его универсальность [как было сказано, первооткрывателем уравнений (4.18) и (4.24) был Шрёдингер], мы всё же будем в нашей книге говорить об уравнении *Клейна—Фока—Гордона* (КФГ).

Сегодня мы знаем, почему релятивистское вычисление Шрёдингера не совпало с экспериментом. У электрона есть спин, и релятивистское волновое уравнение, которое описывает его движение, — это *уравнение Дирака*, а не уравнение КФГ. Но в 1926 г. об этом ещё никто не догадывался.

Мы не будем здесь писать уравнение Дирака. Оно технически существенно сложнее, чем уравнение КФГ, и мы напомним и обсудим его позднее (в главе 9), после того как ознакомимся с понятием релятивистского спинора. Но большой физической разницы между этими двумя уравнениями нет. Оба они (уравнение КФГ для бесспиновых частиц и уравнение Дирака для частиц со спином 1/2) применимы, когда релятивистские эффекты уже имеют место, но ещё не слишком существенны.

Можно решить релятивистское волновое уравнение и определить поправки к спектру. Но что *означает* теперь волновая функция $\Psi(x, t)$, для которой это уравнение пишется? К сожалению, $|\Psi(x, t)|^2$ больше нельзя интерпретировать как плотность вероятности. Если временная эволюция функции $\Psi(x, t)$ описывается уравнением (4.23), то интеграл (4.7) меняет со временем своё значение!

Это неприятное обстоятельство и наличие непрояснённого вопроса о выборе знака в уравнении (4.23) не случайны. Они связаны с тем, что в релятивистском случае основные предположения квантовой механики более не выполняются!

В нерелятивистской квантовой механике мы не можем провести *одновременное* точное измерение положения и импульса частицы. Но если мы интересуемся *только* её координатой, то она может быть определена сколь угодно точно. Как было объяснено в предыдущем параграфе, освещая электрон, мы можем определить его по-

¹ Принцип Арнольда гласит: если научное понятие носит имя какого-либо учёного, это не есть имя первооткрывателя. Разумеется, этот принцип автореферентен.

ложение с точностью, равной длине световой волны. Если длина волны очень мала, точность очень высока.

Проблема, однако, в том, что очень коротковолновой фотон γ несёт помимо большого импульса также большую энергию, и помимо обычного комптоновского рассеяния $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$ становятся разрешены процессы типа

$$\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^- + e^+ + e^-$$

с рождением дополнительных электронно-позитронных пар. Можно зарегистрировать рассеянный фотон (если он, конечно, присутствует, процессы с поглощением фотона наподобие

$$\gamma + e^- \rightarrow e^- + e^+ + e^-$$

тоже становятся возможны), но скажите: положение какого электрона вы таким образом собираетесь определить — начального электрона или дополнительного электрона, рождённого при столкновении? Фактически положение электрона нельзя определить с лучшей точностью, чем его комптоновская длина (2.3).

Мы видим, что наивная релятивистская квантовая механика, основанная на уравнении КФГ или на уравнении Дирака, применима только тогда, когда не важны процессы с рождением дополнительных частиц.

— Неудивительно, — может подумать читатель, — все знают, что у каждой физической теории есть ограниченная область применимости.

Читатель прав, но не совсем. Верно, что классическая механика неприменима при скоростях, сравнимых со световой, но это ограничение *внешнее*. Сама по себе классическая механика не знает ничего о с. Это внутренне замкнутая и самосогласованная наука. А вот релятивистская квантовая механика не самосогласована. Она представляет феноменологическое приближение к чему-то более сложному.

Четыре рода проблем, которые мы до сих пор обсудили, могут быть представлены на схеме, изображённой на рис. 4.1.

Посетитель или лучше пусть посетительница, входящий (входящая) снаружи в это здание¹, попадает в большой входной зал классической механики, украшенный мраморными скульптурами и ков-

¹ Мне почему-то хочется думать, что это девушка, что она красива и умна и что её зовут Софья (по-гречески это значит «мудрая»). Для друзей — Соня.

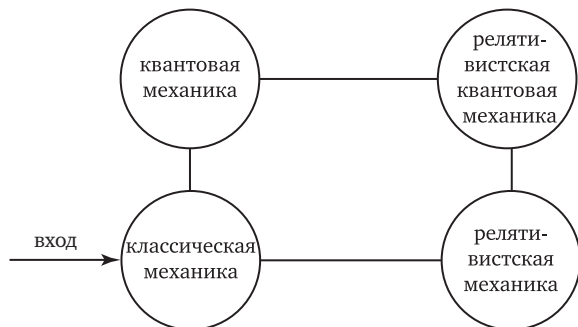


Рис. 4.1. План первого этажа в музее теоретической физики
(из блокнота Сони)

рами. Обратив взор налево, она видит систему блоков, на которых висит перевернутая модель римской триремы. Повернув голову, она видит на противоположной стене большую звёздную карту. Она видит также две массивные дубовые двери.

На одной из дверей она замечает позолоченный барельеф в виде большой буквы $\hbar$. А на другой — барельеф с большой буквой C . Она открывает эту вторую дверь, идёт по коридору и попадает в другой большой зал. Вместо блоков и триремы она видит большую модель синхрофазотрона. А на противоположной стене — портреты двух очень похоже выглядящих джентльменов, один из них одет в домашний халат, а на другом надет космический скафандр.

Она возвращается в первый зал, открывает дверь, на которой выгравировано $\hbar$, снова проходит по коридору и входит в квантовый зал. Она чувствует там себя весьма *неопределённо*; стены в этом зале дрожат, переливаясь разными цветами. Соня замечает там ещё одну дверь с барельефом C , входит туда и попадает в четвёртый зал. Чувство неопределённости там возрастает. Дрожат не только стены, но и пол, так что невозможно оставаться на одном месте, сохранить определённое положение. В центре зала, однако, находится экспозиция, и вибрация там не чувствуется. Соня идёт туда мимо большого бронзового бюста Дирака. В небольшом кинозале она смотрит документальный исторический фильм, показывающий Шрёдингера, Клейна, Фока и Гордона за дружеским обсуждением физических проблем в редакции «Zeitschrift für Physik».

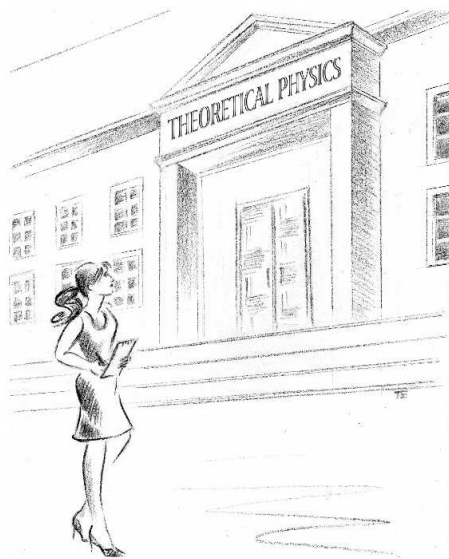


Рис. 4.2. Хочется войти...

Соня возвращается в зал классической механики и поднимает голову. Она видит лестницу, ведущую на второй этаж...

4.5. Нерелятивистская теория поля

Уравнения движения (4.1) содержат три скалярные переменные $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Для системы из нескольких частиц или твёрдых тел число динамических переменных (число *степеней свободы*) больше. Но пока число блоков или число планет в нашей механической системе остаётся конечным, конечно и число степеней свободы.

Но что, если нас интересует движение жидкости? В этой задаче имеется бесконечный *континуум* степеней свободы. Есть два способа описывать текущую воду — по Лагранжу и по Эйлеру. В лагранжевом описании динамические переменные суть зависящие от времени координаты бесконечно малых частичек жидкости $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$, где $\mathbf{x}_0$ — положения, которые эти частички занимали в начальный

момент времени $t = 0$. Таким образом, имеются три динамические переменные для каждого значения непрерывно меняющегося векторного параметра $\mathbf{x}_0$, и общее их число бесконечно и континуально.

В эйлеровом описании (оно несколько менее физично, но для жидкостей более удобно, чем лагранжево) мы не интересуемся, откуда пришли частички жидкости. Нас интересует исключительно *поле скоростей* $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ — зависимость скорости жидких частичек от точки в пространстве и от времени. Вводится также поле давления $P(\mathbf{x}, t)$.

Уравнение Навье—Стокса, описывающее динамику несжимаемой жидкости, имеет следующий вид:

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = -\nabla P + \eta \Delta \mathbf{v}, \quad (4.26)$$

где ρ — плотность жидкости, а η — её вязкость.

В отличие от закона (4.1), представляющего собой систему трёх обыкновенных дифференциальных уравнений для трёх переменных $\mathbf{x}(t)$, уравнение Навье—Стокса — это уравнение в частных производных. Оно весьма нелинейно и чрезвычайно сложно. В нашей книге мы больше обсуждать его не будем (у нас есть много других непростых тем для обсуждения).

Поговорим лучше об *упругих деформациях* твёрдого тела. Теория упругости (в просторечии сопромат) — тоже не такая уж простая наука, но она намного проще гидродинамики. Для твёрдых тел более удобно лагранжево описание. Введём *вектор деформации* $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) - \mathbf{x}_0$. Предположим, что $|\mathbf{u}| \ll |\mathbf{x}_0|$. Мы исключаем таким образом: (а) перемещение твёрдого тела как целого; (б) вращение тела как целого; (в) некоторые специальные деформации, такие как изгиб тонких стержней. Уравнение в частных производных для поля $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ (мы больше не будем писать индекс «0» у координаты) несравненно проще, чем уравнение Навье—Стокса. Оно особенно упрощается, если там оставить только линейные по $\mathbf{u}$ члены. Для однородного изотропного вещества мы получаем

$$\ddot{\mathbf{u}} = c_t^2 \Delta \mathbf{u} + (c_l^2 - c_t^2) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}). \quad (4.27)$$

Это не что иное, как волновое уравнение, описывающее распространение звуковых волн. Здесь c_l — *продольная* скорость звука, т. е. скорость волн сжатия и растяжения, а c_t — *поперечная* звуковая скорость, с которой распространяются сдвиговые деформации.

Я должен здесь признаться, что немного обманул вас, когда говорил «перемещение элемента жидкости» или «смещение твёрдого

элемента». В действительности «элементы» материальных тел — это атомы и молекулы. Так что неправильно, вообще говоря, говорить о «непрерывной деформации» $u(x, t)$. Для твёрдых тел следует говорить скорее о деформации узлов кристаллической решётки. В качестве модели кристалла читателю предлагается представить пружинный матрац на рис. (4.3)¹.

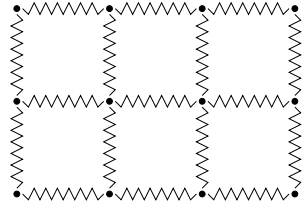


Рис. 4.3. Пружинный матрац

Таким образом, мы фактически имеем дело с системой с очень большим, но конечным числом степеней свободы. Полевые уравнения в частных производных, такие как (4.26) или (4.27), получаются как предел системы большого числа обыкновенных дифференциальных уравнений. Но если мы интересуемся поведением среды на расстояниях, намного превышающих расстояния между её атомами, то полевое описание вполне применимо и адекватно!

Соня поднимается по лестнице и проходит зал нерелятивистских полевых теорий, забитый аквариумами и пружинными матрацами. Она видит знакомые двери, украшенные знаками $\mathcal{C}$ и $\hbar$. Она открывает дверь $\mathcal{C}...$

4.6. Релятивистская теория поля

Рассмотрим комплексное скалярное поле² $\varphi(x, t)$ (мы не будем на этом этапе обсуждать его физическую природу), удовлетворяющее уравнению

$$\left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right)\varphi(x, t) = 0. \quad (4.28)$$

С математической точки зрения это то же уравнение КФГ, что и (4.18), но интерпретация сейчас совершенно другая. Здесь $\varphi(x, t)$ — это не квантовая волновая функция, а классическое поле. Это уравнение инвариантно относительно преобразований Лоренца и описывает релятивистски инвариантную динамическую полевую систему.

Решения уравнения (4.28) суть плоские волны

$$\varphi(x, t) \propto e^{i(k \cdot x - \omega t)}, \quad (4.29)$$

¹ Я взял этот образ из книги Зи «Квантовая теория поля в двух словах».

² Оно может быть и вещественным, но для комплексного поля упрощаются некоторые технические моменты, обсуждаемые в следующем параграфе.

где $\mathbf{k}$ и ω удовлетворяют определённому дисперсионному соотношению

$$\omega^2 - c^2 k^2 = \left(\frac{mc^2}{\hbar} \right)^2. \quad (4.30)$$

Фазовая скорость ω/k и групповая скорость $d\omega/dk$ такой волны зависят от частоты.

Можно обобщить уравнение (4.28), добавив кубический член $\propto \varphi^2 \varphi^*$ в левую часть. Если φ есть, как мы предполагаем, лоренцев скаляр (величина, инвариантная относительно преобразований Лоренца), то кубический член (или любая другая функция φ) не влияет на релятивистскую инвариантность уравнения. Решения такого уравнения представляют собой сложные взаимодействующие нелинейные волны.

Хорошо известный физический пример релятивистской полевой теории — это максвелловская теория электромагнитного поля. В хвисайдовских единицах уравнения Максвелла записываются так:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho, & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mathbf{j}}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Здесь ρ и $\mathbf{j}$ — зарядовая плотность и плотность тока, а $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ — электрическое и магнитное поля. Они выражаются через скалярный потенциал φ и векторный потенциал $\mathbf{A}$ следующим образом:

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (4.32)$$

Уравнения Максвелла выглядят сложнее, чем уравнение (4.28). Тот факт, что они инвариантны относительно преобразований Лоренца (а они инвариантны!), не кажется очевидным. Это не было очевидно и их первооткрывателю. Говоря точнее, Максвелл вообще не знал, что его уравнения обладают замечательной релятивистской инвариантностью. Его нельзя за это упрекнуть. Мы записали уравнения так, как они даются в большинстве учебников. Но эта форма, названная нами сложной, намного проще и прозрачнее формы, в которой они были записаны в оригинальной работе Максвелла. Пионеры редко заботятся об элегантности, и результаты свежего оригинального исследования часто выглядят уродливо.

Релятивистская инвариантность уравнений Максвелла была открыта Хендриком Лоренцем. А потом Альберт Эйнштейн, Анри Пуанкаре и Герман Минковский осознали причину и физический смысл

этой инвариантности. В главе 7 мы выведем уравнения Максвелла в двух строках, используя лагранжев формализм.

А здесь мы просто напомним, что решения уравнений Максвелла в отсутствии внешних зарядов и токов представляют собой электромагнитные волны. Зависимость электрического и магнитного полей и скалярного и векторного потенциалов от $\mathbf{x}$ и t такая же, как в формуле (4.29), но дисперсионное соотношение есть теперь просто

$$\omega^2 = k^2 c^2. \quad (4.33)$$

Свет распространяется со скоростью света c !

В предыдущем параграфе мы отметили, что уравнения нерелятивистских полевых теорий типа (4.26) и (4.27), записанные в частных производных, получаются как предел большого числа обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих движение отдельных атомов. Для теории Максвелла ситуация противоположна. Электрические и магнитные поля — это *непрерывные* функции $\mathbf{x}$ и t , и уравнения Максвелла — это *фундаментальные* уравнения. С другой стороны, если мы хотим решать эти уравнения численно на компьютере, их необходимо дискретизовать, «проквантовать» пространство (а потом и время), ввести фиктивный пружинный матрас и заменить уравнения в частных производных системой большого числа обыкновенных дифференциальных уравнений.

4.7. Квантовая теория поля

Мы готовы теперь начать разговор на главную тему нашей книги и обследовать вместе с Соней два последних зала второго этажа — залы релятивистской и нерелятивистской квантовых полевых теорий.

Что такое «квантовая теория поля» — ясно из термина: КТП относится к классической полевой теории так же, как обыкновенная квантовая механика к обыкновенной классической механике. Можно сказать, что КТП есть квантовая механика систем с бесконечным континуальным набором динамических переменных. Мы дадим в этом параграфе некоторые предварительные проясняющие замечания. Более подробное обсуждение основ КТП будет дано в главе 7. Фермионные поля будут рассмотрены в главе 9.

Основной фундаментальный объект, с которым имеет дело квантовая механика, — это не классическая траектория $\mathbf{x}(t)$, а шрёдингеровская волновая функция $\Psi(\mathbf{x}, t)$. Точно так же основной фундамен-

тальный объект КТП — это не поле $\varphi(\mathbf{x}, t)$, а *волновой функционал*

$$\Psi[\{\varphi(\mathbf{x})\}, t]. \quad (4.34)$$

Волновой функционал (4.34) зависит от $\varphi(\mathbf{x})$, то есть от бесконечного континуального набора переменных, значений поля во всех пространственных точках. Он удовлетворяет динамическому уравнению Шрёдингера (4.8) с некоторым полевым гамильтонианом $\hat{H}$. Последний представляет собой дифференциальный оператор, включающий *вариационные производные* $\delta/\delta\varphi(\mathbf{x})$.

Точное выражение для этого гамильтониана будет выведено в главе 7. Пока мы только заметим, что наиболее удобный способ решать функциональное уравнение Шрёдингера — это поместить систему в конечный пространственный ящик L и наложить на поле $\varphi(\mathbf{x})$ периодические граничные условия, как в формуле (4.16). После этого можно разложить его в ряд Фурье:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n}} c_{\mathbf{n}} \exp\left\{\frac{2\pi i \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{L}\right\}, \quad (4.35)$$

где сумма идёт по всем целочисленным векторам $\mathbf{n}$. Следуя предложению Вольфганга Паули и Виктора Вайскопфа¹, выберем в качестве динамических переменных набор коэффициентов Фурье $\{c_{\mathbf{n}}\}$ и комплексно-сопряжённых им величин. Это удобно, потому что в свободном случае [когда в уравнении (4.28) нет дополнительных кубических или иных членов] полевой гамильтониан выражается в виде бесконечной суммы

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{n}} \hat{H}_{\mathbf{n}}, \quad (4.36)$$

в которой каждый отдельный член $\hat{H}_{\mathbf{n}}$ зависит только от переменных $c_{\mathbf{n}}, c_{\mathbf{n}}^*$. В естественных единицах $\hat{H}_{\mathbf{n}}$ имеет вид (см. главу 7)

$$\hat{H}_{\mathbf{n}} = -\frac{1}{V} \frac{\partial^2}{\partial c_{\mathbf{n}} \partial c_{\mathbf{n}}^*} + V \left[m^2 + \left(\frac{2\pi \mathbf{n}}{L} \right)^2 \right] c_{\mathbf{n}} c_{\mathbf{n}}^*, \quad (4.37)$$

где $V = L^3$ — объём введённого нами ящика.

Читатель узнаёт в $\hat{H}_{\mathbf{n}}$ гамильтониан гармонического осциллятора. Единственное отличие от стандартного гармонического осциллятора из учебника с гамильтонианом

$$\hat{H}_{\text{осц}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \quad (4.38)$$

¹ Их статья о квантовании свободного заряженного скалярного поля была опубликована в 1934 г. В ней использовались идеи более ранней статьи Энрико Ферми (1932), где квантовалось свободное электромагнитное поле.

состоит в том, что осциллятор (4.37) *двумерен*; комплексная переменная c_n описывает две вещественные степени свободы. Можно её представить как

$$c_n = \frac{X_n + iY_n}{\sqrt{2}}, \quad (4.39)$$

так что гамильтониан (4.37) запишется в виде суммы двух идентичных гамильтонианов (4.38), где объём ящика V играет роль массы. Частота такого осциллятора есть

$$\omega_n = \sqrt{m^2 + \left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2}. \quad (4.40)$$

Во избежание возможных недоразумений отметим здесь, что X_n, Y_n не имеют ничего общего с пространственными координатами. В отличие от гамильтониана (4.38), который описывает колебания обычной частицы в обычном пространстве, гамильтониан (4.37) описывает осцилляции компоненты Фурье поля в функциональном гильбертовом пространстве!

Гамильтониан (4.37) имеет спектр

$$E_{l_1^n, l_2^n} = (1 + l_1^n + l_2^n) \omega_n, \quad (4.41)$$

где $l_{1,2}^n = 0, 1, 2, \dots$ — это квантовые числа, описывающие возбуждения осцилляторов X_n и Y_n . Спектр полного гамильтониана (4.36) есть бесконечная сумма индивидуальных спектров (4.41).

Основное состояние $\hat{H}$ отвечает $l_{1,2}^n = 0$ для всех n . Его энергия есть

$$E_0 = \sum_n \omega_n. \quad (4.42)$$

Но эта величина бесконечна!

Таким образом, наше вычисление привело к странному результату: к бесконечной плотности энергии вакуума (по определению физический вакуум есть основное состояние полевого гамильтониана — состояние, где отсутствуют возбуждения.) Есть ли в этом какой-то смысл? Мы же знаем из опыта, что энергия вакуума равна нулю. Действительно, энергия, как и масса, гравитирует, в то время как пустое пространство никакого гравитационного заряда не несёт — ничего не притягивает и ничего не отталкивает.

Но уверены ли мы, что это действительно так? Это на самом деле совсем не глупый вопрос, который заслуживает подробного обсуждения.

Лирическое отступление о космологическом члене

Когда плотность энергии вакуума $\rho_{\text{вак}}$ отлична от нуля, физики говорят о присутствии ненулевой космологической константы, или космологического члена¹. В отличие от обыкновенной массы, вакуумная энергия может быть как положительной, так и отрицательной. Космологический член в выведенные им уравнения для динамики гравитационного поля впервые ввёл Эйнштейн. Он добавил его, надеясь получить стационарное космологическое решение (т. е. решение, описывающее всю Вселенную) этих уравнений. Эйнштейн хотел ввести универсальное гравитационное отталкивание в пустом пространстве², чтобы сбалансировать ньютоновское притяжение массивных тел.

Без такого космологического члена уравнения имеют только нестационарные космологические решения, описывающие расширяющуюся или расширяющуюся и потом схлопывающуюся Вселенную. Такие решения были впервые получены в 1922 и 1924 г. петроградским математиком Александром Фридманом.

Интересно, что Эйнштейн не сразу признал, что его уравнения допускают нестационарные решения. История здесь довольно драматична. Эйнштейн прочитал первую статью Фридмана, опубликованную в «Zeitschrift für Physik», но, основываясь на некоей ошибке в вычислениях, счёл, что решение Фридмана не согласуется с законом сохранения энергии и потому неверно. Он послал в журнал краткое письмо с этим утверждением. Фридман был в Петрограде, а Эйнштейн — в Берлине. Скайпа тогда не было, и Фридману было трудно убедить Эйнштейна в своей правоте. Но у Фридмана был друг и коллега Юрий Крутков, который в то время был в Берлине с научным визитом. По просьбе Фридмана он встретился с Эйнштейном, объяснил ему суть фридмановской работы и убедил его, что эта работа вполне правильна! 7 мая 1923 г. он записал в своей рабочей тетради: ...читал с Эйнштейном статью Фридмана в Zeitschrift für Physik. И потом в письме сестре от 18 мая: *Победил Эйнштейна в споре о Фридмане. Честь Петрограда спасена!*

В результате 31 мая 1923 г. Эйнштейн послал другое краткое сообщение в «Zeitschrift für Physik». В нём говорилось: *В своей заметке (Einstein, 1922) я критиковал процитированную работу (Friedmann, 1922). Однако, как я убедился из письма г-на Фридмана и из личной беседы с г-ном Крутковым, мои возражения были основаны на ошибке в вычислениях.*

¹ Более точно, стандартное определение космологической константы Λ включает дополнительный численный фактор: $\Lambda = 8\pi\rho_{\text{вак}}$.

² В отличие от случая привычного сосуда с газом, положительная плотность энергии вакуума отвечает отрицательному давлению. Для экспертов: это происходит потому, что вакуумный тензор энергии-импульса пропорционален плоской метрике Минковского $\eta_{\mu\nu}$, а $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -\eta_{00} = -1$. Подробности см. в главе 15.

Сейчас я убеждён, что результаты λ -на Фридмана вполне ясны и правильны. Они показывают, что, помимо статических решений, гравитационные полевые уравнения допускают также зависящие от времени сферически симметричные решения.

История, конечно, абсолютно замечательная. *Errare humanum est*, и даже великий учёный может иногда допустить ошибку. Но далеко не каждый учёный, выдающийся или рядовой, готов немедленно и публично признать свою ошибку, существование которой он осознал. Эйнштейн поступил так без малейших колебаний!

В 1922—1923 гг. ни Эйнштейн, ни Фридман не могли знать, какое из решений — стационарное решение с космологическим членом или нестационарное¹ — реализуется в природе.

Вообще-то уже тогда можно было *подозревать*, что Вселенная на самом деле нестационарна. Решение Эйнштейна напоминает в некотором смысле решение для мячика, лежащего на вершине горки. Это решение *неустойчиво*, так что малые отклонения в начальных условиях экспоненциально растут со временем. Но в физике окончательный ответ даёт только эксперимент.

Такой ответ был получен в 1929 г., когда Эдвин Хаббл открыл *красное смещение* — он обнаружил, что спектральные линии в свете, испущенном далёкими галактиками, сдвинуты в красную сторону. И чем дальше галактика — тем больше такое смещение. Это показало, что Вселенная на самом деле *нестационарна*; она расширяется и описывается решением Фридмана, а не решением Эйнштейна! Это также означает, что Вселенная имеет конечный возраст. Как уже говорилось в начале книги, Вселенная родилась из ничего примерно 13 миллиардов лет назад в результате Большого взрыва.

Фридман решил уравнения как с космологическим членом, так и без него. Для его нестационарного сценария наличие или отсутствие такой константы было не критично. Долгое время люди полагали, что $\Lambda = 0$. Чтобы описать наблюдения, ненулевое Λ не требовалось, и принцип бритвы Оккама говорит, что лучше не вводить новое понятие (или новую константу), если можно обойтись без этого. Однако недавние точные астрономические наблюдения показали, что Вселенная не просто расширяется, но расширяется с ускорением! А это нельзя объяснить, если всё же не предположить наличие маленькой космологической константы (она известна также под поэтическим именем *тёмной энергии*). Её величина составляет примерно дюжину джоулей на кубический километр.

¹ В главе 15 мы узнаем, что допустимы два разных нестационарных решения: так называемая *открытая космологическая модель*, в которой Вселенная расширяется неограниченно, и *закрытая модель*, где расширение сменяется сжатием и Вселенная в конце концов снова схлопывается в точку.

Возвратимся теперь к нашему обсуждению КТП и зададимся вопросом: как согласовать чрезвычайно малую наблюдаемую величину космологической константы с бесконечной вакуумной энергией (4.42)? Можно ответить кратко: *это науке неизвестно*. Но небезынтересными для читателя могут показаться следующие философские спекуляции на эту тему.

Мы до сих пор рассматривали только бозонное поле $\varphi(x)$, удовлетворяющее уравнению КФГ. Но можно повторить все рассуждения для фермионного поля, удовлетворяющего уравнению Дирака. Мы проделаем это в главе 9, после чего увидим, что фермионная вакуумная энергия тоже бесконечна, но это не положительная, а *отрицательная* бесконечность.

В таблице 2 из главы 3 перечислены известные элементарные частицы (а мы очень скоро поймём, что каждой такой частице соответствует фундаментальное поле), и среди них есть как бозоны, так и фермионы. Представим теперь, что положительная вакуумная бозонная энергия полностью сокращается с отрицательной фермионной. Такое сокращение действительно имеет место в *суперсимметричных* теориях¹. К сожалению, мир, который мы наблюдаем, не суперсимметричен. Большинство теоретиков сегодня полагает, что суперсимметрия должна проявляться на глубоком фундаментальном уровне — при сверхвысоких энергиях, недоступных для сегодняшнего экспериментального изучения. Возможно, это так, но в любом случае такая суперсимметрия нарушена при низких энергиях — это экспериментальный факт. И мы совершенно не понимаем сегодня, почему это нарушение не приводит также к громадной (если не бесконечной) величине космологической константы. Это одна из главных нерешённых загадок современной физики.

Можно, однако, отметить, что вопрос этот возникает только при учёте гравитационных взаимодействий. В мире без гравитации абсолютная величина энергии не является физически наблюдаемой (наблюдаемы только *разности* энергий) и вопрос теряет смысл.

Обратимся снова к спектру (4.41) гамильтониана (4.37) и рассмотрим состояние, где равны нулю все квантовые числа, *кроме одного*. Пусть, например, $l_1^n = 1$ для какого-то определённого n . Энергия этого состояния превышает вакуумную энергию на ω_n . Взгля-

¹ Суперсимметрия — это симметрия между бозонами и фермионами. Мы будем её обсуждать в главе 14.

нужно на выражение (4.40), мы видим, что ω_n можно интерпретировать как энергию свободной релятивистской частицы с массой m и импульсом $\mathbf{p} = 2\pi\mathbf{n}/L$ или, быть может, $\mathbf{p} = -2\pi\mathbf{n}/L$ ($\mathbf{p} = \pm 2\pi\hbar\mathbf{n}/L$ в обычных единицах). А соответствующее состояние в гамильтониане (4.36) интерпретируется как *одночастичное состояние*.

При данном $\mathbf{n}$ имеется фактически два таких состояния: состояние, где равны нулю все квантовые числа, кроме $l_1^n = 1$, и состояние, где отлично от нуля и равно единице только квантовое число l_2^n . Одночастичные состояния с определённым импульсом представляют линейные комбинации указанных выше состояний. Обычное определение и обычная интерпретация таковы¹:

$$\Psi_{\text{частица с импульсом } 2\pi\mathbf{n}_0/L} \sim c_{n_0}^* \prod_n \exp\{-V\omega_n c_n c_n^*\}, \quad (4.43)$$

$$\Psi_{\text{античастица с импульсом } -2\pi\mathbf{n}_0/L} \sim c_{n_0} \prod_n \exp\{-V\omega_n c_n c_n^*\}. \quad (4.44)$$

То же самое произведение, но без множителей $c_{n_0} \equiv c_0$ или $c_{n_0}^* \equiv c_0^*$ даёт вакуумную волновую функцию

$$\Psi_{\text{вак}} = \prod_n \exp\{-V\omega_n c_n c_n^*\}. \quad (4.45)$$

Между прочим, мы с самого начала стали работать с комплексным, а не вещественным скалярным полем именно поэтому. Для вещественного поля при данном импульсе имелось бы только одно квантовое число и не было бы античастиц. Точнее, частичные и античастичные состояния совпали бы.

У гамильтониана (4.36) имеется много других собственных состояний (они называются *фоковскими состояниями*). Среди есть, например, состояние, включающее четыре частицы с импульсами $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$ и три античастицы с импульсами $\mathbf{p}_5, \mathbf{p}_6, \mathbf{p}_7$. Волновая функция такого состояния включает то же произведение экспонент, что в формуле (4.45), с дополнительным фактором $c_1^* c_2^* c_3^* c_4^* c_{-5} c_{-6} c_{-7}$. Импульсы могут быть разными, но могут и совпадать².

¹ Да, Соня, было бы более естественно определить это наоборот: частицу с множителем $\sim c$ в волновой функции и античастицу с множителем $\sim c^*$. Но я следую здесь возникшим по историческим причинам стандартным соглашениям, которые используются во всех остальных книгах по КТП. Мы снова предлагаем читателю набраться терпения до главы 7 (с. 151), где мы дадим аккуратный вывод гамильтониана (4.36) и проясним структуру его спектра, включая отрицательный знак импульса в формуле (4.44).

² С другой стороны, как научил нас Паули, тождественные фермионы не могут иметь совпадающие импульсы. В главе 9 мы поймём, почему это так.

Мы теперь понимаем (по крайней мере, понимаем это для свободных бозонов), как разрешаются две принципиальные проблемы релятивистской квантовой механики, о которых мы говорили в § 4.4: невозможность вероятностной интерпретации для квадрата модуля релятивистской волновой функции и существование состояний с отрицательной энергией [два возможных знака в квадратном корне в уравнении (4.23)].

- Уравнение КФГ следует интерпретировать не как уравнение на волновую функцию, а как уравнение на классическое поле $\varphi(\mathbf{x}, t)$. Величина же $|\varphi(\mathbf{x}, t)|^2$ не имеет большого физического смысла.
- Истинный гамильтониан системы — не гамильтониан (4.22), а гамильтониан Паули—Вайскопфа (4.36). Последний имеет основное состояние. Если его энергия нормирована на нуль, то все возбуждённые состояния имеют *положительные* энергии. Это относится также к энергиям античастиц. При отсутствии потенциала энергии частиц и античастиц совпадают и даются выражением (4.40).

Но ситуация снова осложняется, если мы включим внешний потенциал. Для сильного притягивающего потенциала с характерной абсолютной величиной $|V(\mathbf{x})|$ порядка энергии покоя частицы mc^2 энергия одночастичных состояний может стать отрицательной. Это неприятно, но ещё не трагедия. Трагедия начинается с того момента, когда энергия опускается ниже $-mc^2$. Ну, я бы сказал, что это ещё умеренная трагедия, не Армагеддон, убивающий всех и вся, но об одночастичном приближении в этой области параметров можно, безусловно, забыть.

Для электрона в поле положительно заряженного ядра такое происходит при¹

$$Z^* \approx 175. \quad (4.46)$$

Или, правильнее сказать, *произошло бы* — ядер с таким большим зарядом в природе нет: такое ядро было бы немедленно разорвано на части кулоновскими силами.

Но предположим существование такого ядра. Тогда было бы энергетически выгодно *родить* дополнительную электронно-позитронную пару, так что электрон занял бы уровень с большой отрицатель-

¹ Приблизительная оценка есть $Z^* \approx 1/\alpha \approx 137$. Более точный предел (4.46) был получен в 1970 г. Владимиром Поповым, который решал уравнение Дирака, принимая во внимание конечный размер ядра.

ной энергией $E_{e^-} < -mc^2$, а позитрон улетел бы с малым импульсом и полной энергией, близкой к $E_{e^+} \approx mc^2$, на бесконечность. Если заряд ядра намного превышает критический, то таких пар родится много; они будут рождаться до тех пор, пока заряд ядра в достаточной мере не заэкранируется. Образовавшиеся подпороговые электроны поглощаются рано или поздно протонами ядра в реакции $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$. Заряд ядра упадёт ниже критической величины (4.46). И всё снова придёт в норму...

В нескольких предыдущих абзацах мы обсуждали взаимодействие *электронно-позитронного поля* с классическим кулоновским потенциалом. Но я пока не объяснил, как описываются взаимодействия в квантово-полевым формализме; гамильтониан (4.36) описывает только свободные поля. Давайте мы это сейчас сделаем. Оставаясь в рамках нашей модели с комплексным скалярным полем, мы можем ввести самодействие поля, добавив в гамильтониан квартичный член¹

$$H_{\text{int}} = \frac{\lambda}{4} \int (\varphi^*)^2 \varphi^2 dx. \quad (4.47)$$

Это эквивалентно добавке нелинейного кубического члена $-\frac{1}{2}\lambda\varphi^2\varphi^*$ в правую часть уравнения КФГ (4.28).

Подставив в выражение (4.47) разложение Фурье (4.35), мы получим

$$H_{\text{int}} = \frac{\lambda V}{4} \sum_{n_1 n_2 n_3 n_4} c_3^* c_4^* c_1 c_2 \delta(n_1 + n_2 - n_3 - n_4). \quad (4.48)$$

Если добавить это выражение к свободному гамильтониану (4.36), получится сложная система с бесконечным числом связанных осцилляторов. И уравнение Шрёдингера для волнового функционала больше нельзя решить точно. Однако если константа взаимодействия λ достаточно мала, то мы можем учесть эффекты взаимодействия в рамках теории возмущений. Для этого нужно вычислить матричные элементы гамильтониана взаимодействия (4.48) в базисе, включающем собственные состояния свободного гамильтониана (4.36) — частичные и античастичные состояния. Например, если мы ограничимся состояниями частиц (4.43), то матричные элементы

¹ Фактор 1/4 обычно включается в определение, чтобы упростить выражение для амплитуды рассеяния. Мы объясним это в главе 10.

приобретают вид (подробнее см. на с. 152)¹

$$\langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 | H_{\text{int}} | \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1 \rangle \sim \lambda \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4). \quad (4.50)$$

Умный читатель, наверное, уже догадался, что матричные элементы (4.50) связаны с амплитудами рассеяния. Действительно, дельта-функция в правой части заставляет думать о процессе рассеяния, когда две частицы с импульсами $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ сталкиваются и рассеиваются, так что конечные импульсы частиц принимают значения $\mathbf{p}_3$ и $\mathbf{p}_4$. Догадка эта *почти*, хотя и не совсем правильна. Не совсем, потому что что матричный элемент (4.50)² был вычислен в *представлении Шрёдингера*. Оно подразумевает сохранение импульса, $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4$, но не сохранение энергии. Чтобы аккуратно вывести выражения для амплитуд рассеяния, в которых $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4$ (особенно вклады высших порядков теории возмущений в амплитуды), лучше работать в *представлении Гейзенберга* (более точно, в *представлении взаимодействия*) с операторами, зависящими от времени. Такой аккуратный вывод мы в нашей книге делать не будем. Но позднее (в главе 10) мы дадим полуэвристический вывод *правил Фейнмана* для вычисления релятивистских амплитуд рассеяния в любом порядке теории возмущений.

¹ В уравнении (4.48) символ $\delta(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 - \mathbf{n}_3 - \mathbf{n}_4)$ означает, что суммирование идёт не по всем векторам $\mathbf{n}_j$, но только по тем из них, которые удовлетворяют условию $\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_3 + \mathbf{n}_4$. А символ $\delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4)$ в уравнении (4.50) — это дельта-функция, введённая в математику Дираком. Дельта-функция $\delta(x)$ обладает следующими свойствами:

$$\delta(x \neq 0) = 0, \quad \delta(0) = \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.$$

Можно её представлять как предел

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}. \quad (4.49)$$

функция $\delta(\mathbf{p})$ определяется как произведение $\delta(\mathbf{p}_1)\delta(\mathbf{p}_2)\delta(\mathbf{p}_3)$.

Если математик случайно раскроет нашу книгу на этой странице и его взор упадёт на это примечание, он, конечно, станет ругаться. Для математика «дельта-функция» — это никакая не функция, а линейный функционал, ставящий в соответствие каждой функции её значение в нуле. Но мы дали «физическое» определение. Именно так это понятие определял сам Дирак.

² Заметьте, что *конечные* импульсы $\mathbf{p}_{3,4}$ стоят в левой части *слева*, так что конечное состояние системы, «место прибытия», указано *прежде*, чем её исходное состояние. Такое необычное для авиапассажира соглашение следует из определения

$$\langle n | \hat{O} | m \rangle \sim \int \Psi_n^* \hat{O} \Psi_m \prod_k dc_k^* dc_k. \quad (4.51)$$

А пока мы просто приглашаем читателя взглянуть на рис. 4.4, где по мотивам формулы (4.50) начерчена простая схема. Это первая диаграмма Фейнмана в нашей книге. В дальнейшем встретится много других.

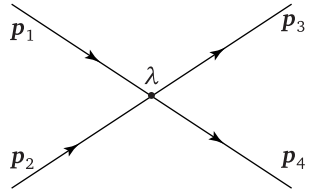


Рис. 4.4. Скалярная амплитуда рассеяния $2 \rightarrow 2$ в низшем порядке теории возмущений

Мы обсуждали до сих пор только релятивистскую квантовую полевую теорию, и мы обсуждали её *долго* — этот параграф намного длиннее остальных. Читатель отнесётся к этому с пониманием; в конце концов, мы впервые подошли здесь к главной теме нашей книги, сделали первый разведочный рейд в удивительный мир КТП. Однако архитектура здания теорфизики (когда Соня вернулась из музея домой, она сделала набросок плана музея, который мы с благодарностью воспроизводим на рис. 4.5) подразумевает наличие отдельного зала, посвящённого нерелятивистской квантовой полевой теории. Что находится в этом зале?

Как было сказано, нерелятивистские полевые теории дают эффективное описание обыкновенного вещества на расстояниях, намного превышающих межатомные расстояния. Волновое уравнение (4.27) описывает твёрдые тела, а уравнение Навье—Стокса (4.26) описывает течение жидкости.

И в твёрдых, и в жидких телах при низких температурах становятся существенными квантовые эффекты, которые могут быть

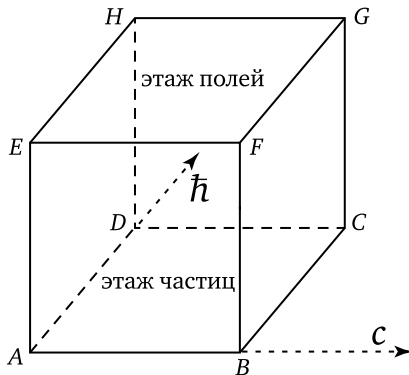


Рис. 4.5. Кубическая схема физических теорий (из Сониного компьютера). $ABCD$ — этаж частиц, $EFGH$ — этаж полей. $ADEH$ — нерелятивистская стена, $BCFG$ — релятивистская стена. $ABEF$ — классическая стена, $DCGH$ — квантовая стена.

рассчитаны в рамках формализма КТП. Например (это первое, что приходит в голову), квантование звуковых волн в кристалле даёт *фононы*. Длина волны фонона не может быть меньше, чем размер кристаллической решётки. А это значит, что энергия фонона не может превышать некий предел $\hbar\Omega_D$ (Ω_D называется *дебаевской частотой*). И это ограничение следует иметь в виду при вычислении теплоёмкости кристалла.

Сверхпроводимость — это тоже квантовое явление, и теория сверхпроводимости — это нерелятивистская квантовая полевая теория. Во-первых, сверхпроводимость возникает благодаря специфическому притяжению электронов в кристалле, связанному с их взаимодействием с фононами. При низких температурах оно может оказаться сильнее кулоновского расталкивания электронов. Во-вторых, *куперовские пары* — связанные состояния электронов, образовавшиеся благодаря этому притяжению, — описываются эффективным квантовым бозонным полем.

Квантовая гидродинамика — это тоже важная область физики, где используется формализм КТП. Эта наука описывает свойства жидкого гелия и, в частности, явление *сверхтекучести*.

Но все эти интереснейшие вещи находятся за пределами нашей книги...

4.8. Не в кубе

Необходимо предостеречь читателя. В предложенную кубическую схему укладывается почти вся, но не вся теоретическая физика.

- Прежде всего, имеется теория гравитации. Эйнштейновская общая теория относительности — это релятивистская полевая теория. Но это особая релятивистская полевая теория. В теориях, обсуждавшихся выше, пространство и время играли роль сцены, на которой разворачивалось действие. В заданной системе отсчёта динамические полевые уравнения формулировались как задача Коши, описывавшая эволюцию системы в универсальном, внешнем по отношению к задаче времени.

Но в общей теории относительности структура пространства-времени не фиксирована. Она описывается метрикой $g_{\mu\nu}$, которая есть сама по себе динамическая переменная¹. В результате мы не

¹ Метрический тензор $g_{\mu\nu}$ определяет интервал между близкими событиями в искривлённом пространстве-времени. Вместо выражения (4.21) мы теперь имеем

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \quad (4.52)$$

можем ввести понятие универсального времени, где происходит эволюция системы (такое возможно для достаточно слабых гравитационных полей, когда метрика не очень сильно отклоняется от плоской метрики Минковского, но не в общем случае).

И это приводит к парадоксам. Существуют, например, весьма странные решения уравнений Эйнштейна с *замкнутыми временными петлями*¹. Время не течёт в них линейно из прошлого в будущее, но, следуя одной из таких замкнутых линий, вы можете оказаться в далёком прошлом и убить там своего прадедушку. Это гнусное деяние было бы не только преступным, но и парадоксальным. Оно привело бы к очевидному *нарушению причинности*.

Таким образом, в теории гравитации логические проблемы возникают уже на классическом уровне. Общая теория относительности внутренне не самосогласована и описывает только ограниченный класс явлений, когда гравитационные поля достаточно слабы. А про квантовую гравитацию нечего и говорить. Сегодня такой теории просто не существует! В конце книги мы вернёмся к обсуждению её загадок.

- Мы не обсуждали выше также другой, более привычный класс проблем. Я говорю о статистической физике. Действительно, воздух в комнате — это система с гигантским числом степеней свободы, но мы не строим полевою теорию, чтобы её описывать, не пишем дифференциальных уравнений в частных производных. Точнее, мы пишем такое волновое уравнение для описания свойств звука, но звук — это только одно из явлений физики газов, а есть и другие фундаментальные явления. В частности, уравнение Менделеева—Клапейрона

$$PV = Nk_B T \quad (4.53)$$

не следует из решения каких-либо дифференциальных уравнений. Оно выводится как результат статистического усреднения. Существует классическая статистика (пятый том курса Ландау и Лифшица), а также квантовая статистика (тома 9 и 11). На практике, имея в виду, что все обсуждавшиеся в конце предыду-

где предполагается двойное суммирование по индексам $\mu = 0, 1, 2, 3$ (и $\nu = 0, 1, 2, 3$).

¹ Эти решения были найдены Куртом Гёделем — тем же математиком, который доказал знаменитую теорему Гёделя о неполноте любой достаточно богатой системы аксиом: существование утверждений, которые нельзя ни доказать, ни опровергнуть.

щего параграфа нерелятивистские квантовые полевые теории — это эффективные теории, полученные процедурой, родственной процедуре статистического усреднения, не так просто точно разделить области нерелятивистской КТП и квантовой статистики. Поэтому, в частности, сверхпроводимость и сверхтекучесть рассматриваются в томе 9 курса Ландау. Можно также заметить, что хорошо известный учебник по нерелятивистской КТП, написанный Абрикосовым, Горьковым и Дзялошинским, называется «Методы квантовой теории поля в статистической физике».

Глава 5

Становление Стандартной модели¹

Алексис де Токвиль однажды заметил: *Историю можно уподобить картинной галерее, где висит мало оригиналов, но много копий*. Если говорить о политической истории, Токвиль, безусловно, прав. Человек есть животное политическое, и человеческие страсти, определяющие ход истории, мало изменились со времени Аристотеля или царя Хаммурапи.

Но это замечание Токвиля не приложимо к интеллектуальной истории человечества и особенно — к истории науки. Наши знания возрастают. Хаммурапи, Аристотель или Токвиль попросту не имели ни малейшего представления о множестве вещей, которые мы хорошо знаем сегодня. Это, конечно, относится и к квантовой теории поля. Эта молодая область физики сформировалась в прошлом веке, на временном интервале между 1925—1926 гг. (когда родилась современная квантовая механика) и 1974—1975 гг., когда стало ясно, что мир элементарных частиц описывается определёнными конкретными квантовыми полевыми теориями сильных, электромагнитных и слабых взаимодействий, которые вместе составляют то, что называется сегодня *Стандартной моделью*. История открытия Стандартной модели очень интересна и временами драматична. Она заслуживает подробного рассказа.

5.1. Деревья

Вернёмся в 1926 год и в предыдущую главу, где обсуждались первые попытки построения релятивистской квантовой теории, связанные с именами Клейна, Фока и Гордона.

¹ Мы начали наш обед с лёгких закусок, но подошло время предложить читателю более питательные и содержательные блюда, которые требуют для своего полного усвоения здоровый желудок и развитый вкус. Эта длинная глава написана в предположении, что читатель знаком с элементарной релятивистской кинематикой и понимает, что такое квантовая амплитуда рассеяния и что такое дифференциальное сечение. В противоположном случае мы рекомендуем ознакомиться вначале с обзором этих понятий, который мы даём в следующей части, «Кулинарные тайны», — в § 6.1 следующей главы и в главе 8. С ещё большими подробностями эти вопросы будут обсуждаться в главе 10.

Мы там узнали, что квантовая теория, основанная на уравнении КФГ (4.18), заменяющем уравнение Шрёдингера, в некоторых ситуациях работает хорошо, но это так далеко не всегда. Фактически такая теория *парадоксальна* (отрицательные энергии, отсутствие вероятностной интерпретации $|\Psi(\mathbf{x}, t)|^2$ и т. д.).

В прошлой главе мы также упомянули, что разрешение этих парадоксов было найдено в работах Ферми, Фока, Паули и Вайскопфа, которые ввели понятие квантового полевого гамильтониана [см. формулу (4.36), (4.37)] и нашли его спектр.

Но гамильтониан (4.36) свободен, взаимодействия в нём нет. Решение квантовой задачи для нелинейных взаимодействующих гамильтонианов [наподобие гамильтониана (4.36) с добавленным квартичным членом (4.47)] — это сложная техническая проблема. Её можно решать только в рамках теории возмущений, когда взаимодействие достаточно слабо.

Исторически первой такой решённой задачей была задача об атомных электромагнитных переходах. Как хорошо известно, возбуждённые атомные состояния имеют конечное время жизни; они сваливаются в основное состояние, испуская фотон или несколько фотонов. Процесс

$$A^* \rightarrow A + \gamma \quad (5.1)$$

связан с рождением дополнительной частицы (фотона) и представляет собой настоящий квантово-полевой процесс¹. Он описывается следующей картинкой (диаграммой Фейнмана).

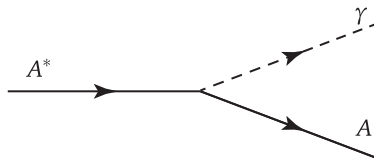


Рис. 5.1. Электромагнитный переход в атоме

Но амплитуду атомного перехода можно также вычислить, используя методы традиционной нерелятивистской квантовой механики, как это сделано во многих учебниках. Для этого достаточно

¹ Вот почему авторы курса Ландау обсуждают его в томе 4 («Квантовая электродинамика»), а не в томе 3 («Квантовая механика»).

вычислить матричный элемент оператора электромагнитного тока

$$j = \frac{i\hbar}{2m}(\Psi\nabla\Psi^* - \Psi^*\nabla\Psi) \quad (5.2)$$

между начальным и конечным атомными состояниями и умножить этот матричный элемент на заряд электрона¹ $e = -|e|$. Для водорода, где волновые функции известны аналитически, такое вычисление было впервые проведено Гордоном в 1929 г.

В релятивистской теории взаимодействие между фотонами и электронами описывается оператором

$$V_e = ej_e^\mu A_\mu, \quad (5.3)$$

где A_μ есть 4-вектор электромагнитного потенциала и j_e^μ — релятивистский оператор электронного электромагнитного тока, явное выражение для которого мы приведём в главе 9. Фотоны взаимодействуют также с другими заряженными частицами, например с протонами. Соответствующий оператор есть $V_p = |e|j_p^\mu A_\mu$. Эти взаимодействия приводят к нетривиальному рассеянию заряженных частиц друг на друге.

Рассмотрим *Моттовское рассеяние* электронов тяжёлыми протонами (Невиль Мотт вычислил его амплитуду² в 1929 г.). Соответствующая фейнмановская диаграмма приведена на рис. 5.2.

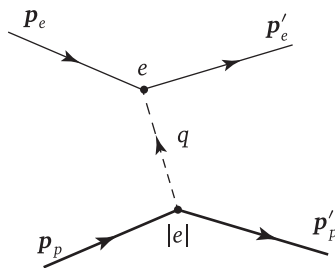


Рис. 5.2. Моттовское рассеяние. Здесь p_e, p_p и p'_e, p'_p суть 4-импульсы начальных и конечных частиц и $q = p'_e - p_e$ есть переданный импульс. Мы отметили также на диаграмме входящие в амплитуду факторы e и $|e|$, соответствующие электрон-фотонной и протон-фотонной вершинам.

Настало время открыть маленький секрет. Диаграмма Фейнмана — не просто картинка. На самом деле каждая такая диаграмма кодирует определённое аналитическое выражение, дающее вклад

¹ При определении j и его релятивистского обобщения j^μ мы следуем конвенции, принятой в физике высоких энергий. В учебниках по классическому электромагнетизму ток обычно определяется с включением фактора e , и мы тоже так поступили, когда записали в формуле (4.31) классические уравнения Максвелла.

² Точнее говоря, Мотт вычислил амплитуду рассеяния электронов в статическом кулоновском поле. Эта амплитуда даёт амплитуду рассеяния er , когда энергия электронов не превышает несколько сот МэВ, при больших энергиях начинает играть роль нетривиальная внутренняя структура протона. Но мы не будем далее вникать в эти несущественные для нас сейчас детали.

в амплитуду рассеяния. Мы узнаем, как пишутся такие аналитические выражения, в главах 8, 10. А пока мы просто хотим заметить следующее.

- Тонкие сплошные линии на рис. 5.2 описывают начальный и конечный электроны. Толстые сплошные линии описывают протоны.
- Электронная вершина содержит фактор e , а протонная вершина — фактор $|e|$. Наличие двух вершин говорит о том, что получающееся выражение для амплитуды соответствует второму порядку теории возмущений.
- Пунктирная линия, соединяющая две вершины, — это новый объект. Она описывает *виртуальный фотон*. Не входя сейчас в подробности, заметим только, что амплитуду рассеяния можно представить, сказав, что электрон рассеивается на электромагнитном поле, генерируемом протоном (или наоборот: протон рассеивается на поле электрона — как вам больше нравится!) Таким образом, виртуальная фотонная линия представляет собой электромагнитное поле, при посредстве которого взаимодействуют заряженные частицы.

В нерелятивистском пределе выражение для амплитуды упрощается. Если протон покоится, а скорость электрона мала, задача сводится к задаче рассеяния на внешнем кулоновском поле. В обсуждаемом низшем порядке теории возмущений нерелятивистская амплитуда зависит только от переданного импульса $\mathbf{q} = \mathbf{p}'_e - \mathbf{p}_e$. Выраженная в естественных единицах, она имеет простой вид¹

$$f(\mathbf{q}) = \frac{2m\alpha}{q^2}, \quad (5.4)$$

где m — электронная масса.

Квадрат этой амплитуды даёт формулу Резерфорда для дифференциального сечения:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{2m\alpha}{q^2} \right)^2. \quad (5.5)$$

Эрнест Резерфорд получил эту формулу, чтобы описать рассеяние α -частиц на ядре в своём знаменитом эксперименте, где было открыто существование атомного ядра².

¹ Эта амплитуда имеет размерность обратной массы, т.е. длины. Её квадрат $d\sigma/d\Omega = |f(\mathbf{q})|^2$, дифференциальное сечение рассеяния, имеет, как полагается, размерность площади. Подробности см. в главе 8.

² Для ядра с зарядом $Z|e|$ амплитуду (5.4) нужно, конечно, умножить на Z , а сечение (5.5) — на Z^2 .

Разумеется, для вывода формулы (5.4) не нужен ни аппарат КТП, ни аппарат обычной квантовой механики. Эту формулу можно вывести чисто классически, что Резерфорд и проделал. Фактически амплитуда (5.4) есть не что иное, как фурье-образ кулоновского потенциала

$$\int dx e^{-iq \cdot x} \left(-\frac{\alpha}{r} \right) = -\frac{4\pi\alpha}{q^2}, \quad (5.6)$$

умноженный на соответствующий коэффициент.

Релятивистское выражение для амплитуды можно извлечь из диаграммы на рис. 5.2. Когда масса протона намного больше энергии электрона, это выражение представляет собой естественное обобщение резерфордской амплитуды (5.4). В частности, квадрат трёхмерного вектора $\mathbf{q}$ заменяется релятивистским инвариантом $-q^2 = q^2 - q_0^2$. В амплитуде появляются также некоторые дополнительные факторы, учитывающие поляризацию электрона.

Анализ электрон-электронного или электрон-позитронного рассеяния в кинематической области, где энергии всех частиц порядка их массы или ещё выше, — это технически несколько более сложная задача, но её решение не требует принципиально новых методов. Амплитуды этих процессов были вычислены Кристианом Мёллером (для рассеяния e^-e^-) и Хоми Баба (для рассеяния e^+e^-) в середине тридцатых годов. Единственная особенность этого вычисления, которую можно упомянуть, это тот факт, что эти амплитуды даются суммой двух членов, отвечающих двум разным фейнмановским диаграммам. Для Мёллеровского рассеяния эти диаграммы схематически изображены на рис. 5.3. Они различаются перестановкой конечных электронов.

Те же самые диаграммы, но «повёрнутые», описывают процесс рассеяния Баба $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$, где один из конечных электронов за-

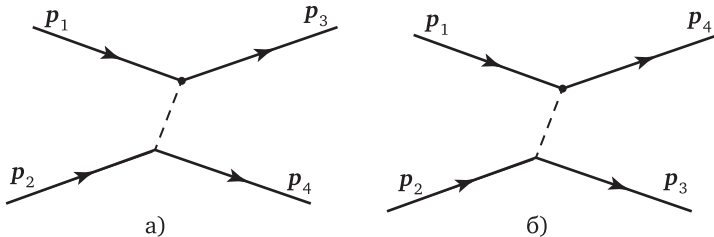
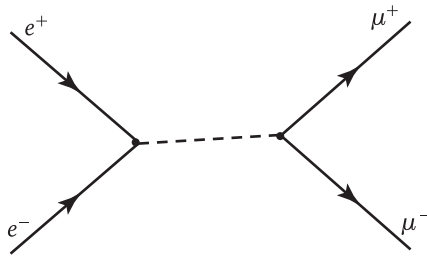


Рис. 5.3. Две диаграммы, описывающие рассеяние e^-e^-

Рис. 5.4. Процесс $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

менён на начальный позитрон, а один из начальных электронов — на конечный позитрон.

Интересен также процесс электронно-позитронной аннигиляции в мюонную пару $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$. В этом случае имеется всего одна диаграмма, изображённая на рис. 5.4.

Интерпретация такая. Вначале электрон и позитрон сливаются с образованием виртуального фотона. И потом этот виртуальный фотон распадается с образованием двух новых частиц: μ^+ и μ^- . Когда энергии начальных и конечных частиц намного превышают их массы, дифференциальное сечение процесса даётся простым выражением:

$$d\sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-} = \frac{\alpha^2}{16E^2} (1 + \cos^2 \theta) d\Omega, \quad (5.7)$$

где E — энергия электрона и позитрона в системе центра масс, а θ — угол между направлением сталкивающихся электрона и позитрона и направлением разлетающихся мюонов. Это сечение было вычислено Владимиром Берестецким и Исааком Померанчуком довольно поздно, в 1955 г. Но вычисления здесь проще, чем для рассеяния Баба. Мы вспомним о результате (5.7) в конце § 5.3, когда будем обсуждать физику электронно-позитронной аннигиляции с рождением сильно взаимодействующих частиц.

Во избежание путаницы и чтобы не разгневать специалистов, сделаем замечание о стрелках на рис. 5.4. Направление стрелок просто соответствует направлению импульсов и говорит о том, что электрон и позитрон столкнулись, мюонная пара родилась и энергии всех частиц положительны. Но чтобы фактически *вычислять* амплитуды различных процессов, удобно рисовать диаграммы с противоположным направлением стрелок для позитронных линий. Так дела-

ют профессионалы. Они также обычно меняют общее направление стрелок, размещая в соответствии с конвенцией (4.50) начальные частицы справа, а рождённые — слева. Но мы не собираемся сами вычислять в этой книге диаграммы и учить этому читателя. И стрелки мы будем рисовать по-любительски.

5.2. Петли. Диаграммная техника. Расходимости и перенормировка

— Всё ясно! — может сказать читатель, — но почему предыдущий параграф вы назвали *Деревья*? Там рассказывалось о фотонах, об электронах... Ничего о ботанике или лесном хозяйстве...

Ответ простой: все фейнмановские диаграммы, изображённые на рис. 5.1—5.4, принадлежат к классу так называемых *древесных диаграмм*. Они описывают амплитуды рассеяния в низшем нетривиальном порядке теории возмущений.

Но есть также вклады высших порядков. Пример такой поправки высшего порядка в амплитуду рассеяния $e p$ дан на рис. 5.5. Вы видите, что этот график включает замкнутую петлю. Петли фигурируют на всех диаграммах, описывающих вклады высших порядков. Их называют поэтому *петлевыми поправками*.

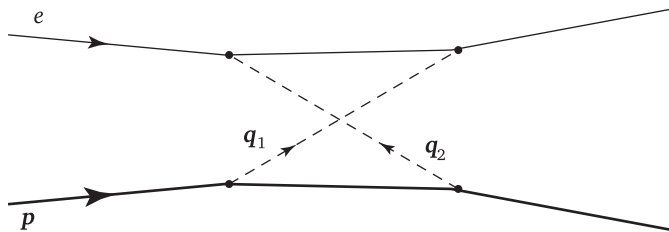


Рис. 5.5. Петлевая поправка к амплитуде рассеяния $e p$

Электрон и протон обмениваются здесь не одним, а двумя виртуальными фотонами. В отличие от диаграммы 5.2, где 4-импульс виртуального фотона определялся внешними импульсами $q = p'_e - p_e$, импульсы q_1 и q_2 на рис. 5.5 не фиксированы, фиксирована только их сумма. Аналитическое выражение для амплитуды включает интеграл

$$\sim \int d^4 q_1 d^4 q_2 \delta^{(4)}(p'_e - p_e - q_1 - q_2).$$

Настало время признаться, что, рассказывая в предыдущем параграфе о первых вычислениях древесных амплитуд, я срезал неко-

торые исторические углы. Я иллюстрировал эти вычисления, рисуя диаграммы Фейнмана, и читатель мог заключить, что Мёллер, Баба и другие учёные получали свои результаты путём вычислений диаграмм Фейнмана, как это делается в современных учебниках.

Но в тридцатые годы XX века диаграммы Фейнмана ещё не были изобретены, и люди считали амплитуды другим, значительно более громоздким и сложным способом. Они использовали то, что сейчас называется *старой диаграммной техникой*. Фактически это была теория возмущений в обычной нерелятивистской квантовой механике, адаптированная для изучения процессов рассеяния. Как я уже сказал, этот метод был весьма громоздок и неудобен. В частности, амплитуда на диаграмме, изображённой на рис. 5.5, описывалась в этом вычислении не одной, а многими диаграммами, которые различались по тому, какие из четырёх возмущений (5.3), соответствующих четырём вершинам на рис. 5.5, действовали раньше, а какие позже. В частности, следовало отдельно вычислять вклад, изображённый на рис. 5.6, куда входил матричный элемент $\langle e^+e^-|\hat{V}|\gamma\rangle$ с рождением дополнительной пары e^+e^- [здесь $\hat{V}$ есть гамильтониан взаимодействия (5.3)].

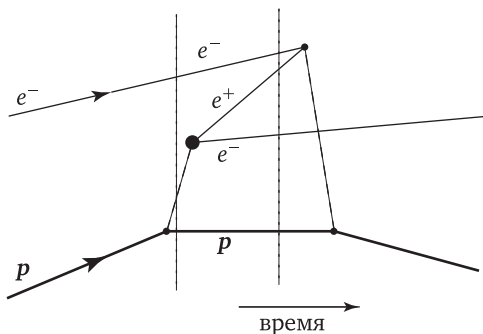


Рис. 5.6. Диаграмма старой техники с дополнительной парой e^+e^- в промежуточном состоянии. Вершина, отвечающая матричному элементу $\langle e^+e^-|\hat{V}|\gamma\rangle$, утолщена. Левая пунктирная линия отмечает промежуточное состояние $|e^-\gamma p\rangle$, а правая линия отмечает состояние $|e^-e^+e^-p\rangle$.

В фейнмановской релятивистски инвариантной технике этот процесс описывается всего одной диаграммой. Важна только топология, а для диаграммы на рис. 5.6 она, очевидно, такая же, как на рис. 5.5.

Отличительная черта фейнмановской техники по сравнению с нерелятивистской техникой — это сохранение в вершинах всех четы-

рёх компонент импульса. С другой стороны, внутренние линии описывают не реальные, а виртуальные частицы, т. е. частицы, у которых квадрат 4-импульса не совпадает с m^2 . Например, в графике на рис. 5.4 для аннигиляции $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ трёхмерный импульс виртуального фотона равен нулю в системе центра масс. Но его энергия $q_0 = E_{e^-} + E_{e^+} = 2E$ от нуля отлична. В итоге $q^2 = 4E^2 > 0$.

В старой же диаграммной технике в вершинах сохраняется только трёхмерный импульс, но не энергия. С другой стороны, там нет виртуальных частиц; вычисляются матричные элементы возмущения между собственными фоковскими состояниями свободного гамильтониана. Последние включают только обыкновенные реальные частицы, для которых $p^2 = m^2$.

Фейнмановская техника приводит к огромным упрощениям. Хочу процитировать здесь абзац из Нобелевской лекции Фейнмана. Точнее, пол-абзаца; в первой, опущенной мной, её половине Фейнман рассказывает, как он посетил семинар, где докладчик Мюррэй Слотник рассказывал о своих вычислениях некой амплитуды в двух разных теоретических моделях. Фейнман решил, что это хорошая возможность проверить свои методы. Когда он пришёл домой, он вычислил эту амплитуду своим способом.

...На следующий день я встретил Слотника и сказал: «Слотник, я решил по-своему эту задачу вчера вечером. Мне хочется свериться — совпадает ли мой ответ с вашим. В разных моделях действительно получаются разные ответы, как и у вас, но я хотел бы провести детальное сравнение, чтобы обрести уверенность в своих методах». И он ответил: «Что вы имеете в виду, говоря что вычислили это вчера вечером? Я затратил на это вычисление шесть месяцев!» Потом, когда мы сравнивали ответы, он посмотрел на меня и спросил: «Что такое Q , которое фигурирует в ваших формулах? (У меня были выражения типа $\frac{\arctg Q}{Q}$.) Я ответил: «Это импульс, переданный электроном; электроны могут отклоняться на разные углы». «О, — сказал он, — но у меня вычислено только предельное значение, когда Q стремится к нулю — рассеяние вперёд». Что ж, мне было нетрудно подставить $Q = 0$ в моих формулах, и тогда я получил тот же результат, что он. Но ему потребовалось на это вычисление шесть месяцев, и он рассматривал только случай нулевого переданного импульса, а я смог найти амплитуды при конечном

произвольном переданном импульсе за один вечер! Для меня это было волнующим моментом, подобным получению Нобелевской премии. Я наконец убедился, что у меня действительно есть некий метод и техника. Я понял, как надо проводить расчёты, тогда как все другие не знали этого. Это был мой триумф; я понял, что мне действительно удалось получить нечто ценное.

Что касается петлевых поправок к рассеянию $e\gamma$ (или, правильнее сказать, поправок к амплитуде рассеяния электрона в статическом внешнем поле), они были вычислены разными людьми в 1948—1950 гг. с помощью новых методов. Это вычисление не было очень сложным.

Неудобство нерелятивистской теории возмущений было технической (решённой Фейнманом) проблемой. Но в квантовой теории поля имелась (и в некоторой степени до сих пор имеется) значительно более серьёзная проблема фундаментального характера: оказалось, что интегралы, связанные с некоторыми петлевыми диаграммами, расходятся!

Это относится, в частности, к диаграмме на рис. 5.7, описывающей однопетлевую поправку к рассеянию электрона в статическом внешнем поле, но поправку *другого* типа по сравнению с поправкой на рис. 5.5. Соответствующая амплитуда включает интеграл по импульсам виртуального электрона и позитрона. Этот интеграл ведёт себя при больших импульсах как

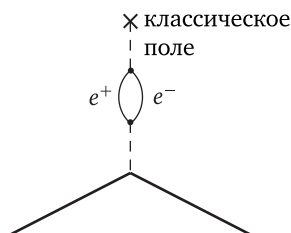


Рис. 5.7. Перенормировка кулоновского потенциала

$$\sim \int_0^\infty \frac{dp^2}{p^2 + m^2} \quad (5.8)$$

и содержит ультрафиолетовую (связанную с большими импульсами) расходимость¹.

Рассмотрим кулоновское поле, рождённое статическим электрическим зарядом e . Сумма вклада древесного графика и расходящегося однопетлевого графика в амплитуду рассеяния электрона даёт

¹ Если вычислять недостаточно аккуратно, в амплитуде выскакивает даже *степенная* ультрафиолетовая расходимость. Потребовалось некоторое время, чтобы понять, что этого на самом деле не происходит.

модифицированный кулоновский потенциал¹:

$$\frac{e_0^2}{4\pi r} \rightarrow \frac{e_0^2}{4\pi r} \left(1 - \frac{e_0^2}{6\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{m} \right) + \text{конечные члены}, \quad (5.9)$$

где Λ — это новый, не виданный нами прежде монстр, называемый *параметром ультрафиолетового обрезания*. Мы попросту интегрируем в формуле (5.8) не по всем импульсам, но с ограничением $p^2 < \Lambda^2$.

Но почему мы должны это делать? И каков физический смысл Λ ? Должен сразу сказать, что сегодня на этот вопрос *нет* ясного и исчерпывающего ответа. Более того, необходимость ввести нефизическое ультрафиолетовое обрезание² делает квантовую электродинамику внутренне противоречивой теорией!

С другой стороны, можно также заметить, что если держать Λ очень большим, но конечным, то петлевая поправка к потенциалу остаётся малой. Чтобы поправка сравнялась по абсолютной величине с основным членом, надо взять

$$\Lambda \sim m e^{3\pi/(2\alpha)} \approx 10^{250} \text{ г} \quad (5.10)$$

— на много порядков больше, чем всё, что можно представить (масса наблюдаемой части Вселенной есть всего $\sim 10^{57}$ г). Таким образом, проблема приобретает чисто академический привкус: не имеет абсолютно никакого смысла рассматривать квантовую электродинамику, или любую другую физическую теорию при столь больших нефизических энергиях.

Вы, возможно, обратили внимание на то, что мы навесили в формуле (5.9) на электрический заряд электрона индекс 0. Этим мы подчеркнули, что e_0 — это «голый» (или затравочный) нефизический и ненаблюдаемый заряд. Наблюдаемый физический заряд

$$e_{\text{физ}}^2 \approx e_0^2 \left(1 - \frac{e_0^2}{6\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{m} + \dots \right) \quad (5.11)$$

меньше затравочного.

Выражение (5.11) можно также назвать *перенормированным* зарядом. Процедура *перенормировки* состоит в том, что все наблюдае-

¹ Мы измеряем заряд в хэвисайдовских единицах

² Ситуация осложняется отрицательным знаком поправки в формуле (5.9); в следующем параграфе мы увидим, что в теориях типа КХД, где эта поправка положительна, оказывается возможным избавиться от Λ — см. формулы (5.17)—(5.19).

мые физические величины выражаются через перенормированный физический заряд и перенормированную физическую массу. В квантовой электродинамике (КЭД) и многих других физических теориях можно доказать (хотя строгое доказательство не такое простое), что все ультрафиолетовые расходимости спрятаны в этих двух величинах. Если перенормировка проведена, расходимости исчезают.

Необходимо здесь предупредить читателя. В старых популярных книгах и учебниках можно встретить утверждение, что перенормировка состоит в *вычитании* некоторых расходящихся констант. Действительно, пионеры — Ричард Фейнман, Джулиан Швингер, Син-Итиро Томонага¹ и Фримен Дайсон — формулировали сущность перенормировки именно так или почти так. Но сегодня мы понимаем, что перенормировка не есть произвольное вычитание расходимостей. *Что* это такое — я попытался объяснить в предыдущем абзаце.

Я хочу написать здесь ещё одну формулу. Оказывается, возможно вычислить не только первую нетривиальную однопетлевую поправку к электрическому заряду, но в некотором приближении также все высшие поправки (двух-, трёх-, четырёх- и более петлевые). В результате получается геометрическая прогрессия. Её сумма есть

$$e_{\text{физ}}^2 \approx \frac{e_0^2}{1 + \frac{e_0^2}{6\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{m}}. \quad (5.12)$$

В отличие от (5.11), это выражение нигде не равно нулю. По мере роста Λ и при фиксированном e_0^2 физический заряд уменьшается. В (академическом) пределе при $\Lambda \rightarrow \infty$ он исчезает совсем. Это явление было открыто Львом Ландау, Алексеем Абрикосовым и Исааком Халатниковым в 1954 г. Иногда его называют *московским нулём*, а иногда — *полюсом Ландау*. Эти два названия отражают две стороны одного и того же явления. Уравнение (5.12) можно переписать как

$$e_0^2 \approx \frac{e_{\text{физ}}^2}{1 - \frac{e_{\text{физ}}^2}{6\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{m}}. \quad (5.13)$$

¹ В 1965 г. эти три учёных были награждены Нобелевской премией «за их фундаментальные труды по квантовой электродинамике, с далеко идущими последствиями для физики элементарных частиц». Для тех читателей, кто хочет узнать больше об истории открытия квантовой электродинамики, я рекомендую очень интересную книгу Швеебера «QED and the Men Who Made It». К сожалению, она не переведена на русский язык.

Если перейти к пределу при $\Lambda \rightarrow \infty$ и держать фиксированным $e_{\text{физ}}^2$, то голый заряд растёт. При некотором Λ он становится бесконечным — функция (5.13) имеет полюс.

Можно проинтерпретировать формулу (5.12), сказав, что голый электрический заряд *заэкранирован*, и проиллюстрировать это картинкой на рис. 5.8. Эта картинка очень похожа на картинку экранировки внешнего заряда в диэлектрике, например в воде. Положительный внешний заряд влияет на ориентацию молекул воды, притягивая ионы кислорода и отталкивая ионы водорода. В нашем случае пространство пусто, но роль водяных молекул играют *виртуальные пары* e^+e^- , присутствующие в вакууме¹.

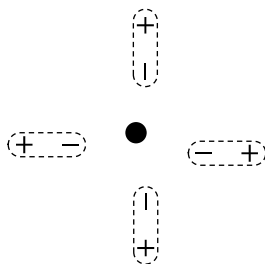


Рис. 5.8. Поляризация вакуума. Кругок в центре означает положительно заряженный заряд-источник. Он окружён облаком виртуальных поляризованных электронно-позитронных пар.

Заряд источника, окружённого облаком виртуальных пар, меньше затравочного. Затравочный заряд экранирован. Но если попасть внутрь этого облака, то мы сможем наблюдать некоторое увеличение эффективного заряда по сравнению с зарядом (5.12) — эффективным зарядом, наблюдаемым с больших расстояний. Если расстояние r до источника много меньше комптоновской длины m^{-1} , то наблюдаемый эффективный заряд получается из (5.12) заменой $\ln(\Lambda/m)$ на $\ln(\Lambda r)$.

5.3. От атомных ядер к глюонным струям

Ещё прежде, чем люди научились вычислять петли в квантовой электродинамике, они попытались применить методы КТП к другим известным взаимодействиям — сильному и слабому. Сильное взаимодействие сильнее. Поговорим вначале о нём.

Первая феноменологическая теория сильных взаимодействий была предложена Хидеки Юкавой в 1935 г. По аналогии с КЭД, где взаимодействие между заряженными частицами происходит при посредстве электромагнитного поля, квантами которого являются фо-

¹ В квантовой теории поля вакуум определяется как основное состояние полевого гамильтониана [см. замечание после формулы (4.44)]. Его волновая функция зависит от всех полевых переменных. В некотором смысле в вакууме, как в Греции, есть *всё*.

тоны, Юкава предположил, что взаимодействие между нуклонами в ядре происходит при посредстве какого-то нового поля. Тем самым он предположил существование новых частиц — квантов этого поля. Юкава назвал их *мезонами*. Между теорией Юкавы и КЭД имелись, однако, различия.

- Мы имеем дело с сильным взаимодействием, а это значит, что константа взаимодействия между мезонами и нуклонами (аналог электрического заряда) должна быть велика.
- Электромагнитное поле $A_\mu(x)$ есть вектор. При этом притягиваются только разноимённые заряды, а одноимённые — отталкиваются. Но в ядре имеются только нуклоны и нет антинуклонов. Тот факт, что нуклоны притягиваются, означает, что кванты поля-посредника имеют чётный спин¹. Простейшая возможность — спин нуль.
- Фотоны безмассовы, и поэтому электромагнитное взаимодействие дальнodayствующее. Но ядерные силы короткодействующие, они действуют только внутри ядра на расстояниях порядка одного ферми. Это означает, что мезон должен быть массивным, его масса μ должна составлять примерно $(1 \text{ Ф})^{-1} \sim 200 \text{ МэВ}$.

Давайте обсудим последний очень важный пункт более подробно. Обсуждение наше будет эвристическим и содержать логические скачки. Те, кто не любят скакать, могут сразу обратиться к главе 8, где связь между короткодействием взаимодействия и массивностью кванта поля-посредника выведена строго и объяснена подробно.

Мы видели, что амплитуда электрон-протонного рассеяния пропорциональна фурье-образу кулоновского потенциала (5.6)². Как было также отмечено, в релятивистском случае фактор q^2 в знаменателе выражения (5.4) переходит в $-q^2 = q^2 - q_0^2$. Заметим теперь, что умножение функции, зависящей от импульса q_μ , на q^2 эквивалентно действию оператора Даламбера на её фурье-образ:

$$(q_0^2 - q^2)f(q) \leftrightarrow -\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\tilde{f}(x) = -\square\tilde{f}(x), \quad (5.14)$$

т. е. действию того же оператора, который действует на электромагнитный вектор-потенциал в уравнениях Максвелла!

Но свободное поле, описывающее бесспиновые мезоны с массой μ , удовлетворяет, как мы знаем, уравнению Клейна—Фока—Гор-

¹ Прошу поверить мне здесь на слово.

² Читателя, уже знакомого с нерелятивистской теорией рассеяния и с борновской формулой (8.20) для амплитуды рассеяния, это не должно было удивить.

дона (4.28). В импульсном представлении оператор $\square + \mu^2$ соответствует умножению на $-q^2 + \mu^2$. По аналогии с КЭД, где релятивистская амплитуда рассеяния есть $\propto e^2/q^2$, естественно предположить, что амплитуда, отвечающая обмену массивной частицей, пропорциональна $g^2/(q^2 - \mu^2)$, что даёт в нерелятивистском пределе

$$-\frac{g^2}{\mu^2 + q^2} \quad (5.15)$$

(здесь g — константа юкавского взаимодействия). Это должно совпадать с фурье-образом потенциала. Соответственно, потенциал получается из выражения (5.15) обратным преобразованием Фурье. Мы получаем *потенциал Юкавы*

$$V_{\text{Юкава}}(r) = -g^2 \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}}}{q^2 + \mu^2} = -\frac{g^2}{4\pi r} e^{-\mu r}, \quad (5.16)$$

который экспоненциально убывает на больших расстояниях.

Дотошный и неленивый читатель может проверить этот математический факт. Не столь дотошные легко поймут, что фурье-образ от выражения (5.15) даёт короткодействующий потенциал, заметив, что: (а) поведение любой функции координат на больших расстояниях r определяется поведением её фурье-образа при малых q ; (б) при малых q амплитуда (5.15) есть просто константа; (в) фурье-образ константы есть дельта-функция $\propto \delta(\mathbf{r})$, которая равна нулю всюду, кроме точки $r = 0$.

В 1947 г. в космических лучах была открыта частица, имеющая те же свойства, что мезон Юкавы. Это был π -мезон с массой около 150 МэВ¹. Казалось, что теория Юкавы блестяще подтверждена. Очень скоро, однако, стало ясно, что, хотя теория Юкавы правильно описывает некоторые черты сильного взаимодействия, она не может претендовать на роль конечной истины.

Прежде всего, вскоре после открытия π -мезонов было открыто много других мезонов и барионов, вначале в космических лучах, а потом и на ускорителях. В теории Юкавы для них не было места.

Далее, следующее из феноменологии большое значение мезон-нуклонной константы связи ($\frac{g^2}{4\pi} \approx 14$, что примерно в 1000 раз боль-

¹Точнее, имеются три такие частицы π^+ , π^0 с тождественными свойствами относительно сильного взаимодействия, но различающиеся электрическими зарядами и имеющие немного разные массы. Ситуация абсолютно такая же, как с протоном и нейтроном.

ше, чем $e^2/(4\pi) \equiv \alpha$) приводит к серьёзным практическим и концептуальным проблемам. Практическая проблема — это отсутствие малого параметра и невозможность пертурбативных расчётов в такой теории. А концептуальная проблема — это наличие полюса Ландау и невозможность избавиться от нефизического параметра ультрафиолетового обрезания: предел $\Lambda \rightarrow \infty$ в этом случае не определён.

Для КЭД эта проблема имела чисто академический интерес, так как, ввиду малости константы, все неприятности отмечены в ней на чрезвычайно далёкое расстояние, на абсолютно нефизический масштаб (5.10). Но в мезон-нуклонной теории, они начинаются прямо с порога.

Теоретики просто не знали, что делать. Многие в то время (мы говорим о 1950-х годах) решили, что *любая* квантовая теория поля — это противоречивая непоследовательная теория и что истинная теория, описывающая свойства элементарных частиц, должна быть основана на других принципах. В частности, люди серьёзно увлекались тогда идеей *бутстрапа* (что фундаментальных частиц и фундаментальных полей нет вообще и что всё зависит от всего остального каким-то самосогласованным образом).

На протяжении около 20 лет — с середины 1950-х по середину 1970-х гг. — физики, оставив надежду понять, какой фундаментальной теорией поля описываются взаимодействия частиц, занимались более практической задачей — навести порядок в быстро растущем зоопарке новых «элементарных» частиц. Если не строгий порядок, основанный на строгой теории, то хотя бы порядок эмпирический и феноменологический. Очень похожую задачу решил столетием раньше Дмитрий Менделеев, наведя порядок в зоопарке химических элементов.

«Таблица Менделеева» адронов была построена в начале 1960-х гг. в результате усилий многих теоретиков, из которых Гелл-Манн внёс, пожалуй, наибольший вклад. Было установлено, что все известные адроны (частицы, участвующие в сильных взаимодействиях) группируются в *мультиплеты* $SU(3)$ — в основном, в октеты и декуплеты. (Есть также малое количество синглетов.)

Позже (в главе 6) мы объясним, что такое $SU(3)$ и что такое её мультиплеты. В переводе на более физический язык предыдущий абзац означает, что многие наблюдаемые свойства адронов можно объяснить, если предположить, что они не есть элементарные бесструктурные объекты, но представляют собой связанные состо-

яния истинно фундаментальных частиц — кварков. Поначалу были известны только три кварка — u, d, s (см. таблицу 2 в главе 3), и это объясняет, почему мы говорим об $SU(3)$, а не об $SU(7)$ и не об $SU(17)$...

Сделаем лингво-терминологическое отступление. Так же как слово *лептон* происходит от греческого $\lambda\epsilon\pi\tau\acute{o}\varsigma$ (лёгкий), *адрон* происходит от $\acute{\alpha}\delta\rho\omicron\varsigma$ (массивный, громоздкий), *барион* — от $\beta\alpha\rho\acute{\upsilon}\varsigma$ (тяжёлый) и *мезон* — от $\mu\acute{\epsilon}\varsigma\omicron\varsigma$ (промежуточный).

Мезоны обычно (не всегда) тяжелее лептонов, но легче барионов. При распаде они дают лептоны и фотоны (например, $\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e$, $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$). Среди конечных продуктов распада нестабильного бариона есть также протон. Например, так называемый Σ^- -гиперон распадается слабым образом на нейтрон, электрон и антинейтрино. А через ~ 17 минут нейтрон, в свою очередь, распадается на протон, ещё один электрон и ещё одно антинейтрино [см. формулу (3.11)].

В модели конститuentных кварков, дающей естественную интерпретацию классификации Гелл-Манна, барионы сделаны из трёх кварков, а мезоны — из кварка и антикварка. Например, π^0 -мезон представляет суперпозицию квантовых состояний $|\bar{u}u\rangle$ (u -кварк в содружестве со своим антиколлегой) и $|\bar{d}d\rangle$. Мезон π^0 распадается в результате аннигиляции $\bar{u}u \rightarrow \gamma\gamma$, $\bar{d}d \rightarrow \gamma\gamma$. Его заряженный партнёр, π^+ -мезон, сделан из кварка u и антикварка $\bar{d}$. Истинный глубинный процесс, ответственный за распад $\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e$, — это переход $u \rightarrow d e^+ \nu_e$ с дальнейшим полным взаимным уничтожением антиколлег d и $\bar{d}$. Другая возможность — что d и $\bar{d}$ сразу не аннигилируют, а дают мезон π^0 . Это приводит к распаду $\pi^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e$.

Имеются также адроны, включающие в свой состав странные кварки. Например, $\Sigma^- = |dds\rangle$. Здесь глубинный процесс, приводящий к распаду, есть $s \rightarrow u e^- \bar{\nu}_e$. Как уже отмечалось, мы имеем здесь дело со слабым взаимодействием, так что время жизни Σ^- и других частиц, содержащих странные кварки или антикварки, сравнительно велико ($\sim 10^{-10}$ с), намного больше, чем, скажем, время жизни частицы $\Delta^{++} = |uuu\rangle$, которая распадается практически мгновенно (за $\sim 10^{-23}$ с) на протон, $p = |uud\rangle$, и $\pi^+ = |u\bar{d}\rangle$.

Это казалось странным для экспериментаторов 1950-х годов, обнаруживших Σ^- и другие подобные долгоживущие адроны. Поэтому они называли такие адроны *странными*. Согласно современному определению и пониманию, странные адроны — это адроны, содержащие странные кварки в своём составе.

Кварки обладают дробным электрическим зарядом. В самом деле, предположив, что кварковый состав протона есть $p = |uud\rangle$, а нейтрона — $n = |udd\rangle$, мы немедленно выводим, что электрические заряды кварков суть $q_u = +2|e|/3$ и $q_d = -|e|/3$. Кварк s имеет тот же заряд, что кварк d , как это следует, например, из сохранения заряда в процессе $s \rightarrow ue^- \bar{\nu}_e$.

Когда Менделеев строил свою таблицу, были известны ещё не все химические элементы. Поэтому он оставил в своей таблице пустые клетки и сделал предсказания: должны существовать новые элементы с такими-то химическими свойствами. Эти клетки были вскоре заполнены новооткрытыми элементами: галлием, скандием и германием. У модели конституентных кварков тоже был свой галлий (или, если угодно, свой Нептун). Роль такого Нептуна сыграл барион Ω^- , сделанный из трёх странных кварков и экспериментально обнаруженный через пару лет после того, как его существование было предсказано Мюрреем Гелл-Манном и Ювалем Нееманом.

Но главным и самым очевидным предсказанием кварковой модели было, конечно, предсказание существования кварков. И это предсказание не подтверждалось. На поиск частиц с дробным электрическим зарядом были затрачены значительные экспериментальные усилия. Их искали на ускорителях, в космических лучах, в метеоритах, в гренландском льду, но поиск этот успехом не увенчался...

Кварковая модель имела также определённую техническую проблему. Возьмём, например, барион Δ^{++} . Согласно конституентной модели, он сделан из трёх кварков u с нулевым угловым моментом и одинаковой ориентацией спинов. Но кварки — фермионы, и принцип запрета Паули запрещает одинаковым частицам находиться в одинаковом квантовом состоянии! Точно так же он запрещает существование всех остальных барионов, включая нуклоны.

С этой неприятностью разобрались, впрочем, достаточно быстро. Предположили, что кварк каждого типа или *аромата*¹ (u , d , и s), существует в природе в трёх *цветовых* разновидностях. Припишем кваркам красный, зелёный и синий «цвета». Тогда Ω^- сделан из трёх *нетождественных* частиц — красного s -кварка, зелёного s -кварка и синего s -кварка. Принцип Паули больше не нарушен!

¹ По-английски — *flavour*. Интересно, что французский эквивалент этого физического термина есть *savcur*, что значит не «аромат», а «вкус».

Интересно, что, если смотреть издалека, красный, зелёный и синий цвет сливаются и мы видим *белый* объект. Когда-то в прошлом тысячелетии я видел в ЦЕРНе игрушку, которая называлась «адрон». Это был диск с тремя цветными кружочками разных цветов, насаженный на шарнирчик. Когда диск раскручивался, цвета смешивались и вы видели белую полосу (см. картинку на обложке).

Учёные предположили, что по каким-то загадочным причинам в природе могут существовать в свободном виде только белые состояния (понятию «белизны», или бесцветности, можно придать точный математический смысл). А цветные кварки в свободном виде существовать не могут, они всегда спрятаны внутри адронов, находятся там в связанном состоянии. Это явление было названо *конфайнментом* («confinement» значит по-английски «пленение»), но удовлетворительного объяснения, почему кварки не могут вылететь на свободу, тогда предложено не было.

В середине 1960-х гг. (и даже существенно позже) многие теоретики находили эту картину пленения кварков настолько странной, что отказывались верить в их существование. Они стояли на точке зрения, близкой к точке зрения Коперника. Коперник ведь говорил только, что астрономические данные можно удобно объяснить гипотетической моделью, как будто Земля вращается вокруг Солнца. Но он никогда не говорил, что Земля *действительно* вокруг него вращается. (Поэтому, кстати, Коперник, в отличие от Галилея, никогда не имел проблем с Церковью.)

Копернианская точка зрения превалировала в физике вплоть до 1969 г., когда на линейном электронном ускорителе в Стэнфорде (английское сокращение — СЛАК) был проведён эксперимент по рассеянию энергичных электронов на нуклонах. Оказалось, что *инклюзивное*¹ сечение рассеяния этого процесса было точно таким же, как сечение упругого рассеяния на точечных заряженных частицах. Этот факт был подмечен Джеймсом Бьёркеном, и явление получило название *бьёркеновского скэйлинга*. Оно означало, что внутри нуклонов есть какие-то очень маленькие (практически точечные) заряженные частицы. Вначале они были названы *партонами*, но очень скоро стало ясно, что все концы с концами великолепно сходятся, если предположить, что партоны имеют квантовые числа кварков.

¹ «Инклюзивное» означает, что экспериментаторов интересовала только судьба рассеянного электрона, а на остальные рассеянные и рождённые частицы они не обращали внимания.

Таким образом, кварки перестали быть просто занимательной математической моделью. Они приобрели статус динамических объектов, которые взаимодействуют и поэтому на самом деле реально существуют (*interago ergo sum* — мог бы каждый из них сказать).

Но вернёмся к теории поля. Правда ли, что все теоретики, испуганные московским нулём, прекратили исследования в этом направлении? Конечно, нет. Это не было больше «генеральным направлением», но наука устроена так, что всегда можно найти людей, стоящих в стороне от толпы и занимающихся непопулярными вещами. Иногда они оказываются правы.

Интересно, что теория поля, на основе которой была в конечном итоге построена Стандартная модель, была сформулирована Чжэньнином Янгом и Робертом Миллсом ещё в 1954 г. Не пришлось ещё время описывать эту теорию в деталях, но по сути эта теория есть некое обобщение квантовой электродинамики. Она включает несколько разных взаимодействующих между собой векторных частиц — аналогов фотонов. То, что эти новые «фотоны», в отличие от обыкновенного фотона, взаимодействуют, означает, что они не нейтральны, а в некотором смысле заряжены. Янг и Миллс попытались отождествить эти «заряженные фотоны» с ρ -мезонами¹. Эта попытка не удалась. В результате в течение последующих 10—15 лет теория Янга—Миллса не рассматривалась как реалистическая физическая теория.

Но модель эта была такой красивой и интересной, что многие теоретики продолжали в неё играть. Оказалось, что эту теорию не так просто проквантовать. Наивный способ квантования вёл к бессмысленным результатам, включая нарушение унитарности. В начале 1960-х гг. Фейнман попытался решить задачу квантования в этой теории (теория Янга—Миллса интересовала его как модель для гравитации — нелинейные взаимодействия заряженных фотонов похожи в некотором смысле на нелинейные взаимодействия гравитонов). Полностью Фейнман эту задачу не решил, но он сделал ряд интересных наблюдений и догадок, которые помогли Людвигу Фаддееву и Виктору Попову разработать свой метод духов в 1967 г. Включение духов сделало теорию возмущений самосогласованной, и ста-

¹ Имеются три ρ -мезона, $\rho^{\pm}$ и ρ^0 . Это векторные частицы (они несут спин 1). Но, в отличие от фотона, это не элементарные частицы, а адроны, участвующие в сильных взаимодействиях и сделанные, как мы это сегодня знаем, из кварков.

ло в принципе возможно вычислять амплитуды рассеяния и другие величины в любом порядке по константе связи.

Гипотеза, что полевая теория, описывающая физику сильных взаимодействий, есть вариант теории Янга—Миллса, была сформулирована в 1973 г., в трёх независимых статьях Джозефом Пати и Абдусом Саламом; Харальдом Фритчем, Мюрреем Гелл-Манном и Хайнрихом Лютвиллером; Стивеном Вайнбергом. Они предположили, что цветные кварки взаимодействуют путём обмена цветными глюонами (в частности, эти «частицы клея» склеивают кварки в адронах) и глюоны эти представляют не что иное, как «заряженные фотоны» Янга и Миллса. Единственная разница в том, что у Янга и Миллса было три таких «фотона», в то время как глюоны существуют в восьми цветных разновидностях. На языке теории групп (а теория групп необходима, чтобы действительно понять смысл теории Янга—Миллса; мы отсылаем читателя за детальными разъяснениями к главе 6 и главе 11), это означает, что глюоны принадлежат к присоединённому представлению группы $SU(3)$, соответствующей трём цветам кварков. А кварки принадлежат к фундаментальному представлению той же группы.

Но настоящий прорыв произошёл в 1974 г., когда Давид Гросс, Франк Вильчек и Давид Полицер вычислили в этой теории перенормировку заряда и открыли явление *асимптотической свободы*. Оказалось, что в теории Янга—Миллса заряд не экранируется на больших расстояниях, но имеет место *антиэкранировка* — заряд растёт с расстоянием! Но это значит, что, когда характерные расстояния, напротив, уменьшаются, а характерная энергия растёт, эффективный заряд падает. При достаточно больших энергиях константа связи становится малой. В главном порядке взаимодействием можно попросту пренебречь — если стукнуть по кварку достаточно сильно, он ведёт себя как почти свободная частица. И это объясняет упоминавшийся выше бьёркеновский скэйлинг. В пределе при $E \rightarrow \infty$ константа зануляется; при асимптотически больших энергиях кварки становятся абсолютно свободны.

История этого открытия драматична. Первое правильное вычисление перенормировки константы связи в чистой теории Янга—Миллса было сделано в 1969 г. Иосифом Хриповичем. Однако Хрипович не осознал важности этого результата и не думал о применении теории Янга—Миллса к физике сильных взаимодействий. Была даже более ранняя статья Михаила Терентьева и Владимира Вая-

шина, опубликованная в 1965 г. Они получили указания, что в этой теории заряд падает по мере роста энергии, но их вычисление было не вполне точным — они не учли вклад ещё не известных в то время духов. Они понимали, что квантовая теория Янга-Миллса в том виде, как она была известна в то время, не самосогласована (нарушает унитарность), и приписали необычное поведение константы связи этому обстоятельству. Наконец, вполне правильное вычисление с духами было сделано Герардом 'т Хоофтом за год до Гросса, Вильчека и Полицера, но он, как и Хрипович, не осознал чрезвычайной важности этого результата и потому не опубликовал его.

Интересующемуся читателю, который знает английский и имеет доступ к Интернету, я рекомендую посмотреть очень хорошую обзорную статью 'т Хоофта¹, посвящённую истории создания *квантовой хромодинамики*. [Так (сокращённо — КХД) называется современная теория сильных взаимодействий. «Хромодинамика» означает динамика цвета.]

Так или иначе, к концу 1974 г. туман развеялся и картина прояснилась. С учётом асимптотической свободы получилась теория, которая

- Объяснила результаты эксперимента СЛАК.
- Объяснила, почему сильное взаимодействие сильно. Если константа взаимодействия падает на малых расстояниях, то она, соответственно, растёт на больших. На расстояниях порядка ферми, существенных для ядерной и низкоэнергетической адронной физики, её значение порядка единицы. Это ещё не объясняет полностью конфайнмент (мы не можем его строго доказать и сегодня), но делает его вполне правдоподобным. Коль скоро взаимодействие становится сильным на больших расстояниях, кто знает, как оно там себя ведёт? Если теория возмущений больше не применима, неудивительно, что спектр физических асимптотических состояний не похож на пертурбативный спектр, определяемый набором фундаментальных полей, в терминах которых формулируется теория. В частности, неудивительно отсутствие цветных состояний в физическом спектре.
- Сделала теорию самосогласованной. Мы видели, что квантовая электродинамика таковой не является ввиду полюса Ландау. Но

¹ Наберите в гугле hep-th/9808154 — это номер препринта 'т Хоофта в базе данных СЛАК. Но неважно, что это за номер, просто наберите его. Гугл разберётся!

в квантовой хромодинамике никаких концептуальных проблем нет вообще. В самом деле, вместо соотношения (5.13) мы теперь имеем

$$g_0^2 \approx \frac{g^2(\mu^2)}{1 + b \frac{g^2(\mu^2)}{8\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{\mu}}, \quad (5.17)$$

где численный коэффициент b зависит от числа кварковых ароматов, $b = 11 - \frac{2}{3}N_f$, и $g^2(\mu)$ — эффективный заряд для процессов с характерным энергетическим масштабом μ . В этой формуле нужно выбрать достаточно большое μ^2 — так, чтобы эффективный заряд на этом масштабе энергий был уже достаточно мал и теория возмущения была применимой. Мы видим, что по мере роста параметра ультрафиолетового обрезания Λ «голый заряд» g_0^2 уменьшается. Никакого полюса нет. Нет и проблемы, с ним связанной.

Для точности следует здесь оговорить, что полюс мог бы появиться и в этой теории, если бы число кварковых ароматов было достаточно велико, $N_f > 15$. Но из таблицы 2 в главе 3 видно, что в природе есть только шесть сортов кварков. Коэффициент b при этом положителен и теория асимптотически свободна.

Уравнение (5.17) можно переписать как

$$g_0^2 = \frac{8\pi^2}{b \ln \frac{\Lambda}{\Lambda_{\text{КХД}}}}, \quad (5.18)$$

где введён параметр

$$\Lambda_{\text{КХД}} = \Lambda \exp\left\{-\frac{8\pi^2}{bg_0^2}\right\}. \quad (5.19)$$

Не надо путать $\Lambda_{\text{КХД}}$ с нефизическим параметром ультрафиолетового обрезания Λ . Параметр $\Lambda_{\text{КХД}}$ вполне физичен. Он определяет масштаб, где эффективный заряд становится большим. Этот масштаб оценивается как $\Lambda_{\text{КХД}} \approx 200 \text{ МэВ}$ ¹.

Взглянув на формулу (5.19), легко понять, что мы можем теперь совсем избавиться от обрезания Λ , устремив его к бесконечности, одновременно устремляя голый заряд g_0 к нулю, так что комбинация $\Lambda_{\text{КХД}}$ остаётся конечной и фиксированной. Это замечательное обстоятельство называется *размерной трансмутацией*.

¹ Не следует, однако, забывать, что формулы типа (5.17), (5.19) приближены. Прделав аккуратные двух- и трёхпетлевые вычисления, можно вывести уточнённые формулы. И эти уточнения влияют, конечно, на определение $\Lambda_{\text{КХД}}$ и её величину.

В своей исходной формулировке теория не содержала размерных параметров. (Это верно для теории, в которой кварки безмассовы; на самом деле это не так, но для данного обсуждения массы кварков не важны.) Константа связи, аналог электрического заряда, была безразмерна. Но после вычисления петель заряд начинает зависеть от энергии. $\Lambda_{\text{КХД}}$ определяет масштаб, на котором заряд становится большим, и именно этот масштаб является истинной фундаментальной константой КХД!

Вспомним обсуждение в главе 3. Мы там сказали, что фундаментальная константа сильного взаимодействия — это масса протона. Теперь мы понимаем этот вопрос немного лучше. Более правильно назвать фундаментальной константой не m_p , а $\Lambda_{\text{КХД}}$. Но эти две величины имеют тот же порядок [см. также обсуждение в § 11.6 и формулу (11.57)], и для грубых оценок, которые мы проделали в третьей главе, эта разница не существенна.

После того как мы исключили из рассмотрения ультрафиолетовое обрезание Λ и затравочный заряд g_0^2 , единственным физически значимым вопросом остаётся зависимость эффективной силы взаимодействия от энергии. В однопетлевом приближении легко получить формулу

$$\alpha_s(\mu) = \frac{g^2(\mu)}{4\pi} = \frac{2\pi}{b \ln \frac{\mu}{\Lambda_{\text{КХД}}}}. \quad (5.20)$$

Как отмечалось выше, $\alpha_s(\mu)$ (сильный аналог постоянной тонкой структуры α) уменьшается с ростом μ , что позволяет проводить при высоких энергиях пертурбативные вычисления и сравнивать их с экспериментом. За 40 с лишним лет, прошедших с 1974 г., было проведено множество таких экспериментальных тестов КХД, и сейчас нет ни малейших сомнений, что КХД — правильная теория.

Быть может, наиболее ярким подтверждением этого служат адронные струи. Рассмотрим процесс e^+e^- -аннигиляции с рождением в конечном состоянии большого числа адронов. Если энергии сталкивающихся электрона и позитрона велики, процесс идёт в два этапа. На первом этапе рождаются фундаментальные частицы, кварки и глюоны. Аннигиляция может идти по каналу $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$, или $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$, или $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}q\bar{q}$ и т.д. Сечения всех этих процессов можно сосчитать в рамках теории возмущений КХД.

Но так как кварки и глюоны в свободном состоянии не существуют, в конечном состоянии можно наблюдать только адроны. Та-

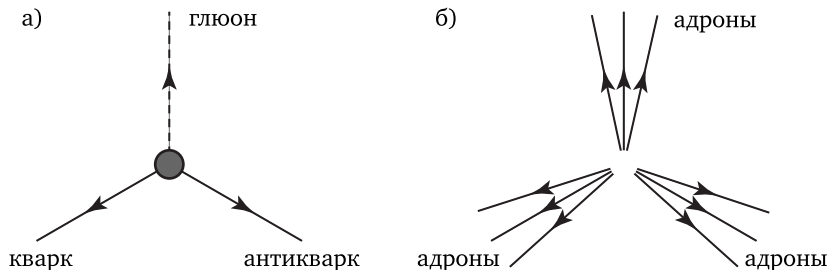


Рис. 5.9. Рождение трёх струй в e^+e^- -аннигиляции: а) кварково-глюонная стадия, б) адронная стадия

ким образом, на втором этапе каждый энергичный кварк или глюон рождает *струю* адронов, летящую примерно в том же направлении, что и её цветной родитель.

Такие струйные процессы наблюдались экспериментально. Наиболее часто рождаются всего две струи¹.

Глубинный процесс КХД есть в этом случае $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$. Трёхструйный процесс, изображённый на рис. 5.9 и отвечающий процессу КХД $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$, менее вероятен, потому что сечение содержит в этом случае лишний малый (при больших энергиях) фактор (5.20). События, в которых рождаются четыре струи (что отвечает процессам $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}gg$ и $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}q\bar{q}$), ещё менее вероятны и т. д.

Экспериментаторы могут измерять сечения рождения струй — вероятности рождения определённого числа струй с определёнными энергиями (энергия струи есть сумма энергий составляющих её адронов) и летящих в определённых направлениях. Имеется количественное согласие между этими измеренными сечениями и теоретическими предсказаниями КХД для дифференциальных сечений соответствующих фундаментальных процессов. Например, теоретический результат для сечения процесса $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ даётся тем же выражением (5.7), что для рождения мюонной пары, умноженным на дополнительный фактор $N_c Z_q^2$ (где $Z_q = 2/3$ или $Z_q = -1/3$ есть электрический заряд кварка, а $N_c = 3$ — число кварковых цветов). Чтобы получить предсказание для сечения процесса $e^+e^- \rightarrow 2$ струи, нужно

¹ Первые наблюдения двухструйных процессов были сделаны в 1975 г. на линейном электронно-позитронном коллайдере в Стэнфорде, когда полная энергия сталкивающихся частиц в системе центра масс достигла величины $E \sim 3$ ГэВ (при меньших энергиях струй нет — угловое распределение разлетающихся адронов изотропно).

просуммировать по всем кварковым ароматам, массы которых достаточно малы, чтобы рождение кварковой пары было кинематически возможно. И предсказание это совпадает с тем, что измеряется экспериментально, включая нетривиальное угловое распределение $\sim 1 + \cos^2 \theta$ по углу θ между осью струи и осью электронного и позитронного пучка.

5.4. От β -распада к бозону Хиггса

Отступим теперь на столетие назад, в 1914 год, когда Джеймс Чедвик поставил эксперимент по измерению энергии вылетающих электронов в различных β -распадах. Он ожидал увидеть спектральные линии — определённый дискретный набор энергий вылетающих электронов. И он был очень удивлён, когда никаких таких чётких линий не обнаружил. Спектр (распределение по энергиям) был непрерывным и гладким — электрон мог иметь любую энергию в определённом интервале. Это было очень и очень странно. Фактически это означало, что энергия в этих распадах не сохранялась. Нильс Бор даже попытался в работе 1924 г. объяснить это несохранение с помощью квантовой ворожбы — он предположил, что энергия сохраняется только статистически.

Но у Паули было другое мнение. В 1930 г.¹ он предположил, что наблюдаемое несохранение вызвано рождением дополнительной лёгкой нейтральной частицы. Паули назвал её «нейтроном», но позднее Ферми переименовал её в *нейтрино* («маленький нейтрон»), чтобы не спутать с частицей, открытой Чедвиком в 1932 г., — настоящим «большим» нейтроном. Паули предположил также, что нейтрино взаимодействуют с веществом очень слабо и что именно по этой причине их не видят экспериментаторы.

Количественная теория β -распада была построена Ферми в 1934 г. На современном языке вычисление Ферми сводилось к вычислению амплитуды распада по диаграмме, изображённой на рис. 5.10. Мы выпишем соответствующее аналитическое выражение для амплитуды позднее, в главе 12. Если пытаться описать эту формулу словами, Ферми построил из полей электрона и нейтрино некую векторную

¹К этому времени квантовая механика была уже построена и хорошо понята. Стало ясно, что энергия может не сохраняться только в течение очень короткого временного интервала $\tau \sim \hbar/(\Delta E)$ и что этот эффект абсолютно несуществен при измерении энергии долгоживущих асимптотических состояний.

комбинацию — выражение, которое несёт векторный индекс и те же симметричные свойства, что электромагнитное поле $A_\mu(x)$. Ферми далее предположил, что e^- и $\bar{\nu}_e$ взаимодействуют с нуклонами не непосредственно, а через эту комбинацию, которая заменяет $A_\mu(x)$ в выражении (5.3).

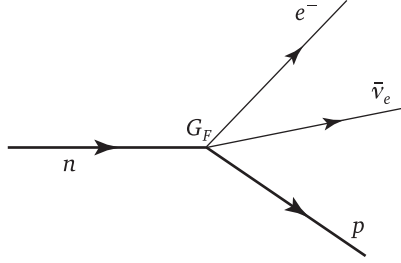


Рис. 5.10. 4-фермионное взаимодействие Ферми

Ферми вычислил спектр испускаемых электронов и увидел прекрасное согласие с экспериментальными данными, которые к тому времени уже были довольно точны. Вероятность распада пропорциональна квадрату амплитуды и, значит, квадрату константы взаимодействия G_F . Последняя в этом случае несёт ту же размерность $\sim m^{-2}$, что и ньютоновская гравитационная константа (2.6). Константа Ферми, однако, намного больше:

$$G_F \approx 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ ГэВ}^{-2}. \quad (5.21)$$

Та же диаграмма описывает кросс-каналы, процессы рассеяния $\nu_e n \rightarrow e^- p$ и $\bar{\nu}_e p \rightarrow e^+ n$ [см. уравнение (3.14)]. Для первого процесса достаточно заменить на рис. 5.10 выходящую антинейтринную линию на входящую нейтринную. Для рассеяния $\bar{\nu}_e p \rightarrow e^+ n$ надо заменить конечный электрон на начальный позитрон и поменять потом местами начальное и конечное состояния.

Для энергий нейтрино, меньших, чем масса нуклона, полное сечение рассеяния оценивается как

$$\sigma_{\nu N}^{\text{tot}} \sim G_F^2 E_\nu^2. \quad (5.22)$$

Паули был прав, сечение очень мало. При $E_\nu \sim 1$ МэВ (характерная энергия нейтрино, рождённых в β -распадах, в ядерных реакторах и в недрах Солнца) длина свободного пробега нейтрино в свинце составляет около ста световых лет. Неудивительно, что нейтрино не видели в первых экспериментах.

Рассеяние нейтрино впервые удалось наблюдать только в 1956 г. Клайду Ковану и Фредерику Рейнсу. Размер их установки был немного меньше ста световых лет, но источником нейтрино служил ядерный реактор и поток нейтрино был очень велик, $\sim 5 \cdot 10^{13}$ нейтрино в секунду. При этом скорость счета на установке Кована и Рейнса составляла примерно три акта рассеяния нейтрино в час.

В 1956 г. физики уже знали, что теория Ферми не вполне точна, поскольку она не описывала явление *несохранения чётности*, открытое в середине 1950-х гг.

В физике понятие чётности имеет совсем другой смысл, чем в теории чисел. Это некоторое свойство квантового состояния (физики говорят — *квантовое число*), говорящее о том, как ведёт себя волновая функция при отражении в зеркале — остаётся ли она прежней (тогда говорят, что чётность положительна) или меняет знак (чётность тогда отрицательна). В мире, где законы физики инвариантны относительно зеркального отражения, симметричное состояние всегда остаётся симметричным; чётность сохраняется. А несохранение чётности означает, что такой инвариантности нет.

Легко привести пример *предмета*, который меняется при отражении. Соня, героиня нашей четвёртой главы, подумает, вероятно, здесь о своих тонких лайковых перчатках, но лично мне первым в голову приходит штопор. У него спиральный профиль. А левозакрученная спираль при отражении меняется, становится правозакрученной. Поэтому предметы, меняющие вид при зеркальном отражении, часто называют спиральными, а само свойство неинвариантности относительно отражения — *спиральностью*. Для микрочастиц спиральность определяется как проекция спина частицы, её собственного углового момента, на направление её движения:

$$h = \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}. \quad (5.23)$$

Как было показано во многих экспериментах, нейтрино представляют собой почти идеальную левую спираль, направление их спина почти точно противоположно направлению их импульса, $h_\nu \approx -1/2$. Электроны, рождённые в β -распадах, тоже обычно (хотя и не всегда) несут отрицательную спиральность. Что же касается антинейтрино — почти все они правоспиральные.

Определённая спиральность штопоров связана с определённой спиральностью использующих их людей. В самом деле, большинство из нас правши, и нам удобнее поворачивать штопор правой

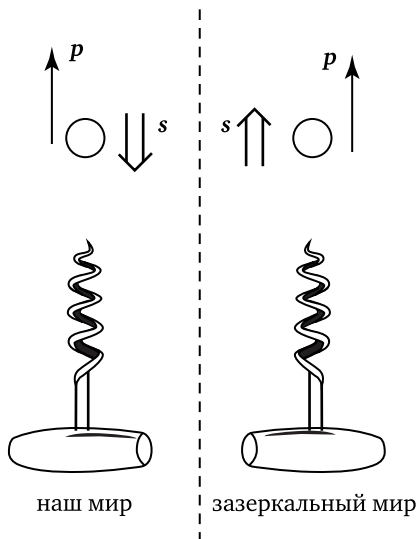


Рис. 5.11. Штопор, нейтрино и зеркало

рукой по часовой стрелке. Мы спиральны также на более глубоком, молекулярном уровне: молекулы сахаров, белков и ДНК могут в принципе существовать в двух зеркальных формах. Но только одна из этих форм присутствует в живых организмах. Вероятно, эта наша асимметрия — дело случая. Наши сахара и ДНК могут происходить от первой молекулы сахара, случайно возникшей в архейском праяконе. Легко можно представить себе мир, где сахара левоспиральные, а люди в основном левши. Они могут быть при этом лево- либо правосердечными.

Но в случае нейтрино ситуация другая. В недрах Солнца и других звёзд рождаются именно нейтрино, а не антинейтрино. И их спиральность всегда отрицательна, а не положительна, т. е. весь наш мир принципиально спирален на первичном, фундаментальном уровне!

Может возникнуть естественный вопрос: даёт ли зеркальное отражение нейтрино в точности правое антинейтрино? Иначе говоря, инвариантен ли всё же наш мир относительно комбинации двух преобразований: (а) пространственного отражения в зеркале и (б) зарядового отражения, когда все частицы заменяются на свои античастицы?

В этом состояла гипотеза комбинированной чётности (или CP -симметрии), выдвинутая Ландау. Она *почти* правильна. Несохране-

ние комбинированной чётности — это весьма тонкий эффект, связанный с наличием трёх кварковых и лептонных поколений. Мы не будем это здесь обсуждать.

Сейчас мне хотелось бы сделать отступление и задать читателю и самому себе провокационный вопрос. Сильные и электромагнитные взаимодействия симметричны относительно отражений, только слабые взаимодействия не обладают этим свойством. Асимметрия, следовательно, очень слаба и не влияет на нашу повседневную жизнь. Что же в ней в таком случае интересного и зачем её вообще изучать?

На подобный вопрос есть, конечно, стандартный (и вполне справедливый) ответ. Не всё, чем занимаются люди, имеет рациональную причину. Зачем люди играют и слушают музыку? Зачем они молятся Богу? Зачем они пытались доказать и в конце концов доказали теорему Ферма и гипотезу Пуанкаре? Дерзания духа многолики и безграничны. Человечество должно гордиться духовными достижениями своих лучших сынов и не искать во всем низкую материальную подоплёку. Согласимся с этим.

Надо, однако, заметить, что эта общая мудрость не полностью применима к конкретной проблеме, которую мы сейчас обсуждаем. Эффект несохранения чётности нашёл применение в сфере вполне материальных технологических нужд. Я говорю о методе μSR ¹.

Возьмём ускоритель протонов. Не обязательно большой ускоритель, не Большой адронный коллайдер в ЦЕРНе, а обычный маленький ускоритель, где протоны разгоняются до энергии порядка ~ 1 ГэВ. При такой энергии протон-ядерные соударения уже неупруги и рождается множество дополнительных частиц, в основном это π -мезоны. Заряженные π -мезоны слабо распадаются на мюоны и нейтрино — это основной канал их распада.

Мюоны, рождённые в этих распадах, поляризованы: μ^- имеют отрицательную, а μ^+ — положительную среднюю спиральность. Время жизни мюона, $\tau \approx 2,2 \cdot 10^{-6}$ с, по ядерным стандартам очень велико. У мюона с энергией в несколько сот МэВ, влетающего в вещество мишени, есть масса времени, чтобы в нём затормозиться и остановиться. При этом он сохраняет свою поляризацию.

Начиная с этого момента жизненные пути отрицательных и положительных мюонов расходятся. Отрицательные мюоны, тяжёлые братья электронов, захватываются ядрами. Испустив несколько фо-

¹Принятое сокращение от английского *muon spin rotation*.

тонов, они занимают в итоге основное состояние в водородоподобном атоме μ^-A . Они вступают в тесную связь с приютившим их ядром (размер их орбиты в 200 раз меньше боровского радиуса) и теряют интерес к тому, что происходит вокруг.

У положительных мюонов другая, более насыщенная событиями судьба. Они ведут себя в веществе примерно как протоны — они могут просто слоняться между атомами, могут образовывать с ними непрочные химические связи, или они могут захватить электрон, образуя *мюоний* — водородоподобный атом, где мюон играет роль протона. На положительные мюоны действуют микроскопические электрические и магнитные поля, причём магнитные поля вращают поляризацию мюонов. В конце концов μ^+ распадается на позитрон и пару нейтрино [ср. формулу (3.13)]. Его ненулевая поляризация вместе с несохранением чётности в этом распаде приводит к угловой асимметрии — большинство позитронов летит вдоль направления спина распадающегося мюона.

Изучая угловые распределения позитронов, рождённых в распадах положительных мюонов, инжектированных в вещество, можно извлечь информацию об их поляризации и, следовательно, о микроскопических магнитных полях, которые действовали на мюон от момента его торможения и остановки до момента распада. Это явление даёт нам инструмент для изучения микроскопической структуры вещества и позволяет получать информацию о структуре ферромагнетиков, сверхпроводников и т. д. Мой отец Вольдемар Смильга был одним из первых, кто полвека назад осознал эффективность этого метода и выполнил первые теоретические расчёты.

Вернёмся теперь к основной теме нашей книги — «дерзаниям человеческого духа» в фундаментальной физике. Конкретно, перейдём к вопросу о том, как следует модифицировать теорию Ферми, чтобы включить в неё эффект несохранения чётности. Как было сказано раньше, в своём исходном варианте теория Ферми включала некоторую векторную комбинацию электронного и нейтринного полей. Физики называют эту комбинацию *слабым заряженным векторным током*. Но можно также построить комбинацию, которая представляет собой не обычный полярный, а аксиальный вектор¹.

¹ Аксиальные векторы отличаются от обычных тем, что при отражении они умножаются дополнительно на -1 . Простейший пример аксиального вектора — угловой момент (см. рис. 5.11).

В 1957 г. в двух независимых статьях — в статье Роберта Маршака и Джорджа Сударшана и в статье Фейнмана и Гелл-Манна — было показано, что чисто векторный ток V_μ должен быть в теории Ферми заменён на комбинацию $V_\mu - A_\mu$ — разность векторного тока и аксиального. И это касается не только лептонного, но также адронного тока, сделанного из протонного и нейтронного поля (как мы сейчас понимаем, здесь следует говорить скорее о кварковых полях).

В отличие от исходной теории Ферми, модифицированная теория $V - A$ объясняла обсуждавшиеся выше поляризации и угловые асимметрии, в то время как предсказания для энергетического спектра испускаемых электронов не сильно отличались от предсказаний Ферми.

Следует теперь, однако, сказать, что как исходная теория Ферми, так и модифицированная страдали от серьёзного недостатка — эти теории не были перенормируемы. Неперенормируемость означает, что в петлевых поправках к амплитудам присутствуют неконтролируемые *степенные* ультрафиолетовые расходимости. Например, однопетлевая диаграмма на рис. 5.12 включает по сравнению с диаграммой на рис. 5.10 дополнительный безразмерный фактор $\sim G_F \Lambda^2$. Двухпетлевые графики дают квартичную степенную ультрафиолетовую расходимость $\sim G_F^2 \Lambda^4$ и т. д. Со степенными расходимостями нельзя провести описанную выше для КЭД и КХД программу перенормировки, и поправки высших порядков теории возмущений не поддаются вычислению¹.

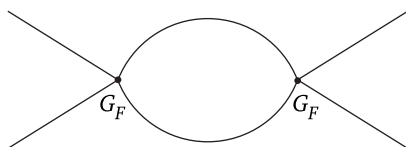


Рис. 5.12. Расходящийся однопетлевой график в теории Ферми

Связанная проблема — это проблема быстрого степенного роста сечений с энергией, как в уравнении (5.22). Пока энергия не очень велика, это не страшно. Но степенной рост не может продолжаться вечно, вплоть до энергий, превосходящих масштаб

$$E \sim G_F^{-1/2}. \quad (5.24)$$

¹ Этот вопрос будет подробно обсуждаться в п. 16.1.2 с связи с попытками пертурбативных вычислений в гравитации.

Такой рост противоречил бы *унитарности* — фундаментальному свойству всех разумных теорий, состоящей в том, что полная вероятность всех возможных исходов в процессе рассеяния равна единице. Можно, конечно, сказать, что древесное приближение, в рамках которого получается зависимость (5.22), перестаёт быть применимым на масштабе (5.24), но, так как поправки невычислимы, это замечание не помогает выйти из тупика, в котором мы оказались.

Выход был предложен следующий. Предположим, что теория Ферми — это *эффективная*, а не фундаментальная теория и что истинная фундаментальная теория слабых взаимодействий включает взаимодействие лептонного и кваркового токов с некоторым заряженным бозонным полем W_μ . Это взаимодействие того же типа, что в КЭД и в КХД, но с той существенной разницей, что частица W_μ (её назвали «промежуточным бозоном») массивна.

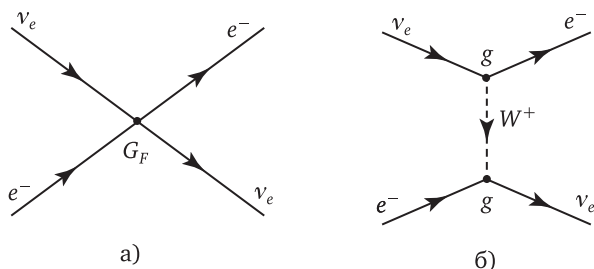


Рис. 5.13. Рассеяние νe : а) в теории Ферми; б) с обменом W

Рассмотрим процесс упругого рассеяния $\nu_e e^- \rightarrow \nu_e e^-$ и сравним две диаграммы на рис. 5.13. Левый график, график теории Ферми, даёт релятивистскую амплитуду $M \sim G_F E^2$, где E есть энергия рассеянных частиц в системе центра масс. А на правой диаграмме вершина рассеяния расщепилась на две. Каждая из двух новых вершин даёт безразмерный фактор g той же природы, что электронный заряд.

На графике также присутствует линия виртуального W -бозона. Она называется *пропагатором* — это понятие будет объяснено в главах 8 и 10. Пока мы просто отметим, что график на рис. 5.13 б напоминает график на рис. 5.2, но роль безмассового фотона играет теперь массивный W -бозон. Как уже отмечалось [см. формулу (5.15)], такой график с обменом массивной частицей содержит фактор

$$\frac{g^2}{m_W^2 - q^2}$$

(q^μ — переданный четырёхмерный импульс). Мы видим, что при малых q^2 этот фактор есть некоторая константа. Естественно отождествить эту константу с G_F :

$$\frac{g^2}{m_W^2} \rightarrow G_F. \quad (5.25)$$

Иными словами, при малых энергиях амплитуда, описываемая графиком на рис. 5.13 б, неотличима от амплитуды теории Ферми, даваемой графиком на рис. 5.13 а. Таким образом, теория Ферми с её размерной константой может быть (и мы знаем сегодня, что это так и есть) эффективным низкоэнергетическим приближением к совершенно другой теории, включающей безразмерную константу g и дополнительные степени свободы, связанные с полем W .

В нашей книге мы уже встречались с эффективными теориями. Например, когда мы гуляли вместе с Соней по музею теоретической физики и зашли в зал нерелятивистских полевых теорий, мы заметили, что эти теории по сути своей эффективны. Они описывают поведение вещества на расстояниях, много больших, чем расстояния между атомами.

Настало время обсудить понятие эффективной теории более детально. Надо сказать, что это одно из основных понятий в физике. Прежде чем приступить к решению какой угодно физической проблемы, необходимо построить теоретическую модель явления, которое мы изучаем. А для этого мы должны определить, какие переменные и параметры для нас существенны, а какими можно пренебречь. Например, в небесной механике мы пренебрегаем конечными размерами Солнца и планет и рассматриваем их как точечные объекты. Когда мы рассчитываем траекторию камня, брошенного рукой под углом к горизонту, мы тоже рассматриваем его как точечную массу и пренебрегаем сопротивлением воздуха (а для пушечного ядра сопротивлением воздуха пренебрегать уже нельзя) и т. д.

В квантовой механике первая задача, где встретился низкоэнергетический эффективный гамильтониан, была решена Максом Борном и Юлиусом Оппенгеймером. Они изучали молекулу водорода. Это система из четырёх частиц. Найти спектр такой системы — сложная задача. Борн и Оппенгеймер заметили, однако, что если нас интересует только низкоэнергетическая динамика системы, то задача сильно упрощается. Зафиксируем вначале положения тяжёлых протонов (прибьём их мысленно гвоздями к некоторым точ-

кам в пространстве). Решим потом уравнение Шрёдингера для двух электронов, двигающихся в поле статических протонов¹. Энергия связи в такой задаче будет зависеть от расстояния R между протонами. Полученную функцию $E(R)$ можно переобозначить $V(R)$ и называть *эффективным потенциалом*. Добавив кинетические энергии протонов, мы получим эффективный гамильтониан Борна—Оппенгеймера:

$$H_{\text{эфф}} = \frac{\mathbf{P}^2}{m_p} + V(R), \quad (5.26)$$

где $\mathbf{P}$ — импульс протонов в системе центра масс. В исходной задаче были электронные степени свободы, но в гамильтониане Борна—Оппенгеймера они бесследно исчезли. Если говорить на слэнге теоретиков, электроны *проинтегрированы*.

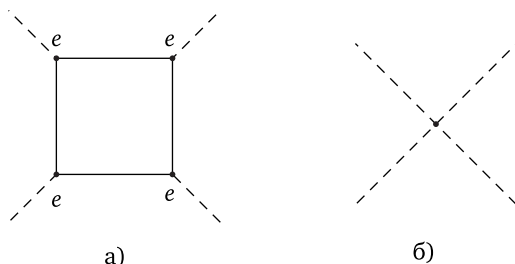


Рис. 5.14. Фотон-фотонное рассеяние: а) диаграмма КЭД; б) эффективная вершина

Рассмотрим ещё один, на этот раз теоретико-полевой пример. Одно из предсказаний квантовой электродинамики — это ненулевая амплитуда *фотон-фотонного рассеяния*. Она описывается «ящичной диаграммой», изображённой на рис. 5.14 а. Оказывается, в случае, когда частота фотонов намного меньше электронной массы (и, значит, длина волны намного больше комптоновской длины волны электрона), можно проинтегрировать по электронным степеням свободы и описать рассеяние, введя эффективную 4-фотонную вершину, как на рис. 5.14 б. Структуру этой вершины можно определить теоретически, это сделали Вернер Гейзенберг и Ганс Эйлер в 1936 г. Амплитуда такого рассеяния очень мала, и экспериментально оно пока не обнаружено.

¹Хоть эта задача и не решается точно, она значительно проще исходной, и её можно решить приближёнными методами.

Так вот: так же, как в эффективной вершине рассеяния медленных фотонов на рис. 5.14 б не видны электроны, в эффективной вершине рассеяния медленных фермионов в теории Ферми не видны W -бозоны. Они проинтегрированы!

Так как константа связи g в новой теории с W -бозонами безразмерна, можно надеяться, что эта теория перенормируема. Другое указание на то, что новая теория лучше старой, — это модификация энергетической зависимости сечений. Сечение рассеяния $\nu_e e$, рассчитанное по диаграмме на рис. 5.13 б, вначале растёт, как в формуле (5.22), но на масштабе $E \sim m_W$ [который для малого g (мы это предполагаем) ещё намного меньше унитарного предела (5.24), как это следует из соотношения (5.25)] оно перестаёт расти и выполаживается.

К сожалению, жизнь сложнее, чем нам иногда этого бы хотелось. Теории с безмассовыми векторными полями, также как КЭД и КХД, действительно перенормируемы. Но нет простого способа дать этим полям массу, сохранив при этом перенормируемость. Глубинная математическая причина этой трудности состоит в том, что если дать векторным полям массу непосредственным наивным образом, то это разрушит замечательную симметрию, которая есть у теории с безмассовыми полями, — калибровочную инвариантность¹.

Я сказал, что нет *простого* способа сделать W -бозон массивным. Но есть способ «непростой». Основная идея состоит в том, что масса должна возникать как бы сама, *генерироваться* специально выбранным взаимодействием, уважающим калибровочную инвариантность. И можно здесь вспомнить, что динамическая генерация массы не есть что-то необычное, новое и непонятное. Очень похожие явления известны в обычной земной низкоэнергетической физике.

Фотон не несёт массу, и закон дисперсии для электромагнитных волн в вакууме есть $\omega^2 - c^2 k^2 = 0$. В воде или в стекле скорость электромагнитных волн меньше, и соответствующее дисперсионное уравнение есть $n^2 \omega^2 - c^2 k^2 = 0$, где n — показатель преломления. Дисперсионное уравнение для волн в *плазме* сложнее. Оно имеет вид

$$\omega^2 - c^2 k^2 = \Pi(\omega, k), \quad (5.27)$$

¹ Читатель, изучавший теорию Максвелла в университете, возможно, уже знаком с понятием *абелевой* калибровочной инвариантности. Мы не будем детально обсуждать её здесь, но вспомним, что это такое, в главе 7 и обобщим это понятие на неабелев случай в главе 11.

где $\Pi(\omega, k)$ — довольно сложная функция. При очень больших ω, k правой частью равенства (5.27) можно пренебречь, и мы получаем обычные электромагнитные волны. Но когда $\omega \sim ck \sim \Pi^{1/2}$, закон дисперсии усложняется. Замечательно то, что $\Pi(\omega, 0) \neq 0$. Это означает, что уравнения Максвелла в плазме допускают *стационарное* осцилляторное решение. Частота этих осцилляций, решение уравнения $\omega^2 = \Pi(\omega, 0)$, называется *плазменной частотой*. В обыкновенной плазме

$$\omega_{\text{pl}}^2 = \frac{ne^2}{m}, \quad (5.28)$$

где n — плотность числа электронов в плазме, m — электронная масса и заряд электрона e измеряется в хэвисайдовских единицах. В квантовой теории ω_{pl} может быть интерпретирована как динамически сгенерированная фотонная масса.

Есть и другая физическая ситуация, где фотоны приобретают массу. Она более релевантна для наших «слабых» штудий. Я имею в виду *эффект Мейсснера* в полупроводниках. Известно, что магнитные поля не могут проникать в сверхпроводники специального типа¹ — действительно, проникающее магнитное поле сгенерировало бы в сверхпроводнике циркулярный ток, который это поле немедленно бы заэкранировал. Есть, однако, конечная *лондоновская длина*, на которую магнитное поле внутрь всё же проникает. Эта конечная длина экранировки может быть отождествлена с обратной ненулевой фотонной массой!

На более формальном количественном уровне сверхпроводники описываются *эффективной теорией Гинзбурга—Ландау*. Релятивистский вариант этой теории называется абелевой *моделью Хиггса*, а динамическая генерация массы в этой модели — абелевым *эффектом Хиггса*.

В этой закусочной части нашей книги мы не углубляемся в детали и не напишем поэтому лагранжиан модели Хиггса, который позволил бы читателю понять точно, что означает этот эффект и каков его механизм. Но наш читатель ещё не добрался до главы 7, где рассказывается о теоретико-полевых лагранжианах, и он с этим кулинарным секретом, может быть, ещё не знаком. Детальную же информацию об абелевой и неабелевой моделях Хиггса читатель получит только в главе 12 во время поглощения одного из наших главных блюд.

¹ В так называемые сверхпроводники первого рода.

Сейчас же мы попробуем описать основные черты модели Хиггса словами.

- Самой основной чертой упомянутой в предыдущем абзаце неабелевой модели Хиггса является, безусловно, неабелевый механизм Хиггса, дающий массу калибровочным полям («заряженным фотонам» Янга и Миллса). Именно на этом эффекте основана теория слабого и электромагнитного взаимодействий, построенная Вайнбергом в 1967 г. и Саламом в 1968 г.

— Но почему *слабого и электромагнитного*? Какое отношение имеет электромагнетизм к тому, что мы сейчас обсуждаем? — может спросить раздражённый читатель. — Теория электромагнитного взаимодействия была создана в 1940-х годах. Вы же рассказывали уже об этом в § 5.2. Зачем к ней возвращаться?

Ответ таков. W^+ и W^- — заряженные частицы. Значит, они взаимодействуют с фотонами. Но тогда фотоны должны рассматриваться с самого начала примерно так же, как $W^\pm$, — иначе нельзя сохранить калибровочную инвариантность и перенормируемость. И вот почему теория, которую мы сейчас пытаемся описать, — не просто теория слабого взаимодействия, а именно *единая теория слабого и электромагнитного взаимодействий*. В 1979 г. Глэшоу, Салам и Вайнберг были награждены за создание этой теории Нобелевской премией¹.

- Оказывается, помимо массивных частиц $W^\pm$ и безмассового фотона электрослабая теория включает другой массивный нейтральный промежуточный бозон Z^0 . Массы частиц $W^\pm$ и Z^0 одного порядка. Теория предсказывает значения

$$\begin{aligned} m_W &= \frac{1}{\sin \theta_W} \sqrt{\frac{\pi \alpha}{G_F \sqrt{2}}} \approx \frac{37,3}{\sin \theta_W} \text{ ГэВ}, \\ m_Z &= \frac{m_W}{\cos \theta_W} \approx \frac{74,6}{\sin 2\theta_W} \text{ ГэВ}, \end{aligned} \quad (5.29)$$

где θ_W — некий свободный теоретический параметр, называемый *углом Вайнберга*. Мы выведем эти точные соотношения в главе 12.

Оценку по порядку величины для масс W и Z можно получить из приближённого соотношения (5.25) [точная формула (12.48) бу-

¹ Шелдон Глэшоу опубликовал в 1961 г. работу, содержащую замечательные догадки о структуре будущей теории. В частности, он предсказал существование двух нейтральных векторных бозонов — безмассового фотона и массивного бозона Z .

дет выписана в главе 12] и того факта, что мы имеем дело с единой электрослабой теорией, так что константа g имеет тот же порядок, что заряд электрона e .

W - и Z -бозоны были открыты в ЦЕРНе в 1983 г. Экспериментальные значения масс

$$m_W = 80,385 \pm 0,015 \text{ ГэВ}, \quad m_Z = 91,187 \pm 0,002 \text{ ГэВ} \quad (5.30)$$

находятся в прекрасном согласии с соотношениями (5.29) и позволяют весьма точно определить угол Вайнберга:

$$\sin^2 \theta_W = 0,23120 \pm 0,00015. \quad (5.31)$$

Обмен бозоном Z^0 приводит к процессам с так называемыми *нейтральными токами*. Один из таких процессов, процесс неупругого рассеяния нейтрино на нуклоне, изображён на рис. 5.15.

В теории Ферми, которая имеет дело только с взаимодействием заряженных токов, для такого процесса места нет. Он экспериментально наблюдался в ЦЕРНе в 1973 г., что послужило блестящим экспериментальным подтверждением *новой* электрослабой теории¹.

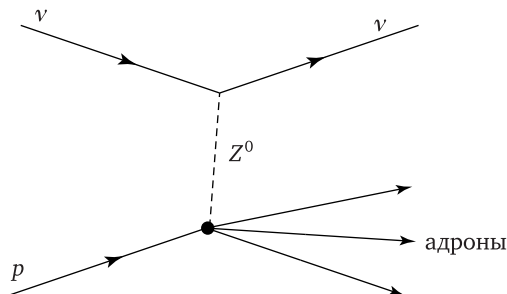


Рис. 5.15. Процесс с нейтральными токами: неупругое рассеяние νp

Z взаимодействует также с электронами (и с другими лептонами и кварками). Процессы с обменом Z «примешиваются» к электромагнитным процессам, и это приводит к эффектам несохра-

¹ Экспериментальное открытие W - и Z -бозонов было тоже, конечно, блестящим экспериментальным подтверждением, но оно пришло позже, в 1983 г., когда заработал новый протон-антипротонный ускоритель в ЦЕРНе с энергией, достаточной, чтобы можно было наблюдать прямое рождение этих частиц. Можно сказать, что большинство физиков поверили в справедливость схемы Вайнберга и Салама уже в 1973 г., но открытие W и Z в 1983 г. устранило в этом последние сомнения.

нения чётности не только при высоких, но и при низких энергиях — в атомной физике. Почти всегда эти эффекты слишком малы для наблюдений, но есть исключения. Несохранение чётности в атомных переходах впервые наблюдалось в Новосибирске Львом Барковым и Марком Золотарёвым.

- Хиггсовский механизм генерации масс подразумевает наличие фундаментальных скалярных полей. (В сверхпроводнике такое скалярное поле называется *параметром порядка* и связано с конденсатом куперовских пар.) Электрослабая теория предсказывает существование тяжёлой скалярной частицы, называемой *Хиггсовским бозоном* (в честь Питера Хиггса — одного из физиков, построивших релятивистскую модель с динамической генерацией массы фотона в 1960 г.).

Заметим, что массы фермионов — кварков и лептонов — тоже не вводятся в теорию «руками» (такая наивная процедура разрушила бы калибровочную инвариантность и перенормируемость), но генерируются динамически через взаимодействие со скалярным полем.

Как читатель, наверное, знает, бозон Хиггса с массой ≈ 125 ГэВ был открыт в 2012 г. в ЦЕРНе. Это был ещё один предсказанный триумф Стандартной модели. Ну, пожалуй, «ещё один триумф» — это неправильное выражение. Бозон Хиггса — это как бы замок в центральной арке здания Стандартной модели. Его открытие ознаменовало, если угодно, конец эпохи. Почти все предсказания теории сейчас проверены и подтверждены, и мы не ожидаем больших предсказуемых открытий в будущем¹.

Мы все надеемся дожить до непредсказанных открытий. Но если они произойдут, о них расскажет другая книга...

¹ Я написал «почти», потому что не все параметры Стандартной модели ещё хорошо известны. Это, в частности, относится к массам нейтрино. Мы будем обсуждать это более подробно в главе 12.

ЧАСТЬ III

Кулинарные тайны

Глава 6

Группы и алгебры

В предыдущей части мы обсуждали различные, простые и сложные теории поля, но не определили пока достаточно строго, что такое теория поля. Любая механическая или полевая система характеризуется своим лагранжианом, из которого выводятся все её свойства. Мы пока не писали лагранжианов: чтобы научиться это делать, надо вспомнить методы теоретической механики; мы сделаем это в главе 7. Но нам надо также лучше понять принципы построения таких лагранжианов — как установить, какой из различных возможных кандидатов лучше описывает природу. И основной такой принцип — это принцип *симметрии*.

Область математики, которая позволяет разбираться в вопросах симметрии, называется *теорией групп*. И ей главным образом посвящена данная глава. В конце главы мы обсудим также математическое понятие *грасмановой алгебры*, необходимое для адекватного описания фермионных полей.

6.1. Скаляры. Векторы. Тензоры

Но прежде чем перейти к описанию новых для читателя математических методов, мы вспомним основы векторной и тензорной алгебры, с которыми читатель, вероятно, уже знаком.

6.1.1. Евклидово пространство

Рассмотрим n -мерное евклидово пространство. В нём можно выбрать различные декартовы системы координат. Все они связаны ортогональными преобразованиями:

$$x'_i = \sum_{j=1}^n O_{ij} x_j. \quad (6.1)$$

Ортогональная матрица O удовлетворяет условию

$$OO^T = \mathbb{1} \quad (6.2)$$

(T означает транспонирование и $\mathbb{1}$ есть единичная матрица). Из формулы (6.2) следует, что $\det O = \pm 1$. Если $\det O = 1$, мы имеем дело с *соб-*

ственным вращением. Если $\det O = -1$, это несобственное вращение — комбинация собственного вращения и зеркального отражения.

Есть много интересных величин, которые не зависят от выбора координат: геометрические величины — расстояния и углы — и физические величины, такие как масса и электрический заряд. Такие величины называются *скалярами*. Есть также *псевдоскаляры* [к ним относится спиральность (5.23)]. Псевдоскаляры инвариантны относительно собственных вращений, но меняют знак при зеркальном отражении.

Имеется также много разных векторных физических величин. Вектор — это не просто набор компонент. При переходе в другую координатную систему компоненты вектора преобразуются так же, как координаты:

$$V'_i = \sum_{j=1}^n O_{ij} V_j. \quad (6.3)$$

Более точно, закон преобразований (6.3) выполняется для обычных полярных векторов (таких как скорость). А *аксиальные* векторы (угловой момент или магнитное поле) преобразуются как

$$A'_i = (\det O) \sum_{j=1}^n O_{ij} A_j, \quad (6.4)$$

с дополнительным фактором -1 при несобственных вращениях.

Встречаются также тензоры, объекты с несколькими индексами. Наиболее известный физический пример — это тензор момента инерции, симметричный тензор ранга 2, $I_{ij} = I_{ji}$. При вращениях он преобразуется как

$$I'_{ij} = \sum_{k,l=1}^n O_{ik} O_{jl} I_{kl}. \quad (6.5)$$

Более сложный пример — тензор упругости, связывающий упругие деформации и напряжения. Он имеет ранг 4 (несёт 4 индекса).

Закон преобразований тензора ранга r есть

$$I'_{i_1 \dots i_r} = \sum_{k_1, \dots, k_r=1}^n O_{i_1 k_1} \dots O_{i_r k_r} I_{k_1 \dots k_r}. \quad (6.6)$$

В выписанных выше законах преобразований фигурировали суммы по индексам и стоял знак суммы. Но больше мы его писать в таких случаях не будем. Не желая лишний раз стучать по клавиатуре и экономя также бумагу, мы будем во всей книге следовать *соглашению Эйнштейна*: если имя индекса в некотором тензорном выражении повторено дважды, по этому индексу следует просуммировать. Уравнение (6.3) записывается тогда как $V'_i = O_{ij} V_j$.

Можно складывать тензоры одинакового ранга и можно перемножать тензоры. В последнем случае можно сохранить все индексы перемножаемых тензоров, а можно «потерять» индексы, проведя свёртку по одной или нескольким их парам. Например, из тензора A_{ijk} ранга 3 и тензора B_{mnlp} ранга 4, можно соорудить

$$C_{imn} = A_{ijk} B_{mnjk}. \quad (6.7)$$

Простое упражнение — показать, что если A и B — тензоры [т. е. если они преобразуются при вращениях согласно (6.6)], то C также тензор. При доказательстве надо использовать условие ортогональности (6.2).

Имеются два особых тензора.

1) Тензор *Кroneкера*, единственные ненулевые компоненты которого суть $\delta_{11} = \dots = \delta_{nn} = 1$.

2) Полностью антисимметричный тензор $\varepsilon_{i_1 \dots i_n}$, который определяется требованием антисимметрии (он меняет знак при перестановке любой пары индексов) и нормировкой $\varepsilon_{12 \dots n} = 1$.

Нетрудно показать, что эти тензоры *инвариантны*, т. е. не меняют при вращении свой вид. Отметим полезные трёхмерные соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnp} &= \begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} & \delta_{ip} \\ \delta_{jm} & \delta_{jn} & \delta_{jp} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} & \delta_{kp} \end{vmatrix}, \\ \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnk} &= \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}, \\ \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mjk} &= 2\delta_{im}, \quad \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6. \end{aligned} \quad (6.8)$$

В этих обозначениях скалярное и векторное произведения векторов выражаются как $A \cdot B = A_i B_i$, $[A \times B]_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k$. Докажите в качестве упражнения соотношение

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B).$$

6.1.2. Пространство Минковского

Перейдём теперь в $(3+1)$ -мерное пространство Минковского. Разные инерциальные системы отсчёта связаны преобразованиями Лоренца,

$$x'^{\mu} = O^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \quad (6.9)$$

где $x^{\mu} = (t, \mathbf{x})$ и O^{μ}_{ν} — матрица преобразования Лоренца, удовлетворяющая условию

$$\eta_{\mu\rho} O^{\mu}_{\nu} O^{\rho}_{\sigma} = \eta_{\nu\sigma}, \quad (6.10)$$

где $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ — метрика плоского пространства Минковского. Можно убедиться, что конкретное преобразование (4.3) — лоренцев буст со скоростью v вдоль оси x — представимо как

$$O = \begin{pmatrix} \text{ch } \psi & -\text{sh } \psi & 0 & 0 \\ -\text{sh } \psi & \text{ch } \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

с некоторым ψ и действительно удовлетворяет условию (6.10).

Роль длины вектора $l^2 = x_i x_i$, инвариантной относительно обыкновенных евклидовых вращений, играет теперь интервал

$$s^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = t^2 - \mathbf{x}^2, \quad (6.12)$$

инвариантный относительно (6.9).

Как вы заметили, мы пишем теперь индексы на двух уровнях — сверху и снизу. Таким образом мы различаем *контравариантные* и *ковариантные* индексы. Контравариантный вектор [например, 4-импульс $p^\mu = (E, \mathbf{p})$] несёт верхний индекс и преобразуется по Лоренцу так же, как x^μ : $p'^\mu = O^\mu_\nu p^\nu$. А ковариантные векторы (векторный потенциал A_μ или оператор градиента ∂_μ) преобразуются как $A'_\mu = O^\nu_\mu A_\nu$.

Тензор общего вида в пространстве Минковского несёт r контравариантных и q ковариантных индексов и преобразуется как

$$\left(T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_q} \right)' = O^{\mu_1}_{\alpha_1} \dots O^{\mu_r}_{\alpha_r} O^{\beta_1}_{\nu_1} \dots O^{\beta_q}_{\nu_q} T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_q}. \quad (6.13)$$

С каждым контравариантным вектором связан инвариант $\eta_{\mu\nu} V^\mu V^\nu$ («длина Минковского») ¹. Каждому ковариантному вектору можно поставить в соответствие аналогичный инвариант $\eta^{\mu\nu} V_\mu V_\nu$, где $\eta^{\mu\nu}$ есть обратный метрический тензор Минковского, $\eta^{\mu\nu} \eta_{\nu\alpha} = \delta^\mu_\alpha$. Компоненты $\eta^{\mu\nu}$ совпадают с компонентами $\eta_{\mu\nu}$.

Для любого контравариантного вектора V^μ вектор $V_\mu = \eta_{\mu\nu} V^\nu$ ковариантен. И наоборот, можно поднять индекс, умножив ковариантный вектор на обратный метрический тензор, $V^\mu = \eta^{\mu\nu} V_\nu$. В евклидовом пространстве, где $\eta_{\mu\nu} \rightarrow \delta_{ik}$, V^i и V_i , очевидно, совпадают.

Различение ко- и контравариантных индексов совершенно необходимо в кривом пространстве-времени — в общей теории относительности, о которой мы будем говорить в главе 15. В плоском

¹ Например, для 4-импульса p^μ это просто масса частицы, $\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = m^2$.

пространстве Минковского оно не столь важно. Однако неразличение этих индексов может в некоторых случаях привести к путанице и в плоском случае, и мы будем путаницу избегать и индексы различать. В частности, мы аккуратно расставили по местам ко- и контравариантные индексы в уравнении (5.3) предыдущей главы. С учётом сказанного уравнение КФГ (4.28) может быть выражено в естественных единицах как $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\varphi = 0$.

6.2. Конечные группы

Формальное определение группы следующее.

Группа есть множество элементов G , в котором задана бинарная операция (назовём её умножением) «Бинарная операция» есть по сути дела отображение упорядоченных пар (a, b) элементов G на элементы $c \in G$. Назовём c произведением a и b и введём обозначение

$$c = ab. \quad (6.14)$$

Выполняются следующие свойства.

1) Имеется такой выделенный элемент $e \in G$, называемый *единичным* элементом, что для любого $a \in G$ выполняется равенство

$$ae = ea = a. \quad (6.15)$$

2) Для каждого элемента a имеется *обратный* элемент a^{-1} , такой что

$$aa^{-1} = a^{-1}a = e \quad (6.16)$$

(если $a = e$, то a и a^{-1} совпадают).

3) Умножение ассоциативно:

$$(ab)c = a(bc). \quad (6.17)$$

Простейшая нетривиальная группа (называемая Z_2) содержит всего два элемента: единичный элемент e и $a = a^{-1}$. Действует следующая таблица умножения:

Таблица 3. Таблица умножения для группы Z_2

	e	a
e	e	a
a	a	e

Таблица симметрична, что означает, что группа коммутативна¹. Арифметическая реализация этой абстрактной группы состоит из чисел $e = 1$, $a = -1$. Но возможны и другие интерпретации. Например, можно проассоциировать элементы группы Z_2 с преобразованиями несимметричных геометрических объектов наподобие штопоров и перчаток: e — тождественное преобразование (правая перчатка остаётся правой, а левая перчатка — левой) и a — зеркальное отражение, после которого левая и правая перчатки переходят друг в друга.

Не все группы коммутативны. Рассмотрим группу перестановок трёх различных объектов² S_3 . Эта группа состоит из 6 элементов: единичный элемент e , не меняющий порядка элементов, его можно обозначить (123) , и ещё 5 нетривиальных элементов — (132) , (213) , (321) , (231) , (312) . [Кодировка здесь ясна: перестановка характеризуется результатом действия на стандартно упорядоченную тройку (123) .] Тогда $(132)(213) = (231)$, что не совпадает с $(213)(132) = (312)$.

Введём чрезвычайно важное понятие *подгруппы*. Подгруппа группы G есть такое подмножество F множества G , что операция умножения, определённая в G , может быть «спроектирована» на F . Другими словами: если два элемента a, b принадлежат F , то их произведение тоже принадлежит F ; единичный элемент группы G также принадлежит F ; если $a \in F$, то верно также, что $a^{-1} \in F$.

Например, группа S_3 имеет коммутативную подгруппу, состоящую только из циклических перестановок: $e = (123)$, $a = (231)$ и $a^{-1} = a^2 = (312)$. Эта группа называется Z_3 .

6.3. Группы Ли

Простые конечные группы весьма просты, но сложные конечные группы очень сложны. существуют группы, неизмеримо более сложные, чем, например, конечная группа, описывающая повороты кубика Рубика.

К счастью, сложная математическая теория сложных конечных групп не нашла себе применения в физике.

Но есть группы с бесконечным континуальным числом элементов. Эти группы (они называются *группами Ли* в честь Софуса Ли,

¹ Коммутативные группы называются также *абелевыми*.

² Объекты могут иметь разную природу. Можно представить, например, волка, козу и капусту. Или просто три числа 1, 2, 3.

норвежского математика, который разработал их теорию в конце XIX века) *применяются* в физике, и эти применения многообразны. В частности, некоторые такие группы представляют группы симметрии КХД и электрослабой теории.

6.3.1. Ортогональные группы

Простейший пример группы Ли — это группа плоских вращений. Она называется $SO(2)$ и может быть представлена как группа ортогональных матриц размера 2×2 с единичным детерминантом

$$g_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (6.18)$$

Композиция двух вращений на углы φ и ψ представляется произведением этих матриц:

$$g_\varphi g_\psi = g_\psi g_\varphi = g_{\varphi+\psi}. \quad (6.19)$$

Если добавить зеркальные отражения, получится группа, называемая $O(2)$. Как $SO(2)$, так и $O(2)$ коммутативны (абелевы). Элемент группы $SO(2)$ характеризуется параметром $\varphi \in [0, 2\pi)$. Топологически $SO(2)$ есть окружность. А $O(2)$ — две несвязанные окружности.

Простейшая некоммутативная группа Ли — это $SO(3)$, группа трёхмерных вращений. Каждый элемент этой группы представим как композиция трёх «элементарных» вращений вокруг первой, второй и третьей пространственных осей:

$$g = g_1 g_2 g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 \\ 0 & -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & 0 & -\sin \varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi_2 & 0 & \cos \varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi_3 & \sin \varphi_3 & 0 \\ -\sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.20)$$

Элемент этой группы характеризуется, таким образом, тремя непрерывно изменяющимися параметрами¹, и группа представляет собой трёхмерное *многообразие*².

¹ В физике более обычным, чем в формуле (6.20), выбор таких параметров — это углы Эйлера. А авиаинженеры и ракетчики описывают полёт своих изделий через углы *тангажа*, *рыскания* и *вращения*.

² Математики называют этим странным словом достаточно гладкие многомерные поверхности. Группа $SO(3)$ представляет собой многообразие, топологически эквивалентное трёхмерной сфере S^3 с отождествлёнными противоположными точками. Это многообразие компактно (имеет конечный объём). Компактны не все группы. Группа Лоренца, например, некомпактна.

Некоммутативность группы $SO(3)$ можно увидеть непосредственно. Сделаем это для *малых* вращений¹, $\varphi^a \ll 1$. Групповой элемент (6.20) может быть тогда представлен как²

$$g = \mathbb{1} + i\varphi^a t^a + o(\varphi^a), \quad (6.21)$$

где $\mathbb{1}$ — единичная матрица, а три эрмитовы матрицы

$$t^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad t^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

называются *генераторами* группы. Генераторы бесследовы и удовлетворяют условию

$$\text{Tr}\{t^a t^b\} = 2\delta^{ab}. \quad (6.23)$$

Рассмотрим *групповой коммутатор*

$$g(\varphi)g(\psi)g^{-1}(\varphi)g^{-1}(\psi) \approx \mathbb{1} - \varphi^a \psi^b [t^a, t^b]. \quad (6.24)$$

Генераторы не коммутируют,

$$[t^a, t^b] = i\varepsilon^{abc} t^c, \quad (6.25)$$

следовательно, групповой коммутатор (6.24) отличен от единицы, и, значит, $g(\varphi)g(\psi) \neq g(\psi)g(\varphi)$. Группа неабелева.

Заметим, что инфинитезимальные вращения координат $\mathbf{x}$, связанные с действием генераторов (6.22), могут быть также интерпретированы как действие операторов углового момента

$$\hat{J}^a = \varepsilon^{abc} x^b \hat{p}^c = -i\varepsilon^{abc} x^b \frac{\partial}{\partial x^c} \quad (6.26)$$

на функции $f(\mathbf{x})$. Фактически *алгебра Ли* (6.25) есть не что иное, как алгебра операторов углового момента, известная из курса квантовой механики.

Группа вращений в евклидовом пространстве произвольной размерности характеризуется $n(n-1)/2$ параметрами. «Элементарное» вращение происходит в плоскости $(\mu\nu)$. Генератор такого вра-

¹Замечательное наблюдение Ли состояло в том, что можно почти всё узнать о структуре непрерывной группы [любой группы, не только $SO(3)$], изучая то, что происходит в малой окрестности единичного элемента.

²Здесь верхнее положение индексов имеет чисто эстетическое, а не математическое значение.

щения есть эрмитова матрица с элементами

$$(t_{\mu\nu})_{\alpha\beta} = i(\delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha} - \delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta}). \quad (6.27)$$

Генераторы (6.27) удовлетворяют соотношениям коммутации

$$[t_{\mu\nu}, t_{\alpha\beta}] = i(\delta_{\nu\beta}t_{\mu\alpha} + \delta_{\mu\alpha}t_{\nu\beta} - \delta_{\mu\beta}t_{\nu\alpha} - \delta_{\nu\alpha}t_{\mu\beta}). \quad (6.28)$$

В общем случае у группы Ли, представляющей собой D -мерное компактное многообразие, имеется D генераторов, представимых эрмитовыми матрицами $t^{a=1,\dots,D}$. Для них справедлива алгебра

$$[t^a, t^b] = if^{abc}t^c \quad (6.29)$$

с вещественными полностью антисимметричными f^{abc} . Объекты f^{abc} называются *структурными константами* группы.

Знание групповых генераторов позволяет выразить элемент группы не только в окрестности единицы, как в формуле (6.21). Можно показать, что произвольный групповой элемент представим в виде

$$g = \exp\{i\varphi^a t^a\}. \quad (6.30)$$

Это выражение может озадачить читателя. Он знает, как складывать и умножать матрицы, но, быть может, никогда не видел раньше формулу, где матрица стоит в экспоненте. Но в этой формуле нет ничего загадочного. Любая гладкая функция матричного аргумента может быть разложена в ряд Тейлора, и именно так её следует понимать. В частности,

$$\exp\{i\varphi^a t^a\} = \mathbb{1} + i\varphi^a t^a + \frac{1}{2}(i\varphi^a t^a)^2 + \frac{1}{6}(i\varphi^a t^a)^3 + \dots \quad (6.31)$$

При $\varphi^a \ll 1$ можно оставить в этом разложении только первые два члена, и мы получим формулу (6.21).

Упражнение. Покажите, что трёхмерная матрица (6.30) с генераторами (6.22) ортогональна. (Указание: достаточно увидеть, что $g^T = \exp\{-i\varphi^a t^a\}$.)

6.3.2. Группа Лоренца

Эта столь важная для физики группа заслуживает особого раздела.

Как отмечалось, группа преобразований Лоренца изоморфна группе вещественных матриц размера 4×4 , удовлетворяющих условию (6.10). Эта группа родственна группе четырёхмерных враще-

ний, и с учётом того, что инвариантный интервал (6.12) есть квадратичная форма с одним положительным и тремя отрицательными собственными значениями, она обозначается $O(3, 1) \equiv O(1, 3)$. Вводя дополнительное условие $\det O = 1$, получаем *специальную* группу Лоренца $SO(3, 1)$.

В окрестности единицы элемент группы $SO(3, 1)$ имеет вид

$$O = \mathbb{1} + i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J} + i\mathbf{v} \cdot \mathbf{K} + o(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{v}), \quad (6.32)$$

где $\mathbf{J}$ — генераторы обычных пространственных вращений (они получаются из формулы (6.22), где нужно добавить одну строчку, состоящую из нулей, сверху и один такой столбец слева) и $\mathbf{K}$ — генераторы «гиперболических» вращений, лоренцевых бустов:

$$K^1 = i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K^2 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K^3 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.33)$$

Как мы видим, матрицы $\mathbf{K}$ антиэрмитовы. Наличие как эрмитовых, так и неэрмитовых генераторов связано с присутствием разных знаков в инварианте (6.12). Другое следствие чередования знаков — некомпактность многообразия, описывающего группу Лоренца; её объём бесконечен.

Шесть генераторов J^a, K^a удовлетворяют условиям

$$[J^a, J^b] = i\varepsilon^{abc} J^c, \quad [K^a, K^b] = -i\varepsilon^{abc} J^c, \quad [J^a, K^b] = i\varepsilon^{abc} K^c. \quad (6.34)$$

Определим теперь эрмитовы матрицы

$$M^a = \frac{J^a + iK^a}{2}, \quad N^a = \frac{J^a - iK^a}{2} \quad (6.35)$$

и заметим, что алгебра (6.34) переписывается в терминах M и N как

$$[M^a, M^b] = i\varepsilon^{abc} M^c, \quad [N^a, N^b] = i\varepsilon^{abc} N^c, \quad [M^a, N^b] = 0. \quad (6.36)$$

Другими словами, алгебра группы Лоренца эквивалентна двум независимым алгебрам¹ $\mathfrak{so}(3)$, она распадается, как говорят математики, в их *прямую сумму*.

¹ Алгебры Ли обычно обозначаются так же, как соответствующие группы, но не с заглавными, а со строчными буквами.

Будучи выраженным через M и N , групповой элемент (6.32) приобретает вид

$$O = 1 + i[M^a(i\theta^a + v^a) + N^a(i\theta^a - v^a)] + \dots \quad (6.37)$$

6.3.3. Унитарные группы

Ортогональная группа включает преобразования координат вещественного векторного пространства, которые не меняют расстояния и скалярные произведения. Аналогично унитарная группа содержит преобразования координат комплексного векторного пространства, которые не меняют норму $z^{*j}z_j$ [мы определяем $z^{*j} = (z_j)^*$] и комплексные скалярные произведения. Унитарные матрицы удовлетворяют условию [ср. (6.2)]

$$UU^\dagger = U^\dagger U = 1, \quad (6.38)$$

где $U^\dagger$ — эрмитово-сопряжённая матрица.

Для комплексного пространства размерности n матричное условие (6.38) даёт n^2 вещественных связей, наложенных на n^2 комплексных или $2n^2$ вещественных параметров, определяющих общую комплексную матрицу порядка n . Таким образом, унитарная матрица зависит от n^2 независимых вещественных параметров. Унитарные матрицы образуют группу [называемую $U(n)$]. Действительно, легко проверить, что произведение двух унитарных матриц унитарно и т. д. Группа $U(1)$ абелева. Группы $U(n > 1)$ неабелевы.

Из соотношения (6.38) следует, что $\det U = e^{i\theta}$ с некоторым вещественным θ . Если мы наложим дополнительное условие $\det U = 1$, то получим *специальные* унитарные матрицы, характеризующиеся $n^2 - 1$ вещественными параметрами. Они образуют подгруппу группы $U(n)$, обозначаемую $SU(n)$. Помимо нормы $z^{*j}z_j$ специальные унитарные преобразования оставляют инвариантной структуру

$$\varepsilon^{j_1 \dots j_n} z_{j_1} \dots z_{j_n}. \quad (6.39)$$

Рассмотрим простейшую нетривиальную унитарную группу $SU(2)$. Она зависит от трёх параметров и имеет, соответственно, три генератора. В окрестности единицы элемент группы $SU(2)$ представим в виде (6.21), где генераторы t^a — эрмитовы матрицы размера 2×2 .

Их можно выбрать в виде $t^a = \frac{1}{2}\sigma^a$ где σ^a — матрицы Паули. Тогда

$$t^1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad t^3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (6.40)$$

Генераторы t^a удовлетворяют тому же условию ортогональности, что и (6.23), но с другим коэффициентом,

$$\text{Tr}\{t^a t^b\} = \frac{1}{2} \delta^{ab}. \quad (6.41)$$

Можно убедиться, что генераторы (6.40) между собой не коммутируют и что их коммутаторы удовлетворяют в точности *тому же* соотношению (6.25), что и генераторы (6.22) группы¹ $\text{SO}(3)$. Увидев это, математик скажет, что алгебры Ли матриц (6.22) матриц (6.40) эквивалентны.

Это совпадение не может быть случайным, и оно не случайно². Можно показать, что для любой матрицы U из $\text{SU}(2)$ матрица

$$O^{ab} = 2\text{Tr}\{U t^a U^\dagger t^b\} \quad (6.42)$$

ортогональна. Кажется, что Ли был прав: так как алгебра (6.25) (описывающая поведение группы в окрестности единицы) здесь такая же, мы фактически имеем дело с той же группой, т. е. группа $\text{SU}(2)$ эквивалентна $\text{SO}(3)$, не так ли?

Почти так, но есть нюанс. Действительно, соотношение (6.42) описывает отображение $\text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$. Но это отображение не взаимно однозначно; две различные матрицы U и $-U$ дают при таком отображении одну и ту же ортогональную матрицу. Можно сказать, что $\text{SU}(2)$ в два раза больше, чем $\text{SO}(3)$!

Мы скоро обсудим очень важные следствия наблюдаемого нами соответствия для физики, но вначале познакомимся с другой интересной и важной для физики унитарной группой — группой $\text{SU}(3)$. Эта группа зависит от $3^2 - 1 = 8$ параметров и имеет 8 генераторов.

¹Мы понимаем теперь происхождение множителя $1/2$ в формуле (6.40). Если бы мы определили t^a без этого множителя, то коэффициент в условии нормировки (6.41) был бы таким же, как в формуле (6.23), но в условии коммутации появилась бы дополнительная двойка в правой части. Люди предпочитают определять генераторы так, чтобы этой двойки не было.

²Просто так никто жужжать не будет!

Последние можно выбрать в виде

$$\begin{aligned}
 t^1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & t^2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 t^3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & t^4 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 t^5 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & t^6 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
 t^7 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & t^8 &= \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{6.43}$$

Все эти матрицы эрмитовы и удовлетворяют условию ортогональности (6.41). Их коммутаторы даются общим выражением (6.29) со следующими структурными константами:

$$\begin{aligned}
 f^{123} &= 1, \\
 f^{147} &= -f^{156} = f^{246} = f^{257} = f^{345} = -f^{367} = \frac{1}{2}, \\
 f^{458} &= f^{678} = \frac{\sqrt{3}}{2},
 \end{aligned} \tag{6.44}$$

и все остальные компоненты восстанавливаются по антисимметрии.

6.3.4. Представления

Рассмотрим вначале группу $SO(3)$. Она состоит из трёхмерных матриц, которые вращают вещественные трёхмерные векторы. Но мы видели, что каждому такому вращению соответствует некая двумерная унитарная матрица U (и также $-U$), вращающая комплексные двумерные векторы. Каков физико-математический смысл этого комплексного векторного пространства?

Я думаю, читатель уже знает ответ на этот вопрос. Эти комплексные двумерные векторы — не что иное, как *спиноры*. Спиноры, изучаемые в курсе квантовой механики, — это 2-компонентные волновые функции частиц со спином $1/2$. Они нетривиально преобразуются при вращениях: умножаются слева на унитарную матрицу,

которая связана с ортогональной матрицей, вращающей пространственные координаты, соотношением (6.42)¹. Таким образом, изучив группу $SU(2)$, мы одновременно построили *спинорное представление* группы трёхмерных вращений.

Что касается ортогональных матриц размера 3×3 , то они реализуют векторное представление этой группы. Заметьте, что эти матрицы действуют не только на обыкновенные классические векторы, но и на имеющие векторную природу волновые функции квантовых частиц с единичным спином. Действительно, такая частица может иметь три различные проекции спина на выделенную пространственную ось (скажем, на ось z), $S_z = 1, 0, -1$. Волновая функция включает, таким образом, три компоненты, которые можно выразить как²

$$\Psi_{S=1} = \begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_0 \\ \Psi_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(V_x + iV_y)/\sqrt{2} \\ V_z \\ (V_x - iV_y)/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (6.45)$$

Можно убедиться, что объект (V_x, V_y, V_z) преобразуется при вращениях как вектор.

Но бывают также частицы со спином $3/2$ (например, Ω^- -гиперон, «Нептун» кварковой модели, о котором мы говорили в § 5.3) и с четырьмя возможными проекциями спина: $S_z = \pm 3/2, \pm 1/2$. Волновая функция такой частицы включает, таким образом, 4 компоненты и вращается матрицами 4×4 . Имеются также частицы спина 2 с пятью проекциями спина (их волновые функции представимы как бесследовые симметричные тензоры ранга 2) и т. д. Мы получаем цепочку представлений, характеризующихся спином S , который может быть либо целым, либо полуцелым.

Частица спина S может быть сделана из $2S$ частиц со спином $S = 1/2$, быть их связанным состоянием. Соответственно, представление спина S может быть сконструировано из $2S$ «элементарных» спинорных представлений. Возьмём для примера Ω^- -гиперон. Его

¹ Заметьте, что, когда угол вращения плавно меняется от 0 до 2π , соответствующая унитарная матрица меняется от $\mathbb{1}$ до $-\mathbb{1}$ (унитарная матрица есть как бы «квадратный корень» из ортогональной, и мы как бы прибываем при таком обходе на другой лист римановой поверхности). Другими словами, спинорная волновая функция меняет знак при повороте на 2π . Это известное квантовомеханическое явление, оно подтверждено экспериментом.

² Отрицательный знак в верхней компоненте столбца справа — это не ошибка. Он присутствует, если принята стандартная конвенция $\Psi_+ = \hat{j}^+ \Psi_0 / \sqrt{2} = (\hat{j}^+)^2 \Psi_- / 2$.

волновая функция представляет собой антисимметризованное произведение фермионных кварковых волновых функций — это требуется принципом Паули. Кварковые волновые функции (или кварковые поля — выбирайте, что вам больше нравится) несут цветовые и спиновые индексы. Волновая функция Ω^- должна быть антисимметризована по цвету (в этом случае Ω^- несёт нулевой цветной заряд, он белый, как крутящийся диск на обложке). Значит, она должна быть симметризована по спиновым индексам,

$$(\Psi^{3/2})_{ijk} = \psi_i \chi_j \varphi_k. \quad (6.46)$$

Функция $\Psi^{3/2}$ имеет, как положено, четыре независимые компоненты: Ψ_{111} , Ψ_{112} , Ψ_{122} , Ψ_{222} .

Отметим также существование тривиального однокомпонентного представления, отвечающего частицам спина 0.

Здесь следует сделать терминологическое замечание. Физики и математики говорят на родственных, но различных языках, и часто требуется перевод. Во многих случаях одни и те же математические объекты носят на этих разных языках разные имена. И с другой стороны, иногда одно и то же слово («ложный друг переводчика») обладает в этих двух языках разным смыслом.

Когда математик говорит «представление», он имеет в виду элемент группы, представленный в виде матрицы того или иного размера. А столбцы, на которые эти матрицы слева действуют, принадлежат для него «пространству представления». Когда же физик говорит «представление», он думает прежде всего об *объектах*, на которые действуют преобразования симметрии. Мы говорим: «...поля в спинорном представлении, в векторном представлении» и т. д., не произнося при этом слово «пространство».

Обратимся к произвольным группам $SU(n)$. Унитарные матрицы размера $n \times n$ действуют на произвольные n -мерные комплексные векторы, как на столбцы,

$$\psi'_j = U_j^k \psi_k. \quad (6.47)$$

Эти векторы принадлежат к *фундаментальному представлению* $SU(n)$. Имеется также *антифундаментальное* представление, строки ψ^{*j} , которые преобразуются как

$$(\psi^{*k})' = \psi^{*j} (U^\dagger)_j^k. \quad (6.48)$$

В более компактной форме имеем $\psi \rightarrow U\psi$, $\psi^* \rightarrow \psi^* U^\dagger$, так что норма $\psi^* \psi$ инвариантна ввиду соотношения (6.38).

Антифундаментальное представление связано с фундаментальным комплексным сопряжением. При $n \geq 3$ это два разных представления. Но для $SU(2)$ они эквивалентны. Эквивалентность устанавливается линейной связью $\psi^{*j} = \varepsilon^{jk} \chi_k$, где ε^{jk} — инвариантный тензор $SU(2)$ [см. формулу (6.39)]. Мы уже обсуждали (анти)фундаментальное представление $SU(2)$, называя его спинорным представлением.

У $SU(n)$ есть много других представлений. Важную роль играет *присоединённое представление*. Оно может быть сконструировано из фундаментального и антифундаментального представлений:

$$A_j^k = \psi_j \chi^{*k} - \frac{1}{3} \delta_j^k \psi_l \chi^{*l}, \quad (6.49)$$

так что выполняется свойство $A_j^j = 0$. Матрицы (6.49) принадлежат алгебре Ли $su(n)$ группы $SU(n)$ — и могут быть представлены как

$$A_j^k = A^a (t^a)_j^k, \quad (6.50)$$

где $(t^a)_j^k$ — генераторы¹ $SU(n)$. Матрицы (6.50) преобразуются по $SU(n)$ как

$$\hat{A} \rightarrow U \hat{A} U^\dagger. \quad (6.51)$$

Для произвольного $n \geq 2$ можно думать о присоединённом представлении как о наборе $n^2 - 1$ действительных чисел A^a . Действие группы (6.51) может тогда быть реализовано вещественной матрицей порядка $n^2 - 1$, выраженной знакомой формулой (6.42). Таким образом, при $n = 2$ присоединённое представление совпадает с векторным представлением.

Фундаментальное и присоединённое представления $SU(n)$ — это почти всё, что нам понадобится в дальнейшем. Но в главе 11, когда мы будем обсуждать феноменологию адронного спектра, мы встретимся также с декуплетным представлением $SU(3)$. Оно может быть сделано из трёх фундаментальных и описывается *симметричным* трёхиндексным тензором Ψ_{ijk} . Этот тензор имеет 10 независимых компонент:

$$\Psi_{111}, \Psi_{222}, \Psi_{333}, \Psi_{112}, \Psi_{113}, \Psi_{221}, \Psi_{223}, \Psi_{331}, \Psi_{332}, \Psi_{123}. \quad (6.52)$$

Обсудим, наконец, представления группы Лоренца. Мы установили [см. формулу (6.36)], что алгебра $so(3, 1)$ представляет собой

¹Группа $SU(n)$ «присоединяет» в качестве представления свою собственную алгебру. Присоединённое представление существует, очевидно, у любой группы Ли, не только у $SU(n)$.

прямую сумму двух алгебр $\mathfrak{so}(3) \equiv \mathfrak{su}(2)$. Математическое следствие этого есть тот факт, что группа $SO(3, 1)$ представляет собой в некотором смысле произведение двух групп $SU(2)$.

Чтобы понять в каком именно смысле это есть произведение (и что в точности такое произведение двух групп), заметим, что произвольный элемент $SO(3, 1)$ может быть записан как произведение двух факторов,

$$O = \exp\{iM^a u^a\} \exp\{iN^a u^{*a}\}, \quad (6.53)$$

где u^a — комплексные параметры. Это следует из:

- (а) выражения (6.37) для инфинитезимального элемента;
- (б) общей формулы (6.30);
- (в) коммутации $[M^a, N^b] = 0$.

Имея в виду, что как M^a , так и N^a образуют стандартную алгебру $\mathfrak{su}(2)$, можно интерпретировать каждый множитель в формуле (6.53) как элемент комплексифицированной¹ группы $SU(2)$. Важно, что эти параметры для группы, порождённой M^a , и для группы, порождённой N^a , комплексно-сопряжены друг к другу².

Формула (6.53) позволяет нам построить представления группы Лоренца — описать объекты, на которые эта группа может действовать. Так как произвольный элемент $SO(3, 1)$ есть произведение двух коммутирующих факторов [назовём их левой $SU(2)$ и правой $SU(2)$], общее представление $SO(3, 1)$ есть тензорное произведение двух независимых представлений $SU(2)$. Возьмём, например, объект $\xi_{\alpha=1,2}$, который преобразуется как спинор под действием левой группы $SU(2)$ и совсем не преобразуется под действием правой. Точно так же можно рассмотреть объект $\eta_{\dot{\alpha}=1,2}$, который преобразуется как спинор под действием правой группы $SU(2)$ и совсем не преобразуется под действием левой.

В главе 9 мы увидим, что «неточечные» и «точечные» фермионные спинорные поля описывают состояния с определённой спиральностью, такие как левое нейтрино и правое антинейтрино. Таким образом, названия «левый» и «правый» для двух групповых факторов $SU(2)$ в формуле (6.53) связаны не только с тем типографским

¹ Комплексифицированная группа — это группа с комплексными параметрами преобразований.

² Наличие комплексных параметров преобразований — это осложнение, связанное с некомпактностью группы Лоренца. В аналогичной конструкции для компактной группы $SO(4)$ все параметры были бы вещественными.

фактом, что один из них в этой формуле стоит слева, а другой — справа, но имеют более глубокое физическое обоснование.

Но в этой математической главе мы только отмечаем, что общее представление группы Лоренца есть тензорное произведение некоторых представлений левой и правой групп. Оно характеризуется двумя числами (j_L, j_R) . Каждое из них может быть либо целым, либо полуцелым. Спинорное представление ξ_α можно обозначить как $(\frac{1}{2}, 0)$, а представление $\eta_{\dot{\alpha}}$ — как $(0, \frac{1}{2})$. Имея в виду комплексную сопряжённость параметров двух групп $SU(2)$, заключаем, что представления $(\frac{1}{2}, 0)$ и $(0, \frac{1}{2})$ также комплексно-сопряжены друг другу: спинор $(\xi_\alpha)^*$ преобразуется так же, как $\eta_{\dot{\alpha}}$.

Заметим, что неточечные и точечные индексы можно поднимать и опускать инвариантными тензорами $SU(2)$: $\varepsilon_{\alpha\beta} = -\varepsilon^{\alpha\beta}$ и $\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$. Тогда

$$\xi_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} \xi^\beta, \quad \xi^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta} \xi_\beta, \quad \eta_{\dot{\alpha}} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \xi^{\dot{\beta}}, \quad \eta^{\dot{\alpha}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \xi_{\dot{\beta}}. \quad (6.54)$$

Читатель может задать резонный вопрос: матрица O в уравнении (6.53) и оба составляющих её множителя четырёхмерны, и неочевидно, как именно преобразуются 2-компонентные спиноры ξ_α и $\eta_{\dot{\alpha}}$.

Чтобы определить действие обычных вращений на обычные спиноры, надо было заменить ортогональную трёхмерную матрицу O унитарной двумерной матрицей U , связанной с O формулой (6.42). Аналогично чтобы определить действие преобразования Лоренца на спиноры ξ_α и $\eta_{\dot{\alpha}}$, надо заменить матрицу O в формуле (6.53) двумерной комплексной матрицей

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad (6.55)$$

с единичным детерминантом,

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1. \quad (6.56)$$

Без наложения последнего условия группа матриц (6.55) имела бы $4 \cdot 2 = 8$ вещественных параметров. Одна комплексная или две вещественные связи (6.56) ограничивают их число до 6, как и должно быть для группы Лоренца. Можно вывести формулу, аналогичную (6.42), которая связывает g и O , но мы этого здесь делать не будем. В конце концов, наша книга полупопулярна, и мы не обязаны (скорее — обязаны не) вдаваться в технические детали.

В терминах g действие группы Лоренца на спиноры выражается очень просто:

$$\xi \rightarrow g\xi, \quad \eta \rightarrow \eta g^\dagger. \quad (6.57)$$

Рассмотрим теперь представление $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Поле, принадлежащее этому представлению, несёт два индекса — точечный и неточечный. Обозначим его $V_{\alpha\dot{\alpha}}$. Оно преобразуется по Лоренцу как

$$V \rightarrow gVg^\dagger. \quad (6.58)$$

Общая комплексная матрица V зависит от восьми параметров, но это, как говорят математики, *приводимое* представление. «Приводимое» означает, что число независимых параметров, характеризующих представление, может быть уменьшено при наложении некоторых связей. В нашем случае на V можно наложить требование эрмитовости — эрмитова матрица, преобразованная согласно закону (6.58), остаётся эрмитовой. Эрмитова матрица V имеет 4 независимых параметра. Это попросту четырёхмерный вектор! Явное выражение компонент матрицы (6.58) через компоненты 4-вектора V_μ есть

$$V_{\alpha\dot{\alpha}} = \begin{pmatrix} V_0 - V_3 & -V_1 + iV_2 \\ -V_1 - iV_2 & V_0 + V_3 \end{pmatrix} = V_0 - V_j \sigma_j = \sigma^\mu V_\mu, \quad (6.59)$$

где мы ввели матричный 4-вектор

$$\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \boldsymbol{\sigma}) \quad (6.60)$$

[см. формулу (2.11)].

6.4. Грассманова алгебра

Поговорим теперь совсем на другую тему. Мы могли бы перенести объяснение того, что такое грассмановы числа и грассманова алгебра, в главу 9 — туда, где они нам реально понадобятся, но мне показалось более логичным свести все необходимые математические сведения в одну главу.

Грассмановы числа — это *антикоммутирующие* числа. Читателя не должно сильно удивить это понятие. Он знает, что в математике есть объекты, которые не коммутируют при умножении (например, матрицы не коммутируют, а различные матрицы Паули вдобавок антикоммутируют). Грассмановы числа — это просто специальный класс таких объектов.

Основные определения следующие.

- Пусть $\{a_i\}$ — набор n антикоммутирующих переменных: $a_i a_j + a_j a_i = 0$. Произвольный элемент основанной на них грассмановой алгебры даётся функцией $f(a_i) = c_0 + c_i a_i + c_{ij} a_i a_j + \dots$, где коэффициенты $c_0, c_i, \dots$ — обыкновенные числа (действительные или комплексные). Этот ряд с необходимостью заканчивается на $(n+1)$ -м члене: $(n+2)$ -й член ряда содержал бы квадрат какой-нибудь антикоммутирующей переменной (например, a_1^2), что есть нуль. Заметим, что даже если грассманово число типа $a_1 a_2$ коммутирует с остальными, его всё равно нельзя рассматривать как обыкновенное число, это *чётный элемент* нашей грассмановой алгебры. Есть также, конечно, нечётные антикоммутирующие элементы. Переменные $\{a_i\}$ называются *генераторами* алгебры.

- Грассмановы числа можно складывать,

$$f(a_i) + g(a_i) = c_0 + d_0 + (c_i + d_i)a_i + \dots,$$

и перемножать. Например,

$$(1 + a_1 + a_2)(1 + a_1 - a_2) = 1 + 2a_1 - 2a_1 a_2$$

(использовались свойства антикоммутации a_i).

- Можно также дифференцировать функции $f(a_i)$ по отношению к грассмановым переменным: $\partial/\partial a_i(1) \stackrel{\text{def}}{=} 0$, $\partial/\partial a_i(a_j) \stackrel{\text{def}}{=} \delta_{ij}$; производная суммы есть сумма производных, и производная произведения вычисляется по правилу Лейбница с той модификацией, что оператор $\partial/\partial a_i$ следует понимать как грассманову переменную, что иногда приводит к смене знака, когда мы тянем $\partial/\partial a_i$ направо, чтобы подвести к соответствующей переменной a_i , которую этот оператор уничтожает. Например, $\partial/\partial a_1(a_2 a_3 a_1) = a_2 a_3$, но $\partial/\partial a_1(a_2 a_1 a_3) = -a_2 a_3$.
- По грассмановым переменным можно также интегрировать. Это, конечно, не обычный интеграл, его нельзя получить как предел интегральных сумм, нельзя посчитать численно «в конечных пределах» (это не имеет смысла для грассмановых чисел) методом Симпсона и т. д. Можно, однако, взять интеграл по грассмановой переменной «по всей области» (если угодно, «от $-\infty$ до ∞ », хотя это тоже не имеет смысла). Смысл имеет определение, предложенное Феликсом Березиным: $\int da_j f(a) \stackrel{\text{def}}{=} \partial/\partial a_j f(a)$.
- Если грассманова алгебра включает чётное число $2n$ генераторов, то можно их разделить на две равные части, $\{a_{j=1, \dots, 2n}\} \rightarrow$

$\rightarrow \{a_{j=1,\dots,n}, a_{j=1,\dots,n}^\dagger\}$, и ввести оператор инволюции $a_j \leftrightarrow a_j^\dagger$, который мы будем отождествлять с комплексным сопряжением. Мы, в частности, будем полагать, что одновременно с инволюцией генераторов происходит комплексное сопряжение обычных чисел:

$$f(a) = c_0 + c_i a_i + d_i a_i^\dagger + \dots \rightarrow f^\dagger(a) = c_0^* + c_i^* a_i^\dagger + d_i^* a_i + \dots$$

Удобно также предположить, что для любых двух элементов f, g грассмановой алгебры выполняется такое же свойство, как для эрмитова сопряжения: $(fg)^\dagger = g^\dagger f^\dagger$ (и поэтому мы используем для этой операции такое же обозначение †).

Глава 7

Ликбез по теормеху

Читатель, возможно, слушал лекции по теоретической механике в университете. Если нет, то существует много хороших книг, где ясно объяснены её принципы. Я рекомендую две из них. Чтобы ознакомиться с коротким и очень педагогичным введением в предмет, откройте главу 19 второго тома лекций Фейнмана. А серьёзное (и в то же время сжатое) изложение этой науки дано в «Механике» Ландау и Лифшица — в первом томе их знаменитого курса.

Или просто оставайтесь с нами. Чтобы сделать книгу самодостаточной, мы даём в первой части этой главы краткий конспект лагранжева и гамильтонова описания обычной механики. Во второй части главы мы применяем эти методы к описанию релятивистских и полевых систем.

7.1. Нерелятивистская механика

В предыдущих главах мы уже побродили немного по залам и коридорам кубического здания физики, схематически изображённого на рис. 4.5. Но теперь мы возвращаемся в самый первый, входной зал. Не обращая внимания на картины и инсталляции, мы подходим к книжной полке, берём книги Фейнмана и Ландау и углубляемся в чтение.

Начнём с простейшего нетривиального примера: движения вертикально брошенного в небо камня. Рассмотрим все возможные траектории $z(t)$, такие что в начальный момент времени t_0 камень находится на высоте z_0 , а в некоторый более поздний момент времени $t_1 > t_0$ его высота равна z_1 . Значения $t_{0,1}$ и $z_{0,1}$ будем предполагать фиксированными.

Вычислим интеграл действия

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt (T - U) = \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\frac{m\dot{z}^2}{2} - mgz \right], \quad (7.1)$$

где T — кинетическая, а U — потенциальная энергии. Утверждение (принцип наименьшего действия) состоит в том, что для истинной

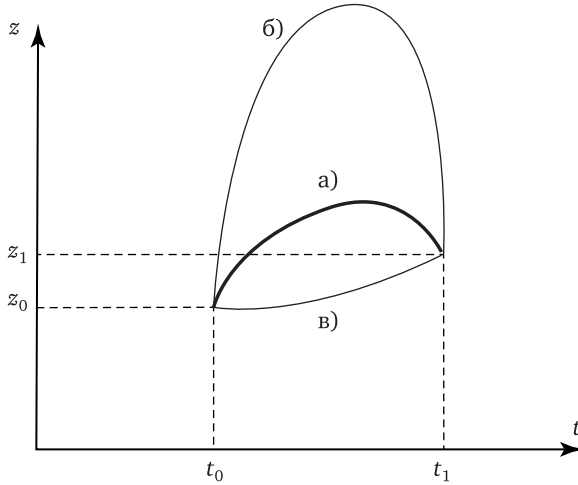


Рис. 7.1. Траектории камня: а) с минимальным действием; б) слишком большое T ; в) слишком маленькое U

физической траектории $z^{\text{физ}}(t)$ этот интеграл принимает минимальное значение. Это проиллюстрировано на рис. 7.1. Чтобы достичь минимального значения действия (7.1), камню хотелось бы увеличить свою потенциальную энергию и забраться как можно выше. Но поскольку у него назначено свидание — в фиксированный момент времени t_1 он должен оказаться в точке z_1 , — он не может забираться слишком высоко. Тогда он пролетел бы большое расстояние, для чего он должен был бы лететь с большой скоростью, а тогда интеграл действия (7.1) получил бы большой положительный вклад от члена с кинетической энергией.

Истинная траектория, кривая а) на рис. 7.1, — это результат переговорного компромисса между T и U .

Рассмотрим теперь общую механическую систему с n динамическими переменными q_i . Выберем функционал¹ действия $S[q_i(t)]$ в виде

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt L(\dot{q}_i, q_i). \quad (7.2)$$

Это не самая общая возможная форма действия, она включает два ограничения.

¹ Функционал — это функция от функционального аргумента.

- Мы предположили, что *лагранжиан* L не зависит от времени явно [а только через посредство $q_i(t)$]. Если бы такая явная зависимость имела место, система не была бы *консервативной*; её энергия зависела бы от времени. А в нашей книге мы имели и будем иметь дело только с консервативными системами.
- Мы предположили, что лагранжиан зависит только от *обобщённых координат* q_i и *обобщённых скоростей* $\dot{q}_i$, но не от $\ddot{q}_i$, $\ddot{\ddot{q}}_i$ и т. д. Системы, включающие высшие временные производные, имеют специфическую динамику — ваш автор немного интересовался ими, и мы обсудим такие системы¹ в главе 16. Но в этой книге наша главная задача — построить и объяснить лагранжиан Стандартной модели, который зависит только от полей и их первых производных.

Задача состоит в том, чтобы найти траектории, удовлетворяющие граничным условиям

$$q_i(t_0) = q_i^{(0)}, \quad q_i(t_1) = q_i^{(1)}, \quad (7.3)$$

так чтобы интеграл (7.2) принимал минимальное возможное значение.

Необходимое условие для экстремума гладкой функции f — это обращение в нуль всех её частных производных и, как следствие, дифференциала df . А необходимое условие экстремума функционала — это обращение в нуль его *вариации*. Вариация действия (7.2) даётся выражением²

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i(t) \right]. \quad (7.4)$$

Удобно проинтегрировать по частям второй член. Граничный член исчезает ввиду фиксированных граничных условий (7.3) — мы варьируем только по траекториям, которые им удовлетворяют, так что

$$\delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_1) = 0. \quad (7.5)$$

¹ Имеются некоторые основания полагать, что Единая теория всего — гипотетическая фундаментальная теория всех взаимодействий, включающая также гравитацию, — содержит высшие производные.

² Оно записано с использованием эйнштейновского соглашения о суммировании, несмотря на то что набор q_i не есть вектор в обычном смысле.

Мы получаем

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i(t). \quad (7.6)$$

Это выражение должно обращаться в нуль для *любой* вариации $\delta q_i(t)$, удовлетворяющей условию (7.5). Отсюда следует, что

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (7.7)$$

Мы вывели *уравнения Лагранжа*. Уравнения (7.7) представляют собой систему n обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. В простом случае (7.1) мы получаем второй закон Ньютона $m\ddot{z} = -mg$.

Лагранжиан, не зависящий от времени явно, инвариантен относительно временных сдвигов $t \rightarrow t + \Delta t$. По теореме Нётер¹ каждая инвариантность (симметрия) лагранжиана влечёт за собой особый закон сохранения. Инвариантность относительно временных сдвигов влечёт сохранение энергии. Действительно, вы можете проверить, что энергия, определяемая как

$$E = \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L, \quad (7.8)$$

есть *интеграл движения* — на траектории $q_i(t)$, удовлетворяющей уравнениям движения (7.7), временная производная энергии обращается в нуль.

Определим теперь *обобщённые импульсы*

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (7.9)$$

выразим через них обобщённые скорости $\dot{q}_i$ и подставим их в таком виде в формулу (7.8). Мы получим *гамильтониан* — энергию, выраженную в терминах канонических координат и импульсов. Координаты и импульсы параметризуют *фазовое пространство* системы.

¹Эмми Нётер была замечательным математиком. Возможно, наиболее значительной женщиной в истории математики. Она работала в Германии в начале XX века. В 1919 г. она получила профессорскую позицию в университете Гёттингена. Но это было для неё непросто. В то время в университетах не было женщин, и её коллеги не очень хотели создавать прецедент. Один из профессоров запротестовал: «О чем подумают наши вернувшиеся с фронта в университет солдаты, когда они узнают, что им придётся учиться у ног женщины?» Судьба Нётер была решена вмешательством Давида Гильберта, крупнейшего и наиболее уважаемого немецкого математика того времени. «Aber, meine Herren, — сказал Гильберт, — университет — это всё-таки не мужская баня!»

Уравнения движения в фазовом пространстве (уравнения Гамильтона) имеют вид

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (7.10)$$

Уравнения (7.10) представляют собой систему $2n$ дифференциальных уравнений первого порядка. Они эквивалентны уравнениям Лагранжа (7.7). Чтобы это увидеть, вычислим дифференциал гамильтониана. Имея в виду уравнения (7.7) и определение (7.9), можно записать

$$\begin{aligned} dH = d(p_i \dot{q}_i - L) &= \dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \\ &= \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i \end{aligned} \quad (7.11)$$

откуда следуют уравнения (7.10).

Пусть $f(q_i, p_i)$ — функция на фазовом пространстве. С учётом того, что эволюция системы $q_i(t)$, $p_i(t)$ описывается уравнениями Гамильтона (7.10), полная временная производная этой функции есть

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i}. \quad (7.12)$$

Сумма в правой части называется *скобкой Пуассона* $\{H, f\} = -\{f, H\}$.

Таким образом, необходимое и достаточное условие того, что функция f — это интеграл движения, есть обращение в нуль скобки Пуассона $\{H, f\}$.

Это «классическая» глава, но невозможно не упомянуть здесь известный большинству читателей факт, что в квантовой механике функциям на классическом фазовом пространстве соответствуют операторы. Явные выражения для этих квантовых операторов получаются из $f(q_i, p_i)$ заменой $p_i \rightarrow -i\hbar \partial / \partial q_i$. В простых случаях, как для гамильтониана

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}), \quad (7.13)$$

описывающего движение частицы во внешнем потенциальном поле, это правило соответствия приводит к известному квантовому гамильтониану (4.9). В более экзотических случаях, как, например, для гамильтониана $H = p^2 q^2$, необходимо разрешить *неоднозначности упорядочения* и решить, где следует помещать производные — слева от q^2 , справа или посередине. Но мы в такие тонкости в нашей книге вдаваться не будем.

Заметим также, что квантовый аналог классической скобки Пуассона — это коммутатор двух операторов. Квантовый оператор описывает сохраняющуюся физическую величину, если он коммутирует с гамильтонианом.

7.2. Сила Лоренца

Чтобы показать, как работают описанные выше методы, мы выведем с их помощью уравнение движения для релятивистской заряженной частицы во внешних электрическом и магнитном полях. Для электрона, несущего заряд $e = -|e|$, это уравнение имеет вид

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]\right). \quad (7.14)$$

Вы знаете это выражение из университетского курса электромагнетизма, но, вероятно, выражение (7.14) для силы было там просто постулировано, но не выведено¹. А мы сейчас выведем его, используя методы из предыдущего параграфа и вспоминая одновременно некоторые основные положения специальной теории относительности.

Рассмотрим вначале случай, когда внешние поля отсутствуют и мы имеем дело с обычной свободной релятивистской частицей. Запишем действие. Оно должно быть лоренцевым скаляром (инвариантом преобразований Лоренца). Что ж, один такой скаляр мы хорошо знаем — это инвариантный интервал (6.12) между начальной и конечной точками траектории. В случае свободной частицы никакого другого такого инварианта не видно и действие должно быть пропорционально (6.12), что мы можем представить в виде

$$S = Cmc \int_0^1 ds, \quad (7.15)$$

где ds определяется формулой (4.21), а пределы 0, 1 не обозначают начального и конечного значений s (это не имело бы смысла), но просто указывают, что интеграл берётся вдоль некоторой траектории, соединяющей начальную и конечную точки 0 и 1 в пространстве Минковского. Выражение (7.15) имеет правильную размерность. Численная константа C — это чистая условность (она не

¹ Даже Фейнман не сделал этого в своих лекциях. К сожалению, обычные университетские курсы теоретической механики и электромагнетизма, как правило, «не коммутируют».

влияет на динамику), но наиболее удобно выбрать $C = -1$. Мы очень скоро увидим, что в нерелятивистском пределе выражение

$$S = -mc \int_0^1 ds \quad (7.16)$$

переходит (с точностью до некоторой несущественной аддитивной константы) в известное нерелятивистское выражение для свободного действия.

Чтобы записать лагранжиан, необходимо переписать интеграл по инвариантному интервалу (7.16) как интеграл по времени. Мы знаем, что

$$ds = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2} = c dt \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (7.17)$$

Отсюда следует

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (7.18)$$

Для малых скоростей это сводится, как было обещано, к уравнению $L = -mc^2 + mv^2/2 + \dots$

Обобщённый импульс для релятивистского лагранжиана (7.18) есть

$$\mathbf{p} = \frac{\delta L}{\delta \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (7.19)$$

— хорошо известное выражение для релятивистского импульса. Лагранжево уравнение движение есть

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0. \quad (7.20)$$

Релятивистская энергия имеет вид

$$E = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (7.21)$$

Она выражается через обобщённый импульс (7.19) как

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2}. \quad (7.22)$$

Это гамильтониан свободной релятивистской частицы.

Включим теперь электромагнитное поле. Оно характеризуется четырёхмерным векторным потенциалом $A^\mu = (\varphi, \mathbf{A})$ [и $A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu = (\varphi, -\mathbf{A})$] и антисимметричным тензором напряжённо-

сти:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.23)$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ — электрическое и магнитное поля. В трёхмерных обозначениях

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (7.24)$$

В присутствии поля можно написать помимо (7.16) другой лоренцев инвариант $\propto \int A_\mu dx^\mu$. Добавление его в действие искривляет траекторию частицы. Ясно, что коэффициент, с которым он входит, пропорционален электрическому заряду. В стандартной конвенции

$$S = -mc \int_0^1 ds - \frac{e}{c} \int_0^1 A_\mu dx^\mu, \quad (7.25)$$

Переписав это как интеграл по времени, мы получаем

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2} - e\varphi + \frac{e}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}. \quad (7.26)$$

Члены, пропорциональные заряду и описывающие взаимодействие частицы с полем, могут быть представлены как [ср. формулу (5.3)!]

$$L^{\text{int}} = -e \int A_\mu j^\mu d^3x, \quad (7.27)$$

где

$$j^\mu(\mathbf{x}) = \left(j^0, \frac{\mathbf{j}}{c}\right) = \left(1, \frac{\mathbf{v}}{c}\right) \delta[\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t)] \quad (7.28)$$

— плотность тока, соответствующая точечной частице, движущейся по траектории $\mathbf{x}_0(t)$. Отметим свойство¹

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} j^0 + \nabla \cdot \mathbf{j} \right) = 0. \quad (7.29)$$

¹ Оно легко выводится с учётом соотношения $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}_0$.

Это важнейший закон *сохранения тока* (он сводится здесь к сохранению числа электронов и, следовательно, к сохранению электрического заряда).

Обобщённый импульс, отвечающий лагранжиану (7.26), есть

$$\mathbf{P} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}. \quad (7.30)$$

Замётим, что в присутствии векторного потенциала и связанного с ним магнитного поля обобщённый импульс $\mathbf{P}$ не совпадает с *кинетическим* импульсом $\mathbf{p}$, даваемым выражением (7.19).

Лагранжевы уравнения движения имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left[p_i + \frac{e}{c} A_i \right] = -e \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{e}{c} \frac{\partial A_j}{\partial x_i} v_j. \quad (7.31)$$

Заметим теперь, что полная временная производная векторного потенциала есть сумма двух членов:

$$\frac{dA_i(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial A_i}{\partial x_j} v_j. \quad (7.32)$$

Здесь первый член, частная производная $\partial A/\partial t$, описывает изменение векторного потенциала со временем в данной пространственной точке. А всё вместе описывает временное изменение потенциала в точке, которая движется вместе с частицей. В конечном итоге мы получаем

$$\frac{dp_i}{dt} = e \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) v_j, \quad (7.33)$$

что совпадает с (7.14).

Напишем также выражение для канонического гамильтониана этой системы:

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\varphi. \quad (7.34)$$

7.3. Полевые теории

Наша книга посвящена квантовой теории поля. Чтобы разобраться в этой непростой области науки, надо хорошо понимать, что такое *классическая* полевая теория. Какие-то знания об этом у нашего читателя уже есть. Он изучал теорию Максвелла в университете; он прочитал четвертую главу этой книги, где мы рассказывали о разных полевых системах и писали полевые уравнения движения.

Но эти уравнения там не выводились, а только постулировались. В данном параграфе мы выведем уравнения КФГ, а также уравнения Максвелла из фундаментального принципа наименьшего действия. Мы запишем также выражения для соответствующих полевых гамильтонианов.

Начнём с теории комплексного скалярного поля, которая проще теории Максвелла. Для полевых теорий функционал действия представляет собой не просто временной интеграл, но четырёхмерный интеграл по пространственным и временной координатам:

$$S = \int dt \int dx \mathcal{L}. \quad (7.35)$$

Подынтегральное выражение есть пространственная плотность лагранжиана. А сам лагранжиан даётся интегралом

$$L = \int dx \mathcal{L}. \quad (7.36)$$

Однако ленивые теоретики часто опускают в разговоре слова «пространственная плотность» и называют лагранжианом величину $\mathcal{L}$. В дальнейшем (но по большей части не в этой главе) мы также последуем их примеру.

Мы хотим, чтобы действие было инвариантным относительно преобразований Лоренца. Для этого и $\mathcal{L}$ должно быть лоренцевым скаляром.

Отметим следующее. В классической механике мы пишем для действия интеграл по времени, взятый в конечных пределах — от t_0 до t_1 , и фиксируем на этих пределах значения динамических переменных. При этом интеграл (7.2) имеет смысл действия на траектории, описывающей переход от $q^{(0)}$ при t_0 до $q^{(1)}$ при t_1 . То же можно в принципе сделать и в случае полевых теорий¹. Но выбирать конечные пределы во временном интеграле и не делать этого в интегралах пространственных не очень «эстетично», это не есть лоренц-инвариантная процедура. Мы предпочитаем интегрировать по всему пространству-времени, $-\infty < t, \mathbf{x} < \infty$, и требовать при этом, чтобы поле $\varphi(t, \mathbf{x})$ обращалось в нуль на пространственной бесконечности, в отдалённом прошлом и в отдалённом будущем.

Основываясь на нашем опыте для механических систем, мы предположим, что плотность лагранжиана $\mathcal{L}$ зависит от полей φ , φ^* и их

¹ Так и поступают для строгого вывода амплитуд рассеяния в квантовой теории поля. Но такой уровень строгости — за пределами нашей книги.

первых производных $\partial_\mu \varphi, \partial_\mu \varphi^*$. Рассмотрим вариацию действия. Мы можем написать

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} \delta \varphi(x) + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \varphi)} \partial_\mu (\delta \varphi(x)) \right] + \left(\begin{array}{c} \text{комплексно-} \\ \text{сопряжённое} \end{array} \right) \quad (7.37)$$

[использовалось равенство $\delta(\partial_\mu \varphi) = \partial_\mu(\delta \varphi)$]. В этом выражении $\delta \mathcal{L}/\delta \varphi$ и $\delta \mathcal{L}/\delta(\partial_\mu \varphi)$ представляют собой частные производные функции $\mathcal{L}(\varphi, \varphi^*; \partial_\mu \varphi, \partial_\mu \varphi^*)$ по отношению к её аргументам. Мы используем здесь символ δ вместо ∂ , чтобы не путать эти частные производные с обыкновенными пространственно-временными производными $\partial_\mu \varphi = \partial \varphi / \partial x^\mu$.

Точно так же, как мы это делали для механических систем, мы интегрируем теперь по частям второй член в формуле (7.37) и получаем

$$\delta S = \int d^4x \delta \varphi(x) \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} - \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \varphi)} \right) \right] + \left(\begin{array}{c} \text{комплексно-} \\ \text{сопряжённое} \end{array} \right). \quad (7.38)$$

Граничный член здесь исчезает ввиду наложенного нами граничного условия — зануления полей на бесконечности.

Интеграл (7.38) должен обращаться в нуль при любой вариации $\delta \varphi(t, \mathbf{x})$. Это возможно, только если

$$\partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \varphi)} \right) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} = 0. \quad (7.39)$$

Это дифференциальное уравнение в частных производных есть лагранжево уравнение движения для нашей системы. Оно представляет собой довольно прозрачное обобщение обыкновенных уравнений Лагранжа (7.7)¹.

Выберем $\mathcal{L}$ в следующей простой форме (мы возвращаемся к естественным единицам):

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi) - m^2 \varphi^* \varphi. \quad (7.40)$$

Уравнение (7.39) совпадает в этом случае (с точностью до комплексного сопряжения) с уравнением КФГ (4.28)! Таким образом, плотность лагранжиана (7.40) описывает свободное комплексное скалярное поле.

¹Имея в виду дальнейшие применения к физике высоких энергий, мы записали это уравнение в релятивистских обозначениях с 4-вектором ∂_μ . Но можно записать уравнения движения и для нерелятивистской полевой системы, заменив

$$\partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \varphi)} \right) \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\varphi}_i} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\nabla \varphi_i)} \right),$$

где φ_i — имеющийся в теории набор нерелятивистских полей. Таким образом можно вывести, например, уравнение (4.27) для звуковых волн.

Нетрудно записать также $\mathcal{L}$ для свободного вещественного скалярного поля. Нужно только убрать в формуле (7.40) звёздочки и ввести для удобства общий фактор $1/2$.

В естественных единицах действие (7.35) безразмерно, а плотность $\mathcal{L}$ имеет размерность m^4 . Взглянув на выражение (7.40), мы заключаем, что φ несёт размерность массы, такую же как электромагнитный потенциал A_μ .

Рассмотрим теперь теорию¹

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi) - m^2 \varphi^* \varphi - \frac{\lambda}{4} (\varphi^* \varphi)^2. \quad (7.41)$$

с положительным λ (см. ниже). Её уравнение движения

$$(\square + m^2)\varphi + \frac{\lambda}{2}\varphi^2\varphi^* = 0 \quad (7.42)$$

нелинейно и нетривиально. Мы имеем дело с непростой теорией взаимодействующего скалярного поля.

Построим теперь канонический гамильтониан. Заметим, что, в отличие от плотности лагранжиана, плотность гамильтониана — не лоренцев скаляр, а компонента T^{00} так называемого тензора энергии-импульса² (сам же гамильтониан представляет нулевую компоненту 4-вектора). Поэтому не удивительно, что каноническая процедура построения полевого гамильтониана не лоренц-ковариантна.

На первом этапе мы определяем обобщённые импульсы

$$\Pi = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 \varphi)} = \partial_0 \varphi^*, \quad \Pi^* = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 \varphi^*)} = \partial_0 \varphi. \quad (7.43)$$

Тогда плотность гамильтониана есть

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \Pi^* \partial_0 \varphi^* + \Pi \partial_0 \varphi - \mathcal{L} = \\ &= \Pi^* \Pi + (\partial_i \varphi^*)(\partial_i \varphi) + m^2 \varphi^* \varphi + \frac{\lambda}{4} (\varphi^* \varphi)^2. \end{aligned} \quad (7.44)$$

Она положительно определена. Это объясняет выбор знака для m^2 в формуле (7.40) и также знак λ в формуле (7.41). При отрицательном λ гамильтониан (7.44) и, значит, энергия системы, не были бы

¹Мы встречаемся с ней не в первый раз — см. уравнение (4.47) и последующее обсуждение.

²Мы встретимся с ним в главе 15.

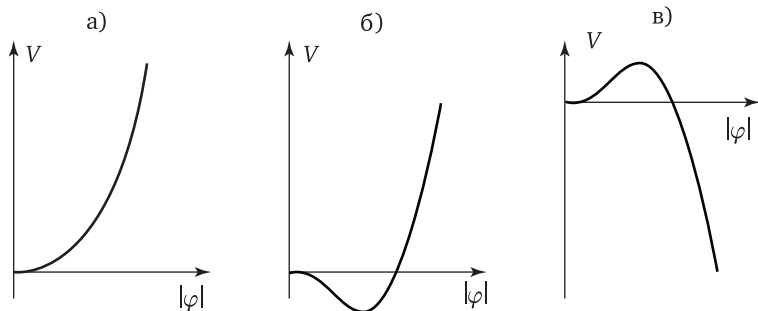


Рис. 7.2. Скалярные потенциалы (7.44) при различном выборе параметров: а) $m^2, \lambda > 0$: стабильный классический вакуум при $\varphi = 0$; б) $\lambda > 0, m^2 < 0$: стабильный классический вакуум при $|\varphi|^2 = 2|m^2|/\lambda$; в) $\lambda < 0$: стабильного вакуума нет

ограничены снизу. Что ещё хуже¹, классические уравнения движения (7.42) не имели бы в этом случае решения — поле φ выросло бы до бесконечности за конечное время. Такие теории плохи и не становятся лучше при попытках их проквантовать.

С другой стороны, в теории (7.41) при $\lambda > 0$ и $m^2 < 0$ нет абсолютно никаких проблем. Потенциальная часть гамильтониана есть

$$V(\varphi^*, \varphi) = \frac{\lambda}{4}(\varphi^* \varphi)^2 - |m^2| \varphi^* \varphi. \quad (7.45)$$

Конечно, минимум потенциальной энергии теперь не в нуле, как это было в случае $\lambda, m^2 > 0$, а при

$$\varphi^* \varphi = \frac{2|m^2|}{\lambda}. \quad (7.46)$$

Это необычно, но не приводит к разрушающим теорию противоречиям. Напротив, теория с потенциалом (7.45) включает весьма интересный и нетривиальный эффект Голдстоуна, связанный с эффектом Хиггса, упомянутым в главе 5, — деликатесным *фуа-гра* в нашем наборе «Закусок». Мы будем детально обсуждать эти эффекты в главах 11 и 12.

¹ В свободной теории с потенциалом $V = -m^2 \varphi^* \varphi$ гамильтониан тоже не имеет дна. В этом экзотическом тахионном случае поле φ не осциллирует, а экспоненциально растёт со временем. Однако в свободной тахионной теории (при наличии взаимодействия это не так) оно остаётся конечным и не врежется в сингулярность при конечном t ; коллапса не происходит, и теория не содержит явных противоречий...

В сущности, это примечание адресовано не нашей «целевой аудитории», не Соне, но скорее эксперту, который может случайно раскрыть нашу книгу. В последней главе мы вернёмся к обсуждению этих нетривиальных вопросов.

Мы построили классический гамильтониан $H = \int d^3x \mathcal{H}(\mathbf{x})$. Но его нетрудно проквантовать — для этого, согласно общим правилам, надо заменить классические обобщённые импульсы $\Pi(\mathbf{x})$ и $\Pi^*(\mathbf{x})$ на функциональные дифференциальные операторы¹

$$\Pi(\mathbf{x}) \rightarrow -i \frac{\delta}{\delta \varphi(\mathbf{x})}, \quad \Pi^*(\mathbf{x}) \rightarrow -i \frac{\delta}{\delta \varphi^*(\mathbf{x})}. \quad (7.47)$$

Мы можем выполнить теперь наше старое обещание и вывести написанные нами ранее выражения (4.36) и (4.37) для квантового полевого гамильтониана свободного скалярного поля. Для этого мы вычёркиваем член с взаимодействием в формуле (7.44), помещаем систему в конечный ящик размера L и заменяем континуальное множество динамических переменных $\{\varphi(\mathbf{x})\}$ на дискретный набор коэффициентов Фурье, как в формуле (4.35). Мы получаем²

$$\frac{\delta}{\delta \varphi(\mathbf{x})} = \frac{1}{V} \sum_n \exp\left\{-\frac{2\pi i \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{L}\right\} \frac{\delta}{\delta c_n}. \quad (7.49)$$

Подставляя это выражение в формулу (7.44) и интегрируя по d^3x , мы приходим к соотношению (4.36).

Гамильтониан (4.36) коммутирует с оператором

$$\mathbf{P} = \frac{2\pi i}{L} \sum_n \mathbf{n} (c_n^* \Pi_n^\dagger - c_n \Pi_n) \quad (7.50)$$

($\Pi_n = -i\partial/\partial c_n$, $\Pi_n^\dagger = -i\partial/\partial c_n^*$). Этот интеграл движения есть не что иное, как трёхмерный импульс поля. Мы можем теперь понять происхождение знаков в формулах (4.43) и (4.44). Собственное значение $\mathbf{P}$ в состоянии (4.43) есть действительно $2\pi \mathbf{n}_0/L$, в то время как импульс состояния (4.44) есть $-2\pi \mathbf{n}_0/L$. Импульс вакуумного состояния (4.45) равен, разумеется, нулю.

В квантовой теории поля $\varphi(\mathbf{x})$ и $\varphi^*(\mathbf{x})$ становятся операторами. Матричные элементы этих операторов и их фурье-компонент c_n ,

¹ При действии на лагранжеву плотность $\mathcal{L}[\varphi(\mathbf{x}), \varphi^*(\mathbf{x}); \partial\varphi(\mathbf{x}), \partial\varphi^*(\mathbf{x})]$ оператор $\delta/\delta\varphi(\mathbf{x})$ был обыкновенной частной производной. Но в квантовой теории поля операторы в правой части (7.47) имеют смысл функциональных производных, действующих на волновой функционал (4.34).

² Читатель может проверить, что

$$\frac{\delta}{\delta \varphi(\mathbf{x})} \varphi(\mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (7.48)$$

заменяя сумму по модам на интеграл по импульсам:

$$\sum_n \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3p.$$

c_n^* в фоковском пространстве (нам встретятся подобные матричные элементы в главе 10 и в главе 12) нетривиальны. Чтобы понять, как они выглядят, вспомним, что происходит для обычного гармонического осциллятора (4.38). Как вы знаете, для него можно определить повышающие и понижающие операторы (или операторы рождения и уничтожения):

$$\hat{a}^\dagger = \frac{m\omega x - i\hat{p}}{\sqrt{2m\omega}}, \quad \hat{a} = \frac{m\omega x + i\hat{p}}{\sqrt{2m\omega}}. \quad (7.51)$$

Оператор $\hat{a}^\dagger$, действуя на состояние осциллятора с квантовым числом k , рождает состояние $|k+1\rangle$, в то время как действие оператора $\hat{a}$ даёт состояние $|k-1\rangle$ (и $\hat{a}|0\rangle = 0$). Оператор координаты x пропорционален сумме $\hat{a}^\dagger + \hat{a}$ и имеет матричные элементы двух типов,

$$\langle k+1|x|k\rangle = \langle k|x|k+1\rangle = \sqrt{\frac{k+1}{2m\omega}}. \quad (7.52)$$

Аналогично с этим, оператор c_n , действующий на фоковское состояние $|\Psi\rangle$, даёт суперпозицию двух состояний: (а) состояние, где рождена дополнительная античастица с импульсом $-2\pi\mathbf{n}/L$, и (б) состояние, где больше нет частицы с импульсом $2\pi\mathbf{n}/L$ (если, конечно, такая частица присутствовала в исходном состоянии $|\Psi\rangle$).

А оператор c_n^* может родить частицу с импульсом $2\pi\mathbf{n}/L$ или уничтожить античастицу с импульсом $-2\pi\mathbf{n}/L$.

Перейдём теперь к электромагнитному полю. В предыдущем параграфе мы уже вывели лагранжиан (7.27), описывающий взаимодействие электромагнитного поля с током, генерируемым точечными заряженными материальными частицами. А сейчас мы выпишем лагранжиан, описывающий электромагнитное поле само по себе.

Основной объект, играющий роль $\varphi(x)$ в этом полевом лагранжиане, — это векторный потенциал $A_\mu(x)$. Наш «скалярный» опыт говорит о том, что кинетическая часть лагранжиана должна быть квадратична по производным A_μ . Можно написать следующее симпатичное лоренц-инвариантное выражение для плотности лагранжиана:

$$\mathcal{L}^{\text{эл-магн}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \quad (7.53)$$

(коэффициент $-1/4$ — это стандартная конвенция).

Плотность (7.53) имеет замечательную симметрию, называемую *калибровочной*. Она инвариантна относительно преобразований

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi(x), \quad (7.54)$$

где $\chi(x)$ есть произвольная функция пространственных координат и времени. В самом деле,

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = \partial_\mu (A_\nu + \partial_\nu \chi) - \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu \chi) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}.$$

Таким образом, в отличие от обычных симметрий типа вращательной или лоренцевой симметрии с конечным числом параметров преобразований (такие симметрии обычно называют *глобальными*), калибровочная симметрия (7.54) есть *локальная* симметрия с бесконечным числом параметров.

В некотором смысле калибровочная симметрия — не вполне симметрия, но свойство, отражающее избыточность нашего описания электромагнитного поля в терминах переменных $A_\mu(x)$. Прямой физический смысл имеет тензор $F_{\mu\nu}$, включающий электрическое и магнитное поля, а не потенциал¹ $A_\mu(x)$.

Именно свойство калибровочной симметрии отличает плотность (7.53) от другой возможной лоренц-инвариантной структуры²

$$(\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu) \equiv -A_\mu \square A^\mu. \quad (7.55)$$

Структура (7.55) не инвариантна относительно калибровочных преобразований (7.54).

Вообще говоря, плотность лагранжиана $\sim A_\mu j^\mu$, описывающая взаимодействие электромагнитного поля с материей, тоже не инвариантна относительно преобразований (7.54). Однако сам лагранжиан (7.27) инвариантен с точностью до полной временной производной — это следует из сохранения тока (7.29) (и, значит, действие $S = \int L dt$ полностью инвариантно).

Плотность лагранжиана (7.40) свободного скалярного поля включает кинетическую часть $(\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi)$ и потенциальную часть $-m^2 \varphi^* \varphi$. Можно попытаться также включить потенциальный член для электромагнитного поля. Легко написать релятивистский инвариант:

$$\mathcal{L}_{\text{пот}}^{\text{эл-магн}} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu. \quad (7.56)$$

¹ Действительно, мы можем легко измерить E и B , но не φ и A .

² Плотность лагранжиана определена с точностью до полной производной, которая не даёт вклада в действие (7.35).

Однако выражение (7.56) калибровочно не инвариантно и не годится по этой причине.

«Но почему оно не годится? — может спросить читатель. — Требование лоренц-инвариантности я признаю. Лоренцева симметрия — это фундаментальная симметрия нашего мира, и её надо уважать. Но чем плоха лоренц-инвариантная теория массивного векторного поля с лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu? \quad (7.57)$$

Да, она калибровочно не инвариантна. Нет, она калибровочно не инвариантна. И что с того?»

Ответ на этот законный вопрос следующий. *Свободная* теория (7.57) ничем не плоха. Проблемы возникают при попытке включить взаимодействие с материей. Оказывается, калибровочно неинвариантная *квантовая* полевая теория (на классическом уровне проблем нет), описывающая взаимодействие массивного векторного поля с материей, *неперенормируема* (мы уже отмечали это в главе 5 и будем обсуждать детально в главе 12). И, значит, она внутренне не самосогласована.

Лагранжевы уравнения движения, следующие из плотности

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - eA_\mu j^\mu, \quad (7.58)$$

— это уравнения Максвелла¹

$$\partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu A_\nu)} \right) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\nu} = 0 \Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} = ej^\nu. \quad (7.59)$$

Когда внешние токи отсутствуют, эти уравнения описывают пространство света, квантами которого являются безмассовые фотоны.

С другой стороны, уравнение движения, следующее из формулы (7.57), имеет вид

$$(\square + m^2)A_\nu - \partial_\nu \partial_\mu A^\mu = 0. \quad (7.60)$$

¹ Это компактная четырёхмерная запись второй пары уравнений Максвелла в системе (4.31). Первая пара уравнений в системе (4.31) — это просто следствие уравнения (4.32).

Это уравнение Прока похоже на уравнение КФГ¹. Фоковские состояния соответствующего квантового полевого гамильтониана — массивные частицы с единичным спином.

Теперь мы понимаем, чем обусловлена безмассовость физического фотона². Она следует из калибровочной инвариантности лагранжиана электромагнитного поля (7.53), которая в свою очередь необходима, чтобы сделать теорию перенормируемой!

Обратите внимание на то, что только пространственные компоненты вектор-потенциала входят в лагранжеву плотность (7.58) с временными производными. Таким образом, истинные динамические переменные суть только $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$, но не $A_0(t, \mathbf{x})$. Поля $A_0(t, \mathbf{x})$ играют роль *лагранжевых множителей*. Наличие в $\mathcal{L}$ лагранжевых множителей отражает калибровочную избыточность описания системы в терминах переменных A_μ , которую мы отмечали выше. Обобщённые импульсы, отвечающие динамическим переменным $A_i(t, \mathbf{x})$, — это электрические поля:

$$P_i = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{A}_i} = F^{0i} = -E_i. \quad (7.61)$$

Канонический гамильтониан электромагнитного поля имеет вид

$$H = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} (\mathbf{P}^2 + \mathbf{B}^2) = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2). \quad (7.62)$$

¹ Это объясняет, кстати, наш выбор знака в формуле (7.56) — мы хотим получить уравнение с осцилляторными, а не экспоненциально растущими решениями; см. примечание на с. 150.

² Экспериментальный верхний предел для фотонной массы составляет $m_\gamma < 3 \cdot 10^{-27}$ эВ. Он следует из дальнего действия электромагнитного взаимодействия — того факта, что электромагнитные поля могут простираются на большие расстояния. Мы уверены, что в нашей Галактике существуют дальнедействующие магнитные поля, потому что наблюдаемый нами свет звёзд немного поляризован, а это можно объяснить только его взаимодействием с межзвёздными магнитными полями. Поэтому комптоновская длина волны фотона не может быть намного меньше размера Галактики.

Глава 8

Сечения и амплитуды

За в основном классической следует в основном квантовомеханическая глава. Первая её часть посвящена кинематике и квантовой динамике процессов рассеяния. Этот сюжет не входит в обычные университетские курсы, но разобран во многих хороших учебниках по квантовой механике, в частности — в монументальной и энциклопедичной монографии Ландау и Лифшица или педагогичном учебнике Таннуджи.

Помимо этих книг, я рекомендую краткую и очень ясно написанную книгу «Лекции по квантовой механике» Ферми. Это конспект его лекций, которые он прочитал в 1954 г. в университете Чикаго. Теория рассеяния обсуждается там в разделах 23 и 33. Это всего несколько страниц, но они стоят того, чтобы их прочесть. Ну, и конечно, можно в библиотеку не ходить, а просто читать дальше нашу книгу.

Во второй части главы мы рассказываем о фейнмановских континуальных интегралах (или интегралах по траекториям). Этот параграф не необходим для чтения последующих глав; мы приготовим наши «Первые блюда», «Вторые блюда», и «Десерты» в лёгкой, почти вегетарианской манере, без континуальных интегралов. Или, скорее, результаты, которые требуют для их вывода метод континуальных интегралов, будут только анонсированы, но не аккуратно выведены. Но в любом случае читатель вряд ли простил бы нас, если мы бы не дали ему возможность познакомиться с этим чрезвычайно красивым понятием.

8.1. Кинематика

Представьте постоянный поток комаров, летящих вдоль оси x в положительном направлении. Количественная мера этого потока j характеризует число комаров, проходящих через ортогональную потоку единичную площадку за единицу времени. Поместим в начало координат лягушку. Она поедает пролетающих комаров. Предположим,

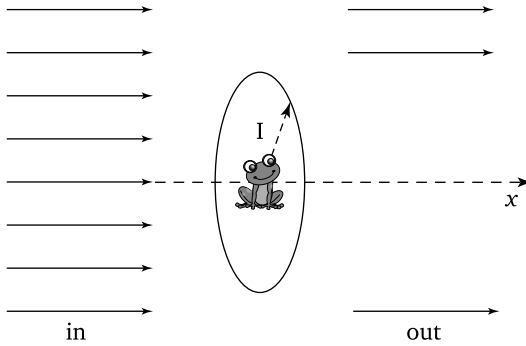


Рис. 8.1. Неупругое рассеяние на центре поглощения

что лягушка не пропускает ни одного комара, который пролетает мимо неё достаточно близко — на расстояниях, меньших, чем длина её языка l . Мы предположим далее, что эта длина намного больше характерных размеров самой лягушки и что лягушка не скачет. С другой стороны, комары, пролетающие от лягушки на больших, чем l , расстояниях, продолжают свой полёт непоглощёнными.

Умная лягушка может легко сосчитать число комаров, которыми она может сможет полакомиться за секунду. Это просто

$$n = j(\pi l^2) \equiv j\sigma. \quad (8.1)$$

Величина $\sigma = \pi l^2$ есть *эффективное поперечное сечение* поглощения комаров. Этот *процесс неупругого рассеяния* — простейшая физическая ситуация, в которой возникает понятие эффективного сечения рассеяния.

В описанной выше модели лягушка была активной, а комары пассивными. Заменяем теперь живую лягушку лягушеобразной малахитовой фигуркой. Одновременно придадим комарам некий ограниченный интеллект: увидев лягушку, но не сообразив, что она неживая, комары будут пытаться избежать встречи с ней и искривлять траекторию своего полёта. Те из них, чьё начальное расстояние от оси x было мало, отклонятся больше, а те, чьё расстояние было велико, отклонятся меньше. Мы имеем дело с *упругим* рассеянием: комары не поглощаются, и их общее число есть интеграл движения.

Поместим теперь где-то достаточно далеко от начала координат счётчики комаров и спросим: сколько комаров пролетит за единичное время через элемент телесного угла $d\Omega$. Очевидно, что это число

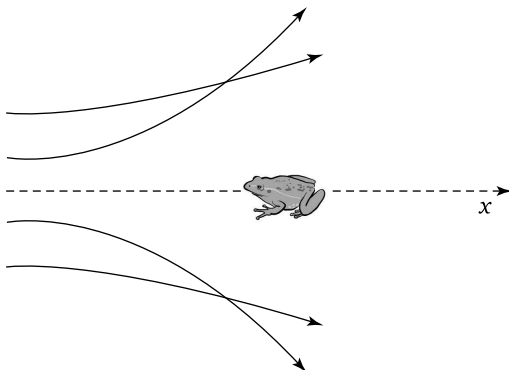


Рис. 8.2. Упругое рассеяние

пропорционально потоку j и элементу $d\Omega$. Коэффициент пропорциональности имеет размерность площади и называется *дифференциальным* поперечным сечением $d\sigma/d\Omega$,

$$n(d\Omega) = j \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega. \quad (8.2)$$

Интеграл

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad (8.3)$$

есть *полное* сечение упругого рассеяния комаров малахитовой лягушкой.

Лягушки и комары — это классические объекты, и то, что мы пока описали, — это классическая теория рассеяния. Как было сказано в главе 5, Резерфорд пользовался при выводе своей формулы (5.5) для рассеяния α -частиц на открытом им атомном ядре классической теорией. Но квантовомеханический анализ даёт в этом случае тот же результат! Упругое сечение характеризует вероятность рассеяния. В квантовой механике вероятности выводятся из амплитуд вероятности, из комплексных волновых функций, $P \sim |\Psi|^2$. Точно так же сечения выводятся из комплексных *амплитуд* рассеяния. Амплитуда рассеяния есть амплитуда вероятности процесса, в котором частица приходит с бесконечности, пролетает мимо рассеивающего центра и вновь уходит на бесконечность вдоль какого-то другого направления.

Из этого определения ясно, что прямой способ вычисления квантовой амплитуды состоит в решении зависящего от времени уравне-

ния Шрёдингера, описывающего эволюцию волнового пакета с данными граничными условиями при $t = -\infty$ и $t = +\infty$. Ещё более прямой способ — вычислить фейнмановский интеграл по траекториям для амплитуды перехода из одной точки в другую за конечное время от $-t$ до t и взять потом предел при $t \rightarrow \infty$. Но более прямой способ не значит более простой. Кроме того, мы не обсуждали до сих пор интегралы по траекториям. Мы сделаем это в конце главы, но наша задача состоит в том, чтобы познакомить с ними читателя, а не в том, чтобы научить его реально с ними работать.

Так что мы поступим, как дремучие консерваторы, и объясним, как определяются и вычисляются квантовые амплитуды рассеяния в традиционном подходе, где достаточно проанализировать некоторые специальные решения *стационарного* уравнения Шрёдингера. Именно так разбирается задача рассеяния в большинстве учебников по квантовой механике.

В присутствии потенциала $V(x)$ точное решение уравнения Шрёдингера

$$(\Delta + k^2)\Psi = \frac{2mV}{\hbar^2}\Psi, \quad (8.4)$$

($k^2 = 2mE/\hbar^2$) затруднительно и его можно явно провести только в редких случаях. В следующем параграфе мы решим эту задачу *пертурбативно*, предполагая потенциал малым. Мы будем также предполагать, что потенциал имеет конечный радиус действия a и сконцентрирован вблизи начала координат. Таким образом, на больших расстояниях r от начала координат правой частью в уравнении (8.4) можно пренебречь и волновую функцию можно представить как приближённое решение *свободного* уравнения Шрёдингера. Будем его искать в виде

$$\Psi = e^{ikx} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta, \varphi). \quad (8.5)$$

Очевидно, что $(\Delta + k^2)e^{ikx} = 0$. Действие оператора $(\Delta + k^2)$ на второй член не даёт точного нуля, но результат его действия подавлен на больших расстояниях, $kr \gg 1$. В самом деле, в сферических координатах

$$\Delta \Psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{(\partial r)^2} (r\Psi) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{(\partial \varphi)^2} \right] \Psi. \quad (8.6)$$

При действии на e^{ikr}/r радиальная часть лапласиана вместе с членом k^2 даёт нуль, в то время как действие угловой части лапласиана даёт функцию, убывающую как $\sim 1/r^3$ при больших r .

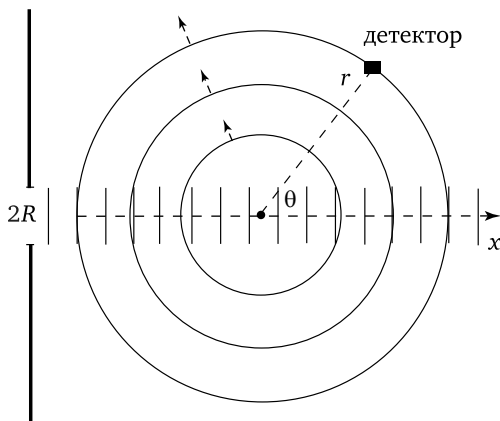


Рис. 8.3. Рассеяние квантовых частиц. Вертикальные линии представляют коллимированную набегающую плоскую волну. Круги — расходящиеся сферические волны. Жирная точка в центре — область рассеяния.

Интерпретация следующая. Член e^{ikx} описывает стационарный поток влетающих частиц, которые, следуя примеру наших комаров, приближаются к началу координат вдоль отрицательной оси абсцисс. А второй член есть расходящаяся сферическая волна, описывающая стационарный поток рассеянных частиц¹.

Сделаем важное замечание. Строго говоря, формула (8.5) неверна. Член e^{ikx} описывает *начальные*, а второй член — *конечные* частицы. Эти два разных вклада отвечают на самом деле двум совершенно разным моментам времени (отдалённое прошлое и отдалённое будущее) и не могут интерферировать, как это произошло бы, если бы волновая функция буквально описывалась формулой (8.5). Чтобы избежать этого, следует умножить плоскую волну e^{ikx} на профильную функцию типа $\theta(R^2 - y^2 - z^2)$. Фактически это означает, что мы коллимируем плоскую волну, заставляя её пройти сквозь отверстие радиуса R , — что, что в любом случае делают экспериментаторы!

Мы не должны, однако, делать это отверстие слишком малым, чтобы избежать дифракции, которая исказила бы картину. Более точно, нужно держать R намного большим, чем радиус действия

¹ Вот хитрость, с помощью которой мы избавились от временной зависимости и свели задачу к стационарной: мы рассматриваем не отдельную частицу, а стационарные потоки налетающих и вылетающих частиц.

потенциала a и намного большим, чем дебройлевская длина волны $\lambda = 2\pi/k$ рассеявшейся частицы, но много меньше, чем расстояние r между областью рассеяния и детектором. В этом случае эффекты дифракции несущественны, и, помещая детектор под любым углом, кроме $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, мы будем наблюдать рассеянные частицы без интерференции с их начальным потоком.

Волновая функция (8.5) безразмерна. Амплитуда рассеяния $f(\theta, \varphi)$ несёт размерность длины. Дифференциальное сечение выражается через амплитуду простой формулой

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2. \quad (8.7)$$

Действительно, плотность потока (5.2) исходной плоской волны — это просто скорость частицы¹: $j_{\text{in}} = v$. Число начальных частиц, проходящих через единичную площадку за единичное время, пропорционально этой величине. Для рассеянных частиц плотность потока есть $j_{\text{out}} = v|f|^2/r^2$. Число частиц, проходящих за единицу времени в элемент телесного угла $d\Omega$, пропорционально j_{out} , умноженному на элемент площади $r^2 d\Omega$. Имея в виду определение (8.2), мы приходим к уравнению (8.7).

В общем случае амплитуда зависит от двух углов, но в важном случае рассеяния в центрально-симметричном потенциале задача аксиально симметрична и амплитуда зависит только от полярного угла θ .

8.2. Борновское приближение. Высшие поправки

Займёмся теперь *вычислением* амплитуды рассеяния. Как уже было сказано, мы будем эту решать задачу пертурбативно, предполагая, что потенциал $V(\mathbf{x})$ мал и что его наличие приводит к малым поправкам к волновой функции e^{ikx} , описывающей начальную плоскую волну. Амплитуду можно тогда выразить в виде бесконечного ряда по V . Мы будем исходить из уравнения Шрёдингера (8.4) и представим его решение как формальный ряд

$$\Psi = \Psi^{(0)} + \Psi^{(1)} + \Psi^{(2)} + \dots, \quad (8.8)$$

¹Упс, мы не получили правильную размерность. Это связано с нашей неаккуратностью — мы записали волновую функцию (8.5) без нормировочного фактора $1/\sqrt{V}$, где V — фиктивный конечный пространственный объём (см. обсуждение на с. 49). Если бы мы приняли этот фактор в расчёт, плотность потока (5.2) делилась бы на объём и имела бы правильную размерность, $[j] = m^{-2} \cdot s^{-1}$. Но всё это для нас на самом деле абсолютно несущественно, потому что сечение определяется через *отношение* конечного и начального потоков. Нефизический фактор $1/V$ в потоках сокращается.

где $\Psi^{(0)} = e^{ikx}$ — падающая волна, $\Psi^{(1)}$ — поправка первого порядка по V , $\Psi^{(2)}$ — поправка второго порядка и т. д. Уравнение (8.4) эквивалентно бесконечной цепочке уравнений:

$$\begin{aligned}(\Delta + k^2)\Psi^{(1)} &= \frac{2mV}{\hbar^2}\Psi^{(0)}, \\(\Delta + k^2)\Psi^{(2)} &= \frac{2mV}{\hbar^2}\Psi^{(1)}, \\&\dots\dots\dots\end{aligned}\tag{8.9}$$

Мы хотим найти решение всех этих уравнений на расстояниях, намного превышающих характерный радиус взаимодействия, $r \gg a$, и сравнить поправку $\Psi^{(1)} + \Psi^{(2)} + \dots$ с вторым членом в формуле (8.5). Это даст искомую амплитуду.

На первом шаге мы определяем $\Psi^{(1)}$. Уравнение

$$(\Delta + k^2)\Psi^{(1)} = \frac{2mV}{\hbar^2}\Psi^{(0)}\tag{8.10}$$

есть не что иное, как *уравнение Гельмгольца*, одно из основных уравнений математической физики. Известно общее решение этого уравнения, описывающее расходящуюся сферическую волну:

$$\Psi^{(1)}(\mathbf{x}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d\mathbf{y} \Psi^{(0)}(\mathbf{y}) V(\mathbf{y}) \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}.\tag{8.11}$$

Сделаем здесь отступление и кратко объясним, как получается эта формула. Для начала найдём *фундаментальное решение* — решение уравнения¹

$$(\Delta + k^2)G(\mathbf{x}) = -\delta(\mathbf{x}).\tag{8.12}$$

Оно имеет вид²

$$G(\mathbf{x}) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}, \quad r = |\mathbf{x}|.\tag{8.13}$$

Действительно, имея в виду соотношение (8.6), легко проверить, что $(\Delta + k^2)G$ обращается в нуль при $r \neq 0$. В нуле решение сингулярно. В непосредственной близости нуля мы можем заменить $e^{ikr} \rightarrow 1$ и также забыть о члене k^2 в левой части равенства (8.12). Тогда решение

$$G(\text{малые } \mathbf{x}) \approx \frac{1}{4\pi r}\tag{8.14}$$

¹ Отрицательный знак в правой части — это обычное удобное соглашение.

² Заметим, что, строго говоря, у уравнения (8.12) имеется два фундаментальных решения: решение (8.13) и решение $\propto e^{-ikr}$, представляющее собой сходящуюся сферическую волну. Мы выбираем первое из них.

есть не что иное, как кулоновский потенциал единичного точечного заряда, помещённого в начало координат. Его лапласиан действительно даёт дельта-функцию.

Нас интересуют здесь вещественные k , но выражение (8.13) является фундаментальным решением уравнения (8.12) также при мнимом¹ $k = i\mu$. Мы узнаем выражение (5.16) для потенциала Юкавы без «физического» фактора $-g^2$. Это не случайно.

Так же, как кулоновский потенциал даёт статическое решение уравнений Максвелла с точечным заряженным источником, потенциал Юкавы представляет аналогичное статическое решение для неоднородного уравнения КФГ

$$(\square + \mu^2)\varphi = \delta(\mathbf{x}), \quad (8.15)$$

т. е. для уравнения $(\Delta - \mu^2)\varphi = -\delta(\mathbf{x})$, — решение, которое мы только что получили!²

Общее решение уравнения (8.10) — это свёртка фундаментального решения (8.13) с плотностью источников в правой части уравнения (8.10). Таким образом, мы приходим к решению (8.11).

Читатель видел уже, вероятно, подобную формулу в курсе электромагнетизма для общего решения уравнения Пуассона

$$\Delta\varphi = -\rho(\mathbf{x}) \implies \varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{y} \frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (8.16)$$

Вернёмся к полученному нами решению (8.11). В случае, когда $r \gg a$ и, следовательно, $|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{y}|$, можно сделать приближения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} &\rightarrow \frac{1}{r}, \\ e^{ik|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} &\rightarrow e^{ikr} e^{-ik\mathbf{n} \cdot \mathbf{y}}, \end{aligned} \quad (8.17)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ есть направление рассеяния. Запишем также

$$\Psi^{(0)}(\mathbf{y}) = e^{ikn_0 \cdot \mathbf{y}}, \quad (8.18)$$

¹Уравнение $(\Delta - \mu^2)\Psi = \text{источник}$ называется иногда *экранированным уравнением Пуассона*.

²В «Кулинарных тайнах» — той части книги, где мы с вами сейчас находимся, — мы пытаемся решить две задачи. Во-первых, она даёт предварительные сведения, необходимые для понимания и предстоящего комфортного поедания наших «Первых и Вторых блюд» и «Десертов». И, во-вторых, мы здесь объясняем *некоторые* (не все) важные факты и понятия классической и квантовой механики, которые были поданы среди «Закусок» (в частности, в главе 5) без хорошего логического гарнира. Потенциал Юкавы — одно из таких понятий.

где $\mathbf{n}_0$ — направление падающей волны. Мы вывели формулу

$$\Psi^{(1)} = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int d\mathbf{y} e^{-iq \cdot \mathbf{y}} V(\mathbf{y}), \quad (8.19)$$

где $\mathbf{q} = k(\mathbf{n} - \mathbf{n}_0) = \Delta\mathbf{p}/\hbar$. Здесь $\Delta\mathbf{p}$ — передача импульса. Мы получили очень простой результат: амплитуда рассеяния зависит в этом приближении только от передачи импульса, и она пропорциональна фурье-образу потенциала:

$$f^{(1)}(\mathbf{q}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d\mathbf{y} e^{-iq \cdot \mathbf{y}} V(\mathbf{y}) \equiv -\frac{m}{2\pi\hbar^2} V_{\mathbf{q}}. \quad (8.20)$$

Для центрально-симметричного потенциала, $V(\mathbf{y}) = V(|\mathbf{y}|)$, амплитуда зависит только от $|\mathbf{q}| = 2k \sin(\theta/2)$.

Уравнение (8.20) даёт амплитуду рассеяния в *борновском приближении*. Интересно вычислить её для потенциала Юкавы (5.16). Переходя к естественным единицам, получаем

$$f = \frac{mg^2}{2\pi(q^2 + \mu^2)}, \quad (8.21)$$

что совпадает с выражением (5.15), умноженным на соответствующий фактор, и сводится к формуле (5.4) в пределе $\mu \rightarrow 0$.

Вычислим теперь $\Psi^{(2)}$, поправку второго порядка к волновой функции. Мы можем записать

$$\begin{aligned} \Psi^{(2)}(\mathbf{x}) &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d\mathbf{y} \Psi^{(1)}(\mathbf{y}) V(\mathbf{y}) \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} = \\ &= \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2 \int d\mathbf{z} d\mathbf{y} \Psi^{(0)}(\mathbf{z}) V(\mathbf{z}) \frac{e^{ik|\mathbf{y}-\mathbf{z}|}}{|\mathbf{y}-\mathbf{z}|} V(\mathbf{y}) \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Подставим сюда $\Psi^{(0)}(\mathbf{z}) = e^{ik\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{z}}$, сделаем приближения (8.17) и представим $V(\mathbf{y})$ и $V(\mathbf{z})$ в виде интегралов Фурье:

$$V(\mathbf{z}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{q}_1 V_{\mathbf{q}_1} e^{i\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{z}}, \quad V(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{q}_2 V_{\mathbf{q}_2} e^{i\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{y}}. \quad (8.23)$$

Мы получаем следующий вклад в амплитуду:

$$\begin{aligned} f^{(2)} &= \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2 \frac{1}{(2\pi)^6} \times \\ &\times \int d\mathbf{z} d\mathbf{y} d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 V_{\mathbf{q}_1} V_{\mathbf{q}_2} e^{ik\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{z} - ik\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{y} + i\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{z} + i\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{y}} \frac{e^{ik|\mathbf{y}-\mathbf{z}|}}{|\mathbf{y}-\mathbf{z}|}. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, стоящее под интегралом в формуле (8.24), также можно представить как интеграл Фурье:

$$\frac{e^{ik|\mathbf{y}-\mathbf{z}|}}{|\mathbf{y}-\mathbf{z}|} = \frac{1}{2\pi^2} \int d\mathbf{s} \frac{e^{is \cdot (\mathbf{y}-\mathbf{z})}}{s^2 - k^2}. \quad (8.25)$$

Этот результат следует из формулы (5.16), если мы заменим там μ на $-ik$.

Внимательный читатель может здесь запротестовать: «Как же так? Правая часть равенства (8.25) чётна по k , в то время как левая часть этим свойством не обладает. Что-то здесь должно быть неверно!»

Читатель прав. Дело в том, что подынтегральное выражение в формуле (8.25) имеет полюс при $s^2 = k^2$ и интеграл поэтому не определён до тех пор, пока не прописано, как с этим полюсом следует обходиться.

Мы не станем это здесь подробно объяснять¹, но соотношение (8.25) справедливо, если интеграл в правой части понимается как предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int ds \frac{e^{is \cdot (y-z)}}{s^2 - (k + i\varepsilon)^2}, \quad (8.26)$$

где обозначение $\varepsilon \rightarrow +0$ означает, что ε стремится к нулю, оставаясь вещественным и положительным. Взятие предела при $\varepsilon \rightarrow -0$ от того же интеграла обратит знак k в левой части равенства (8.25) и даст не расходящуюся, а сходящуюся сферическую волну.

Иначе говоря, уточнённая формула (8.25) имеет вид

$$\frac{e^{ik|y-z|}}{|y-z|} = \frac{1}{2\pi^2} \int ds \frac{e^{is \cdot (y-z)}}{s^2 - k^2 - i0}, \quad (8.27)$$

где $-i0$ означает инфинитизимальный отрицательный мнимый сдвиг. Подставив это выражение в формулу (8.24), интегрируя по $dydz$ и потом по ds , мы в итоге получаем

$$f^{(2)} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^2 \int d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}) \frac{V_{\mathbf{q}_1} V_{\mathbf{q}_2}}{2\pi^2[(\mathbf{k}_{\text{in}} + \mathbf{q}_1)^2 - k_{\text{out}}^2 - i0]}, \quad (8.28)$$

где $\mathbf{k}_{\text{in}}$ и $\mathbf{k}_{\text{out}}$ — начальный и конечный волновые векторы и $\mathbf{q} = \mathbf{k}_{\text{out}} - \mathbf{k}_{\text{in}}$. В отличие от основной борновской амплитуды, поправка $f^{(2)}$ зависит не только от $\mathbf{q}$, но также от $\mathbf{k}_{\text{in}}$.

Чтобы теория возмущений была применима, поправка должна быть мала по сравнению с основным членом. Это даёт ограничение на потенциал, он не должен быть слишком большим. Имея в виду,

¹ В этом презрительном молчании нас поддерживает Валерий Брюсов, который как-то заметил: «Есть великое счастье — познав, утаить!» Хотя на самом деле умный читатель, знакомый с формулой Коши из комплексного анализа, может разделить это счастье с автором. Он может самостоятельно вычислить интеграл (8.26) и потом утаить это вычисление от остальных!

что характерные q в формуле (8.20) имеют порядок $1/a$, мы выводим следующие условия:

$$\begin{aligned} V &\ll \frac{\hbar^2 k}{ma}, \quad \text{если } ka \gg 1, \\ V &\ll \frac{\hbar^2}{ma^2} \quad \text{в противном случае.} \end{aligned} \quad (8.29)$$

Точно таким же способом можно вывести все высшие поправки к амплитуде. Результат вычислений можно представить графически — так, как это сделано на рис. 8.4.

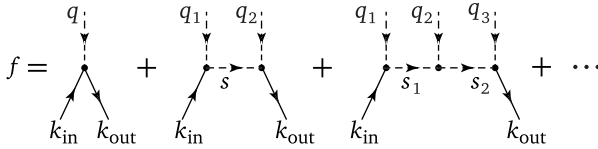


Рис. 8.4. Графическое представление для нерелятивистской амплитуды рассеяния

Каждый график на рис. 8.4 кодирует некоторое аналитическое выражение. Эти выражения выписываются по следующим правилам.

- Каждая жирная точка даёт множитель V_{q_i} — компоненту Фурье потенциала с соответствующим волновым вектором.
- В древесном графике первого порядка нет интеграла. Все остальные графики содержат *петли* и подразумевают интегрирование по векторам q_i , оставляющее фиксированной сумму $\sum_i q_i = q$:

$$f^{(n)} \sim \int (2\pi)^3 \delta\left(\sum_{i=1}^n q_i - q\right) \prod_{i=1}^n \frac{dq_i}{(2\pi)^3} (\dots).$$

- Импульсы (или волновые векторы) в каждой точке взаимодействия сохраняются: сумма импульсов, входящих в каждую вершину, равна нулю. Например, в графике второго порядка $q_1 + k_{in} - s = 0$ и $q_2 + s - k_{out} = 0$.
- Горизонтальные линии на графиках — это нерелятивистские *пропагаторы*, зависящие от соответствующих импульсов. Каждая такая линия даёт в амплитуде фактор вида

$$G(p_i) = \frac{1}{E - \frac{p_i^2}{2m} + i0} \quad (i = 1, \dots, n-1) \quad (8.30)$$

($p_i = \hbar s_i$ и $E = \hbar^2 k_{in}^2 / (2m) = \hbar^2 k_{out}^2 / (2m)$ есть энергия рассеиваемой частицы).

- Каждый член разложения амплитуды умножается на общий фактор $-m/(2\pi\hbar^2)$.

Мы аккуратно вывели, таким образом, *нерелятивистскую диаграммную технику* для амплитуды рассеяния. Сделаем некоторые пояснительные замечания.

- Читатель, знакомый с обычной теорией возмущений в квантовой механике, может узнать в пропагаторе (8.30) характерный фактор

$$\sim \frac{1}{E_n - E_m},$$

где E_n — собственные значения энергии невозмущённого гамильтониана. Такие факторы входят во все формулы для пертурбативных поправок.

Это, конечно, совсем не удивительно. Методы, которые мы использовали при выводе соотношений (8.20), (8.28) и высших поправок, изображённых графически на рис. 8.4, — это методы стационарной теории возмущений для гамильтониана $H = H_0 + V$.

- Уравнению (8.28), описывающему поправку второго порядка, можно дать следующую эвристическую интерпретацию.

Вначале состояние $|in\rangle$, отвечающее свободной частице с импульсом $\hbar\mathbf{k}_{in}$, переходит в промежуточное состояние $|n\rangle$ с импульсом $\mathbf{p}$. Амплитуда перехода даётся матричным элементом $\langle n|V|in\rangle$, который совпадает в нашей нормировке с V_{q_1} .

Затем система живёт в промежуточном состоянии $|n\rangle$ некоторое малое время $\sim \hbar/(E_{in} - E_n)$. Это «время жизни» Δt , связанное принципом неопределённости с несохранением энергии $\Delta E = E_{in} - E_n$, входит в амплитуду как множитель.

Наконец, система переходит из состояния $|n\rangle$ в конечное состояние $|out\rangle$ с импульсом $\hbar\mathbf{k}_{out}$. Амплитуда умножается при этом на матричный элемент $\langle out|V|n\rangle = V_{q_2}$. И надо, конечно, просуммировать по всем промежуточным состояниям, т. е. проинтегрировать по промежуточным импульсам.

- Нерелятивистский пропагатор (8.30) есть фурье-образ фундаментального решения (8.13) уравнения Гельмгольца, умноженный на определённый нормировочный фактор. А уравнение Гельмгольца есть не что иное, как уравнение Шрёдингера, где член с потенциалом записан в правой части и играет роль источника. В импульсном представлении это уравнение приобретает вид

$$\left(E - \frac{p^2}{2m}\right)\Psi_p = \text{источник}. \quad (8.31)$$

Оно выглядит не как дифференциальное, а как простое алгебраическое уравнение, в левой части которого стоит волновая функция, умноженная на некий зависящий от импульса и энергии фактор. Пропагатор (8.30) — это просто обратная к этому фактору величина.

Все эти наблюдения интересны и полезны, но в нерелятивистском случае они факультативны. В конце концов мы решили задачу точно. Но в главе 10, когда мы будем обсуждать релятивистскую диаграммную технику, мы не выведем её строго, но, следуя нашему плану, только сформулируем её правила и обоснуем их эвристически, используя квантовомеханические аналогии. В этом параграфе мы попытались дать твёрдую нерелятивистскую основу для таких рассуждений и аналогий.

8.3. Интегралы по траекториям

В предыдущем параграфе мы вывели выражения для вкладов в квантовомеханическую амплитуду рассеяния, изображённых на рис. 8.4, решая стационарное уравнение Шрёдингера. Однако в полевых теориях этот подход неудобен. Для вычислений амплитуд рассеяния в КТП используют другие методы: (а) операторный формализм или (б) метод Фейнмана, основанный на интегралах по траекториям.

Операторный подход более традиционен. Он основан на описании квантово-полевой системы в так называемом *представлении взаимодействия*, варианте *гейзенберговского представления*, где зависят от времени операторы, а не волновые функции¹.

Интегралы по траекториям были придуманы Фейнманом немного позднее. Когда КЭД рождалась в сороковые годы прошлого века, не было ещё ясно, что эти два подхода эквивалентны. Швингер (который разработал операторный подход к КЭД) не мог понять Фейнмана, а Фейнман — Швингера. Эквивалентность этих двух методов была доказана Дайсоном в 1948 г. Но хотя методы и эквивалентны, на практике метод интегралов по траекториям оказался более удобным, простым и мощным. Именно он почти исключительно используется для работы со *сложными* полевыми теориями, в частности с неабелевыми калибровочными теориями.

¹ В представлении взаимодействия волновые функции зависят от времени, но эта зависимость определяется не полным гамильтонианом H , а только H_0 — частью H , описывающей свободные не взаимодействующие поля.

Как было сказано выше, мы не собираемся в нашей книге рассказывать, как этот метод реально работает в КТП. Но нетрудно объяснить, что такое интеграл по траекториям в обыкновенной нерелятивистской квантовой механике. И мы сейчас этим займёмся. Помимо того, что он имеет важные приложения, этот метод попросту чрезвычайно красив!

Рассмотрим квантовую систему, описываемую временным уравнением Шрёдингера (4.8). Пусть гамильтониан включает только одну динамическую переменную q и соответствующий канонический импульс p ; обобщение на системы с несколькими степенями свободы очевидно.

Зафиксируем начальные условия для волновой функции $\Psi(q, t_0)$. Легко записать формальное решение уравнения (4.8) для волновой функции в более поздний момент времени t :

$$\Psi(q, t) = \hat{U}(t - t_0)\Psi(q, t_0), \quad (8.32)$$

где

$$\hat{U}(t - t_0) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}(t - t_0)\hat{H}\right\} \quad (8.33)$$

есть *оператор эволюции*. Рассмотрим *ядро* оператора эволюции, т. е. матричный элемент

$$\mathcal{K}(q^{(1)}, q^{(0)}; t_1 - t_0) = \langle q^{(1)} | \hat{U}(t_1 - t_0) | q^{(0)} \rangle \equiv \langle q^{(1)}, t_1 | q^{(0)}, t_0 \rangle \quad (8.34)$$

($t_1 - t_0 \equiv \Delta t > 0$). Он описывает амплитуду вероятности того, что система окажется в положении $q^{(1)}$ при $t = t_1$ при условии, что она находилась в положении $q = q^{(0)}$ при $t = t_0$. Решение уравнения (8.32) выражается в терминах (8.34) как

$$\Psi(q^{(1)}, t_1) = \int dq^{(0)} \mathcal{K}(q^{(1)}, q^{(0)}; t_1 - t_0) \Psi(q^{(0)}, t_0). \quad (8.35)$$

Величина $\mathcal{K}$ играет во всём подходе фундаментальную роль. Для неё справедливо спектральное разложение

$$\mathcal{K}(q^{(1)}, q^{(0)}; \Delta t) = \sum_k \Psi_k(q^{(1)}) \Psi_k^*(q^{(0)}) e^{-\frac{i}{\hbar} E_k \Delta t}, \quad (8.36)$$

где $\Psi_k(q)$ — собственные функции оператора $\hat{H}$ с собственными значениями E_k .

Вряд ли мою книгу будут читать математики¹, но если читатель-физик покажет формулу (8.36) математику, тот немедленно узнает в ней фундаментальное решение временного уравнения Шрёдингера.

Для гиперболических уравнений (уравнений, включающих временную зависимость) фундаментальные решения определяются немного по-другому по сравнению с эллиптическими (стационарными) уравнениями. $\mathcal{K}$ есть фундаментальное решение по следующим причинам.

- Оно удовлетворяет уравнению

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}^{(1)}\right)\mathcal{K}(q^{(1)}, q^{(0)}; \Delta t) = 0, \quad (8.37)$$

где оператор $H^{(1)}$ действует на первый аргумент в $\mathcal{K}$. В отличие от (8.12), это *однородное* уравнение.

- Начальные условия имеют вид

$$\mathcal{K}(q^{(1)}, q^{(0)}; 0) = \delta(q^{(1)} - q^{(0)}).$$

В простых случаях ядро можно найти явно. Для свободной частицы массы m имеем

$$\mathcal{K}(q_1, q_0; \Delta t) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar\Delta t}\right)^{3/2} \exp\left\{\frac{im(q_1 - q_0)^2}{2\hbar\Delta t}\right\}. \quad (8.38)$$

Читатель может заметить, что это выражение очень похоже на фундаментальное решение

$$\mathcal{K} = \left(\frac{1}{4\pi D\Delta\tau}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{(q_1 - q_0)^2}{4D\Delta\tau}\right\} \quad (8.39)$$

уравнения диффузии

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = D\Delta n. \quad (8.40)$$

Это не удивительно. Уравнение диффузии получается из свободного уравнения Шрёдингера заменой $t \rightarrow -i\tau$, $m \rightarrow \hbar/(2D)$. И его фундаментальное решение — *тепловое ядро* (8.39)² — получается из выражения (8.38) той же заменой.

¹ Отношение моего сына вполне типично. По моей просьбе он прочитал первые две части и сказал, что, хотя он что-то в этой книге и понял, это не было для него лёгким и приятным чтением — слишком эвристично и совсем не строго. Что ж, книжка действительно так написана...

² Оно описывает пространственное распределение примеси, введённой в момент $t = 0$ в точку q_0 , в более поздний момент времени.

Точное выражение для ядра можно вывести также для гамильтониана гармонического осциллятора¹. Но как решить задачу в общем виде?

Замечательный факт состоит в том, что для любой квантовой системы ядро $\mathcal{K}$ может быть вычислено как интеграл по траекториям:

$$\mathcal{K}(q^{(1)}, q^{(0)}; \Delta t) = \int \prod_t dq(t) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_1} L(\dot{q}, q) dt\right\} \quad (8.41)$$

с граничными условиями $q(t_0) = q^{(0)}$, $q(t_1) = q^{(1)}$.

Символ $\int \prod_t dq(t)$ означает, что мы интегрируем по всем возможным траекториям, т. е. по всем значениям координат в каждый момент времени. Иначе говоря, необходимо взять бесконечнократный (и не просто бесконечнократный, а континуально бесконечнократный!) интеграл.

Когда мы встречаемся с бесконечностью, единственный способ придать смысл символу ∞ — это трактовать его как предел очень большого числа. Например, обыкновенный интеграл представляет сумму бесконечного числа бесконечно малых вкладов. Понятие интеграла было сложным для Архимеда, но сейчас мы знаем, как определить его вполне строго: как предел при $n \rightarrow \infty$ суммы большого числа n очень маленьких членов. Аналогично, интеграл по траекториям определяется как предел многомерного интеграла, когда число измерений стремится к бесконечности.

Явная конструкция такова.

- Чтобы придать смысл символу (8.41), разделим конечный временной интервал Δt на большое число n интервалов очень малой протяжённости $\varepsilon = \Delta t/n$. Мы можем теперь расшифровать

$\int \prod_t dq(t)$ как

$$\int \prod_t dq(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n \prod_{j=1}^{n-1} dq_j,$$

где

$$q_j = q(t_0 + j\varepsilon), \quad 1 \leq j \leq n-1,$$

— промежуточные положения, по которым мы интегрируем (с другой стороны, $q_0 \equiv q^{(0)}$ и $q_n \equiv q^{(1)}$ остаются фиксированными);

¹ Читатель может найти его в классической книге Ричарда Фейнмана и Альберта Хиббса «Квантовая механика и интегралы по траекториям».

C_n — некоторая зависящая от n константа. Для каждой конкретной квантовой системы можно вычислить коэффициент C_n , но конкретный его вид для дальнейшего не важен.

- Интеграл $\int_{t_0}^{t_1} L(\dot{q}, q) dt$ заменяется теперь конечной суммой. Вклад каждого маленького интервала есть¹

$$\varepsilon L\left(\frac{q_j - q_{j-1}}{\varepsilon}, q_{j-1}\right).$$

Например, для одномерного движения в потенциале,

$$L = \frac{\dot{q}^2}{2} - V(q), \quad (8.42)$$

амплитуда перехода определяется как

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(q^{(1)}, q^{(0)}; t_1 - t_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n \int \prod_{j=1}^{n-1} dq_j \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\frac{(q^{(1)} - q_{n-1})^2}{2\varepsilon} + \dots \right. \right. \\ \left. \left. \dots + \frac{(q_1 - q^{(0)})^2}{2\varepsilon} - \varepsilon V(q_{n-1}) - \dots - \varepsilon V(q^{(0)}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (8.43)$$

Теперь мы объясним, откуда следует представление (8.41). Мы выведем формулу (8.43) для простого лагранжиана (8.42). Общий случай разбирается в книге Фейнмана и в любом современном учебнике по квантовой теории поля.

Чтобы упростить обозначения, положим $t_0 = 0$, $t_1 = \Delta t \rightarrow t$. Мы замечаем, что амплитуда перехода $\langle q_1, t | q_0, 0 \rangle$ представима в виде

$$\langle q^{(1)}, t | q^{(0)}, 0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq_* \langle q^{(1)}, t | q_*, \frac{t}{2} \rangle \langle q_*, \frac{t}{2} | q^{(0)}, 0 \rangle. \quad (8.44)$$

Это немедленно следует из спектрального представления (8.36) и условия ортогональности для функций $\Psi_k(q_*)$.

Но тогда мы также можем разделить наш интервал t не пополам, а на большое число n маленьких интервалов, $\varepsilon = t/n$, и записать

$$\langle q^{(1)}, t | q^{(0)}, 0 \rangle = \prod_{j=1}^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} dq_j \langle q^{(1)}, t | q_{n-1}, t - \varepsilon \rangle \dots \langle q_1, \varepsilon | q^{(0)}, 0 \rangle. \quad (8.45)$$

¹ Для достаточно гладкой траектории можно заменить производную $\dot{q}[t_0 + (j-1)\varepsilon]$ на конечную разность $(q_j - q_{j-1})/\varepsilon$.

Чтобы привести это равенство к виду (8.43), надо только показать, что для маленького ε выполнены соотношения

$$\langle q_1, \varepsilon | q^{(0)}, 0 \rangle \approx \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon}} \exp\left\{\frac{im(q_1 - q^{(0)})^2}{2\hbar\varepsilon}\right\} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon V(q^{(0)})\right\} \quad (8.46)$$

и т. д. А это следует из формулы (8.33): первые два фактора в формуле (8.46) получаются из кинетической части гамильтониана, это не что иное, как свободное ядро (8.38), а третий фактор — из члена с потенциалом.

Много квантовомеханических явлений получают лучшее объяснение в свете фундаментальной *оптико-механической аналогии*¹. Аналогия эта очень глубока и включает множество явлений в обеих теориях. Например, частица в механике отвечает волновому пакету в оптике, потенциальная энергия в механике — это показатель преломления в оптике. Наконец, принцип наименьшего времени Ферма в оптике отвечает в механике принципу Мопертюи (варианту принципа наименьшего действия).

Также выражение (8.41) для квантовой амплитуды перехода имеет тесную аналогию в оптике — это принцип Гюйгенса—Френеля. Этот принцип говорит, что амплитуда электромагнитной волны, излучённой в точке A и регистрируемой в точке B , представляет интеграл по всем возможным траекториям лучей между A и B , как в формуле (8.41). Единственная разница в том, что действие $\int L dt$, измеряемое в единицах $\hbar$, заменяется в оптике *фазой*

$$\Phi = \frac{2\pi l}{\lambda}, \quad (8.47)$$

связанной с конкретной траекторией луча (здесь l — это оптическая длина траектории, т. е. время, которое луч света затрачивает на это путешествие, умноженное на скорость света в вакууме, а λ — длина волны в вакууме).

В *квазиклассическом* пределе, когда фазы (8.47) (и также существующие в задаче разности фаз) становятся велики, волновая оптика переходит в геометрическую. В самом деле, интеграл по траекториям Гюйгенса—Френеля,

$$\text{амплитуда волны} \sim \int_{\text{по всем путям}} e^{i\Phi}, \quad (8.48)$$

¹ «Лекции по квантовой механике» Ферми начинаются с обсуждения этого вопроса, и это одна из причин, по которой я рекомендую прочесть эту книгу.

в основном насыщается в этом случае путями лучей, близкими к траектории, предписываемой геометрической оптикой и реализующей минимум функционала $\Phi[\text{путь}]$, т. е. минимум затраченного на путь времени. Вариация $\delta\Phi$ обращается в минимум в нуль¹. Это означает, что для пучка траекторий вблизи минимума значения $\Phi[\text{путь}]$ близки, и эти траектории интерферируют конструктивно, обеспечивая главный вклад в интеграл (8.48).

И то же самое имеет место в механике. Когда действие, выраженное в единицах $\hbar$, велико, показатель экспоненты в интеграле (8.41) быстро осциллирует. Большинство траекторий интерферируют деструктивно, кроме тех, что близки к классической траектории, реализующей минимум функционала $S[q(t)]$. Такие «почти классические» траектории интерферируют конструктивно, давая основной вклад в интеграл.

Вот почему в обычной жизни, когда все характерные действия велики в сравнении с $\hbar$, частицы движутся без квантовых скачков. Мир в этом случае классичен, упорядочен и добронравен...

В физике понятие интеграла по траекториям используется уже более полувека. Но математика в этом смысле сильно отстаёт. Математики всё ещё не любят это понятие и не считают интеграл по траекториям хорошо определённым объектом. Говоря более точно, они не имеют ничего против *евклидова* интеграла по траекториям, в котором время мнимо, $t = -i\tau$. В этом случае подынтегральное выражение в формуле (8.41) переходит в

$$\exp\left\{-\frac{1}{\hbar} \int d\tau \left[\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 + V(q)\right]\right\}. \quad (8.49)$$

Если потенциал растёт на больших q , вклад траекторий $q(\tau)$, сильно отклоняющихся от классической (евклидовой) траектории, экспоненциально подавлен. Математики называют такие интегралы интегралами с *мерой Винера* и могут с ними работать. Но они не могут работать с функциональными интегралами в реальном времени с осциллирующей комплексной мерой. Более точно, они не могут доказать существование предела конечномерного интеграла (8.43), когда число точек стремится к бесконечности и интервал времени ε между соседними точками стремится к нулю.

¹ То же верно для максимума, но функционал $\Phi[\text{путь}]$ не имеет максимума. Для экзотических путей, отходящих далеко от точек A и B , оптическая длина может быть сколь угодно велика.

Я не математик и не могу даже пытаться строго доказать что-либо. Единственное, что я могу сказать, — это то, что для простых, но нетривиальных квантовомеханических проблем типа ангармонического осциллятора, интегралы по траекториям в реальном времени были посчитаны *численно*, и существование предела при $\varepsilon \rightarrow 0$ было установлено, если угодно, *экспериментальным* путём. К сожалению, мне известно лишь несколько научных работ, где были реально проведены такие численные вычисления континуальных интегралов в вещественном времени. Научная активность в этом направлении невелика, о чём можно только сожалеть.

В этом параграфе мы обсуждали только интеграл по траекториям в квантовой механике. Но его можно определить и в теории поля. Как говорилось выше, метод континуальных интегралов использовался для вывода правил Фейнмана для диаграммной техники. Но много усилий было также затрачено на численные расчёты континуальных интегралов в КХД. (Я говорю сейчас о евклидовых интегралах с мерой Винера. Вычисление интегралов в пространстве Минковского находится за пределами возможностей современных компьютеров.) Чтобы осуществить такие вычисления, надо не только разделить время на маленькие интервалы, но сделать это также с пространством. Мы приходим к *решётчному* интегралу по траекториям, живущему на четырёхмерной евклидовой кубической решётке.

Строгого доказательства нет, но люди полагают, что для *неабелевых* калибровочных теорий эти решётчные интегралы имеют хорошо определённый континуальный предел — когда размер ячеек решётки стремится к нулю. Эта вера основана на вычислительном опыте, а также на том факте, что эффективная константа связи убывает на малых расстояниях ввиду асимптотической свободы [см. уравнение (5.17) и его обсуждение в главе 5]. С другой стороны, нет причин полагать, что континуальный предел существует для теорий наподобие КЭД, где эффективная константа связи растёт на малых расстояниях. Другими словами, такие теории определены только *пертурбативно* — если константа связи мала, теория возмущений применима, но соответствующие вычисления можно делать только в ограниченном диапазоне энергий.

Мы вернёмся к обсуждению этих вопросов в конце главы 12, когда будем говорить о несовершенствах Стандартной модели и изъянах в нашем современном понимании структуры мира.

ЧАСТЬ IV

Первые блюда

Глава 9

Фермионные поля

В главах 4 и 7 мы написали некоторые явные выражения для полевых гамильтонианов и лагранжианов. Но мы сделали это только для бозонных полей: для скалярных полей, описывающих бесспиновые частицы, и для электромагнитного поля, описывающего фотоны, которые несут единичный спин.

Мы знаем, однако, что Вселенная содержит также фермионы: лептоны и кварки, несущие спин $1/2$. Читатель также знает (если не из других источников, то из наших кратких замечаний в главе 3), что бозоны и фермионы имеют очень разные свойства. Бозоны любят находиться вместе. Так, множество фотонов, находящихся в одном квантовом состоянии, образуют когерентную лазерную волну. С другой стороны, когерентные электронные волны не существуют, потому что два электрона (не говоря уже о *многих*) не могут занимать одно и то же квантовое состояние¹. Физики говорят, что фотоны и электроны имеют разную *статистику*: фотоны подчиняются так называемой статистике Бозе—Эйнштейна, которая требует, чтобы многофотонная волновая функция была симметричной по отношению к перестановке фотонов, в то время как электроны подчиняются статистике Ферми—Дирака: многоэлектронная волновая функция должна быть обязательно антисимметричной относительно перестановок:

$$\begin{aligned}\Psi(\gamma_1, \gamma_2, \dots) &= \Psi(\gamma_2, \gamma_1, \dots), \\ \Psi(e_1, e_2, \dots) &= -\Psi(e_2, e_1, \dots).\end{aligned}\tag{9.1}$$

В стандартном курсе нерелятивистской квантовой механики показывается только, что дополнительные условия (9.1) на волновые функции действительно можно наложить, что они не противоречат фундаментальным принципам квантовой механики и что, например, многоэлектронная функция, которая была антисимметричной в начальный момент времени, остаётся таковой и в более поздние

¹ Как понимает читатель, именно этот принцип запрета Паули ответствен за существование электронных оболочек и связанную с ним богатую и нетривиальную атомную структуру.

моменты. Но *происхождение* этих условий остаётся неясным. Это можно понять только в рамках квантовой релятивистской полевой теории, что мы и сделаем в этой главе.

9.1. Первый блин

Начнём с того, что напомним выражение для релятивистского лагранжиана, описывающего поля спина $1/2$, который инвариантен относительно преобразований Лоренца. Спинорные представления лоренцевой группы обсуждались в главе 6. Мы выяснили там, что группа $SO(3, 1)$ не проста и представляет собой в некотором смысле произведение двух групп $SU(2)$. Таким образом, представления характеризуются двумя числами (j_L, j_R) , каждое из которых может быть целым или полуцелым. Имеется два различных спинорных представления: левые спиноры ξ_α , несущие непунктирные индексы $\alpha = 1, 2$ и принадлежащие представлению $(\frac{1}{2}, 0)$, и правые спиноры $\eta_{\dot{\alpha}}$, несущие пунктирные индексы и принадлежащие представлению $(0, \frac{1}{2})$.

Возьмём одно из них, например левое спинорное поле¹ $\xi_\alpha(x)$. Как ясно из соотношений (6.57), комплексно-сопряжённый левый спинор $(\xi_\alpha)^*$ принадлежит представлению $(0, \frac{1}{2})$ и его можно обозначить $\xi_{\dot{\alpha}}^*$. Простейшее вещественное лоренц-инвариантное выражение, включающее поле ξ_α и оператор дифференцирования, есть

$$\mathcal{L}_{\text{кин}}^{\text{ферм}} = i\xi^\alpha \partial_{\alpha\dot{\beta}} \xi^{*\dot{\beta}} \equiv i\xi^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \partial_\mu \xi^{*\dot{\beta}}, \quad (9.2)$$

где матрица σ^μ была введена в формуле (2.11) [см. также (6.60)] и спинорные индексы опускаются и поднимаются согласно соотношениям (6.54).

Лагранжиан (9.2) по построению инвариантен относительно

$$SO(3, 1) \sim SU_L(2) \times SU_R(2).$$

Он описывает свободные безмассовые левые фермионы и их античастицы. Плотность лагранжиана (9.2) должна иметь размерность m^4 . Это фиксирует каноническую размерность фермионного поля, $[\xi] = m^{3/2}$ (можно здесь вспомнить, что каноническая размерность бозонных скалярного и векторного поля есть $[\varphi] = [A_\mu] = m$).

Попробуем поступить с выражением (9.2) так же, как мы поступали с лагранжианом (7.40), описывающим свободные скалярные

¹ Мы поймём, почему такое поле называется «левым», немного позже.

поля, в главах 4, 7. Введём для этого пространственный ящик размера L и наложим периодические граничные условия на $\xi_\alpha(\mathbf{x}, t)$:

$$\xi_\alpha(x+L, y, z) = \xi_\alpha(x, y+L, z) = \xi_\alpha(x, y, z+L) = \xi_\alpha(x, y, z). \quad (9.3)$$

Разложим $\xi_\alpha(\mathbf{x})$ в ряд Фурье:

$$\xi_\alpha(\mathbf{x}) = \sum_n \xi_\alpha^n \exp\left\{\frac{2\pi i \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{L}\right\}, \quad (9.4)$$

подставим это выражение в формулу (9.2) и проинтегрируем по $\int d\mathbf{x}$. Мы получим¹

$$L = V \sum_n \left[i \xi_n^\alpha \delta_{\alpha\dot{\beta}} \frac{d}{dt} (\xi_n^{*\dot{\beta}}) + \frac{2\pi n_j}{L} \xi_n^\alpha (\sigma_j)_{\alpha\dot{\beta}} \xi_n^{*\dot{\beta}} \right]. \quad (9.5)$$

В квадратичном приближении различные моды друг с другом не взаимодействуют, и их можно рассматривать отдельно, как мы это делали для бозонов. Разница в том, что бозонный лагранжиан (7.40) включает две производные, в то время как лагранжиан (9.5) — только одну. Это необычно, но не представляет само по себе очень большой проблемы.

Положим для упрощения $V = L^3 = 1$ и рассмотрим член в формуле (9.5) с каким-то определённым $\mathbf{n}$. Можно, например, выбрать $n_j = (0, 0, 1)$. Соответствующий вклад в лагранжиан есть

$$L_{(001)} = i(\xi^1 \dot{\xi}^{*1} + \xi^2 \dot{\xi}^{*2}) + 2\pi(\xi^1 \xi^{*1} - \xi^2 \xi^{*2}). \quad (9.6)$$

Здесь и далее точки обозначают временные производные. А точки над индексами мы больше не пишем: в них нет особого смысла, если мы изучаем только одну моду Фурье, — лоренц-инвариантность в этом случае потеряна.

Лагранжиан (9.6) представляет собой сумму двух независимых вкладов: (а) вклад, включающий компоненты ξ^1 и ξ^{*1} , и (б) вклад, включающий компоненты ξ^2 и ξ^{*2} . Рассмотрим вначале второй вклад. Мы видим, что ξ^2 и ξ^{*2} канонически сопряжены друг другу:

$$P_{\xi^{*2}} = i\xi^2, \quad P_{\xi^2} = -i\xi^{*2}, \quad (9.7)$$

так что скобка Пуассона [определённая в формуле (7.12)] есть $\{\xi^{*2}, \xi^2\} = i$. Соответствующий канонический гамильтониан есть

$$H_{(001)}^{(2)} = 2\pi \xi^2 \xi^{*2}. \quad (9.8)$$

¹ Мы надеемся, что одинаковое обозначение L для лагранжиана и для длины ящика не приведёт к путанице.

Образованный читатель сразу узнает в выражении (9.8) гамильтониан обычного гармонического осциллятора, выраженный через голоморфные переменные:

$$H^{\text{осц}} = \frac{p^2 + \omega^2 q^2}{2} = \omega a^* a, \quad (9.9)$$

где $\omega = 2\pi$ ($\omega = 2\pi/L$ для ящика длины L) и¹

$$a = \frac{\omega q + ip}{\sqrt{2\omega}}, \quad a^* = \frac{\omega q - ip}{\sqrt{2\omega}}. \quad (9.10)$$

Скобка Пуассона этих переменных есть $\{a, a^*\} = i$, и, следовательно, переменная ξ^2 в (9.8) играет роль a^* , а переменная ξ^{*2} — роль a .

Благодаря Гейзенбергу мы знаем, как квантовать этот гамильтониан. Роль координаты удобно приписать a^* , а роль импульса Π_{a^*} примет тогда $-ia$. В квантовой теории

$$\Pi_{a^*} = -ia \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial a^*}. \quad (9.11)$$

Классический гамильтониан представляет здесь произведение координаты и импульса. Чтобы написать его квантовую версию, нужно разрешить неоднозначность упорядочения и прописать порядок, в котором следуют a^* и дифференциальный оператор (9.11). Не то чтобы это здесь было невероятно важно — разные упорядочения приводят к гамильтонианам, различающимся только на общий константный сдвиг; он не влияет на динамику. Но наиболее «эстетичный» выбор — это

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \omega \left(a^* \frac{\partial}{\partial a^*} + \frac{\partial}{\partial a^*} a^* \right). \quad (9.12)$$

Это выражение совпадает со стандартным квантовым гамильтонианом осциллятора $\hat{H} = (\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2)/2$. Нормированные собственные состояния (9.12) суть

$$\Psi_k(a^*) = \frac{(a^*)^k}{\sqrt{k!}}. \quad (9.13)$$

Собственные значения энергии вам известны:

$$E_k = \omega \left(k + \frac{1}{2} \right). \quad (9.14)$$

Полученный результат выглядит похожим на то, что мы вывели в § 4.7 для скалярного поля. Состояние, характеризующее квантовым

¹ Пожалуйста, не спутайте выражения (9.10) с переменными (4.39), которые были не голоморфными, а просто обыкновенными комплексными координатами для двумерного осциллятора (4.37).

чистом k , можно проинтерпретировать как присутствие k частиц в состоянии с импульсом $\mathbf{p} = \frac{2\pi}{L}(0, 0, 1)$ и отрицательной спиральностью:

$$\frac{1}{2} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[ср. формулу (5.23)].

Рассмотрим, однако, второй член в лагранжиане (9.6), включающий компоненты ξ^1 и ξ^{*1} с положительной спиральностью. Он имеет такой же вид, как и первый член, но потенциальная часть, дающая с точностью до знака гамильтониан, имеет теперь противоположный знак:

$$H_{(001)}^{(1)} = -2\pi \xi^1 \xi^{*1}. \quad (9.15)$$

Классический гамильтониан (9.15) отрицательно определён, и спектр соответствующего квантового гамильтониана включает отрицательные энергии. Восстанавливая в энергии размерный фактор $1/L$, мы в итоге получаем

$$E_{(001)} = \frac{2\pi}{L}(k_2 - k_1) \quad (9.16)$$

с целыми k_1, k_2 . В этом спектре нет дна, основное состояние отсутствует! Это значит, что рушится вся философия квантовой теории поля (основное состояние полевого гамильтониана есть физический вакуум, возбуждённые состояния — физические частицы). У нас серьёзные неприятности¹.

9.2. Грассмановы волны в дираковском море

Неприятности эти были впервые осознаны Дираком, который обнаружил, к своему глубочайшему изумлению, что его релятивистское уравнение, описывающее одноэлектронные состояния², имеет решения с энергиями обоих знаков — и положительными,

¹ В п. 16.4.2 мы приведём доводы, что духи (состояния с отрицательной энергией) могут в некоторых случаях быть не столь неприятны, но мы ещё не готовы к дегустации этой интересной спекуляции.

² Мы собираемся сейчас обсуждать многочастичные состояния полевого гамильтониана и одновременно одночастичные состояния — решения уравнения Дирака. Чтобы различить эти разные объекты, мы оставим термин «состояния» за состояниями многочастичными, а одночастичные состояния будем называть «уровнями». (Читатель, наверное, устал уже ждать и ругает автора, который уже много раз упоминал в книге уравнение Дирака, но не написал пока его явно. Что ж, я торжественно обещаю это сделать к концу главы!)

и отрицательными. Дирак предложил побороться с отрицательными энергиями следующим образом.

- Электрон — массивная частица, и, когда внешние поля отсутствуют, энергии уровней равны

$$E_p = \pm \sqrt{p^2 + m^2}. \quad (9.17)$$

Таким образом, в спектре имеется щель.

- Примем принцип запрета Паули, утверждающий, что каждый такой уровень может быть занят только одной частицей.
- Дирак определяет затем физический вакуум как состояние, где заполнены все уровни ниже щели, имеющие отрицательную энергию, а все уровни с положительной энергией свободны (см. рис. 9.1а). Такой вакуум имеет бесконечную отрицательную энергию, но это не страшно, потому что, как отмечалось раньше, в теории, не включающей гравитацию, абсолютное значение энергии не наблюдается. Основное состояние гамильтониана скалярного поля имеет бесконечную положительную энергию [см. (4.42)], а основное состояние гамильтониана фермионного поля имеет бесконечную отрицательную энергию, что ничем не хуже и не лучше.

Если принять эту картину, в многочастичном гамильтониане имеются два типа элементарных возбуждений. Прежде всего, есть состояния, где заполнены все отрицательные уровни и вдобавок *один* положительный (см. рис. 9.1б). Это физические электроны. И есть также состояния, где пусты все уровни с положительной энергией и вдобавок *один* уровень с энергией отрицательной. А все остальные отрицательные уровни заполнены. Из моря извлечена одна рыбка, и на её месте осталась дырка (см. рис. 9.1в).

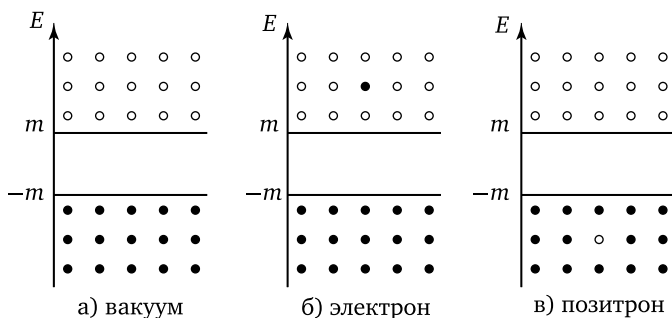


Рис. 9.1. Море Дирака. Чёрные и белые кружки отвечают, соответственно, заполненным и пустым уровням.

Физика моря Дирака очень похожа на физику полупроводников. В полупроводниках имеется аналог дираковского моря — *валентная зона* электронов, сидящих на внешних атомных оболочках. И есть два типа носителей заряда: электроны в так называемой *зоне проводимости* (их энергия превышает энергию валентных электронов; при нулевой температуре зона проводимости пуста) и *дырки* — незанятые уровни в валентной зоне.

Включим теперь электрическое поле. Состояние, где заняты все валентные уровни, а в зоне проводимости электронов нет, попросту не реагирует на поле, и электрический ток не течёт. Но если имеются в наличии электроны проводимости, то они начинают двигаться (в зоне проводимости заполнено очень мало уровней, и у проводящих электронов нет соседей, которые могли бы помешать их движению). А если имеется дырка, то соседний валентный электрон может перейти под действием поля на её место. Но тогда соседний уровень (откуда пришёл этот валентный электрон) освобождается.

Для внешнего наблюдателя это выглядит как движение дырки; довольно очевидно, что электроны проводимости и дырки движутся в противоположных направлениях. Электроны заряжены отрицательно, а дырки заряжены положительно.

Что касается дырок в море Дирака, это не что иное, как позитроны!¹ Заметьте, что в этой картине приобретает красивую и ясную интерпретацию процесс e^+e^- -аннигиляции. Так же как атомный электрон, занимающий возбуждённый уровень на внешней атомной оболочке, может свалиться на пустой уровень на внутренней оболочке и испустить при этом фотон и как электрон в полупроводнике может свалиться в дырку — рекомбинировать с ней, свободный электрон в «зоне проводимости» может найти дырку в море Дирака и свалиться туда. Кинематика не допускает при этом, чтобы энергия перехода была высвобождена в форме единственного фотона. Испускается как минимум два фотона, а бывает, что и больше. Наблюдатель видит, что исходный электрон и исходный позитрон

¹ Существование позитронов было ярким предсказанием теории Дирака, сделанным в 1928—1929 гг. А в 1932 г. они с достоверностью наблюдались в космических лучах Карлом Андерсоном. (Можно здесь упомянуть также эксперимент Дмитрия Скобельцына, который увидел ещё в 1929 г. «странные» треки в своей вильсоновской камере. Они выглядели похоже на электронные треки, но закручивались в магнитном поле в противоположную сторону. Это означало, что частицы, породившие эти треки, несли положительный заряд. Однако, Скобельцын не мог на своей установке измерить энергию этих частиц и не мог ничего сказать об их природе.)

(дырка) исчезают, а их энергия (включающая энергию щели $2mc^2$, которая также может быть интерпретирована как сумма энергий покоя электрона и позитрона) высвобождается в виде излучения.

Эта эвристическая дираковская картина выглядит очень красиво, но она не решает все вопросы. Главный вопрос — как можно её воспроизвести и подтвердить в рамках точного теоретико-полевого анализа. В сущности задача сводится к тому, чтобы понять, откуда следует принцип запрета Паули. Формула (9.16), выведенная в предыдущем параграфе, о принципе запрета ничего не знает!

Вопрос этот не такой простой. Почти удовлетворительный ответ на него был найден Маркусом Фирцем (в 1939 г.) и Вольфгангом Паули (в 1940 г.). В рамках гейзенберговского операторного формализма они обнаружили, что, хотя спектр квантово-полевого гамильтониана, описывающего частицы с полуцелым спином, не имеет дна, если действовать обычным образом, дно (основное состояние) появляется, если на поля и их канонические импульсы наложить при квантовании *антикоммутационные* соотношения.

Но на естественный «следующий» вопрос — а откуда берутся эти странные антикоммутаторы (обычная квантовая механика содержит только коммутаторы типа $[\hat{p}, x] = -i\hbar$) — в то время ответа получено не было.

Полное понимание пришло только к середине 1970-х гг., когда Феликс Березин, Михаил Маринов и Роберто Касалбуони построили *классическую* механику фермионных полей и показали, что входящие в неё динамические переменные — не обыкновенные действительные или комплексные, но антикоммутирующие грассмановы числа. Необходимые математические определения были даны в главе 6.

Рассмотрим классический лагранжиан

$$L = -i\dot{\xi}\xi^\dagger + \omega\xi\xi^\dagger, \quad (9.18)$$

где ξ и $\xi^\dagger$ теперь антикоммутируют¹:

$$(\xi)^2 = (\xi^\dagger)^2 = 0, \quad \xi\xi^\dagger + \xi^\dagger\xi = 0. \quad (9.19)$$

Уравнения движения имеют вид

$$-i\dot{\xi} + \omega\xi = 0, \quad i\dot{\xi}^\dagger + \omega\xi^\dagger = 0. \quad (9.20)$$

Переменные ξ и $\xi^\dagger$ «параметризуют» фазовое пространство (что бы ни значило для грассмановых координат слово «параметризуют»).

¹Мы напоминаем, что для комплексного сопряжения грассмановых переменных мы используем символ $\dagger$, а не символ $\star$.

Скобка Пуассона двух функций $f(\xi^\dagger, \xi)$, $g(\xi^\dagger, \xi)$ определяется теперь как

$$\{f, g\}_P = -i \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \Xi^\dagger} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^\dagger \partial \Xi} \right) f(\xi, \xi^\dagger) g(\Xi, \Xi^\dagger) \Big|_{\Xi=\xi, \Xi^\dagger=\xi^\dagger} \quad (9.21)$$

(грассманова производная была определена в § 6.4). Заметьте, что порядок множителей в правой части равенства (9.21) имеет теперь значение!

Временная эволюция произвольной функции на фазовом пространстве описывается, как и прежде, уравнением (7.12), куда входит скобка Пуассона (9.21):

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\} \quad (9.22)$$

с гамильтонианом

$$H = -\omega \xi \xi^\dagger = \omega \xi^\dagger \xi. \quad (9.23)$$

Общее выражение для скобки Пуассона в системе, включающей несколько вещественных коммутирующих фазовых переменных (p_j, q_j) и несколько комплексных антикоммутирующих фазовых переменных $(\xi_\alpha, \xi_\alpha^\dagger)$, имеет вид

$$\begin{aligned} \{f, g\}_P = & \left[\frac{\partial^2}{\partial p_j \partial Q_j} - \frac{\partial^2}{\partial q_j \partial P_j} - \right. \\ & \left. - i \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_\alpha \partial \Xi_\alpha^\dagger} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_\alpha^\dagger \partial \Xi_\alpha} \right) \right] f(q, p; \xi, \xi^\dagger) g(Q, P; \Xi, \Xi^\dagger) \Big|_{\substack{Q=p, P=p, \\ \Xi=\xi, \Xi^\dagger=\xi^\dagger}}. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Можно отметить следующее.

- Если по крайней мере одна из функций f, g является чётным элементом грассмановой алгебры, порождённой переменными $\xi_\alpha, \xi_\alpha^\dagger$, то выражение (9.24) антисимметрично относительно перестановки $f \leftrightarrow g$. При переходе от классической к квантовой механике скобка Пуассона переходит в этом случае в коммутатор двух операторов:

$$\{f, g\} \rightarrow i[\hat{f}, \hat{g}]. \quad (9.25)$$

- Если как f , так и g являются нечётными антикоммутирующими элементами грассмановой алгебры, то выражение (9.24) симметрично относительно перестановки $f \leftrightarrow g$ и переходит при квантовании в антикоммутатор:

$$\{f, g\} \rightarrow i\{\hat{f}, \hat{g}\}_+. \quad (9.26)$$

Таким образом, главная причина, по которой канонические коммутаторы в теории бозонных полей заменяются каноническими антикоммутаторами в теории фермионных полей, — это грасманова природа классических фермионных динамических переменных. Для соответствующих квантовых операторов мы получаем¹

$$\{\hat{\xi}_\alpha, \hat{\xi}_\beta^\dagger\}_+ = \delta_{\alpha\beta} \quad \{\hat{\xi}_\alpha, \hat{\xi}_\beta\}_+ = 0, \quad \{\hat{\xi}_\alpha^\dagger, \hat{\xi}_\beta^\dagger\}_+ = 0. \quad (9.27)$$

В обсуждавшейся выше игрушечной модели имеется только один нетривиальный антикоммутатор: $\{\hat{\xi}^\dagger, \hat{\xi}\}_+ = 1$. Естественное представление этой квантовой алгебры есть $\hat{\xi} = \xi$ и $\hat{\xi}^\dagger = \partial/\partial\xi$. Гильбертово пространство квантового аналога гамильтониана (9.23), (анти!)симметризованного, как в формуле (9.12),

$$\hat{H} = \frac{\omega}{2} \left(\frac{\partial}{\partial\xi} \xi - \xi \frac{\partial}{\partial\xi} \right), \quad (9.28)$$

включает волновые функции $\Psi(\xi)$. Они имеют очень простой вид:

$$\Psi(\xi) = a + b\xi. \quad (9.29)$$

Все члены высшего порядка в разложении Фурье $\Psi(\xi)$ обращаются в нуль ввиду соотношения $\xi^2 = 0$!

У гамильтониана (9.28) есть две собственные функции: $\Psi(\xi) = 1$ с собственным значением $\omega/2$ и $\Psi(\xi) = \xi$ с собственным значением $-\omega/2$. Таким образом, в отличие от обычного гармонического осциллятора, в спектре нашего *грасманова осциллятора* нет бесконечной башни эквидистантных состояний. Он содержит всего два состояния.

Заметим, что гамильтониан (9.28) допускает также матричное представление, которое может показаться студенту, знакомому с обычной нерелятивистской квантовой механикой, вкуснее грасманова. Вместо волновых функций (9.29), зависящих от голоморфной грасмановой переменной ξ , можно ввести спиноры

$$\Psi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \quad (9.30)$$

¹Если читатель хочет выучить новое красивое слово, алгебра (9.27) называется *алгеброй Клиффорда*. Таким образом, «грасманово» становится при квантовании «клиффордовым».

²При этом выборе классический канонический импульс $P_\xi = -i\xi^\dagger$, следующий из лагранжиана (9.18), переходит в $\hat{P}_\xi = -i\partial/\partial\xi$.

Тогда операторы $\hat{\xi}$ и $\hat{\xi}^\dagger$ представляются матрицами $\hat{\xi} \equiv \sigma_- = \frac{\sigma_1 - i\sigma_2}{2}$ и $\hat{\xi}^\dagger \equiv \sigma^+ = \frac{\sigma_1 + i\sigma_2}{2}$, квантовый гамильтониан есть $\frac{\omega\sigma_3}{2}$.

Мы снова будем обсуждать матричную интерпретацию грассмановых гамильтонианов при поедании одного из наших десертов в главе 14, посвящённой суперсимметричным квантовомеханическим и квантово-полевым системам. Мы покажем, в частности, что матричный гамильтониан Паули, описывающий движение электрона в магнитном поле, допускает грассманово истолкование. И в случае, когда направление магнитного поля во всех точках совпадает, мы имеем дело с суперсимметричной задачей.

Но пока мы только хотим заметить следующее.

- Спинор (9.30) не имеет ничего общего с обычными спинорами, преобразуемыми под действием обычных вращений.
- Гамильтониан фермионного поля зависит от бесконечного набора переменных, компонент Фурье в разложении (9.4). Каждая такая компонента есть грассманова переменная, и её можно в принципе представить в матричном виде, но гамильтониан становится при этом бесконечномерной матрицей, что неудобно. Грассманово описание проще, и знатоки-гурманы предпочитают именно его.

Вернёмся к лагранжиану (9.6), но предположим теперь, что как ξ^1 , так и ξ^2 имеют грассманову природу. Квантовый гамильтониан (в котором мы восстановили размерный фактор $1/L$) имеет вид

$$\hat{H} = \frac{\pi}{L} \left(\frac{\partial}{\partial \xi^1} \xi^1 - \xi^1 \frac{\partial}{\partial \xi^1} - \frac{\partial}{\partial \xi^2} \xi^2 + \xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi^2} \right). \quad (9.31)$$

Его спектр состоит из четырёх состояний:

$$\begin{aligned} \text{A) } \Psi &= \xi^1 & E &= -\frac{2\pi}{L}; \\ \text{B) } \Psi &= 1 \quad \text{и} \quad \text{C) } \Psi = \xi^1 \xi^2 & E &= 0; \\ \text{D) } \Psi &= \xi^2 & E &= \frac{2\pi}{L}. \end{aligned} \quad (9.32)$$

В отличие от (9.16), спектр (9.32) имеет основное состояние, и «серьёзных неприятностей», о которых мы говорили в конце предыдущего параграфа, больше нет!

Переменные ξ^a в формуле (9.31) описывают моду Фурье с $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$, но мы можем провести тот же анализ для любого друго-

го $\mathbf{n}$. Мы снова получаем 4 состояния в спектре:

$$\begin{aligned} \text{A) } \Psi &= \xi_n^+ & E &= -\frac{2\pi|\mathbf{n}|}{L}; \\ \text{B) } \Psi &= 1 \quad \text{и} \quad \text{C) } \Psi = \xi_n^+ \xi_n^- & E &= 0; \\ \text{D) } \Psi &= \xi_n^- & E &= \frac{2\pi|\mathbf{n}|}{L}, \end{aligned} \quad (9.33)$$

где ξ_n^+ — правый спинор, удовлетворяющий условию $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})\xi_n^+ = |\mathbf{n}|\xi_n^+$, и ξ_n^- — левый спинор, удовлетворяющий условию $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})\xi_n^- = -|\mathbf{n}|\xi_n^-$.

В свете нашего обсуждения дираковского моря в начале этого параграфа физическая интерпретация состояний (9.33) довольно прозрачна. Левые моды ξ_n^- несут положительную энергию. В вакууме эти уровни пусты. Когда же уровень ξ_n^- занят, это означает присутствие левоспиральной частицы с импульсом $\mathbf{p} = 2\pi\mathbf{n}/L$. С другой стороны, правые моды ξ_n^+ несут отрицательную энергию и принадлежат морю. В вакууме эти уровни заполнены. Возбуждённое состояние гамильтониана, в котором один из таких уровней «опустошён», описывает физическую правоспиральную античастицу с импульсом $\mathbf{p} = -2\pi\mathbf{n}/L$.

Другими словами, лагранжиан (9.2) с грассмановыми полями $\xi^\alpha(x)$ может быть использован для описания свободных безмассовых левых *нейтрино* и правых *антинейтрино*. В этом причина, по которой мы назвали релятивистский спинор $\xi_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\xi^\beta$ левым, а спинор с точечными индексами — правым (хотя следует, конечно, иметь в виду, что атрибуты «левый», «правый», «частица», «античастица» зависят от определений и соглашений).

Но мы хотели бы также научиться описывать электроны, кварки и другие массивные частицы. Как это сделать?

9.3. Электромагнитные взаимодействия. Уравнение Дирака

Важная характеристика электронов и кварков — это их электрический заряд, посредством которого они взаимодействуют с электромагнитным полем A_μ . Попробуем написать лагранжиан, включающий взаимодействующие поля $\xi_\alpha(x)$ и $A_\mu(x)$, который был бы инвариантен относительно калибровочных преобразований (7.54), дополненных подходящим преобразованием заряженного поля ξ_α .

Читатель уже встречался в этой книге с выражениями «калибровочные преобразования» и «калибровочная инвариантность». Вна-

чале (в главе 5) мы произносили эти слова без настоящих объяснений, что именно они значат. Затем в главе 7 мы написали явную формулу (7.54) для калибровочного преобразования фотонного поля и обсудили калибровочную инвариантность свободного максвелловского лагранжиана. А в этой главе мы представим на обозрение читателя нетривиальный взаимодействующий калибровочно-инвариантный полевой лагранжиан¹.

Подчеркнём, что калибровочная инвариантность наряду с релятивистской инвариантностью — это один из фундаментальных принципов, на основе которых строятся квантовые полевые теории. Лагранжиан Стандартной модели, который мы собираемся во второй половине книги представить и изучить, тоже включает калибровочную инвариантность — её сложную неабелеву версию.

Но не будем забегать вперёд. На этой странице мы просто попытаемся обобщить лагранжиан (9.2) (с грассмановыми переменными ξ^α), включив поле A_μ и взаимодействие с ним. Напишем для этого следующий лагранжиан:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\xi^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}(\partial_\mu - ieA_\mu)\xi^{\dagger\dot{\beta}}. \quad (9.34)$$

Этот лагранжиан более не квадратичен; он включает нетривиальный трилинейный член взаимодействия. Он инвариантен относительно преобразований

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu\chi(x), \\ \xi_\alpha(x) &\rightarrow e^{-ie\chi(x)}\xi_\alpha(x), \quad \xi^{\dagger\dot{\beta}}(x) \rightarrow e^{ie\chi(x)}\xi^{\dagger\dot{\beta}}(x). \end{aligned} \quad (9.35)$$

Вторая строчка в (9.35) — и есть искомое «подходящее преобразование» заряженного поля, которое дополняет (7.54).

Оператор $\partial_\mu - ieA_\mu$, или, скорее,

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu, \quad (9.36)$$

т. е. оператор, действующий на ξ^α в выражении, получаемом при интегрировании функционала действия $\int d^4x \mathcal{L}$ по частям, называется *ковариантной производной*².

¹ Мы писали уже лагранжиан взаимодействия (7.27), (7.28), но он носил смешанный характер, описывая взаимодействие поля $A_\mu(x)$ с заряженными частицами.

² Читатель, немного изучавший общую теорию относительности, знаком с понятием ковариантной производной в римановой геометрии. В отличие от обычной производной, ковариантная производная тензора есть тензор. Аналогично этому $\mathcal{D}_\mu \xi^\alpha$ преобразуется при калибровочных преобразованиях тем же простым образом, что ξ^α , в то время как для обычной производной $\partial_\mu \xi^\alpha$ это не так!

Однако лагранжиан (9.34) нереалистичен. Он не годится по двум причинам. Первая из них чисто теоретическая. Оказывается, лагранжиан (9.34) калибровочно-инвариантен только в классике. В квантовой теории эта инвариантность разрушается так называемой *киральной аномалией*¹. А разрушение калибровочной инвариантности делает теорию неперенормируемой и непоследовательной (мы говорили об этом в пятой главе).

И другая причина — феноменологическая. У нас всё ещё не хватает двух степеней свободы. Лагранжиан (9.34) описывает при данном импульсе всего два фермионных состояния, а нам нужно четыре: левые и правые электроны плюс левые и правые позитроны.

Для удвоения числа фермионных степеней свободы необходимо ввести наряду с $\xi_\alpha(x)$ другое похожее фермионное поле $\eta_\alpha(x)$. Предположим, что электрические заряды полей η_α и ξ_α противоположны. Фермионная часть лагранжиана примет тогда вид

$$\mathcal{L}_{\xi\eta} = i\xi^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}(\partial_\mu - ieA_\mu)\xi^{\dagger\dot{\beta}} + i\eta^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}(\partial_\mu + ieA_\mu)\eta^{\dagger\dot{\beta}}. \quad (9.37)$$

Это выражение инвариантно относительно преобразований

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi, \quad \xi \rightarrow e^{-ie\chi}\xi, \quad \eta \rightarrow e^{ie\chi}\eta, \quad (9.38)$$

причём эта инвариантность сохраняется и в квантовой теории — аномалия сокращается ввиду противоположных зарядов у ξ и η . Квантование поля ξ_α даёт частицы e_L^- и e_R^+ . Квантование поля η_α даёт частицы e_L^+ и e_R^- .

Имея в распоряжении два разных противоположно заряженных фермионных поля, мы можем добавить в наш лагранжиан калибровочно и релятивистски инвариантный потенциальный член, дающий массу электрону:

$$\mathcal{L}_m = m(\xi_\alpha\eta^\alpha + \eta^{\dagger\dot{\alpha}}\xi_{\dot{\alpha}}^\dagger). \quad (9.39)$$

Отметим, что невозможно написать массовый член при наличии только одного заряженного поля ξ_α — структура $\xi_\alpha\xi^\alpha$ (она называется *майорановским массовым членом*) лоренц-инвариантна, но не калибровочно-инвариантна! С другой стороны, можно легко снабдить майорановской массой один *нейтральный* фермион, не участвующий в калибровочных взаимодействиях и инвариантный относительно калибровочных преобразований. Не исключено, в частности, что масса *правых* нейтрино имеет майоранову природу. Мы

¹Это словосочетание встретится в нашей книге ещё несколько раз, но внятных объяснений, что это, собственно говоря, такое, я, к сожалению, не дам.

вернёмся к этому вопросу в главе 12, когда будем обсуждать феноменологию Стандартной модели.

Лагранжиан квантовой электродинамики, включающий электромагнитное и электронно-позитронное поля, представляет собой сумму кинетического члена и члена с взаимодействием (9.37), фермионного массового члена (9.39) и максвелловского лагранжиана (7.53).

Традиционно, фермионная часть лагранжиана записывается в несколько более компактной форме. Технические детали на нескольких следующих страницах не необходимы, строго говоря, для понимания того, что такое фермионное поле (мы это уже объяснили). Но мы даём эти детали по двум причинам: во-первых, мы хотим перекинуть мостик к другим книгам по квантовой теории поля, которые читатель может раскрыть после нашей (или одновременно с нашей), и, во-вторых, это традиционное компактное описание будет для нас полезно в следующих главах, когда мы будем обсуждать графики Фейнмана, включающие фермионы, и лагранжиан Стандартной модели.

Два левых двухкомпонентных поля ξ_α , η_α можно объединить в 4-компонентный *дираковский биспинор*

$$\psi = \begin{pmatrix} \eta^{\dagger\dot{\alpha}} \\ \xi_\alpha \end{pmatrix}. \quad (9.40)$$

Заметьте, что верхние и нижние компоненты этого биспинора несут одинаковый заряд e , так что закон калибровочного преобразования для ψ универсален: $\psi \rightarrow e^{-ie\chi}\psi$.

Введём также четыре *матрицы Дирака*:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } \bar{\sigma}^\mu = (1, -\boldsymbol{\sigma}). \quad (9.41)$$

Это четырёхмерные матрицы, представленные в блочной форме 2×2 . Выражения (9.41) можно расписать явно:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и т. д.}$$

Матрицы Дирака удовлетворяют симпатичным антикоммутационным соотношениям:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1}_{4 \times 4}. \quad (9.42)$$

Рассмотрим матрицу, антикоммутирующую со всеми γ^μ :

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (9.43)$$

Она играет особую роль, позволяя построить проекторы на поля определённой киральности. При действии на ψ они выделяют левое и правое электронные биспинорные поля¹:

$$\psi_L = \frac{1-\gamma^5}{2}\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \end{pmatrix}, \quad \psi_R = \frac{1+\gamma^5}{2}\psi = \begin{pmatrix} \eta^\dagger \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9.44)$$

Мы определим также дираковское сопряжение по формуле $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ ($\psi^\dagger$ — эрмитово-сопряжённый спинор). Явное выражение:

$$\bar{\psi} = (\xi_\alpha^\dagger, \eta^\alpha). \quad (9.45)$$

Легко видеть, что

$$\bar{\psi}\psi = \xi_\alpha^\dagger \eta^{\dagger\dot{\alpha}} + \eta^\alpha \xi_\alpha \quad (9.46)$$

есть лоренцев скаляр. Можно также установить, что $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ — псевдоскаляр (меняет знак при отражении), $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ — вектор и $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ — аксиальный вектор.

Как было сказано, полный лагранжиан КЭД приобретает в этих обозначениях более компактную форму:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi. \quad (9.47)$$

Он инвариантен относительно преобразований

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\chi, \quad \psi \rightarrow e^{-ie\chi}\psi. \quad (9.48)$$

Теперь мы можем исполнить наконец наше старое обещание и написать уравнение Дирака. Оно получается варьированием лагранжиана (9.47) по отношению к $\bar{\psi}$ и имеет вид

$$i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi = m\psi. \quad (9.49)$$

¹ Часто понятия киральности и спиральности не различаются. Это естественно, так как при переводе с греческого киральность означает «ручность» (тот же корень, что у *хиромантии*) и частицы, несущие отрицательную спиральность, можно также назвать «леворучными», а частицы с положительной спиральностью — «праворучными». Но для нас будет удобно понимать под этими терминами два немного разных понятия. Спиральность для нас — это свойство частицы, определённое соотношением (5.23), а понятие киральности мы будем относить к полю. Мы будем называть поля с неточечными индексами «левокиральными» и попросту *левыми*, а поля с точечными индексами — *правыми*. Тогда, как говорилось выше, левокиральное поле ξ^a , представляющее нижние компоненты биспинора (9.40), описывает левоспиральные электроны и правоспиральные позитроны, а правокиральное поле $\eta^{\dagger\dot{a}}$ (верхние компоненты биспинора) описывает правоспиральные электроны и левоспиральные позитроны.

Вариация по отношению к ψ даёт сопряжённое уравнение:

$$-i\bar{\psi}(\overleftarrow{\partial}_\mu - ieA_\mu)\gamma^\mu = m\bar{\psi}. \quad (9.50)$$

Уравнение (9.49) играет для фермионов ту же роль, что уравнение КФГ для бозонов. Оно допускает, как и уравнение КФГ, двойную интерпретацию (см. обсуждение в § 4.4). Мы вывели уравнение Дирака как классическое полевое уравнение. Но когда внешнее поле A_μ не слишком велико, уравнение (9.49) можно интерпретировать в шрёдингеровском духе — как волновое уравнение для релятивистской фермионной частицы.

Решения *свободного* уравнения Дирака (без A_μ) представляют собой плоские волны с определённым импульсом $\mathbf{p}$:

$$\psi(x) = Cu(p)e^{-i\epsilon t + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}. \quad (9.51)$$

Как говорилось, уравнение имеет четыре различных решения — решения с положительными и отрицательными энергиями, $\epsilon = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, для двух разных спиральностей. Для каждого такого решения можно найти явные выражения для биспинора $u(p)$. В дальнейшем нам явный вид этих решений не потребуется, но чтобы дать представление о том, как они выглядят, выпишем здесь решения с положительной энергией¹:

$$u(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{\epsilon + m} w + \sqrt{\epsilon - m} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) w \\ \sqrt{\epsilon + m} w - \sqrt{\epsilon - m} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) w \end{pmatrix}, \quad (9.53)$$

где w — обычный двухкомпонентный спинор, $\epsilon = p_0$, $\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$. Биспинор u нормирован согласно соотношению $\bar{u}u = 2m$. При такой нормировке константа C в формуле (9.51) обычно выбирается как $C = 1/\sqrt{2\epsilon V}$, где $V = L^3$ — объём пространственного ящика, в который мы поместили нашу теорию. Тогда $\psi(x)$ может быть интерпретировано как спинорная волновая функция *одной* частицы, бегающей по этому ящику. Размерность функции ψ есть $[\psi] = m^{3/2}$, в то время как размерность функции u есть $[u] = m^{1/2}$. Так определённая величина $u(p)$ зависит только от импульса, но не от V , и именно

¹Имейте в виду, что мы пишем решения в *спинорном представлении* [клиффордовой алгебры (9.42)], в котором γ -матрицы имеют вид (9.41), а не в *стандартном представлении* с матрицами

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad (9.52)$$

которые фигурируют в большинстве учебников.

она [наряду с $u(-p)$ и $\bar{u}(\pm p)$] входит в релятивистские амплитуды рассеяния, которые мы будем обсуждать в следующей главе.

Вариация лагранжиана (9.47) по A_μ даёт уравнение

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \quad (9.54)$$

Оно имеет тот же вид, что (7.59), но вместо электромагнитного тока j^μ , связанного с частицами и записанного в формуле (7.28), мы получили выражение

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \quad (9.55)$$

В классической теории это некоторое бозонное поле, чётный элемент грассмановой алгебры, порождённый $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$. В согласии с ожиданиями, ток удовлетворяет закону сохранения

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (9.56)$$

что немедленно следует из соотношений (9.49), (9.50). В импульсном пространстве это условие приобретает вид

$$(p' - p)_\mu \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = 0. \quad (9.57)$$

В квантовой теории ток (9.55) становится оператором. Чтобы найти амплитуды рассеяния, необходимо вычислить матричные элементы гамильтониана, куда входит оператор тока между одночастичными состояниями. Тогда $\psi(x)$ интерпретируется как релятивистская волновая функция, а (9.55) — не что иное, как релятивистское обобщение выражения (5.2). Можно также установить связь с классическим током (7.28) локализованных точечных частиц. Действительно, читатель может подставить явные решения (9.51), (9.53) в выражение (9.55) и получить

$$\langle j^\mu \rangle_p = \frac{1}{V} \frac{p^\mu}{\varepsilon} = \frac{1}{V} (1, v).$$

Но это среднее по делокализованному состоянию, размазанному по всему объёму. Если вычислить среднее по локализованному волновому пакету, то вместо фактора $1/V$ появится δ -функция, как в формуле (7.28).

Читатель может найти дальнейшие детали в любом стандартном учебнике.

Глава 10

Диаграммы Фейнмана

Иногда мы строго обосновываем наши утверждения, но иногда этого не делаем, считая, что строгий вывод содержал бы слишком много технических подробностей и не соответствовал бы духу и плану нашей полупопулярной книги. Последнее, в частности, относится к диаграммной технике Фейнмана. Вывести её строго из первых принципов теории не так просто, и мы решили этого не делать. Из исторических замечаний главы 5 читатель узнал, что, когда в конце сороковых годов прошлого века Фейнман предложил свою технику, он и сам не умел её выводить из теории вполне строго и у него не было чёткого понимания, как это сделать. Он сделал замечательную догадку, а её обоснование пришло потом!

Логика этой главы такова. В главе 8 мы вывели (вполне строго!) аналитические выражения для амплитуды нерелятивистского упругого рассеяния и представили получившийся бесконечный ряд в графической форме (см. рис. 8.4). Теперь мы переформулируем эти результаты в фейнмановском духе, а потом предложим читателю, последовав примеру Фейнмана, положиться на нерелятивистские аналогии, на интуицию и воображение, увидеть, что правила диаграммной техники, которые будут даны ниже, не являются неразумными, и *принять без доказательства* их справедливость.

Но перед этим давайте разберём кинематику релятивистского рассеяния. Она сложнее нерелятивистской.

10.1. Кинематика

В главе 8 мы обсуждали только кинематику рассеяния на внешнем рассеивающем центре в нерелятивистском случае. В релятивистской квантовой теории помимо таких процессов упругого рассеяния возможны также процессы, в которых меняется число частиц и их природа. Наибольший практический интерес представляют (а) *распады*, где исходная частица с четырёхмерным импульсом P исчезает, рождая несколько частиц с импульсами p'_a , и (б) *парные*

столкновения, где сталкиваются две частицы с импульсами p_1 и p_2 и на их месте рождается несколько частиц с импульсами p'_a . В первом случае нас интересует *дифференциальная вероятность* рождения данного набора частиц с данными импульсами. Во втором случае нас интересует дифференциальное поперечное сечение $d\sigma$, но оно может теперь зависеть не только от элемента телесного угла $d\Omega$ (как оно зависит в случае двух конечных частиц), но и от других кинематических параметров.

Как и в нерелятивистском случае, дифференциальные вероятности и дифференциальные сечения связаны с квадратом комплексной амплитуды рассеяния. Мы не будем давать здесь точное определение последней, отсылая читателя к стандартным учебникам. Мы только скажем, что *инвариантную амплитуду* M_{fi} можно определить для каждого процесса¹. Квантово-полевые аналоги уравнения (8.7) выглядят, однако, более сложно. Мы даём их без вывода.

- Для вероятности распада:

$$dw = (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_a p'_a - p\right) |M_{fi}|^2 \frac{1}{2E} \prod_a \frac{d^3 p'_a}{(2\pi)^3 2\varepsilon'_a}, \quad (10.1)$$

где E — энергия распадающейся частицы. Заметим, что фактор $(d^3 p'_a)/(2\varepsilon'_a)$ можно представить как $d^4 p'_a \delta(p'^2_a - m^2_a) \theta(\varepsilon'_a)$ и это лоренцев скаляр, как и амплитуда. Следовательно, единственная зависимость dw и $w = \int dw$ от системы отсчёта связана с множителем $1/E$. В системе, где распадающаяся частица движется, вероятность её распада подавлена множителем² $\sqrt{1-v^2}$. Соответственно, время жизни частицы $\tau = w^{-1}$ увеличивается.

- Для столкновений:

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_a p'_a - p_1 - p_2\right) |M_{fi}|^2 \frac{1}{4I} \prod_a \frac{d^3 p'_a}{(2\pi)^3 2\varepsilon'_a}, \quad (10.2)$$

¹ Амплитуда M_{fi} называется инвариантной, поскольку это релятивистский инвариант. Индексы f и i обозначают конечное и начальное состояния. Их «обратный» порядок отражает дираковские соглашения для *бра* и *кет* векторов [см. уравнения (4.50) и (4.51)]. Мы хотим также предупредить читателя, что различные учебники (к которым мы его только что отослали) по-разному определяют знак амплитуды. Этот знак не так важен, но всюду, где мы будем писать явные формулы, мы будем следовать конвенции, принятой в «Квантовой электродинамике» Берестецкого, Лифшица и Питаевского и во «Введении в квантовую теорию поля» Пескина и Шрёдера.

² В этой главе мы возвращаемся к естественной системе единиц $\hbar = c = 1$.

где I — инвариантный поток,

$$I = \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}. \quad (10.3)$$

Интеграл $\sigma = \int d\sigma$ даст полное сечение. Оно релятивистски инвариантно.

Особенно интересен случай рассеяния $2 \rightarrow 2$ с всего двумя частицами в конечном состоянии. Амплитуда зависит тогда от трёх кинематических параметров, в качестве которых можно выбрать полную энергию $E = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2$ и углы рассеяния θ, φ в системе центра масс сталкивающихся частиц¹. В этой системе выражение для сечения приобретает вид

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2} |M_{fi}|^2 \frac{|\mathbf{p}'|}{|\mathbf{p}|E^2} d\Omega', \quad (10.4)$$

где $\mathbf{p}$ — импульс сталкивающихся частиц, $\mathbf{p}'$ — импульс рождённых частиц (их модули не обязательно совпадают; например, они не совпадают в процессе аннигиляции $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$) и E — общая энергия частиц в системе центра. Отметим, что в этом случае релятивистская амплитуда рассеяния M_{fi} безразмерна.

Для упругого рассеяния в пределе, когда масса одной из частиц очень велика, эта частица представляет собой по существу статический рассеивающий центр и амплитуда $M_{fi}^{2 \rightarrow 2}$, поделённая на тяжёлую массу, совпадает (с точностью до двойки) с инвариантной амплитудой рассеяния другой (лёгкой) частицы на внешнем статическом потенциале $M_{fi}^{\text{пот}}$. Если скорость лёгкой частицы мала, эта статическая амплитуда сводится к нерелятивистской амплитуде $f(\theta, \varphi)$, обсуждавшейся в главе 8:

$$M_{fi}^{\text{пот}} = 4\pi f(\theta, \varphi), \quad (10.5)$$

так что

$$d\sigma = \frac{|M_{fi}^{\text{пот}}|^2}{16\pi^2} d\Omega. \quad (10.6)$$

10.2. Потенциальное рассеяние

Приступим к объяснению того, как фактически вычисляются амплитуды рассеяния. Освежим для этого в памяти центральный параграф главы 8, в котором были выведены правила построения и рас-

¹ Для скалярных частиц амплитуда зависит только от импульсов $p_1, \dots, p_4$, из которых можно составить только два независимых инварианта: $s = (p_1 + p_2)^2$ и $t = (p_3 - p_1)^2$. Это эквивалентно E и θ в системе центра масс.

чёта диаграмм для нерелятивистского рассеяния. Рассмотрим снова первую поправку к борновской амплитуде. Аналитическое выражение для поправки даётся формулой (8.28), и его графическая иллюстрация дана на рис. 8.4 (средний график). Этому точному результату можно дать следующую интерпретацию.

1) Частица приходит из бесконечности и рассеивается на статическом потенциале, который передаёт частице импульс $\mathbf{q}_1$. Интенсивность этого взаимодействия даётся компонентой Фурье потенциала $V_{\mathbf{q}_1}$.

2) После этого рассеяния частица приобретает импульс $\mathbf{s} = \mathbf{k}_{\text{in}} + \mathbf{q}_1$. Её кинетическая энергия $E^* = (\mathbf{k}_{\text{in}} + \mathbf{q}_1)^2 / (2m)$ отличается от исходной энергии налетающей частицы, т.е. энергия при этом не сохраняется.

3) В квантовой механике несохранение энергии возможно только на протяжении короткого интервала времени $\tau \sim \frac{\hbar}{\Delta E}$. И очень скоро частица снова рассеивается на потенциале. На этот раз передача импульса составляет $\mathbf{q}_2$. Это событие в биографии частицы оставляет след в виде множителя $V_{\mathbf{q}_2}$ в подынтегральном выражении в формуле (8.28). После второго рассеяния частица приобретает импульс $\mathbf{k}_{\text{out}} = \mathbf{k}_{\text{in}} + \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2$, причём модули $|\mathbf{k}_{\text{in}}|$ и $|\mathbf{k}_{\text{out}}|$ совпадают. Соответствующие энергии тоже совпадают, и частица может теперь мирно уйти на бесконечность, что она и делает.

4) Тот факт, что энергия в промежутке между двумя актами рассеяния отличалась от исходной, проявляется в множителе (8.30),

$$\frac{1}{E - E^*} = \frac{2m}{\mathbf{k}_{\text{in}}^2 - (\mathbf{k}_{\text{in}} + \mathbf{q}_1)^2},$$

где E — начальная и конечная энергия частицы, а E^* — её энергия в промежуточном состоянии. Как объяснялось, этот фактор можно интерпретировать как фундаментальное решение (8.31) (на другом языке *функция Грина*) уравнения Шрёдингера.

5) Нас интересует амплитуда процесса с определённой общей передачей импульса $\mathbf{q}$. Но передачи импульса $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ в индивидуальных актах рассеяния не определены. Мы должны, следовательно, проинтегрировать по $d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2$ с ограничением $\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}$, накладываемым множителем $\delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{q})$. Фактически, чтобы получить правильные числа, мы должны интегрировать по

$$\int \frac{d\mathbf{q}_1}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{q}_2}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{q})$$

и умножить получившийся интеграл на $-m/(2\pi)$ — тот же фактор, что фигурирует в лидирующем борновском приближении (8.20).

Дадим теперь той же формуле несколько другую интерпретацию. Будем предполагать, что энергия *сохраняется* в каждой вершине взаимодействия, так что частица сохраняет свою начальную энергию E также в промежутке между двумя рассеиваниями. Но обычное дисперсионное соотношение между энергией и импульсом

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad (10.7)$$

более не выполняется.

Говорят, что в промежуточном состоянии между двумя рассеиваниями частица находится вне *массовой поверхности*, в отличие от начальных и конечных частиц, для которых выполняется соотношение (10.7) и которые тем самым находятся на массовой поверхности.

Обратимся теперь к потенциальному рассеянию релятивистской скалярной частицы. Амплитуда такого рассеяния даётся теми же графиками, что в нерелятивистском случае. Разница состоит в том, что релятивистское волновое уравнение — это не уравнение Шрёдингера, а неоднородное уравнение КФГ,

$$(\square + m^2)\Psi = \text{источник}, \quad (10.8)$$

и нам надо заменить нерелятивистский пропагатор релятивистским:

$$\frac{1}{E - \frac{p^2}{2m}} \longrightarrow \frac{2m}{p_0^2 - p^2 - m^2} = \frac{2m}{p^2 - m^2}, \quad (10.9)$$

где $p_0 = m + E$ и множитель $2m$ в правой части обуславливает правильный нерелятивистский предел: правая часть стремится к левой. Удобно, однако, определить релятивистский скалярный пропагатор без этого множителя:

$$G(p) = \frac{1}{p^2 - m^2}. \quad (10.10)$$

Позже мы вернёмся к обсуждению этого вопроса.

10.3. Теория скалярного поля

Рассмотрим теперь скалярную теорию, где внешний потенциал отсутствует, но полевой лагранжиан не квадратичен, а включает кватичный член, описывающий взаимодействие, как в формуле (4.47).

Теперь одиночной частице не на чем рассеиваться, но если начальное состояние включает две разные частицы, то они могут рассеяться друг на друге. В низшем порядке по λ амплитуда рассеяния описывается фейнмановской диаграммой, которую мы уже ранее рисовали (см. рис. 4.4), но, чтобы облегчить читателю задачу и не заставлять его постоянно листать книгу взад-вперёд, мы перерисуем её здесь на рис. 10.1. На этот раз — с правильным знаком в вершине.

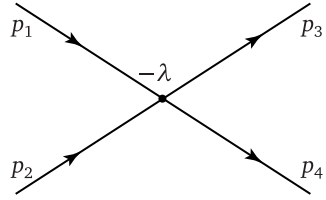


Рис. 10.1. Скалярная амплитуда рассеяния $2 \rightarrow 2$ в низшем порядке

Соответствующее алгебраическое выражение для инвариантной амплитуды не сверхсложно. Это просто число:

$$M_{fi}^{\text{древесная}} = -\lambda. \quad (10.11)$$

Это та же константа, которая фигурирует в лагранжиане взаимодействия

$$\mathcal{L}_{\text{взаим}} = -\frac{\lambda}{4}\varphi^2(\varphi^*)^2, \quad (10.12)$$

но без множителя $\frac{1}{4}$. Его исчезновение связано с комбинаторикой. Есть два способа отождествить начальные частицы 1, 2 с двумя факторами $\varphi\varphi$ в (10.12). Аналогично есть два способа отождествить конечные частицы 3, 4 с двумя факторами $\varphi^*\varphi^*$. Это замечание (известное как *теорема Вика*) проиллюстрировано на рис. 10.2.

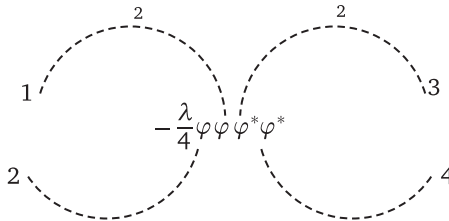


Рис. 10.2. Амплитуда $12 \rightarrow 34$ и комбинаторика. Множитель $-\lambda/4$ в лагранжиане взаимодействия следует умножить на $2 \times 2 = 4$.

Диаграмма на рис. 10.1 описывает лидирующий (древесный) вклад в амплитуду рассеяния. Имеются три однопетлевые диаграммы. Они изображены на рис. 10.3. Каждая такая диаграмма содержит петлю

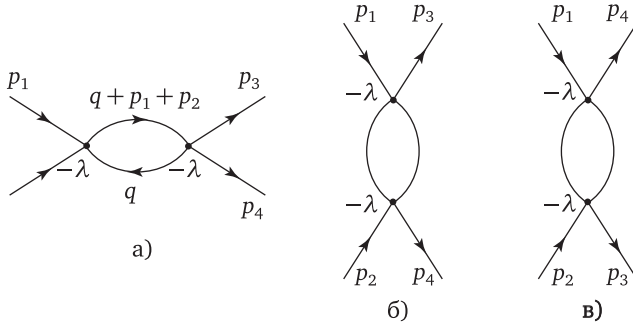


Рис. 10.3. Однопетлевые вклады в амплитуду

с двумя виртуальными частицами. Например, график на рис. 10.3а включает частицы с четырёхмерными импульсами q и $q + p_1 + p_2$. Каждая такая виртуальная частица входит в аналитическое выражение для амплитуды со своим релятивистским пропагатором (10.10). Импульс q не фиксирован, и по нему надо проинтегрировать. В отличие от нерелятивистской амплитуды рассеяния, интегрировать надо здесь по всем четырём компонентам петлевого импульса и с фактором $(2\pi)^4$ вместо $(2\pi)^3$ в знаменателе. В результате получаем

$$M_{\text{рис.10.3a}} = -i\lambda^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 - m^2} \frac{1}{(q + p_1 + p_2)^2 - m^2}. \quad (10.13)$$

Интегрирование идёт по четырём компонентам импульса, и при больших q подынтегральное выражение ведёт себя как $\sim 1/q^4$. Таким образом, интеграл логарифмически расходится в ультрафиолете. Эта расходимость имеет ту же природу, что логарифмическая расходимость в физическом заряде электрона, которую мы обсуждали в главе 5 и к обсуждению которой вернёмся в конце этой главы.

Выражение (10.13) и подобные выражения, которые мы приведём ниже, даны с правильными коэффициентами, но мы не хотим злоупотреблять вниманием читателя и досконально выводить правильные знаки и факторы i . В конце главы мы выпишем без аккуратного вывода точные правила Фейнмана для процессов, включающих скалярные частицы, фермионы и фотоны.

Но мы хотим прокомментировать появление фактора $2m$ в формуле (10.9). Мы используем этот фактор и этот комментарий как повод, чтобы познакомить читателя с другой важной полевой теорией.

10.4. Скалярная электродинамика

Рассмотрим лагранжиан

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (\mathcal{D}^\mu\varphi)^*\mathcal{D}_\mu\varphi, \quad (10.14)$$

где $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$, как в формуле (9.36). Этот лагранжиан описывает заряженные скалярные частицы (они существуют в природе — например, мезоны π^+ и π^-) и их взаимодействие с электромагнитным полем. Он инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\chi, \quad \varphi \rightarrow e^{-ie\chi}\varphi. \quad (10.15)$$

Взаимодействие описывается кубическими и квартичными членами в лагранжиане (10.14):

$$\mathcal{L}_{\text{взаим}}^{\text{скал. КЭД}} = ieA_\mu[(\partial^\mu\varphi^*)\varphi - \varphi^*(\partial^\mu\varphi)] + e^2A_\mu A^\mu\varphi^*\varphi. \quad (10.16)$$

Рассмотрим вначале квартичный член. Он похож на квартичный член (10.12) в скалярной теории. Он порождает вершины, где встречаются две скалярные и две фотонные линии, как на рис. 10.4 б. Эти вершины¹ входят в диаграмму с фактором $2e^2\eta^{\mu\nu}$ (2 приходит из комбинаторики), где индексы μ, ν отражают присутствие фотонных линий — фотоны (реальные или виртуальные) могут иметь разные поляризации.

Кубический член порождает вершины, где встречаются только три линии (см. рис. 10.4 а). Отметьте, однако, присутствие в кубическом лагранжиане производных, которые действуют на скалярные поля. Когда поля представляют свободные плоские волны, их производные дают 4-импульсы соответствующих состояний, а в графическом

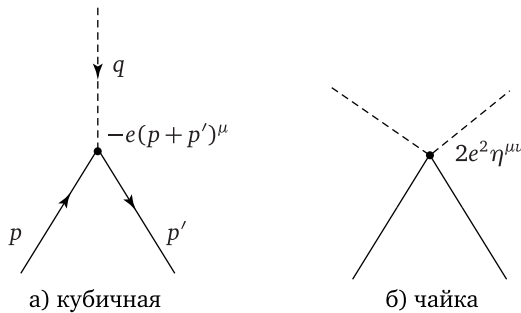


Рис. 10.4. Элементарные вершины в скалярной КЭД

¹Поэтически настроенные теоретики окрестили их чайками.

представлении — импульсы соответствующих линий. Пожалуйста, примите на веру, что это так не только для реальных частиц на массовой поверхности, но и для виртуальных частиц. Производные действуют налево и направо, и мы получаем фактор $-e(p + p')^\mu$ в каждой кубической вершине.

Рассмотрим теперь процесс, в котором скалярная частица рассеивается в статическом внешнем электромагнитном поле. В низшем порядке амплитуда рассеяния описывается графиком, изображённым на рис. 10.4а, где $q = (0, \mathbf{q})$. Аналитическое выражение для амплитуды получается, если умножить фактор $-e(p + p')^\mu$, стоящий в вершине, на компоненту Фурье векторного потенциала:

$$M_{fi}^{(1)} = -e(p + p')^\mu A_\mu(\mathbf{q}). \quad (10.17)$$

В чисто статическом электрическом поле присутствует только нулевая компонента потенциала: $A_\mu(\mathbf{q}) = \delta_{\mu 0} \Phi(\mathbf{q})$. Если скорости налетающей и вылетающей частиц малы, можно заменить $(p + p')^0$ на $2m$ и написать

$$M_{fi}^{(1)} = -2me\Phi(\mathbf{q}) = -2mV_q. \quad (10.18)$$

Разделив это выражение на 4π , как требуется согласно формуле (10.5), мы воспроизводим борновскую амплитуду (8.20).

В порядке $\sim e^2$ амплитуда рассеяния представляет сумму вкладов чайки на рис. 10.4б и графика на рис. 10.5. В нерелятивистском пределе вклад второго графика приобретает вид

$$M_{fi}^{(2)} = - \int \frac{d\mathbf{q}_1}{(2\pi)^3} 2me\Phi(\mathbf{q}_1) \frac{1}{(p + q_1)^2 - m^2} 2me\Phi(\mathbf{q} - \mathbf{q}_1). \quad (10.19)$$

В этом выражении выделяются факторы $2me\Phi(\mathbf{q}_1)$ и $2me\Phi(\mathbf{q}_2)$, пришедшие от двух вершин, и релятивистский пропагатор (10.10) от виртуальной промежуточной частицы. Разделив это выражение на 4π , мы воспроизводим результат (8.28) с нерелятивистским пропагатором (10.9).

На диаграмме такого типа, как на рис. 10.5, пунктирные линии могут обозначать не только статичный внешний потенциал, но также реальные фотоны на массовой поверхности, так что $q_1^2 = q_2^2 = 0$. В этом случае мы имеем дело с рассеянием фотонов на скалярных заряженных частицах: $\gamma\pi^+ \rightarrow \gamma\pi^+$ или $\gamma\pi^- \rightarrow \gamma\pi^-$. Те же диаграммы описывают аннигиляцию $\pi^+\pi^- \rightarrow \gamma\gamma$

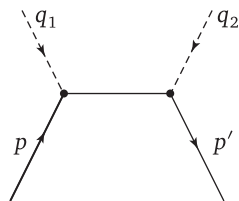
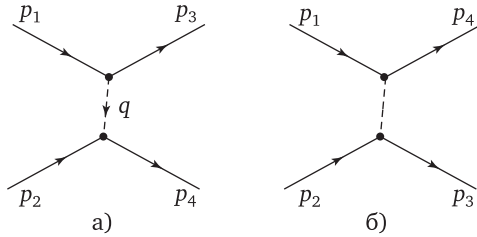


Рис. 10.5. Два последовательных рассеяния

Рис. 10.6. Рассеяние $\pi\pi$

и обратный процесс $\gamma\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-$ — всё зависит от знаков временных компонент импульсов $q_{1,2}$, p , p' : входящая частица с отрицательной энергией есть на самом деле выходящая античастица!

Векторный потенциал бегущей электромагнитной волны включает в виде фактора вектор поляризации $\epsilon_\mu(q)$. Волна может иметь две поперечные поляризации, и, следовательно, имеется два разных вектора поляризации $\epsilon_\mu^{(1,2)}(q)$. В системе отсчёта, где волна бежит вдоль оси z , $q = (0, 0, |\mathbf{q}|)$, имеем

$$\epsilon_\mu^{(1)}(q) = (0; 1, 0, 0), \quad \epsilon_\mu^{(2)}(q) = (0; 0, 1, 0). \quad (10.20)$$

Пунктирные линии на фейнмановских диаграммах для рассеяния реальных фотонов дают множители (10.20) в амплитудах¹.

Другой важный процесс — это электромагнитное рассеяние π -мезонов друг на друге. Две диаграммы, дающие вклад в амплитуду, изображены на рис. 10.6.

Эти диаграммы включают обмен виртуальным фотоном. Замечая пока нюансы под ковёр (мы их оттуда вытащим к концу главы), пропагатор фотона даётся функцией Грина неоднородного уравнения Даламбера

$$\square A_\mu = \text{источник}. \quad (10.21)$$

Отсюда получаем

$$D_{\mu\nu}(q) = \frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2}. \quad (10.22)$$

¹ Точнее, мы должны брать комплексно-сопряжённые векторы поляризации для выходящих фотонов. Это правило тесно связано с принятой нами конвенцией в формулах (4.43) и (4.44) и с выделенным курсивом замечанием на с. 152. Для линейно поляризованных фотонов $\epsilon_\mu(q)$ вещественны и это несущественно. Но векторы поляризации циркулярно поляризованных фотонов комплексны, и мы (впрочем, скорее, не мы, а люди, которые занимаются фактическим вычислением диаграмм) должны проявить необходимую аккуратность.

Таким образом, полное выражение для амплитуды рассеяния $\pi\pi$, даваемое суммой двух диаграмм, изображённых на рис. 10.6, имеет вид

$$M_{fi}^{\gamma\pi\rightarrow\gamma\pi} = e^2 \left[\frac{(p_1 + p_3) \cdot (p_2 + p_4)}{(p_1 - p_3)^2} + \frac{(p_1 + p_4) \cdot (p_2 + p_3)}{(p_1 - p_4)^2} \right]. \quad (10.23)$$

10.5. Спинорная электродинамика

Пи-мезоны — это не элементарные частицы, а сложные составные объекты, сделанные из кварков и антикварков. Поэтому лагранжиан (10.14) хорошо описывает динамику их электромагнитных взаимодействий только для низкочастотных полей с длиной волны, намного большей, чем размер пиона. С другой стороны, электрон — частица элементарная. Или, лучше сказать, он выглядит элементарной частицей в широком диапазоне энергий — вплоть до $1 E \sim 100\text{--}200$ ГэВ.

Ввиду этого и ввиду того, что электроны стабильны и что вокруг нас имеется множество электронов, в то время как пионы отсутствуют и только рождаются на краткие мгновения в ускорителях, спинорная электродинамика, теория электронно-фотонных взаимодействий, значительно более важна, чем скалярная, для описания и понимания свойств нашего мира.

Лагранжиан КЭД был выписан в (9.47). Помимо квадратичной части, описывающей свободные электроны и фотоны, он содержит кубичный член, описывающий их взаимодействие, и фейнмановские графики для процессов КЭД содержат только тройные вершины.

Диаграмма, описывающая амплитуду рассеяния электрона во внешнем поле, изображена на рис. 10.7.

Соответствующее аналитическое выражение для амплитуды имеет вид

$$M_{fi} = -e\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p)A_\mu(q), \quad (10.24)$$

¹ При ещё больших энергиях начинает чувствоваться электронная «сердцевина», сделанная из хиггсовских полей, — см. главу 12.

Сказав это, я не могу не вспомнить, что В. И. Ленин написал в числе прочего небольшое эссе на философские темы «Материализм и эмпириокритицизм» (книжка вышла в 1909 г., когда революционное движение было в глубоком упадке и Ленин был мало занят на своей основной работе). В студенческие годы я читал это эссе и должен сказать, что в нём много здравых мыслей. В числе прочего Ленин заметил там, что «электрон так же неисчерпаем, как и атом», и был, вероятно, в этом прав. Можно только пожалеть, что этот человек не выбрал в жизни более мирную стезю. Он мог бы стать хорошим физиком...

где фактор $A_\mu(q)$ — внешний векторный потенциал, $-e\gamma^\mu$ — вершина взаимодействия, следующая из лагранжиана (9.47), $u(p)$ — дираковский биспинор, описывающий плоскую входящую электронную волну, решение свободного уравнения Дирака [его конкретный вид был дан в формуле (9.53)], и $\bar{u}(p')$, связанное с $u(p')$ дираковским сопряжением, описывает выходящий электрон. Факторы $u(p)$ и $\bar{u}(p)$ играют для электронов точно ту же роль, что векторы поляризации (10.20) для фотонов.

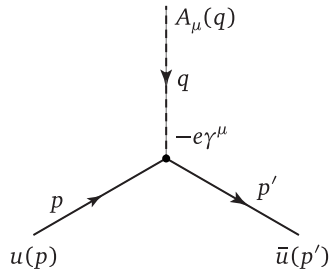


Рис. 10.7. Рассеяние электрона во внешнем поле

Сечение пропорционально $|M_{fi}|^2$. Если нас интересует сечение рассеяния неполяризованных электронов, необходимо усреднить по начальным и просуммировать по конечным поляризациям. Для кулоновского внешнего статического поля, созданного зарядом Ze , мы приходим в нерелятивистском случае к формуле Резерфорда [ср. формулу (5.5)]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(2mZ\alpha)^2}{q^4}. \quad (10.25)$$

Амплитуда рассеяния электрона на электроне даётся графиками, изображёнными на рис. 5.3. Они похожи на диаграммы для рассеяния заряженных пионов, но вершины включают теперь структуру $-e\gamma^\mu$, а внешние линии кодируют биспинорные факторы $u(p_1)$, $u(p_2)$, $\bar{u}(p_3)$, $\bar{u}(p_4)$. Фотонный пропагатор даётся выражением (10.22), как и ранее.

Рассмотрим теперь процесс *комптоновского рассеяния* — рассеяния фотона на электроне. Он описывается двумя диаграммами, изображёнными на рис. 10.8.

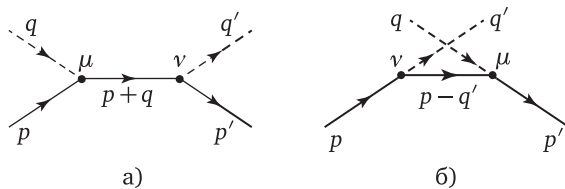


Рис. 10.8. Комптоновское рассеяние

Мы знаем уже, что пунктирные линии, описывающие реальные фотоны, кодируют факторы $\varepsilon_\mu(q)$ и $\varepsilon_\nu^*(q')$ в аналитических выражениях для амплитуд. Вершины включают структуры $-e\gamma^\mu$ и $-e\gamma^\nu$. Сплошные внешние линии описывают входящий и выходящий электроны и дают факторы $\bar{u}(p')$ и $u(p)$.

Но какое аналитическое выражение отвечает внутренней сплошной линии — линии виртуального электрона?

Что же, мы уже знаем, что виртуальная скалярная линия даёт функцию Грина неоднородного уравнения КФГ (10.8) и что виртуальная фотонная линия даёт функцию Грина неоднородного уравнения Даламбера (10.21). Тогда легко предположить (и это предположение подтверждается точным анализом), что виртуальная фермионная линия даёт функцию Грина неоднородного уравнения Дирака.

В импульсном пространстве последнее записывается как

$$(\hat{p} - m)\Psi = \text{источник}, \quad (10.26)$$

где мы ввели обозначение $\hat{p} = p_\mu \gamma^\mu$. Фермионный пропагатор есть

$$G_F(p) = \frac{1}{\hat{p} - m} = \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2}. \quad (10.27)$$

Собирая воедино все структуры и аккуратно учитывая все знаки (по не сформулированному ещё правилу!), можно написать явное выражение для комптоновской амплитуды, даваемое суммой двух графиков, изображённых на рис. 10.8:

$$M_{fi} = -e^2 \varepsilon_\mu^{(s)}(q) \varepsilon_\nu^{(s')*}(q') \bar{u}^{(\sigma')}(p') \left[\gamma^\nu \frac{\hat{p} + \hat{q} + m}{(p+q)^2 - m^2} \gamma^\mu + \gamma^\mu \frac{\hat{p} - \hat{q}' + m}{(p-q')^2 - m^2} \gamma^\nu \right] u^{(\sigma)}(p). \quad (10.28)$$

Здесь переменные $s = \pm 1$ и $s' = \pm 1$ — спиральности начального и конечного фотонов и $\sigma = \pm 1/2$ и $\sigma' = \pm 1/2$ — спиральности начального и конечного электронов.

В главе 12, посвящённой электрослабой теории, мы будем обсуждать графики с виртуальными массивными векторными частицами. Для этого нам нужно знать, как выглядит их пропагатор. «Аналитически продолжая» вышеприведённые рассуждения, приходим к выводу, что этот пропагатор есть функция Грина неоднородного

уравнения Прока [см. формулу (7.60)], которая даётся выражением¹

$$D_{\mu\nu}^{\text{Прока}}(q) = \frac{\eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / m^2}{q^2 - m^2}. \quad (10.29)$$

10.6. Петли

Диаграмма, изображённая на рис. 10.7, описывает рассеяние не только во внешнем электрическом, но также и во внешнем магнитном поле. Вычислив соответствующую амплитуду, можно в ней выделить член, отвечающий взаимодействию поля с собственным магнитным моментом электрона, существование и величину которого предсказывает теория Дирака:

$$\mu_e = \frac{e\hbar}{2m_e c} = -9,274 \dots \cdot 10^{-21} \frac{\text{эрг}}{\text{гаусс}}. \quad (10.30)$$

Однако, когда физики измерили магнитный момент достаточно точно, они увидели, что это точное значение не вполне совпадает с предсказанием (10.30); оно немного больше по абсолютной величине. Это рассогласование можно объяснить, если вспомнить, что диаграмма, изображённая на рис. 10.7, даёт амплитуду рассеяния только в низшем порядке теории возмущений. Имеются поправки, описываемые петлевыми диаграммами (о петлях уже шла речь в главе 5). Главная такая поправка даётся однопетлевой диаграммой, изображённой на рис. 10.9. Точное вычисление² даёт

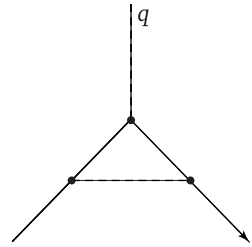


Рис. 10.9. Швингеровская поправка к μ_e

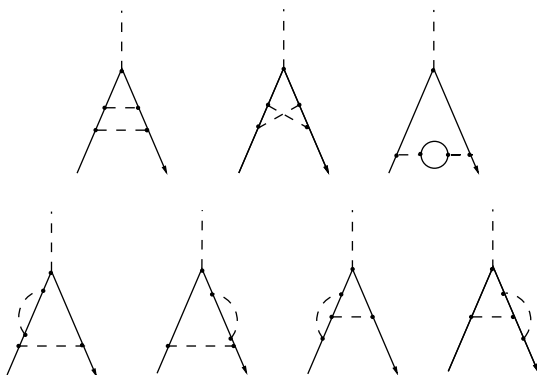
$$\mu_e = \frac{e\hbar}{2m_e c} \left[1 + \frac{\alpha}{2\pi} + O(\alpha^2) \right]. \quad (10.31)$$

Сейчас известны также поправки высших порядков по α . Конечно, чем выше порядок, тем сложнее вычисления. Имеются 7 двухпетлевых графиков, представленных на рис. 10.10. На уровне трёх петель необходимо вычислить 72 графика, на четырёхпетлевом уровне — 891 график, на 5-петлевом — 12 672 графика... И все эти вычисления

¹ Можно убедиться, что

$$[(m^2 - q^2)\delta_\mu^\nu + q_\mu q^\nu] D_{\nu\lambda}^{\text{Прока}}(q) = -\eta_{\mu\lambda}.$$

² Его сделал Швингер в 1948 г. Швингер был весьма горд этим результатом. Формула (10.31) выгравирована на его могильном памятнике.

Рис. 10.10. Двухпетлевые поправки к μ_e

были проведены. Вплоть до порядка $\sim \alpha^3$ — аналитически, а в двух следующих порядках — численно. В результате теория даёт для электронного магнитного момента невероятно точные предсказания.

Обычно обсуждают поправку к единице в квадратных скобках в формуле (10.31):

$$a = \alpha/(2\pi) + \dots,$$

которая определяет *аномальный* магнитный момент. Теоретическое предсказание для a есть

$$a^{\text{теор}} = (11\,596\,521\,818 \pm 9) \cdot 10^{-13}. \quad (10.32)$$

Величина a была измерена экспериментально, и точность этих измерений тоже невероятно велика. Мы знаем сегодня, что

$$a^{\text{эксп}} = (11\,596\,521\,807 \pm 3) \cdot 10^{-13}. \quad (10.33)$$

Я надеюсь, что читатель не назовёт меня дешёвым пиарщиком на содержании у КЭД-й мафии, если согласие между теорией и экспериментом я охарактеризую в данном случае как удовлетворительное.

Как вы заметили, экспериментальная неопределённость этой величины несколько меньше теоретической. Главный источник теоретической неопределённости — это не 6-петлевые поправки, которые пока не несосчитаны, а неточное знание постоянной тонкой структуры α . Между прочим, если мы доверяем теории КЭД, можно *уточнить* это знание, исходя из экспериментально известной величины (10.33).

Вернёмся к поправкам порядка $\sim \alpha$. Диаграмма на рис. 10.9 — единственный возможный вклад в амплитуду. Другой важный однопетлевой график изображён на рис. 5.7. Этот график не даёт вклада в магнитный момент, но, как уже было сказано в главе 5, приводит к перенормировке заряда электрона. В главе 5 мы упомянули, что этот график содержит логарифмические ультрафиолетовые расходимости, но не объяснили почему. Сейчас мы попытаемся это сделать. Как было отмечено выше, петлевые графики включают интегралы по виртуальным 4 импульсам.

Рассмотрим блок с фермионной петлёй, изображённой на рис. 5.7. Этот блок (соответствующее аналитическое выражение) представляет однопетлевой вклад в так называемый *фотонный поляризационный оператор* $\mathcal{P}^{\mu\nu}(q)$. На рис. 10.11 этот блок перерисован. Заметим, что по определению $\mathcal{P}^{\mu\nu}(q)$ включает только фермионную петлю, но не прицепленные к ней на рис. 5.7 фотонные пропагаторы.

Правила Фейнмана, очерченные выше, которые будут точно сформулированы в конце этой главы, приводят к следующему аналитическому однопетлевому выражению для $\mathcal{P}^{\mu\nu}(q)$:

$$\mathcal{P}^{\mu\nu}(q) = ie^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \gamma^\mu \frac{1}{\hat{p} - m} \gamma^\nu \frac{1}{\hat{p} + \hat{q} - m} \right\}. \quad (10.34)$$

На первый взгляд, это выражение содержит не только логарифмическую, но также квадратичную *степенную* ультрафиолетовую расходимость при всех импульсах q , включая $q = 0$:

$$\mathcal{P}^{\mu\nu}(q) \sim e^2 \int \frac{d^4 p}{p^2} \sim e^2 \Lambda^2,$$

где Λ — параметр ультрафиолетового обрезания, искусственно введённый верхний предел в интеграле по импульсам. Однако если проделать такую *ультрафиолетовую регуляризацию* вполне аккуратно, поддерживая лоренц-инвариантность и калибровочную инвариантность¹, то можно убедиться, что квадратичные расходимости нацело сокращаются и результат интегрирования есть

$$\mathcal{P}^{\mu\nu}(q) = \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \mathcal{P}(q^2), \quad (10.35)$$

¹ Мы здесь этого делать не будем.

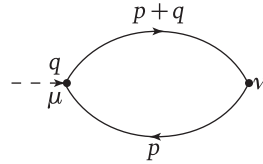


Рис. 10.11. Фотонный поляризационный оператор в одной петле

причём $\mathcal{P}(0) = 0$, так что $\mathcal{P}^{\mu\nu}(q)$ в точке $q = 0$ несингулярно. Такое $\mathcal{P}(q^2)$ включает только логарифмическую ультрафиолетовую расходимость.

Этот результат не удивителен. Ненулевое квадратично расходящееся $\mathcal{P}(0)$ означало бы ненулевую квадратично расходящуюся фотонную массу [см. ниже уравнение (10.37)]. А как мы знаем из § 7.3, ненулевая масса фотона (хоть конечная, хоть бесконечная) запрещена калибровочной инвариантностью!

Заметим, что поляризационный оператор удовлетворяет условию поперечности $q_\mu \mathcal{P}^{\mu\nu} = 0$. И это, конечно, не случайно. Свойство поперечности следует из закона сохранения тока (9.56)¹.

Скалярная функция $\mathcal{P}(q^2)$ зависит, помимо q^2 , от электронной массы m и ультрафиолетового обрезания Λ . Можно получить точное выражение для $\mathcal{P}(q^2)$, но оно не так красиво и поучительно. Однако его асимптотический вид весьма симпатичен:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(q^2) &\approx -\frac{e^2}{12\pi^2} q^2 \ln \frac{\Lambda^2}{q^2}, & |q^2| \gg m^2, \\ \mathcal{P}(q^2) &\approx -\frac{e^2}{12\pi^2} q^2 \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}, & |q^2| \ll m^2.\end{aligned}\tag{10.36}$$

$$----- = ---- + \text{---}\bigcirc\text{---} + \text{---}\bigcirc\text{---}\bigcirc\text{---} + \dots$$

Рис. 10.12. Точный фотонный пропагатор

Всё готово к тому, чтобы вывести выражение (5.12) для перенормировки физического заряда электрона. Заметим вначале, что фермионную петлю, изображённую на рис. 10.11, можно вставить в любую линию виртуального фотона в любом фейнмановском графике. И не только одну петлю, но любое количество таких петель. Рассмотрим сумму ряда графиков на рис. 10.12. Соответствующее аналитическое выражение есть

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\mu\nu}(q) &= \frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{\eta_{\mu\rho}}{q^2} \left(\eta^{\rho\sigma} - \frac{q^\rho q^\sigma}{q^2} \right) \mathcal{P}(q^2) \frac{\eta_{\sigma\nu}}{q^2} + \dots = \\ &= \frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2 - \mathcal{P}(q^2)} - q_\mu q_\nu \frac{\mathcal{P}(q^2)}{q^4 [q^2 - \mathcal{P}(q^2)]}.\end{aligned}\tag{10.37}$$

Назовём его *точным фотонным пропагатором*.

¹ Мы утаим от читателя вывод этого, но поляризационный оператор связан с фермие-образом коррелятора электромагнитных токов. А производная ∂_μ переходит в импульсном пространстве в q_μ .

Замечательно, что второй член в правой части равенства (10.37) не играет никакой роли! Это снова следствие сохранения тока. Действительно, рассмотрим, например, диаграммы на рис. 5.3 для рассеяния электронов. Если заменить в линии виртуального фотона древесный пропагатор (10.22) точным пропагатором (10.37), то член $\propto q_\mu q_\nu$ в пропагаторе будет умножаться на фермионные скобки $\bar{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1)$ и $\bar{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2)$. И это произведение обращается в нуль ввиду (9.57).

Именно в этом состоит вытащенный нами сейчас из под ковра замеченный туда ранее нюанс. Всегда можно добавить в фотонный пропагатор член $\propto q_\mu q_\nu$, и результаты для физических амплитуд при этом не изменятся. Добавлять или не добавлять такие члены, и если добавлять, то с каким коэффициентом, — дело вкуса и удобства. Фактически эта свобода — прямое следствие калибровочной свободы (9.48).

Вернёмся к соотношению (10.37). Предположим, что q^2 мало. Игнорирует роль только первый член $\propto \eta_{\mu\nu}$, куда мы должны подставить вместо $\mathcal{D}(q^2)$ правую часть второго из соотношений в (10.36). Мы получаем¹

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(q) = D_{\mu\nu}(q) \frac{1}{1 + \frac{e_0^2}{6\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{m}} + \text{несущественные члены}, \quad (10.38)$$

т. е. точные пропагаторы всех виртуальных фотонных линий, фигурирующих в диаграмме, совпадают в этом пределе с древесными пропагаторами, умноженными на определённый фактор. И это сводится к умножению на этот фактор затравочного заряда e_0^2 (действительно, заряды e_0 стоят на двух концах каждой виртуальной фотонной линии). Результат (5.12) воспроизведён.

Не только физический заряд электрона перенормируется относительно затравочного. То же относится к массе электрона. Точно так же, как для фотона, можно определить *электронный поляризационный оператор* $\Sigma(p)$ и точный электронный пропагатор. Простейший нетривиальный однопетлевой график, дающий вклад в $\Sigma(p)$, изображён на рис. 10.13. Этот график содержит логарифмическую ультрафиолетовую расходимость.

Физическая масса электрона определяется как полюс в точном электронном пропагаторе. На однопетлевом уровне

$$m_{\text{физ}} = m_0 \left(1 + \frac{3e_0^2}{8\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{m_0} \right), \quad (10.39)$$

¹ Мы восстановили использовавшееся в главе 5 обозначение e_0 для голого затравочного заряда, который входит в исходный лагранжиан.

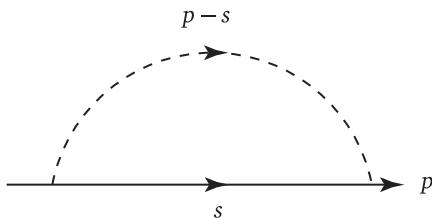


Рис. 10.13. Электронный поляризационный оператор

где m_0 — голая масса. Учитывая также высшие петли и удерживая только главные логарифмические члены $\propto \left(e^2 \ln \frac{\Lambda}{m}\right)^n$ [при выводе соотношения (5.12) мы на самом деле сделали именно это], мы получаем

$$m_{\text{физ}} = m_0 \left(\frac{e_0^2}{e_{\text{физ}}^2} \right)^{9/4}. \quad (10.40)$$

Физическая масса больше затравочной.

Завершая эту главу, мы аккуратно сформулируем правила Фейнмана, с помощью которых можно вычислить любую диаграмму в скалярной теории, в скалярной и спинорной электродинамике. Должен сказать, что такая аккуратная формулировка не входила в мои первоначальные планы: как неоднократно подчёркивалось, я не ставил в этой книге задачу *научить* читателя вычислять графики. Однако, написав эту главу, я представил страдания *очень* дотошного читателя, который захотел бы реально воспроизвести со всеми правильными коэффициентами написанные мной в этой главе выражения для различных амплитуд рассеяния, но не мог бы этого сделать, и изменил первоначальные намерения.

Следующая страничка — для этого сверхдотошного читателя. Остальные могут смело её пропустить.

1) Все аналитические выражения для вершин, следующих из лагранжиана и приведённых на рис. 10.1, 10.4, 10.7, нужно на самом деле умножить на¹ i .

2) Скалярная виртуальная линия даёт фактор $iD(p) = i/(p^2 - m^2)$.

¹ При аккуратном выводе диаграммной техники с использованием интегралов по траекториям это следует из того факта, что под интегралом типа интеграла (8.41) стоит $\exp\{i \int \mathcal{L} d^4x\}$, а не $\exp\{\int \mathcal{L} d^4x\}$.

Внешние скалярные линии не вносят никаких нетривиальных факторов.

3) Фотонная виртуальная линия кодирует выражение $-iD_{\mu\nu}(q) = -i\eta_{\mu\nu}/q^2$.

Входящая фотонная линия даёт поляризационный фактор $\varepsilon_\mu(q_{\text{in}})$; выходящая фотонная линия даёт фактор $\varepsilon_\mu^*(q_{\text{out}})$.

Статическое внешнее электромагнитное поле даёт фактор $2\pi\delta(q_0)A_\mu(\mathbf{q})$, где $A_\mu(\mathbf{q})$ — компонента Фурье вектор-потенциала.

4) Виртуальная линия векторной массивной частицы даёт выражение (10.29), умноженное на $-i$.

5) Электронная виртуальная линия даёт $iG_F(p) = i/(\hat{p} - m)$.

Входящий электрон вносит поляризационный фактор $u(p_{\text{in}})$; выходящий электрон вносит фактор $\bar{u}(p_{\text{out}})$.

Входящий позитрон вносит фактор $\bar{u}(-p_{\text{in}})$, а выходящий позитрон — фактор¹ $u(-p_{\text{out}})$ ($p_0 > 0$!).

6) Если импульсы каких-то внутренних виртуальных линий или линий, описывающих внешнее классическое поле, не определяются кинематикой, нужно провести интегрирование по $\prod_j d^4s^{(j)}/(2\pi)^4$.

7) Каждая фермионная петля вносит минус².

8) После всех вычислений мы получаем аналитическое выражение для амплитуды M_{fi} , умноженное на³ i .

9) Упомянем также для полноты, что в случае, когда петля включает n одинаковых бозонных частиц и диаграмма симметрична относительно перестановок соответствующих виртуальных линий, нужно ввести дополнительный комбинаторный множитель $1/n!$. Это следует из виковского подсчёта в духе рис. 10.2.

¹ Поэтому стрелки на диаграммах удобно в реальных вычислениях рисовать не так, как мы это делаем. Именно: удобно рисовать *стрелки наружу* для выходящих электронов или входящих позитронов и *стрелки внутрь* для входящих электронов и выходящих позитронов — ср. замечание в конце § 5.1.

² Это следует из гравитационной природы фермионных полей. Не забудьте про этот минус, если вы захотите воспроизвести соотношение (10.34)!

³ Это i имеет то же происхождение, что и упомянутый выше дополнительный фактор i в вершинах. Заметьте, что в первом порядке теории возмущений эти два фактора сокращаются и можно писать аналитические выражения для амплитуд, изображённых на рис. 10.1, 10.4 и 10.7 прямо по лагранжиану, что мы и делали.

ЧАСТЬ V

Вторые блюда

Глава 11

Квантовая хромодинамика

Эта часть с двумя её длинными главами — центральная в нашей книге. После всех долгих приготовлений мы наконец начнём подробный рассказ о квантовых теориях поля, описывающих физику сильных и слабых взаимодействий. Мы попытаемся объяснить при этом на языке формул многие черты этих теорий, упомянутые в предыдущих главах. Эта глава посвящена теории сильных взаимодействий — квантовой хромодинамике (КХД).

У КХД много общего со спинорной электродинамикой. Обе теории включают фундаментальные фермионы (электроны в КЭД и кварки в КХД) и фундаментальные векторные частицы (фотоны в КЭД и глюоны в КХД). Основное отличие в том, что кварки и глюоны цветные. Кварки принадлежат фундаментальному представлению цветной группы $SU(3)$; иначе говоря, существуют кварки трёх разных цветов (и шести разных ароматов). Глюоны принадлежат присоединённому представлению группы $SU(3)$, и у них имеется $3^2 - 1 = 8$ цветных разновидностей.

11.1. Лагранжиан КХД

Чтобы понять логику, по которой строится эта теория и пишется её лагранжиан, вернёмся вначале к лагранжиану КЭД (9.47), обсудим снова его свойства и покажем, как можно построить его многоцветное неабелево обобщение. Сконцентрируем наше внимание на фермионной части (9.47), которая имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{ферм}}^{\text{КЭД}} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi, \quad (11.1)$$

где

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (11.2)$$

— ковариантная производная. Выражение (11.1) инвариантно относительно абелевых калибровочных преобразований (9.48), которые мы выпишем здесь снова:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi, \quad \psi \rightarrow e^{-ie\chi} \psi. \quad (11.3)$$

Преобразования (11.3) образуют группу. Эта группа абелева, поскольку результат двух последовательных преобразований не зависит от их порядка. Группа калибровочных преобразований *бесконечномерна*. С каждой пространственной точкой связан свой параметр преобразования $\chi(x)$. Физики говорят (и мы тоже об этом уже упоминали — см. с. 153), что преобразования (11.3) *локальны*, отличая их от *глобальных* преобразований симметрии, где параметры преобразования не зависят от x и t и их конечное число. Глобальную версию преобразований (11.3) представляют преобразования, где заряженное поле ψ умножается на универсальный фазовый фактор, а нейтральное поле A_μ не преобразуется вообще. Мы узнаём однопараметрическую абелеву группу $U(1)$. Естественно использовать обозначение $U(1)$ также для бесконечномерной калибровочной группы (11.3).

Важное наблюдение состоит в том, что структура $\mathcal{D}_\mu\psi$ преобразуется под действием калибровочной группы так же, как ψ :

$$\mathcal{D}_\mu\psi \rightarrow e^{-ie\chi} \mathcal{D}_\mu\psi \quad (11.4)$$

[см. также примечание после формулы (9.36)].

Заменим теперь поле электрона ψ на кварковое поле q_j , несущее цветной индекс, $j = 1, 2, 3$. Ясно, что массовый член $-m\bar{q}^j q_j$, заменивший соответствующий член в формуле (11.1), инвариантен относительно локальных неабелевых преобразований группы $SU(3)$:

$$q(x) \rightarrow \Omega(x)q(x), \quad \bar{q}(x) \rightarrow \bar{q}(x)\Omega^\dagger(x), \quad \Omega(x) \in SU(3). \quad (11.5)$$

Рассмотрим теперь первый член в формуле (11.1). Вновь ясно, что *свободный* фермионный кинетический член $i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ легко обобщить, записав $i\bar{q}^j\gamma^\mu\partial_\mu q_j$. Однако такая структура неинвариантна относительно локальных калибровочных преобразований (11.5); она инвариантна только относительно глобальных преобразований $SU(3)$, где Ω одна и та же во всех пространственных точках.

Чтобы записать член с взаимодействием, заменим (11.2) на¹

$$\mathcal{D}_\mu = \delta_j^k \partial_\mu - ig(t^a)_j^k A_\mu^a \equiv \partial_\mu - ig\hat{A}_\mu, \quad (11.6)$$

где t^a — восемь генераторов $SU(3)$, определённых соотношениями (6.43), и g — «сильный заряд» — безразмерная константа, определя-

¹ Мы следуем обычной конвенции, где знак заряда в (11.6) обратен знаку в (11.2). Эта неразбериха связана с тем, что заряд электрона отрицателен, $e = -|e|$. К сожалению, когда Бенджамин Франклин вводил два с половиной века назад понятие электрического заряда и определял, какой заряд положителен, а какой отрицателен, он ничего не знал об электронах.

ющая силу сильного взаимодействия. Матрицы $\hat{A}_\mu$ преобразуются по SU(3), как в формуле (6.51): $\hat{A}_\mu \rightarrow \Omega \hat{A}_\mu \Omega^\dagger$. Структура

$$\mathcal{L}_{\text{ферм}}^{\text{КХД}} = i\bar{q}\gamma^\mu(\partial_\mu - ig\hat{A}_\mu)q \quad (11.7)$$

(для краткости мы не пишем больше цветные индексы) инвариантна тогда относительно глобальных преобразований SU(3):

$$q(x) \rightarrow \Omega q(x), \quad \bar{q}(x) \rightarrow \bar{q}(x)\Omega^\dagger, \quad \hat{A}_\mu(x) \rightarrow \Omega \hat{A}_\mu(x)\Omega^\dagger. \quad (11.8)$$

То, что мы хотим сейчас сделать, — это принять выражение (11.7) как *истинный* вклад в лагранжиан КХД, включающий кинетический кварковый член и член, описывающий взаимодействие кварков с глюонным полем, и задаться следующим вопросом. Предположим, что на кварковые поля действуют *локальные* калибровочные преобразования (11.5); как должно одновременно преобразовываться матричное векторное поле $\hat{A}_\mu$, чтобы лагранжиан (11.7) оставался инвариантным?

Эквивалентным образом можно спросить: как должно преобразовываться $\hat{A}_\mu$, чтобы производная (11.6) была действительно ковариантной, т.е. чтобы структура $\mathcal{D}_\mu q(x)$ преобразовывалась как $\mathcal{D}_\mu q(x) \rightarrow \Omega(x)\mathcal{D}_\mu q(x)$ — таким же образом, как и $q(x)$. И ещё одна формулировка: найти такой закон преобразования для $\hat{A}_\mu$, чтобы дифференциальный оператор (11.6) преобразовывался как

$$\mathcal{D}_\mu \rightarrow \Omega \mathcal{D}_\mu \Omega^\dagger. \quad (11.9)$$

На все эти вопросы отвечает закон преобразования

$$\hat{A}_\mu \rightarrow \Omega \hat{A}_\mu \Omega^\dagger - \frac{i}{g}(\partial_\mu \Omega)\Omega^\dagger \quad (11.10)$$

(оставляем это читателю для проверки). Законы (11.5) и (11.10) образуют вместе локальную калибровочную симметрию, относительно которой выражение (11.7) инвариантно.

Почувствительно разобрать, как эти законы переходят в абелевы законы (11.3) для группы U(1). В абелевом случае A_μ более не матрица и первый член в правой части формулы (11.10) есть просто A_μ . Во втором члене мы должны подставить $e^{-ie\chi}$ вместо Ω и $-e$ вместо g . Тогда легко увидеть, что (11.10) переходит в преобразование $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi$.

Наша следующая задача — обобщить на неабелев случай лагранжиан электромагнитного поля $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2$. Для этого заметим прежде всего, что тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ может быть представ-

лен как коммутатор абелевых ковариантных производных (11.2):

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -\frac{i}{e} [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]. \quad (11.11)$$

Сделаем то же для неабелевых ковариантных производных и определим

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \frac{i}{g} [\mathcal{D}_\mu^{\text{неаб}}, \mathcal{D}_\nu^{\text{неаб}}] = \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu - ig [\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]. \quad (11.12)$$

Тогда $\hat{F}_{\mu\nu}$ принадлежит, как и $\hat{A}_\mu$, к присоединённому представлению группы и может быть представлено как $\hat{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a t^a$ с

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (11.13)$$

где f^{abc} — структурные константы группы SU(3).

Абелева напряжённость поля (11.11) инвариантна относительно абелевых калибровочных преобразований. Неабелева напряжённость (11.12) не инвариантна относительно преобразования (11.10), но преобразуется простым образом:

$$\hat{F}_{\mu\nu} \rightarrow \Omega \hat{F}_{\mu\nu} \Omega^\dagger, \quad (11.14)$$

как это немедленно следует из формулы (11.9). Теперь легко увидеть, что структура

$$\mathcal{L}_{\text{Янг—Миллс}} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \{ \hat{F}_{\mu\nu} \hat{F}^{\mu\nu} \} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} \quad (11.15)$$

инвариантна относительно неабелевых преобразований (11.10). Мы можем теперь сказать, что (11.15) и есть истинный лагранжиан, описывающий динамику глюонного поля в КХД!

Как упоминалось в главе 5, лагранжиан (11.15) был впервые написан Янгом и Миллсом в 1954 г.¹ Интересно, что концепция неабелева калибровочного поля была одновременно и независимо развита чистыми математиками. Но если вы захотите обсуждать это с математиками, не говорите, пожалуйста, «калибровочное поле». Вас просто не поймут. Говоря об $\hat{A}_\mu$, назовите его *связностью на главном расслоении*. А что касается $\hat{F}_{\mu\nu}$, то это, несомненно, *форма кривизны связности на главном расслоении*.

Полный калибровочно-инвариантный лагранжиан КХД имеет вид

$$\mathcal{L}^{\text{КХД}} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \{ \hat{F}_{\mu\nu} \hat{F}^{\mu\nu} \} + \sum_{f=1}^6 [i \bar{q}_f \gamma^\mu (\partial_\mu - ig \hat{A}_\mu) q_f - m_f \bar{q}_f q_f]. \quad (11.16)$$

Он включает сумму по шести кварковым ароматам; m_f — массы кварков, они даны в таблице 2 в начале третьей главы.

¹ Это был прекрасный год, год рождения вашего автора...

11.2. Правила Фейнмана. Асимптотическая свобода. Конфайнмент

Кварк-глюонное взаимодействие, описываемое лагранжианом (11.16), весьма похоже на электрон-фотонное взаимодействие. Единственное различие в том, что вершина взаимодействия включает теперь t^a — генератор группы $SU(3)$.

Существенно новое явление — это самодействие глюонов, описываемое первым членом в формуле (11.16). Подставив туда выражение (11.12), мы получим в лагранжиане кубичный член $\sim A^3$ и квартичный член $\sim A^4$. В кубичном члене одно из полей входит с производной, что вносит импульс в трёхглюонную вершину. В квартичной вершине нет импульсов, но её цветная и лоренцева структура достаточно сложны. Для развлечения читателя мы приведём здесь явные выражения для вершин и пропагаторов КХД.

глюонный пропагатор:

$$bv \text{ --- } \overset{q}{\text{~~~~~}} \text{ --- } a\mu \quad -iD_{\mu\nu}^{ab}(q) = \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{q^2} \delta^{ab} \quad (11.17)$$

3-глюонная вершина:

$$\begin{array}{c} c\lambda \\ \text{~~~~~} \\ r \\ \text{~~~~~} \\ p \\ \text{~~~~~} \\ a\mu \\ \text{~~~~~} \\ bv \end{array} \quad \Gamma_{\mu\nu\lambda}^{abc}(p, q, r) = -gf^{abc}[(p-q)_\lambda \eta_{\mu\nu} + \\ + (q-r)_\mu \eta_{\nu\lambda} + (r-p)_\nu \eta_{\mu\lambda}] \quad (11.18)$$

4-глюонная вершина:

$$\begin{array}{c} d\sigma \\ \text{~~~~~} \\ c\lambda \text{ --- } \text{~~~~~} \text{ --- } a\mu \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ bv \end{array} \quad \Gamma_{\mu\nu\lambda\sigma}^{abcd} = -ig^2 f^{abe} f^{cde} (\eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\lambda}) - \\ - ig^2 f^{ace} f^{bde} (\eta_{\mu\nu} \eta_{\sigma\lambda} - \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\lambda}) - \\ - ig^2 f^{ade} f^{bce} (\eta_{\mu\nu} \eta_{\sigma\lambda} - \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\sigma}) \quad (11.19)$$

кварковый пропагатор:

$$\text{--- } \overset{p}{\longrightarrow} \text{ ---} \quad iG_k^j(p) = \frac{i}{\hat{p} - m} \delta_k^j \quad (11.20)$$

кварк-глюонная вершина:

$$\begin{array}{c} \text{~~~~~} \text{ --- } a\mu \\ \text{~~~~~} \\ k \text{ --- } \text{~~~~~} \text{ --- } j \end{array} \quad (\Gamma_\mu^a)_j^k = ig\gamma_\mu (t^a)_j^k. \quad (11.21)$$

(Для 3-глюонной вершины мы используем соглашение, по которому все три импульса p, q, r выходящие, так что $p + q + r = 0$.)

Мы должны, однако, признаться, что, как это часто бывает, мы не только развлекли читателя, но и обманули его. Правила Фейнмана (11.17)—(11.21) позволяют правильно вычислять древесные амплитуды, но они недостаточны для вычисления петель.

Чтобы понять, почему это так, обсудим ещё раз ситуацию в КЭД. Фотонный пропагатор описывает распространение виртуального фотона. Физический фотон имеет две поперечные поляризации (10.20). Однако пропагатор (10.22) описывает также распространение нефизического продольно поляризованного фотона с вектором поляризации $e_\mu^{(L)} = (0; 0, 0, 1)$ и «скалярного» фотона с вектором поляризации $e_\mu^{(S)} = (1; 0, 0, 0)$. Оживание нефизических степеней свободы может показаться неприятным, но замечательный факт [следствие сохранения тока (9.56)] состоит в том, что вклады двух нефизических поляризаций в точности сокращаются друг с другом в любой физической амплитуде! Это позволяет использовать для пропагатора простое выражение (10.22) и ни о чём не думать.

А в КХД жизнь существенно сложнее. При использовании пропагатора (11.17) вклады продольного и скалярного глюонов *не* сокращаются в петлевых графиках. Сокращения можно достичь, только добавив графики, где в петлях циркулируют некоторые дополнительные нефизические частицы, так называемые *духи*. Правила Фейнмана (11.17)—(11.21) следует дополнить, включив пропагатор духов и их вершину взаимодействия с глюонами. Как было сказано в § 5.3, это сделали Л. Д. Фаддеев и В. Н. Попов в 1967 г. Но мы не будем здесь объяснять, что именно они сделали. Читатель должен обратиться для этого к более серьёзным книгам...

Сделаем только одно замечание. Духи можно не вводить, если использовать другой вид глюонного пропагатора, включающий только физические поперечные поляризации виртуальных глюонов. Этот вид, однако, существенно сложнее, чем (11.17), и такой подход технически менее удобен.

Имея в руках правила Фейнмана, можно проводить пертурбативные вычисления.

Мы приглашаем теперь читателя снова просмотреть конец § 5.3, где обсуждалось явление асимптотической свободы и её следствия для феноменологии. Если говорить коротко, вычисления показывают, что эффективная сила взаимодействия зависит от энергии. В отличие от КЭД, где эффективный заряд $e^2(\mu)$ и константа $\alpha(\mu) = \frac{e^2(\mu)}{4\pi}$

растут с ростом характерной энергии μ , в КХД ситуация противоположна: когда энергия растёт, константа связи $\alpha_s(\mu) = g^2(\mu)/(4\pi)$ падает согласно соотношению (5.20)¹. Это даёт нам малый параметр и делает пертурбативное разложение осмысленным. Наиболее яркое физическое явление, где теоретическое описание, основанное на КХД, находится в замечательном согласии с экспериментом, — это рождение струй в e^+e^- -аннигиляции (см. рис. 5.9). Есть и другие подобные явления.

Константа связи (11.22) мала, когда μ велико, но она становится большой, когда μ падает. При $\mu = \Lambda_{\text{КХД}}$ она даже бесконечна, но однопетлевая приближённая формула (11.22) не применима, конечно, для таких маленьких μ . Единственное, что можно сказать, — это то, что при $\mu \lesssim 500$ МэВ пертурбативные вычисления теряют смысл.

Рассмотрим теперь систему из тяжёлого кварка и тяжёлого антикварка (например, пару t -кварков с массой $m_t \approx 170$ ГэВ). На малых расстояниях (это соответствует большим характерным энергиям) они притягиваются ввиду обмена виртуальным глюоном — по тому же механизму, по которому в атоме водорода электрон и протон притягиваются, обмениваясь виртуальным фотоном. Это даёт кулоноподобный потенциал

$$V_{Q\bar{Q}}(r) = -c_F \frac{\alpha_s\left(\frac{1}{r}\right)}{r}, \quad (11.23)$$

где фактор c_F , определяемый как

$$t^a t^a = c_F \mathbb{1}, \quad (11.24)$$

появляется ввиду наличия генератора t^a в вершине (11.21). Его численное значение для $SU(3)$ есть $c_F = 4/3$. Математики называют эту величину *собственным значением квадратичного оператора Казимира в фундаментальном представлении*. Но вы можете язык не ломать, а просто подставить при желании в формулу (11.24) явные выражения для генераторов (6.43) и убедиться, что арифметика правильная.

Результат (11.23) для потенциала справедлив, когда $r \ll \Lambda_{\text{КХД}}^{-1}$, так что $\alpha_s\left(\frac{1}{r}\right)$ мало и поправки, связанные с обменом несколькими глюо-

¹ Воспроизведём здесь этот фундаментальный результат:

$$\alpha_s(\mu) = \frac{2\pi}{\left(11 - \frac{2}{3}N_f\right) \ln \frac{\mu}{\Lambda_{\text{КХД}}}}, \quad (11.22)$$

где N_f — число кварков, масса которых не превышает μ , а $\Lambda_{\text{КХД}} \sim 200$ МэВ — фундаментальная размерная константа КХД.

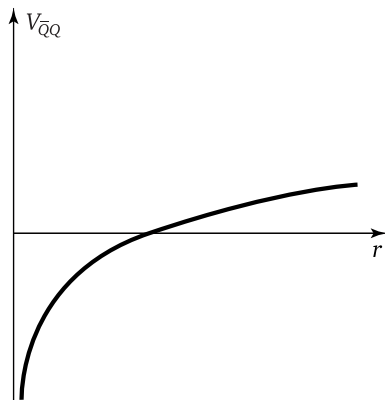


Рис. 11.1. Потенциал воронки

нов или лёгких кварк-антикварковых пар, тоже малы. Когда $r \gtrsim \Lambda_{\text{КХД}}^{-1}$, кулоновская формула (11.23) теряет справедливость, и непросто сказать, что следует написать вместо неё, — теория возмущений больше не работает, и вычисление затруднительно.

Гипотеза состоит в том, что потенциал $V_{Q\bar{Q}}(r)$ линейно растёт на больших расстояниях:

$$V_{Q\bar{Q}}(r \gg \Lambda_{\text{КХД}}^{-1}) \sim \sigma r, \quad (11.25)$$

где σ — ненулевая положительная константа. Асимптотики (11.23), (11.25) и интерполяция между ними приводят к так называемому *потенциалу воронки* (см. рис. 11.1). Рост потенциала на больших расстояниях означает конфайнмент — кварки попросту нельзя разделить, это стоило бы бесконечной энергии!

Предположим, что потенциал растёт линейно, как в формуле (11.25). Необходимо подчеркнуть, что это лишь предположение; как уже говорилось в главе 5, мы сейчас не можем его доказать. Не можем мы доказать и более слабое свойство, $V_{Q\bar{Q}}(\infty) = \infty$, которое означало бы, что в спектре нет цветных состояний¹. Но ли-

¹Сказанное относится также к несколько более простой *чистой* теории Янга—Миллса — теории без кварков, в которой лагранжиан содержит только первый член в формуле (11.16). В настоящее время мы подозреваем, но не можем доказать, что физический спектр этой теории не включает цветных глюонных состояний.

Между прочим, проблема конфайнмента принадлежит к так называемым *Проблемам тысячелетия* — семи сложным давно поставленным, но пока большей частью не решённым концептуальным математическим и физическим проблемам, за решение



Рис. 11.2. Струны в КХД

нейный рост — это простейшее и наиболее естественное предположение. Его эвристическое обоснование представлено на рис. 11.2 а. Оно подразумевает, что на больших межкварковых расстояниях порождаемое кварками глюонное хромозлектрическое поле $E^a(x)$ не торчит во все стороны (как это имеет место в случае слабой связи), а концентрируется в узкой трубке, которую обычно называют *струной*¹. Поле несёт энергию. Картина на рис. 11.2а предполагает постоянную линейную плотность энергии. Эта плотность (называемая *натяжением струны*) — не что иное, как константа σ в формуле (11.25). Некоторые компьютерные вычисления и экспериментальные данные по спектру адронов приводят к оценке

$$\sigma \approx 0,9 \frac{\text{ГэВ}}{\text{ферми}}. \quad (11.26)$$

В целом описанная система — *кварк + антикварк + соединяющая их сделанная из глюонных полей струна* — бесцветна. Это физическое адронное состояние. Адрон такого типа называется *тяжёлым кварконием*. Его масса примерно в два раза превышает массу

каждой из которых институтом Клэя в США обещана премия в миллион долларов. С 2000 года, когда эти проблемы были сформулированы и призы были объявлены, одна из этих семи проблем, известная как *гипотеза Пуанкаре* (пожалуйста, извините меня, что я не буду здесь объяснять, что это такое; это увело бы нас слишком далеко) была решена Григорием Перельманом, математиком из Петербурга, который отказался принять положенную ему премию. Это была чисто математическая проблема. Четыре из шести оставшихся проблем тоже математические, но две другие относятся к физике. Одна из премий будет вручена учёному, который сможет доказать существование и единственность решения уравнения Навье—Стокса, описывающего поток турбулентной жидкости, — эта задача остаётся неразрешённой в течении почти двухсот лет.

И вторая физическая проблема — это доказательство конфайнмента. Для читателя, который захочет решить эту проблему и одновременно свои финансовые проблемы, я даю здесь официальную формулировку:

Докажите, что для любой компактной группы G на $\mathbb{R}^4$ существует нетривиальная квантовая теория Янга—Миллса с массовой щелью $\Delta > 0$.

Ни пуха!

¹ Не пугайтесь. Это не *фундаментальная струна* теории струн — мы подадим это сложнейшее блюдо на десерт в самом конце нашего обеда. На рис. 11.2 представлена феноменологическая струна КХД.

тяжёлого кварка. Для t -кварков $M_{t\bar{t}} \approx M_t + M_{\bar{t}} \approx 340$ ГэВ и энергия, запасённая в струне, есть малая доля от массы кваркония.

Предположим теперь, что мы «тянем» за кварки, пытаясь их разделить. Струна при этом растягивается, и чем на более далёкое расстояние отодвинуты кварки, тем бóльшую энергию несёт струна. Очевидно, что такой рост не может продолжаться бесконечно. Довольно скоро наша струна *рвётся* на две, рождая в месте разрыва дополнительную пару лёгких кварков (см. рис. 11.2 б).

Появление дополнительных кварков на концах свежеразорванной струны необходимо для того, чтобы нейтрализовать цветные заряды двух образовавшихся её кусков. В результате ничто больше не заставляет две новые бесцветные адронные системы держаться вместе. Они могут разлететься по разным углам и забыть друг о друге. Мы фактически имеем здесь дело с распадом возбуждённого состояния кваркония $(Q\bar{Q})^*$ на два мезона $Q\bar{q}$ и $q\bar{Q}$. Каждый такой мезон представляет собой тяжёлый кварк, сопровождаемый своим лёгким антиколлегой и короткой глюонной струной.

11.3. Ноябрьская революция и кварконий

Двенадцатого или, может быть, тринадцатого ноября 1974 г. Лев Борисович Окунь, читавший нам, студентам пятого курса Физтеха, курс по феноменологии частиц, вошёл в аудиторию и сказал: «Вчера произошла сенсация!» Он имел в виду открытие частицы J/ψ , о котором накануне одновременно объявили две американские группы. Одна из них, возглавлявшаяся Самуэлем Тингом, работала на протонном ускорителе в Брукхэвенской национальной лаборатории (БНЛ), а другая во главе с Буртоном Рихтером — на электронно-позитронных встречных пучках в лаборатории СЛАК.

Группа БНЛ изучала инклюзивное рождение электронно-позитронных пар при столкновении протонного пучка с бериллиевой мишенью в процессе $p + Be \rightarrow e^+e^- + X$, где X обозначает произвольный набор частиц, которым экспериментаторы не интересовались (именно это значит слово «инклюзивный» — см. примечание на с. 93). Тинг предположил, что пары e^+e^- возникают в результате распада виртуального фотона, рождённого при столкновении (см. рис. 11.3 а).

Виртуальные фотоны могут иметь разные массы $M_{\gamma^*}^2 = p_{\gamma^*}^2$, и Тинг с его коллегами ожидали увидеть гладкое распределение по *инвариантным массам* электронно-позитронной пары, $M_{e^+e^-}^2 = (p_+ + p_-)^2$. Однако, к огромному своему удивлению, они обнару-

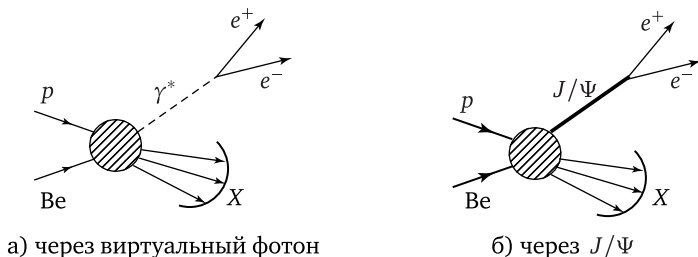


Рис. 11.3. Два механизма рождения электронно-позитронных пар

жили резкий пик в этом распределении при $M_{e^+e^-} \approx 3,1$ ГэВ. (См. гистограмму на рис. 11.4. Мы нарисовали её «по мотивам» графика из их оригинальной статьи, опустив несущественные для читателя экспериментальные детали.)

Это означало, что при таком значении $M_{e^+e^-}$ рождение электронов и позитронов шло не через виртуальный фотон, но по *резонансному* механизму с рождением и последующим распадом реальной частицы, имеющей эту массу (см. рис. 11.3 б). Тинг назвал эту частицу « J ».

В то же самое время физики СЛАК — лаборатории, где электроны и позитроны ускорялись в одном и том же накопительном кольце, но в противоположных направлениях, потом сталкивались и продукты их столкновений затем анализировались, смогли повысить энергию пучков до внушительных значений $E_+ = E_- \sim 1,5$ ГэВ и выше¹. И они увидели резкий пик в полном сечении аннигиляции e^+e^- при точно той же энергии, что и Тинг! Группа Рихтера окрестила эту частицу ψ .

Пик, наблюдавшийся в СЛАК, был ещё резче и уже, чем в БНЛ. Конечная ширина пика Γ на рис. 11.4 имеет на самом деле экспериментальное происхождение — импульсы и энергии e^+ и e^- и, следовательно, инвариантная масса пары измеряются с конечной точностью. Точность, с которой можно зафиксировать энергии сталкивающихся пучков, намного выше. Не в самой первой публикации, но вскоре после неё в СЛАКе была измерена *истинная* ширина ре-

¹Разумеется, «внушительных» только в исторической перспективе. Вскоре после этого были построены значительно большие машины. К рубежу тысячелетий энергии электронов и позитронов в ЛЭП — ускорителе на встречных e^+e^- -пучках в ЦЕРНе — достигли величины $E_+ = E_- = 104,5$ ГэВ. Между прочим, вскоре после этого, когда программа экспериментальных исследований при этой энергии была завершена, ускоритель ЛЭП был закрыт и демонтирован, чтобы освободить в туннеле место для Большого адронного коллайдера.

Число событий в интервале 25 МэВ

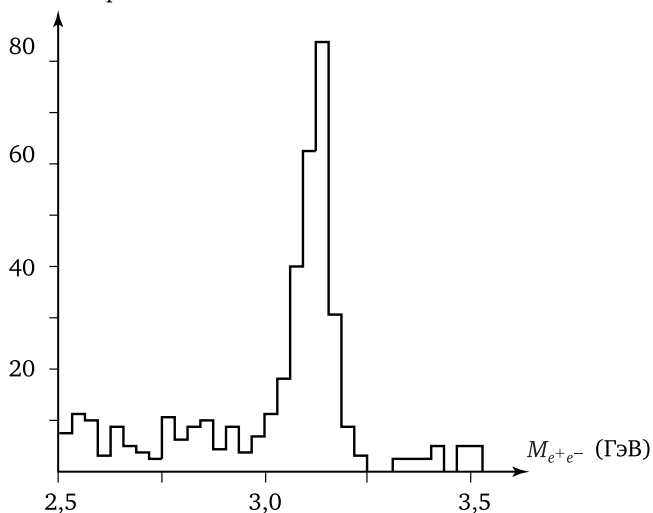


Рис. 11.4. Распределение по инвариантным массам e^+e^- -пар в эксперименте Тинга

зонанса¹, не связанная с экспериментальными неопределённостями, но возникающая ввиду конечного времени жизни J/ψ и принципа неопределённости Гейзенберга, $\Delta E \Delta t \sim \hbar \Rightarrow \Gamma \sim \hbar/\tau$. Ширина оказалась очень малой: $\Gamma_{J/\psi} \approx 90$ кэВ, что отвечает времени жизни $\tau_{J/\psi} \approx 7 \cdot 10^{-21}$ с.

Об открытиях в БНЛ и СЛАК было объявлено в один и тот же день, а соответствующие статьи поступили в редакцию Physical Review Letters с интервалом в один день. Вот почему эта частица получила двойное имя J/ψ — единственный случай в истории экспериментальных исследований элементарных частиц. В 1976 г. Рихтеру и Тингу была присуждена за их замечательное открытие Нобелевская премия.

Но что такое J/ψ ? 11 ноября 1974 г. это ещё не было ясно. На самой первой лекции Окуня [а Лев Борисович отошёл от обычной программы своего курса и на двух (или, может быть, даже на трёх) своих лекциях в том памятном ноябре говорил исключительно о J/ψ , рассказывая нам, о чём спорили физики, обсуждая его природу, и о

¹ Резонансы — это общее имя для частиц, время жизни которых настолько мало, что его нельзя измерить непосредственно, а можно только оценить через конечную ширину распределения по инвариантной массе продуктов их распада.

том, на чём они вскоре сошлись] он говорил нам, что это, возможно, промежуточный нейтральный бозон, медиатор слабых взаимодействий. Стандартная модель слабых взаимодействий предсказывала значительно бóльшую массу Z -бозона [см. формулу (5.29)], но в то время не было ещё уверенности, что Стандартная модель правильно описывает реальность (и сам термин «Стандартная модель» не был ещё в ходу) и обсуждались неминимальные варианты теории с несколькими Z -бозонами. В этих вариантах возможно было иметь тяжёлый Z -бозон и некоторое количество дополнительных лёгких нейтральных бозонов.

Однако довольно скоро стало ясно, что J/ψ не есть промежуточный бозон. Это адрон, но адрон специального типа. В отличие от других адронов, известных к тому времени, он не был сделан из лёгких u -, d - и s -кварков, а представлял собой связанное состояние из нового, сравнительно тяжёлого очарованного кварка c и очарованного антикварка $\bar{c}$. J/ψ был первой экспериментально обнаруженной частицей из семейства тяжёлых кваркониумов, о которых мы говорили в предыдущем параграфе.

Частица J/ψ несёт единичный спин — так же как фотон. По аналогии с *ортопозитронием*, связанным состоянием электрона и позитрона с параллельными спинами и единичным полным угловым моментом, J/ψ можно назвать *орточармонием*.

Можно теперь понять, почему это состояние такое узкое. J/ψ может распасться, только если исчезнет (аннигилирует) составляющая его пара $c\bar{c}$. А тяжёлым кваркам аннигилировать не так просто. Точно так же, как ортопозитроний распадается на три фотона (распад на два фотона запрещён квантовой бухгалтерией — два фотона не могут находиться в состоянии с единичным общим угловым моментом), главный канал распада J/ψ есть $J/\psi \rightarrow ggg$. После распада энергичные глюоны (каждый из них несёт энергию ~ 1 ГэВ) переходят в лёгкие адроны, наблюдаемые экспериментаторами. Но это происходит *потом*, и если нас интересуют не детали (какие именно родились мезоны или барионы), а только полная вероятность распада, то можно рассмотреть только «глубинный» процесс $c\bar{c} \rightarrow ggg$, умножить его амплитуду на амплитуду вероятности того, что кварки c и $\bar{c}$ встретятся (т. е. волновую функцию связанной системы ($c\bar{c}$) в нуле), и вычислить вероятность распада ω (или полную ширину Γ), интегрируя дифференциальную вероятность (10.1). Некоторые графики, дающие вклад в амплитуду, представлены на рис. 11.5.

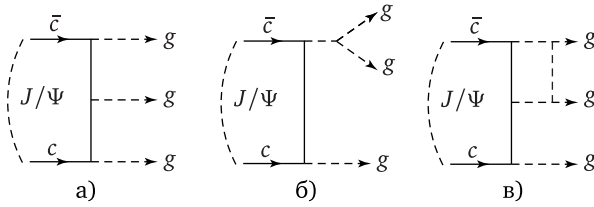


Рис. 11.5. Диаграммы Фейнмана для распада $J/\psi \rightarrow 3g$: а), б) древесные графики; в) однопетлевой график

Это в точности та же философия, которой мы руководствовались в главе 5 при обсуждении полного сечения аннигиляции пары e^+e^- в адроны. Глубинный процесс в том случае был $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$, с рождением энергичной кварк-антикварковой пары. Глубинный процесс для распада J/ψ в адроны есть $J/\psi \xrightarrow{\Psi(0)} c\bar{c} \rightarrow ggg$, с рождением трёх энергичных глюонов. Можно выразить полную ширину J/ψ как

$$\Gamma_{J/\psi} = \frac{160(\pi^2 - 9)\alpha_s^3 |\Psi(0)|^2}{81m_c^2} + O(\alpha_s^4). \quad (11.27)$$

Волновую функцию в «месте встречи», которая входит в формулу (11.27), можно определить, решая численно уравнение Шрёдингера для потенциала воронки (см. рис. 11.1). Однопетлевые поправки к ширине $\propto \alpha_s^4$ можно тоже вычислить, но результат этого вычисления находится среди многих других интересных вещей, которые мы решили от читателя скрыть. Прежде всего, из гуманитарных и медицинских соображений — мы не хотим, чтобы его мозг лопнул от переизбытка информации. А во-вторых — потому что коэффициент при α_s^4 в формуле (11.27) зависит от того, *при какой энергии* μ определяется входящая туда сильная константа связи. Естественно взять μ порядка массы J/ψ . При такой энергии константа связи (11.22) уже сравнительно мала, $\alpha_s(3 \text{ ГэВ}) \approx 0,25$, однопетлевые поправки не очень велики и ширина (11.27) находится в хорошем согласии с экспериментом.

Формула (11.27) очень похожа на формулу, дающую вероятность распада ортопозитрония. Чтобы получить последнюю, надо в формулу (11.27) подставить α вместо α_s , m_e вместо m_c , изменить подобающим образом общий численный коэффициент (позитрониевое вычисление проще; в частности, нет графика, подобного графику, изображённому на рис. 11.5 б) и подставить известное аналитически

значение для волновой функции позитрония:

$$\Psi_{e^+e^-}(0) = \sqrt{\frac{m_e^3 \alpha^3}{8\pi}}. \quad (11.28)$$

Ортопозитроний (и ортокварконий) — это только одно из множества связанных состояний, которые электрон и позитрон (соответственно кварк и антикварк) могут образовать. Существует, например, *парапозитроний* — основное состояние спектра позитрония. У него единичное главное квантовое число (он лежит на самой низкой оболочке), нулевой орбитальный момент и также нулевой полный момент, так что спины электрона и позитрона антипараллельны. Это состояние распадается не на три, а на два фотона. Соответственно, вероятность его распада оценивается как $\Gamma_{\text{пара}} \propto \alpha^2$, что намного больше вероятности распада ортопозитрония $\Gamma_{\text{орто}} \propto \alpha^3$. И жизнь у парапозитрония поэтому намного короче.

Точно таким же образом кварки s и $\bar{s}$ могут образовать связанное состояние *парачармония* с антипараллельными спинами составляющих кварков, нулевым орбитальным и полным моментом. Это состояние (оно называется η_c) наблюдалось в СЛАК в 1975 г. Его масса составляет ≈ 2980 МэВ, что немного меньше массы J/ψ . Различие в массах вызвано той же причиной, по которой немного различны энергии связи орто- и парапозитрония и по которой различаются энергии триплетного ортосостояния $|1^3S_1\rangle$ и синглетного парасостояния $|1^1S_0\rangle$ в атоме водорода¹. Эта небольшая разница в энергиях называется *сверхтонким расщеплением*. В позитронии и в атоме водорода оно связано с взаимодействием магнитных моментов составляющих их частиц. В чармонии оно связано с взаимодействием хромагнитных моментов составляющих кварков.

¹Мы используем стандартные обозначения атомных уровней (термов): в приведённых символах единица слева есть главное квантовое число n , S означает s -подоболочку с нулевым орбитальным моментом (используются также буквы P для $L = 1$, D для $L = 2$ и т.д.), правый нижний индекс есть полный угловой момент J и левый верхний индекс — это мультиплетность $2S + 1$, где S — полный спин (не надо путать это S с обозначением S для S -уровней).

Для избежания путаницы мы хотим предупредить читателя: по историческим, не вполне для меня ясным причинам в большинстве научных статей и обзоров, посвящённых кварконии, и также в брошюре «Table of Particle Properties», которые некоторые из вас могли держать в руках, используется немного другое соглашение для символа терма, где основное стоящее слева число означает не главное квантовое число n , но *радиальное* квантовое число $n_r = n - 1$. Например, уровень, обозначаемый там как $1P$, есть $2P$ в наших обозначениях.

Вероятность распада парачармония на лептонную пару сильно подавлена. В отличие от орточармония, эта мода распада требует посредничества не одного, а как минимум двух фотонов, что даёт дополнительный фактор α в амплитуде и фактор α^2 в вероятности. Малó также сечение прямого рождения η_c в электрон-позитронных столкновениях. Но это состояние было зарегистрировано в распаде¹ $J/\psi \rightarrow \eta_c \gamma$. Парачармоний может распасться на два глюона; его ширина, следовательно, пропорциональна α_s^2 и намного больше ширины J/ψ : $\Gamma_{\eta_c} \approx 30$ МэВ.

Орбитальный момент кваркония не обязательно нуль. Он может быть равным единице, что отвечает состояниям P . Спины кварков в этих состояниях могут быть параллельны или антипараллельны. Наконец, главное квантовое число n не обязательно равно 1. Существуют возбуждённые состояния с $n = 2$ и $n = 3$. Замечательно, что весь этот зоопарк (ну, может быть, не весь зоопарк, но значительная его часть) наблюдался экспериментально! Некоторые звери из этого зоопарка выставлены в клетках нижеследующей таблицы.

Таблица 4. Спектр чармония

частица	символ терма	масса (МэВ)	ширина (МэВ)
η_c	1^1S_0	2980	32
J/ψ	1^3S_1	3097	0,09
h_c	2^1P_1	3525	0,7
χ_{c0}	2^3P_0	3415	10
χ_{c1}	2^3P_1	3511	0,85
χ_{c2}	2^3P_2	3556	2
η'_c	2^1S_0	3640	11
ψ'	2^3S_1	3686	0,3
$\psi(3770)$	3^3D_1	3773	27
χ'_{c0}	3^3P_0	3920	20
χ'_{c2}	3^3P_2	3927	24
ψ''	3^3S_1	4040	80

¹ Подобный переход между уровнями $|1^3S_1\rangle$ и $|1^1S_0\rangle$ в атоме водорода даёт знаменитую спектральную линию с длиной волны 21 см, по которой наблюдается межзвёздный газ.

Среди состояний с главным квантовым числом $n = 2$ мы видим S -уровни η'_c и ψ' , представляющие радиальные возбуждения η_c и J/ψ , и также P -уровни с $L = 1$. Имеются четыре P -уровня: состояние h_c , где спины составляющих кварков антипараллельны, и состояния χ_c , где спины параллельны, так что $S = 1$. Единичный спин и единичный угловой момент могут складываться по-разному, приводя к состояниям с $J = 0, 1, 2$.

В таблице присутствуют также состояния с $n = 3$. Мы видим радиальные возбуждения P -уровней χ'_{c0} и χ'_{c2} ¹. Мы видим также D -уровень с орбитальным моментом $L = 2$. В последней строчке таблицы фигурирует двойное радиальное возбуждение J/ψ с массой 4040 МэВ. Его ширина намного больше ширины J/ψ и ψ' . Причина в том, что его масса превышает кинематический порог, выше которого струна, соединяющая кварки c и $\bar{c}$, может разорваться на две половинки, как на рис. 11.2, с образованием двух D -мезонов², сделанных один из очарованного кварка и лёгкого антикварка и другой — из очарованного антикварка и лёгкого кварка. Но масса состояния $\psi(4040)$ превышает порог лишь ненамного [массы мезонов $D^0 = (c\bar{u})$ и $D^+ = (c\bar{d})$ составляют $m_D \approx 1870$ МэВ], его ширина поэтому ещё невелика, и резонансная структура в полном сечении аннигиляции e^+e^- при энергии в системе центра $E_{\text{с.м.}} \sim 4040$ МэВ довольно хорошо выражена.

Ширина состояний чармония с ещё большей массой быстро растёт, и очень скоро теряет смысл говорить об отдельных резонансах. Они перекрываются, сливаются, и спектр становится непрерывным.

Сегодня не так просто полностью представить, какой ошеломляющий эффект оказали эти открытия на физическое сообщество. Эта книга адресована в основном интересующимся наукой молодым людям, которые слышали о кварках с раннего детства. Поэтому они знают, что кварки существуют. Тот факт, что они не вылетают наружу, может показаться для них удивительным (как это кажется удивительным мне), но наличие богатого спектра связанных состояний кварков должно выглядеть для них весьма естественным. Но в начале 1970-х годов далеко не все были уверены, что кварки действительно существуют. Они имели статус гипотетических объектов и наряду с аргументами в пользу их существования были аргументы против.

¹ Состояние χ'_{c1} пока почему-то не наблюдалось. С другой стороны, наблюдался загадочный резонанс $X(3872)$. У него нет простой спектроскопической интерпретации, и я не поместил его в таблицу. Быть может, он сделан не из двух, а из четырёх кварков.

² Их не надо смешивать с D -уровнями чармония.

Я хорошо помню, как весной 1974 г. я, студент четвёртого курса Физтеха, посетил экспериментальный семинар в ИТЭФ¹. Докладчик сказал, что его данные находятся с хорошим согласием с предсказаниями кварковой модели. Услышав это, один из уважаемых теоретиков, сидящих на семинаре, перебил его со словами: «Жаль, что докладчик компрометирует свою прекрасную экспериментальную работу ссылками на сомнительные теоретические модели с шаткими основаниями!...»

Но это было до ноябрьской революции. К лету 1975 г., когда, с одной стороны, изрядная часть состояний из таблицы 4 была уже экспериментально зарегистрирована и, с другой стороны, весть об открытии асимптотической свободы в КХД достигла широких масс физической общественности, сомнений больше быть не могло — кварки существуют, и их взаимодействие описывается КХД!

До сих пор мы в этом параграфе обсуждали только чармоний. Но известен также *боттомоний*, сделанный из кварков b и $\bar{b}$. Первое состояние боттомония, Υ -мезон с массой 9,46 ГэВ, было открыто в лаборатории Ферми недалеко от Чикаго экспериментальной группой, возглавляемой Леоном Ледерманом, в 1977 г. В настоящее время боттомониевый зоопарк так же густо населён, как чармониевый. Наблюдались и изучались также мезоны и барионы с открытой прелестью (они включают в своём составе только один b - или $\bar{b}$ -кварк).

Должен существовать и *топоний*, но достигнутая на сегодня энергия электрон-позитронных пучков не достаточно высока, чтобы родить такие состояния.

11.4. Лёгкие мезоны и барионы

Кварковая модель была сформулирована в начале 1960-х годов, задолго до выхода на сцену КХД и до открытия чармония и боттомония. Физика обыкновенных лёгких адронов также указывает на их составную природу и на существование более мелких элементарных объектов, из которых они сделаны. Как было отмечено в конце предыдущего параграфа, в случае лёгких адронов эти указания менее определённые, чем для тяжёлого кваркония, и они оставляют место для сомнений, но всё же и до ноября 1974 г. существовали серьёзные аргументы в пользу существования кварков,

¹ Институт теоретической и экспериментальной физики, который был нашим базовым институтом, где мы учились на старших курсах и потом писали диплом.

и большинство теоретиков (хотя и не все) верили в кварки уже в то время¹.

Много свойств лёгких адронов получают хорошее объяснение и ясную интерпретацию в модели конституентных (составляющих) кварков, где адроны сделаны из лёгких кварков примерно так же, как атом сделан из ядра и электронов, как ядро сделано из протонов и нейтронов, а тяжёлый кварконий — из тяжёлых кварков.

Взгляните ещё раз на таблицу 2 в начале книги. Указанные там массы u - и d -кварков малы в сравнении с характерным масштабом КХД: $m_u \approx 3$ МэВ и $m_d \approx 6$ МэВ. Но это так называемые *токовые* массы — параметры лагранжиана КХД (11.16). Эти массы проявляются при высоких энергиях, когда константа связи мала и физика сильных взаимодействий может быть описана пертурбативно. Феноменологическая модель конституентных кварков описывает низкоэнергетическую адронную физику, где связь сильная и точные аналитические вычисления невозможны. Представим, что каждый токовый кварк одет в глюонное облако² с массой $m_{\text{облако}} \approx 300$ МэВ. Масса конституентного кварка *приблизительно* даётся суммой токовой кварковой массы и массы облака. Мы видим, что конституентные кварки u и d имеют близкую массу: конституентный d -кварк тяжелее, чем u -кварк, всего на несколько МэВ, и основная доля массы у этих объектов приходится на глюонную, слепую по отношению к ароматам компоненту.

Это приближённое вырождение проявляется в приближённой *изотопической симметрии* — глобальной $SU(2)$ -симметрии относительно унитарных преобразований, перемешивающих u - и d -кварки. Приближённое вырождение внутри дуплета конституентных кварков проявляется на опыте как приближённое вырождение определённых адронных состояний. Так, нейтрон, состоящий из двух d -кварков и одного u -кварка, тяжелее протона, состоящего из одного d -кварка и двух u -кварков, всего на $\approx 1,3$ МэВ. (Это включает эффекты, связанные с различием кварковых масс, и эффекты, связанные с разным электромагнитным взаимодействием в этих двух

¹ Я где-то читал о съезде химиков в первой половине XIX века, где участники бурно спорили о том, существуют атомы или нет. Они не могли прийти к согласию и решили поставить вопрос на голосование. С небольшим преимуществом победили атомисты.

² Конечно, когда формулировалась кварковая модель, о глюонах ещё ничего не было известно, но я здесь не следую историческому пути.

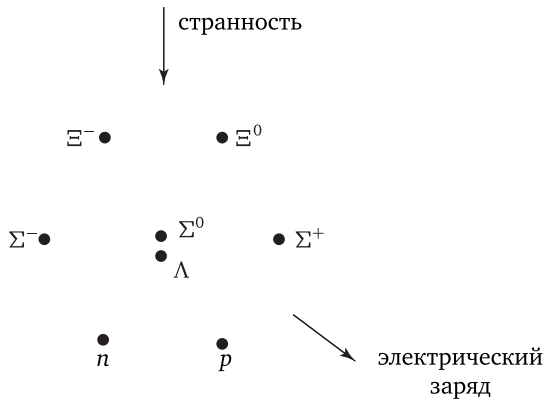


Рис. 11.6. Октет барионов

разных составных системах.) Протон и нейтрон образуют изотопический дублет. Скоро мы познакомимся с другими изотопическими мультиплетами.

Масса странного кварка, $m_s \approx 150$ МэВ, тоже не очень велика. Так что часто имеет смысл обсуждать симметрию, перемешивающую три типа кварков, — приближённую «ароматную» SU(3)-симметрию¹.

Классический пример адронного мультиплета по ароматной группе SU(3) — это барионный *октет* [присоединённое представление группы SU(3)]. Он включает изодублет нуклонов, изотриплет странных Σ -гиперонов $|\Sigma^+\rangle = |uus\rangle$, $|\Sigma^0\rangle = |uds\rangle$ и $|\Sigma^-\rangle = |dds\rangle$, изосинглет $\Lambda = |uds\rangle$ и изодублет Ξ -гиперонов, содержащих в своём составе два странных кварка: $|\Xi^0\rangle = |uss\rangle$ и $|\Xi^-\rangle = |dss\rangle$. Этот октет изображён на рис. 11.6.

Читателя может удивить тот факт, что странность растёт на этом рисунке не снизу вверх (это было бы более естественно — число странных кварков в составе растёт снизу вверх), а сверху вниз. История похожа здесь на историю с отрицательным знаком заряда электрона. Когда физики впервые обнаружили в начале 1950-х гг., что некоторые частицы, рождённые в космических лучах, имеют чрезвычайно большие по адронным меркам времена жизни, они этому очень удивились и подумали, что это *странно*. В то время они

¹ Эта глобальная симметрия не имеет ничего общего с точной цветной калибровочной симметрией. Не путайте их!

ничего не знали о кварках и просто установили феноменологический закон сохранения «странности» S в сильных взаимодействиях. И они приписали значение $S = +1$ мезонам K^0 и K^+ и значение $S = -1$ — мезонам $\bar{K}^0$ и K^- и барионам Σ и Λ . Позднее учёные поняли, что определённая, таким образом, странность — это просто число странных *антикварков* минус число странных кварков, но они не изменили установившегося соглашения.

Барионы на рис. 11.6 имеют спин $1/2$. Это означает, что не все спины конститuentных кварков параллельны. Если два спина смотрят вверх, то третий должен быть обращён вниз.

Все эти барионы относительно стабильны. Протон стабилен абсолютно. Для остальных частиц это не так, но они распадаются слабо и их время жизни велико. Распад нейтрона связан с превращением d -кварка в u -кварк: $d \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e$. Глубинный процесс, ответственный за распад Σ^- и Λ -гиперонов, есть аналогичный распад странного кварка: $s \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e$. Частица Ξ , которую иногда называют *каскадным гипероном*, распадается в два этапа. На первой стадии распадается один из её странных кварков, и это даёт Σ или Λ . Барион Σ или Λ живёт некоторое время ($\approx 10^{-10}$ с), оставляя в пузырьковой или искровой камере видимый след, и потом распадается на протон или нейтрон с испусканием π -мезона или пары лептонов.

Массы октетных барионов приведены в таблице 5.

Таблица 5. Массы барионов в легчайшем октете

частица	p	n	Λ	Σ^+	Σ^0	Σ^-	Ξ^0	Ξ^-
масса (МэВ)	938	940	1116	1189	1193	1197	1315	1322

При первом взгляде на эту таблицу видно, что массы частиц, принадлежащих одному и тому же изомультиплету, довольно близки. Второе наблюдение состоит в том, что массы барионов Σ и Λ с одним странным кварком в составе больше нуклонных масс, но меньше масс Ξ -гиперонов, включающих два странных кварка. Третье наблюдение заключается в том, что Λ -гиперон, имеющий тот же кварковый состав $|uds\rangle$, что и Σ^0 , легче, чем Σ^0 и его изопартнеры. Расщепление между Σ и Λ вызвано тем фактом, что хотя у них и одинаковый кварковый состав, но *волновая функция* бариона Λ не такая же, как у Σ^0 , и межкварковое взаимодействие в этих двух системах тоже разное.

Назовём m_N , m_Λ , m_Σ и m_Ξ средние значения масс в соответствующих изотопических мультиплетах. Имея в виду, что $m_\Lambda \neq m_\Sigma$, определим среднюю массу этих частиц как

$$m_{\Sigma\Lambda} = \frac{3m_\Lambda + m_\Sigma}{4} \approx 1135 \text{ МэВ}. \quad (11.29)$$

Теперь мы можем сделать ещё одно важное наблюдение: с высокой точностью выполняется соотношение

$$m_{\Sigma\Lambda} - m_N = m_\Xi - m_{\Sigma\Lambda}. \quad (11.30)$$

Ему можно дать простое эвристическое объяснение: барионы Σ и Λ включают в свой состав один странный кварк, который тяжелее, чем u - и d -кварки, и, следовательно, их масса превышает нуклонную массу. Барион Ξ содержит два странных кварка, и его масса поэтому ещё больше.

Это не объясняет, однако, почему разность масс (11.30) равна приблизительно 190 МэВ, что больше, чем масса странного кварка $m_s \approx 150$ МэВ. И что остаётся абсолютно непонятным — это почему средняя масса барионов Σ и Λ записана в виде (11.29), а не, скажем, в выглядящем более естественным виде $\tilde{m}_{\Sigma\Lambda} = (m_\Lambda + 3m_\Sigma)/4$.

Что же, метод пальцевых рассуждений имеет свои границы. Соотношение Гелл-Манна—Окубо (ГМО) (11.30) может быть выведено с использованием методов теории групп, и из этого вывода (который мы предпочитаем здесь не давать) следует именно равенство (11.29). Но можно на пальцах объяснить, почему разность масс (11.30) немного больше, чем ожидалось. Разность масс $m_{\Sigma\Lambda} - m_N$ больше, чем токовая масса странного кварка, поскольку конститuentные кварковые массы могут иметь разную величину в разном «окружении» — по той же причине, по какой эффективная масса электрона в кристалле не совпадает с его массой в вакууме.

Ситуация немного проще для другого барионного мультиплета группы $SU(3)$ — для *декуплета* [мы объяснили, что такое декуплетное представление группы $SU(3)$ на с. 132]. Декуплетные состояния представлены на рис. 11.7.

В этом случае спины всех трёх составляющих кварков направлены в одну сторону и полный спин бариона равен $3/2$. Межкварковые взаимодействия у декуплетных барионов отличаются от взаимодействий в октетном случае, и декуплетные массы [они даны в таблице 6, где мы пренебрегли маленьким отличием масс внутри изотопического квартета (Δ^- , Δ^0 , Δ^+ , Δ^{++}), внутри изотриплета (Σ^{*-} , Σ^{*0} , Σ^{*+})

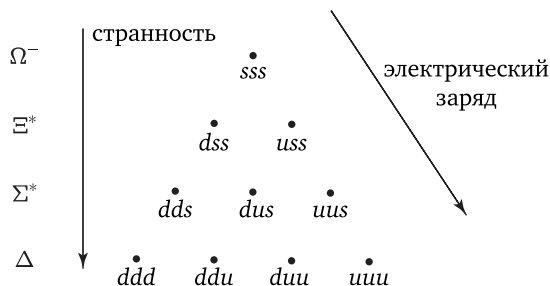


Рис. 11.7. Декуплет барионов

и изодублета (Ξ^{*-} , Ξ^{*0}) больше октетных — это то же сверхтонкое расщепление, обусловленное взаимодействием хромоманнитных моментов кварков, которое делает состояние орточармония J/ψ тяжелее, чем η_c . Как следствие, почти все декуплетные состояния имеют малое время жизни $\approx 10^{-23}$ с — они распадаются в октетные состояния по сильному механизму, где кварки не меняют свою природу и возможно только рождение дополнительных кварк-антикварковых пар. Например, частица Δ^{++} , сделанная из трёх u -кварков с параллельными спинами, может распасться с рождением дополнительной пары $d\bar{d}$ на протон ($|uud\rangle$) и π^+ -мезон ($|u\bar{d}\rangle$). Частицы Δ наблюдаются как ярко выраженные резонансы в полном сечении рассеяния πN — как резонанс на рис. 11.4, но намного шире¹.

Единственное исключение — это Ω^- . Будучи самым лёгким состоянием, включающим три странных кварка, Ω^- -гиперон может распадаться только по слабому механизму с временем жизни порядка 10^{-10} с, рождая Ξ -гипероны. Затем Ξ распадается в Σ , Λ , а они — в нуклоны.

Таблица 6. Декуплетные массы

частица	Δ	Σ^*	Ξ^*	Ω^-
масса (МэВ)	1232	1385	1533	1672

¹Так как октет барионов, в отличие от декуплета, включает только квазистабильные долгоживущие частицы и имеется также октет квазистабильных мезонов, октетное представление группы $SU(3)$ в некотором смысле «важнее» декуплетного. Это позволило Гелл-Манну окрестить теорию классификации адронов, основанную на ароматной группе $SU(3)$, *восьмеричным путём* (с аллюзией на Благородный восьмеричный путь буддистов).

Массы четырёх изомультиплетов на рис. 11.7 практически эквидистантны, и разности масс между соседними линиями на рис. 11.7 близки к токовой массе странного кварка. Существование Ω^- и его масса были вначале *предсказаны* из этих соображений Мюрреем Гелл-Манном и Кадзухико Нишиджимой в 1961 г. В 1964 г. Ω^- -гиперон с предсказанными свойствами был обнаружен экспериментально, и благородство восьмеричного (и также десятиричного) пути блестяще подтвердилось.

Перейдём теперь к мезонам. Самые лёгкие мезоны — это пионы: $\pi^\pm$ с массой 140 МэВ и π^0 с массой 135 МэВ. Они образуют изотриплет. Их кварковый состав есть $|\pi^+\rangle = |u\bar{d}\rangle$, $|\pi^-\rangle = |d\bar{u}\rangle$, $|\pi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle)$. Последняя формула означает, что волновая функция π^0 представляет собой суперпозицию состояний $|u\bar{u}\rangle$ и $|d\bar{d}\rangle$, так что вероятности найти в π^0 пару $u\bar{u}$ или пару $d\bar{d}$ совпадают и равны 1/2.

Спины кварков у пионов глядят в разные стороны: пионы представляют «парасостояния», как η_c , и полный спин пиона равен нулю. Если не обращать внимания на их внутреннюю структуру (что оправдано, когда их энергия много меньше их массы), то пионы можно описывать скалярными полями (или, скорее, псевдоскалярными полями — волновая функция пиона меняет знак при зеркальном отражении).

Изотриплет пионов принадлежит к псевдоскалярному мезонному октету ароматной группы SU(3), включающему помимо пионов так-

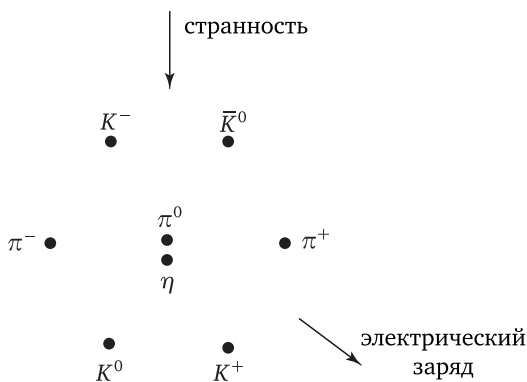


Рис. 11.8. Псевдоскалярный мезонный октет

же два изодублета K -мезонов, ($|K^0\rangle = |d\bar{s}\rangle$, $|K^+\rangle = |u\bar{s}\rangle$) и ($|K^-\rangle = |s\bar{u}\rangle$, $|\bar{K}^0\rangle = |s\bar{d}\rangle$), а также изосинглет η с волновой функцией¹

$$|\eta\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle - 2|s\bar{s}\rangle).$$

Мезонный октет представлен на рис. 11.8.

По аналогии с барионным октетом мы можем установить связь между массами псевдоскалярных мезонов:

$$m_K = \frac{3m_\eta + m_\pi}{4}. \quad (11.31)$$

Экспериментальные значения масс представлены в следующей таблице.

Таблица 7. Массы псевдоскалярных мезонов

частица	$\pi^\pm$	π^0	$K^\pm$	$K^0, \bar{K}^0$	η
масса (МэВ)	140	135	494	498	548

Подставляя в формулу (11.31) средние значения мультиплетных масс $m_K = (m_{K^+} + m_{K^0})/2$ и $m_\pi = (2m_{\pi^+} + m_{\pi^0})/3$, мы получаем

$$496 \text{ МэВ} = 445 \text{ МэВ}. \quad (11.32)$$

Согласие есть, но не такое уж фантастическое. Что ж, это естественно — думали физики в 1960-е гг. Вывод соотношения Гелл-Манна—Окубо основан на предположении, что расщепление масс в мультиплете $SU(3)$ относительно невелико и неравенство кварковых масс можно рассматривать как возмущение. А в псевдоскалярном октете массы мезонов трудно назвать близкими — масса η -мезона превышает массу пиона почти в четыре раза.

Но затем физики обратили внимание на то, что формула ГМО работает для мезонов лучше, если в формуле (11.31) заменить массы их квадратами. Сделав это, мы получаем

$$0,246 \text{ ГэВ}^2 = 0,230 \text{ ГэВ}^2, \quad (11.33)$$

что действительно лучше, чем (11.32).

¹ В волновых функциях π^0 и η мы можем распознать $SU(3)$ -генераторы t^3 и t^8 [см. формулу (6.43)]. Это, конечно, не случайно, и я с трудом отказываюсь здесь от детальных разъяснений.

Когда я был студентом, наши профессора говорили: «Заметьте, мезонные бозонные поля удовлетворяют уравнению КФГ, куда входит m^2 . А барионы — фермионы и их поля — удовлетворяют уравнению Дирака, куда входит первая степень массы. Естественно поэтому, что соотношение ГМО лучше работает для m в случае барионов и для m^2 в случае мезонов». Эвристичность этого аргумента велика, она почти достигает уровня эвристичности аргумента про стучащий квадрат в формуле для площади круга, но ничего лучшего в то время не было.

Сегодня мы понимаем это намного яснее. В случае псевдоскалярных мезонов формула ГМО лучше работает для m^2 , потому что природа псевдоскалярных мезонов несколько отличается от природы других адронов. Хотя их и можно описывать моделью конститuentных кварков, как мы это до сих пор делали, но для псевдоскаляров эта модель работает не так хорошо.

На самом деле псевдоскалярные мезоны на рис. 11.8 являются *псевдогголдстоуновскими* частицами, связанными со *спонтанным нарушением приближённой киральной симметрии*.

Смысл всех этих новых красивых понятий будет объяснён в следующем параграфе.

11.5. Киральная симметрия и её нарушение

11.5.1. Киральная симметрия в КХД

Как говорилось выше, токовые массы u - и d -кварков малы по сравнению с характерным масштабом $\Lambda_{\text{КХД}}$. Интересно поставить вопрос: как выглядел бы наш мир, если бы эти кварки вообще не имели массы?

В этом случае та часть лагранжиана КХД, куда входят лёгкие кварковые поля, приобрела бы вид

$$\mathcal{L}_{\text{безмассовые } u,d} = i\bar{q}\gamma^\mu(\partial_\mu - ig\hat{A}_\mu)q, \quad (11.34)$$

где q — изодублет:

$$q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}.$$

Сразу видно, что, помимо калибровочной симметрии (11.5) и (11.10), лагранжиан (11.34) обладает глобальной изотопической унитарной симметрией $U_V(2)$, которая перемешивает два кварковых аромата: $q \rightarrow S_V q$. Индекс V означает, что это *векторная* симметрия. Соответствующие нётеровские токи — это векторы: изотопический синглет

$\bar{q}\gamma^\mu q$ и изотопический триплет $\bar{q}\gamma^\mu \sigma^A q$, где σ^A — матрицы Паули, действующие на кварковые ароматные индексы.

Но истинная полная симметрия лагранжиана (11.34) выше. Чтобы увидеть это, введём левые и правые кварковые поля¹,

$$q_{L,R} = \frac{1 \mp \gamma^5}{2} q \implies \bar{q}_{L,R} = \bar{q} \frac{1 \pm \gamma^5}{2}, \quad (11.35)$$

и заметим, что лагранжиан (11.34) можно представить как

$$\mathcal{L}_{\text{безмассовые } u,d} = i\bar{q}_L \gamma^\mu (\partial_\mu - ig\hat{A}_\mu) q_L + i\bar{q}_R \gamma^\mu (\partial_\mu - ig\hat{A}_\mu) q_R \quad (11.36)$$

[ср. формулы (9.44), (9.37)].

Лагранжиан (11.36) инвариантен относительно двух разных унитарных вращений:

$$q_L \rightarrow S_L q_L, \quad q_R \rightarrow S_R q_R. \quad (11.37)$$

Таким образом, полная симметрия есть $U_L(2) \times U_R(2)$.

Присутствие отдельных симметрий, левой и правой, для двух отдельных членов в лагранжиане специфично для безмассовых кварков. Фермионный массовый член смешивает левые и правые поля:

$$\mathcal{L}_m = m\bar{q}q = m(\bar{q}_L q_R + \bar{q}_R q_L) \quad (11.38)$$

[ср. формулу (9.39)]. Так как массы различных кварков различны, истинный лагранжиан КХД не обладает точной изотопической симметрией. Но представим себе мир, в котором u - и d -кварки были бы массивны, но при этом их массы в точности бы совпадали. Лагранжиан такой теории был бы инвариантен относительно преобразований (11.37), только если $S_L = S_R$. Это даёт векторные преобразования. С другой стороны, преобразования (11.37), для которых $S_L = S_R^\dagger$ — это *аксиальные* преобразования. Соответствующие им *нётеровские токи* — это *изоскалярный* и *изотриплетный аксиальные* векторы $\bar{q}\gamma^\mu \gamma^5 q$ и $\bar{q}\gamma^\mu \gamma^5 \sigma^A q$.

Надо, однако, сказать (я не смогу здесь объяснить, почему это так), что на самом деле *изосинглетный* аксиальный ток не сохраняется, даже если кварки безмассовы. Это *аномальное* несохранение обусловлено квантовыми эффектами — мы не можем сохранить синглетную аксиальную симметрию классического лагранжиана в квантовой теории и должны наложить на матрицы унитарных преобразований,

¹ Хороший повод вспомнить определение дираковского сопряжения $\bar{q} = q^\dagger \gamma^0$ и свойство $\gamma^\mu \gamma^5 + \gamma^5 \gamma^\mu = 0$.

фигурирующие в формуле (11.37), условие

$$\det(S_L S_R^\dagger) = 1. \quad (11.39)$$

У нас остаётся глобальная векторная симметрия $U_V(2)$ и глобальная аксиальная симметрия $SU_A(2)$.

Замечательный факт состоит в том, что эта последняя симметрия тоже на самом деле нарушена в безмассовой КХД, но это не явное, а *спонтанное* нарушение.

11.5.2. Спонтанное нарушение симметрии. Теорема Голдстоуна

Это очень важный пункт. Возможно, мы не включили бы его в эту главу и в книгу, если бы наша задача ограничивалась здесь рассказом о теории сильных взаимодействий и об адронной физике. Но хорошо понимать, что такое спонтанное нарушение глобальной и локальной симметрии — в чём состоит эффект Голдстоуна и эффект Хиггса — необходимо для понимания того, как формулируется теория электрослабых взаимодействий. Поэтому мы познакомим сейчас читателя с некоторыми интересными фактами, относящимися к физике пионов, и одновременно дадим знания, которые пригодятся в следующей главе.

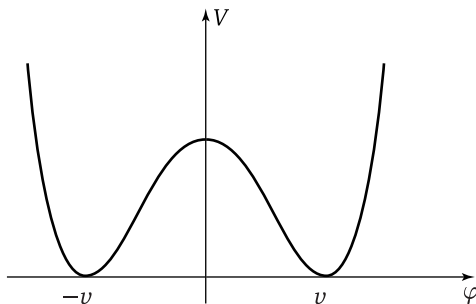


Рис. 11.9. Потенциал Лифшица

Рассмотрим для начала лагранжиан вещественного скалярного поля

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - V(\varphi) \quad (11.40)$$

с несколько необычным потенциалом (потенциалом «двойной ямы», или потенциалом Лифшица)¹:

$$V = \frac{\lambda}{24}(\varphi^2 - v^2)^2. \quad (11.41)$$

¹Мы следуем стандартной нормировке для λ . Можно объяснить, откуда берётся множитель $1/24$, но это не так важно.

Этот лагранжиан обладает дискретной Z_2 -симметрией:

$$\varphi \rightarrow -\varphi. \quad (11.42)$$

Необычность потенциала (11.41) в том, что в симметричной точке $\varphi = 0$ этот потенциал имеет не минимум, как это было для обсуждавшихся выше систем, а локальный максимум. А минимумов у него два — при $\varphi = v$ и при $\varphi = -v$. Следовательно, гамильтониан теории (11.40) имеет не одно, а два разных вырожденных основных состояния — два разных вакуума¹.

Обратите внимание на то, что ни один из этих двух вакуумов не инвариантен сам по себе относительно преобразования симметрии (11.42). Под действием этого преобразования вакуумы переходят друг в друга! Именно это явление (гамильтониан инвариантен относительно преобразований симметрии, но в спектре гамильтониана имеется не одно, а несколько вакуумных состояний, каждое из которых само по себе не инвариантно, но переходит в какое-то другое вакуумное состояние под действием симметричных преобразований) называется спонтанным нарушением симметрии. В рассмотренном примере спонтанно нарушена дискретная симметрия (11.42).

В каком именно вакууме система оказывается — дело случая. Как мы знаем, поначалу, сразу после Большого взрыва, Вселенная была очень горячей. Если бы она включала вещественные скалярные поля с взаимодействием (11.41), то пространство было бы наполнено в ту эпоху энергичными взаимодействующими скалярными частицами² — возбуждёнными состояниями полевого гамильтониана — и структура основных состояний этого гамильтониана не была бы существенна. Но по мере охлаждения Вселенной возбуждённые состоя-

¹ Это, безусловно, так в классической теории, но в квантовой механике с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{\lambda}{24}(x^2 - v^2)^2, \quad (11.43)$$

зависящим всего от одной вещественной переменной x , это вырождение было бы снято ввиду туннелирования. Даже в случае, когда барьер между двумя минимумами высок, квантовомеханическая амплитуда туннелирования экспоненциально подавлена, но отлична от нуля. Это привело бы к экспоненциально подавленному, но отличному от нуля расщеплению между двумя низколежащими уровнями.

Однако в теории поля, включающей бесконечное число степеней свободы, амплитуда туннелирования есть точный нуль, и два вакуума точно вырождены.

² В минимальной Стандартной модели нет фундаментальных *вещественных* скалярных полей, но предположим, что такие поля существуют.

ния постепенно бы исчезли, система (11.40) «упала» бы либо в левый, либо в правый вакуум и симметрия оказалась бы нарушенной.

Фактически мы уже обсуждали спонтанное нарушение дискретной симметрии в главе 5 [после уравнения (5.23)]. Обычные электромагнитные взаимодействия, ответственные за нашу химию и биологию, зеркально симметричны. Но много молекул – сахара, белки, ДНК – могут существовать в двух различных, левой и правой формах, которые переходят друг в друга при отражении. В живых организмах присутствует только один тип молекул (сахара – правые, аминокислоты – левые и т. д.), и было делом чистого случая, какие молекулы – левые или правые – появились первыми на заре истории Земли. Легко можно представить биосферу с левыми сахарами.

Можно также легко представить ситуацию, при которой в некоторой области пространства система (11.41) упала бы после охлаждения в левую яму, а в некоторой другой области пространства – в правую. В этом случае эти две области оказались бы разделёнными *доменной стенкой* (см. рис. 11.10). Эта доменная стенка имела бы конечную ширину (зависящую от λ и v) и конечную поверхностную энергию.

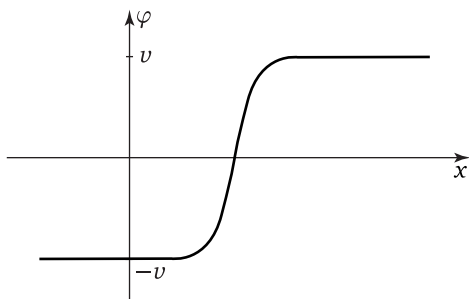


Рис. 11.10. Доменная стенка

В нашей Вселенной такие доменные стенки, по всей видимости, отсутствуют. Но если бы они существовали, это были бы вполне реальные физические объекты, их можно было бы увидеть (рассеять свет), по ним можно было бы стукнуть и т. д.

Перейдём теперь к системам со спонтанным нарушением непрерывной симметрии. Рассмотрим лагранжиан комплексного скалярного поля:

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \varphi)^* (\partial_\mu \varphi) - \frac{\lambda}{4} (\varphi^* \varphi - v^2)^2 \quad (11.44)$$

(ср. уравнение (7.45) и рис. 7.26). Этот лагранжиан инвариантен под действием непрерывных преобразований $U(1)$:

$$\varphi \rightarrow \varphi e^{i\chi}. \quad (11.45)$$

Трёхмерный график для потенциала похож на донышко бутылки от шампанского (см. рис. 11.11)¹. Потенциал имеет минимум при $|\varphi| = v$, но фаза комплексного вакуумного поля φ абсолютно произвольна. Таким образом, имеется бесконечное число классических вакуумов. И каждый из этих вакуумов не инвариантен относительно фазовых преобразований (11.45) — симметрия спонтанно нарушена.

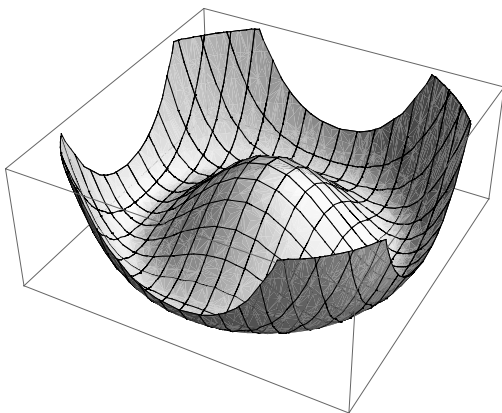


Рис. 11.11. Донышко бутылки

Представим теперь, что фаза вакуумного поля не одна и та же во всех пространственно-временных точках, но медленно зависит от x :

$$\varphi_{\text{вак}}(x) = v e^{i\alpha(x)/\sqrt{2}}. \quad (11.46)$$

Подставим это выражение в формулу (11.44). Мы получим эффективный лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{v^2}{2} (\partial_\mu \alpha)^2. \quad (11.47)$$

Этот лагранжиан описывает свободное безмассовое вещественное скалярное поле $v\alpha(x)$. Другими словами, низкоэнергетический

¹ В англоязычной литературе эта картинка обычно сравнивается с мексиканским сомбреро (*Mexican hat potential*), но лично я предпочитаю шампанское хорошей новосветовской марки.

спектр теории (11.44) включает безмассовые скалярные частицы — голдстоуновские бозоны¹.

Это наблюдение можно обобщить. Верна следующая мощная теорема (теорема Голдстоуна).

Пусть лагранжиан обладает непрерывной глобальной симметрией G , нарушенной спонтанно до $H \subset G$. Тогда спектр теории включает безмассовые частицы, и число их различных типов равно разности размерностей групп G и H . Сила взаимодействия этих частиц зависит от энергии. В пределе при $E \rightarrow 0$ голдстоуновские бозоны взаимодействовать перестают.

Эта теорема имеет вполне прозрачный смысл. Множество всех вакуумов совпадает (с точностью до возможных дискретных факторов) с так называемым факторпространством² G/H . Размерность этого факторпространства есть $\dim(G/H) = \dim(G) - \dim(H)$. Система может свободно «гулять» по пространству вакуумов, и низкоэнергетический эффективный лагранжиан включает только кинетический член. В теории поля отсутствие потенциала означает безмассовость соответствующего эффективного поля и его квантов.

Эта теорема носит действительно весьма общий характер и может быть проиллюстрирована на примере, не имеющем отношения к физике элементарных частиц. Рассмотрим ферромагнетик. Как известно, горячее железо не намагничено. Но когда горячий кусок железа остывает ниже некоторой температуры (проходит так называемую точку Кюри), железо намагничивается: спины электронов выстраиваются вдоль некоторого выделенного направления. Если нет внешнего магнитного поля, то направление такой спонтанной намагниченности абсолютно произвольно. Более того, если размер образца превышает несколько микрон, то возникает несколько доменов с разным направлением намагниченности. Мы рассмотрим для простоты случай маленькой магнитной частички, представляющей единственный домен.

¹ Они так названы в честь Джеффри Голдстоуна, который понял универсальный характер этих мод в квантовой теории поля и доказал сформулированную ниже теорему. Но ещё более универсальный принцип Арнольда применим, разумеется, и к этому конкретному случаю. Первым теоретиком, открывшим существование голдстоуновских мод, был Йоитиро Намбу.

² Факторпространство G/H определяется как многообразие, получаемое из группового многообразия G при отождествлении всех точек, принадлежащих каждой орбите подгруппы H , т. е. множеству точек многообразия G , связанных действием группы H .

Ненулевая намагниченность нарушает спонтанно вращательную симметрию $SO(3)$ гамильтониана. Но нарушает не полностью — наш магнит по-прежнему симметричен относительно вращений вокруг оси намагниченности. Это симметрия $H = SO(2) \equiv U(1)$.

Множество всех возможных основных состояний гамильтониана (а как отмечалось, направление спонтанной намагниченности произвольно) представляет собой факторпространство $SO(3)/SO(2) \approx S^2$. Его размерность есть $3 - 1 = 2$. Теорема Голдстоуна говорит, что имеются две безмассовые моды, соответствующие «гулянию» вдоль этой сферы (иначе говоря, направление намагниченности в разных пространственных точках может флуктуировать, и энергия, отвечающая таким длинноволновым флуктуациям, мала).

В физике твёрдого тела квантовые эффекты играют существенную роль при низких температурах, а при высоких температурах можно ограничиться классическим рассмотрением. При этом голдстоуновские моды интерпретируются не как частицы, а как классические волны (их называют *спиновыми волнами* или *магнонами*) с бесщелевым законом дисперсии $\omega = Ak^2$. (Не спрашивайте меня, откуда следует такой закон, но тот факт, что зависимость частоты от k нелинейна, вполне естественен — в задаче нет лоренцевой симметрии, и нет оснований ожидать, что скорость спиновых волн не зависит от частоты.)

Переход от высокотемпературной немагнитной фазы к низкотемпературной фазе со спонтанной намагниченностью — это *фазовый переход* второго рода². Намагниченность — это *параметр порядка* (параметр, говорящий, в какой именно из многочисленных возможных вакуумов упала наша система в результате спонтанного нарушения), связанный с таким переходом.

А в рассмотренной выше полевой системе (11.44) параметром порядка служит вакуумное скалярное поле (главным образом, его фаза α). Голдстоуновская частица возникает как результат квантования моды, описывающей флуктуации $\alpha(x)$.

¹ Читателя-физика могут смутить новые красивые математические термины типа «факторпространство», но он легко поймёт, что множество всех направлений трёхмерного вектора математически эквивалентно двумерной сфере.

² Напомним определения. Фазовый переход *первого* рода характеризуется скачком в плотности энергии — в точке кипения удельная энергия пара намного больше, чем у ещё не вскипевшей воды. С другой стороны, для фазовых переходов *второго* рода плотность энергии непрерывна в точке перехода, но удельная теплоёмкость (производная удельной энергии по температуре) испытывает скачок. Фазовые переходы, сопряжённые со спонтанным нарушением симметрии, обычно второго рода.

11.5.3. Кварковый конденсат. Псевдоскалярные псевдоголдстоуны

Вернёмся к КХД и рассмотрим вначале мир с двумя безмассовыми кварками. Как было сказано, глобальная аксиальная симметрия $SU_A(2)$ лагранжиана (11.36) спонтанно нарушена, т. е. вакуумное состояние теории не инвариантно относительно действия этой симметрии. В рассмотренном выше модельном примере (11.44) такая неинвариантность была обусловлена ненулевым вакуумным значением комплексного скалярного поля φ .

Но в КХД нет скалярных полей, и не сразу понятно, что там играет роль параметра порядка, связанного с этим спонтанным нарушением. Оказывается, однако, что параметр порядка можно «приготовить» и из фермионных полей. В нашем случае различные вакуумы имеют различные *вакуумные ожидания* (т. е. различные средние значения в вакуумном состоянии) составного фермионного оператора¹ $O^{fg} = q_L^f \bar{q}_R^g$, где $f, g = 1, 2$ — ароматные индексы (в этом параграфе мы не будем их опускать). Параметр порядка есть матрица

$$\Sigma^{fg} = \langle q_L^f \bar{q}_R^g \rangle_{\text{вак}}. \quad (11.48)$$

Произвольная комплексная матрица размера 2×2 зависит от восьми вещественных параметров. Они включают размерный параметр $\text{Tr}\{\Sigma\Sigma^\dagger\}$, говорящий о «степени» нарушения симметрии (как параметр ν в формуле (11.46) или как намагниченность ферромагнитного домена), и семь «углов». Казалось бы, мы получаем семимерное пространство вакуумных состояний, что отвечало бы по теореме Голдстоуна спонтанному нарушению полной киральной симметрии (11.37), включающей 8 параметров, до симметрии $U_V(1)$ — общего фазового поворота всех кварковых полей.

Однако как мы уже отмечали в конце п. 11.5.1, синглетная аксиальная симметрия $U_A(1) \subset U_L(2) \times U_R(2)$ разрушена *явно* ввиду квантовой аномалии. Она не может быть поэтому нарушена *спонтанно*. Вдобавок можно *доказать*, что обычная изотопическая симметрия $SU_V(2)$, перемешивающая дираковские спиноры u и d , *не может* быть спонтанно нарушена².

¹ Читателя, который слышал о конденсате электронных куперовских пар в сверхпроводниках, это не должно очень сильно удивить!

² Это так называемая *теорема Вафы—Виттена*. Мы не будем её здесь доказывать в надежде, что читатель сочтёт это утверждение естественным и примет его без сильного протеста.

Таким образом, спонтанно нарушенной может оказаться только подгруппа $SU_A(2)$ общих преобразований симметрии (11.37), и множество всех вакуумов представляет собой трёхмерное многообразие $SU(2) \equiv S^3$. Матрица (11.48) пропорциональна унитарной матрице:

$$\Sigma^{fg} = \frac{1}{2} \Sigma \Omega^{fg}, \quad \Omega \in SU(2). \quad (11.49)$$

Общее киральное преобразование (11.37) переводит этот вакуум в другой: $\Omega \rightarrow \Omega' = S_L \Omega S_R^\dagger$. Практически удобно принять, что в нашем истинном физическом вакууме $\Omega = 1$.

Постоянная Σ называется *кварковым конденсатом*. Её приближительное экспериментальное значение есть

$$\Sigma \approx (250 \text{ МэВ})^3. \quad (11.50)$$

Тот факт, что $\Sigma \neq 0$, достаточно нетривиален. Могло оказаться и по-другому, киральная симметрия (11.37) могла остаться ненарушенной. Определённые теоретические аргументы говорят, что она и осталась бы ненарушенной в гипотетическом мире с пятью-шестью лёгкими кварками. Но мы живём в мире с двумя лёгкими и ещё одним относительно лёгким странным кварком. И кварковый конденсат в нашем мире не нуль.

По теореме Голдстоуна должны существовать три безмассовые частицы, связанные с флуктуациями Σ^{fg} .

— Но в спектре КХД нет безмассовых частиц, — должен запротестовать сбитый с толку читатель, — все адроны массивны!

Читатель прав. Но с теоремой Голдстоуна здесь нет противоречия. Она справедлива только тогда, когда нарушается *точная* симметрия, а в реальном мире симметрия (11.37) не точна. Она явно нарушена массами u - и d -кварков — эти массы малы, но отличны от нуля. Таким образом, в КХД мы имеем дело со спонтанным нарушением *приближённой* симметрии. В результате частицы, которые были бы безмассовыми голдстоунскими бозонами, если симметрия была бы точна, приобретают маленькую, но ненулевую массу¹. Такие почти безмассовые моды, связанные со спонтанным нарушением приближённой симметрии, называются *псевдоголдстоуновскими частицами*. В просторечии — «псевдоголдстоунами».

¹Представьте себе, что бутылка шампанского на рис. 11.11 немного наклонилась. Она теперь касается обеденного стола только в одной точке, у потенциала остался только один минимум, в котором оба собственных значения матрицы вторых производных строго положительны.

И такие частицы хорошо известны. Это наши старые друзья пионы. Их масса действительно существенно меньше, чем масса остальных адронов. Существует красивая формула, выведенная Мюрреем Гелл-Манном, Робертом Оаксом и Бруно Реннером, выражающая массу пиона через ненулевые кварковые массы, кварковый конденсат и дополнительный параметр F_π , имеющий размерность массы и связанный с вероятностями распадов $\Gamma_{\pi \rightarrow e \nu_e}$ и $\Gamma_{\pi \rightarrow \mu \nu_\mu}$ ($F_\pi \approx 93$ МэВ). Мы приводим эту формулу без вывода:

$$F_\pi^2 m_\pi^2 = (m_u + m_d) \Sigma. \quad (11.51)$$

Мы видим, что в *киральном пределе*, когда $m_u = m_d = 0$, пионы становятся истинно безмассовыми голдстоуновскими частицами.

Не могу побороть искушение поместить здесь красивое выражение для низкоэнергетического эффективного лагранжиана, описывающего физику пионов в киральном пределе. Он имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{F_\pi^2}{4} \text{Tr} \{ \partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \}, \quad (11.52)$$

где

$$U(x) = \exp \left\{ \frac{i \pi^A(x) \sigma^A}{F_\pi} \right\} \quad (11.53)$$

— матрицы из $SU(2)$. В этом выражении $\pi^{A=1,2,3}(x)$ — пионные поля.

Эффективный лагранжиан (11.52) играет для КХД с безмассовыми u - и d -кварками ту же роль, что лагранжиан (11.47) для модели (11.44). Оба лагранжиана обладают симметриями исходных теорий. Лагранжиан (11.47) инвариантен относительно сдвигов $\alpha \rightarrow \alpha + \text{const}$, которые отвечают фазовым сдвигам (11.45) в модели (11.44). Лагранжиан (11.52) инвариантен относительно преобразований $U_L(2) \times U_R(2)$,

$$U \rightarrow S_L U S_R^\dagger, \quad (11.54)$$

которые соответствуют преобразованиям симметрии (11.37) классического безмассового лагранжиана КХД (напомним ещё раз, что синглетная аксиальная часть этих преобразований не есть симметрия квантовой теории ввиду аномалии).

Мы видим, что в этом случае голдстоуновские частицы не свободны [как это было в модели (11.44) с нарушенной симметрией $U(1)$], но обладают нетривиальным самодействием. Если подставить выражение (11.53) в формулу (11.52) и разложить экспоненты, мы получим

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi^A)^2 + \frac{1}{6F_\pi^2} [(\pi^A \partial_\mu \pi^A)^2 - \pi^A \pi^A (\partial_\mu \pi^B)^2] + \dots \quad (11.55)$$

Квартичный член, описывающий взаимодействие, включает по сравнению с (10.12) две дополнительные производные. Это означает, что для медленно меняющихся полей (для частиц с малыми импульсами) взаимодействие становится в согласии с теоремой Голдстоуна слабым, но оно быстро растёт с ростом энергии. Это поведение характерно для любой *неперенормируемой* теории поля, и (11.52) есть пример такой теории. В частности, амплитуды рассеяния пионов в эффективной киральной теории ведут себя очень похоже на амплитуды рассеяния гравитонов. Мы будем говорить об этом более подробно в главе 16 при обсуждении попыток пертурбативных вычислений в квантовой гравитации.

До сих пор мы говорили только о секторе КХД, включающем лёгкие кварки u и d . Но странный кварк с массой $m_s \sim 150$ МэВ тоже довольно лёгок. Если трактовать ненулевое значение m_s так же, как мы трактовали m_u и m_d , — как возмущение, отличающее реальный мир от «идеального» мира с тремя безмассовыми кварками, то можно сказать, что лагранжиан КХД обладает приближённой киральной симметрией $U_L(3) \times U_R(3)$, редуцированной ввиду аномалии до $U_V(3) \times SU_A(3)$. Эта симметрия нарушается спонтанно до $U_V(3)$.

Прочитав эту фразу, читатель может задуматься и спросить: «Как можно говорить о спонтанном нарушении симметрии, которая уже нарушена явно кварковыми массами?» На это я могу только повторить уже сказанное. Для изучения свойств КХД мы упрощаем теорию, зачёркивая в лагранжиане массовые члены у лёгких кварков. В такой идеализированной теории имеет место настоящее спонтанное нарушение. Затем мы вспоминаем о наличии масс, но рассматриваем их как возмущение.

В результате мы можем обобщить соотношение (11.51) и дать выражения не только для масс пионов, но и для масс K - и η -мезонов. Полный набор соотношений таков:

$$\begin{aligned} F^2 m_\pi^2 &= 2\bar{m}\Sigma, \\ F^2 m_K^2 &= (\bar{m} + m_s)\Sigma, \\ F^2 m_\eta^2 &= \frac{2\bar{m} + 4m_s}{3}\Sigma, \end{aligned} \tag{11.56}$$

где $\bar{m} = (m_u + m_d)/2$. Константы F , которые входят в эти три соотношения, могут немного отличаться, но это отличие само пропорционально кварковым массам, это даёт квадратичные эффекты по $m_{u,d,s}$, которые мы не можем учесть вполне последовательно.

Мы можем теперь заметить, что именно квадраты мезонных масс m_π^2, m_K^2, m_η^2 , определяемые формулами (11.56) (а не сами массы!), удовлетворяют соотношению Гелл-Манна—Окубо (11.31) в согласии с эвристическими аргументами теоретиков-«шестидесятников».

Много других экспериментально наблюдаемых свойств пионов и других псевдоскалярных мезонов могут быть объяснены их псевдоголдстоуновской природой, но в нашей книге мы этого делать не будем.

11.6. Природа масс адронов. Магнитные моменты барионов

В главе 3, когда мы обсуждали фундаментальные взаимодействия и структуру Вселенной, не зная ещё, как формулируется теория сильных взаимодействий, мы сказали, что масса протона может играть роль фундаментальной константы сильного взаимодействия. В этой главе мы познакомились с лагранжианом КХД (11.16). Он включает несколько параметров: безразмерный «сильный заряд» g и размерные кварковые массы. Значит ли это, что массы адронов (которые тоже, естественно, размерны) зависят в основном от кварковых масс? Значит ли это, что в киральном пределе, когда лёгкие кварки становятся безмассовыми, протон также теряет массу?

На первый из этих двух вопросов нет однозначного ответа (см. обсуждение ниже). Но ответ на второй вопрос однозначно отрицателен. Как мы уже отметили в главе 5 и повторили в этой главе, масштабная симметрия классического лагранжиана безмассовой КХД нарушается квантовыми эффектами¹. Безразмерная константа связи «бежит» — она зависит от характерной энергии процесса [см. формулу (11.22)]. Это приводит к размерной трансмутации — возникает размерный параметр $\Lambda_{\text{КХД}}$ [его однопетлевое выражение через два нефизических параметра — параметр ультрафиолетовой регуляризации Λ и голый заряд g_0 — дано в формуле (5.19)], приблизительно определяющий масштаб энергий, ниже которого пертурбативное рассмотрение становится неприменимо. Кроме того, $\Lambda_{\text{КХД}}$ определяет характерный масштаб масс лёгких адронов!

Последнее эвристическое утверждение можно уточнить. В предыдущем параграфе мы ввели понятие кваркового конденсата. Его чис-

¹ Теоретики называют это явление *конформной аномалией*. Оно родственно киральной аномалии (явному нарушению изосинглетной аксиальной симметрии квантовыми эффектами), упоминавшейся в предыдущем параграфе.

ленную оценку (11.50) можно представить как $\Sigma = s\Lambda_{\text{КХД}}^3$ с некоторым численным коэффициентом s . Существует замечательное соотношение (так называемая *формула Иоффе*), которое выражает массу протона через кварковый конденсат:

$$m_p = \sqrt[3]{4\pi^2\Sigma}. \quad (11.57)$$

Это не точный результат, но приближённая оценка, полученная в рамках так называемых *правил сумм ИТЭФ* — метода, суть которого нам придётся скрыть от читателя. Если подставить значение (11.50) в формулу (11.57), то получается оценка $m_p \approx 850$ МэВ, которую следует сравнить с экспериментальной величиной $m_p = 938,3$ МэВ. Точность предсказания довольно высока. Что ещё более важно, формула Иоффе показывает, что в воображаемом мире с безмассовыми кварками, но без спонтанного нарушения киральной симметрии протон остался бы безмассовым.

Другими словами, явление спонтанного нарушения киральной симметрии — не просто теоретический довесок, позволяющий улучшить согласие соотношения Гелл-Манна—Окубо с экспериментом. Это явление играет фундаментальную роль в теории, определяя структуру нуклона, структуру звёзд и наших тел!

Кварковый конденсат вместе с другой важной характеристикой вакуума КХД, *глюонным конденсатом*,

$$\left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} \text{Tr} \{ \hat{F}_{\mu\nu} \hat{F}^{\mu\nu} \} \right\rangle_{\text{вак}} \propto \Lambda_{\text{КХД}}^4, \quad (11.58)$$

определяют также массы других лёгких адронов — ρ -мезонов и т. п. Основной вклад в массу очарованных адронов связан с массой c -кварка, но вакуумные конденсаты (11.50) и (11.58) тоже играют важную роль. Массы адронов, сделанных из тяжёлых кварков b и t , практически полностью определяются массами их тяжёлых составляющих.

Метод правил сумм ИТЭФ позволяет оценить не только массы адронов, но и другие их характеристики — вероятности распадов, форм-факторы (распределения плотности электрического заряда внутри адронов), магнитные моменты и т. д. Поговорим о магнитных моментах более подробно.

В уравнении (10.30) мы выписали выражение для так называемого дираковского магнитного момента электрона. Его величина определяет амплитуду рассеяния электрона во внешнем магнитном поле, описываемую диаграммой на рис. 10.7. В главе 10 мы обсуждали петлевые поправки к дираковскому моменту; они выражаются

в виде ряда по малому параметру $\alpha \approx 1/137$ с вычислимыми коэффициентами.

Протон, как и электрон, несёт электрический заряд, спин и магнитный момент. На древесном уровне электромагнитные взаимодействия протона даются той же диаграммой на рис. 10.7, и соответствующий магнитный момент даётся тем же выражением (10.30) с заменой m_e на m_p . Величина

$$\mu_N = \frac{|e|\hbar}{2m_p c} \quad (11.59)$$

называется *ядерным магнетоном*.

Однако протон — сильно взаимодействующая частица, и петлевые поправки к оценке (11.59) не малы и не могут быть определены по теории возмущений. Экспериментально измеренный магнитный момент протона составляет $\mu_p \approx 2,79 \mu_N$. Что касается нейтрона, его полный электрический заряд равен нулю, и, значит, в древесном приближении его магнитный момент тоже зануляется. Однако эффекты сильного взаимодействия приводят к нетривиальному распределению электрических зарядов внутри нейтрона и к ненулевому магнитному моменту. Экспериментально, $\mu_n \approx -1,91 \mu_N$.

Несмотря на то что магнитные моменты нуклонов нельзя определить пертурбативно, их можно приблизительно оценить с помощью правил сумм ИТЭФ. Борис Иоффе и я получили следующие приближённые выражения:

$$\begin{aligned} \mu_p &\approx \frac{8\mu_N}{3} \left(1 + \frac{2\pi^2 \Sigma}{3m_p^3}\right) \approx 3\mu_N, \\ \mu_n &\approx -\frac{4\mu_N}{3} \left(1 + \frac{8\pi^2 \Sigma}{3m_p^3}\right) \approx -2\mu_N. \end{aligned} \quad (11.60)$$

Согласие с экспериментом более чем удовлетворительно.

Аналогичные приближённые формулы можно получить и для других барионов из октета со спином $1/2$, изображённых на рис. 11.6. Например, для Λ -гиперона мы выводим

$$\mu_\Lambda \approx -\frac{2\mu_N}{3} \frac{m_p}{m_\Lambda} \left(1 + \frac{8\pi^2 \Sigma}{3m_\Lambda^3}\right) \approx -0,7\mu_N \quad (11.61)$$

(что следует сравнить с экспериментальной величиной $\mu_\Lambda^{\text{эксп}} \approx -0,61\mu_N$). Множитель m_p/m_Λ в формуле (11.61) имеет кинематическое происхождение — он отвечает моменту μ_Λ , выраженному через ядерный магнетон, а не через более естественную единицу $|e|\hbar/(2m_\Lambda c)$.

Глава 12

Теория электрослабых взаимодействий

В главе 5 мы уже говорили о феноменологической теории Ферми и о современной фундаментальной теории электрослабых взаимодействий (электрослабого сектора Стандартной модели) и описали на уровне слов и рисунков их основные черты. С тех пор мы узнали много нового: что такое фермионные поля, что такое полевой лагранжиан, как вычислять амплитуды рассеяния, что такое калибровочная инвариантность — абелева и неабелева — и т. д. Мы сформулировали в предыдущей главе квантовую хромодинамику на точном математическом языке и подготовлены теперь к тому, чтобы сделать то же для электрослабой теории.

Мы хотим, однако, предупредить читателя. Глава, которую он начал читать, сложнее предыдущих. Просто потому, что она содержит очень много материала. Я бы не сказал, что физика слабых взаимодействий сложнее, чем физика сильных взаимодействий (вероятно, нет: слабые взаимодействия слабы, и их всегда можно описывать на языке теории возмущений, за такое описание институт Клэя не присудит миллион долларов), но слабые взаимодействия, если угодно, более разнообразны, они проявляются во многих разных контекстах и обликах, и новому человеку может быть не так просто во всём этом разобраться. В любом случае я взялся писать эту книгу с целью объяснить каждому, кто готов приложить к тому умеренные, но отличные от нуля усилия, что такое Стандартная модель. У меня нет другого выбора, как попытаться сделать это...

12.1. Теория Ферми. Слабые токи

В 1934 г. Ферми предложил для описания распада нейтрона следующий лагранжиан:

$$\mathcal{L}_F = G_F \bar{p} \gamma_\mu n \cdot \bar{e} \gamma^\mu \nu_e, \quad (12.1)$$

где p, n, e, ν_e — фермионные поля, описывающие соответствующие частицы¹. В древесном приближении распад нейтрона описывается

¹Ферми писал не буквально эти формулы, но мы немного осовременили его рассуждение. Здесь стоит вспомнить, что каноническая размерность фермионных

диаграммой, изображённой на рис. 5.10, и имеет вид

$$M_{n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e} = G_F \bar{u}_p(p_p) \gamma^\mu u_n(p_n) \cdot \bar{u}_e(p_e) \gamma_\mu u_{\bar{\nu}_e}(-p_{\bar{\nu}_e}), \quad (12.2)$$

где p_n, p_p, p_e и $p_{\bar{\nu}_e}$ — 4-импульсы взаимодействующих частиц, а u_p и т. д. — дираковские биспиноры (9.53), фигурирующие в плосковолновых решениях уравнения Дирака (9.51). Биспиноры (9.53) имеют размерность $[u] = m^{1/2}$, так что амплитуда (12.2) безразмерна. Исходя из выражения (12.2) мы можем рассчитать энергетические спектры электронов в ядерных β -распадах. Ферми это сделал и увидел прекрасное согласие своей теории с экспериментом.

Позже люди поняли, что выражение (12.1) не вполне верно. В частности, лагранжиан (12.1) инвариантен относительно зеркальных отражений и не включает характерные для всех слабых процессов эффекты несохранения чётности. Истинный *эффективный* лагранжиан, описывающий распад нейтрона, имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{распад нейтрона}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \cos \theta_c \bar{p} \gamma_\mu (1 - g_A \gamma^5) n \cdot \bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_e, \quad (12.3)$$

где $g_A \approx 1,26$ есть некоторая феноменологическая константа, а θ_c — так называемый *угол Каббиво*; мы объясним немного позже, что это такое. Фактор $\sqrt{2}$, на который теперь делится G_F , имеет историческое объяснение. Он был вставлен, чтобы полная вероятность распада нейтрона, рассчитанная по лагранжиану (12.3), соответствовала вероятности, рассчитанной по исходному лагранжиану Ферми, с примерно тем же значением константы G_F .

Лагранжиан (12.3) представляет собой произведение двух факторов. Фактор

$$j_\mu^{-(e)} = \bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu_e \quad (12.4)$$

называется *слабым заряженным лептонным током*. Он несёт отрицательный электрический заряд¹. Ток (12.4) родствен *нейтральному*

полей есть $m^{3/2}$. Имея в виду, что $[\mathcal{L}] = m^4$, мы выводим каноническую размерность константы Ферми: $[G_F] = m^{-2}$. Её численное значение было дано в формуле (5.21).

¹ Точный смысл последнего утверждения следующий. Ток (12.4) входит в классический лагранжиан (12.3). Рассмотрим, однако, соответствующий *квантовый* гамильтониан. Это оператор, действующий в фоксовском пространстве и представляющий собой произведение двух операторов тока. Полевой оператор $\bar{e}(x)$ в операторе тока, соответствующем (12.4), может либо родить электронное состояние, либо уничтожить позитронное (ср. обсуждение на с. 152). В обоих случаях электрический заряд состояния меняется на -1 .

электромагнитному электронному току $\bar{e}\gamma_\mu e$, но включает два разных фермионных поля (так что соответствующий оператор описывает переходы $\nu_e \rightarrow e$ и также рождение из вакуума частиц $\bar{\nu}_e$ и e), и, что очень важно, это не чистый вектор, он представляет собой комбинацию вектора и аксиала. Основываясь на стандартной конвенции [см. замечание после уравнения (9.46)], фактор (12.4) называют током $V - A$.

Второй фактор,

$$j_\mu^{+(N)} = \bar{p}\gamma_\mu(1 - g_A\gamma^5)n, \quad (12.5)$$

— это нуклонный слабый заряженный ток. Как мы видим, он не есть в точности $V - A$, но представляет собой немного другую линейную комбинацию.

Нетривиальный коэффициент g_A появляется ввиду того, что протон и нейтрон — не элементарные частицы, а поля $p(x)$ и $n(x)$ — не фундаментальные поля. Можно сказать, что исходная структура $V - A$ нуклонного (или, скорее, кваркового — см. ниже) слабого тока искажается эффектами сильного взаимодействия¹.

Важно, что искажение касается только аксиального тока. Коэффициент g_V при векторном токе в точности равен единице по той же причине, по которой электрический заряд протона совпадает по модулю с электронным зарядом, несмотря на то что протон участвует в сильных взаимодействиях, а электрон не участвует. Это следствие закона сохранения тока (9.56).

Ферми не знал (а мы знаем), что истинно элементарные частицы — это не нуклоны, а кварки (внутри нуклонов присутствуют также глюонные поля, но глюоны не участвуют ни в электромагнитных, ни в слабых взаимодействиях). И, значит, фундаментальный лагранжиан включает не нуклонные, а кварковые поля. Попробуем записать его в виде

$$\mathcal{L} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [j_\mu^{-(e)} j^{\mu+(q)} + j_\mu^{+(e)} j^{\mu-(q)}], \quad (12.6)$$

где $j_\mu^{+(e)} = \bar{\nu}_e\gamma_\mu(1 - \gamma^5)e$ несёт заряд $+1$ и связан с $j_\mu^{-(e)}$ комплексным сопряжением, а кварковые слабые токи имеют вид

$$j_\mu^{+(q)} = \bar{u}\gamma_\mu(1 - \gamma^5)d, \quad j_\mu^{-(q)} = \bar{d}\gamma_\mu(1 - \gamma^5)u. \quad (12.7)$$

¹Это искажение можно теоретически оценить в рамках метода правил сумм ИТЭФ, но это отдельная история.

Мы можем заметить, что:

- кварковые токи (12.7) имеют структуру $V - A$;
- это значит, что как кварковые, так и лептонные токи включают только левые фермионные поля:

$$j_{\mu}^{-(e)} = 2\bar{e}_L\gamma_{\mu}\nu_{eL}, \quad j_{\mu}^{-(q)} = 2\bar{d}_L\gamma_{\mu}u_L \quad (12.8)$$

[см. определения (9.44)];

- лагранжиан (12.6) веществен: два члена в сумме комплексно-сопряжены друг другу.

Распад нейтрона описывается первым членом в формуле (12.6). Соответствующий глубинный процесс есть $d \rightarrow ue^{-}\bar{\nu}_e$. На языке модели конstituентных кварков, один из d -кварков нейтрона переходит в u -кварк с излучением электрона и антинейтрино. Антинейтрино улетает, в то время как новорождённый u -кварк остаётся на месте и смотрит по сторонам. Он находит там двух прежних соседей исчезнувшего d -кварка (с ними ничего не случилось, они просто наблюдали за этим драматическим событием со стороны, и их часто поэтому называют кварками-*спектаторами*¹⁾ и остаётся жить с ними, образуя протонное связанное состояние.

Это рассуждение, проиллюстрированное на рис.12.1, достаточно эвристично. Но в этой главе мы хотим дать всему более строгое и точное математическое описание. Это можно сделать, используя язык квантового полевого гамильтониана, в котором выражение (12.6) является оператором $-\hat{V}$. Оператор $\hat{V}$ даёт вклад в гамильтониан, и его можно трактовать как возмущение. В главном порядке амплитуда нейтронного распада даётся матричным элементом

$$M = -\langle pe^{-}\bar{\nu}_e | \hat{V} | n \rangle = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \langle p | j_{\mu}^{+(q)} | n \rangle \cdot \langle e^{-}\bar{\nu}_e | j^{\mu-(e)} | \text{вак} \rangle. \quad (12.9)$$

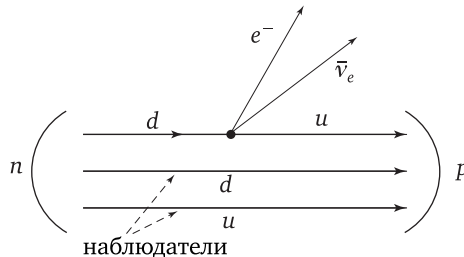


Рис. 12.1. Распад нейтрона в модели конstituентных кварков

¹ Т. е. наблюдателями.

Второй фактор в этом выражении равен $\bar{u}_e(p_e)\gamma^\mu(1-\gamma^5)u_v(-p_{\bar{v}_e})$. А первый фактор даст

$$\langle p | j_\mu^{+(q)} | n \rangle = \bar{u}_p(p_p)\gamma_\mu(1-g_A\gamma^5)u_n(p_n). \quad (12.10)$$

Как можно вывести последнее соотношение? Биспиноры u_p и u_n должны появиться по кинематическим причинам. Оператор тока представляет смесь вектора и аксиала, и его матричный элемент, фигурирующий в левой части равенства (12.10), должен быть суперпозицией вектора $\bar{u}_p\gamma_\mu u_n$ и аксиального вектора $\bar{u}_p\gamma_\mu\gamma^5 u_n$. Тогда единственное нетривиальное утверждение состоит в том, что структура $\bar{u}_p\gamma_\mu u_n$ входит с коэффициентом $g_V = 1$. Аргументы в его пользу были даны выше.

Мы приходим, таким образом, к следующему выражению для амплитуды распада:

$$M = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}_p(p_p)\gamma_\mu(1-g_A\gamma^5)u_n(p_n) \cdot \bar{u}_e(p_e)\gamma^\mu(1-\gamma^5)u_v(-p_{\bar{v}_e}). \quad (12.11)$$

Но древесная амплитуда, следующая из эффективного лагранжиана (12.3), содержит дополнительный множитель $\cos\theta_c$. Каково его происхождение?

Дело в том, что помимо электронов, электронных нейтрино, u - и d -кварков в природе есть также фермионы (μ, ν_μ, c, s) и (τ, ν_τ, t, b) , принадлежащие ко второму и третьему поколениям. И слабые взаимодействия между кварками и лептонами разных поколений отнюдь не исключены. Например, Λ -гиперон может распасться так же, как нейтрон, рождая в конечном состоянии протон, электрон и $\bar{\nu}_e$. Но Λ -гиперон — это странный адрон, содержащий в своём составе странный кварк. А в протоне странного кварка нет. Чтобы Λ перешёл в p , странный кварк должен распасться, и глубинный процесс, приводящий к распаду Λ , есть $s \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e$. Он может идти, только если фундаментальный лагранжиан содержит член, описывающий взаимодействие странного заряженного тока $\sim \bar{u}s$ с обычным лептонным током (12.4).

Оставим на время в покое поколение (τ, ν_τ, t, b) и рассмотрим модель только с двумя поколениями. В такой модели истинный кварковый ток $j_\mu^{-(q)}$ даётся не выражением (12.7) и не выражением наподобие

$$j_\mu^{-(q)} = \bar{d}\gamma_\mu(1-\gamma^5)u + \bar{s}\gamma_\mu(1-\gamma^5)c, \quad (\text{неверно})$$

но имеет вид

$$j_{\mu}^{-(q)} = \bar{d}\gamma_{\mu}(1 - \gamma^5)(\cos \theta_c u - \sin \theta_c c) + \bar{s}\gamma_{\mu}(1 - \gamma^5)(\sin \theta_c u + \cos \theta_c c). \quad (12.13)$$

Покорения *смешиваются*! Угол Каббиво θ_c — это угол смешивания между первым и вторым поколениями.

Экспериментально показано, что, этот угол относительно мал: $\theta_c \approx 13^\circ$. Это означает, что амплитуды распада странных барионов с испусканием e^- и $\bar{\nu}_e$ в несколько раз меньше, чем амплитуда нейтронного β -распада. Что же касается последнего, различие между (12.11) и амплитудой, следующей из соотношения (12.3), невелико: $\cos \theta_c \approx 0,97$.

В реальном мире с тремя поколениями матрица смешивания Каббиво—Кобаяши—Маскава (ККМ, или, в английской транскрипции, СКМ) включает 4 численных параметра — три угла смешивания и фазу, делающую матрицу комплексной. Эта незначительная комплексность (на уровне $\approx 10^{-3}$) приводит к небольшим эффектам нарушения так называемой комбинированной чётности¹. В лептонном секторе присутствует аналогичная матрица смешивания². Смешивание лептонов приводит к красивому явлению нейтринных осцилляций. И мы будем об этом говорить более подробно в конце этой главы.

Полный осовремененный и обобщённый лагранжиан Ферми записывается как

$$\mathcal{L} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} j_{\mu}^{+} j^{\mu-}, \quad (12.14)$$

где $j_{\mu}^{\pm} = j_{\mu}^{\pm(l)} + j_{\mu}^{\pm(q)}$ и в кварковом и лептонном токах учтено смешивание. Кварковый ток $j_{\mu}^{-(q)}$ представляет обобщение Кобаяши—Маскава тока Каббиво (12.13), а лептонный ток имеет аналогичную структуру, но с другим набором параметров.

Лагранжиан (12.14) описывает не только *полулептонные* процессы наподобие распада нейтрона или Λ -гиперона, но также чисто *лептонные* процессы, такие как упругое рассеяние νe или $\nu \mu$, или распад мюона. Он описывает также *нелептонные* слабые распады

¹ Эта симметрия и её нарушение были уже в телеграфном стиле упомянуты на с. 104. Мы просим у читателя прощения, что не будем в нашей книге говорить об этом интереснейшем явлении более подробно.

² Она обычно называется матрицей *Понтекорво—Маки—Накагава—Саката* (PMNS).

странных частиц типа $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0$ или $\Lambda \rightarrow p \pi^-$. За них ответствен сектор лагранжиана (12.14), где оба тока j_μ^+ и j_μ^- имеют кварковую природу.

Разумеется, экспериментаторам намного проще изучать эффекты слабого взаимодействия в нелептонных процессах с изменением странности, в этом случае мы имеем дело с чисто слабым взаимодействием и нет сильного фона. Но приложив некоторые усилия, можно зарегистрировать несохранение чётности в процессах, включающих только обычные нестранные адроны. Измерена, например, маленькая циркулярная поляризация γ -квантов в процессе радиационного захвата нейтрона протоном $n + p \rightarrow d(\text{дейтерий}) + \gamma$.

Однако лагранжиан (12.14) — это ещё далеко не конец истории. Читатель помнит, что теория Ферми эффективна по своей природе: она работает только при малых энергиях, а при энергиях, приближающихся к унитарному пределу (5.24) и превосходящих его, её следует заменить истинной перенормируемой теорией. Но даже при малых энергиях лагранжиан (12.14) описывает не всё. Именно, он не описывает процессы с *нейтральными токами*, в которых фундаментальные фермионы не меняют в ходе взаимодействия свою природу. Примеры таких процессов — рассеяние νp (см. рис. 5.15) и несохранение чётности в атомных переходах — обсуждались в главе 5.

Нейтринный слабый нейтральный ток имеет структуру $V - A$:

$$j_\mu^{(\nu)} = \bar{\nu} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu. \quad (12.15)$$

Но электронный нейтральный ток не есть $V - A$, он представляет собой более сложную комбинацию вектора и аксиала. Мы скоро узнаем, какую именно.

Прервём на некоторое время наш визит зоопарка слабых процессов¹ и зададимся естественным вопросом: какова *фундаментальная биология* всех этих разнообразных зверюшек, с которыми мы только что немного познакомились?

Стоит напомнить здесь логику рассуждений, которые привели в конце концов теоретиков к построению Стандартной модели.

- Фермиподобная теория слабых взаимодействий с точечными 4-фермионными вершинами неперенормируема и не позволяет вычислять петли. Она работает только при малых энергиях, $E \ll G_F^{-1/2}$, и имеет статус эффективной теории. Чтобы по-

¹ Я подумал вдруг о *Соне*, вместе с которой мы бродили по кубическому Музею теоретической физики в главе 4. Она ещё с нами? Она не слишком устала?

бороть неперенормируемость, необходимо предположить, что 4-фермионное взаимодействие неточно, а расщепляется на две вершины, разделённые характерным расстоянием, равным комптоновской длине волны массивных векторных бозонов, которые играют роль медиаторов (см. рис. 5.13).

- Однако наивная модель с массивными векторными частицами нехороша. Она калибровочно неинвариантна и, как следствие, неперенормируема. В главе 5 мы просто отметили без доказательства этот факт, но сейчас можем объяснить, почему это так. Рассмотрим, например, однопетлевой график на рис. 12.2, описывающий упругое рассеяние $\nu_e e$. При больших импульсах фермионные пропагаторы ведут себя как $\propto 1/p$, в то время как массивные векторные пропагаторы (10.29) частиц W , в отличие от фотонных пропагаторов (10.22), вообще не падают при больших p . Как следствие, петлевой интеграл, отвечающий графику, изображённому на рис. 12.2, ведёт себя в ультрафиолете как $\propto \int d^4p/p^2$ и содержит квадратичную ультрафиолетовую расходимость.
- Тем не менее возможно сделать векторные бозоны массивными и сохранить перенормируемость. Для этого нужно предположить, что бозоны приобретают массу по хиггсовскому механизму — примерно таким же образом, как фотоны приобретают массу в сверхпроводниках. Мы объясним суть этого механизма в следующем параграфе.
- Невозможно построить фундаментальную теорию слабых взаимодействий, не обращая внимания на электромагнетизм. Если

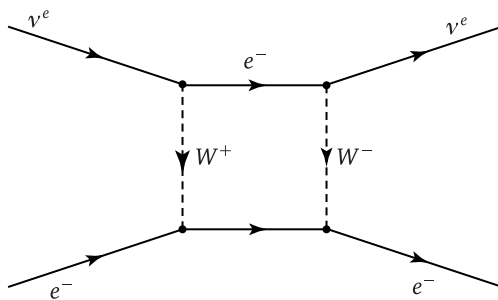


Рис. 12.2. Петлевой график для упругого рассеяния $\nu_e e$

мы дадим массу $W^\pm$ по неабелеву механизму Хиггса, но не будем ничего делать с фотоном, то мы не сможем сохранить обычную абелеву калибровочную инвариантность, и теория поэтому окажется неперенормируемой. Последовательная теория должна иметь дело одновременно с медиаторами слабых и электромагнитных взаимодействий.

- Такая теория должна содержать по крайней мере 4 таких медиатора: $W^\pm$, сцепленные с заряженными слабыми токами; Z^0 , сцепленный с нейтральными слабыми токами, и фотон. Таким образом, теория должна включать по крайней мере 4 калибровочных поля, что отвечает группе $SU(2) \times U(1)$.

12.2. Механизм Хиггса

12.2.1. Абелев случай

В предыдущей главе мы обсуждали спонтанное нарушение непрерывной глобальной симметрии и рассматривали как простейший теоретико-полевой пример лагранжиан (11.44) комплексного скалярного поля с потенциалом Лифшица, минимумы которого характеризуются ненулевым значением $|\varphi|$. Предположим теперь, что наши скалярные частицы несут электрический заряд. Тогда лагранжиан включает также электромагнитное поле, и обычные производные заменяются на ковариантные:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (\mathcal{D}^\mu\varphi)^*\mathcal{D}_\mu\varphi - \frac{\lambda}{4}(\varphi^*\varphi - v^2)^2, \quad (12.16)$$

где¹ $\mathcal{D}_\mu\varphi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi$.

В отличие от лагранжиана (11.44), обладающего только глобальной симметрией $U(1)$, лагранжиан (12.16) инвариантен по отношению к локальным калибровочным преобразованиям

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\rightarrow e^{-ie\chi(x)}\varphi(x), \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu + \partial_\mu\chi(x). \end{aligned} \quad (12.17)$$

Классическое вакуумное состояние характеризуется, как и раньше, ненулевым значением $|\varphi| = v$. Но мы не можем, однако, больше

¹Стараясь не выходить за рамки стандартного латинского алфавита, мы обозначаем заряд скалярной частицы той же буквой e , что и заряд электрона. Но они могут и не совпадать.

утверждать, что имеется бесконечное число вакуумов, различающихся фазой поля φ . Изменение фазы $\varphi(x)$ сводится к изменению калибровки и не означает перехода в новое физическое состояние. Таким образом, нет причины ожидать появления в спектре безмассового голдстоуновского бозона.

Он и не появляется. Чтобы в этом убедиться, читатель может подставить в формулу (12.16) вакуумное поле (11.46). Вместо (11.47) мы получаем

$$\mathcal{L}_\alpha = \frac{v^2}{2} (\partial_\mu \alpha + \sqrt{2} e A_\mu)^2. \quad (12.18)$$

От поля $\alpha(x)$ можно полностью избавиться, проделав калибровочное преобразование (12.17) с $\chi(x) = -\frac{\alpha(x)}{e\sqrt{2}}$; таким образом, $\alpha(x)$ действительно есть нефизическая калибровочная степень свободы.

Выберем теперь калибровку, в которой $\varphi(x)$ вещественно, и запишем

$$\varphi(x) = v + \frac{H(x)}{\sqrt{2}}. \quad (12.19)$$

Здесь $H(x)$ есть физическое вещественное скалярное поле, описывающее отклонение $\varphi(x)$ от вакуумного значения. Предположим, что отклонение мало: $H(x) \ll v$. Подставим выражение (12.19) в формулу (12.16) и получим

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + e^2 v^2 A_\mu^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu H)^2 - \frac{\lambda v^2}{2} H^2 +$$

+ малые кубичные и квартичные члены. (12.20)

Примечательная черта этого лагранжиана — его второй член. Фотон приобрёл массу: $m_A^2 = 2e^2 v^2$! Это явление называется эффектом Хиггса или механизмом Хиггса. Вещественное скалярное поле H тоже массивно: $m_H^2 = \lambda v^2$. Это не что иное, как бозон Хиггса [не бозон Хиггса Стандартной модели, лагранжиан которой мы пока не писали, но бозон Хиггса простой абелевой модели (12.16)].

По сути дела, произошло маленькое чудо. В конце седьмой главы мы сказали и показали, что лагранжиан свободного массивного векторного поля калибровочно не инвариантен. Это относится также к первой строчке в выражении (12.20). Но *полный* лагранжиан, включающий также невыписанные нами явно нелинейные члены,

описывающие взаимодействие, и члены, включающие калибровочные степени свободы $\alpha(x)$, которые мы убрали выбором калибровки, совпадает с (12.16) и *инвариантен* относительно преобразований (12.17).

Для лучшего понимания займёмся арифметикой и считаем физические степени свободы. Рассмотрим лагранжиан, похожий на (12.16), но с обыкновенным массовым членом $-m^2\varphi^*\varphi$ вместо потенциала Лифшица. В этом случае вакуумное среднее $\langle\varphi\rangle$ исчезает. Фотон остаётся безмассовым, и имеются два физических асимптотических фотонных состояния с разными поперечными поляризациями. С комплексным скалярным полем связаны ещё два физических асимптотических состояния.

В действительности, однако, скалярное поле приобретает ненулевое вакуумное среднее и фотон становится массивным. Массивную векторную частицу со спином 1 можно «остановить», и тогда она, очевидно, имеет три квантовых состояния — с проекциями спина $+1$, 0 и -1 на произвольную ось. Вдобавок теория содержит одно вещественное хиггсовское поле и, соответственно, один физический скаляр. Замечательное равенство

$$2 + 2 = 3 + 1$$

говорит нам, что мы не совершили ошибки!

Таким образом, суть эффекта Хиггса немного «людоедская». Когда система, которая сама по себе содержала бы в спектре безмассовый голдстоуновский бозон, связанный со спонтанным нарушением глобальной непрерывной симметрии, вступает в контакт с калибровочным полем, последнее как бы *съедает* голдстоуновский бозон и приобретает за счёт этого массу.

Как уже было сказано в главе 5, эффект Хиггса был впервые открыт Виталием Гинзбургом и Львом Ландау, которые предложили эффективную теоретико-полевою модель сверхпроводимости, где конденсат феноменологического скалярного поля (фактически конденсат куперовских пар) делает фотон массивным. Но это была нерелятивистская модель. Релятивистская реализация механизма Хиггса была найдена Питером Хиггсом и независимо в работе Роберта Браута и Франсуа Энглерта и в работе Джеральда Гуральника, Карла Хагена и Тома Киббла в 1964 г. В 2013 г. Хиггсу и Энглерту была присуждена Нобелевская премия (Браут умер в 2011 г.), после того как бозон Хиггса Стандартной модели был открыт в ЦЕРНе.

12.2.2. Неабелев случай

Нам нужно дать массу не одному, а нескольким векторным бозонам, $W^\pm$ и Z^0 . Это можно сделать с помощью неабелева механизма Хиггса.

Рассмотрим лагранжиан

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\text{Tr}\{\hat{G}^{\mu\nu}\hat{G}_{\mu\nu}\} + (\mathcal{D}^\mu\varphi)^*\mathcal{D}_\mu\varphi - \frac{\lambda}{4}(\varphi^*\varphi - v^2)^2, \quad (12.21)$$

где φ принадлежит фундаментальному дублетному представлению группы $SU(2)$, $\mathcal{D}_\mu\varphi = (\partial_\mu - ig\hat{W}_\mu)\varphi$, $\hat{W}_\mu$ есть калибровочное поле группы $SU(2)$, $\varphi^*\varphi \equiv \varphi^{*k}\varphi_k$ и

$$\hat{G}_{\mu\nu} = \frac{i}{g}[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] = \partial_\mu\hat{W}_\nu - \partial_\nu\hat{W}_\mu - ig[\hat{W}_\mu, \hat{W}_\nu], \quad (12.22)$$

как в формуле (11.12).

Скалярное поле приобретает вакуумное среднее

$$\langle\varphi\rangle = U\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad (12.23)$$

где U — произвольная матрица $SU(2)$. Если бы система не включала калибровочные поля, то это ненулевое среднее повлекло бы за собой спонтанное нарушение глобальной симметрии $SU(2)$. В отличие от ферромагнетика, обсуждавшегося в п. 11.5.2, где вращательная симметрия $O(3)$ разрушалась не полностью и подгруппа $O(2)$ оставалась ненарушенной, в этом случае симметрия $SU(2)$ разрушается «без остатка». В согласии с теоремой Голдстоуна мы получили бы в спектре три безмассовые частицы. Соответствующие поля интерпретировались бы как параметры унитарной матрицы U , характеризующей вакуумное состояние.

Но система включает неабелево калибровочное поле. И так же, как это было в абелевой модели, это поле *сдвигает* безмассовые голдстоуновские моды, а векторные бозоны приобретают массу. В самом деле, можно выбрать калибровку, в которой матрица U в формуле (12.23) совпадает с единичной матрицей $\mathbb{1}$. Тогда квадратичные по $\hat{W}_\mu$ вклады, извлекаемые из среднего члена в формуле (12.21), приобретают вид

$$g^2v^2(0, 1)(\hat{W}_\mu)^2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{g^2v^2}{4}(W_\mu^a)^2, \quad (12.24)$$

откуда получаем

$$m_W^2 = g^2v^2/2. \quad (12.25)$$

Мы можем теперь забыть о голдстоуновских модах (они превратились в нефизические калибровочные степени свободы) и выбрать калибровку, в которой они отсутствуют:

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ v + \frac{H(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (12.26)$$

Вещественное поле $H(x)$ отвечает хиггсовской частице с массой

$$m_H^2 = \lambda v^2. \quad (12.27)$$

Подсчитаем степени свободы системы:

$$\begin{aligned} \text{без нарушения: } n &= (3 \times 2)_{\text{кал. боз.}} + 4_{\text{скал. дублет}} = 10, \\ \text{с нарушением: } n &= (3 \times 3)_{\text{масс. вект. боз.}} + 1_{\text{хиггс}} = 10. \end{aligned} \quad (12.28)$$

Арифметических ошибок нет.

12.3. Стандартная модель: бозонный сектор

Наконец после всех приготовлений мы можем перейти от анализа различных моделей к описанию реального мира.

Как было сказано, в теории имеется всего 4 калибровочных бозона: $W^\pm$, Z^0 и γ . Запишем лагранжиан, включающий неабелево калибровочное поле $\hat{W}_\mu$ из алгебры $\mathfrak{su}(2)$ и абелево поле¹ B_μ . Бозонная часть электрослабого лагранжиана имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{боз}}^{\text{Станд. мод.}} &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \{ \hat{G}_{\mu\nu} \hat{G}^{\mu\nu} \} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + (\mathcal{D}^\mu \varphi)^* \mathcal{D}_\mu \varphi - \\ &\quad - \frac{\lambda}{4} (\varphi^* \varphi - v^2)^2. \end{aligned} \quad (12.29)$$

Фундаментальные поля в этом лагранжиане суть $\hat{W}_\mu$, B_μ и скалярный $\text{SU}(2)$ -дублет φ , а $B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ есть тензор напряжённости абелева поля. Неабелева напряжённость $\hat{G}_{\mu\nu}$ выражается через $\hat{W}_\mu$ в соответствии с формулой (12.22). Поле φ взаимодействует с $\hat{W}_\mu$ так же, как в неабелевой модели Хиггса, обсуждавшейся в предыдущем параграфе, но оно несёт также заряд относительно B_μ . Последнее обстоятельство влияет на определение ковариантной производной. Она удлинняется и представляет теперь сумму трёх членов:

$$\mathcal{D}_\mu \varphi = \left(\partial_\mu - ig \hat{W}_\mu + \frac{i}{2} g' B_\mu \right) \varphi. \quad (12.30)$$

¹ Мы назвали его B_μ , а не A_μ , потому что, как мы очень скоро поймём, B_μ не есть электромагнитное поле.

Неабелев заряд g и абелев заряд $g'/2$ — это *разные* параметры лагранжиана, имеющие мало общего друг с другом.

Скалярное вакуумное среднее удовлетворяет условию $\varphi^* \varphi = v^2$. Как и раньше, можно выбрать калибровку, в которой

$$\langle \varphi \rangle = v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (12.31)$$

Подставляя это выражение в кинетический скалярный член $(\mathcal{D}^\mu \varphi)^* \mathcal{D}_\mu \varphi$ в лагранжиане (12.29), мы получаем следующие массовые члены для векторных полей:

$$\begin{aligned} v^2(0, 1) \left(g \hat{W}_\mu - \frac{g'}{2} B_\mu \right)^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \\ &= \frac{g^2 v^2}{4} [(W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2] + \frac{v^2}{4} (g' B_\mu + g W_\mu^3)^2. \end{aligned} \quad (12.32)$$

Первый член в правой части есть массовый член для заряженных бозонных полей

$$W_\mu^\pm = \frac{W_\mu^1 \mp i W_\mu^2}{\sqrt{2}} \quad (12.33)$$

(противоположные знаки в левой и правой частях (12.33) — не ошибка; мы прокомментируем это позже). Их масса даётся формулой (12.25). А второй член в формуле (12.32) интерпретируется как массовый член для поля, представляющего определённую линейную комбинацию

$$Z_\mu = \frac{g W_\mu^3 + g' B_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}}. \quad (12.34)$$

Масса этого поля есть

$$m_Z^2 = \frac{v^2(g^2 + g'^2)}{2}. \quad (12.35)$$

Поле же, представляющее ортогональную линейную комбинацию,

$$A_\mu = \frac{-g' W_\mu^3 + g B_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad (12.36)$$

остаётся безмассовым¹. Именно *эта* комбинация представляет физическое электромагнитное поле!

¹ Мы ввели в формулах (12.34) и (12.36) нормировочный фактор $1/\sqrt{g^2 + g'^2}$, чтобы сохранить стандартную форму кинетического члена для полей Z_μ и A_μ :

$$\mathcal{L}_{A,Z}^{\text{кин}} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{4}(\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu)^2. \quad (12.37)$$

Как и в случае неабелевой модели, разобранной в предыдущем параграфе, можно выбрать калибровку, в которой φ вещественно, как в формуле (12.26). Тогда поле $H(x)$ описывает физический бозон с массой (12.27).

Нашим наблюдениям можно дать следующую теоретико-групповую интерпретацию.

- Предположим, что калибровочные поля отсутствуют. В этом случае скалярный лагранжиан обладал бы глобальной симметрией $U(2) = SU(2) \times U(1)$. Вакуумное среднее (12.31) нарушило бы эту симметрию спонтанно до $U(1)$ [действительно, оно остаётся инвариантным под действием преобразований $\varphi \rightarrow e^{i\alpha(1+\sigma_3)}\varphi$], и в спектре появились бы три безмассовых голдстоуновских бозона.
- Но калибровочные поля присутствуют. Они с аппетитом кушают голдстоуновские моды. К сожалению, этих мод недостаточно, чтобы удовлетворить всех желающих — только три моды на четырёх потенциальных едоков $\hat{W}_\mu$ и B_μ . Таким образом, только три из четырёх калибровочных полей приобретают массу; четвёртое (электромагнитное) поле остаётся безмассовым и голодным.

Арифметика степеней свободы в этом случае такова:

$$\text{без нарушения: } n = (3 \times 2)_W + 2_B + 4_\varphi = 12, \quad (12.38)$$

$$\text{с нарушением: } n = (3 \times 3)_{W^\pm, Z} + 2_A + 1_H = 12.$$

Параметр

$$\theta_W = \arctg \frac{g'}{g} \quad (12.39)$$

называется *углом Вайнберга*. Это просто угол вращения от базиса (W^3, B) к базису (Z, A) физических полей (см. рис. 12.3). Массы $W^\pm$ и Z можно выразить как

$$m_W = \frac{gv}{\sqrt{2}}, \quad m_Z = \frac{gv}{\sqrt{2} \cos \theta_W} = \frac{m_W}{\cos \theta_W}. \quad (12.40)$$

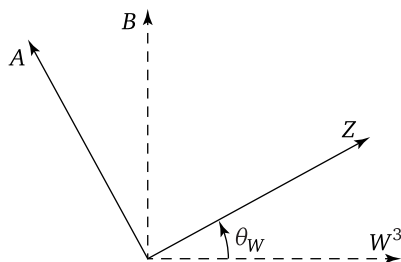


Рис. 12.3. Угол Вайнберга

12.4. Стандартная модель: фермионы

12.4.1. Калибровочные взаимодействия

После небольшой медитативной паузы и чашечки кофе¹ мы продолжаем.

Чтобы установить связь с теорией Ферми и обыкновенной КХД, мы должны описать, как калибровочные бозоны взаимодействуют с фермионами. Не так сложно определить общую структуру фермионного лагранжиана; это просто $i\bar{\psi}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi$. Нетривиальный вопрос, однако, — что такое в данном случае ψ и как записать ковариантную производную $\mathcal{D}_\mu$. Ясно одно: в отличие от обыкновенной КЭД [уравнение (11.1)] и КХД [уравнение (11.7)], где левые и правые фермионы взаимодействуют с фотонами (соответственно глюонами) совершенно одинаково, взаимодействие фермионов с $W^\pm$ и Z должно быть лево-право асимметричным, чтобы обеспечить несохранение чётности.

Пробуя разные схемы, потягивая кофе или, по предпочтению, другие напитки и медитируя, Вайнберг и Салам поняли, что всё прекрасно работает и концы с концами сходятся, если предположить, что левые фермионы являются дублетами по $SU(2)$ и взаимодействуют не только с B_μ , но и с неабелевым полем $\hat{W}_\mu$, в то время как правые фермионы — синглеты; они взаимодействуют не с $\hat{W}_\mu$, а только с B_μ .

Рассмотрим поначалу только фермионы первого поколения и пренебрежём смешиванием. Утверждается, что фермионы группируются в следующие мультиплеты²:

$$\begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L, \nu_R, e_R; \quad \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, u_R, d_R. \quad (12.41)$$

Относительно поля B_μ фермионы (12.41) несут следующие заряды Y , выраженные в единицах $g'/2$ (эти числа называются *гиперзарядами*).

¹ Упс, мы ещё не покончили со вторым. Ну тогда — пары глоточков любимого Атосом и автором анжуйского.

² Для точности следовало бы писать в формуле (12.41) и во всех формулах на нескольких следующих страницах ν_e вместо ν . Но автор боится перекормить читателя избытком индексов, что может помешать усвоению приготовленного им блюда. Мы восстановим аккуратные обозначения ν_e, ν_μ, ν_τ , когда будем обсуждать смешивание поколений.

Таблица 8. Гиперзаряды

фермион	ν_L, e_L	ν_R	e_R	u_L, d_L	u_R	d_R
гиперзаряд	-1	0	-2	1/3	4/3	-2/3

Числа в этой таблице совпадают с удвоенным *средним* электрическим зарядом в каждом мультиплете¹. Например, для левого кваркового дублета имеем

$$Y_{u_L} = Y_{d_L} = 2 \times \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{3} \right) \right] = \frac{1}{3}. \quad (12.42)$$

Это наблюдение позволяет запомнить значения гиперзарядов в таблице 8, но правильнее думать в обратном направлении: мы *постулируем* значения гиперзарядов, как они даны в таблице 8, и затем *выводим* значения электрических зарядов для всех частиц. Вспомним также, что кварки принадлежат, помимо прочего, фундаментальному триплету сильной группы SU(3), т. е. каждый кварковый мультиплет из таблиц присутствует в трёх цветных экземплярах.

Читатель, впервые увидевший таблицу 8, может счесть приведённые там числа достаточно странными и произвольными. В некотором смысле это так и есть (по крайней мере на нашем сегодняшнем уровне знаний), но всё же значения гиперзарядов не вполне произвольны, их нельзя заменить на числа, взятые с потолка. Читатель может проверить, что сумма кубов гиперзарядов всех левых фермионов совпадает с подобной суммой по правым фермионам (при проверке необходимо учесть наличие трёх кварковых цветов):

$$\sum_L Y_L^3 = \sum_R Y_R^3 = -\frac{16}{9}. \quad (12.43)$$

Это таинственное равенство имеет вполне определённый эзотерический смысл — оно является условием для сокращения так называемой внутренней киральной аномалии (заклинание, с которым читатель встретился в этой книге уже несколько раз и должен был уже научиться произносить). Это делает теорию калибровочно-инвариантной и самосогласованной.

Исходя из вида мультиплетов (12.41), таблицы 8 и выражения для ковариантной производной $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ig W_\mu^a t^a + \frac{ig'}{2} Y_L B_\mu$ для левых

¹ Между прочим, гиперзаряд скалярного дублета есть $Y_\varphi = 1$, и это означает, что верхняя компонента φ положительно заряжена, а нижняя нейтральна.

дублетных фермионов и $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + \frac{ig'}{2}Y_R B_\mu$ для правых синглетных фермионов мы получаем следующий фермионный лагранжиан:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_f = & i(\bar{\nu}_L, \bar{e}_L)\gamma^\mu\left(\partial_\mu - igW_\mu^a t^a - \frac{ig'}{2}B_\mu\right)\begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} + \\ & + i\bar{\nu}_R\gamma^\mu\partial_\mu\nu_R + i\bar{e}_R\gamma^\mu(\partial_\mu - ig'B_\mu)e_R + \\ & + i(\bar{u}_L, \bar{d}_L)\gamma^\mu\left(\partial_\mu - igW_\mu^a t^a + \frac{ig'}{6}B_\mu\right)\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} + \\ & + i\bar{u}_R\gamma^\mu\left(\partial_\mu + \frac{2ig'}{3}B_\mu\right)u_R + i\bar{d}_R\gamma^\mu\left(\partial_\mu - \frac{ig'}{3}B_\mu\right)d_R. \quad (12.44)\end{aligned}$$

Не самое простое и элегантное выражение, которое можно себе представить, но такова жизнь. Проанализируем и обсудим разные вклады в этот лагранжиан.

Начнём с правого нейтрино. Это синглет по SU(2), и его гиперзаряд равен нулю. Это значит, что правое нейтрино не взаимодействует ни с W , ни с B и, разумеется, не взаимодействует с глюонами. Поэтому правое нейтрино называют *стерильным*, хотя это не совсем так. Мы знаем, что нейтрино обладают очень маленькой, но ненулевой массой, что даёт в лагранжиане член $\propto \bar{\nu}_L\nu_R$, так что левое нейтрино может перейти в правое и обратно. Мы обсудим эти переходы позже, а пока просто заметим, что Вайнберг и Салам не знали в 1967 г. и в 1968 г., что нейтрино массивны. Они полагали, что правое нейтрино *абсолютно* стерильно, и не включили его поэтому в лагранжиан.

Рассмотрим теперь взаимодействия с заряженными бозонами $W^\pm$. В них участвуют только левые фермионы. Соответствующая часть формулы (12.44) есть ¹

$$\mathcal{L}_{fW} = \frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu^+[\bar{\nu}_L\gamma^\mu e_L + \bar{u}_L\gamma^\mu d_L] + \left(\text{комплексно-сопряжённое}\right). \quad (12.45)$$

Мы можем теперь выразить эффективную константу Ферми G_F через заряд g по SU(2) и массу W^+ . Для этой цели нужно сравнить два графика на рис. 5.13, описывающие процесс рассеяния νe . Для удобства читателя мы их здесь перерисовали.

¹Мы видим теперь, что для того, чтобы $\mathcal{L}$ имел нулевой электрический заряд (что обеспечивает его сохранение), необходимо приписать положительный заряд комбинации $\propto W_\mu^1 - iW_\mu^2$, как мы это и сделали в формуле (12.33)!

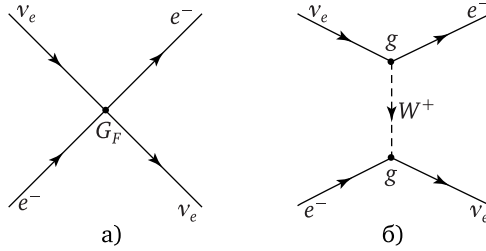
Рис. 12.4. Рассеяние νe : а) в теории Ферми, б) с обменом W

График слева даёт амплитуду рассеяния в эффективной теории Ферми. Из определений (12.14) и (12.8) мы получаем

$$M_{\nu_e e^- \rightarrow \nu_e e^-}^{\text{Ферми}} = 2\sqrt{2}G_F \bar{u}_{eL} \gamma^\mu u_{\nu L} \cdot \bar{u}_{\nu L} \gamma_\mu u_{eL}, \quad (12.46)$$

где u_{eL} и т. д. — соответствующие биспиноры. С другой стороны, амплитуда, вычисленная по правому графику на рис. 12.4 при *малой* передаче импульса, когда массивный векторный пропагатор (10.29) сводится к $-\eta_{\mu\nu}/m_W^2$, есть

$$M_{\nu_e e^- \rightarrow \nu_e e^-}^{\text{Станд. мод.}} = \frac{g^2}{2m_W^2} \bar{u}_{eL} \gamma^\mu u_{\nu L} \cdot \bar{u}_{\nu L} \gamma_\mu u_{eL}. \quad (12.47)$$

Сравнивая формулы (12.46) и (12.47), мы получаем

$$G_F = \frac{g^2}{4\sqrt{2}m_W^2}. \quad (12.48)$$

Константа Ферми известна экспериментально. Соотношение (12.48) позволило бы нам определить массу W , если бы мы знали величину g . Но мы её пока не знаем.

Чтобы определить g , надо проанализировать часть фермионного лагранжиана (12.44), которая описывает взаимодействие фермионов с электрически нейтральными полями W_μ^3 и B_μ . Когда мы выразим эти поля через физические поля Z_μ и A_μ по схеме на рис. 12.3, мы получим следующие вклады в лагранжиан:

$$\mathcal{L}_A = g \sin \theta_W A_\mu \left[\bar{e} \gamma^\mu e - \frac{2}{3} \bar{u} \gamma^\mu u + \frac{1}{3} \bar{d} \gamma^\mu d \right] \quad (12.49)$$

(где $\bar{e}\gamma^\mu e = \bar{e}_L\gamma^\mu e_L + \bar{e}_R\gamma^\mu e_R$ и аналогично для $\bar{u}\gamma^\mu u$ и $\bar{d}\gamma^\mu d$) и

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Z = & \frac{1}{2} Z_\mu \sqrt{g^2 + g'^2} \left[\bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L - \cos 2\theta_W \bar{e}_L \gamma^\mu e_L + 2 \sin^2 \theta_W \bar{e}_R \gamma^\mu e_R + \right. \\ & + \left(1 - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W \right) \bar{u}_L \gamma^\mu u_L - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W \bar{u}_R \gamma^\mu u_R + \\ & \left. + \left(\frac{2}{3} \sin^2 \theta_W - 1 \right) \bar{d}_L \gamma^\mu d_L + \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \bar{d}_R \gamma^\mu d_R \right]. \end{aligned} \quad (12.50)$$

Выражение (12.49) описывает электромагнитные взаимодействия фермионов. Как можно было ожидать, оно зеркально симметрично. Комбинация

$$e = -g \sin \theta_W = -\frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (12.51)$$

есть не что иное, как электрический заряд электрона. Заряды кварков дробны.

Выражение (12.50) описывает взаимодействие Z со слабым нейтральным током. Последний включает ток нейтрино (в него входят только левые нейтринные поля, т. е. его структура есть $V - A$) и определённые нетривиальные линейные комбинации векторных и аксиальных электронных и кварковых токов.

Из формул (12.51), (12.48), (12.40) и из известных экспериментальных значений константы Ферми и постоянной тонкой структуры мы можем вывести красивые формулы (5.29), которые мы воспроизведём здесь:

$$\begin{aligned} m_W &= \frac{1}{\sin \theta_W} \sqrt{\frac{\pi \alpha}{G_F \sqrt{2}}} \approx \frac{37,3}{\sin \theta_W} \text{ ГэВ}, \\ m_Z &= \frac{1}{\sin \theta_W \cos \theta_W} \sqrt{\frac{\pi \alpha}{G_F \sqrt{2}}} \approx \frac{74,6}{\sin 2\theta_W} \text{ ГэВ}. \end{aligned} \quad (12.52)$$

Таким образом, теория даёт предсказания для масс промежуточных бозонов, которые зависят только от одного свободного параметра — угла Вайнберга θ_W .

Результат (12.52) получен в древесном приближении. Петлевые поправки его чуть-чуть меняют. Сравнивая эти предсказания с экспериментально известными бозонными массами (5.30), можно определить с весьма большой точностью значение угла Вайнберга. Результат был приведён в формуле (5.31).

12.4.2. Массы

Мы знаем из эксперимента, что все фундаментальные фермионы, включая нейтрино, массивны, но не сразу ясно, как описать наличие масс в рамках только что сформулированной теории. Действительно, левые и правые фермионы входят в лагранжиан совершенно независимо. Более того, они принадлежат к разным представлениям слабой группы $SU(2)$: левые фермионы — дуплеты, а правые — синглеты. Навивный массовый член типа (11.38) попросту нельзя написать — такая структура не инвариантна относительно калибровочных преобразований группы $SU(2)$.

Что можно сделать — это написать лагранжиан Юкавы, описывающий взаимодействие левого фермионного дублета, правого фермионного синглета и скалярного дублета¹:

$$\mathcal{L}_e^{\text{Юк}} = -h_e(\varphi^-, \bar{\varphi}^0)\bar{e}_R \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} + \left(\begin{array}{c} \text{комплексно-} \\ \text{сопряжённое} \end{array} \right). \quad (12.53)$$

Лагранжиан (12.53) есть синглет по $SU(2)$ и обладает также нулевым гиперзарядом. Следовательно, он калибровочно-инвариантен. Константа связи Юкавы h_e безразмерна.

Вспомним теперь, что поле φ имеет ненулевое вакуумное ожидание (12.31). Тогда главный вклад в (12.53) есть

$$\mathcal{L}_e^m = -h_e v (\bar{e}_R e_L + \bar{e}_L e_R) = -h_e v \bar{e} e. \quad (12.54)$$

Другими словами, электрон *приобретает* массу, если принять во внимание спонтанное нарушение калибровочной симметрии. Величина массы есть $m_e = h_e v$.

Может быть, читатель слышал разговоры о том, что бозон Хиггса есть «божья частица», потому что он даёт массы всем остальным частицам. Я не эксперт по теологии, и мне трудно сказать, действительно ли в намерения Создателя входило дать массы всем частицам, и если так, то почему Он оставил безмассовыми фотон и гравитон. Но одно ясно: ненулевое вакуумное ожидание входящих в теорию скалярных полей действительно служит причиной того, что бозоны

¹ Как мы знаем из § 5.3, теория Юкавы, предложенная в 1935 г., была феноменологической теорией сильного взаимодействия между нуклонами и скалярными частицами (отождествлёнными позже с π -мезонами). К электрослабой теории это вроде бы отношения не имеет. Но дело в том, что лагранжиан этого взаимодействия имеет вид $\mathcal{L}^{\text{Юк}} \propto \pi \bar{N} N$. И с тех пор любое взаимодействие вида $\varphi \bar{f} f$ (где φ, f — скалярное и фермионное поля любой природы) принято называть взаимодействием Юкавы.

W и Z , лептоны и кварки приобретают массу. С другой стороны, протоны и большинство других адронов получают массу по совершенно другому механизму (связанному с размерной трансмутацией), который мы обсуждали в предыдущей главе, посвящённой КХД.

Мы показали, как приобретает массу электрон. Сделаем это для всех остальных фермионов. Кварк d представляет, как и электрон, нижнюю компоненту изотопического дублета $SU(2)$, и структура (12.53) допускает непосредственное обобщение:

$$\mathcal{L}_d^{\text{ЮК}} = -h_d(\varphi^-, \bar{\varphi}^0)\bar{d}_R \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} + \left(\begin{array}{l} \text{комплексно-} \\ \text{сопряжённое} \end{array} \right). \quad (12.55)$$

Масса d -кварка равна $m_d = h_d v$. Для u -кварка и для нейтрино эту конструкцию надо немного модифицировать. Ключевое замечание состоит в том, что для $SU(2)$ [в отличие от $SU(N \geq 3)$] между фундаментальным и антифундаментальным представлениями *нет разницы* [см. замечание после формулы (6.48)]. В частности, дублет $\begin{pmatrix} \bar{d}_L \\ -\bar{u}_L \end{pmatrix}$ преобразуется по $SU(2)$ точно так же, как дублет $\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$. Лагранжианы

$$\mathcal{L}_u^{\text{ЮК}} = h_u(\varphi^-, \bar{\varphi}^0) \begin{pmatrix} \bar{d}_L \\ -\bar{u}_L \end{pmatrix} u_R + \left(\begin{array}{l} \text{комплексно-} \\ \text{сопряжённое} \end{array} \right) \quad (12.56)$$

и

$$\mathcal{L}_\nu^{\text{ЮК}} = h_\nu(\varphi^-, \bar{\varphi}^0) \begin{pmatrix} \bar{e}_L \\ -\bar{\nu}_L \end{pmatrix} \nu_R + \left(\begin{array}{l} \text{комплексно-} \\ \text{сопряжённое} \end{array} \right) \quad (12.57)$$

являются поэтому групповыми синглетами и калибровочными инвариантами. Они дают массу верхним компонентам дублетов: $m_u = h_u v$ и $m_\nu = h_\nu v$.

Необходимо здесь сделать важную оговорку. Мы вполне уверены, что u -кварк приобретает массу по только что описанному механизму. Другого способа просто нет. Но для нейтрино существует и другая возможность. Как было сказано, правые нейтрино не взаимодействуют с калибровочными бозонами. Следовательно, они не несут никакого заряда — они абсолютно нейтральны. А тогда возможно придать им массу по совершенно другому *майорановскому* механизму [см. обсуждение в главе 9 после формулы (9.39)]. Если бы мы этим ограничились и постулировали бы, что юкавские константы h_ν (их три, ввиду наличия трёх поколений) равны нулю, то правые нейтрино были бы абсолютно стерильными частицами и левые нейтрино остались бы безмассовыми. Но из эксперимента (по

осцилляциям нейтрино — см. § 12.6) мы знаем, что это не так. Значит, мы *обязаны* постулировать ненулевые h_ν . Ничто, однако, не запрещает присутствие *дополнительного* майорановского массового члена для ν_R . Поэтому вполне возможно, что масса правых нейтрино имеет смешанную хиггсово-майорановскую природу.

12.4.3. Поколения и их смешивание

Давайте вспомним теперь про наличие двух остальных поколений. Как мы уже упоминали в начале главы, поколения смешиваются. Бозон W^+ взаимодействует не просто с током $\bar{\nu}_{eL}\gamma_\mu e_L + \bar{u}_L\gamma_\mu d_L$, как в формуле (12.45) (мы восстановили здесь обозначение ν_{eL}), но с током

$$j_\mu^{+(q)} = \bar{\nu}'_{eL}\gamma_\mu e_L + \bar{u}'_L\gamma_\mu d_L + \bar{\nu}'_{\mu L}\gamma_\mu \mu_L + \bar{c}'_L\gamma_\mu s_L + \bar{\nu}'_{\tau L}\gamma_\mu \tau_L + \bar{t}'_L\gamma_\mu b_L, \quad (12.58)$$

где u'_L, c'_L и t'_L связаны с u_L, c_L и t_L матрицей смешивания CKM и $\nu'_{eL}, \nu'_{\mu L}$ и $\nu'_{\tau L}$ связаны с $\nu_{eL}, \nu_{\mu L}$ и $\nu_{\tau L}$ лептонным аналогом матрицы CKM — матрицей $PMNS$ (не имеющей ничего общего с кварковой).

«Но почему нельзя просто переопределить поля и назвать комбинацию u'_L левым u -кварковым полем, комбинацию ν'_L — полем левого электронного нейтрино и т.д.?» — может спросить здесь наш въедливый читатель. Читатель здесь в общем прав (как он был прав во многих подобных случаях и раньше). Действительно, можно так переопределить фермионные поля (мы это фактически и сделаем при обсуждении нейтринных осцилляций в § 12.6), и если бы фермионы были *безмассовыми*, то такие «штрихованные» состояния составляли бы в гильбертовом пространстве ничуть не худший базис, чем исходный.

Но фермионы массивны. Как мы только что узнали, массы генерируются нетривиальным взаимодействием Юкавы, как в формуле (12.53) и т.д. И важно то, что фермионные поля, фигурирующие в калибровочной части лагранжиана и поля в юкавской части лагранжиана, не одни и те же: «юкавские» и «калибровочные» кварковые поля повернуты относительно друг друга, и то же касается лептонных полей. Обычно удобнее выражать лагранжиан через «юкавские» базисные поля. Когда мы учитываем эффекты, связанные с ненулевым вакуумным средним поля φ , эти поля описывают частицы с определёнными массами — собственные состояния гамильтониана.

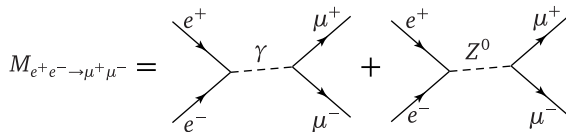
Связанный вопрос, который можно задать, — почему мы обсуждаем только повороты и смешивание левых фермионных полей, но не обсуждаем смешивание правых полей. Ответ состоит в том, что правые поля не взаимодействуют с $W^\pm$ и не участвуют поэтому в калибровочных взаимодействиях с изменением аромата. А электромагнитный лагранжиан и лагранжиан, включающий слабые нейтральные токи, инвариантны относительно ароматных вращений правых фермионных полей. В этом случае можно сделать то, что нельзя было сделать в левом секторе, — переопределить поля и свести матрицы смешивания к единичным.

12.5. Новая территория зоопарка

Лично я впервые узнал о существовании единой теории слабых и электромагнитных взаимодействий в 1972 г. или, быть может, в 1973 г. из популярной лекции Льва Борисовича Окуня в московском Политехническом музее. Он сказал тогда, что к электромагнитным процессам всегда примешиваются слабые. При малых энергиях эффекты слабых взаимодействий (такие как несохранение чётности) слабы, но их величина растёт с энергией, и при энергии несколько десятков ГэВ они становятся стопроцентно существенны. В то время эта область энергий была ещё не исследована, и Окунь сказал, что, когда мы её достигнем, мы попадём в новый удивительный мир, не похожий на привычный нам.

Мы там живём по крайней мере с 1983 г., когда в ЦЕРНе были экспериментально открыты бозоны $W^\pm$ и Z . Расскажем немного об этом новом мире — о том, как выглядят звери, живущие в высокоэнергетичных вольерах электрослабого зоопарка.

Одна из моих первых научных статей была посвящена эффектам слабого взаимодействия в электронно-позитронной аннигиляции. Рассмотрим процесс $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$. При малых энергиях это электромагнитный процесс, описываемый диаграммой, изображённой на рис. 5.4 с образованием и последующим распадом виртуального фотона. Соответствующая амплитуда пропорциональна e^2 . Но даёт вклад также другая диаграмма, где вместо виртуального фотона фигурирует виртуальный Z -бозон (см. рис. 12.5). Этот вклад содержит фактор $\sim g^2 E^2 / (m_Z^2 - E^2)$, где E — полная энергия сталкивающихся электрона и позитрона в системе центра масс. Начиная примерно с $E \gtrsim 40$ ГэВ эти два вклада — одного порядка.

Рис. 12.5. Рассеяние $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ в электрослабой теории

Наблюдается следующее.

- Дифференциальное сечение больше не даётся формулой (5.7) и не симметрично относительно замены $\theta \rightarrow -\theta$ (относительно отражения в зеркале, поставленном перпендикулярно сталкивающимся пучкам): рождённые отрицательные мюоны предпочитают лететь вдоль направления *позитронного* пучка.
- У мюонов появляется поляризация, даже если начальные электрон и позитрон были неполяризованными.

Похожие эффекты имеют место, когда вместо пары $\mu^+\mu^-$ рождается пара *адронных струй*. Это было предметом моей собственной статьи.

Как было сказано, $W^\pm$ и Z впервые наблюдались в 1983 г. в ЦЕРНе. Эксперимент проводился на ускорителе протонов SPS^1 . Исследовались процессы

$$\begin{aligned} pp &\rightarrow W^\pm + \text{адроны}, \\ pp &\rightarrow Z + \text{адроны}. \end{aligned} \quad (12.59)$$

Рождённый бозон Z может распасться далее в пару e^+e^- или $\mu^+\mu^-$ (эти каналы распада наблюдать особенно просто). Бозон W может распасться на заряженный лептон и нейтрино. Как W , так и Z могут также родить пару кварковых струй (соответствующие глубинные процессы: $Z \rightarrow \bar{u}u$, $W^- \rightarrow \bar{u}d$ и т. д.).

Несколько позже бозон Z наблюдался на встречных электронно-позитронных пучках в процессе

$$e^+e^- \rightarrow Z \rightarrow \text{всё, что угодно} \quad (12.60)$$

как прекрасный резонанс. В отличие от резонанса J/ψ , обсуждавшегося в предыдущей главе, резонанс Z довольно широк — его ширина составляет $\Gamma_Z \approx 2,5$ ГэВ (а ширина W есть $\Gamma_W \approx 2,1$ ГэВ). Эти

¹SPS означает *Super Proton Synchrotron*. Он ускоряет протоны до энергии ~ 450 ГэВ. На нём не проводятся больше физические исследования, но он продолжает сейчас работать как инжектор для Большого адронного коллайдера.

ширины на порядок превышают характерные ширины обычных адронных резонансов типа Δ или ρ ¹.

Один из возможных каналов распада Z — распад в пару нейтрино: $Z \rightarrow \bar{\nu}_e \nu_e, \bar{\nu}_\mu \nu_\mu, \bar{\nu}_\tau \nu_\tau$. Рождѐнные нейтрино экспериментально не регистрируются, но парциальные ширины этих распадов

$$\Gamma(Z \rightarrow \bar{\nu}_e \nu_e) = \Gamma(Z \rightarrow \bar{\nu}_\mu \nu_\mu) = \Gamma(Z \rightarrow \bar{\nu}_\tau \nu_\tau) \approx \frac{G_F m_Z^3}{12\sqrt{2}\pi} \approx 170 \text{ МэВ} \quad (12.61)$$

дают вклад в полную измеряемую ширину. Экспериментальный результат совпадает с теоретическим предсказанием, что означает наличие только трёх типов лёгких нейтрино. А это значит, что в природе существуют только три фермионных поколения, не больше².

Привилегированный VIP-вольер в нашем зоопарке приготовлен для бозона Хиггса. Его масса велика,

$$m_H \approx 125 \text{ ГэВ}, \quad (12.62)$$

зарегистрировать его рождение трудно, и долгое время он играл с физиками в прятки. Он был экспериментально обнаружен только в 2012 году, через 45 лет после того, как его существование было предсказано. Насколько я понимаю, в истории физики частиц это второй по продолжительности интервал времени между предсказанием и открытием. (Лавровый венок в этом конкурсе, безусловно, принадлежит гравитону. Гравитационные волны были экспериментально открыты только в 2016 г., через сто лет после того, как их существование было предсказано Эйнштейном. Мы расскажем об этом открытии в главе 15.)

Нейтральное хиггсовское поле $H(x)$ описывает флуктуации абсолютной величины скалярного поля $|\varphi|$ вокруг его вакуумного значения v . Как следует из формулы (12.53) и т.д., это поле взаимодействует с фермионами. Сила этого взаимодействия определяется юкавскими константами h_f . Они пропорциональны фермионным массам. Или, скорее, массы пропорциональны h_f [см. фор-

¹ «Как же так? — можете спросить вы, — сильные взаимодействия сильнее электрослабых, и сильные ширины (вероятности распада) должны быть больше электрослабых!»

Но всё постигается в сравнении. В нашем случае — в сравнении с массами резонансов. Массы W и Z намного больше характерных адронных масс, и отношения Γ_W/m_W и Γ_Z/m_Z малы. Согласно теории, эти отношения имеют порядок $G_F m_{W,Z}^2$.

² Почему их ровно три, а не одно и не семь, мы сегодня не понимаем.

мулу (12.54)]. В любом случае бозон Хиггса сильнее цепляется за тяжёлые кварки (и также за тяжёлые лептоны, но кварки тяжелее!).

Первое, что приходит в голову, — это искать бозон Хиггса по его распадам в тяжёлые кварк-антикварковые пары. Однако для самого тяжёлого t -кварка с массой $m_t \approx 170$ ГэВ это невозможно — бозон Хиггса весит меньше чем 340 ГэВ (между прочим, физики это знали и до его открытия, ориентируясь на некоторые косвенные теоретические соображения). Следующая возможность — это распад $H \rightarrow \bar{b}b$ с рождением пары кварковых струй. Действительно, примерно в половине случаев бозон Хиггса распадается по такому каналу. Но этот распад неудобно исследовать экспериментально ввиду очень большого фона — имеется множество процессов, где пара кварковых струй рождается по совсем другому механизму.

Намного более чистый сигнал даёт распад на два фотона. В амплитуду этого процесса дают вклад диаграммы, изображённые на рис. 12.6. Это не древесные диаграммы (лагранжиан Стандартной модели не содержит вершины $H\gamma\gamma$), но диаграммы, включающие петлю W -бозонов или t -кварков. Другой удобный канал, описываемый похожими диаграммами, есть $H \rightarrow 2Z$, где каждый виртуальный¹ Z распадается, в свою очередь, на пару e^+e^- или $\mu^+\mu^-$. Экспериментаторы ищут пик в распределении по инвариантным массам двух фотонов или четырёх заряженных лептонов.

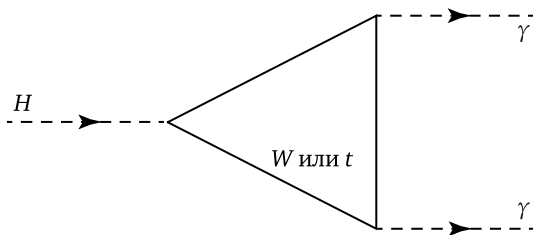


Рис. 12.6. Процесс $H \rightarrow \gamma\gamma$

Несмотря на то что фон в процессах $H \rightarrow 2\gamma$ и $H \rightarrow 2Z \rightarrow l^+l^-l^+l^-$ меньше, чем в других каналах, это всё же весьма сложный эксперимент, намного сложнее, чем, например, эксперимент, в котором был открыт J/ψ . Открытие бозона Хиггса — это результат совместных усилий многих тысяч людей.

¹Масса бозона H ниже порога рождения двух реальных Z -бозонов.

Я вовсе не преувеличиваю. Прежде всего, необходимо было построить главный Прибор — Большой адронный коллайдер. Основные детекторы, ATLAS и CMS, — тоже очень большие (многие метры, больше, чем некоторые заводы) и сложные физические устройства. Коллаборация ATLAS насчитывает около 2900 сотрудников, коллаборация CMS — около 3800 сотрудников. Все члены данной коллаборации — соавторы публикуемых ею статей. Их имена перечисляются в журналах, и это перечисление занимает иногда больше места, чем сама статья.

Очень много перемен произошло с того времени, когда физики делали первые шаги в новом удивительном мире элементарных частиц и необходимом для эксперимента оборудовании помещалось на одном лабораторном столе. Так в 1897 г. была открыта Джозефом Томпсоном первая элементарная частица, электрон...

Продолжим разговор о фоне. Он присутствует также в обоих «золотых» каналах, $H \rightarrow 2\gamma$ и $H \rightarrow l^+l^-l^+l^-$, и этот фон весьма и весьма существен. Чтобы дать читателю некоторое представление о том, как сегодня работают экспериментаторы, я воспроизвёл на рис. 12.7 график, взятый с сайта коллаборации ATLAS, где приведены оригинальные экспериментальные данные и показано, как они обрабатывались¹.

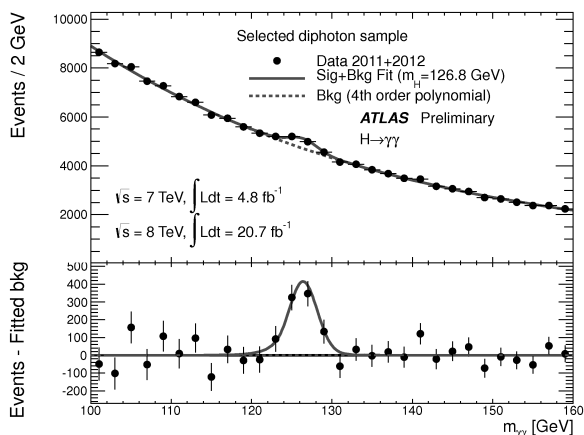


Рис. 12.7. Распределение по инвариантным массам двух фотонов, измеренное коллаборацией ATLAS

¹ ATLAS Experiment © 2012 CERN (License: CC-BY-SA-4.0).

Дадим некоторые пояснения.

- На этом графике сведены данные, набранные при полных энергиях сталкивающихся протонов $\sqrt{s} = 7$ ТэВ и $\sqrt{s} = 8$ ТэВ в системе центра. $\int L dt$ есть так называемая *интегральная светимость* — число проанализированных событий пропорционально этой величине.
- Верхний график показывает исходные экспериментальные данные. Пунктирная линия — это гладкая экстраполяция фона (*Bkg*, сокращение от background). В районе $m_{2\gamma} \sim 127$ ГэВ число событий превышает фон, что говорит о рождении резонанса. Сплошная линия — это подгонка, проведённая по экспериментальным точкам. Она включает и сигнал (*Sig*), и фон (*Bkg*).
- На нижнем графике гладкий фон был вычтен.
- Читатель может сравнить этот график с гистограммой, изображённой на рис. 11.4, показывающей присутствие мощного резонанса J/ψ в эксперименте Тинга, и почувствовать разницу. В этом тысячелетии жизнь намного сложнее, чем в прошлом, но учёные стараются, насколько они могут, с этими сложностями справляться и продолжать делать замечательные открытия.

12.6. Осцилляции нейтрино

Звёзды, в том числе наше Солнце, горят благодаря реакциям ядерного синтеза. Главное звёздное топливо — водород, фактически — протоны. Сжатые гравитацией и разогретые уравнением Менделеева—Клапейрона, протоны сталкиваются друг с другом. Столкновения эти неупруги, и в результате цепочки ядерных реакций образуются в конечном счёте ядра¹ ${}^4\text{He}$.

На промежуточном этапе рождаются ядра дейтерия. Главный источник солнечной энергии — это реакция

$$p + p \rightarrow d + e^+ + \nu_e + 0,42 \text{ МэВ.} \quad (12.63)$$

В каждой такой реакции рождается также электронное нейтрино. Ввиду чрезвычайно малого сечения оно, не рассеиваясь, вылетает из Солнца наружу. Поток нейтрино встречает Землю на своём пути. Подавляющее большинство нейтрино пролетает насквозь без взаи-

¹ Затем гелий может, в свою очередь, начать гореть, но в Солнце на нынешней стадии его эволюции этого не происходит.

модействия¹, но малая их доля испытывает рассеяние. Это можно наблюдать. Зная из теории сечение рассеяния, можно измерить поток солнечных нейтрино.

Я только что описал схему так называемого *Хоумстейкского эксперимента*, осуществлённого группой Раймонда Дэвиса. Чтобы избавиться от фона, связанного с обычными космическими лучами, Дэвис поместил резервуар жидкости (тетрахлорэтилена) на полутоннокилометровой глубине в подземном золотом руднике *Хоумстейк* в Южной Дакоте. В жидкости было много атомов хлора. Солнечные нейтрино возбуждали реакцию



Дэвис измерил скорость этой реакции, определил нейтринный поток, и результат его озадачил: поток был по меньшей мере в два (а то и три) раза меньше теоретических предсказаний.

Загадка разрешается, если принять во внимание эффект нейтринных осцилляций. Имеется три фермионных поколения и три типа нейтрино, но намного проще понять суть эффекта, приняв во внимание наличие всего двух типов — электронного и мюонного. В этом случае есть всего один угол смешивания, аналог угла Каббиро, который можно назвать *углом Понтекорво*² θ_P .

Нам удобно будет сейчас немного изменить обозначения по сравнению с (12.58) и определить *нестрихованное* электронное нейтрино ν_e как состояние, рождённое в недрах Солнца вместе с позитроном в реакции (12.63). Аналогично, состояние, рождённое мюоном в реакции наподобие $\mu^- p \rightarrow \nu_\mu n$, мы будем здесь называть мюонным нейтрино ν_μ .

Ключевое наблюдение состоит в том, что ни $|\nu_e\rangle$, ни $|\nu_\mu\rangle$ не являются априори собственными состояниями гамильтониана. Собственные состояния (назовём их $|\nu_1\rangle$ и $|\nu_2\rangle$), имеющие определённые массы m_1 и m_2 , могут представлять собой линейные комбинации $|\nu_e\rangle$ и $|\nu_\mu\rangle$. Соответственно,

$$\begin{aligned} |\nu_e\rangle &= \cos \theta_P |\nu_1\rangle + \sin \theta_P |\nu_2\rangle, \\ |\nu_\mu\rangle &= -\sin \theta_P |\nu_1\rangle + \cos \theta_P |\nu_2\rangle. \end{aligned} \quad (12.65)$$

¹ Сечение рассеяния нейтрино с энергией $E \sim 1$ МэВ в обычном веществе имеет порядок $\sigma \sim 10^{-44}$ см². Соответствующая длина свободного пробега есть $\lambda \sim 1/(n\sigma)$, где n — плотность вещества. Она оценивается как $\lambda \sim 10^{20}$ см ≈ 100 световых лет.

² Бруно Понтекорво, итальянский теоретик, который прожил вторую половину своей жизни в Советском Союзе, предсказал это явление в далёком 1957 году.

Итак, в момент $t = 0$ в реакции (12.63) родилось состояние $|\nu_e\rangle$, представляющее собой суперпозицию диагональных состояний $|\nu_1\rangle$ и $|\nu_2\rangle$. Что произойдёт дальше? Нейтрино, очевидно, начнут двигаться. Для строгого анализа надо рассмотреть эволюцию локализованных волновых пакетов полей ν_1 и ν_2 . (В момент рождения они имеют одинаковую форму, но потом распространяются по-разному, описываемые свободными дираковскими гамильтонианами с немного разными массами.) Чтобы получить правильный результат, достаточно, однако, посмотреть на асимптотические плосковолновые решения:

$$\begin{aligned} |\nu_1\rangle(\mathbf{x}, t) &= e^{i(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x} - E_1 t)} |\nu_1(0)\rangle, \\ |\nu_2\rangle(\mathbf{x}, t) &= e^{i(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{x} - E_2 t)} |\nu_2(0)\rangle. \end{aligned} \quad (12.66)$$

Можно положить здесь всюду $\mathbf{x} = (L, 0, 0)$, $t = L$, но принять во внимание законы дисперсии $E_{1,2} - |\mathbf{p}_{1,2}| \approx m_{1,2}^2/(2E)$. (Мы предположили, что $m_{1,2} \ll E$. Для солнечных нейтрино это экспериментальный факт.)

Так или иначе, фазовые факторы для $|\nu_1\rangle$ и $|\nu_2\rangle$ оказываются *различными*. Если массы двух нейтрино близки, расхождение между фазами мало на малых временах и расстояниях, но, когда время путешествия нейтрино и покрытое ими расстояние растут, то расхождение становится существенным. В результате электронное нейтрино, рождённое в момент $t = 0$, переходит при конечном t в состояние, которое не есть больше чистое состояние $|\nu_e\rangle$, но имеет ненулевую проекцию на $|\nu_\mu\rangle$. Мюонные нейтрино, которых не было в момент рождения, выскакивают по прошествии некоторого времени, как кролики из шляпы фокусника!

Вычислим вероятность того, что нейтрино, пролетевшее расстояние L , сохранит свою электронную природу. Нетрудно получить

$$\begin{aligned} P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(L) &= \\ &= \left| \cos \theta_p \nu_1(0) + \sin \theta_p \nu_2(0) \mid \cos \theta_p \nu_1(L) + \sin \theta_p \nu_2(L) \right|^2 = \\ &= 1 - \sin^2(2\theta_p) \sin^2\left(\frac{\Delta m^2 L}{4E}\right), \end{aligned} \quad (12.67)$$

где $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$. Эта вероятность осциллирует с L , как показано на рис. 12.8. Если период этих осцилляций намного меньше, чем годичная вариация расстояния между Землёй и Солнцем, и угол Понтекорво близок к 45° , так что амплитуда осцилляций на рис. 12.8 близка к максимально возможной (оба условия экспериментально

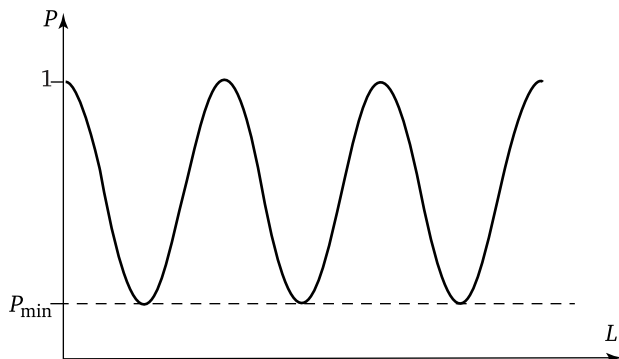


Рис. 12.8. Осцилляции в вероятности, что электронное нейтрино сохранит свою природу. Нижний предел есть $P_{\min} = \cos^2 2\theta_P$.

выполняются), то в среднем только около половины нейтрино, достигших Земли, сохранят свою электронную природу и смогут родить электрон в реакции¹ (12.64). И это буквально то, что Дэвис увидел на своей установке!

Надо сказать, что в течение длительного времени (а первые данные на установке в руднике Хоумстейк были получены в конце 1960-х гг.), результаты Дэвиса встречались научной общественностью со скептицизмом. Никто не понимал, почему поток нейтрино был таким низким, и возникало подозрение в ошибке. Часто такой скепсис вполне оправдан — неправильные эксперименты были, есть и будут; *errare humanum est*. Но не в этом случае. Хоумстейкский эксперимент был абсолютно правильным. В 2002 г., после того как его результаты были подтверждены в независимом эксперименте, Дэвису была присуждена Нобелевская премия.

Позже осцилляции нейтрино были обнаружены и в других физических ситуациях. Их увидели в реакторных и ускорительных экспериментах (где расстояния между источником нейтрино и детектором варьировались от десятков метров до сотен километров). Следует также упомянуть важный эксперимент *Супер-Камиоканде*, где были обнаружены осцилляции атмосферных нейтрино. Атмосферные нейтрино — это мюонные нейтрино, рождённые в верхних сло-

¹ Наши кролики, мюонные нейтрино, появившиеся в результате осцилляции, способны родить только мюоны. Они были бы рады это сделать, но им для этого не хватает энергии.

ях атмосферы космическими лучами. И было обнаружено, что часть этих нейтрино «исчезает» на пути к земным детекторам. Разумеется, на самом деле они не исчезают, а превращаются в ν_τ , которые не регистрируются. Эти новые эксперименты были отмечены Нобелевской премией в 2015 г.

Совместный анализ результатов всех этих экспериментов показывает, что массы различных типов нейтрино очень близки друг к другу:

$$\begin{aligned} |m_2^2 - m_1^2| &\approx 7,5 \cdot 10^{-5} \text{ эВ}^2, \\ |m_3^2 - m_1^2| &\approx |m_3^2 - m_2^2| \approx 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2. \end{aligned} \quad (12.68)$$

В осцилляционных экспериментах измеряются не сами массы, а только их разности. Поэтому значения масс пока точно не известны. С другой стороны, совсем другие астрофизические аргументы дают следующий верхний предел для суммы масс всех типов нейтрино:

$$m_1 + m_2 + m_3 \lesssim 0,12 \text{ эВ}. \quad (12.69)$$

12.7. Парадоксы и фокусы Стандартной модели. Их возможное разоблачение

12.7.1. Парадоксы

Дочитав книгу до этого места, читатель получил общее представление о Стандартной модели сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий — на каких теоретических принципах она основана и какие наблюдаемые явления она описывает. Но могу ли я вас спросить: *Нравится ли вам эта теория?*

Прошу меня извинить, но если вы ответите на этот вопрос положительно, то я позволю себе усомниться в вашей честности. Величественная Стандартная модель *слишком сложна*, чтобы казаться красивой и привлекательной. Она включает множество параметров, происхождение и смысл которых темны. На сегодняшнем уровне понимания это просто данные Богом числа. Полное число параметров составляет как минимум 26.

А именно: имеется 12 юкавских констант h_e, h_u и т. д., 4 параметра в кварковой матрице смешивания CKM, ещё 4 параметра в лептонной матрице смешивания PMNS, константы g и g' , скалярное вакуумное ожидание v и константа хиггсовского самодействия λ .

В секторе КХД у нас есть параметр $\Lambda_{\text{КХД}}$ и дополнительный параметр¹ $\theta_{\text{КХД}}$.

Это даёт 26 параметров. В дополнение, у правых нейтрино могут присутствовать майорановские массы, о которых мы не знаем ровным счётом ничего.

Но кроме того, что Стандартная модель сложна и не очень эстетична (а всё красивое просто!), она содержит некоторые логические противоречия. Быть может, самая жгучая проблема — это масса бозона Хиггса. На древесном уровне она даётся соотношением (12.27), но если мы попытаемся посчитать однопетлевую поправку к массе и нарисуем график наподобие представленного на рис. 12.9, мы обнаружим, что эта поправка содержит квадратичную ультрафиолетовую расходимость:

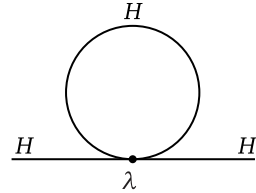


Рис. 12.9. Расходящийся вклад в массу бозона Хиггса

$$\Delta m_H^2 \sim \lambda \int \frac{d^4 p}{p^2} \sim \lambda \Lambda_{UV}^2. \quad (12.70)$$

Эта расходимость не сокращается другими подобными квадратично расходящимися однопетлевыми графиками.

Наша теория перенормируема. Это значит, что можно в принципе *поглотить* эту расходимость, подгоняя коэффициенты фундаментального лагранжиана. Иначе говоря, можно добавить в затраченный лагранжиан (стартовая точка любого теоретико-полевого обсуждения) квадратично расходящийся массовый член $\propto \Lambda_{UV}^2 \varphi^* \varphi$, который сократится с петлевым вкладом. Что ж, так действительно можно поступить и избавиться от расходимостей во всех пертурбативных вычислениях. Но согласитесь: эта процедура выглядит достаточно неестественной и уродливой.

Имеется связанная проблема. Лагранжиан Стандартной модели включает абелев калибровочный сектор с константой связи g' (а также сектор Хиггса с константой связи λ , и сектор Юкавы с константами h_e и т. д.). Все эти константы растут с ростом энергии. Как говорилось в главе 5 и в конце главы 8, подобные теории внутренне

¹ Это так называемый вакуумный угол КХД — константа при возможной структуре $\sim \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} G_{\mu\nu}^a G_{\alpha\beta}^a$ в лагранжиане КХД. Мы не обсуждали её раньше и не будем обсуждать в дальнейшем. Экспериментально установлено, что $\theta_{\text{КХД}}$ очень близок к нулю (известен только верхний предел $\theta_{\text{КХД}} \lesssim 10^{-10}$). Никто не понимает почему.

не самосогласованы — их можно анализировать только пертурбативно при не очень высоких энергиях (пока не чувствуется полюс Ландау), в то время как непертурбативное определение таких теорий отсутствует: континуальный предел решёточного функционального интеграла не определён.

12.7.2. Суперсимметрия и Великое объединение

Чтобы разрешить эти парадоксы, мы должны выйти за рамки Стандартной модели. Эффективный способ побороть квадратичные расходимости в массе бозона Хиггса — это предположить, что фундаментальная теория суперсимметрична и что у каждого поля имеется суперпартнёр той же массы: фермионный суперпартнёр у бозонного поля и бозонный суперпартнёр у фермионного. В частности, помимо фотона, суперсимметричная теория должна содержать *фотино* (представляющее безмассовый нейтральный фермион). Помимо кварков должны существовать скалярные кварки и т. п.

Но мир, который мы видим вокруг, не выглядит суперсимметричным. Симметрия между бозонами и фермионами в нём отсутствует. В нём нет безмассовых фотино. Скалярные кварки, если они существуют, имеют массы, намного бóльшие масс их кварковых партнёров. Это означает, что суперсимметрия, если она присутствует в фундаментальной теории, должна быть *нарушена*, так что массы суперпартнёров составляют по крайней мере несколько сот ГэВ, а может быть, и больше.

Но если суперсимметрия не видна на опыте, зачем мы её вообще обсуждаем? Нет ли здесь противоречия с бритвой Оккама: не вводите новых сущностей сверх необходимого?

На этот вопрос можно дать по крайней мере три ответа.

- Бритва бритвой, но идея суперсимметрии — это действительно очень красивая идея. Я постараюсь убедить вас в этом в главе 14, когда подам к столу один из приготовленных для этой книги десертов.
- Суперсимметрия убивает квадратичные расходимости в массе бозона Хиггса, упомянутые нами раньше. Расходящийся вклад графика на рис. 12.9 сокращается графиком, включающим петлю хиггсина¹. Расходимость графиков, включающих кварковые петли, сокращается с графиками, содержащими петли скалярных кварков, и т. д.

¹ Хиггсина — суперпартнёр хиггсовской частицы.

- Суперсимметрия помогает также решить вторую упомянутую выше проблему — проблему роста абелевой калибровочной константы.

Обсудим последний пункт более детально. Популярный способ прекратить этот рост — предположить, что как сильное, так и слабое и электромагнитное взаимодействия происходят из некоего *единого* источника — взаимодействия, которое проявляется при очень больших энергиях. Мы не видим этого единого взаимодействия при энергиях, доступных для изучения на ускорителях, ввиду того что большая калибровочная симметрия, на которой основана единая теория, спонтанно нарушена на очень большой энергетической шкале. Предполагается, что эта большая симметрия нарушается по хиггсовскому механизму, похожему на тот, по которому глубинная симметрия $SU(2) \times U(1)$ Стандартной модели нарушается до электромагнитной симметрии $U(1)$.

Эта гипотеза (*Великого объединения*) подтверждается следующим наблюдением. Как было сказано, g' растёт с энергией. Но неабелевы константы $g_{su(2)}$ и сильная константа связи $g_{su(3)}$ падают с энергией вследствие асимптотической свободы. Зависимость от энергии трёх разных констант связи показана¹ на рис. 12.10.

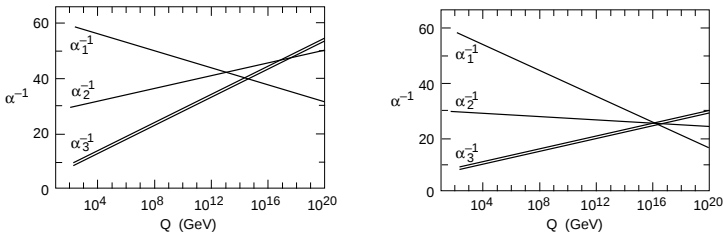


Рис. 12.10. Бегущие константы

Мы приглашаем сейчас читателя закрыть правый глаз и посмотреть сначала на левый график. Он показывает зависимость эффективных констант

$$\alpha_1^{-1} = \frac{4\pi}{g^2}, \quad \alpha_2^{-1} = \frac{4\pi}{g^2}, \quad \alpha_3^{-1} = \frac{4\pi}{g_{\text{КХД}}^2} \quad (12.71)$$

от логарифма характерной энергии Q в Стандартной модели².

¹ Взято из [М. Peskin, hep-ph/9705479].

² Отложены не сами константы, а обратные величины, потому что зависимости α^{-1} от $\ln Q$ очень просты — в однопетлевом приближении это просто линейные функции [см. формулы (11.22) и (5.13)].

Мы видим, что значения трёх констант, совершенно различные при $Q \sim 100$ ГэВ, приближаются друг к другу по мере роста энергии и становятся *приблизительно* равными при $Q \sim 10^{15}$ ГэВ. Эта очень большая (как было обещано) энергия даёт характерную шкалу Великого объединения.

Мы можем предположить, что теория Великого объединения основана на большой калибровочной группе G с подгруппой $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Минимальная возможность: $G = SU(5)$. Такая теория должна включать большое число калибровочных бозонов — по крайней мере 24, как в случае $SU(5)$. Когда G разрушается хиггсовским механизмом до $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, калибровочные бозоны, соответствующие генераторам ненарушенной группы (глюоны, W и B), остаются безмассовыми, в то время как остальные бозоны (назовём их X -бозонами) приобретают большие массы порядка¹ 10^{15} ГэВ.

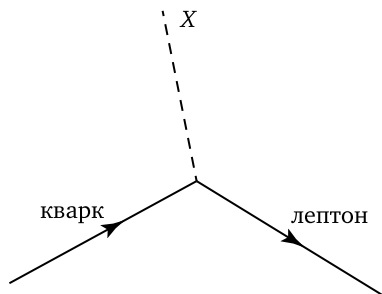


Рис. 12.11. Кварково-лептонный переход

Взаимодействие с X -бозонами переводит кварки в лептоны и обратно (см. рис. 12.11). Это, в частности, значит, что протон становится нестабильным. Он может распасться на $\pi^0 e^+$ или $\pi^+ \bar{\nu}_e$. Однако, так как масса «слонов» очень велика, вероятность распада протона очень мала.

Но всё познаётся в сравнении. Можно оценить эту вероятность и прийти к заключению, что минимальная несуперсимметричная модель Великого объединения с $G = SU(5)$ противоречит эксперименту! Время жизни протона оценивается в этой модели на уровне $\tau_p \sim 10^{28}$ лет, в то время как экспериментальный предел сегодня со-

¹ Поэтому в русском научном жаргоне для X -бозонов укоренилось имя «слоны» — они очень тяжёлые и «ходят по диагонали».

ставляет $\tau_p > 10^{34}$ лет. Варианты с другими группами G не спасают ситуацию. Они все предсказывают очень большое, но всё же недостаточно большое время жизни протона. Кроме того, три линии на левом графике не пересекаются в *точно* той же точке, как предсказывает теория Великого объединения. Мы должны заключить, что, несмотря на многие свои привлекательные черты, несуперсимметричные модели Великого объединения не описывают наш мир.

Теперь можно разрешить читателю открыть правый глаз и взглянуть на правый график на рис. 12.10. Он увидит, что в минимальном суперсимметричном обобщении Стандартной модели бег констант немного модифицируется, так что линии пересекаются в одной точке! Эта точка отстоит немного дальше на шкале энергий, чем в несуперсимметричных моделях:

$$M_{\text{суперсим. объединение}} \approx 10^{16} \text{ ГэВ.} \quad (12.72)$$

Большая шкала объединения означает большие массы X -бозонов. По этой и по некоторым другим причинам вероятность распада протона довольно сильно подавлена по сравнению с несуперсимметричным случаем, и с экспериментом противоречия больше нет!

Учёные справедливо расценивают три обстоятельства:

(а) тот факт, что суперсимметрия убивает квадратичные расходимости в массе бозона Хиггса,

(б) точное равенство трёх констант связи на масштабе объединения,

(в) возможность для протона жить достаточно долго, чтобы не расстроить экспериментаторов

— как сильное указание на то, что при больших энергиях (и на малых расстояниях) наш мир суперсимметричен.

Однако суперсимметрия не позволяет уменьшить число свободных параметров в теории и сделать её эстетически более привлекательной. Наоборот. Суперсимметричные модели включают дополнительные поля и частицы, мы не знаем, на какой шкале суперсимметрия нарушается, и т. п. В результате теория включает по крайней мере сотню *новых* параметров. Такое положение, конечно, никак нельзя назвать удовлетворительным.

Но мы достигли на этой странице книги границы наших знаний и можем вместе с читателем только строить догадки о том, что происходит за ней.

ЧАСТЬ VI

Нормандская пауза

Глава 13

Рассказы о физиках

Когда я только начинал писать эту книгу, я рассказал о своих планах одному из своих французских коллег. Я перечислил будущие части: «Закуски», «Первые» и «Вторые блюда», «Десерт»... и тут он перебил меня: «А как насчёт *Trou Normand* — *Нормандской паузы?*»¹ Я сразу понял, что это великолепная идея. Предыдущие главы были наполнены весьма нетривиальной и высококалорийной научной информацией. Усвоить всё это было непросто. Читатель нуждается в отдыхе...

Так что я на некоторое время перестану говорить о физике и писать формулы, а расскажу вместо этого несколько историй о людях, впервые их написавших, о некоторых физиках прошлого столетия, сформировавших наше сегодняшнее понимание природы фундаментальных взаимодействий, которое я попытался вам в этой книге передать. Разумеется, абсолютно невозможно писать о сотнях и тысячах учёных, сделавших важные открытия. Я должен был сделать выбор, и этот выбор не мог не быть субъективным.

13.1. Ричард Фейнман

Если вы попросите меня назвать физика, внёсшего в развитие квантовой теории поля наибольший вклад, то я затруднюсь с ответом — над построением теории фундаментальных взаимодействий работало много блестящих теоретиков, и Стандартная модель — это плод их коллективного труда. Но если вы будете настаивать, я, пожалуй, назову Фейнмана.

Наиболее известное его достижение — это разработка очень удобного языка — языка фейнмановских диаграмм, на котором сегодня разговаривают физики. Этот язык кардинально упростил вычисления в КТП (которые приводили до этого теоретиков в трепет) и поз-

¹ Как я уже сказал во введении, так называется в праздничном французском обеде бокал кальвадоса, который подаётся после того, как пирующий уже справился с основными блюдами, чтобы помочь ему переварить поглощённое и морально подготовить его к потреблению десерта.

волил их проводить быстро, эффективно и наглядно. Перечитайте длинную цитату из его Нобелевской лекции на с. 83!

Но Фейнман сделал и многое другое, в частности следующее.

1) Он был одним из тех, кто установил структуру $V - A$ заряженного лептонного тока (это объяснялось в главе 12).

2) Он ввёл понятие интеграла по траекториям в квантовой механике и квантовой теории поля. Мы рассказали об этом в § 8.3.

3) Он предпринял первые попытки вычислений петлевых графиков в неабелевых калибровочных теориях и в гравитации. Он предвидел появление духов, аккуратное описание которых было позже дано Л. Д. Фаддеевым и В. Н. Поповым (см. обсуждение на с. 224).

Кроме того, Фейнман широко известен в США как человек, первым понявший причину катастрофы «Челенджера»¹.

Но Фейнман был не только выдающимся физиком. Он был также очень яркой личностью. Он написал две книги воспоминаний: «Вы, конечно, шутите, мистер Фейнман!» и «Какое ТЕБЕ дело до того, что думают другие?» Очень интересны обе, но я особенно вам рекомендую прочитать первую книгу. Я перескажу оттуда несколько историй...

13.1.1. Взломщик сейфов

Во время войны молодой Фейнман работал в Лос-Аламосе и участвовал в создании атомной бомбы. Он возглавлял группу вычислителей. (В то время ещё не было настоящих компьютеров и все вычисления проводились людьми, вооружёнными только арифмометрами-переростками. Роль Фейнмана состояла в том, чтобы организовать их работу возможно более эффективно.) Работы по бомбе были, естественно, совершенно секретны, и документы хранились в закрытых сейфах. И у Фейнмана возникло хобби — *взламывать* замки на сейфах в офисах коллег. В этом искусстве он значительно преуспел. Обыкновенные замки он щёлкал как семечки. Для этого ему не требовалось ничего, кроме металлической скрепки и отвёртки.

...Чтобы показать людям, что их замки ненадёжны, каждый раз, когда я хотел ознакомиться с чьим-то служебным отчётом, а его автор в тот момент отсутствовал, я просто заходил в его офис, открывал сейф и брал оттуда отчёт. Когда я кончал с ним работать, я отдавал его автору: «Спасибо за отчёт!»

¹ Лопнула резиновая прокладка, которая потеряла пластичность из-за необычно низкой температуры в день запуска.

— Где ты его взял?

— Из твоего сейфа.

— Но я запер его!

— Я знаю, что ты его запер. Но здешние замки — барахло!..

Когда прибыли более сложные сейфы с кодовыми замками, Фейнман воспринял это как личный вызов. Чтобы понять, как работает их механизм, он разобрал сейф в своём офисе. Увы, от скрепок и отвёрток толку больше не было. Чтобы открыть замок, надо было знать три двузначных числа секретного кода и набрать этот код, поворачивая диски. Поначалу Фейнман не знал, что делать. Но потом он обнаружил, что может определить два *последних* числа комбинации, поворачивая туда-сюда диски у *открытого* сейфа и прислушиваясь к слабым щелчкам¹. Каждый раз, когда Фейнман заходил в офис к своему коллеге и видел, что его сейф открыт, он незаметно за разговором «игрался» с его замком, поворачивая колёсики. Он узнавал, таким образом, два последних числа и, вернувшись к себе, записывал их в особый блокнотик.

Фейнман приобрёл репутацию искусного взломщика. Так что, если кто-то отсутствовал, а необходимо было срочно ознакомиться с каким-то секретным документом из его сейфа, звали Фейнмана и просили его открыть. Если Фейнман знал два последних числа, то он соглашался, брал большой ящик с инструментами (который на самом деле был ему совершенно не нужен), заходил в офис, запирался, быстро открывал сейф, просто пробуя все возможные варианты первого двузначного числа, которого он не знал (фактически надо было сделать не более 20 попыток — эти сейфы открывались, даже если набранные числа отличались от правильных на одну или две единицы) и проводил ещё минут 15-20, изучая рисунок на обоях и встряхивая время от времени ящиком с инструментами, чтобы дать понять оставшимся снаружи коллегам, что он трудится в поте лица над поставленной перед ним нелёгкой задачей...

Я опускаю множество других подобных интересных историй. Читатель может прочесть их в книге Фейнмана, где им посвящена отдельная глава.

¹ В своей книге Фейнман даёт более подробные объяснения, но я, по правде говоря, их не понял. В любом случае, *практического* значения эти объяснения больше не имеют — я думаю, те конкретные сейфы, которые Фейнман научился вскрывать, вышли сейчас из употребления.

13.1.2. Барабанщик



Рис. 13.1. Фейнман, играющий на паре бонго. Другая подобная фотография украшает титульный лист «Фейнмановских лекций», но эта мне нравится больше.

У Фейнмана было хобби, которое он пронёс сквозь всю жизнь, — он был хорошим ударником-любителем. Особенно он любил играть на *бонго* — маленьком барабанчике, популярном на Кубе. Но он играл также и на других инструментах. Он начал проводить много времени за этим занятием в Лос-Аламосе, где не было других развлечений — ни театров, ни филармонии... Предоставляю ему слово.

...Иногда я брал с собой барабаны и шёл в лес, где я мог, никому не мешая, петь под ударный аккомпанемент. Я помню, как однажды вечером я ходил вокруг большого дерева, смотрел на луну и бил в барабан, воображая себя индейцем.

Однажды ко мне подошёл знакомый и спросил: «Не был ли ты в лесу в районе Дня благодарения и не стучал ли ты там в барабан?»

— Было дело, — ответил я.

— А! Тогда моя жена была права! — И он рассказал мне следующую историю.

Как-то ночью он услышал доносящийся издали барабанный бой. Он поднялся на второй этаж к соседу, который тоже прислушивался к этим звукам. Поймите, они оба были из восточных штатов, никогда не видели живых индейцев, и им стало очень интересно: наверное, в лесу собрались индейцы и участвуют в каком-то важном для них ритуале! Приятели решили пойти туда и посмотреть.

По мере приближения музыка звучала всё громче, и друзья занервничали. Они предположили, что индейцы, наверное, выставили какую-то охрану, чтобы никто не помешал их обряду. Поэтому они легли на землю и поползли вдоль тропинки до небольшого холмика, с вершины которого звучал барабан. Они осторожно взобрались ползком на холмик и обнаружили, к своему удивлению, всего одного индейца, проводившего обряд в гордом одиночестве. Он танцевал вокруг дерева, бил в барабан и пел. Не желая потревожить индейца (он, вероятно, наводил чары или что-то вроде того), друзья медленно сползли с холма.

Вернувшись, они рассказали о том, что видели, своим жёнам, и те сразу сказали: «Это был, наверное, Фейнман — он любит играть на барабанах!»

Уехав после войны из Лос-Аламоса, Фейнман потерял интерес к сейфам — ему больше не попадались по-настоящему важные сейфы, где хранились важные секреты. Но он продолжал играть на барабанах. Во время своего путешествия в Бразилию в 1951 г., где он преподавал физику в университете Рио-де-Жанейро, он вступил в клуб самбы поблизости от пляжа Копакабана и научился играть на особенном бразильском ударном инструменте *фригидейро* — маленькой металлической сковородке диаметром в примерно 15 сантиметров. Фейнман с гордостью говорил, что в этом конкретном клубе он стал, пожалуй, лучшим «фригидейристом». Вместе с труппой своего клуба он участвовал в некоем соревновании с другими подобными клубами вокруг Копакабаны, и его клуб победил!

В Калтехе (Калифорнийском технологическом институте), где Фейнман работал начиная с 1951 г. и до конца жизни, он часто играл на бонго — один или вместе со своим коллегой и другом Ральфом Лейтоном¹.

¹ Лейтон учился у Фейнмана, слушал его курс по общей физике в Калтехе и стал потом там профессором. Знаменитые «Фейнмановские лекции» были написаны на основе конспектов, сделанных Лейтоном и Мэтью Сэндсом.

Постепенно он научился «барабанить» настолько хорошо, что смог играть вместе с профессиональными музыкантами. Его и Лейтона попросили проаккомпанировать некий современный балет карибского стиля, поставленный в Сан-Франциско. По задумке, балет сопровождался только ударными инструментами; другой музыки не было. Для Фейнмана это было непросто. Он никогда не учился музыке по-настоящему, играл всегда по слуху, а не по нотам, но на этот раз он должен был выучить свою партию *точь-в-точь*, чтобы не допустить рассогласования с танцорами. Он смог в конечном счёте это сделать, и спектакль был встречен публикой и другими музыкантами благосклонно!

Позднее хореограф этого балета представил его на некий американский конкурс (где он занял первое или второе место), а потом — на международный балетный конкурс в Париже. Победу на конкурсе одержала какая-то латышская труппа, танцевавшая классический балет, а их карибский балет судьи поставили на второе место.

...Хореограф пошла потом к судьям, чтобы спросить их, какие недостатки они нашли в её балете. «К хореографии, мадам, претензий у нас нет. Но музыка была не вполне чистой. Крещендо были неровные...»

13.1.3. Художник

Другим хобби Фейнмана была живопись. Он научился рисовать, когда ему уже было 40 с хвостиком и он работал в Калтехе. Фейнман рассказывает следующую историю.

У него был друг художник по имени Джерри Зортиан. Как-то раз они заспорили о сравнительной ценности для человечества науки и искусства, но быстро согласились, что обсуждать это им трудно, так как в то время Фейнман ничего не знал об искусстве, а Зортиан — о науке. Оба они высказали по этому поводу сожаление и искреннее пожелание узнать больше. Они договорились, что будут учить друг друга.

Фейнман воспринял обе свои новые роли — учителя и ученика — вполне серьёзно. Чтобы объяснить своему другу закон Фарадея, он намотал маленькую проволочную катушку и приделал к ней на пружинке железный гвоздик. Когда через катушку шёл ток, гвоздик нырял внутрь. «Вау! — сказал художник, — катушка и гвоздик любят друг друга!» Однако он так и не смог постичь ни закон Фарадея, ни другие законы физики в их формальном математическом выражении.



Рис. 13.2. Рисунок Фейнмана

Зортиан оказался, однако, намного лучшим преподавателем, нежели студентом. А Фейнман оказался способным и заинтересованным учеником. После уроков Зортиана он продолжил учёбу. Вначале он записался на заочный курс (получал и отправлял задания по почте), а потом прошёл очный курс живописи при художественном музее в Пасадене. Студенты учились там рисовать разные вещи, в том числе обнажённую натуру. Поначалу Фейнману это было трудно.

...Я начал рисовать натурицу, и к тому времени, как я успел покончить с её левой ногой, 10 минут (обычное время сеанса) истекли. Я посмотрел по сторонам и увидел, что всё остальные студенты успели зарисовать всё и даже затушевывали фон...

Но в итоге Фейнман научился рисовать. Я сам мало понимаю в живописи и не могу судить, стал ли он хорошим художником или нет. Я привожу здесь набросок Фейнмана, который мне понравился, и предоставляю судить о его качестве читателю.

Фейнман взял псевдоним *Офей*. Так на негритянском жаргоне зовут белых людей. Кроме того, в этом слове присутствуют первые три буквы его имени¹. Он сделал это, чтобы люди, рассматривавшие

¹ Фейнман также пишет, что этот псевдоним произошёл изначально от французского выражения *au fait*, предложенного одним из его друзей. Но затем он пишет,

его картины, не знали о том, что их нарисовал известный физик, лауреат Нобелевской премии, и не думали бы: «Как интересно, он ещё и рисовать умеет!», а судили бы о качестве картин по самим картинам.

Фейнману (точнее, *Офейю*) удалось продать, я думаю, пару десятков своих картин. Разумеется, вырученные за это деньги не были главным источником его дохода, но он справедливо замечает, что сам тот факт, что люди были готовы заплатить за его картины, означал, что они им действительно нравились! Естественно, Фейнман был этому рад. Имя «Офей» приобрело некоторую известность, однажды он смог даже организовать персональную выставку из своих картин. Я видел в оригинале одну из картин Фейнмана (аккуратно выписанный портрет красивой девушки) в Принстоне, в офисе одного из моих коллег.

Я опускаю интересную историю, как Фейнман нарисовал картину для частного массажного кабинета, — прочитайте это сами в его книге — но хочу упомянуть здесь другую его картину, которую он назвал «Мадам Кюри, наблюдающая излучение радия». Это был рисунок обнажённой женщины, освещённой точечным источником света, дававшим интересные тени. Эта картина вызвала ярость у феминисток. «Как это так? Профессор Фейнман оскорбляет знаменитую учёную женщину, изображая её голой. Это неслыханно!» У Фейнмана даже были по этому поводу некоторые неприятности, но не слишком серьёзные.

Боюсь, в наши дни он так просто бы не отделался...

13.2. Лев Ландау

Одной из не столь хорошо известных идей Ландау была разработанная им логарифмическая «шкала гениальности». Каждому физико-теоретику Ландау приписывал некоторое ранговое число, или класс, равный с точностью до аддитивной константы десятичному логарифму его вклада в науку, взятому с обратным знаком. Так, вклад физика первого класса в 10 раз превышал вклад физика второго класса и т. д.

что *au fait* означает в переводе *сделано*, тогда как в действительности это может означать в разных контекстах *фактически* или *кстати*. Лично мне как «сделано», так и «кстати» кажется странным выбором для псевдонима, и эта часть истории осталась мне не вполне ясной.

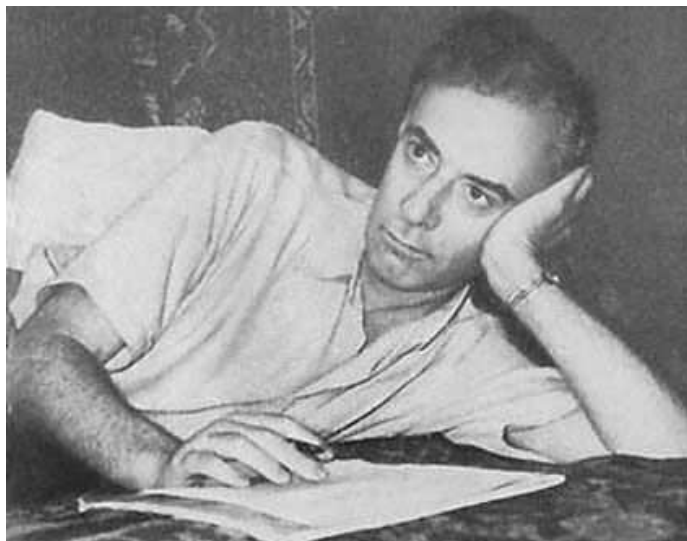


Рис. 13.3. Л. Д. Ландау

Эта классификация при жизни Ландау не публиковалась, и мы должны опираться на воспоминания его учеников, которые совпадают не во всем. Но все согласны, что он приписывал класс 0 Ньютону и класс 0,5 Эйнштейну. Несколько теоретиков XX века получили первый класс. Согласно одному из вариантов, это были: Бор, Бозе, де Бройль, Дирак, Гейзенберг, Шрёдингер и Вигнер¹ — создатели квантовой механики. К концу жизни Ландау добавил к этому списку Фейнмана, но никого больше. По логике Ландау, вклад физика пятого класса составлял $\approx 10^{-4}$ в боровских единицах, что для Ландау было неотличимо от нуля (эту оценку можно, конечно, оспаривать). Ландау называл таких физиков «патологами».

В 1930-х и 1940-х годах он скромно приписывал самому себе класс 2,5. К концу жизни он согласился, что он физик второго клас-

¹ Некоторые из этих имён в нашей книге ещё не встречались. Шатъендранат Бозе понял одновременно с Эйнштейном, что фотоны и другие частицы с целым спином подчиняются квантовой статистике Бозе—Эйнштейна — см. с. 179. Луи де Бройль был первым, кто понял, что не только фотон, но также электрон и другие элементарные частицы имеют дуальную корпускулярно-волновую природу — см. с. 21. Юджин Вигнер был первым, кто осознал роль симметрии в атомных и ядерных спектрах и привлёк к их описанию методы теории групп.

са. Но если вы спросите моё личное мнение, Ландау, возможно, уступал пол-класса Бору, или Дираку, или Фейнману, но его класс превышал класс Бозе или де Бройля.

Отличительным качеством Ландау как учёного была его универсальность. Он получил фундаментальные результаты практически во всех разделах теоретической физики — от гидродинамики до теории слабых взаимодействий. Нобелевская премия была ему присуждена в 1962 г. «за революционные теории в области физики конденсированных сред, особенно жидкого гелия». Действительно, теория жидкого сверхтекучего гелия, как ^4He , так¹ и ^3He — одно из самых ярких его достижений.

Эффективная квантовая полевая теория, которую Ландау строил для описания гелия, была нерелятивистской. Но Ландау также известен своими замечательными работами по релятивистским квантовым полевым теориям.

1) Как мы отмечали, теория Гинзбурга—Ландау, описывающая сверхпроводимость, была первым примером теории, где действует механизм Хиггса и калибровочное поле приобретает массу за счёт взаимодействия со скалярным вакуумным конденсатом.

2) Ландау, Абрикосов и Халатников вывели асимптотическую формулу (5.13) для заряда электрона и были первыми, кто осознал внутреннюю противоречивость КЭД.

3) Ландау ввёл понятие комбинированной чётности (симметрии CP) в физике частиц. Он предположил, что эта симметрия точна, но позже было обнаружено её слабое нарушение.

Но Ландау был не только учёным. Он был также Учителем. Он создал в Советском Союзе блестящую школу теоретической физики. Ландау умер в 1968 г., и я не знал его лично. Но я был знаком с некоторыми его учениками (многих из которых, увы, уже нет) и слышал их рассказы о Ландау, не все из которых были опубликованы. Я хочу поделиться с читателем некоторыми интересными историями из его жизни.

13.2.1. Молодость

Каждый знает китайскую поговорку про интересные времена. Что ж, прошлое столетие было, безусловно, весьма интересным.

¹ Физика ^3He сложнее и богаче. Атомы ^3He несут, в отличие от атомов ^4He , полуполный спин и являются фермионами. Они не могут сами по себе образовать бозе-конденсат, приводящий к сверхтекучести. Конденсируются пары атомов ^3He — подобно тому как в сверхпроводнике конденсируются куперовские электронные пары.

А Советский Союз был интересным местом, интереснее, чем США. Поэтому биография Ландау была намного интереснее биографии Фейнмана и мы расскажем о ней намного подробнее. К счастью, она не была всё же *достаточно* интересной, чтобы серьёзно помешать Ландау заниматься теоретической физикой, и этому занятию он отдавал все свои душевные силы и посвятил всю свою жизнь (в отличие от Фейнмана, у Ландау не было выраженных хобби).

Ландау родился в 1908 г. в Баку в семье нефтяного инженера. Он проявил свои яркие математические способности ещё в раннем детстве, был настоящим вундеркиндом и окончил школу в возрасте 13 лет. Это было уже в 1921 г., после большевистской революции и гражданской войны. Во время войны Баку несколько раз переходил из рук в руки; в какой-то момент отца Ландау арестовали, правда, очень скоро выпустили. Кажется, однако, что все эти драматические события не оказали на юного Ландау большого влияния.

Он провёл в Баку ещё три года, учась в университете. В 1924 г. он переезжает в Ленинград, бывший тогда главным научным центром страны, и поступает в Ленинградский государственный университет. В 1927 г. он оканчивает университет и поступает в аспирантуру Ленинградского физико-технического института (ЛФТИ). Ландау был блестящим студентом и потом — блестящим молодым учёным (его первая научная работа была опубликована в 1926 г.), но в Ленинграде он был не один такой. В теоретическом отделе ЛФТИ, куда пришёл Ландау, работали Владимир Фок, Матвей Бронштейн (эксперт по гравитации, чья судьба была трагичной: в 1937 г. он был арестован и расстрелян), Дмитрий Иваненко (когда в 1932 г. был открыт нейтрон, Иваненко был первым, кто сообразил, что атомные ядра сделаны из протонов и нейтронов, а не из протонов и электронов, как люди думали раньше) и Георгий Гамов (Гамов позднее эмигрировал в США и стал известен своим предсказанием реликтового космического излучения и расшифровкой генетического кода). Это была весёлая и тесная компания молодых очень одарённых людей.

В 1929 г. Ландау получил грант Народного комиссариата просвещения и уехал из Ленинграда в научное путешествие по Западной Европе. В это время СССР ещё не был закрытым обществом и такие поездки были в порядке вещей. Ситуация изменилась в середине 30-х годов. В 1934 г. Петру Капице, который работал в Кавендишской лаборатории вместе с Резерфордом и проводил, как обычно, летние каникулы на своей подмосковной даче, было отказано в разреше-

нии вернуться в Великобританию, и он должен был остаться в СССР, где он провёл оставшиеся 50 лет своей жизни, возглавляя основанный им Институт физических проблем.

О Капице и о его институте мы ещё поговорим, а пока вернёмся в 1929 г. В течение своего большого европейского турне Ландау посетил Берлин, Гёттинген, Лейпциг, Копенгаген, Кэмбридж, Цюрих... Он встретился с Борном, Гейзенбергом, Дираком, Паули... Особенно плодотворен оказался для Ландау его визит в Копенгаген. Институт теоретической физики, основанный и возглавляемый Нильсом Бором, был в то время главным европейским центром и законодателем мод в том, что касалось теоретической физики. Бор вёл там семинар, в котором Ландау с энтузиазмом стал принимать активное участие. Он делал там доклады сам, а на докладах других задавал больше вопросов, чем кто-либо другой, за исключением, вероятно, самого Бора.

Во время путешествия Ландау очень много работал. Его самая известная статья из написанных в то время посвящена задаче о спектре электрона в постоянном магнитном поле — он открыл явление, которое сегодня называется *диамагнетизм Ландау*. Это важное явление, описывающее магнитные свойства металлов, но ещё более важным было обнаруженное Ландау двукратное вырождение всех возбуждённых уровней соответствующего гамильтониана. Мы понимаем сейчас, что это двукратное вырождение — не что иное, как *суперсимметрия*; в следующей главе мы будем обсуждать это подробно¹.

Ландау произвёл большое впечатление на грандов европейской физики, и ему было бы просто найти в Европе постоянную университетскую позицию, если бы он того захотел. Он даже получал некоторые предложения об этом, но это его не интересовало. Он хотел вернуться домой, и весной 1931 г. он вернулся в Ленинград. Надо сказать, что в то время Ландау искренне придерживался коммунистических убеждений и был лояльным советским гражданином. Действительно, он не видел тогда от советских властей ничего, кроме хорошего. Беды придут позже...

13.2.2. Харьков. Минимум Ландау

Ландау вернулся в аспирантуру ЛФТИ, и скоро ему предложили солидную научную должность, правда не в Ленинграде, а в Харь-

¹ Конечно, Ландау не называл это суперсимметрией; это слово ещё не существовало. Ландау можно сравнить здесь с г-ном Журденом, «мещанином во дворянстве», который говорил прозой, сам того не подозревая.

кове, в только что открывшемся Украинском физико-техническом институте (это произошло в 1930 г., когда Ландау путешествовал). УФТИ был организован как «дочка» ЛФТИ, и много ленинградских физиков перехали в Харьков. УФТИ был чисто исследовательским институтом. Ландау занимался там наукой и преподавал физику в харьковском университете.

В это время именно Харьков (а не Киев) был административной столицей Украины, и УФТИ стал сильным научным центром. Там постоянно проводились конференции. В них участвовали Бор, Паули, Дирак, Фаулер и многие другие знаменитые физики. В УФТИ работали не только русские, но и некоторые западные учёные. Можно вспомнить Фрица Хоутерманса, который эмигрировал в СССР в 1935 г. и получил постоянную позицию в УФТИ¹. В Харькове работал Виктор Вайскопф — очень хороший теоретик², бежавший от нацистов в Харьков и серьёзно обдумывавший возможность там осесть. В конце концов Вайскопф нашёл, однако, место в Америке и уехал туда.

В Харькове Ландау приобрёл своих первых учеников и родилась школа Ландау. Первыми четырьмя учениками были Александр Компанеец, Евгений Лифшиц, Александр Ахиезер и Исаак Померанчук. Я написал «ученик», а не «студент» или «аспирант», поскольку это слово лучше характеризует статус члена школы Ландау. В ней было что-то от средневекового цеха или от монашеского ордена. Чтобы попасть в полноправные Ученики, кандидат должен был провести несколько лет в статусе соискателя.

На практике это значило следующее. Ландау требовал, чтобы люди, желавшие с ним работать, сдали вначале от 8 до 11 сложных экзаменов (*теоретический минимум*) по всем разделам теоретической физики и необходимой математики. В своём развитом виде полный список экзаменов включал следующее.

1) Математика-I (интегрирование, дифференциальные уравнения, векторный и тензорный анализ).

¹ Нельзя сказать, что этот его выбор оказался оптимальным. Во время Большого террора в 1937 г. он был арестован и провёл пару лет в тюрьме НКВД. Затем, после советско-германского пакта 1939 г., его выдали Германии, и там он был немедленно арестован гестапо... Но я боюсь, что мы теряем нашу собственную повествовательную нить...

² Он, возможно, упустил Нобелевскую премию, не опубликовав результаты некоторого важного и вполне правильно сделанного вычисления; Вайскопф не был уверен, что вычисление правильно!

- 2) Классическая теоретическая механика.
- 3) Классическая теория поля.
- 4) Математика-II (комплексный анализ, спецфункции).
- 5) Квантовая механика.
- 6) Квантовая электродинамика. (Очевидно, этот экзамен был добавлен к списку в 1950-е годы, после создания КЭД.)
- 7) Классическая статистическая физика.
- 8) Гидродинамика и теория упругости.
- 9) Электродинамика сплошных сред.
- 10) Квантовая статистическая физика.
- 11) Физическая кинетика.

В 50-е и 60-е гг. содержание каждого экзамена примерно отвечало содержанию соответствующего тома Ландау и Лифшица — связь между этим фундаментальным трудом и минимумом Ландау очевидна. Но в 30-е гг. курс Л&Л не был ещё написан, других учебников тоже не было и кандидат должен был изучать оригинальные статьи Бете, Паули и других классиков, написанные по-немецки или по-английски. А если вы не знали иностранных языков, это было вашей проблемой.

Незадолго до страшной автомобильной аварии в 1962 г. (я расскажу о ней позже) Ландау составил список людей, сдавших ему все экзамены. Там было всего 43 фамилии. В первой половине списка можно найти Абрикосова (он стал впоследствии Нобелевским лауреатом) и много других блестящих теоретиков, которые приобрели с течением времени высокий «ранг гениальности». Начиная примерно с 1955 г. Ландау решил экзаменовать лично только знания математики и передоверил проведение остальных экзаменов своим ученикам. И у второй половины списка средний ранг гениальности существенно снизился... Иоффе (13-й номер в списке учеников) пишет в своих воспоминаниях:

...Экзамен проходил следующим образом. Студент звонил Ландау и говорил, что он хотел бы сдать такой-то курс (порядок сдачи курсов был более или менее произвольным).

— Хорошо, приезжайте тогда-то.

Пришедший должен был оставить в прихожей все книги, записи и т. д. Затем Ландау приглашал его в маленькую комнату на втором этаже, где был круглый стол с несколькими листами чистой бумаги, стул и ничего более. Ландау формулировал задачу и уходил, но каждые 15—20 минут заходил и смотрел через плечо сдающего, что сделано.

Если он молчал, то это было хорошим признаком, но иногда он говорил «хм» — и это было дурным знаком. У меня нет собственного опыта, как и что происходило в тех случаях, когда студент проваливал экзамен (знаю только, что пересдача допускалась).

Я приблизился к опасной черте лишь раз, когда сдавал статистическую физику. Я начал решать задачу не тем способом, который ожидал Ландау. Ландау пришёл, заглянул мне через плечо, сказал «хм» и вышел. Через 20 минут он опять пришёл, взглянул и сказал «хм» ещё более недовольным тоном. Тут по каким-то делам зашёл Лифшиц. Он тоже посмотрел в мои записи и закричал: «Дау¹, не стоит терять времени, гони его!» Но Дау возразил: «Дадим ему ещё 20 минут». За это время я получил ответ, и ответ был правильный! Дау увидел ответ, ещё раз посмотрел мои вычисления и признал, что я был прав. Они с Лифшицем задали мне несколько простых вопросов, и экзамен был сдан.

После смерти Ландау традиция теоретического минимума поддерживалась его учениками и учениками учеников. Она жива по сей день. Студенты Физтеха (или других вузов), которые хотят стать теоретиками, сдают экзамены физикам, работающим в Институте теоретической физики им. Ландау.

13.2.3. Арест. Бомба

В феврале 1937 г. Ландау оставил Харьков и переехал в Москву, поступив на работу в новый Институт физических проблем, возглавляемый Капицей. Это произошло за пару месяцев до начала Большого террора 1937—1938 гг. Около 1,4 миллионов были осуждены, в основном по ложным обвинениям в государственной измене и шпионаже. Половина из них были расстреляны. Сообщество учёных и, в частности, физиков не избежало общей участи. Я уже называл имена Бронштейна и Хоутерманса. Были и другие... Глядя на всё это, Ландау изменил свои политические взгляды. Он всё ещё верил в социализм и в его преимущества перед «бесчеловечной капиталистической системой», но считал теперь, что «светлые ленинские принципы» были жестоко искажены и преданы Сталиным.

В апреле 1938 г. К., талантливый поэт-романтик, студент ИФЛИ (литературного института) встретился с Моисеем Корецем — другом и коллегой Ландау, который переехал из Харькова в Москву

¹ Так ученики звали Ландау.

примерно в то же время, что Ландау. Он сказал Корецу, что в ИФЛИ действует группа революционных студентов, желающих свергнуть антинародный сталинский режим, и предложил Корецу к ним присоединиться. Корец сообщил это Ландау, и они вместе написали листовку, которую Корец передал потом К. для размножения на гектографе (ксерокс тогда ещё не был изобретён) и рассылки по некоторым московским адресам. Через 4 дня после этого Корец и Ландау были арестованы. Но К. остался на свободе, и возникает естественное подозрение, что он был провокатором НКВД. Однако это с достоверностью не доказано, и вот почему я решил не давать здесь его полного имени, имея также в виду, что К. вступил добровольцем в армию в 1941 г. и пал смертью храбрых под Новороссийском в сентябре 1942 г.

Листовка была составлена в яростных выражениях.

...Товарищи!

Великое дело Октябрьской революции подло предано... В своей бешеной ненависти к настоящему социализму Сталин сравнился с Гитлером и Муссолини... Пролетариат нашей страны, сбросивший власть царя и капиталистов, сумеет сбросить фашистского диктатора и его клику...

По стандартам того времени, такая листовка означала немедленный расстрел — сотни тысяч были расстреляны вообще без причин. Но Ландау избежал этой участи.

Надо сказать, что при всех своих злодействах Сталин уважал науку и учёных. Капице было отказано в праве работать в Кэмбридже, но правительство выкупило его дорогое оборудование и выделило деньги на создание нового научного института — специально «под Капицу».

Капица написал Сталину несколько писем, и эти письма были написаны с достоинством — это были письма свободного человека, а не «дрожащего холопа». В частности, он написал Сталину в феврале 1937 г., когда в Ленинграде был арестован Фок. Он написал, что этот арест принесёт вред советской науке и её репутации за рубежом. Подобное письмо, отправленное в сумерках перед чёрной ночью Большого террора, было смелым и рискованным поступком. Капицу могли тоже арестовать. Но его не арестовали, а Фок был освобождён!

Годом позже, узнав об аресте Ландау, Капица снова написал Сталину. На этот раз Ландау сразу не освободили, но, судя по всему,

письмо произвело некоторый эффект. Ландау не расстреляли и не осудили, он оставался под следствием.

В ноябре 1938 г. Ежов (глава НКВД и один из главных организаторов Большого террора) был снят со своего поста и вскоре, в свою очередь, арестован. Большой террор кончился. Капица немного подождал и в апреле 1939 г. написал второе ходатайство о Ландау. На этот раз Молотову, второму человеку в правительстве. И ходатайство подействовало — Ландау был освобождён!

Он возобновил свою работу в «капичнике», и работа эта была эффективной. В 1940—1941 гг. Ландау построил теорию жидкого гелия, объяснявшую явление сверхтекучести, открытое Капицей в 1938 г. Именно за эти работы ему была позже присуждена Нобелевская премия.

В 1941 г. Институт физических проблем был эвакуирован в Казань, где Ландау провёл военные годы.

В 1945—1953 гг. Ландау участвовал в советском атомном проекте. Интересно, что его роль была похожа на роль Фейнмана в американском проекте — это была роль математика¹. Ландау разработал эффективные «дешёвые» численные алгоритмы для громоздких вычислений, которые необходимо было произвести. С этими алгоритмами была, в частности, рассчитана динамика первой советской водородной бомбы — сахаровской «слойки». За свой вклад в разработку ядерного оружия Ландау был награждён двумя Сталинскими премиями (в 1949 и 1953 гг.). В 1954 г. ему было присвоено звание Героя Социалистического Труда.

Несмотря на всю свою важность, его вклад в проект уступал по значению вкладам Сахарова, или Курчатова, или Зельдовича. По свидетельствам учеников Ландау работал над бомбой, конечно, не с неохотой, но, лучше сказать, с меньшим энтузиазмом, чем эта тройка. Это, впрочем, не так удивительно, у них был не такой жизненный опыт, как у Ландау, они не провели год в тюрьме...

13.2.4. Авария

В воскресенье 7 января 1962 г. улицы Москвы превратились в коток: накануне лил дождь, а ночью подморозило. Около 10 утра у две-

¹ Конечно, круг задач, которые решал Ландау, был намного шире, чем у Фейнмана, — в конце концов, Ландау был существенно старше.

ри дома Ландау остановилась машина — он должен был ехать в Дубну (около 100 км от Москвы), чтобы сделать там доклад на научном семинаре и обсудить науку с коллегами. В какой-то момент водитель захотел обогнать тащившийся перед ними автобус, но потом увидел ехавший навстречу грузовик. Водитель затормозил, но слишком резко, машина потеряла управление и закрутилась на льду, как хоккейная шайба. Грузовик ударил по машине прямо в то место, где сидел прижатый инерцией к стеклу Ландау.

Первая запись в истории болезни гласила: *множественные ушибы мозга, ушибленно-рваная рана в лобно-височной области, перелом свода и основания черепа, сдавлена грудная клетка, повреждено лёгкое, сломано семь рёбер, перелом таза. Шок.* Такая травма обычно не совместима с жизнью. Но Ландау не умер. Он выжил благодаря своему здоровому организму (Ландау был здоровым человеком, несмотря на то что никогда не занимался спортом), благодаря усилиям врачей и самоотверженной преданности своих учеников.

12 января, через пять дней после катастрофы, Ландау почти перестал дышать. Единственное, что могло его спасти, — это искусственное лёгкое, машина, насыщающая кровь кислородом и удаляющая из неё углекислый газ. Таких аппаратов в Москве тогда было очень мало, и они были очень громоздки. В больнице, где лежал Ландау, искусственного лёгкого не было, но оно было в другой больнице. Чтобы не терять времени, физики вынесли тяжёлую машину на улицу на руках, остановили проезжавший мимо грузовик и доставили её в палату Ландау. Он был спасён.

Но недель позже у Ландау развился отёк мозга и он снова был при смерти. Врачи сказали ученикам, что недавно было разработано лекарство, которое, быть может, его спасёт, но оно новое, очень редкое, и в Москве его нет. В то время были только два места в мире, где его можно было найти, — это Лондон и Прага. Русские физики позвонили своим британским и чешским коллегам, лекарство было найдено и послано в Москву. Первым прибыл пакет из Лондона. Когда сэр Джон Кокрофт (лауреат Нобелевской премии по физике 1951 г.) добыл требуемое лекарство, он понял, что не сможет доставить его в аэропорт вовремя. Он позвонил в авиакомпанию, объяснил ситуацию, и рейс задержали на час. Ландау снова был спасён.

Через 3 месяца Ландау заговорил. Потом он начал ходить. Если иметь в виду тяжесть травмы, это было маленьким (а может быть, не таким маленьким) чудом. В ноябре 1962 г. ему была присуждена Нобе-

левская премия, но он не был в силах поехать в Стокгольм, и премию ему вручил шведский посол, пришедший к Ландау в больницу.

Ландау прожил ещё 6 лет. Он мог говорить, медленно ходить и общаться с людьми. Но, к сожалению, наукой он больше заниматься не мог. Он умер в апреле 1968 г.

13.3. Карен Тер-Мартirosян. ИТЭФ¹



Рис. 13.4. К. А. Тер-Мартirosян

Карен Аветович Тер-Мартirosян был учеником Ландау (№11 в списке сдавших теорминимум) и одним из моих учителей. Его «класс» по шкале Ландау был, вероятно, ниже, чем у Ландау или Фейнмана, но он был хорошим теоретиком, получившим много интересных и нетривиальных результатов. Наиболее известные его работы относятся к реджевской теории.

Об этой теории мы пока в этой книге не говорили. Теория Редже — это феноменологическая теория сильных взаимодействий, описывающая процессы рассеяния высокоэнергичных адронов на малые углы (эта кинематическая область даёт главный вклад в пол-

¹ Этот параграф основан на моих заметках, опубликованных в томе воспоминаний «Under the Spell of Landau» под редакцией Михаила Шифмана.

ное сечение). «Реджистика» была очень популярна и активно развивалась в 1960-е и 1970-е годы¹, когда КХД ещё не существовала. Она сохраняет значение и сегодня: рассеяние адронов — это очень сложный процесс, который мы не можем описать модельно-независимым образом на основе фундаментального лагранжиана КХД.

Тер-Мартиросян работал в Институте теоретической и экспериментальной физики в Москве. Во второй половине прошлого века ИТЭФ был, пожалуй, самым сильным советским (а может быть, и мировым) исследовательским центром по физике частиц. Там работало много блестящих учёных. Но никто из них (и никто из тех, кого я встречал в других странах и институтах) не мог и не может сравниться с К. А. в качестве Учителя.

Объяснить это несложно. К. А. действительно *любил* своих учеников. После того как они получали диплом, он пытался устроить их в аспирантуру ИТЭФ или аспирантуру МФТИ, а потом (или сразу после диплома; в то время это было иногда возможно) — взять в ИТЭФ на работу столько своих студентов, сколько он мог. Когда это было невозможно, он звонил своим коллегам из других институтов, спрашивал, есть ли у них свободные ставки, рассказывал, какой у него сейчас есть замечательный студент², и т. д. Как отец, пытающийся помочь своим детям и поддержать их настолько, насколько он может...

Я впервые встретился с Тер-Мартиросяном в июле 1970 г., когда поступал на Физтех. Я уже сдал полагающиеся экзамены, но на Физтехе после формальных экзаменов абитуриент проходит неформальное *собеседование*, во время которого профессора знакомятся со своими будущими студентами, задают им всевозможные вопросы о физике, жизни и любви, и впечатление, которые они от этого разговора получают, играет некоторую роль в окончательном решении (принять или не принять) и в распределении принятых студентов по специальностям. Меня спросили, какая область физики мне нравится больше других. Я ответил: «элементарные частицы», и меня послали к К. А. Я увидел человека с подвижным выразительным лицом; он быстро задал мне несколько вопросов (насколько я помню, это было что-то про электрон, который умудряется про-

¹ Наиболее важные результаты были получены Тулио Редже, Габриеле Венециано, учеником Тер-Мартиросяна Владимиром Грибовым и самим Тер-Мартиросяном.

² Надо сказать, что многие из его учеников действительно стали блестящими теоретиками. Наиболее известны среди них Грибов и три Александра: Александр Мигдал, Александр Поляков и Александр Замолотчиков.

лезть одновременно сквозь две дырки в препятствии, что создаёт интерференционную картину), и я был принят.

Физтех — это особый институт. Одна из его особенностей в том, что он до сих пор называется институтом, а не университетом. В СССР не было ВУЗа, где бы преподавали физику лучше. Насколько я понимаю, это так и в современной России, но я не уверен, является ли сегодня Физтех лучшим физическим университетом в мире. А во второй половине прошлого века это было, безусловно, так. Система Физтеха жива по сей день, и, наверное, мои российские читатели её знают, но на всякий случай я напомним. На первых двух курсах студенты проводят почти всё время собственно на Физтехе, в Долгопрудном. Но начиная с третьего курса, они проводят всё больше и больше времени на «базе» — в исследовательском институте с той или иной специализацией. Там они и защищают диплом.

В нашем случае базой был ИТЭФ. Там мы слушали всевозможные специальные курсы по физике частиц: сильные взаимодействия, слабые взаимодействия, теория ускорителей, ядерная электроника... — и проводили также некоторое время в экспериментальных лабораториях. По дефолту предполагалось, что мы защитим диплом на какую-то экспериментальную тему и будем работать дальше в физике частиц как экспериментаторы.

А желавшие стать теоретиками должны были сдать дополнительные специальные экзамены — та же идея, что с минимумом Ландау, но в облегчённой форме. Я должен был сдать не одиннадцать, а всего три экзамена — по квантовой механике, квантовой электродинамике и современной полевой теории¹. Первый экзамен был по квантовой механике. Программа более или менее совпадала с учебником Ландау и Лифшица, но за вычетов некоторых параграфов. Через старшекурсников я добыл список параграфов Л&Л, которые учить было не обязательно. Но в этом списке была *опечатка*. Вместо запятой (§ 113, 147) там стояло тире (§ 113—147), т. е. необязательной оказывалась вся теория рассеяния!

Я выучил всё до § 112 включительно и радостно позвонил К. А. Мы встретились. Он быстро понял мою наглость и отправил меня домой. Через несколько месяцев я снова позвонил, выучив уже параграфы 113, 114 и т. д. В этот раз я был более удачлив. Задав несколько про-

¹ По той теории, которая в 1974 г. считалась современной.

стых вопросов, он дал мне задачу: найти сдвиг кулоновских уровней в «протонии» (атоме $p\bar{p}$) за счёт короткодействующего сильного взаимодействия. Задача эта не столь проста. По обычаю, заведённому К. А., я провёл вначале несколько часов в кабинете, соседнем с кабинетом К. А., пытаюсь её решить. Потом он выслушал мои смущённые лепетания и отправил меня домой: *когда решите — приходите!*

Это заняло у меня неделю. Чтобы найти сдвиг, надо было записать решение радиального уравнения Шрёдингера в виде общей гипергеометрической функции («конечно, гипергеометрическая функция, — прокомментировал К. А., — это известно из курса средней школы!») и наложить затем заданные в формулировке задачи нетривиальные граничные условия. Позднее я узнал, что эта задача была основана на некоторой неопубликованной статье самого К. А. Он решил её, счёл слишком простой для публикации, но достаточно хорошей, чтобы предлагать её студентам.

Остальные два экзамена я сдавал не К. А., а Борису Лазаревичу Иоффе, под руководством которого я делал диплом и потом диссертацию. А параллельно я слушал регулярный курс теории сильных взаимодействий, который читал К. А. для всех студентов. Это была осень 1974 г., КХД только родилась и не приобрела ещё неоспариваемый статус истинной теории сильных взаимодействий. И курс К. А. был не по кваркам и глюонам, а по упомянутой выше «реджистике». К. А. хотел написать книгу на основе этого своего курса (книга в конечном итоге не была написана по неизвестным мне причинам). Поэтому он попросил нас конспектировать его лекции, придавать потом конспекту более или менее приличную литературную форму и отдавать ему. Когда была моя очередь, я постарался передать то, что он говорил, максимально точно и написал: *Как известно из курса средней школы...* и потом следовало, если я правильно помню, интегральное представление для функции Бесселя $J_0(x)$.

В то время К. А. не верил в кварки, а верил в философию бутстрапа. (Мы упомянули о ней на с. 90; её приверженцы полагали, что фундаментальных частиц и фундаментальных полей нет вообще, но все зависит от всего остального каким-то самосогласованным образом.) Я вспоминал уже (на с. 236) экспериментальный семинар в ИТЭФ (или это была защита диссертации?), где К. А. (это был он!) выразил неудовольствие, когда докладчик сравнил свои эксперимен-

тальные данные с предсказаниями «спекулятивной и подозрительной» кварковой модели.

После ноябрьской революции 1974 г., когда был открыт чармоний, К. А., конечно, изменил своё мнение. Его научные интересы тоже изменились. Во второй половине 1970-х гг. и в 1980-е гг. он не занимался больше реджистикой, но работал над построением моделей Великого объединения.

К. А. был один из столпов семинара ИТЭФ. Так же, как семинар Ландау в институте Капицы и семинар Бора в Копенгагене, это был настоящий «русский семинар», где слушатели имеют привычку задавать столько вопросов, сколько необходимо для того, чтобы понять и прояснить то, что говорит докладчик: является ли это крупнейшим научным открытием, полным бредом или чем-то посередине. Обсуждения на семинаре ИТЭФ достигали часто высокого накала, и К. А. (наряду с некоторыми другими сотрудниками теоротдела ИТЭФ) никогда не упускал возможность высказать своё мнение.

Это был лучший способ изучать науку и делать науку. Трудно усвоить новый материал (по крайней мере, для меня это точно трудно) из формального доклада, на котором не задаются вопросы. Семинара ИТЭФ мне сейчас недостаёт...

Фейнман, Ландау и Тер-Мартirosян были разными людьми, но два важных качества их объединяли.

1) Страстная любовь к науке и абсолютная ей преданность.

2) Абсолютная научная честность. Они без колебаний высказывали свою точку зрения — то, что считали правильным, но в случае, когда они понимали, что ошибались, они без колебаний признавали это.

Если говорить о К. А., то абсолютная честность была его отличительной чертой не только в физике, но и в отношениях с людьми. В некоторых случаях его откровенность обижала людей. Но мне кажется, что на К. А. трудно было обижаться долго. Люди понимали, что К. А. мог небрежно обойтись с их тщеславием, но он так же небрежно относился к тщеславию собственному. Точнее говоря, он его просто не имел. Из всех учёных, которых я в жизни встречал, я не знаю ни одного, к которому слова Пастернака: *цель творчества — самоотдача, а не шумиха, не успех* — были бы приложимы в большей степени, чем к К. А...

ЧАСТЬ VII

Десерт

Глава 14

Суперсимметрия

Продолжим разговор о физике. Для разминки вспомним характерные масштабы энергий и расстояний в теориях фундаментальных взаимодействий.

Таблица 9. Характерные физические масштабы

	атом	ядро	электрослабая теория	Великое объединение	планковский масштаб
энергия	1 эВ	1 МэВ	100 ГэВ	10^{15} — 10^{16} ГэВ	10^{19} ГэВ
длина	10^{-10} м	10^{-15} м	10^{-18} м	10^{-31} — 10^{-32} м	10^{-35} м

Область энергий $E \lesssim 300$ ГэВ сегодня довольно хорошо исследована. Её физику описывают Стандартная модель и выводимые из неё низкоэнергетические эффективные теории. Мы видим, однако, что

эта область поистине крошечная в сравнении с **Огромной** областью энергий, о которой нам ничего не известно. Планковская масса превышает максимальную энергию, доступную нынешним ускорителям, на 16 порядков!

И нет надежды построить в будущем существенно бóльшие ускорители. Длина ускорительного кольца L определяется энергией, которую мы хотим достичь, и магнитным полем, которое отклоняет пучок и заставляет его циркулировать по круговой орбите:

$$L \sim \frac{2\pi E}{|e|B}. \quad (14.1)$$

В лучших существующих сверхпроводящих магнитах поле достигает примерно 10 тесла = 100 000 гаусс, и его нельзя сделать больше: слишком сильное магнитное поле разрушает сверхпроводимость — этот предел связан с атомной структурой обычного вещества и имеет ту же природу, что и пределы на плотность вещества и на его прочность, которые мы обсуждали в начале книги (§ 3.3).

Длина кольца Большого адронного коллайдера в ЦЕРНе (где протоны ускоряются сегодня до 6,5 ТэВ) составляет 27 км, и стоимость его постройки, не считая рытьё туннеля (его прорыли в ЦЕРНе раньше для другого ускорителя) и не считая стоимости огромных детекторов, составила около 5 миллиардов швейцарских франков. Полный текущий бюджет БАК составляет около миллиарда франков в год. Чтобы достичь в 10 раз бóльшей энергии, необходим ускоритель в 10 раз больше и (по крайней мере!) в 10 раз дороже. Я не знаю, может быть, когда-нибудь такой ускоритель и будет построен, но это будет уже абсолютным пределом технологических возможностей человечества.

И даже если предположить, что такой гигантский проект когда-нибудь реализуется, наше продвижение в океан неизвестности (на берегу которого мы в некотором смысле до сих пор сидим — так же как сидел Ньютон) не будет фантастически далёким: исследованной окажется только одна стотриллионная его часть.

Не имея надежд исследовать глубинную структуру мира экспериментально, мы не имеем другого выбора, как попытаться её постичь, используя как инструменты только белую бумагу, шариковые ручки разных цветов, компьютеры для расчётов, но самый главный инструмент теоретика — это его серое вещество. Именно с его помощью (и при практически полном отсутствии экспериментальной информации) Эйнштейну удалось 100 лет назад построить общую теорию относительности.

Мы пытаемся повторить на новом уровне подвиг Эйнштейна, но, говоря по правде, на нынешний день большими успехами на этом поприще мы похвастаться не можем. Главная концептуальная трудность — это гравитация, которая успешно сопротивляется сегодня всем нашим попыткам её проквантовать (мы будем подробно это обсуждать в главе 16).

Отложив в сторону гравитацию, можно спросить: какая теория описывает физические явления на масштабе энергий, много бóльших электрослабого, но много меньших планковского масштаба? Большинство теоретиков думают сейчас, что это какая-то суперсимметричная теория.

Слово «суперсимметрия» уже встречалось на страницах этой книги. Последний раз — в § 12.7, непосредственно перед Нормандской паузой. Мы привели там определённые аргументы, почему суперсимметрия рассматривается сегодня как интересная и многообеща-

ющая возможность для построения фундаментальной теории. Но мы не объяснили достаточно внятно, что, собственно, такое суперсимметрия. В этой главе мы попытаемся это сделать.

Квантовая теория поля — не самая простая область физики. Надо приложить существенные усилия, чтобы её выучить и по-настоящему понять. Однако очень часто оказывается, что некий теоретико-полевой феномен, кажущийся весьма сложным, абстрактным и эзотеричным, имеет близкий аналог в квантовой механике — в системах, включающих только конечное число степеней свободы. И этот аналог намного более прост и прозрачен, чем исходное явление¹.

Мы уже брали на вооружение эту идеологию (квантовая теория поля — это сложная квантовая механика, а последняя есть упрощённый вариант квантовой теории поля) при обсуждении диаграммной техники для амплитуд рассеяния. Мы вывели вполне строго правила Фейнмана в квантовой механике и затем попросили читателя принять на веру, что в квантовых релятивистских полевых теориях они формулируются примерно так же. Изучая суперсимметрию, мы поступим аналогичным образом.

И в квантово-механическом, и в полевом случае суперсимметрию можно определить как двукратное вырождение всех возбуждённых уровней в квантовом гамильтониане. Слово «возбуждённый», фигурирующее в этом определении, важно. Основное состояние спектра не обязательно двукратно вырождено. Хотя может и быть таковым.

14.1. Электрон в магнитном поле

Как было замечено в предыдущей главе, одна из простейших суперсимметричных систем — это электрон, движущийся в однородном магнитном поле. Эта задача была решена Ландау в 1930 г. Общий гамильтониан, описывающий движение в произвольном магнитном поле (гамильтониан Паули), имеет вид

$$H = \frac{\left[\boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right]^2}{2m}, \quad (14.2)$$

¹ Фейнману понравился бы этот подход. В своей книге воспоминаний он жаловался, что не мог понять новую для него идею или концепцию, не построив в уме простую «пальцевую модель, где она реализуется. А когда у него получалось построить такую модель, он часто понимал казавшуюся столь сложной идею глубже и лучше других.

где $\mathbf{A}$ — векторный потенциал, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ и σ — матрицы Паули [явный вид $\mathbf{t} = \sigma/2$ был дан формулами (6.40)]. Матрицы Паули удовлетворяют соотношениям

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} \mathbb{1} + i \varepsilon_{jkl} \sigma_l. \quad (14.3)$$

Имея в виду тождество (14.3) и также определение $P_j = -i\hbar \partial/\partial x^j$, мы можем переписать (14.2) в виде

$$H = \frac{\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A}\right)^2}{2m} - \frac{e\hbar}{2mc} \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (14.4)$$

Гамильтонианы (14.2) и (14.4) действуют на спинорные волновые функции

$$\Psi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a_+(\mathbf{x}) \\ a_-(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \quad (14.5)$$

Второй член в гамильтониане (14.4) описывает взаимодействие дираковского магнитного момента электрона (10.30) с внешним магнитным полем.

В общем случае гамильтониан (14.2) не суперсимметричен. Предположим, однако, что зафиксировано *направление* магнитного поля. Мы можем выбрать его вдоль оси z :

$$\mathbf{B} = [0, 0, B(x, y)]. \quad (14.6)$$

Ландау предполагал, что поле постоянно. Но для суперсимметрии это не обязательно; можно допустить его зависимость¹ от x и y . Если магнитное поле имеет вид (14.6), то можно выбрать векторный потенциал $\mathbf{A}$ только с двумя ненулевыми компонентами — вдоль осей x и y . В таком случае гамильтониан представляет сумму двух членов. Первый член описывает нетривиальное движение в плоскости (x, y) , в то время как второй член имеет вид $p_z^2/(2m)$ и описывает свободное движение вдоль направления поля (действительно, если $\mathbf{v} \parallel \mathbf{B}$, то сила Лоренца обращается в нуль). Рассмотрим только нетривиальный первый член. Он выглядит так же, как (14.2), только теперь мы предполагаем, что векторы $\mathbf{P}$ и $\mathbf{A}$ лежат в плоскости (x, y) .

Рассмотрим операторы

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2m}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \frac{1 + \sigma_3}{2} \quad (14.7)$$

¹ Но не от z , иначе дивергенция $\nabla \cdot \mathbf{B}$ была бы отлична от нуля, что не разрешено уравнениями Максвелла.

и

$$Q^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \frac{1 - \sigma_3}{2}. \quad (14.8)$$

Используя соотношения (14.3) и имея в виду, что вектор $\boldsymbol{\sigma}$ в скалярном произведении имеет только компоненты $\sigma_{1,2}$, которые антикоммутируют с σ_3 , легко показать, что:

- операторы (14.7) и (14.8) эрмитово-сопряжены друг к другу;
- оператор Q нильпотентен, $Q^2 = 0$, и то же справедливо для $Q^\dagger$;
- антикоммутатор $\{Q, Q^\dagger\}_+$ совпадает с гамильтонианом.

Отсюда следует, что Q и $Q^\dagger$ коммутируют с H . Другими словами, операторы Q и $Q^\dagger$ (их называют *суперзарядами*) — новые нетривиальные интегралы движения. По теореме Нётер это говорит о наличии новой симметрии — суперсимметрии. Алгебра

$$Q^2 = (Q^\dagger)^2 = 0, \quad \{Q, Q^\dagger\}_+ = H \quad (14.9)$$

есть простейшая возможная *алгебра суперсимметрии*.

Алгебра (14.9) подразумевает, что у гамильтониана есть *два различных* антикоммутирующих эрмитовых квадратных корня:

$$S_1 = \frac{Q + Q^\dagger}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad S_2 = i \frac{Q^\dagger - Q}{\sqrt{2}}. \quad (14.10)$$

Вот почему алгебра (14.9) обычно называется в литературе алгеброй суперсимметричной квантовой механики $\mathcal{N} = 2$. Я должен, однако, предостеречь читателя — эта универсально принятая терминология может свежего человека ввести в заблуждение. Гамильтонианы, имеющие только *один* квадратный корень [как общий гамильтониан Паули (14.2)], не обладают никакой дополнительной симметрией: двукратно вырожденные состояния в спектре в этом случае отсутствуют. Единственное утверждение, которое можно было бы тогда сделать, — это то, что спектр гамильтониана (14.2) неотрицательно определён. Но этого для бездухового гамильтониана с ограниченным снизу спектром всегда можно добиться, сместив начало отсчёта энергий. Таким образом, суперсимметричная квантовая механика $\mathcal{N} = 1$ — это оксюморон; счёт начинается с $\mathcal{N} = 2$.

Обсудим теперь свойства истинно суперсимметричного гамильтониана с алгеброй (14.9). Прежде чем это сделать, полезно вспомнить решение известной задачи — структуру спектра атома водорода. В задаче есть вращательная симметрия, оператор углового момента L коммутирует с гамильтонианом. Основное состояние имеет

нулевой момент. Это означает, что волновая функция не зависит от углов, а зависит только от расстояния между электроном и протоном. Таким образом, основное состояние *аннигилируется* действием оператора симметрии L :

$$L|\text{основное состояние}\rangle = 0.$$

Полный спектр включает собственные состояния L^2 и L_3 с разными угловыми моментами. Если момент отличен от нуля, то соответствующее состояние не исчезает под действием L . Действие $L_{1\pm i2}$ на такое состояние даёт состояние с тем же собственным значением L^2 , но собственное значение L_3 сдвигается при этом на ± 1 . Состояния группируются в мультиплеты: мультиплет $L = 1$ с тремя вырожденными состояниями, мультиплет $L = 2$ с пятью вырожденными состояниями и т. д.

Вернёмся к суперсимметрии. Утверждается, что все состояния с ненулевой энергией в спектре суперсимметричного гамильтониана спарены и спектр расщепляется, таким образом, на набор вырожденных дублетов. Но помимо этого в спектре *могут* присутствовать также неспаренные основные состояния, аннигилируемые действием как Q , так и $Q^\dagger$, и имеющие нулевую энергию. Фактически такая структура спектра следует из алгебры (14.9) — это простая математическая теорема. Я даже хотел поначалу эту теорему здесь доказать, но потом решил, что строгие доказательства теорем не очень «коммутируют» со стилем и духом нашей книги.

Поэтому мы продолжим следовать нашему индуктивному подходу *частности* $\nearrow$ *обобщения* и изучим конкретный пример — гамильтониан Ландау, т. е. гамильтониан (14.4) с *однородным* магнитным полем, $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. В нижеследующих формулах мы сделаем упрощения, истребив размерные константы $\hbar, c, m, |e|$ (так что e переходит в -1). Ранее мы писали эти константы, чтобы было ясно, что рассматриваемая задача — это настоящая физическая задача, а не просто математический конструктор. Решение этой задачи даёт теорию реального физического явления — так называемого диамагнетизма Ландау¹. Но сейчас нас интересует только математическая структура, и множители $\hbar$ и т. п. отвлекли бы от неё внимание читателя.

¹ Электроны, вращающиеся во внешнем магнитном поле $\mathbf{B}$, индуцируют своё собственное магнитное поле в направлении, противоположном $\mathbf{B}$.

Итак, выберем векторный потенциал в виде $\mathbf{A} = (-By/2, Bx/2, 0)$. Гамильтониан и суперзаряды принимают вид

$$H = \frac{1}{2} \left[\left(-i \frac{\partial}{\partial x} - \frac{By}{2} \right)^2 + \left(-i \frac{\partial}{\partial y} + \frac{Bx}{2} \right)^2 \right] + \frac{B}{2} \sigma_3; \quad (14.11)$$

$$Q = -i\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial w^*} - \frac{Bw}{4} & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^\dagger = -i\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial w} + \frac{Bw^*}{4} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (14.12)$$

где $w = x + iy$.

Видно, что полное гильбертово пространство (14.5) расщепилось в этом случае на два подпространства: подпространство $|+\rangle$ с положительной проекцией спина электрона и подпространство $|-\rangle$ с отрицательной проекцией. Все переходные матричные элементы $\langle +|H|-\rangle$ равны нулю.

Суперзаряд (14.7) включает проектор $(1 + \sigma^3)/2$ на состояния со спином вверх. Другими словами, $Q|-\rangle = 0$. Аналогично $Q^\dagger|+\rangle = 0$. Матрицы $\sigma_{1,2}$ содержат только недиагональные элементы, так что Q , действуя на состояние с положительной проекцией спина, генерирует состояние с отрицательной проекцией: $Q|+\rangle = |-\rangle$. Аналогично $Q^\dagger|-\rangle = |+\rangle$. Заметим теперь, что для любого собственного состояния гамильтониана со спином вверх результат действия Q даёт собственное состояние H со спином вниз и с той же энергией — это следует из равенства $[H, Q] = 0$. Следовательно, почти весь спектр действительно расщепляется на вырожденные дублеты; одно из состояний дублета аннигилируется действием Q , другое состояние — действием $Q^\dagger$, и состояния получают друг из друга действием либо $Q^\dagger$, либо Q (см. рис. 14.1).

Заметим, что энергия состояний в суперсимметричных дублетах строго положительна. В самом деле, для любого нормируемого состояния Ψ имеем

$$E_\Psi = \langle \Psi | QQ^\dagger + Q^\dagger Q | \Psi \rangle = \|Q^\dagger \Psi\|^2 + \|Q\Psi\|^2, \quad (14.13)$$

где $\|X\| = \sqrt{\langle X|X \rangle}$ — норма состояния. $E_\Psi > 0$, если $Q\Psi \neq 0$ или $Q^\dagger\Psi \neq 0$.

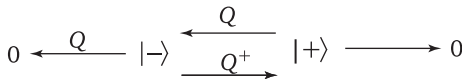


Рис. 14.1. Суперсимметричный дублет

Видно также, что у состояний, аннигилируемых одновременно Q и $Q^\dagger$, энергия равна нулю. Существуют или нет такие состояния, если существуют, то сколько их и как они выглядят, — определяется конкретной динамикой. Ответы на эти вопросы разные для разных систем; чтобы их получить, требуется специальный анализ.

Но для гамильтониана Ландау такой анализ произвести нетрудно. Результат зависит от знака B . Пусть B положительно. Тогда в секторе с положительной проекцией спина состояния с нулевой энергией отсутствуют. Это легко понять, глядя на гамильтониан (14.11). Первый член неотрицательно определён, а второй сдвигает энергию вверх на $B/2$. Получить нуль невозможно. С другой стороны, имеется бесконечно много состояний с нулевой энергией в секторе с отрицательной проекцией спина. Условие $Q^\dagger\Psi = 0$ (равенство $Q\Psi = 0$ удовлетворяется автоматически) даёт уравнение первого порядка

$$\left(\frac{\partial}{\partial w} + \frac{Bw^*}{4}\right)a_- = 0 \quad (14.14)$$

с множеством решений

$$a_-(w, w^*) = \exp\left\{-\frac{Bw^*(w+c)}{4}\right\}. \quad (14.15)$$

Различные значения комплексного параметра c отвечают в классическом пределе разным положениям центра круговой электронной орбиты в плоскости (x, y) .

Если B отрицательно, то картина противоположная. В секторе со спином вниз состояния с нулевой энергией отсутствуют, но их бесконечно много в секторе с положительной проекцией спина.

Мы нашли волновые функции (14.15) основных состояний, решая простое уравнение первого порядка (14.14). Такая ситуация типична для суперсимметрии. Суперсимметричные вакуумные состояния удовлетворяют не только уравнению Шрёдингера, но также уравнениям $Q\Psi = Q^\dagger\Psi = 0$, которые намного проще.

Чтобы найти весь спектр, надо всё же решить уравнение Шрёдингера. В задаче Ландау это сделать не сложно. В обоих секторах гамильтониан сводится к гамильтониану гармонического осциллятора. Мы получаем эквидистантный спектр. Все уровни бесконечнократно вырождены ввиду симметрии трансляции в плоскости (x, y) . (А в реальной физической задаче к энергии надо ещё доба-

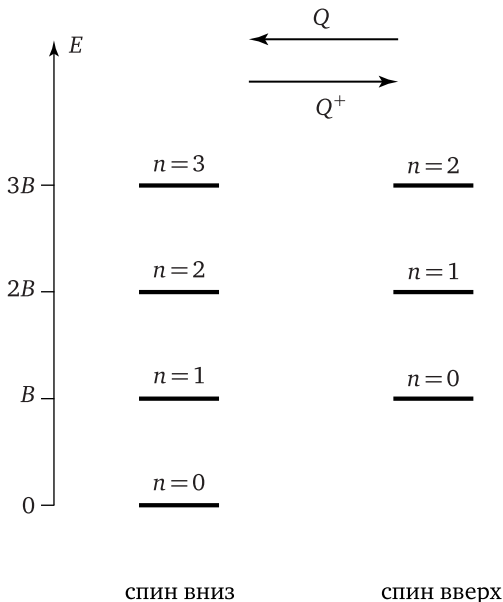


Рис. 14.2. Спектр гамильтониана Ландау ($B > 0$); $n = 0, 1, \dots$ помечают уровни осциллятора

вить $p_z^2/(2m)$; не будем об этом *полностью* забывать.) Расстояние между соседними уровнями равно¹ $|B|$.

Различие между секторами в том, что состояния с отрицательной проекцией спина сдвинуты вниз относительно состояний с положительной проекцией на B (мы предположили для определённости, что B положительно), что точно совпадает с расстоянием между уровнями гармонического осциллятора (см. рис. 14.2). В этом *физическая* причина двукратного вырождения всех возбуждённых уровней².

Если магнитное поле в формуле (14.6) не однородно, но зависит нетривиально от x, y , то задача по-прежнему суперсимметрична, и даже если волновые функции нельзя больше найти аналитически, общая структура спектра такая же, как в случае однородного по-

¹ Если восстановить константы $\hbar$ и т. д., то расстояние даётся формулой

$$\Delta = \frac{\hbar |eB|}{mc}. \quad (14.16)$$

² И мы помним: математическая причина этого (о которой Ландау не подозревал) — это алгебра суперсимметрии (14.9)!

ля, — некоторое количество суперсимметричных состояний с нулевой энергией и бесконечный набор суперсимметричных дублетов с двукратным вырождением. Можно показать (мы этого делать не будем), что число состояний с нулевой энергией пропорционально магнитному потоку:

$$n_{E=0} = \frac{|\Phi|}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left| \int B(x, y) dx dy \right|. \quad (14.17)$$

Для однородного поля поток бесконечен и число суперсимметричных состояний тоже бесконечно. Если поток конечен, то конечно и число вакуумных состояний. Это состояния со спином вниз, если поток положителен, и состояния со спином вверх, если поток отрицателен¹.

«А если поток равен нулю?» — может спросить наш вездливый читатель. Ну, в этом случае суперсимметричные состояния, аннигилируемые действием обоих суперзарядов, отсутствуют и все состояния спарены в суперсимметричные дублеты. Отсутствие суперсимметричных основных состояний (для теорий поля — отсутствие суперсимметричных вакуумов) означает, что суперсимметрия *спонтанно нарушена*. Действительно, здесь нет концептуального отличия от моделей, описывающих спонтанное нарушение обычной глобальной симметрии, которые мы обсуждали в п. 11.5.2. Во всех этих случаях лагранжиан инвариантен относительно преобразований симметрии², в то время как вакуумы такой симметрией не обладают.

14.2. Грассманово описание

Гамильтониан Паули имеет матричный вид. С этим не было бы проблем, если бы задача состояла только в решении уравнения Шрёдингера и нахождении спектра. Но такая форма неудобна, если вы хотите установить связь между гамильтоновой и лагранжевой формулировкой и хотите понять, с какими преобразованиями суперсимметрии для динамических переменных, оставляющими действие инвариантным, связано в духе теоремы Нётер наличие новых интегралов движения — суперзарядов.

Всего этого можно достичь, используя грассмановы переменные. Мы ввели понятие грассмановых чисел в главе 6 и использовали

¹Заметим между прочим, что, $\Phi/(2\pi)$ не может быть дробным — поток *квантован*. Если бы $\Phi/(2\pi)$ не было целым, то нельзя было бы однозначно определить волновую функцию электрона и корректно сформулировать квантовую задачу.

²Правда, мы ещё не знаем, что такое суперсимметричный лагранжиан и что такое преобразования суперсимметрии, но мы это скоро узнаем!

его для описания динамики фермионных полей в главе 9. И там мы заметили, что грассмановы числа идеально подходят для описания суперсимметричных систем, и обещали объяснить это в главе 14, т. е. *здесь*. Пришло время выполнить наше обещание.

В главе 9 мы показали, как гамильтониан обыкновенного осциллятора можно выразить через голоморфные переменные [уравнение (9.9)]. Мы также выписали там лагранжиан и гамильтонианы (классический и квантовый) для «грассманова осциллятора» — системы, включающей единственную грассманову переменную ξ [уравнения (9.18), (9.23), (9.28)].

Гамильтониан суперсимметричного осциллятора — это просто сумма обыкновенного осцилляторного гамильтониана и грассманова осцилляторного гамильтониана. Складывая соотношения (9.12) и (9.28), мы получаем

$$\begin{aligned} H_{\text{суп-осц}}^{\text{квант}} &= \frac{\omega}{2} \left(a^* \frac{\partial}{\partial a^*} + \frac{\partial}{\partial a^*} a^* \right) - \frac{\omega}{2} \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \right) = \\ &= \omega \left(\frac{\partial}{\partial a^*} a^* - \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right), \end{aligned} \quad (14.18)$$

где a^* — обыкновенное комплексное число и ξ — грассманово комплексное число.

Выражение (14.18) — это квантовый гамильтониан. В классической теории дифференциальные операторы $\partial/\partial a^*$ и $\partial/\partial \xi$ переходят в сопряжённые голоморфные переменные a и $\xi^\dagger$, играющие роль канонических импульсов. Как следует из определений (9.10) и (9.24), канонические скобки Пуассона имеют вид

$$\{a, a^*\} = \{\xi^\dagger, \xi\} = i. \quad (14.19)$$

Классическое выражение, соответствующее (14.18), есть

$$H_{\text{суп-осц}}^{\text{класс}} = \omega (aa^* - \xi \xi^\dagger). \quad (14.20)$$

Собственные значения и нормированные собственные функции квантового гамильтониана (14.18) имеют вид

$$\begin{aligned} \Psi_n(a^*, \xi) &= \frac{(a^*)^n}{\sqrt{n!}}, \quad E = \omega(n+1), \\ \tilde{\Psi}_n(a^*, \xi) &= \frac{(a^*)^n}{\sqrt{n!}} \xi, \quad E = \omega n. \end{aligned} \quad (14.21)$$

Естественно назвать состояния без грассманова фактора ξ в волновой функции *бозонными*, а состояния, включающие этот фактор, — *фермионными*.

Имеется одно неспаренное состояние с нулевой энергией $\Psi = \xi$, в то время как все возбуждённые состояния спарены: состояния $\Psi = 1$ и $\Psi = a^* \xi$ имеют энергию ω , состояния $\Psi = a^*$ и $\Psi \sim (a^*)^2 \xi$ — энергию 2ω и т. д.

Волновая функция основного состояния включает фактор ξ , и оно является поэтому фермионным. Это можно интерпретировать в согласии с логикой главы 9: вакуумное состояние — это состояние с заполненным дираковским морем. Но часто используется также альтернативный подход, когда в качестве основной голоморфной фермионной переменной, от которой зависит волновая функция, берётся не ξ , а $\xi^\dagger$. В этом представлении

$$H^{\text{квант}} = \omega \left(a^* \frac{\partial}{\partial a^*} + \xi^\dagger \frac{\partial}{\partial \xi^\dagger} \right) \quad (14.22)$$

и вакуум бозонный, $\Psi_{\text{вак}}(a^*, \xi^\dagger) = 1$. Использование той или другой конвенции — дело вкуса.

Из нашего определения следует, что система (14.18) суперсимметрична. Нетрудно написать выражения для квантовых суперзарядов:

$$Q = \sqrt{\omega} a^* \xi, \quad Q^\dagger = \sqrt{\omega} \frac{\partial^2}{\partial a^* \partial \xi}. \quad (14.23)$$

Суперзаряды (14.23) нильпотентны, и их антикоммутатор даёт гамильтониан (14.18).

Лагранжиан может быть получен преобразованиями Лежандра. Мы получаем

$$L = i(\dot{a}a^* - \dot{\xi}\xi^\dagger) + \omega(\xi\xi^\dagger - aa^*). \quad (14.24)$$

Мы приглашаем читателя проверить следующие факты.

- Уравнения движения, вытекающие из формулы (14.24), совпадают с уравнениями Гамильтона (9.22), вытекающими из (14.20).
- Лагранжиан (14.24) инвариантен относительно преобразований

$$\begin{aligned} \delta a &= i\varepsilon^\dagger \xi, & \delta a^* &= i\varepsilon \xi^\dagger, \\ \delta \xi &= i a \varepsilon, & \delta \xi^\dagger &= -i a^* \varepsilon^\dagger, \end{aligned} \quad (14.25)$$

где ε — комплексный грассманов параметр. Это и есть искомые преобразования суперсимметрии.

Мы описали простейшую возможную суперсимметричную систему, но и другие такие системы удобно описываются на грассмановом языке. В частности, можно перевести матричные выражения

для суперзарядов и гамильтониана (14.12) и (14.11) на грассманов язык, сделав замену

$$\begin{aligned}\sigma_- &= \frac{\sigma_1 - i\sigma_2}{2} \rightarrow \psi, & \sigma_+ &= \frac{\sigma_1 + i\sigma_2}{2} \rightarrow \hat{\psi}^\dagger \equiv \frac{\partial}{\partial \psi}, \\ \sigma_3 &= [\sigma_+, \sigma_-] \rightarrow \hat{\psi}^\dagger \psi - \psi \hat{\psi}^\dagger\end{aligned}\quad (14.26)$$

[ср. замечание после уравнения (9.30)]. Действительно, ψ и $\hat{\psi}^\dagger$ обладают теми же свойствами, что квантовые операторы ξ и $\hat{\xi}^\dagger$ в только что рассмотренной модели: они нильпотентны, эрмитово-сопряжены друг к другу, и их антикоммутатор равен единице.

Суперзаряды (14.12) приобретают вид¹

$$\begin{aligned}Q &= \sqrt{2}\psi\left(\pi^\dagger + \frac{iBw}{4}\right), \\ Q^\dagger &= \sqrt{2}\hat{\psi}^\dagger\left(\pi - \frac{iBw^*}{4}\right),\end{aligned}\quad (14.27)$$

где $\pi = -i\partial/\partial w$ и $\pi^\dagger = -i\partial/\partial w^*$ — квантовые бозонные канонические импульсы и $\hat{\psi}^\dagger \equiv \partial/\partial \psi$. Операторы (14.27) действуют на волновые функции $\Psi(w, w^*; \psi)$.

Состояния, исчезающие под действием $Q^\dagger$, которые мы ранее интерпретировали как состояния со спином вверх, не содержат в волновых функциях фактора ψ и интерпретируются теперь как бозонные состояния. Состояния со спином вниз, аннигилируемые действием Q , интерпретируются теперь как фермионные состояния.

Алгебра (14.9) есть простейшая алгебра суперсимметрии с одной парой комплексных суперзарядов. Очевидное обобщение достигается, если добавить ещё одну пару суперзарядов и постулировать антикоммутаторы

$$\begin{aligned}\{Q_j, Q_k\}_+ &= \{Q_j^\dagger, Q_k^\dagger\}_+ = 0, \\ \{Q_j, Q_k^\dagger\}_+ &= \delta_{jk}H, \quad j, k = 1, 2.\end{aligned}\quad (14.28)$$

В этом случае у гамильтониана есть *четыре* разных эрмитовых квадратных корня и мы имеем дело с расширенной алгеброй суперсимметрии $\mathcal{N} = 4$.

¹ Чтобы не загромождать формул, мы не рисуем шляпки над Q и $Q^\dagger$, ни над π и другими бозонными операторами, ни над ξ и ψ , но должны это делать для $\hat{\xi}^\dagger$ и $\hat{\psi}^\dagger$, чтобы отличить квантовые операторы от классических переменных.

Имеется множество квантовых систем, где эта алгебра реализуется. Мы приведём один пример:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \psi_1 \pi + i(w^*)^2 \hat{\psi}_2^\dagger, & Q_2 &= \psi_2 \pi - i(w^*)^2 \hat{\psi}_1^\dagger, \\ Q_1^\dagger &= \hat{\psi}_1^\dagger \pi^\dagger - i w^2 \psi_2, & Q_2^\dagger &= \hat{\psi}_2^\dagger \pi^\dagger + i w^2 \psi_1, \end{aligned} \quad (14.29)$$

где $\hat{\psi}_j^\dagger = \partial/\partial\psi_j$.

Фермионные операторы в формулах (14.29) удовлетворяют соотношениям, определяющим алгебру Клиффорда:

$$\{\psi_j, \psi_k\}_+ = \{\hat{\psi}_j^\dagger, \hat{\psi}_k^\dagger\}_+ = 0, \quad \{\psi_j, \hat{\psi}_k^\dagger\}_+ = \delta_{jk}, \quad (14.30)$$

и их можно при желании проинтерпретировать как матрицы размера 4×4 . Например,

$$\begin{aligned} \psi_1 &\equiv \sigma_- \otimes \mathbb{1}, & \psi_2 &\equiv \sigma_3 \otimes \sigma_-, \\ \hat{\psi}_1^\dagger &\equiv \sigma_+ \otimes \mathbb{1}, & \hat{\psi}_2^\dagger &\equiv \sigma_3 \otimes \sigma_+. \end{aligned} \quad (14.31)$$

Спектр возбуждённых состояний в такой системе четырёхкратно вырожден. Теоретикам известны нетривиальные суперсимметричные квантовомеханические системы с алгеброй $\mathcal{N} = 8$ и восьмикратным вырождением спектра и системы с ещё более высоким вырождением вплоть до $\mathcal{N} = 32$.

14.3. Полевые теории

В суперсимметричной квантовой механике грассмановы переменные — это удобное, но необязательное средство описания теории. При желании можно не использовать лагранжев язык и работать с квантовыми матричными суперзарядами и гамильтонианом. В суперсимметричных полевых теориях без грассмановых переменных, однако, не обойтись. Суперсимметричный квантовый гамильтониан, включающий n грассмановых степеней свободы, может быть представлен как матрица размера $2^n \times 2^n$. Но в теориях поля число степеней свободы бесконечно. Если не использовать грассмановы переменные, то гамильтониан становится бесконечномерной матрицей, с которой трудно работать¹.

¹ Аналитически это невозможно, если теория включает нетривиальные взаимодействия. Но такое матричное представление используется в численных вычислениях континуальных интегралов на решётках (континуальный интеграл по фермионным переменным определяется как детерминант бесконечномерной матрицы, которая становится матрицей большого, но конечного размера в практических вычислениях). Это непросто, но в конечном счёте возможно.

Как мы знаем, антикоммутирующие поля описывают фермионы. И двукратное вырождение возбуждённых собственных состояний гамильтониана, характерное для всех суперсимметричных теорий, — это вырождение между бозонными и фермионными состояниями. У нас (пока?) нет прямого экспериментального подтверждения гипотезы, что фундаментальная теория нашего мира суперсимметрична, но теоретически можно написать множество различных суперсимметричных лагранжианов и исследовать свойства гипотетических миров, которые они описывают...

Надо сказать, что за последние 30—40 лет теоретическая физика сильно изменила свой характер. Стало всё труднее и труднее строить новые ускорители, и, как результат, поток экспериментальных открытий в значительной степени иссяк. Не иссяк пока совсем, но можно сказать, что из бурной реки он превратился в журчащий ручеек. Этот ручеек не может трудоустроить всех теоретиков, и у многих из нас нет другого выбора, как исследовать вместо реального физического мира различные воображаемые миры. Фактически это значит, что большинство теоретиков занимаются сегодня не физикой (не изучают природу, такую как она есть), а *математикой*.

Действительно, можно вспомнить, что геометрия впервые возникла в Вавилоне как прикладная инженерная дисциплина, обслуживающая нужды крестьян и мытарей. В то время она не была ещё математикой в точном смысле этого слова. Но положение изменилось, когда греки открыли для себя красоту геометрии и занялись построением чисто *абстрактных* геометрических конструкций. Согласно легенде, когда один из посетителей спросил Евклида, в чём практическая польза математических теорем, тот позвал раба и приказал ему выдать посетителю обол¹ и проводить его к дверям, поскольку *этот человек ищет пользы, но не ищет истины*.

Евклид занимался планиметрией и стереометрией, которые всё-таки описывают природу, и эти занятия всё же могут принести известную пользу для сельского хозяйства и архитектуры. В известном смысле, это была теоретическая, но физика. Но позднее люди с интересом принялись за изучение геометрий четырёхмерного и ещё более высокомерных воображаемых миров. И это было уже подлинной математикой.

¹ Греческая серебряная монета.

Изучение природы и формулировка изученного в кратких и строгих математических терминах даёт язык, набор кирпичиков, с помощью которых можно в дальнейшем строить на бумаге фантастические дворцы — занятие, которое не приносит непосредственной практической пользы. Но вы, конечно, понимаете: если что-либо не приносит практической пользы *сегодня*, это не значит, что оно не принесёт пользы *никогда*.

Вот один из многих примеров: мы знаем благодаря Эйнштейну, что геометрия нашего вполне реального и вполне физического мира на самом деле четырёхмерна и что это четырёхмерное пространство не вполне плоское, но имеет кривизну (мы будем подробно обсуждать это в следующей главе). Чтобы описать это, Эйнштейн использовал язык римановой геометрии, развитый за несколько десятилетий до того чистыми математиками, искавшими не пользу, но удовольствие и красоту.

Другими словами, играть в абстрактные математические игры — это не всегда асоциальное поведение. Довольно часто эти игры помогают развить подходящий язык для описания физических явлений. Диалог между математикой и теоретической физикой плодотворен для обеих наук¹.

Что касается суперсимметрии, то есть серьёзные причины полагать, что она *играет* роль в нашем мире и описывает определённые физические явления. Мы уже говорили об этом в главе 12 и сделаем на эту тему ещё несколько добавочных замечаний в конце этой главы. Но мы пока не знаем, в какой именно форме, в каких одеждах суперсимметрия однажды явится к нам и просияет. В ожидании этого имеет смысл исследовать разные теоретические возможности.

¹ К сожалению, этот диалог сегодня часто тормозится различием используемых нами языков: мне трудно понять статью, написанную чистым математиком, даже если она написана на тему, о которой я имею определённое представление, поскольку утверждения выражены там в непривычной для меня форме — на другом, плохо мне известном языке. С другой стороны, я слышал жалобы от коллег-математиков, что им сложно понимать статьи, написанные физиками. Этот раскол между двумя сообществами — сравнительно новое явление. 200 лет назад ничего подобного не было; сто лет назад различие между языками уже существовало, но оно не было таким глубоким. Раскол углубился после деятельности группы Бурбаки в середине прошлого века, которая (это сугубо моё личное мнение!) принесла больше вреда, чем пользы. В любом случае, нравится это нам или не нравится, такой раскол есть объективная реальность, данная нам в ощущениях, и с ней надо считаться.

Первый пример суперсимметричного полевого лагранжиана был дан Юрием Гольфандом и Евгением Лихтманом в их выдающейся работе 1971 года. Это был лагранжиан *суперсимметричной электродинамики*.

Спектр этой теории включает безмассовый «фотон» (мы поставили кавычки, потому что это не физический, известный нам из опыта фотон), его безмассовый фермионный суперпартнёр — фотино, массивные «электрон» и «позитрон» и два заряженных «скалярных электрона» с той же массой. Вы можете спросить: «Зачем нужно целых два заряженных скаляра, не было бы достаточно одного?» Нет, одного недостаточно. В спектре имеется 4 физических фермионных массивных состояния: два спиральных состояния электрона и два спиральных состояния позитрона. Для суперсимметрии необходимо столько же массивных скалярных состояний, а для этого необходимо включить в лагранжиан два различных комплексных скалярных поля.

Мы не выпишем здесь полное выражение для этого лагранжиана, оно несколько громоздко, но приведём его часть, описывающую свободные фотонное и фотинное поля:

$$\mathcal{L}_{\text{фотон/ино}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\psi\sigma^\mu\partial_\mu\psi^\dagger, \quad (14.32)$$

где фотинное поле ψ_α — нейтральный (майорановский) 2-компонентный спинор. Имеется два спиральных состояния фотино и два спиральных состояния фотона. Они спарены суперсимметрией.

Запишем, однако, полный лагранжиан для простейшей нетривиальной суперсимметричной полевой модели — *модели Весса—Зумино*. Этот лагранжиан включает 2-компонентное поле ψ_α , описывающее майорановский фермион, и комплексный скаляр φ . Лагранжиан имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{WZ} = & \partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi^* + i\psi\sigma^\mu\partial_\mu\psi^\dagger - \\ & - \frac{1}{2}\left[\mathcal{W}''(\varphi)\psi^\alpha\psi_\alpha + \left(\begin{array}{c} \text{комплексно-} \\ \text{сопряжённое} \end{array}\right)\right] - \mathcal{W}'(\varphi)\mathcal{W}'(\varphi^*), \end{aligned} \quad (14.33)$$

где функция

$$\mathcal{W}(\varphi) = \frac{m}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{6}\varphi^3 \quad (14.34)$$

называется *суперпотенциалом*; $\mathcal{W}'(\varphi)$ и $\mathcal{W}''(\varphi)$ — его первая и вторая производные.

При $\lambda \neq 0$ в модели есть богатая динамика. Скалярный потенциал включает, помимо массового члена $m^2 \varphi \varphi^*$, кубичное и квартичное взаимодействия. Фермионы обладают той же массой¹ m и участвуют вместе со скалярами во взаимодействии Юкавы. Важно, что *одна и та же* функция (14.34) описывает фермионные взаимодействия и скалярный потенциал. Иначе система не была бы суперсимметричной.

А система (14.33) суперсимметрична. Одно из следствий этого — тот факт, что петлевые поправки к фермионным и скалярным массам совпадают во всех порядках теории возмущений. Вырождение между бозонными и фермионными состояниями *точное*. Последнее следует из инвариантности действия Весса—Зумино относительно суперпреобразований

$$\begin{aligned}\delta\varphi &= \psi^\alpha \varepsilon_\alpha, \\ \delta\varphi^* &= \varepsilon^\dagger_{\dot{\alpha}} \psi^{\dagger\dot{\alpha}}, \\ \delta\psi^\alpha &= i\partial_\mu \varphi \varepsilon^\dagger_{\dot{\beta}} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\beta}\alpha} - \varepsilon^\alpha \mathcal{W}'(\varphi^*), \\ \delta\psi^{\dagger\dot{\alpha}} &= -i\partial_\mu \varphi^* (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta} \varepsilon_\beta - \varepsilon^{\dagger\dot{\alpha}} \mathcal{W}'(\varphi),\end{aligned}\tag{14.35}$$

где $\bar{\sigma}^\mu$ было определено в формуле (2.11). Вы можете проверить эту инвариантность явным вычислением, но, возможно, это упражнение не принесёт вам удовлетворения. Вы не поймёте, *почему* действие инвариантно, как Юлиус Весс и Бруно Зумино вывели лагранжиан (14.33) в 1974 г. и как пионеры, Гольфанд и Лихтман, получили лагранжиан суперсимметричной КЭД тремя годами ранее.

Это интересный для историков науки вопрос, но я не хочу здесь отвлекать на него ваше внимание. Очень часто рассуждения, приведённые в пионерских статьях, выглядят неуклюже и малоэстетично. Более прямые, красивые и ясные обоснования приходят потом. Можно поинтересоваться, например, как именно Архимед вывел свою знаменитую формулу $V = 4\pi R^3/3$ для объёма шара. Надо сказать, что Архимед был очень горд этим результатом и даже завещал выгравировать соответствующий красивый и сложный чертёж на своём могильном камне. Однако с той поры, как люди научились брать ин-

теграл $\int_0^\pi \sin \theta d\theta$ аналитически, архимедов способ вывода потерял своё практическое значение и остался интересен только историкам.

¹ Эта масса имеет майорановскую природу, см. с. 192.

Что касается суперсимметрии, то адекватный формализм, основанный на понятиях *суперпространства* и *суперполей*, который позволяет вывести обсуждавшиеся выше лагранжианы и множество других суперсимметричных лагранжианов очень простым «индустриальным» способом, был развит Абдусом Саламом и Джоном Стратди в 1974 г. Мы не будем его здесь описывать, но попытаемся объяснить его сущность, прибегнув к аналогии.

Объём параллелепипеда, натянутого на векторы **a**, **b**, **c**, есть

$$V = |[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot \mathbf{c}|. \quad (14.36)$$

Очевидно, объём инвариантен относительно вращений. Однако эту инвариантность не так просто было бы заметить, глядя на формулу, выражающую объём через компоненты:

$$V = |a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 c_2 b_3 - a_2 c_3 b_1 - a_3 c_1 b_2|. \quad (14.37)$$

Мы хотим теперь провести аналогию между соотношениями (14.37) и (14.33). Обе эти формулы представляют собой *компонентные* выражения и могут быть переписаны в более компактной форме. Суть в том, что формализм Салама и Стратди позволяет выразить суперсимметричные действия в короткой суперполевой форме точно так же, как формула (14.36) выражает объём параллелепипеда в короткой векторной форме. В частности, бозонное поле $\varphi(x)$ и фермионное поле $\psi_\alpha(x)$ в формуле (14.33) представляют собой различные компоненты подходящего (так называемого *кирального*) суперполя — в том же смысле, как числа a_1, a_2, a_3 суть различные компоненты вектора **a**.

В основе суперсимметричных одномерных квантовомеханических моделей из предыдущего параграфа лежала алгебра (14.9). Как эта алгебра обобщается в четырёхмерном случае?

Прежде всего мы хотим обеспечить лоренцеву инвариантность. Это значит, что роль гамильтониана должна перейти к оператору 4-импульса P_μ . Суперзаряды тоже должны принадлежать к определённому представлению группы Лоренца. Принимая во внимание тот факт, что генераторы суперсимметрии делают из бозонов фермионы и что фермионные поля ψ_α и $\psi_\alpha^\dagger$ — спиноры, нетрудно заключить, что и суперзаряды должны быть спинорами. Обобщение соотношений (14.9) пишется тогда само собой:

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\}_+ = \{Q_\alpha^\dagger, Q_\beta^\dagger\}_+ = 0, \quad \{Q_\alpha, Q_\beta^\dagger\}_+ = (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu. \quad (14.38)$$

Система (14.33) — это простейшая суперсимметричная модель с тривиальным взаимодействием. Существует множество других моделей. Интересна *суперсимметричная теория Янга—Миллса* (СЯМ). Её лагранжиан представляет неабелево обобщение лагранжиана суперсимметричной фотодинамики (14.32) и записывается в виде

$$\mathcal{L}_{\text{SYM}} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a + i\psi^a \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi^{\dagger a}, \quad (14.39)$$

где a — присоединённый цветной индекс и $\mathcal{D}_\mu$ — ковариантная производная, $\mathcal{D}_\mu X^a = \partial_\mu X^a + g f^{abc} A_\mu^b X^c$.

На древесном уровне спектр теории содержит безмассовые глюоны и *глюино* — безмассовые фермионные состояния, лежащие в присоединённом представлении калибровочной группы.

Пусть калибровочная группа есть $SU(N)$. Принимая во внимание две спиральные поляризации $h = \pm 1$ для глюонов и две спиральные поляризации $h = \pm 1/2$ для глюино, мы получаем $2(N^2 - 1)$ квантовых глюонных состояний с данным импульсом $\mathbf{p}$ и столько же квантовых глюонных состояний. У каждого глюонного состояния есть глюонный суперпартнёр со спиральностью, отличающейся от спиральности глюона на половинку. Эти два состояния образуют отдельный супермультиплет.

Таким образом, подходящая компонента суперзаряда¹ Q , действуя на глюонное состояние со спиральностью $h = 1$, даёт состояние глюино со спиральностью $h = 1/2$ и с тем же импульсом и цветом. Это состояние аннигилируется действием Q : $Q|h = 1/2\rangle = 0$. С другой стороны, $Q^\dagger|h = 1/2\rangle = |h = 1\rangle$, в то время как $Q^\dagger|h = 1\rangle = 0$. Другой тип супермультиплетов включает глюонные состояния со спиральностью $h = -1$, спаренные с глюонными состояниями со спиральностью $h = -1/2$ (см. рис. 14.3 а).

Однако теория (14.39) асимптотически свободна, и это, вероятно, означает, что в ней имеет место конфайнмент. Тогда физический спектр включает только массивные адроподобные состояния, сделанные из фундаментальных глюонных и глюонных полей:

¹Какая именно — зависит от направления импульса. Например, если 3-импульс направлен вдоль положительной оси z , так что $p^\mu = (E; 0, 0, E)$ и $p_\mu = (E; 0, 0, -E)$, то существенны только компонента суперзаряда $Q_{a=2}$ и эрмитово-сопряжённый оператор — из всех антикоммутирующих $\{Q_\alpha, Q_\beta^\dagger\}_+$ в соотношениях (14.38) только $\{Q_2, Q_2^\dagger\}_+$ имеет в этом случае ненулевую проекцию на состояния частиц, в то время как суперзаряды Q_1 и $Q_1^\dagger$ отщепляются.

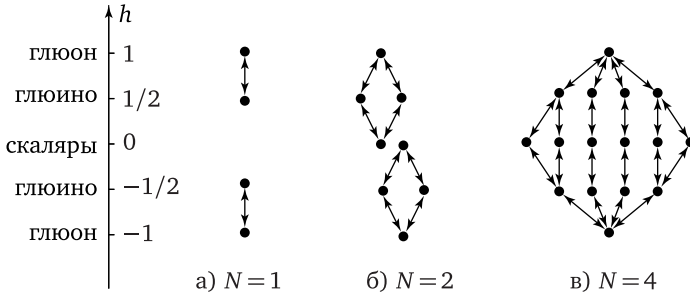


Рис. 14.3. Супермультиплеты в пертурбативном спектре различных теорий СЯМ. Стрелки, обращённые вниз, описывают действие Q , стрелки, обращённые вверх, — действие $Q^\dagger$. В случае мультиплета $\mathcal{N}=4$ показаны не все действия суперзарядов.

глюболлы¹ (они бозоны) и их фермионные суперпартнёры глюбалино.

Как и в случае квантовой механики, алгебру (14.38) можно расширить с включением дополнительных суперзарядов. Забудем на секунду о конфайнменте. Дополнительные суперзаряды означают присутствие дополнительных глюонных состояний в пертурбативном спектре. В расширенной суперсимметричной теории Янга—Миллса $\mathcal{N}=2$ имеется два различных глюонных поля, и число глюонных физических состояний вдвое превышает число глюонных. Чтобы число бозонных и фермионных состояний совпадало, как требует суперсимметрия, необходимо присутствие дополнительных бозонных состояний. И действительно, полный лагранжиан $\mathcal{N}=2$ СЯМ включает, помимо полей A_μ^a , $\psi_\alpha^{a(1)}$ и $\psi_\alpha^{a(2)}$, ещё два вещественных скаляра в присоединённом представлении группы. Для каждого значения цветного индекса a и импульса $\mathbf{p}$ мы имеем в этом случае два супермультиплета, каждый из которых содержит 4 вырожденных состояния (см. рис. 14.3 б).

Теория $\mathcal{N}=4$ особенно интересна. Помимо калибровочного поля, она включает четыре разных глюонных поля и шесть разных вещественных скаляров. На древесном уровне она включает для каждого цвета a и импульса $\mathbf{p}$ один супермультиплет состояний (как мы видели, в случае $\mathcal{N}=1$ и $\mathcal{N}=2$ супермультиплетов два). Этот мультиплет содержит 16 вырожденных состояний: $1 + 1 = 2$ глюонных состояния со спиральностью $h = \pm 1$, $4 + 4 = 8$ фермионных состоя-

¹ По-английски — *glueball*, клейкий мячик.

ний со спиральностью $h = \pm 1/2$ и 6 скалярных состояний с нулевой спиральностью. Справедливо замечательное равенство

$$2 + 6 = 8,$$

так что наш 16-плет содержит равное число бозонных и фермионных состояний.

В теории $\mathcal{N} = 4$ константа связи не «бежит» — различные пертурбативные вклады в её перенормировку точно сокращаются во всех порядках. Это значит, что в теории нет конфайнмента и что древесные пертурбативные состояния суть истинные физические собственные состояния гамильтониана¹.

Другая интересная теория — супергравитация. Мы отложим разговор о ней до последней главы.

14.4. За и против

Некоторые причины, по которым большинство экспертов сегодня полагает, что суперсимметрия имеет отношение к реальности, были перечислены в § 12.7. Здесь мы снова обсудим этот вопрос. Я попытаюсь привести и обсудить все известные мне аргументы за и против суперсимметрии. Каждый читатель приглашается сделать собственные выводы.

Вы, наверное, слышали рассказ о том, как лорд Кельвин (которому мы обязаны законами термодинамики в современном виде и шкалой абсолютных температур) делал в 1900 г. доклад в британском Королевском обществе. Он сказал тогда, что здание теоретической физики (его архитектура и дизайн очень сильно отличались, конечно, в то время от того, что мы обсуждали в главе 4) в основном построено, хотя его красота и гармония несколько затемнены пока двумя облачками.

1) Станным результатом эксперимента Альберта Майкельсона и Эдварда Морли, которые пытались обнаружить светоносный эфир, но не смогли этого сделать.

2) Ультрафиолетовой катастрофой для излучения чёрного тела (согласно классической теории, светимость чёрного тела бесконечна).

¹ Я здесь немного упрощаю. Так же как заряженные асимптотические состояния в КЭД — не просто электроны, но электроны, сопровождаемые рождённым ими электромагнитным полем, представляющим когерентную смесь множества мягких фотонов, физические состояния в теории $\mathcal{N} = 4$ СЯМ тоже представляют подобные когерентные смеси. Но если константа связи невелика, то этот эффект несуществен.

Кельвин обратил внимание слушателей на эти два несовершенства, но выразил надежду, что в скором времени эти парадоксы будут разрешены и увенчанные лаврами физики смогут уйти на заслуженный покой. Майкельсон выразил по какому-то другому поводу схожую мысль в ещё более сильной форме: «Кажется вероятным, что почти все фундаментальные физические принципы к настоящему времени твёрдо установлены... Единственное, чем физики смогут заниматься в будущем, — это уточнять значения измеренных констант в шестом знаке после запятой».

Мы знаем сейчас, насколько Кельвин и Майкельсон были неправы. «Облачка», отмеченные Кельвиным, отказались рассеиваться. Вместо этого первое из облачков побудило Лоренца, Пуанкаре и Эйнштейна сформулировать специальную теорию относительности, а дождь, пролившийся из второго облачка, оросил засушливую классическую почву, и из дремавших там семян выросла вся квантовая механика.

Я вспомнил эту историю, поскольку сегодня мы в сходном положении. Здание Стандартной модели выстроено. Но его красота скрадывается двумя нависшими над этим зданием новыми облачками.

1) Как говорилось в § 12.7, Стандартная модель внутренне противоречива ввиду отсутствия асимптотической свободы в калибровочном абелевом и в юкавском секторах и ввиду квадратичных расходимостей в скалярном секторе.

2) Сегодня абсолютно неясно, почему вакуумная энергия в нашей Вселенной настолько близка к нулю [см. обсуждение в § 4.7]. Наблюдаемая космологическая константа (она же тёмная энергия) меньше естественной шкалы $\sim m_p^4$ на 123 порядка!

Сконцентрируем внимание на втором облачке. Мы только что узнали, что энергия суперсимметричного вакуумного состояния, аннигилируемого действиями всех суперзарядов, есть точный нуль. С учётом этого, невероятно малая величина вакуумной энергии в нашем мире кажется явной уликой, «дымящимся пистолетом», указывающим на присутствие суперсимметрии.

С другой стороны, мир, доступный нашему изучению, не суперсимметричен. Следовательно, если суперсимметрия существует на фундаментальном уровне, то она должна быть *нарушена*. И нарушена она должна быть так, чтобы, с одной стороны, вакуумная энергия оказалась очень близкой к нулю и, с другой стороны, в низкоэнер-

гетическом спектре частиц от суперсимметрии не осталось никаких следов! Этого достичь непросто...

Симметрия может быть нарушена явно, когда к лагранжиану добавляется член, не инвариантный под её действием. Например, кварковый массовый член явно разрушает симметрию $SU_L(N_f) \times SU_R(N_f)$ безмассовой КХД (см. п. 11.5.3). Суперсимметрия тоже может оказаться нарушенной явно.

Суперсимметрия может быть также нарушена спонтанно, когда действие сохраняет точную суперсимметрию, но вакуумное суперсимметричное состояние отсутствует. Этот сценарий эстетически, конечно, намного более привлекателен и имеет, на мой взгляд, больше шансов оказаться истинным. Следуя нашему обычаю объяснять сложные вещи на примере простых игрушечных моделей, мы рассмотрим очень простую суперсимметричную квантовомеханическую модель со спонтанным нарушением суперсимметрии, где вакуумная энергия не точный нуль, но её значение экспоненциально мало и может быть сделано настолько близко к нулю, насколько мы пожелаем.

Как мы заметили в конце § 14.1, в задаче об электроде, движущемся в магнитном поле, суперсимметрия спонтанно нарушается, если магнитное поле имеет нулевой поток (14.6). Но мы хотим сейчас рассмотреть ещё более простую модель. В этой модели (предложенной Эдвардом Виттеном) квантовые суперзаряды и гамильтониан имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{\sqrt{2}} \psi [p - iW'(x)], \\ Q^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\psi}^\dagger [p + iW'(x)]; \end{aligned} \quad (14.40)$$

$$H = \frac{p^2 + [W'(x)]^2}{2} + \frac{1}{2} W''(x) (\psi \hat{\psi}^\dagger - \hat{\psi}^\dagger \psi), \quad (14.41)$$

где $p = -i\partial/\partial x$, а ψ и $\hat{\psi}^\dagger$ можно отождествить в матричной формулировке с σ_- и σ_+ , так что гамильтониан (14.41) описывает одномерное движение частицы со спином $\frac{1}{2}$ во внешнем потенциале $V = \frac{1}{2} [W'(x)]^2$ и магнитном поле $W''(x)$.

Пусть $W(x)$ — полином. Если это полином чётного порядка, то существует суперсимметричное вакуумное состояние:

$$\Psi_{\text{вак}} = e^{-W(x)} \quad \text{или} \quad \tilde{\Psi}_{\text{вак}} = \psi e^{W(x)} \quad (14.42)$$

в зависимости от $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} W(x)$ — есть это $+\infty$ или $-\infty$. Но если $W(x)$ — нечётный полином, то волновые функции (14.42) не нормируемы и суперсимметричный вакуум отсутствует. Возьмём

$$W(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{gx^3}{3} \quad (14.43)$$

и предположим, что g мало. В бозонном секторе (отвечающем состояниям со спином вверх в матричной формулировке) эффективный потенциал есть

$$V_{\text{боз}}(x) = \frac{[W'(x)]^2 - W''(x)}{2}. \quad (14.44)$$

Это «перекошенный» потенциал Лифшица; правая яма немного глубже левой. В фермионном секторе

$$V_{\text{ферм}}(x) = \frac{[W'(x)]^2 + W''(x)}{2} \quad (14.45)$$

и немного глубже левая яма.

При $g \ll 1$ барьер между двумя ямами высок, порядка $1/g^2$. Есть два вырожденных основных состояния — бозонное и фермионное. Бозонное состояние живёт в основном в правой яме, а фермионное — в левой. Их энергия положительна, но мала:

$$E_0 \sim \frac{1}{g^2} \exp\left\{-\frac{1}{3g^2}\right\}. \quad (14.46)$$

Было бы неплохо, если бы природу описывала подобная простая модель. К сожалению, это не так. Простые модели не работают по нескольким причинам. Одна из них — то, что мы не видим *голдстино*.

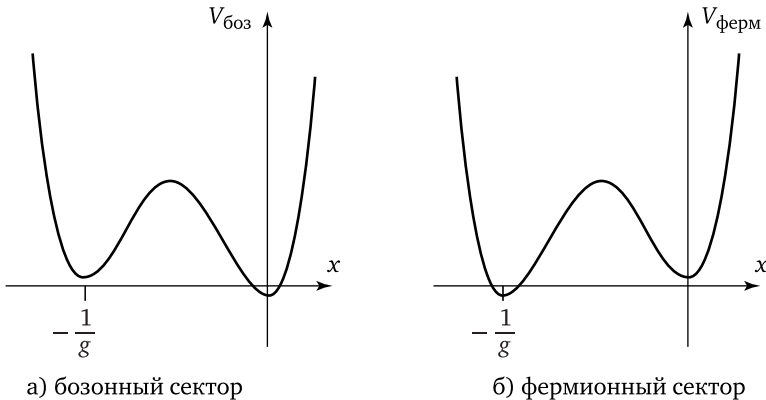


Рис. 14.4. Перекошенный потенциал Лифшица в модели Виттена

Голдстино — это нейтральный безмассовый фермион, который с необходимостью возникает в любой теории, включающей спонтанное нарушение глобальной суперсимметрии, по той же причине, по которой в системе со спонтанным нарушением обычной глобальной симметрии возникает безмассовый голдстоуновский бозон¹. От голдстино можно избавиться, рассматривая более сложные модели, включающие супергравитацию. Тогда голдстино может быть «съедено» *гравитино*², которое становится за его счёт массивным. Это так называемый суперсимметричный эффект Хиггса, открытый Дмитрием Волковым и Вячеславом Сорокой в 1973 г., который вполне аналогичен обычному эффекту Хиггса, когда калибровочный бозон приобретает массу, закусив обычным голдстоуновским бозоном.

От голдстино мы можем, таким образом, избавиться, но на нас тогда снова набрасывается мстительная тёмная энергия. Естественная шкала плотности вакуумной энергии в этом случае составляет $m_{\text{гравитино}}^4$. Так как экспериментаторы не видят гравитино, его масса должна быть как минимум ~ 100 ГэВ, что даёт $\epsilon_{\text{вак}} \gtrsim (100 \text{ ГэВ})^4$. А это больше наблюдаемой величины космологической константы пусть не на 123, но по крайней мере на 60 порядков. Надо признать, что второе облачко, отмеченное на с. 347, по-прежнему барражирует в небе вдоль границ неведомого...

Посмотрим теперь на первое облачко. Здесь ситуация лучше. Суперсимметрия действительно может разрешить некоторые парадоксы Стандартной модели. Суть в том, что суперсимметрия может привести к интересным сокращениям и устранить, таким образом, неприятные расходимости. Мы говорили уже о сокращении различных расходящихся вкладов в вакуумную энергию. Другое важное сокращение — это сокращение квадратичных расходимостей в массе бозона Хиггса: в суперсимметричной версии Стандартной модели их нет.

Связанный факт — это суперсимметричное разрешение так называемой *проблемы иерархии*. Эта проблема возникает в теориях Великого объединения. Как говорилось в п. 12.7.2, эти теории постулируют существование большой фундаментальной калибровочной группы G , которая нарушается на шкале $M_{\text{Вел-об}} \sim 10^{15}$ ГэВ до $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ по механизму Хиггса. Соответствующие части-

¹ Этот эффект был впервые теоретически обнаружен Дмитрием Волковым и Владимиром Акуловым в их пионерской работе 1972 г.

² Частица со спином 3/2, гипотетический суперпартнёр гравитона. Мы будем подробно говорить о ней в последней главе.

цы Хиггса (один из типов X -бозонов на рис. 12.11) также должны иметь массу порядка $M_{\text{Вел-об}}$, что намного больше массы известного нам бозона Хиггса Стандартной модели. В обыкновенной несуперсимметричной модели остаётся непонятным, почему большая шкала Великого объединения $M_{\text{Вел-об}}$ не проявляется в петлевых графиках, описывающих пертурбативные поправки к массе обычного бозона Хиггса.

А в суперсимметричных моделях Великого объединения две различные шкалы $M_{\text{Вел-об}}$ и $M_{\text{электрослаб}}$ не смешиваются: суперсимметричные слоны (X -бозоны и их суперпартнёры) не тревожат мышь (обычный бозон Хиггса), и её (его?) масса остаётся маленькой.

Две дополнительные привлекательные черты суперсимметричных моделей были отмечены в главе 12:

1) Если предположить, что глубинная теория суперсимметрична, то три калибровочные константы (12.71) Стандартной модели встречаются после бега в одной точке $\sim 10^{16}$ ГэВ, в то время как в несуперсимметричной Стандартной модели это не вполне так (см. рис. 12.10).

2) Бóльший масштаб $M_{\text{Вел-об}}$ приводит к подавлению вероятности распада протона, которая перестаёт противоречить экспериментальному пределу.

Ещё одна трудность (ещё одно облачко) Стандартной модели, которую суперсимметрия может помочь разрешить, — это проблема *тёмной материи*. Известен экспериментальный факт, что помимо видимых звёзд и межзвёздного газа, наблюдаемого в радиотелескопы, наша Вселенная содержит другой тип материи, «тёмную материю», которая проявляется только через гравитационное взаимодействие (она влияет на орбитальные скорости звёзд в галактиках) и никаким другим образом¹. По современным оценкам, полная масса тёмной материи во Вселенной примерно в пять раз больше её видимой массы.

Мы уверены, что тёмное вещество существует, но мы не знаем, что это, собственно, такое. Оно должно состоять из каких-то нейтральных массивных частиц, не участвующих ни в электромагнитных, ни в сильных взаимодействиях, — реликтов эпохи, когда Все-

¹ Имеется в виду то, что её не зарегистрировали пока никаким другим образом, а не то, что её нельзя зарегистрировать. Сегодня ведутся эксперименты по прямому поиску тёмной материи и планируется в будущем увеличить чувствительность этих экспериментов.

ленная была горячей. Читатель, вероятно, подумал о нейтрино. Действительно, реликтовые нейтрино должны существовать, и они кажутся первыми естественными кандидатами на эту роль. Оказывается, однако, что масса нейтрино слишком мала, чтобы объяснить наблюдаемую массу тёмного вещества.

Так что тёмное вещество состоит не из нейтрино, но из другого типа «вимпов»¹. В суперсимметричных моделях имеются кандидаты на эту роль. Это могут быть гравитино, которые приобрели массу благодаря суперсимметричному эффекту Хиггса (мы кратко упомянули выше эту возможность). Или это могут быть массивные фотино, или ещё что-нибудь...

Я должен, однако, предостеречь читателя. В реальность суперсимметрии верят сегодня не все теоретики. Аргумент против — это то, что в экспериментах на ускорителе БАК в ЦЕРНе суперсимметричные партнёры обычных частиц обнаружены не были. Их поиск был одной из главных мотиваций (быть может, самой главной мотивацией) для строительства этого ускорителя. Люди действительно надеялись найти там что-то суперсимметричное, но, увы, эти надежды не оправдались. Установлены были только нижние пределы на массы суперпартнёров.

Поговорим подробнее об одном из таких пределов. Мы знаем из эксперимента, что если существует скалярный суперпартнёр топ-кварка, то его масса должна быть достаточно велика,

$$m_{\text{супертоп}} \gtrsim 650 \text{ ГэВ}. \quad (14.47)$$

С этим связана следующая проблема. Как отмечалось, в суперсимметричной теории квадратичные ультрафиолетовые расходимости в массе Хиггса сокращаются. Но если суперсимметрия нарушена, то сокращение в определённом смысле не полно — выживают *конечные* вклады в m_H^2 . Эти вклады пропорциональны шкале, на которой нарушена суперсимметрия и которая определяет массу суперпартнёров. Наибольший вклад происходит из петель, включающих самый тяжёлый кварк (топ-кварк) и его скалярного суперпартнёра. Приблизительная оценка даёт

$$\Delta m_H^2 \approx 4m_{\text{супертоп}}^2. \quad (14.48)$$

¹ От английского WIMP — *Weakly Interacting Massive Particles* (слабовзаимодействующие массивные частицы).

С учётом предела (14.47) это даёт величину, которая как минимум в сто раз больше, чем наблюдаемая величина для m_H^2 !

Нет, это не катастрофа. Можно всегда предположить, что исходный лагранжиан включает член с отрицательной массой для хиггсовского поля¹, который сокращает большой петлевой вклад. Но вы, возможно, согласитесь, что такая *тонкая подстройка* параметров, когда в результате сокращения остаётся только процент от исходно большой величины, выглядит неестественно... Но это не является невозможным...

В настоящее время мы не можем сказать ничего больше.

¹ Или, скорее, для фундаментального комплексного скалярного дублета φ .

Глава 15

Общая теория относительности

Я колебался некоторое время — куда следует поместить эту главу: среди основных блюд нашего обеда или подать её на десерт? С одной стороны, ОТО, классическая теория гравитации, разработанная Эйнштейном, — это настоящая физическая теория, описывающая наблюдаемый мир. Мы хорошо её знаем, неплохо понимаем, а её справедливость достоверно установлена сравнением с экспериментом. В логике нашей книги её следовало бы поместить среди основных блюд, оставив на десерт только нерешённые вопросы и гипотезы. Но с другой стороны, наша книга в основном посвящена не классическим, а *квантовым* полевым теориям. Моя основная цель была дать вам представление о Стандартной модели. Эта цель была достигнута к концу главы 12, что дало нам хорошую возможность сделать Нормандскую паузу и отдохнуть. Наконец, эта классическая глава тесно связана с последней главой книги, где мы расскажем о попытках построения квантовой теории гравитации, — главой, полной гипотез и нерешённых вопросов. Я даже думал поначалу сделать одну большую гравитационную главу, но потом решил разделить классический и квантовый материал.

Хочу сказать, что второе и третье из перечисленных соображений перевесили первое, и именно *это* место книги было выбрано для подробного рассказа об ОТО. В главах 3 и 4 мы сказали уже о ней несколько слов. Пришло время написать некоторые формулы¹.

Здание теоретической физики, где мы прогуливались в главе 4, — плод коллективных усилий. Над его строительством трудились и продолжают трудиться много блестящих учёных. И, как вы, наверное,

¹ Впрочем, не бойтесь. Формул будет немного. Как и в других частях книги, наша цель не состоит в том, чтобы изучить предмет на профессиональном уровне. Для тех, кто захочет это сделать, я рекомендую либо последние пять глав в «Теории поля» Ландау и Лифшица, либо «Гравитацию и космологию» Вайнберга. (Будьте, однако, внимательны. В этих двух книгах используются разные конвенции. Вайнберг пишет плоскую метрику Минковского в виде $\eta_{\mu\nu} = (-+++)$. У нас знак противоположный — такой же, как в книге Ландау и Лифшица.)

заметили, в подавляющем большинстве случаев очень трудно бывает указать какого-то одного человека, ответственного за построение той или иной его части. Это относится к большим залам (квантовая механика, КЭД, КХД) и к отдельным уголкам этих залов (таким, например, как конституентная кварковая модель).

Это относится также к специальной теории относительности. Вклад Эйнштейна в её построение был наиболее значителен, но у него были предшественники (Лоренц, Майкельсон, Пуанкаре), без которых он не смог бы написать свою собственную выдающуюся работу.

Однако общая теория относительности выбивается из общего правила: это почти полностью творение одного человека — Эйнштейна. Я сказал «почти», потому что был также важный вклад Гильберта, который сообразил, из какого полевого действия выводятся уравнения Эйнштейна. Можно отметить также Карла Шварцшильда, получившего важное и красивое решение эйнштейновских уравнений; мы будем говорить обо всём этом позже. Но вклад Эйнштейна был, безусловно, решающим. Я не знаю, насколько было бы задержано открытие общей теории относительности, не будь Эйнштейна. На 10 лет? Больше?..

Эйнштейн начал размышлять над задачей построения релятивистской теории гравитации очень скоро после публикации своих статей по специальной теории относительности в 1905 г. Ему потребовалось 10 лет, чтобы эту задачу решить. ОТО была окончательно сформулирована в ноябре 1915 г.

15.1. Искривлённое пространство-время

15.1.1. Математика

В обычных полевых теориях динамические переменные являются функциями пространственных координат x и времени t , но сами по себе x и t характеризуют жёстко зафиксированное плоское пространство Минковского. Релятивистски-инвариантный интервал между двумя событиями есть $s^2 = c^2 t^2 - x^2$.

Но в гравитации дела обстоят по-другому. Основные динамические переменные гравитации — это компоненты метрического тензора $g_{\mu\nu}$, зависящие от x и t . Метрический тензор определяет инвариантный интервал между бесконечно близкими событиями,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (15.1)$$

Таким образом, пространство-время больше не плоское, и его структура меняется от точки к точке.

Я написал «тензор». Но $g_{\mu\nu}$ не есть тензор в том смысле, как мы употребляли это слово раньше. В § 6.1 мы определили тензоры в плоском пространстве или плоском пространстве-времени как набор компонент, которые переходили по определённому закону в другой набор при вращениях и лоренцевых бустах. В кривом пространстве тензор определяется как набор компонент, которые преобразуются определённым образом при *общекоординатных преобразованиях*, когда координаты x^μ заменяются на новые координаты, представляющие собой гладкие функции старых, $x'^\mu(x^\nu)$.

Кривые тензоры, как и плоские, имеют индексы двух типов — контравариантные и ковариантные. Контравариантный вектор преобразуется так же, как дифференциал dx^μ :

$$V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu. \quad (15.2)$$

Ковариантный вектор преобразуется так же, как оператор градиента ∂_μ :

$$V'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} V_\nu. \quad (15.3)$$

Для двух векторов различных типов можно определить скалярное произведение $V^\mu W_\mu$, которое инвариантно — не зависит от выбора координат.

Можно далее определить тензоры высших рангов с несколькими контравариантными и/или ковариантными индексами. Их закон преобразования представляет очевидное обобщение соотношения (6.13). Например, метрический тензор, входящий в формулу (15.1), — это ковариантный симметричный тензор второго ранга, и он преобразуется как

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} g_{\sigma\rho}(x). \quad (15.4)$$

Для любого контравариантного вектора V^μ вектор $V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu$ ковариантен. Чтобы сделать ковариантный вектор контравариантным, необходимо определить обратный метрический тензор $g^{\mu\nu}$ согласно соотношению $g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = \delta^\mu_\sigma$. Тогда $V^\mu = g^{\mu\nu} V_\nu$.

Мы несколько раз повторили слова «искривлённое пространство-время». Но *что такое* кривизна? У каждого есть об этом интуитивное представление, но надо быть осторожным. В определённом



Рис. 15.1. На восток!

используемом математиками смысле поверхность сферы искривлена, а поверхность цилиндра или конуса — нет.

Рассмотрим три географические точки: N — Северный полюс, Q — город Кито в Эквадоре и L — Либревиль в Габоне. Оба города очень близки к экватору, но Кито находится на $78^{\circ}35'$ западной долготы, а Либревиль — на $9^{\circ}27'$ восточной. Они разделены примерно 88 градусами долготы. Округлённо это 90 градусов, четверть экватора.

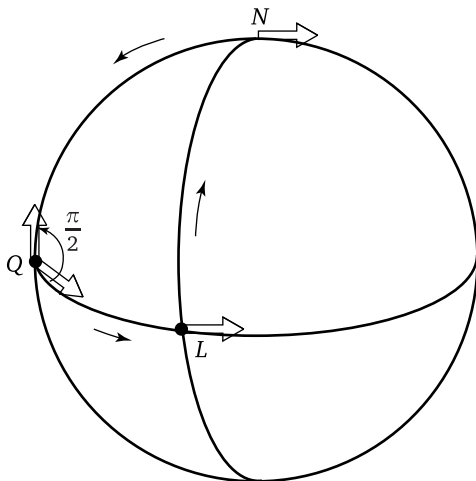


Рис. 15.2. Поворот касательного вектора после обхода по замкнутому контуру

Я хочу попросить теперь Соню (я уверен, что она продолжает читать нашу книгу!) вылететь в Кито и после осмотра достопримечательностей и пробежки по магазинам отправиться оттуда к Либревилю вдоль экватора (это кратчайший путь, геодезическая!), взяв с собой вектор, касательный к поверхности Земли, роль которого может играть зонтик. Мне хочется особо попросить Соню, чтобы она следила за направлением зонтика: он не должен произвольно вертеться во время путешествия, касательный вектор должен быть подвергнут *параллельному переносу*. Математически это означает, что угол между вектором и геодезической должен оставаться постоянным. В первой части путешествия Соня может выбрать нулевое значение этого угла — держать зонтик прямо перед собой.

Прибыв в Либревиль, Соня должна изменить направление своего движения и отправиться к Северному полюсу вдоль меридиана (который также есть геодезическая). Она должна продолжать нести зонтик, который направлен теперь вбок — его угол с меридианом составляет $\pi/2$. На полюсе она должна снова повернуть, направившись теперь к Кито. Угол касательного зонтика с меридианом Кито должен при этом составлять π . Ясно, что, когда она прибудет в Кито и положит наконец зонтик, она обнаружит, что он повернулся на $\pi/2$ относительно своего направления в начале путешествия (см. рис. 15.2).

А это значит, что поверхность Земли искривлена! Можно *определить* кривизну как отношение¹

$$\mathbb{R} = \frac{\Delta\varphi}{\mathcal{A}}, \quad (15.5)$$

где $\Delta\varphi$ — это угол, на который повернулся касательный вектор после обхода по замкнутому контуру, и $\mathcal{A}$ — площадь поверхности, обнимаемая контуром.

Площадь нашего криволинейного треугольника QLN есть $\mathcal{A} = \pi r_E^2/2$, где r_E — радиус Земли, и, следовательно, гауссова кривизна земной поверхности есть

$$\mathbb{R}_E = \frac{1}{r_E^2}. \quad (15.6)$$

Заметим, что касательный вектор повернулся в руках Сони, когда она двигалась по маршруту $Q \rightarrow L \rightarrow N \rightarrow Q$, *против часовой стрелки* — так же, как её голова. Это означает, что кривизна земной поверхности *положительна*. Существуют также поверхности с отрицательной кривизной, где касательный вектор вращается в направлении, противоположном направлению обхода (один из примеров — лошадиное седло, другой — плоскость Лобачевского). Чтобы дать универсальное определение кривизны, мы должны обратить внимание на знак $\Delta\varphi$ и включить также в виде фактора положительный или отрицательный знак, отвечающий направлению обхода.

Кривизна сферы постоянна, и её можно определить, рассматривая большие контуры (что мы с Соней и сделали). Но в общем случае кривизна различна в различных точках поверхности и её надо определять локально — как угол поворота касательного вектора после параллельного переноса вдоль малого замкнутого контура, делённый на малую площадь, обнимаемую этим контуром.

Заметьте, что гауссова кривизна (15.5) боковой поверхности цилиндра равна нулю — зонтик сохранял бы там своё направление при любых обходах. Причина проста: цилиндрическую шляпу можно смастерить, изгибая плоский лист бумаги, а гауссова кривизна *инвариантна* относительно таких изгибов; нужно только следить, чтобы деформация поверхности не включала сжатий и растяжений.

¹ Скажем, предупреждая возможную путаницу, что это так называемая *гауссова кривизна*, которую следует отличать от *римановой скалярной кривизны*. Что такое риманова кривизна — мы определим очень скоро.

Для многообразий размерности 3 и выше можно определить много разных кривизн. Углы поворота зависят теперь от ориентации в многообразии инфинитезимального контура обноса и от начального направления касательного вектора. Инфинитезимальный элемент площади представляет теперь антисимметричный тензор $\delta\mathcal{A}^{\alpha\beta}$ [например, если этот тензор имеет всего одну компоненту $\delta\mathcal{A}^{12} = -\delta\mathcal{A}^{21}$, то контур лежит в плоскости (12)]. Эти различные кривизны представляют собой компоненты *риманова тензора кривизны* $R_{\mu\nu\alpha\beta}$. При обходе по малому замкнутому контуру, вектор V^μ сдвигается на

$$\delta V^\mu = -\frac{1}{2}R^\mu_{\nu\alpha\beta}V^\nu\delta\mathcal{A}^{\alpha\beta}. \quad (15.7)$$

Тензор Римана имеет размерность $[1/l^2]$. Его можно выразить через вторые пространственные производные метрического тензора и через квадраты его первых производных. Это громоздкое выражение,

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}\partial_\nu\partial_\alpha g_{\mu\beta} + \text{много других членов}, \quad (15.8)$$

— одна из причин, делающих конкретные вычисления в ОТО технически сложными.

Произвольный четырёхмерный тензор четвёртого ранга имеет 256 различных компонент, но тензор Римана удовлетворяет определённому набору условий:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\alpha\beta} &= -R_{\nu\mu\alpha\beta} = -R_{\mu\nu\beta\alpha} = R_{\alpha\beta\mu\nu}, \\ \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}R_{\mu\nu\alpha\beta} &= 0. \end{aligned} \quad (15.9)$$

В результате остаётся только 20 независимых компонент¹.

Мы определим также симметричный двухиндексный *тензор Риччи*

$$R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}R_{\mu\alpha\nu\beta} \quad (15.10)$$

и риманову скалярную кривизну

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}R_{\mu\alpha\nu\beta}. \quad (15.11)$$

На двумерных поверхностях последняя совпадает с точности до двойки с гауссовой кривизной: $R = 2\mathbb{R}$.

¹ В трёх измерениях $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ имеет 6 независимых компонент, а в двух измерениях — только одну независимую компоненту R_{1212} , связанную с гауссовой кривизной.

15.1.2. Физика

Следуя Эйнштейну, мы собираемся применить этот формализм к геометрии нашего $(3 + 1)$ -мерного мира. Мысль о том, что пространство-время искривлено, противоречит интуиции. У человека, который слышит об этом в первый и даже во второй раз, она может вызвать протесты. Эти протесты вполне можно понять. Я объяснил понятие кривизны, послав Соню в путешествие по земной поверхности. «ОК, — можете вы возразить, — поверхность Земли искривлена, но сама Земля трёхмерна, она вложена в трёхмерное пространство, а мы не видим никаких признаков того, что наше трёхмерное пространство искривлено!»

Этот вопрос столь важен, что заслуживает не одного, а нескольких ответов.

Прежде всего, вы можете поставить под сомнение вашу интуицию.

- Интуиция — очень хорошая вещь. Она помогает постигать сложные вещи, делать их простыми и понятными. Но интуиция каждого человека основана на его предыдущем опыте. Я думаю, что наши предки из каменного века (которые были не намного глупее нас) яростно бы запротестовали, если им сказать, что земля кривая (не говоря уж о пространстве). Несмотря на то, что все они видели горизонт.
- Предположим, что Земля круглая и абсолютно ровная и что гравитация настолько сильна, что вы не можете даже думать о том, чтобы поднять голову, и можете передвигаться вдоль поверхности только ползком. В этом случае вы живёте как бы в двумерном мире. Мысль о том, что он искривлён, может интуитивно показаться вам бредовой, но вы сможете проверить, так это или нет, проделав эксперимент Сони по параллельному переносу касательных векторов.

Чтобы дать более удовлетворительный и более научный ответ, перейдём к нашим трём пространственным измерениям. Верно, что геометрия известного нам земного мира очень близка к евклидовой, но имеет смысл спросить: *откуда мы это знаем?* Ну, одна из теорем евклидовой геометрии говорит, что сумма углов треугольника равна π . Это можно проверить экспериментально. Нарисуйте треугольник, измерьте углы транспортиром. Сложите их. Вы действительно получите π . Но как вы нарисовали ваш треугольник?

Я полагаю, на бумаге по линейке. Размер треугольника не превышает, таким образом, ≈ 30 см, размер листа формата А4. Чтобы проверить справедливость этой теоремы на существенно бóльших расстояниях, нужно изменить процедуру.

Одна из возможностей такова. Выберите три горы на расстоянии в несколько десятков километров друг от друга. Взойдитесь на вершину каждой из гор и измерьте теодолитом углы между направлениями, под которыми вы видите вершины двух других гор. Сложите потом эти углы.

Это не мысленный эксперимент; такой эксперимент был вполне реально проведён королём математиков первой половины XIX века Карлом Фридрихом Гауссом. Гаусс служил математиком у ганноверского короля. Король поставил ему задачу: построить хорошую точную карту королевства. Гаусс это сделал¹, но частично растратил казённые фонды не по назначению, а на изучение сугубо теоретического, неинтересного королю и его подданным вопроса — он попытался выяснить, плоское наше пространство или нет (Гаусс понимал, что вопрос, вообще говоря, нетривиален, и у него были на этот счёт определённые сомнения). Но сумма углов совпала с π в пределах измерительных ошибок.

О похожем эксперименте размышлял один из создателей неевклидовой геометрии Николай Иванович Лобачевский. В 1826 г. он предложил перейти с земли на небо и определить кривизну пространства, измеряя *звёздные параллаксы*². Можно предположить два эффекта, которые могут дать такой ненулевой параллакс: (а) конечное расстояние от Земли до изучаемой звезды и (б) конечная кривизна пространства. Сравнивая величины параллаксов для различных звёзд, можно в принципе извлечь значение кривизны (или установить для неё верхний предел). В то время параллаксы и расстояния до звёзд не были ещё измерены, и Лобачевский смог установить, таким образом, только то, что радиус кривизны нашего пространства не меньше чем ≈ 5 световых лет. Когда в середине XIX века параллаксы были измерены, оказалось, что все они хорошо объясняются конечными звёздными расстояниями, и никаких следов кривизны пространства обнаружено не было.

¹Наверное, не он один. Ганноверское королевство было не таким маленьким, и Гаусс руководил, вероятно, целой группой топографов.

²Разница в положении звёзд на небесной сфере между зимой и летом, когда Земля находится по разные стороны от Солнца.

Описывая схему эксперимента Гаусса, я написал: «Измерьте углы между направлениями, под которыми вы видите...» Фактически это значит, что стороны треугольника представлены не прямыми линиями, нарисованными по линейке, а лучами света — в нашем физическом мире нет ничего более прямого!

Нетривиально, однако, то, что даже лучи света не *вполне* прямые. Они отклоняются в гравитационном поле. Таково одно из предсказаний ОТО, но эффект этот выглядит очень естественно. Он не удивил бы Ньютона. Действительно, фотоны — материальные частицы. Они несут энергию и чувствительны к гравитации. В частности, если они пролетают близко к Солнцу, то они чувствуют его притяжение и немного изгибают свою траекторию. В результате видимое положение на небесной сфере далёких звёзд, источников фотонов, немного сдвигается, когда Солнце проходит мимо. Этот эффект впервые наблюдался экспедицией Артура Эддингтона во время полного солнечного затмения в 1919 г. Наблюдавшаяся величина смещения триумфально совпала с предсказанием ОТО.

Таким образом, утверждение, что пространство-время искривляется в присутствии гравитирующей материи, эквивалентно утверждению, что лучи света отклоняются гравитацией. Лучи более не прямые, они *изгибаются*. Разумеется, это касается не только лучей света, но и всего остального; например, нейтрино с энергией намного больше их массы ведут себя точно так же, как фотоны. Отличительная черта гравитации — её универсальность, и вот почему удобно описывать эффекты гравитационного взаимодействия не как силы, приложенные к материальным телам, движущимся в ньютоновском абсолютном плоском пространстве, но как искажение самой структуры, самой ткани пространства.

Через полтора столетия после Гаусса и Лобачевского было сделано открытие, в котором кривизна пространства, искажение его геометрии наглядно проявились в схеме, очень близкой к той, о которой

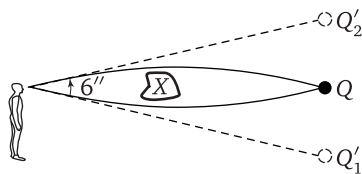


Рис. 15.3. Гравитационная линза: X — кластер галактик, Q — квазар, $Q'_{1,2}$ — его образы

думали классики. Я говорю о *гравитационных линзах*. Предположим, что где-то в далёком космосе существует массивный гравитирующий объект X (это может быть скопление галактик). Предположим, что мы наблюдаем яркий квазар или яркую галактику позади этого объекта. Тогда фотоны, пролетающие мимо объекта X , отклоняются. Если они проходят сверху от X , то они отклоняются вниз, а если снизу, то вверх¹. В результате в глазу наблюдателя встречаются два луча. И наблюдатель увидит не один квазар, а два! (см. рис. 15.3).

Мы получили, таким образом, «неевклидов двуугольник», сумма углов в котором отлична от нуля. Это говорит о ненулевой положительной кривизне пространства. Первая такая гравитационная линза была открыта в 1979 г. В телескоп видны два близнеца-квазара (на самом деле, конечно, двойной образ одного квазара) на расстоянии $\approx 7,8$ миллиардов световых лет от нас. Угол этого «аномального двуугольника» (угловое расстояние между двумя образами) составляет около 6 секунд дуги.

Мы объяснили, как можно установить тот факт, что наше пространство-время на самом деле искривлено, делая в нём эксперименты². Кривизна есть *внутреннее* свойство многообразия³, и, чтобы это свойство объяснить, за пределы многообразия выходить не надо.

Но, может быть, Вселенная всё-таки вложена в плоское пространство какой-то высшей размерности и её кривизна имеет на самом деле внешнее происхождение — как у земной поверхности или у мыльного пузыря? Мы не знаем. Но должен сказать, что многие теорети-

¹ Это как штрафной удар, исполненный профессиональным футболистом. Благодаря эффекту Магнуса, мяч может обогнуть стенку и попасть в ворота!

² Как вы понимаете, в этом суть научного метода. Чтобы установить смысл любой физической величины, необходимо указать способ её измерения. Это, в частности, относится к понятию кривизны в общей теории относительности и к понятиям времени и длины в специальной теории относительности. Единственное различие в том, что для понимания того, как работают световые часы и почему время, измеренное в движущейся системе отсчёта, не совпадает с временем, измеренным в покоящейся системе, не требуется сложная математика. А для описания кривизны в ОТО следует развить определённый математический аппарат — риманову геометрию, которую не изучают ни в школе, ни (как правило) в университете.

³ Это относится к риманову тензору кривизны и его свёрткам. Существует также так называемая *внешняя* кривизна, которая зависит от того, как многообразие вложено в евклидово пространство более высокой размерности. В отличие от внутренней кривизны, внешняя кривизна цилиндра — не нуль. Но мы не будем больше говорить об этой внешней кривизне, так как она кажется несущественной для описания физических явлений.

ки, включая вашего автора, полагают, что эта гипотеза имеет шансы оказаться верной. Мы обсудим эту спекулятивную идею в последней главе.

15.2. Лагранжианы. Уравнения движения. Их решения

Эйнштейновская теория гравитации считается сложной теорией. Сложностей в ней действительно немало: прежде всего, для работы с ней необходимо выучить необычный язык римановой геометрии, и есть также сложности не только технические, но принципиальные — мы будем говорить о них в последней главе. Однако кое-что в этой теории довольно просто. В частности, если риманов формализм принят и освоен, весьма просто написать действие теории.

Инвариантное действие, описывающее движение частицы (или любой точечной массы, планеты) во внешнем гравитационном поле, записывается в виде

$$S = -mc \int ds. \quad (15.12)$$

Мы уже писали это выражение [см. формулу (7.16)]. Новость в том, что пространство-время теперь кривое и интервал ds даётся формулой (15.1), а не (7.17).

Нетрудно также написать действие гравитационного поля. Мы хотим, чтобы оно не зависело от выбора координат. Простейший инвариант общекоординатных преобразований — это инвариантный объём

$$V = \int \sqrt{-g} d^4x, \quad (15.13)$$

где $g = \det(g_{\mu\nu})$ — детерминант метрического тензора¹.

Чтобы получить безразмерное действие, мы должны умножить соотношение (15.13) на постоянную $\Lambda/(8\pi)$, несущую размерность m^4 . Λ есть не что иное, как космологическая константа², определяющая плотность вакуумной энергии. Как мы уже отметили на с. 65 и снова подробно обсуждали в предыдущей главе, эксперимент го-

¹ Возьмём, например, метрику на поверхности единичной сферы $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$. Тогда $\sqrt{g} = \sin\theta$ и площадь сферы даётся интегралом $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta = 4\pi$. Детерминант метрики с сигнатурой Минковского отрицателен, и это объясняет присутствие дополнительного минуса под корнем в формуле (15.13).

² 8π в знаменателе — это принятая конвенция; ср. примечание на с. 64.

ворит, что эта вакуумная плотность отлична от нуля, но очень мала: $\Lambda/(8\pi) \approx 10^{-123}$ в планковских единицах.

Немного более сложный инвариант включает под интегралом скалярную кривизну. Он и даёт действие Гильберта—Эйнштейна общей теории относительности:

$$S_{\text{грав}} = -\frac{m_p^2}{16\pi} \int R \sqrt{-g} d^4x. \quad (15.14)$$

В этом выражении m_p есть планковская масса. Коэффициент $1/16\pi$ включён для того, чтобы при малых кривизнах воспроизводился бы ньютоновский предел с гравитационной константой $G_N = 1/m_p^2$. Отрицательный знак гарантирует общее гравитационное притяжение, а не отталкивание [см. формулу (15.27) ниже].

Рассмотрим теперь действие

$$S = -\frac{m_p^2}{16\pi} \int R \sqrt{-g} d^4x + \int \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x. \quad (15.15)$$

Лагранжиан $\mathcal{L}$ во втором члене описывает материю — обычные (негравитационные) поля, заполняющие пространство. Чтобы вывести гравитационные уравнения движения, мы должны вычислить вариацию действия по метрике $g_{\mu\nu}$ и приравнять её нулю.

Вариация второго члена даёт объект, называемый *тензором энергии-импульса* поля материи. По определению

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (15.16)$$

Можно показать, что компонента T_{00} есть плотность энергии поля¹. Компоненты $T_{0j} = T_{j0}$ дают плотность импульса, а пространственные компоненты T_{jk} — плотность потока импульса, или тензор напряжений. Если $T_{jk} = P\delta_{jk}$, то P — это давление.

Принимая также во внимание вариацию первого члена в формуле (15.14) (мы оставляем это вычисление читателю), мы выводим уравнения Эйнштейна:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi}{m_p^2}T_{\mu\nu}. \quad (15.18)$$

¹ Например, для комплексного скалярного поля в плоском пространстве, $\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi$, можно вывести соотношение

$$T_{00} = 2|\partial_0 \varphi|^2 - \mathcal{L} = |\partial_0 \varphi|^2 + |\partial_j \varphi|^2 + m^2 |\varphi|^2 \quad (15.17)$$

[ср. формулу (7.44)].

В обычных единицах

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G_N}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (15.19)$$

15.2.1. Гравитационные волны

Пусть отсутствуют материальные поля и пространство пусто. Тогда $T_{\mu\nu} = 0$ и из уравнений Эйнштейна следует обращение в нуль тензора Риччи:

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (15.20)$$

Пусть метрика мало отличается от плоской:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad h_{\mu\nu} \ll 1. \quad (15.21)$$

Подставляя это соотношение в точное выражение для $R_{\mu\nu}$ через метрику [мы дали здесь только намёк на него, см. формулу (15.8)], разлагая по $h_{\mu\nu}$, удерживая только линейные члены и выбирая подходящим образом координаты, мы приходим к простому уравнению

$$\square h_{\mu\nu} = 0, \quad (15.22)$$

где $h_{\mu\nu}$ можно выбрать так, что компоненты h_{00} и h_{0i} обращаются в нуль и также $\partial_i h_{ij} = h_{ii} = 0$; в тензоре $h_{\mu\nu}$ остаются тогда только два независимых параметра.

Это волновое уравнение, описывающее распространение гравитационных волн. В гравитационной волне расстояния между близкими пространственными точками осциллируют. Эти осцилляции поперечны и имеют квадрупольную природу: если волна распространяется вдоль оси x , то небольшое увеличение расстояний в направлении y сопровождается их уменьшением в направлении z , и наоборот. Максимальная относительная вариация поперечных расстояний — это амплитуда гравитационной волны¹.

Прямая экспериментальная регистрация гравитационной волны — это весьма недавнее достижение. Об этом было объявлено в феврале 2016 г. Я не буду здесь описывать детально этот красивый эксперимент. Отмечу только, что астрофизическим источником наблюдавшихся волн был процесс слияния двух чёрных дыр в одну. В первом зарегистрированном событии массы слившихся чёрных дыр составляли примерно 29 и 36 солнечных масс, а их

¹ В английской литературе используется термин *strain*.

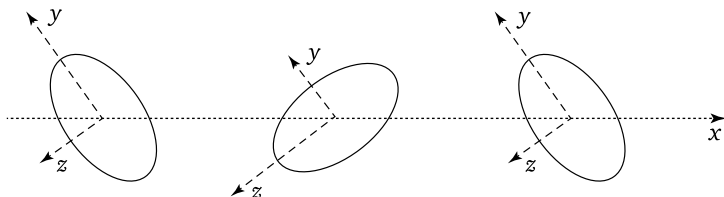


Рис. 15.4. Распространение линейно поляризованной гравитационной волны

размеры и относительные расстояния имели порядок $d \sim 100$ км. Масса чёрной дыры, образовавшейся в результате слияния, составляла ~ 62 солнечных массы, что означает, что энергия $\approx 3M_{\odot}$ была излучена в форме гравитационных волн.

Эта катастрофа произошла очень далеко, на расстоянии $L \approx 1,3$ миллиарда световых лет от нас. Когда гравитационная волна достигла земного детектора, она была уже очень слабой. Её амплитуду можно грубо оценить как

$$h \sim \frac{d}{L} \sim 10^{-20}, \quad (15.23)$$

но фактическая её величина была несколько меньшей, $h \sim 10^{-21}$. На расстоянии 4 км (таким было плечо интерферометра Майкельсона, использовавшегося в эксперименте) это отвечало смещениям порядка 10^{-18} м, одна тысячная размера протона! Поистине замечательно, что удалось зарегистрировать такой крохотный эффект.

В 2017 г. это открытие было удостоено Нобелевской премией. Она была присуждена Райтнеру Вайсу, Барри Баришу и Кипу Торну за решающий вклад в конструировании детектора LIGO и наблюдение гравитационных волн. Сегодня (в ноябре 2017 г., когда я пишу эту фразу) надёжно зарегистрировано ещё пять подобных событий. Точнее, в четырёх случаях гравитационные волны родились в процессе слияния чёрных дыр, как и в первый раз, а в пятом случае выделенная энергия была намного меньше (всего $\approx 0,03M_{\odot}$) и природа этого события была несколько другой — это было слияние нейтронных звёзд, сопровождавшееся также всплеском γ -излучения. Возможность такого явления была предсказана Сергеем Блинниковым, Игорем Новиковым, Татьяной Переводчиковой и Александром Полнарёвым в 1984 г.

15.2.2. Решение Шварцшильда и чёрные дыры

Обсудим теперь другое очень важное решение уравнений Эйнштейна, которое описывает статическое гравитационное поле точечного массивного источника — гравитационный аналог кулоновского потенциала. В электродинамике статический кулоновский потенциал сохраняет свой вид также в релятивистской теории Максвелла — релятивистские эффекты проявляются там, только если заряды движутся или если поля имеют нетривиальную временную зависимость. В общей теории относительности это не так.

Точное выражение для статической метрики в присутствии точечной массы было найдено Карлом Шварцшильдом в 1916 г. — сразу после того, как он прочитал знаменитые статьи Эйнштейна с формулировкой общей теории относительности¹.

Оно имеет вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - r^2 (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2) - \frac{dr^2}{1 - r_g/r}, \quad (15.24)$$

где гравитирующая масса помещена в начале координат и

$$r_g = \frac{2G_N M}{c^2} \quad (15.25)$$

есть константа, называемая *гравитационным радиусом*, отвечающим данной массе. Мы уже писали это соотношение — см. формулы (3.2).

Тензор Риччи, вычисленный по этой метрике, равен нулю всюду, кроме начала координат, где он бесконечен. Посмотрим вначале, что происходит на больших расстояниях, $r \gg r_g$. В этом случае можно пренебречь отношением r_g/r в последнем члене, но не в первом члене, где он умножается на большой фактор c^2 . Мы получаем

$$ds \approx \sqrt{dt^2 \left(c^2 - \frac{2G_N M}{r}\right) - d\mathbf{x}^2}. \quad (15.26)$$

Разлагая корень, подставив это выражение в формулу (15.12) и добавив к S/t несущественную константу mc^2 , мы воспроизводим знако-

¹Как мы знаем и в чём мы дополнительно убедились во время нашей «Нормандской паузы», человеческие истории часто трагичны. Шварцшильд служил артиллерийским офицером на восточном фронте, но умер не от пуль и снарядов, а от редкой кожной болезни. Это случилось в мае 1916 г., через несколько месяцев после того, как он получил свой замечательный результат, благодаря которому его будут вечно помнить.

мый нерелятивистский лагранжиан

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{G_N m M}{r}. \quad (15.27)$$

Ньютон был бы, несомненно, весьма удивлён, увидев, как в этом вычислении возникает его гравитационный потенциал — как вклад от временной компоненты g_{00} метрического тензора!

Следующий член в разложении по r_g/r даёт так называемое *постньютоновское приближение*. В 1915 г. Эйнштейн, не зная ещё точного решения (15.24), вычислил постньютоновские поправки к лагранжиану (15.27) пертурбативно. Эти поправки искажают эллиптическую форму планетных орбит. Большие оси эллипсов начинают немного поворачиваться. Эффект максимален для ближайшей к Солнцу планеты, Меркурия. Эйнштейн рассчитал скорость этого вращения¹, и результат (43 угловые секунды в столетие) точно совпал с результатом, известным из астрономических наблюдений².

Интересные явления происходят при $r = r_g$. Временная компонента метрики здесь равна нулю, а радиальная компонента g_{rr} обращается в бесконечность. Эта сингулярность как будто говорит нам, что решение теряет смысл при $r \leq r_g$, но это не так. Компоненты метрического тензора и других тензоров зависят от выбора координат и не имеют сами по себе большого физического смысла. Смысл имеют скалярные инварианты кривизны, наподобие $R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$ или $R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\alpha\beta\rho\sigma}R_{\rho\sigma}^{\mu\nu}$ (скалярная кривизна R или инвариант $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ обращаются в нуль в силу уравнений движения $R_{\mu\nu} = 0$). И эти инварианты несингулярны при $r = r_g$.

Сфера $r = r_g$ (она называется *горизонтом событий*) имеет, однако, вполне определённый и важный смысл. Можно показать, что луч света, испущенный из некоторой точки ниже горизонта, $r < r_g$, не сможет выйти наружу, его мировая линия с неизбежностью упрётся

¹Вычисление сложное, но результат простой. Он особенно прост, когда эллипс имеет малый эксцентриситет и близок к кругу. Угловая скорость вращения Ω такой почти круговой орбиты есть

$$\Omega = \frac{3v^2}{c^2}\omega, \quad (15.28)$$

где v и ω — линейная и угловая скорости планеты.

²Надо сказать, что эффект ОТО — не единственная и не самая существенная причина, приводящая к дрейфу перигелия орбиты Меркурия. Основная причина — это гравитационные возмущения со стороны других планет, которые поворачивают ось на $531''$ в столетие. Точные измерения дают, однако, $574''$. ОТО объяснила непонятное прежде расхождение на $43''$ между классической теорией и наблюдениями.

в истинную сингулярность при $r = 0$. Другими словами, при $r \sim r_g$, когда гравитационное поле сильно (отклонения от плоской минковской метрики Минковского не малы), метрика (15.24) описывает чёрную дыру.

Мы обсуждали физику чёрных дыр много столетий назад, в главе 3, но я хочу добавить здесь к этому раннему обсуждению несколько замечаний. Чёрные дыры образуются в результате гравитационного коллапса звёзд или других больших сгустков вещества. Можно спросить: насколько быстро происходит этот коллапс? Ответ нетривиален. Оказывается, если мы наблюдаем за этим коллапсом издалека, он не заканчивается никогда. Мы увидим, как материальные частицы *приближаются* к горизонту событий, но не сможем увидеть, как они его *пересекают*. Формульно это ясно из соотношения (15.24). Предположим, что мы пускаем луч света в радиальном направлении к центру. Траектория луча определяется условием $ds = 0$. Видно, что по мере того, как r стремится к r_g , видимая скорость dr/dt становится всё меньше и меньше. Наш фотон как бы «застывает» на горизонте, приближаясь к нему, и никогда не сможет его пересечь.

Тот факт, что пересечение частицей горизонта невозможно наблюдать снаружи, понятен и интуитивно: если невозможно увидеть область под горизонтом, как, скажите на милость, можно увидеть частицы, которые туда ныряют?

Однако если, вместо того чтобы бросать в чёрную дыру материю снаружи, вы решите *сами* туда отправиться, путешествие до горизонта займёт по бортовым часам *конечное* время. Если чёрная дыра велика (наподобие квазара, который может быть размером с Солнечную систему), то вы можете даже не заметить момент перехода — физические гравитационные поля, инварианты $R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$ и т. п. ещё невелики при $r = r_g$. Конечно, вместе с вами в дыру будет, вероятно, падать горячая материя, и это соседство может сделать путешествие неприятным¹, но при прохождении горизонта ничего *специально* катастрофического с вами не случится.

Но вскоре после этого, по мере того как вы будете продолжать падение, гравитационные поля и связанные с ними приливные силы будут быстро расти. В истинной сингулярности в центре дыры

¹ Лично я не очень рекомендую этот чартерный рейс. Есть более интересные способы провести отпуск.

(которую вы достигнете за конечное время по вашим часам) они обратятся в бесконечность...

15.2.3. Решение Фридмана и космология

Решение Фридмана — это космологическое решение, описывающее не «детали» (гравитационная волна слева, чёрная дыра справа...), но структуру Мира как целого. Мы описали словами это решение и рассказали связанную с ним историю на с. 64—65, которые вы, возможно, захотите сейчас перечитать. А если вы не хотите уходить с *этой* страницы, я кратко повторю здесь самое существенное.

- Эйнштейн искал стационарные космологические решения, и ему удалось такие решения найти только ценой введения в уравнения космологического члена, соответствующего ненулевому отрицательному давлению вакуума.
- Фридман нашёл нестационарные решения, в которых Вселенная либо вначале раздувалась, а потом схлопывалась (*закрытая модель*), либо продолжала расширяться неограниченно (*открытая модель*).
- Расширение Вселенной было позже подтверждено экспериментально.

В этой главе мы многому научились. Это позволит нам теперь понять, как эти решения были найдены, и описать их количественно.

Вселенная неоднородна. Она включает сгустки вещества различного размера. Есть звёзды, галактики, скопления и сверхскопления галактик. Но всё это *локальные* неоднородности. Самые большие известные сверхскопления имеют размер порядка полумиллиарда световых лет, что в 20 раз меньше размера наблюдаемой части Вселенной. Таким образом, мы можем предположить, что Вселенная приблизительно однородна на *большом* космологическом масштабе.

Этот факт подтверждается также наблюдением космического *реликтового излучения*. Это самый старый свет во Вселенной. Он был излучён в эпоху, когда Вселенная была юной, галактики и звёзды ещё не сформировались и пространство заполняла плазма, включавшая фотоны, электроны и протоны (с примесью дейтронов и ядер гелия)¹.

Плазма расширялась и охлаждалась. В определённый момент (примерно через 400 000 лет после Большого взрыва) температу-

¹ Там были также нейтрино и загадочная тёмная материя, но давайте сейчас забудем о них — они не светили.

ра опустилась настолько (до ~ 3000 K), что протоны и электроны *рекомбинировали* и образовали нейтральные атомы водорода. Плазма превратилась в газ. Этот газ (в отличие от плазмы до рекомбинации) стал прозрачен для фотонов. Они могли теперь пролететь сквозь всю Вселенную, не испытав рассеяния. Эти фотоны дожили до сегодняшнего дня, хотя они и «переоделись». Размер Вселенной с момента рекомбинации увеличился приблизительно в 1000 раз, и так же возросла длина волны реликтовых фотонов¹. Соответственно, их частота упала. В момент рекомбинации это были фотоны красного и ближнего инфракрасного света. А сейчас это — излучение в микроволновом диапазоне.

Реликтовое излучение было открыто Арно Пензиасом и Робертом Вильсоном в 1964 г. Это тепловое излучение с температурой $\sim 2,7$ K, и оно весьма однородно (эффективная температура очень слабо зависит от направления), что свидетельствует о высокой однородности вещества Вселенной в момент рекомбинации. Вселенная стала комковатой позже.

Как может выглядеть метрика однородной и изотропной Вселенной?

- Прежде всего, она не может содержать смешанные компоненты g_{0j} . Такие компоненты метрики можно было бы интерпретировать как некий трёхмерный вектор, задающий определённое направление в пространстве, что невозможно ввиду изотропности.
- Подходящей заменой переменных можно всегда сделать компоненту метрики g_{00} равной единице (мы возвращаемся в этом параграфе к конвенции $c = 1$). Тогда получаем

$$ds^2 = dt^2 - g_{jk} dx^j dx^k. \quad (15.29)$$

- Пространственная часть метрики описывает некоторое трёхмерное многообразие. В силу однородности его кривизна должна быть одинакова во всех точках. Есть только две возможности: (а) постоянная положительная кривизна определяет трёхмерную сферу (не обыкновенную двумерную сферу, но трёхмерную сферу, границу четырёхмерного шарика); (б) постоянная

¹Альтернативное объяснение такого увеличения длины волны — это эффект Доплера и связанное с ним красное смещение. Источник, излучивший регистрируемые нами фотоны, находится очень далеко, почти на границе наблюдаемой части Вселенной. И от улетает прочь от нас почти со скоростью света.

отрицательная кривизна даёт трёхмерную *псевдосферу* (или пространство Лобачевского).

Рассмотрим вначале случай положительной кривизны. Метрика приобретает вид

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)[d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)], \quad (15.30)$$

где χ, θ, φ — три угла, параметризующие 3-сферу, а $a(t)$ — её радиус. Последний определяет полный пространственный объём Вселенной:

$$V = 2\pi^2 a^3(t). \quad (15.31)$$

Единственное, что не определяется симметрией, — это зависимость $a(t)$, и наша цель — её найти. Для этого мы должны подставить анзац (15.30) в уравнения Эйнштейна (15.18), получить для $a(t)$ обыкновенное дифференциальное уравнение и решить его.

Правая часть равенства (15.18) содержит тензор энергии-импульса материи $T_{\mu\nu}$. Следуя Фридману, мы будем полагать, что материя представляет однородно распределённую *пыль*. Под «пылью» мы подразумеваем материю, не создающую давления¹. В этой модели пространственные компоненты T_{jk} равны нулю, смешанные компоненты T_{0j} тоже обращаются в нуль (требование изотропности) и только T_{00} , плотность энергии ϵ , отлична от нуля. Мы предполагаем, что она одна и та же во всех пространственных точках. Умножая ϵ на полный объём Вселенной (15.31), получаем её полную массу M , являющуюся интегралом движения.

Решение можно представить в параметрическом виде:

$$\begin{aligned} a &= a_0(1 - \cos \eta), \\ t &= a_0(\eta - \sin \eta), \end{aligned} \quad (15.32)$$

где

$$a_0 = \frac{2G_N M}{3\pi}. \quad (15.33)$$

Зависимость (15.32) представлена на рис. 15.5. Мы видим, что Вселенная рождается из ничего при $t = 0$. Вначале она быстро расширя-

¹ В этом смысле звёзды несомненно являются «пылью». Кажущееся высоким давление внутри звезды с точки зрения космологии совсем не велико, оно намного меньше, чем плотность энергии T_{00} . А кроме того, звёзды занимают очень малую долю космического пространства.

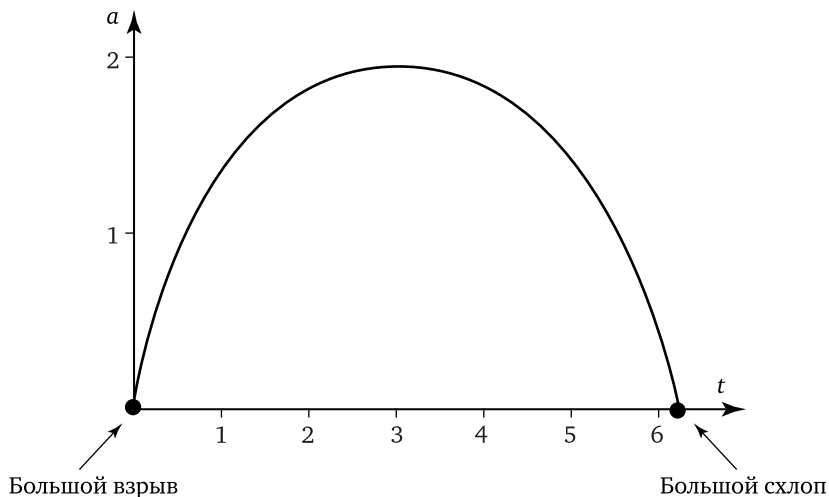


Рис. 15.5. Эволюция Вселенной в закрытой модели Фридмана; t и $a(t)$ выражены в единицах a_0

ется¹:

$$a(t) \approx \sqrt[3]{\frac{9a_0 t^2}{2}}. \quad (15.34)$$

Затем расширение замедляется; $a(t)$ достигает максимальной величины $2a_0$ при² $t = \pi a_0$. После этого Вселенная начинает сжиматься. Её размер снова обращается в нуль при $t = 2\pi a_0$. Это момент Большого схлопа, Вселенная обращается в Ничто. Таков *замкнутый* космологический сценарий.

Рассмотрим теперь случай, когда Вселенная имеет геометрию псевдосферы. Соответствующий анзац для метрики есть

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)[d\chi^2 + \text{sh}^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)], \quad (15.35)$$

¹Закон (15.34) неприменим при очень малых временах, когда материя горячая и ультрарелятивистская. В этом случае необходимо принять во внимание пространственные компоненты $T_{jk} = P\delta_{jk} = (\varepsilon/3)\delta_{jk}$ (где ε — плотность энергии). Вселенная расширяется и в этом случае, но её размер возрастает не как $a \propto t^{2/3}$, а как $a \propto \sqrt{t}$.

²Оценку $a_0 \sim G_N M$, которая содержится в (15.33), можно получить «на пальцах» из условия, что гравитационная потенциальная энергия Вселенной на пике её расширения, $U \sim G_N M^2/a_0$, имеет тот же порядок, что её «энергия покоя», определяемая массой M . Это практически тот же аргумент, который дал нам оценку (3.8) для характерных звёздных масс.

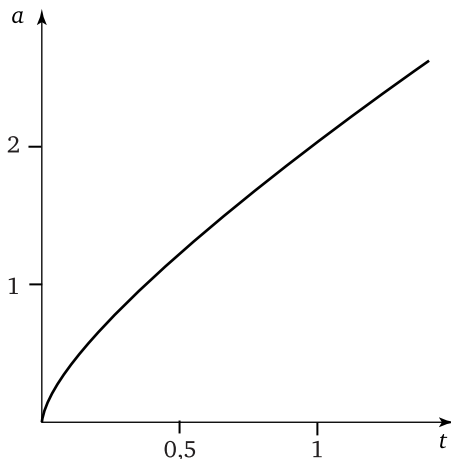


Рис. 15.6. Эволюция Вселенной в открытой модели Фридмана

где $a(t)$ — длина Лобачевского, определяющая риманову кривизну трёхмерной псевдосферы: $R = -6/a^2$. Подставляя, как и раньше, этот абзац в левую часть уравнений Эйнштейна и подставляя в правую часть тензор энергии-импульса пылевой материи, получим в итоге решение для $a(t)$:

$$a = a_0(\operatorname{ch} \eta - 1), \quad t = a_0(\operatorname{sh} \eta - \eta). \quad (15.36)$$

Псевдосфера — некомпактное многообразие, его объём бесконечен, и полная масса Вселенной тоже бесконечна. Мы не можем, следовательно, выразить a_0 через полную массу M , как это мы сделали в формуле¹ (15.33).

Вместо этого мы можем поступить следующим образом. (а) Перепишем определение (15.33) параметра a_0 в *закрытой* модели, выразив M через плотность массы материи μ : $M = V\mu = 2\pi^2 a^3 \mu$. Мы получим

$$a_0 = \frac{4\pi G_N a^3 \mu}{3}. \quad (15.37)$$

Это соотношение связывает текущий размер Вселенной $a(t)$ и текущую плотность $\mu(t)$; параметр a_0 есть интеграл движения. (б) Мож-

¹ Фактически понятие «полной массы Вселенной» в любом случае нефизично, поскольку в каждый данный момент времени t доступна наблюдениям только конечная часть Вселенной на расстояниях, меньших чем ct . Это замечание частично относится также к закрытой модели, где вся Вселенная оказывается доступной наблюдениям только на стадии сжатия.

но далее показать, что *такое же* соотношение между $a(t)$, $\mu(t)$ и a_0 справедливо в открытой модели.

Решение (15.36) представлено на рис. 15.6. При малом t масштабный фактор $a(t)$ растёт точно так же, как радиус 3-сферы в (15.34). Но затем поведение радикально меняется. Расширение не тормозится, как в закрытой модели. На больших временах $a(t) \approx t$ и скорость расширения Вселенной приближается к световой. Таков *открытый* космологический сценарий.

Интересно, конечно, задуматься о нашей собственной судьбе. Достигнет ли Вселенная через десяток-другой миллиардов лет своего максимального размера и начнёт ли потом она — сначала медленно, а потом всё быстрее и быстрее — сжиматься и нагреваться, чтобы в конце концов исчезнуть в огненном коллапсе? Или она будет расширяться вечно, становясь всё холоднее и холоднее, с температурой, приближающейся к абсолютному нулю на больших временах?

Будущее поведение Вселенной можно предсказать, если знать точно начальные условия. Мы сравнительно хорошо знаем современную скорость расширения, *постоянную Хаббла*¹

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \approx 70 \frac{\text{км/с}}{\text{Мпс}}. \quad (15.38)$$

Теоретические предсказания для этой величины в закрытой и открытой моделях даются формулами

$$\begin{aligned} H_{\text{закр}} &= \frac{\sin \eta}{a_0(1 - \cos \eta)^2}, \\ H_{\text{откр}} &= \frac{\text{sh } \eta}{a_0(\text{ch } \eta - 1)^2}. \end{aligned} \quad (15.39)$$

В обеих моделях параметр H убывает со временем. В открытой модели он остаётся всегда положительным, а в закрытой модели он обращается в нуль при $\eta = \pi$ и меняет потом знак.

Можно получить следующие важные неравенства (оставляем их вывод дотошному читателю):

$$\begin{aligned} \mu &> \frac{3H^2}{8\pi G_N} \quad (\text{закрытая модель}), \\ \mu &< \frac{3H^2}{8\pi G_N} \quad (\text{открытая модель}). \end{aligned} \quad (15.40)$$

¹ Мпс означает *мегапарсек*, излюбленная единица длины астрономов и космологов. Один мегапарсек составляет примерно 3,26 миллиона световых лет. Экспериментальная величина H , приведённая в (15.38), означает, что галактики на расстоянии ~ 100 Мпс убегают от нас со скоростью около 7000 км/с.

Иначе говоря, всё зависит от современной плотности Вселенной μ . Если она превосходит некоторое критическое значение, то наступит момент, когда гравитационное притяжение переборет инерцию взрыва и облако разлетевшихся осколков начнёт постепенно стягиваться назад. А если плотность и соответствующая сила гравитационного притяжения меньше критической, этого не произойдёт. В современную эпоху эта критическая плотность имеет порядок

$$\mu_{\text{крит}} \approx 10^{-9} \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}, \quad (15.41)$$

или $\approx 10^{-26} \text{ кг/м}^3$ в единицах массы. (Это примерно в 100 000 раз меньше, чем плотность обыкновенного барионного вещества внутри галактики.)

Эксперимент говорит, что *полная* плотность энергии Вселенной довольно близка к этому критическому значению, и трудно сказать, превосходит она $\mu_{\text{крит}}$ или нет. Значит ли это, что мы не можем предсказать сегодня финальную стадию эволюции Вселенной — будет ли это Большой схлоп закрытой модели или тепловая смерть открытой модели?

Нет, не значит, и согласно тому, что мы сегодня знаем, нас с большей вероятностью ждёт не схлоп, а тепловая смерть. Дело в следующем. Как было сказано, постоянная Хаббла не вполне постоянна, а зависит от времени. Измеряя красные смещения далёких галактик, можно извлечь информацию о постоянной Хаббла в далёком прошлом и определить, таким образом, её временную зависимость. Когда такие измерения были проведены, люди с большим удивлением обнаружили, что Вселенная расширяется с *ускорением*. Это противоречит предсказанию (15.39) «стандартной» фридмановской космологии и может быть объяснено, только если мы предположим, что тензор энергии-импульса включает, помимо «пылевого» вклада с $T_{00} = \mu$, также вакуумный член, $T_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} / (8\pi)$ с ненулевой космологической постоянной¹ Λ . Связанное с ней отрицательное вакуумное давление обеспечит вечное расширение Вселенной.

¹ В оригинальных статьях Фридмана были также написаны и решены уравнения с ненулевым Λ , но, пока не были получены экспериментальные указания на то, что Λ отлично от нуля, не было необходимости включать в анализ космологический член, и обычно этого не делалось. Мы тоже предпочли не включать Λ в наш подробный рассказ о космологических решениях — просто чтобы избежать дополнительных осложнений, связанных с присутствием дополнительного параметра. Его учёт не представляет концептуальных трудностей.

Мы завершим эту главу диаграммой, показывающей современные оценки для различных вкладов в полную плотность энергии Вселенной.



Рис. 15.7. Компоненты Вселенной

Глава 16

Загадка квантовой гравитации

Как уже говорилось раньше, мы не знаем, что такое квантовая гравитация. В этой последней главе я попытаюсь объяснить, почему оказалось так трудно её проквантовать. Потом я расскажу о путях, которыми большинство экспертов пытаются сегодня подойти к решению этой сложнейшей задачи, и под конец злоупотреблю вашим терпением и познакомлю вас с моими собственными еретическими и безответственными догадками на этот счёт.

16.1. Попытки пертурбативных вычислений

16.1.1. Рассеяние гравитонов

Попытаемся провести для гравитации ту же программу, что и для других полевых теорий. Предположим, что метрика близка к плоской, как в формуле (15.21). Мы можем забыть тогда о геометрических аспектах гравитации и рассмотреть *разность* $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ как тензорное поле в обыкновенном плоском пространстве Минковского. Его можно проквантовать так же, как мы это делали с другими полями, и получить гравитон — безмассовую частицу спина 2 с двумя возможными спиральными состояниями: $h = 2$ и $h = -2$.

Гравитоны не свободны. Они могут рассеиваться на обычных частицах (так наблюдались гравитационные волны) или друг на друге. Сконцентрируем внимание на втором процессе. Чтобы найти амплитуду рассеяния гравитонов, мы должны разложить действие Гильберта—Эйнштейна (15.14) по $h_{\mu\nu}$. Символически можно записать

$$\mathcal{L}_{\text{грав}} \sim m_p^2 [(\partial h)^2 + ah(\partial h)^2 + bh^2(\partial h)^2 + \dots], \quad (16.1)$$

где a, b — численные коэффициенты порядка 1. Удобно теперь перейти к «пертурбативной» нормировке и ввести поле $\tilde{h}_{\mu\nu} = m_p h_{\mu\nu}$. Лагранжиан примет вид

$$\mathcal{L}_{\text{грав}} \sim (\partial \tilde{h})^2 + \frac{a}{m_p} \tilde{h}(\partial \tilde{h})^2 + \frac{b}{m_p^2} \tilde{h}^2(\partial \tilde{h})^2 + \dots \quad (16.2)$$

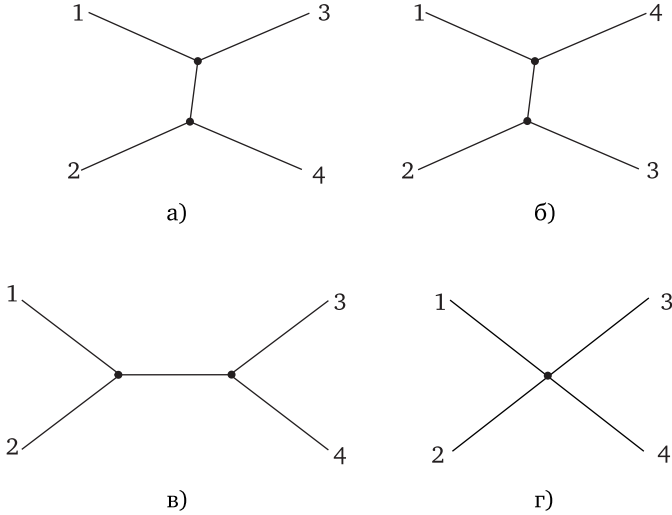


Рис. 16.1. Древесные графики, дающие вклад в амплитуду рассеяния гравитонов

Поле $\tilde{h}$ несёт размерность массы — так же как скалярное поле в модели (10.12). Однако, в отличие от этой модели, члены взаимодействия в лагранжиане (16.2) включают дополнительные производные, а их размерность компенсируется планковской массой в знаменателе.

Диаграммы, описывающие рассеяние гравитонов, изображены на рис. 16.1. Кубичные вершины умножаются на импульс и включают фактор m_P^{-1} . Квартичные вершины включают две степени импульса и фактор m_P^{-2} .

Амплитуда рассеяния зависит от спиральностей входящих и выходящих гравитонов. Рассмотрим амплитуду, где все эти спиральности положительны. Вычисление даёт

$$M_{++|++} = 8\pi i G_N \frac{s^3}{tu}, \quad (16.3)$$

где $s = (p_1 + p_2)^2$, $t = (p_1 - p_3)^2$, $u = (p_1 - p_4)^2$ — стандартные кинематические инварианты.

Эта амплитуда сингулярна при $t = 0$ или $u = 0$, что соответствует рассеянию на угол 0 или π . Сингулярность связана с обменом безмассовым гравитоном в t -канале или u -канале; такая сингулярность хорошо известна в амплитуде кулоновского рассеяния и в его

дифференциальном сечении. Новое состоит в том, что, когда угол рассеяния фиксирован, дифференциальное сечение рассеяния гравитонов *растёт с ростом энергии*: $d\sigma \propto G_N^2 E^2$. Этот рост имеет то же происхождение (размерная константа связи G), что в теории Ферми, которую мы обсуждали в главе 5 [см. формулу (5.22)] и главе 12.

Как и теория Ферми, эйнштейновская гравитация — *неперенормируемая* теория! В частности, петлевые поправки к древесным амплитудам рассеяния гравитонов содержат неприятные ультрафиолетовые расходимости. Роль унитарного предела (5.24) в теории Ферми — энергии, за которой пертурбативные вычисления бессмысленны, — играет теперь планковский масштаб m_P .

16.1.2. Чем плоха неперенормируемость?

Итак, *квантовая версия эйнштейновской гравитации — неперенормируемая и, в силу этого, не самосогласованная теория*. Попро-сим читателя принять и запомнить это утверждение.

Но несколько следующих страниц книги рассчитаны не на нашу целевую аудиторию, не на Соню, которая может при первом чтении спокойно пропустить этот пункт, а адресованы более опытному физику. Я сомневался, стоило ли вообще включать его в книгу, но в конце концов решил это сделать. Я знаю по опыту, что эти вопросы (вильсоновский лагранжиан и его связь с пертурбативными вычислениями в неперенормируемых теориях) не столь просты — даже не все эксперты понимают их вполне ясно. Нельзя полностью исключить, что один из таких экспертов откроет нашу книгу...

Для перенормируемых теорий понятие вильсоновского лагранжиана¹ уже по сути дела обсуждалось в главе 5. Взгляните на уравнение (5.12). Оно выражает эффективный физический заряд в КЭД через голый заряд e_0^2 и ультрафиолетовый регулятор Λ . Смысл этого соотношения следующий. Допустим, мы нарисовали петлевую диаграмму наподобие той, что дана на рис. 5.7, и интересуемся вкладом больших импульсов — импульсов, намного превышающих масштаб энергий, который нас интересует, — в петлевой интеграл. Большие импульсы означают малые расстояния, и петля эффективно стягивается в точку. Этот вклад в петлевую амплитуду оказывается пропорционален древесной амплитуде с фактором, логарифми-

¹ Это понятие было введено в 1971 г. Кеннетом Вильсоном.

чески зависящим от параметра ультрафиолетового обрезания Λ . Такое стягивание похоже по смыслу на стягивание определённых частей диаграмм, содержащих пропагаторы тяжёлых частиц. Подобные стягивания обсуждались раньше: см. рис. 5.13, где в точку стягивался пропагатор тяжёлого W -бозона, и рис. 5.14, где в точку стягивалась электронная петля. (Электрон можно рассматривать как тяжёлую частицу, если характерная энергия рассеивающихся фотонов намного меньше его массы!)

Когда профессиональный драматург упоминает в первом действии ружьё, висящее на стенке в кабинете главного героя пьесы, можно быть уверенным, что в четвёртом действии это ружьё выстрелит. Руководствуясь этим ноу-хау, я повесил на страницах книги небольшое ружьё, которое будет стрелять *сейчас*. Я имею в виду эффективный киральный лагранжиан (11.52), описывающий низкоэнергетические взаимодействия пионов в безмассовой КХД.

Нас будет интересовать в этой главе не физика π -мезонов, а только математические аспекты киральной теории. Как мы уже отмечали в главе 11, эффективная киральная теория весьма похожа на гравитацию. Как и гравитация, эта теория содержит размерную константу связи и неперенормируема. Пертурбативное разложение (11.55) нелинейного лагранжиана (11.52) имеет ту же структуру, что и разложение (16.2). В обоих случаях квартичный член содержит две производные, так что амплитуды рассеяния быстро растут с ростом энергии, и выше определённой энергии ($E \gtrsim 2\pi F_\pi$ в киральной теории и $E \gtrsim m_p$ в гравитации) пертурбативные вычисления становятся бессмысленными.

Обсудим сначала киральную теорию и потом применим к гравитации извлечённые из этого обсуждения уроки. Заметим прежде всего, что лагранжиан (11.52) — это простейшее выражение, инвариантное относительно преобразований $SU_L(2) \times SU_R(2)$, но существует и много других инвариантных структур. На самом деле число таких структур *бесконечно*. Они размножаются по мере роста числа входящих в них производных и связанной с этим числом канонической размерности d . Лагранжиан (11.52) имеет размерность $d = 2$. Запишем его здесь для удобства снова:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{F_\pi^2}{4} \text{Tr}\{\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger\}, \quad (16.4)$$

где $U = \exp\{i\pi^A \sigma^A / F_\pi\}$.

Имеются две различные структуры размерности $d = 4$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &= (\text{Tr}\{\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger\})^2, \\ \mathcal{L}_2 &= \text{Tr}\{\partial_\mu U \partial_\nu U^\dagger\} \text{Tr}\{\partial^\mu U \partial^\nu U^\dagger\}.\end{aligned}\quad (16.5)$$

Если говорить совсем точно, то существуют и другие инвариантные структуры с четырьмя производными. Но они *несущественны* для нас, поскольку все они обращаются в нуль при условии, что поле U удовлетворяет уравнениям движения, следующим из исходного кирального лагранжиана (16.4):

$$(\square U)U^\dagger - U(\square U^\dagger) = 0. \quad (16.6)$$

Скоро мы поймём, почему и в каком именно смысле они несущественны.

Древесная амплитуда рассеяния пионов ведёт себя как

$$M_{\pi\pi \rightarrow \pi\pi}^{(0)} \sim \frac{E^2}{F_\pi^2}. \quad (16.7)$$

Рассмотрим теперь однопетлевую поправку к амплитуде. Она содержит как степенные, так и логарифмические расходимости и имеет следующую структуру (проиллюстрированную на рис. 16.2):

$$M_{\pi\pi \rightarrow \pi\pi}^{(1)} = \frac{\alpha\Lambda^2}{F_\pi^2} M_{\pi\pi \rightarrow \pi\pi}^{(0)} + \frac{A(s, t)}{F_\pi^4} \ln \frac{\Lambda}{\mu} + \frac{B(s, t, \mu)}{F_\pi^4}, \quad (16.8)$$

где μ — произвольно выбранный в диапазоне $E \ll \mu \ll \Lambda$ «технический» параметр разделения масштабов. Конечный вклад B зависит от μ логарифмически, так что полная сумма от μ не зависит. Этот вклад имеет сложную нелокальную структуру. Но первые два ультрафиолетово расходящихся члена в формуле (16.8) происходят от больших петлевых импульсов, когда петля эффективно стягивается в точку; их структура намного проще. Особенно прост квадратично расходящийся вклад. Он пропорционален древесной амплитуде рассеяния и описывает попросту перенормировку голой константы связи:

$$\frac{1}{F_\pi^2} \rightarrow \frac{1}{F_\pi^2} \left(1 + \frac{\alpha\Lambda^2}{F_\pi^2}\right), \quad \text{и, значит,} \quad F_\pi^2 \rightarrow F_\pi^2 \left(1 - \frac{\alpha\Lambda^2}{F_\pi^2} + \dots\right). \quad (16.9)$$

Степенные расходимости выглядят страшнее логарифмических. Соотношение (16.9) — это только первая поправка, но есть также поправки $\sim \Lambda^4$ и $\sim \Lambda^6$, которые, в отличие от логарифмических поправок к эффективному заряду в КЭД или КХД, не суммируются

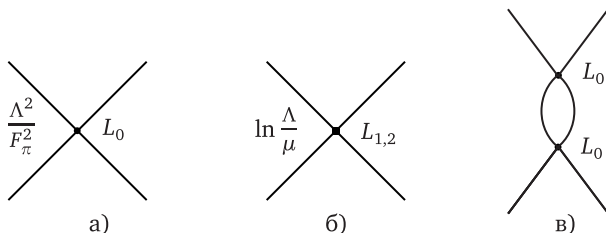


Рис. 16.2. Однопетлевые поправки в амплитуде рассеяния пионов: а) перенормировка F_π^{-2} ; б) логарифмически расходящиеся локальные вклады; в) конечные нелокальные вклады

ни во что разумное. Невзирая на это, можно, в принципе, порядок за порядком *переопределить* константу связи и избавиться от степенных расхождений, выразив всё через перенормированную константу F_π . Можно также заметить, что существует несколько искусственный, но удобный способ регуляризовать ультрафиолетовые расхождимости (так называемая *размерная регуляризация*), при котором ультрафиолетовые расхождимости вообще не возникают.

Обсудим теперь второй член в формуле (16.8). Он одновременно более интересен и в известном смысле более проблематичен. В этом случае петля также эффективно стягивается в точку, но получающаяся точечная четверная вершина не совпадает с древесной амплитудой, полученной из разложения (11.55) лагранжиана (16.4). Она содержит более сложную структуру и включает четыре, а не два внешних импульса. Она представляет собой на самом деле определённую комбинацию четверных вершин, генерируемых кирально инвариантными структурами размерности $d = 4$, выписанными в (16.5)!

Теперь понятно, почему мы назвали «несущественными» структуры, которые обращаются в нуль, когда поле $U(x)$ удовлетворяет уравнениям движения. Можно показать, что вершины, генерируемые такими структурами, содержат фактор p_i^2 для по крайней мере одной из внешних частиц. Но нас интересует рассеяние *асимптотических пионных состояний* — частиц, которые появляются после квантования свободного лагранжиана $\frac{1}{2}(\partial_\mu \pi^a)^2$. Эти частицы находятся на *массовой поверхности*. В случае безмассовых пионов квадраты их 4-импульсов равны нулю. Таким образом, такие структуры действительно не дают вклада в амплитуды рассеяния реальных частиц.

Структуры с высшими производными (16.5) обычно называют *контрчленами*. При этом имеют в виду следующее. Предположим,

что константа связи, стоящая при структуре (16.4) с наименьшей канонической размерностью в *затравочном* лагранжиане, равна не $F_\pi^2/4$, а

$$\text{затравочная константа} = \frac{F_\pi^2}{4} + \frac{\alpha\Lambda^2}{4} + \dots \quad (16.10)$$

с тем же α , что в формуле (16.8).

Предположим далее, что затравочный лагранжиан содержит также определённую комбинацию структур (16.5) (и затем структуры с шестью производными и т. д.):

$$\mathcal{L}_{\text{затр}} = \mathcal{L}_0 \left(1 + \frac{\alpha\Lambda^2}{F_\pi^2} \right) + \beta \mathcal{L}_1 \ln \frac{\Lambda}{\sigma_1} + \gamma \mathcal{L}_2 \ln \frac{\Lambda}{\sigma_2} + \dots \quad (16.11)$$

Новые члены в лагранжиане генерируют новые вершины и новые диаграммы, дающие вклад в амплитуду рассеяния $\pi\pi$. Можно теперь заметить, что квадратичные расходимости в сумме всех вкладов сокращаются, и можно добиться также сокращения логарифмических расходимостей, подбирая подходящим образом коэффициенты β и γ . Таким образом, контрчлены $\sim \Lambda^2$ и $\sim \ln \Lambda$ в формуле (16.11) играют при построении здания теории роль боковых контрфорсов, уравнивающих нагрузки в центральной его части и убивающих зловердные ультрафиолетовые расходимости в амплитуде!

Требование сокращения ультрафиолетовых расходимостей фиксирует константы β и γ , но константы σ_1 и σ_2 зафиксировать, таким образом, нельзя. Это произвольные *новые* параметры, новые константы связи теории, и мы не можем вычислить петлевые поправки к амплитуде, не зафиксировав их значений¹. На уровне двух петель можно написать шесть разных структур канонической размерности $d=6$. Это даёт шесть новых констант. Полное количество констант связи в неперенормируемой теории бесконечно.

Резюмируем сказанное. Неперенормируемая теория плоха не только ввиду возникающих в ней буйных степенных ультрафиолетовых расходимостей. Эти расходимости можно, в принципе, порядок за порядком убирать из окончательного ответа, добавляя их точно отмеренную смесь в голую константу связи. Можно убирать также логарифмические расходимости, подбирая подходящим образом коэффициенты β и γ . Таким образом, контрчлены $\sim \Lambda^2$ и $\sim \ln \Lambda$ в формуле (16.11) играют при построении здания теории роль боковых контрфорсов, уравнивающих нагрузки в центральной его части и убивающих зловердные ультрафиолетовые расходимости в амплитуде!

¹ В практических вычислениях в КХД константы $\sigma_{1,2}$ можно определить феноменологически. Тогда петлевые вычисления при не очень больших энергиях становятся возможны. Соответствующая техника была разработана Юргом Гассером и Хайнрихом Лютвиллером в 1984 г.

рифмические расходимости, добавляя дополнительные контрчлены в голый лагранжиан. Но остаются следующие проблемы.

- С каждым контрчленом связана дополнительная размерная константа σ_i . Полное число таких констант бесконечно.
- В неперенормируемой теории амплитуды и сечения быстро растут с энергией, и, начиная с некоторого масштаба (унитарного предела) теория возмущений становится полностью неприменимой. Унитарный предел оценивается как $\sim G_F^{-1/2}$ в теории Ферми, как $\sim 2\pi F_\pi$ в киральной теории и как $\sim m_p$ в гравитации¹.

Вернёмся к гравитации. Структура амплитуд рассеяния гравитонов похожа на обсуждавшуюся выше структуру амплитуд рассеяния пионов, но есть одно важное отличие: в гравитации *логарифмические* расходимости отсутствуют на однопетлевом уровне. В самом деле, мы видели, что логарифмические расходимости в петлях связаны с присутствием контрчленов высших размерностей. В одной петле требуемая каноническая размерность есть $d = 4$. Можно построить всего два соответствующих скалярных инварианта²: R^2 и $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$. Но как R^2 , так и $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ обращаются в нуль на массовой поверхности, когда метрика удовлетворяет свободным (т. е. без материи) уравнениям Эйнштейна $R_{\mu\nu} = 0$. В литературе часто можно встретить утверждение, что «гравитация конечна в одной петле», но надо иметь в виду, что это касается только амплитуд рассеяния гравитонов на массовой поверхности и только если не обращать внимания на квадратичные ультрафиолетовые расходимости.

Существует, однако, нетривиальный инвариант канонической размерности 6,

$$\mathcal{L}_{d=6} = R_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} R_{\gamma\delta}{}^{\mu\nu}, \quad (16.13)$$

который не исчезает на массовой поверхности и приводит к логарифмическим расходимостям в амплитудах рассеяния гравитонов на двухпетлевом уровне. Имеется также бесконечное число контрчленов высших размерностей.

¹ И дополнительная неприятность состоит в том, что неперенормируемые теории не имеют непертурбативного определения: в них нельзя определить континуальный интеграл — ср. обсуждение в конце главы 8.

² Структура $R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$ независимым инвариантом не является. Можно показать, что

$$R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} = 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - R^2 + \text{полная производная.} \quad (16.12)$$

Это так называемая *формула Гаусса—Бонне*.

Можно сделать вывод, что физика пертурбативной гравитации такая же, как в киральной теории. Ни та, ни другая теория не самосогласована и не может претендовать на роль фундаментальной теории.

16.1.3. Супергравитация

Как мы узнали в главе 14, некоторые неприятные ультрафиолетовые расходимости, такие как расходимости в вакуумной энергии, могут в суперсимметричных теориях сокращаться. Поэтому возникает естественный вопрос: не сокращаются ли ультрафиолетовые расходимости в амплитудах рассеяния в каких-либо суперсимметричных обобщениях эйнштейновской гравитации? Мы сразу скажем, что ответ на этот вопрос почти наверняка отрицателен, но прежде, чем прийти к такому разочаровывающему выводу, расскажем немного об этих интересных теориях.

Простейшая теория супергравитации (она была построена в 1976 г. Дэном Фридманом, Серджио Феррарой и Питером ван Нивенхойзенем) включает помимо метрики $g_{\mu\nu}(x)$ также антикоммутирующее поле *Рариты—Швингера* $\psi_\mu(x)$. Последнее представляет четырёхкомпонентный майорановский спинор¹, несущий дополнительный векторный индекс μ . Это поле описывает нейтральный фермион со спином 3/2. Лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{супергравитации}} = -\frac{m_p^2}{16\pi}R - \frac{1}{2\sqrt{-g}}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\psi}_\mu\gamma^5\gamma_\nu\mathcal{D}_\rho\psi_\sigma, \quad (16.14)$$

где $\mathcal{D}_\mu$ — гравитационная ковариантная производная².

Спектр физических состояний этой теории включает гравитоны со спиральностями $h = \pm 2$ и гравитино со спиральностями $h = \pm 3/2$. Гравитон со спиральностью $h = 2$ и гравитино со спиральностью $h = 3/2$, несущие один и тот же импульс, образуют суперсимметричный дублет. Есть также суперсимметричные дублеты, образованные состояниями гравитона со спиральностью $h = -2$ и гравитино со спиральностями $h = -3/2$.

¹Т. е. биспинор (9.40) с $\xi \equiv \eta$.

²Обсуждая классическую гравитацию в предыдущей главе, мы обошлись без определения $\mathcal{D}_\mu$. В принципе, нам полагалось бы дать такое определение сейчас, и не только для векторов и тензоров, но также для спиноров, объяснив при этом, что спинорная связность ω_ρ^{ab} , которая входит в $\mathcal{D}_\rho\psi_\sigma$, зависит в этом случае не только от тетрады e_μ^a , но также от ψ_μ (это даёт член $\sim \psi^4$ в лагранжиане). Однако я утаю от читателя все эти важные детали.

Лагранжиан (16.14) инвариантен относительно общих координатных преобразований и относительно *локальных* преобразований суперсимметрии, где грассмановы параметры преобразований зависят от x_μ . Локальная (калибровочная) суперсимметрия соотносится с обыкновенной суперсимметрией примерно так же, как обычная калибровочная симметрия с обычной глобальной симметрией.

Из предыдущих глав мы знаем, что калибровочная симметрия — это «не вполне» симметрия. В частности, теорема Голдстоуна, говорящая о генерации безмассовых бозонов при спонтанном нарушении глобальных симметрий, несправедлива для симметрий калибровочных. Аналогично некоторые теоремы, верные в теориях с глобальной суперсимметрией, несправедливы для супергравитации. В частности, нельзя больше утверждать, что вакуумная плотность энергии равна нулю. (Само понятие *плотности* энергии теряет смысл в гравитации и супергравитации!) Если локальная суперсимметрия спонтанно нарушается, то безмассового голдстино не возникает. Вместо этого соответствующая степень свободы съедается гравитино, которое приобретает массу.

Какова пертурбативная структура амплитуд в супергравитации? Оказывается, она похожа на структуру амплитуд в обычной гравитации. Обе эти теории содержат размерную константу, и обе они неперенормируемы. Суперсимметрия вносит только одну новую черту: логарифмические ультрафиолетовые расходимости сокращаются в амплитудах на массовой поверхности не только в одной, но и в двух петлях. Причина состоит в том, что у шестимерного гравитационного инварианта (16.13) нет суперсимметричного обобщения и шестимерный контрчлен в супергравитации отсутствует. Но на трёхпетлевом уровне и выше такие суперсимметричные контрчлены (размерности $d = 8$ и выше) присутствуют¹. Полное число существенных высокомерных контрчленов и связанных с ними дополнительных констант теории бесконечно, и физическая ситуация такая же, как в обычной гравитации и в киральной теории.

Лагранжиан (16.14) описывает простейшую супергравитацию $\mathcal{N} = 1$. Но существуют также *расширенные* супергравитации (ср. обсуждение расширенных суперсимметричных теорий Янга—Миллса

¹Это подтверждается явным вычислением. В теории (16.14) были обнаружены логарифмические ультрафиолетовые расходимости в трехпетлевых амплитудах.

в §14.3). Спектр следующей по сложности $\mathcal{N} = 2$ супергравитации включает гравитон, два различных гравитино и абелево калибровочное поле. При данном импульсе есть два супермультиплет состояний. Один из них включает гравитон с $h = 2$, два гравитино с $h = 3/2$ и «фотон» с $h = 1$. Другой супермультиплет включает состояния с отрицательной спиральностью. Максимально расширенная супергравитация ($\mathcal{N} = 8$) содержит при каждом импульсе только один большой 256-плет состояний, включающий гравитон, восемь гравитино, двадцать восемь различных «фотонов», пятьдесят шесть безмассовых майорановских частиц со спином $1/2$ («фотино») и семьдесят скаляров (см. таблицу 10). Полное число бозонных и фермионных состояний, разумеется, совпадает.

Таблица 10. 256-плет состояний в $\mathcal{N} = 8$ супергравитации

	гравитон	гравитино	фотоны	фотино	скаляры	фотино	фотоны	гравитино	гравитон
спиральность	-2	-3/2	-1	-1/2	0	1/2	1	3/2	2
число состояний	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Высокая симметрия $\mathcal{N} = 8$ этой теории приводит к нетривиальным сокращениям. В явных вычислениях группы Цви Берна было обнаружено сокращение расходимостей на уровне четырёх петель. Позже этот факт получил теоретическое объяснение: было показано, что в этой теории отсутствуют не обращающиеся в нуль на массовой поверхности контрчлены канонической размерности 4, 6, 8, 10, 12 и 14, обладающие полной суперсимметрией для $\mathcal{N} = 8$. Отсюда следует сокращение расходимостей в одной, двух, трёх, четырёх, пяти и шести петлях. Что касается семи петель, то $\mathcal{N} = 8$ инвариант требуемой канонической размерности $d = 16$ написать можно, что *может* означать появление логарифмической расходимости и связанной с ней новой константы. Есть, однако, определённые эвристические аргументы в пользу того, что на уровне семи петель этого ещё не происходит. Но большинство экспертов считает, что в восьмой петле¹ и в более высоких петлях расходимости *должны* появиться.

¹Соответствующий контрчлен канонической размерности $d = 18$ был написан ещё в 1981 г. Ренатой Каллош и независимо Полем Хау и Ульфом Линдстрёмом.

ся, — мы просто не видим никакой причины, по которой они должны сокращаться.

Разумеется, в этом можно было бы убедиться *полностью*, только проделав явный 8-петлевой расчёт и показав, что коэффициент при $\ln \Lambda$ отличен от нуля. Я совершенно не уверен, что такое невероятное по сложности вычисление будет сделано в текущем столетии. Вопрос приобретает, таким образом, достаточно академический оттенок — примерно как вопрос о самосогласованности стандартной КЭД (см. с. 85). Математик воздержался бы здесь от дальнейших комментариев до тех пор, пока что-либо определённое не будет *доказано*. Но мы, физики, нетерпеливы и при отсутствии строгих доказательств часто оказываемся готовы удовлетвориться правдоподобными умозаключениями. Заключение, что даже максимально суперсимметричная супергравитация $\mathcal{N} = 8$ не свободна от логарифмических расходимостей в амплитудах, что приводит к возникновению в теории бесконечного числа дополнительных неизвестных констант, кажется мне и большинству моих коллег весьма правдоподобным.

Начиная с некоторого порядка, ряд теории возмущений в любой неперенормируемой теории становится неопределён, вне зависимости от того, насколько высокой симметрией или суперсимметрией эта теория обладает.

16.2. Нарушение причинности. Парадокс Хоукинга

Я должен признаться, что есть всего две вещи в физике, которые я понимаю относительно хорошо.

1) Прежде всего — это второй закон Ньютона (4.1). Он представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка, которому подчиняется траектория $x(t)$. Если сила F — заданная функция от $\dot{x}$, x и t и если положение и скорость заданы в начальный момент времени t_0 , то сформулирована задача Коши. Интуитивно ясно (и математики это подтверждают), что эта задача имеет единственное решение, если функция $F(\dot{x}, x, t)$ имеет не слишком дикий вид.

То же относится к любой динамической системе с произвольным числом переменных. Уравнения движения имеют решение и это решение единственно, если заданы начальные значения всех обобщённых координат и скоростей. И это относится также к полевым теориям. В этом случае мы должны зафиксировать начальные зна-

чения для всех полей и их временных производных во всех пространственных точках.

2) Второе, что я понимаю, — это уравнение Шрёдингера (4.8). Опять же, зафиксировав волновую функцию $\Psi(\mathbf{x}, t)$ в начальный момент времени t_0 , мы формулируем задачу Коши, которая имеет единственное решение. Это решение даст нам волновую функцию в более поздние моменты времени $t > t_0$. Зная волновую функцию, мы можем найти средние значения всех наблюдаемых.

Для полевых теорий необходимо решить задачу Коши для волнового функционала (4.34).

К сожалению, как мы уже отмечали в § 4.8, теория гравитации в этих терминах не формулируется. Проблема в том, что у нас нет больше понятия универсального плоского времени.

Специальная теория относительности говорит нам, что время определено по-разному в разных системах отсчёта, но если система отсчёта зафиксирована, то время однозначно определено и уравнения движения релятивистской механики представляют решаемую задачу Коши. В гравитации, однако, пространство-время искривлено и временная координата запутана с пространственными. В результате уравнения Эйнштейна (15.18) нельзя интерпретировать как уравнения, описывающие временную эволюцию метрики.

Говоря точнее, если отклонение $h_{\mu\nu}$ метрики $g_{\mu\nu}$ от плоской метрики Минковского мало, то такая интерпретация по-прежнему возможна. Это неестественно и технически неудобно, но $h_{\mu\nu}$ можно в этом случае представить как тензорное поле в плоском пространстве Минковского. Однако в сильных гравитационных полях мы этого сделать не можем. В частности, уравнения Эйнштейна допускают патологические гёделевские решения с геодезическими, представляющими замкнутые временные петли. Это нарушает причинность.

Другими словами, не только квантовая, но также классическая гравитация — общая теория относительности — внутренне не самосогласована. ОТО, безусловно, применима и хорошо работает, когда гравитационные поля не очень сильны. Но в сильных полях она встречается с трудностями фундаментального характера. Например, решение Шварцшильда (15.24) содержит горизонт событий, так что пространственно-временная область за горизонтом, внутренность чёрной дыры, недоступна для наблюдений снаружи и не является поэтому физически наблюдаемым объектом.

При попытках квантования ситуация становится ещё хуже. В классической теории мы можем попросту исключить из рассмотрения парадоксальные решения с замкнутыми временными петлями, заявив, что они нефизичны и не реализуются в природе. Действительно, можно помимо прочего заметить, что эти решения нестабильны — малое возмущение (как убийство бабочки чуть в стороне от предписанной Тропы в известном рассказе Рэя Бредбери) их полностью разрушает. Но в квантовой теории от временных петель так просто отделаться не удаётся. Чтобы найти амплитуду квантового процесса, надо просуммировать по всем квантовым траекториям, т. е. по всем *виртуальным* полевым конфигурациям, в том числе по конфигурациям, включающим замкнутые геодезические¹. Такая амплитуда не будет причинной.

То же относится к проблеме горизонта. В классической теории можно оставаться снаружи от чёрной дыры и не интересоваться тем, что происходит внутри неё. Но в квантовой теории полностью разделить наружную и внутреннюю области оказывается невозможно. С этим связан так называемый *парадокс Хоукинга*.

Но чтобы понять, в чём суть этого парадокса, мы должны вначале узнать, что такое *излучение Хоукинга*.

В § 4.7 [с. 68] мы отметили, что если заряд ядра чуть-чуть превысил бы определённое критическое значение $Z^* \gtrsim 1/\alpha$, так что энергия низшего электронного уровня оказалась бы ниже порога² $E = -mc^2$, то родилась бы электронно-позитронная пара, причём позитрон вылетел бы наружу, а электрон свалился бы на ядро и понизил бы его заряд до подкритического. При исходном заряде ядра, существенно превышающем критический, наблюдалось бы множественное излучение позитронов.

Это пороговый эффект, поскольку электрон массивен и на рождение пары тратится энергия — как минимум, $2mc^2$. Но предположим существование безмассовых заряженных частиц. Их пары можно рождать, практически не тратя энергию, так что *каждый* заряд по прошествии достаточно большого времени будет заэкранирован.

И это буквально то, что происходит в гравитационном поле. Фотоны безмассовы, но они несут энергию и взаимодействуют с полем. Любое гравитационное поле может таким образом рождать фотон-

¹ Это особенно ясно, если описывать квантовую теорию на языке континуального интеграла (§ 8.3).

² Всё в сослагательном наклонении. Таких ядер нет.



Рис. 16.3. Испарение чёрных дыр

ные пары, но, конечно, чем сильнее поле — тем сильнее этот эффект. При наличии горизонта этот процесс приобретает некоторые универсальные черты, раскрытые Стивеном Хокингом в 1974 г. Расскажем о них (с некоторыми эвристичными упрощениями).

Рассмотрим чёрную дыру с массой M . Радиус её горизонта даётся формулой (15.25). Пары фотонов в основном рождаются в области, где поле наиболее сильно, т. е. около горизонта¹. Когда частицы рождаются кулоновским полем, полный электрический заряд сохраняется и компоненты рождённой пары имеют противоположные электрические заряды. В гравитации роль заряда играет энергия. Полная энергия (измеренная удалённым наблюдателем) сохраняется. Значит, один из рождённых фотонов должен иметь положительную энергию, а другой — отрицательную. Их судьба совершенно различна. Фотон с отрицательной энергией падает в дыру и исчезает в ней. Его положительному брату везёт больше — он вырывается из мёртвой хватки гравитационных щупалец чёрной дыры и вылетает с песнями на бесконечность (см. рис. 16.3).

Что касается чёрной дыры, проглотившей его несчастного отрицательного брата, это чёрное деяние не принесло ей выгод. В результате чёрная дыра не приобрела, а *потеряла* энергию — ровно столько же, сколько унёс положительный беглец. Другими словами, мы описали не что иное, как процесс спонтанного излучения фотонов чёрной дырой из области, близкой к горизонту, так что масса дыры уменьшается — процесс *испарения* чёрных дыр.

Но как описать этот процесс количественно? Каков спектр и интенсивность этого излучения? Хокинг показал, что это излучение фактически является *тепловым*: спектр и интенсивность точно

¹ Поле ещё сильнее в глубине дыры, но оттуда ничего наружу выбраться не может.

такие же, как если бы излучение шло с поверхности горизонта, нагретой до температуры

$$T = \frac{m_p^2}{8\pi M} \quad (16.15)$$

(в естественных единицах). Чёрная дыра излучает, как абсолютно чёрное тело! Полная интенсивность излучения P равна площади горизонта

$$\mathcal{A} = 4\pi r_g^2 = \frac{16\pi M^2}{m_p^4},$$

умноженной на σT^4 , где $\sigma = \pi^2/60$ есть постоянная Стефана—Больцмана. Мы получаем

$$P = \frac{m_p^4}{15 \cdot 2^{10} \pi M^2}. \quad (16.16)$$

Величину (16.15) для температуры горизонта можно записать как $T = 1/(4\pi r_g)$. Оценка $T \sim 1/r_g$ выглядит вполне естественно, если заметить, что максимум спектра излучения чёрного тела приходится на частоты порядка температуры и что длина волны излучённых фотонов того же порядка, что размер горизонта r_g .

Мы можем ответить теперь на вопрос, который наш умный читатель уже наверняка собирался задать: почему автор говорил только об излучении фотонов? Не излучает ли горизонт чёрной дыры также другие частицы?

Ответ состоит в том, что другие частицы действительно могут излучаться, если комптоновская длина волны этих частиц намного превышает размер чёрной дыры. Самые лёгкие массивные частицы — это нейтрино. Имея в виду ограничение (12.69) на массы, можно заключить, что нейтрино, безусловно, излучаются чёрными дырами размером меньше, чем один микрон.

Для чёрных дыр, которые наблюдают астрономы, температура и интенсивность излучения исчезающе малы. Если $M = M_\odot$, то температура составляет только $\approx 10^{-7}$ К. Но чем меньше масса, тем ярче сияет чёрная дыра. Например, температура Хоукинга для чёрной дыры с массой, равной массе *Весты* (один из больших астероидов), составляет ≈ 470 К. Такую дыру можно было бы использовать для готовки, если бы не её исчезающе малый размер $\approx 0,4$ микрон.

Излучающая дыра теряет массу, $\dot{M} = -P$. Подставляя выражение (16.16), можно определить полное время испарения:

$$\tau_{\text{испарения}} = 5 \cdot 2^{10} \pi \frac{M^3}{m_p^4}. \quad (16.17)$$

Время испарения имеет тот же порядок, что время жизни Вселенной для дыр с массой $M \sim 10^{12}$ кг.

Я не уверен, что описанное явление имеет феноменологическую значимость. Скорее нет, чем да. Но тот факт, что образовавшаяся в результате коллапса обычной материи чёрная дыра может исчезнуть, излучив полностью свою массу, позволил Хоукингу сформулировать свой знаменитый парадокс.

Предположим, что мы бросаем в чёрную дыру «Большую советскую энциклопедию». В томах энциклопедии содержится масса информации, но, как только они пересекают горизонт, эта информация *полностью* теряется. Курсив здесь важен. Если сжечь энциклопедию в печке (особенно если сжечь все существующие на земле экземпляры энциклопедии), то информация с практической точки зрения будет тоже потеряна. Но не для физика-теоретика! В классической физике можно, в принципе, проследить за судьбой всех составлявших энциклопедию атомов и сказать, что информация, содержавшаяся в энциклопедии, не исчезла, а перешла в другую форму, она содержится теперь в парящих в воздухе молекулах углекислого газа. То, что мы не можем эту информацию оттуда извлечь — это *наша* проблема.

В квантовой механике информация содержится в волновой функции. При унитарной эволюции эта информация не теряется и, в принципе, её можно всегда восстановить. Но с чёрной дырой ситуация другая. Что туда попало — то пропало без всяких надежд на восстановление.

Это пока ещё не парадокс по следующей причине. Вспомним, что для удалённого наблюдателя объекты, падающие в дыру, никогда не пересекают горизонт (с. 371). Это значит, что они теоретически остаются по-прежнему доступными для наблюдений.

Реальная неприятность возникает, если ввести в рассмотрение излучение Хоукинга. Это излучение имеет стохастическую тепловую природу. Оно не зависит от природы вещества, сформировавшего чёрную дыру. Когда последняя испаряется, информация о том, что предшествовало её образованию, теряется навсегда.

Но такая абсолютная потеря информации в результате эволюции противоречит фундаментальным принципам квантовой механики. Фундаментальное уравнение Шрёдингера описывает *унитарную* эволюцию волновой функции. Это означает, что *чистое* квантовое состояние (состояние, описываемое волновой функцией) может

перейти только в другое чистое состояние, содержащее, в принципе, всю информацию, которая содержалась в состоянии начальном.

Сегодня среди экспертов нет единого мнения о том, насколько серьёзен этот парадокс. Хорошо известный уважаемый теоретик Леонард Саскинд опубликовал научные статьи и популярную книгу «The Black Hole War», в которых он спорит с аргументами Хоукинга. Я не следил за этой дискуссией, и у меня нет собственной научной точки зрения по этому вопросу. *Подозреваю*, однако, что с парадоксом Хоукинга справиться не так просто и что полное его разрешение — дело будущего...

16.3. Струны

Надеюсь, я убедил читателя в том, что эйнштейновская общая теория относительности с действием (15.14) не может быть фундаментальной теорией гравитации. Она встречается с очень серьёзными, по-видимому, непреодолимыми трудностями как на пертурбативном, так и на непертурбативном уровне. Большинство экспертов согласны сегодня в том, что теория (15.14) — это *эффективная* низкоэнергетическая теория гравитации. В таком же примерно смысле, как 4-фермионная теория Ферми есть эффективная теория слабых взаимодействий.

Фактически мы можем рассматривать стандартную электрослабую модель, описанную в главе 12, как конкретный способ ультрафиолетовой регуляризации теории Ферми. Но, в отличие от КЭД и КХД, эта регуляризация не является просто техническим приёмом и параметр регуляризации нельзя устремить к бесконечности. $\Lambda_{\text{электрослаб}}$ — это вполне реальный физический параметр. Он имеет тот же порядок величины, что массы m_W и m_Z . Когда энергия приближается к этому пределу, не только модифицируются эффективные 4-фермионные вершины, но оживают также новые степени свободы, которые при низких энергиях оставались замороженными.

Подобное физическое ультрафиолетовое обрезание должно иметь место и в эйнштейновской гравитации. Среди экспертов нет единого мнения о природе этого обрезания, о том, *какие* новые степени свободы оживают на планковском масштабе, но большинство теоретиков склоняются к мысли, что глубинная фундаментальная Единая теория всего (ЕТВ) — это *теория струн* в том или ином варианте. Я сам экспертом по струнам не являюсь, не собираюсь (и не могу) сделать таким экспертом моего читателя и ограничусь в этой

главе пальцевыми эвристическими соображениями, почти не вдаваясь в технические детали.

Главная идея такова. Когда мы говорили в главе 10 о диаграммах Фейнмана в полевых теориях, мы не вывели их строго, но опирались при их объяснении и интерпретации на квантовомеханические аналогии. Мы говорили, что частица (например, электрон) приходит из бесконечности в точку взаимодействия, затем она рассеивается, затем проходит короткое расстояние как виртуальная частица, снова рассеивается (или превращается в какую-то другую частицу) и наконец все взаимодействующие частицы уходят на бесконечность, откуда они пришли. Представьте теперь, что мы имеем дело не с точечными частицами, но с протяжёнными объектами конечного размера — струнами. Их размер l_s несуществен, пока характерные импульсы в процессе рассеяния малы по сравнению с l_s^{-1} . Но по мере того, как импульсы растут, конечность размеров начинает играть роль. В частности, петлевые поправки к амплитудам рассеяния больше не расходятся в ультрафиолете, но обрезаются на масштабе l_s^{-1} .

Известны два основных типа струн — открытые и замкнутые. Открытые струны имеют топологию отрезка, а замкнутые — топологию окружности. Для описания гравитации используются замкнутые струны, и мы будем обсуждать только их.

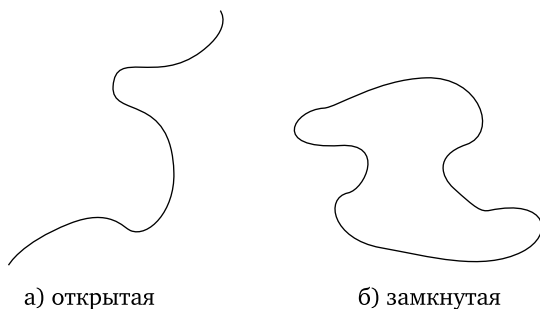


Рис. 16.4. Струны

16.3.1. Бозонные струны

Как мы узнали из § 8.3, квантовую амплитуду перехода частицы из одной точки в другую можно вычислить как интеграл по

всем возможным траекториям, соединяющим начальную и конечную точки. Это относится также к *свободным* амплитудам перехода, которые представляют на самом деле пропагаторы типа (8.30) или (10.10), записанные в координатном представлении. Чтобы вычислить интеграл по путям, нам надо в него подставить выражение для свободного действия $S[\text{путь}]$. Действие свободной релятивистской частицы нам известно:

$$S_{\text{свободная частица}} = -m \int ds = -m \int d\tau \sqrt{\frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial x_\mu}{\partial \tau}}, \quad (16.18)$$

где τ — произвольная параметризация *мировой линии* распространяющейся частицы.

Лоренц-инвариантное действие свободной распространяющейся струны (*действие Намбу—Гото*) можно написать по аналогии:

$$S_{\text{свободная струна}} = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{\det\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x_\mu}{\partial \xi^\beta}\right)}, \quad (16.19)$$

где $\xi^\alpha \equiv \{\tau, \sigma\}$ — две координаты на *мировом листе* распространяющейся струны¹. Константа T , несущая размерность m^2 , называется *натяжением струны*. С последним понятием мы уже встречались в главе 11, когда упоминали феноменогическую струнную модель для описания адронов [см. формулу (11.26)]².

Рассмотрим теперь рассеяние двух замкнутых струн друг на друге (см. рис. 16.5).

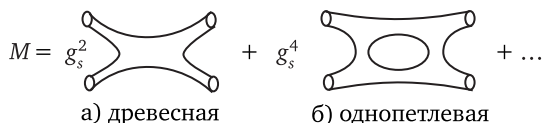


Рис. 16.5. Струнные амплитуды

График на рис. 16.5 а описывает древесную амплитуду рассеяния. Топологически он представляет собой сферу, двумерную поверхность рода 0, из которой вырезаны четыре маленьких диска. График

¹ Координаты ξ^α не имеют ничего общего с x^μ . Иксы — это координаты в плоском пространстве Минковского, в котором живёт струна и которое теоретики обычно называют *балком* (от английского *bulk* — что-то большое и громоздкое).

² Надо сказать, что теория струн была впервые сформулирована именно как такая феноменологическая модель. Струны стали рассматриваться в качестве серьёзных кандидатов на роль глубинных фундаментальных объектов, в терминах которых формулируется ЕТВ, только после *суперструнной революции* 1984–1985 гг.

на рис. 16.5 б описывает однопетлевую поправку к струнной амплитуде. Топологически он представляет собой двумерную поверхность рода 1, тор, откуда вырезаны четыре маленьких диска. Аналитические выражения, отвечающие этим графикам, записываются через континуальные интегралы по всем возможным поверхностям соответствующего рода, вложенным в плоский балк, границей которых служат 4 маленьких, (вообще говоря) деформированных и фиксированных в балке кружочка. Эти интегралы можно вычислить (особенно в пределе, когда кружочки маленькие, не сильно мятые и далеко отстоят друг от друга), но мы этого делать не будем а только скажем, что интегралы насыщаются струнами с характерным размером

$$l_s \sim \frac{1}{\sqrt{T}}. \quad (16.20)$$

Константа g_s , от которой зависят численные факторы, умножающиеся на амплитуды на рис. 16.5, называется *струнной константой связи*. Чтобы пертурбативное разложение имело смысл, эта константа должна быть мала. Следующий член разложения содержит континуальный интеграл по поверхностям рода 2, по «кренделям». Он входит в разложение с множителем g_s^6 . Имеются также вклады высших порядков, связанные с поверхностями рода 3, и т. д.

«Всё это замечательно, — наверное, подумаете вы, — но какое отношение имеют все эти забавные струнные амплитуды к гравитации?» Чтобы понять этот центральный пункт, заметим, что для замкнутой струны $x^\mu(\tau, \sigma)$ суть периодические функции переменной σ : $x^\mu(\tau, \sigma + 2\pi) = x^\mu(\tau, \sigma)$. Рассмотрим разложение Фурье этих функций:

$$x^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu(\tau) + l_s \sum_{n \neq 0} \alpha_n^\mu(\tau) e^{in\sigma}, \quad (16.21)$$

где $\alpha_{-n}^\mu = (\alpha_n^\mu)^*$. Мы описали, таким образом, нелокальный объект — струну — через бесконечный набор локальных параметров: положение центра струны x_0^μ и коэффициенты Фурье $\{\alpha_n^\mu\}$.

Должен вас предостеречь: я не был здесь аккуратен. Настоящие струнные теоретики выделяют струнные моды и потом их квантуют, используя несколько другое рассуждение. Вместо того чтобы разлагать в ряд Фурье статические струнные конфигурации, надо сделать это для функции $x^\mu(\tau, \sigma)$, удовлетворяющей уравнениям движения на мировом листе $(\partial^2/\partial\tau^2 - \partial^2/\partial\sigma^2)x^\mu = 0$, и принять во внимание как бегущие направо, так и бегущие налево моды: $x_R^\mu(\tau - \sigma)$ и $x_L^\mu(\tau + \sigma)$.

Естественно, мы не собираемся всё это здесь проделывать и ограничимся формулой (16.21), которая поможет нам получить приблизительное представление о струнных модах. Прежде всего обратите внимание на первый член в формуле (16.21). Это положение струнного центра масс. Если выкинуть все остальные члены разложения, то струна схлопывается в точку и описывает обыкновенную точечную скалярную частицу.

И здесь нас ждёт серьёзное огорчение. Аккуратная процедура квантования, не описанная, но упомянутая нами выше¹, говорит, что эта частица имеет *мнимую* массу: $m^2 = -4\pi T'$! Это означает, что эффективный лагранжиан, соответствующий этой моде, имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 + 2\pi T \varphi^2. \quad (16.22)$$

Потенциальная энергия не положительна и не растёт с ростом φ , как мы к этому привыкли, а отрицательна и падает. Мы приходим к выводу, что вакуум в такой теории нестабилен. Или, лучше сказать, в теории вообще нет вакуумного состояния. Весьма скоро, в конце этой главы и книги, мы приведём аргументы в пользу того, что отсутствие вакуумного состояния в теории не всегда катастрофично. Но в данном случае это скорее так. Мы заключаем, что теория чисто бозонной струны, основанная на действии Намбу—Гото, не описывает ничего хорошего.

Злокачественная нестабильная мода в формуле (16.22) обычно называется *тахеоном*. Причина следующая. Если попытаться описывать её как обычную частицу и написать стандартные кинематические соотношения наподобие $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$, то можно увидеть, что отношение pc^2/E , т. е. скорость частицы, превышает скорость света. Но следует хорошо понимать, что лагранжиан (16.22) не описывает какие-либо сверхсветовые частицы (тахеоны). Он вообще ничего не описывает!

Мы скоро увидим, что проблема тахиона удовлетворительно решается в суперсимметричной струнной теории: его там просто нет. Но прежде чем говорить о суперсимметрии, давайте посмотрим снова на разложение (16.21) и рассмотрим член в сумме с $n = 1$. Геометрически он описывает струну эллипсоидальной формы. Эллипс характеризуется размером, эксцентриситетом и своей ориентацией

¹ Дополнительное важное замечание состоит в том, что такое аккуратное квантование можно провести *только* для струны, движущейся по 26 мерному плоскому балку. В любой другой размерности не сокращаются некоторые зловередные аномалии...

в балке. Когда струна распространяется, эти параметры осциллируют. Осцилляции размера дают скалярную моду, называемую *дилатоном*¹. Проквантовав эту моду, можно убедиться в том, что масса соответствующей частицы равна нулю.

Осцилляции эксцентриситета дают картину, похожую на гравитационную волну (ср. рис. 15.4). И действительно, аккуратный анализ выявляет существование квадрупольной моды, описываемой симметричным тензорным полем — таким же, как метрика. Более того, эффективный лагранжиан этой моды совпадает с действием Гильберта—Эйнштейна (15.14)! Таким образом, спектр возбуждений свободной бозонной замкнутой струны включает безмассовые гравитоны.

Наконец, имеются осцилляции ориентации. Они *приблизительно* отвечают другой безмассовой моде в спектре, описываемой антисимметричным тензорным полем² $B_{\mu\nu}$.

Все остальные моды в формуле (16.21) с $n \geq 2$ несут положительные массы порядка $\sqrt{T}$. Чем больше n , тем больше их масса и тем больше спин. Всё это проиллюстрировано на рис. 16.6.



Рис. 16.6. Спектр замкнутой бозонной струны

16.3.2. Суперструны

В суперструнных моделях к координатам балка $x^\mu(\tau, \sigma)$ добавляются их фермионные суперпартнёры $\psi^\mu(\tau, \sigma)$ (ψ^μ представляет для каждого μ двухкомпонентный майорановский спинор, живущий на двумерном мировом листе). Имеется несколько вариантов суперструнной теории, над формулировкой и развитием которых работало созвездие блестящих теоретиков³.

¹ От английского *dilate* — расширять.

² Это поле принадлежит присоединённому представлению группы $SO(25, 1)$.

³ Андре Невё, Джон Шварц, Пьер Рамон, Майкл Грин, Эдвард Виттен, Александр Поляков и многие другие.

Главная хорошая новость, касающаяся суперструн, была уже объявлена: в спектре суперструнных теорий отсутствует тахион! Это не очень удивительно. В главе 14 мы узнали, что суперсимметричные теории характеризуются либо нулевой вакуумной энергией (если суперсимметрия не нарушена), либо положительной энергией (если она нарушена). В спектре, таким образом, присутствует вакуумное состояние и тахионная нестабильность вакуума, как в формуле (16.22), исключена.

А плохая новость (или по крайней мере существенное усложнение) состоит в том, что, подобно бозонной струнной теории, теория суперструн не может быть сформулирована в четырёхмерном балке. Для бозонных струн балк должен был быть 26-мерен. Для суперструн он должен быть 10-мерен.

В наиболее популярной сегодня суперструнной модели эффективный лагранжиан безмассовых мод совпадает с лагранжианом так называемой супергравитации типа IIA. Это весьма сложная теория; её спектр включает, помимо 10-мерного гравитона и гравитино, также дилатон, дилатино, антисимметричное тензорное поле $B_{\mu\nu}$ и некоторые абелевы калибровочные поля специального вида. Она обладает расширенной локальной суперсимметрией $\mathcal{N} = 2$. В десяти измерениях это означает присутствие 32 вещественных грассмановых параметров преобразований.

Кроме безмассовых мод, в теории суперструн есть также массивные моды с большим спином; их масса имеет порядок $\sqrt{T}$. Натяжение струны играет роль физического размерного параметра, обеспечивающего обрезание ультрафиолетовых расходимостей, о необходимости которого так долго говорилось в начале этого параграфа. Обычно предполагается, что $\sqrt{T}$ имеет тот же порядок, что планковская масса, и, значит, характерный размер фундаментальных струн (16.20) имеет порядок планковской длины. Эффективная десятимерная ньютоновская гравитационная константа оценивается как

$$G_N^{D=10} \sim \frac{g_s^2}{T^4} \quad (16.23)$$

(здесь g_s — струнная константа связи, см. рис. 16.5). Эта оценка имеет точно тот же смысл, что выражение (12.48) для эффективной фермиевской константы в электрослабой теории.

Всё это неплохо, но как объяснить тот факт, что наша Вселенная четырёхмерна, в то время как теория суперструн формулируется не в четырёх, а в десяти измерениях?

На этот вопрос можно дать два возможных ответа. Одна возможность состоит в том, что наша Вселенная представляет очень тонкую плёнку, похожую на мыльный пузырь, вложенную в высокомерный балк. Нам кажется это вероятным, и в следующем параграфе мы приведём некоторые аргументы в пользу такого сценария. Альтернативная гипотеза (она сейчас более популярна) состоит в том, что шесть лишних измерений *компактифицированы*.

Представьте бесконечно длинную водопроводную трубу. Топологически она представляет собой прямое произведение бесконечной прямой линии и маленькой окружности. Подобным образом наш мир может представлять собой прямое произведение бесконечной четырёхмерной Вселенной, которую мы знаем, и маленького (размером с планковскую длину) шестимерного компактного многообразия $\mathcal{M}^6$.

Достижимые на ускорителях энергии на много порядков меньше, чем m_P , и характерные расстояния, на которые мы можем экспериментально проникать вглубь, на много порядков больше, чем размер этого компактного многообразия. И мы просто не способны его увидеть.

Что ещё мы можем сегодня сказать про $\mathcal{M}^6$? Есть одно следующее из теории ограничение. Мы должны быть способны сформулировать теорию суперструн в кривом балке с геометрией $R^4 \times \mathcal{M}^6$ — так же, как мы это можем сделать в плоском балке R^{10} . Это возможно не при любом $\mathcal{M}^6$. Не входя в дальнейшие детали, скажем просто, что $\mathcal{M}^6$ должно принадлежать к классу так называемых *многообразий Калаби—Яу*. Однако это условие не слишком ограничительно. Существует бесконечное множество различных многообразий Калаби—Яу, и нам не известен критерий, по которому следует предпочесть какой-то один элемент из этого множества...

16.3.3. Жалобы педантов

Я не знаю, смог ли читатель оценить всю красоту струнной теории. Может быть, и нет — я не дал для этого достаточно деталей. Но она действительно очень красива, и это было одной из главных причин, почему она находилась в центре внимания теоретиков в течение последних 30 лет. Есть также практическая сторона — теория струн решает (по крайней мере, в принципе) две главные проблемы квантовой гравитации, о которых мы говорили в начале главы.

1) Она даёт физическое обрезание ультрафиолетовых расходимостей.

2) Если не говорить о компактификации (это отдельная история), то теория струн формулируется в плоском пространстве Минковского. А тогда на фундаментальном уровне нет проблемы с причинностью.

Но теория струн разрешает далеко не все вопросы мироздания, и у неё есть ряд несовершенств. Наиболее серьёзные рекламации, которые ей можно предъявить, следующие.

1) Мы знаем, как вычислять амплитуды рассеяния струн на древесном уровне и однопетлевом уровне. Но уже двухпетлевые вычисления — это чрезвычайно сложная задача. Я здесь не специалист, но, по моему разумению, она не решена *полностью* и по сей день. Одно из препятствий — это кинематические сингулярности в континуальных интегралах, связанные с вырожденными струнными конфигурациями, когда одна из ручек «кренделя» становится бесконечно тонкой.

Мне не известны какие-либо струнные вычисления в трёх петлях и выше.

2) Предположим, что струнная теория возмущений хорошо определена и что все имеющиеся там проблемы имеют технический, а не принципиальный характер. Однако у теории струн нет непертурбативного определения.

В теории поля фундаментальный объект — это функционал действия, зависящий от полей, которые являются обычными функциями временной и пространственных координат. В струнной теории роль таких функций переходит к *функционалам* $\Phi[\mathcal{C} \equiv x^\mu(\tau, \sigma)]$, зависящим от конкретного способа, каким струна вложена в балк. И мы не имеем понятия, как писать метафункционал действия $S\{\Phi[\mathcal{C}]\}$, зависящий от этих контурных функционалов и описывающий одновременно распространение свободной струны и её взаимодействия. Теория струн — это красивое здание, но любитель архитектуры может наслаждаться его красотой только начиная с некоторой высоты; нижние этажи и фундамент скрыты в тумане.

3) Со времён суперструнной революции 1985 г. прошло уже более 30 лет, но струнная теория всё ещё не может похвастаться большими успехами в феноменологии. Она никак не углубила наше понимание физического мира — почему он именно такой, каким мы его видим. В частности, 26 свободных параметров Стандартной модели, перечисленные на с. 292, всё ещё остаются свободными параметрами; суперструны никак не помогли нам их определить.

Ситуация кажется здесь тупиковой. Одна из главных причин — это необходимость спуститься из суперструнной десятимерии в нашу четырехмерию. Всё зависит от конкретной схемы компактификации, и у нас нет в руках какого-либо руководящего принципа, позволившего бы выбрать какую-то одну схему из множества допустимых.

16.4. Грёзы автора

16.4.1. Вселенная как мыльный пузырь

Лично меня наиболее беспокоит рекламация № 2. Как я признался выше, я хорошо понимаю в физике только законы Ньютона, уравнение Шрёдингера и всё, что к ним сводится. Но теория струн выходит за пределы моего тезауруса. Её нельзя уложить в куб физических теорий на рис. 4.5, нельзя поместить в один из залов музея теоретической физики, по которому мы с Соней гуляли в четвёртой главе.

Поэтому я предлагаю читателю обдумать альтернативную возможность: что ЕТВ — не теория струн, а обыкновенная полевая теория, сформулированная в плоском пространстве-времени, которую можно поместить в зал *G* на втором этаже нашего музея.

Конечно, главный возникающий сразу вопрос: что делать с гравитацией? Мы ведь знаем, что наша четырёхмерная Вселенная не плоская!

Чтобы ответить, представьте себе мыльный пузырь. Мыльные пузыри, безусловно, искривлены, и их эффективный гамильтониан имеет вид

$$H = \sigma \mathcal{A} = \sigma \int d^2\xi \sqrt{g}, \quad (16.24)$$

где σ — поверхностное натяжение. Этот гамильтониан инвариантен относительно репараметризаций и описывает фактически двумерную гравитацию, причём σ играет роль космологической постоянной. Но это эффективный, а не фундаментальный лагранжиан. Наш тонкий пузырь вложен в плоское трёхмерное пространство (см. рис. 16.7), и Фундаментальная теория мыла формулируется именно там.

Аналогично, наша Вселенная может представлять тонкую $(3+1)$ -мерную плёнку, вложенную в плоский высокомерный балк. Как я отметил в предыдущем параграфе, это одна из возможностей (наряду с компактификацией), которая сегодня оживлённо обсуждается. Но при таком обсуждении люди обычно исходят из парадигмы, что



Рис. 16.7. Мыльная модель Вселенной, выдутая Соней

ЕТВ, описывающая физику в плоском балке, — это струнная теория. А мы в этом параграфе о струнах говорить не будем.

Но почему Вселенная — это тонкая плёнка? Кто её выдул?

Я не смею высказываться по второму вопросу, но стабильное существование такой плёнки в многомерном балке легко себе представить. Многие полевые теории допускают существование *солитонов* — стабильных локализованных полевых конфигураций. Солитоны были впервые открыты (Джоном Расселом) ещё в 1834 г. как уединённые бегущие по воде волны; такие солитоны являются решениями нелинейных гидродинамических уравнений. Но похожие стабильные локализованные решения существуют и во многих других теориях. Не в КХД и не в электрослабой теории, но, например, в гипотетических теориях Великого объединения такие решения присутствуют¹.

Солитон необязательно строго локализован. Вполне можно представить себе солитон, локализованный в *некоторых* пространствен-

¹ Они несут магнитный заряд и известны как *монополи 'т Хоофта—Полякова*.

ных направлениях и бесконечно протяжённый в других. Хорошо известный пример — это *струна Абрикосова*, магнитный вихрь, который является частично локализованным солитоном в эффективной теории Гинзбурга—Ландау. Эти вихри существуют как физические объекты в сверхпроводниках второго рода. Аналогично, Вселенная может представлять 3-брану — стабильное статическое решение некоей фундаментальной полевой теории, определённой в балке, которое бесконечно протяжено по трём обыкновенным пространственным координатам и локализовано по другим направлениям.

Но на что может быть похожа эта Единая теория всего, живущая во многомерном балке? Не так-то просто ответить на этот вопрос. В качестве пристрелочной попытки напомним лагранжиан, хорошо известный в четырёхмерной физике, но продолженный в высшие измерения. Например, мы можем рассмотреть шестимерный лагранжиан Янга—Миллса:

$$\mathcal{L}^{D=6} = \frac{1}{2f^2} \text{Tr}\{F_{MN}F^{MN}\}, \quad (16.25)$$

где $M, N = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

И здесь нас ждёт неприятность. Чтобы шестимерное действие было безразмерным, мы должны приписать размерность калибровочной константе: $[f] = m^{-1}$. Но такая теория с размерной константой страдает от неконтролируемых степенных и логарифмических ультрафиолетовых расходимостей (в самом деле, мы теперь должны интегрировать не по d^4p , а по d^6p , и ультрафиолетовое поведение теории намного хуже, чем в четырехмерии). Теория (16.25) перенормируема по той же самой причине, что теория Ферми или Эйнштейновская гравитация. Как мы поняли из предыдущих обсуждений, перенормируемые теории могут только иметь смысл эффективного низкоэнергетического приближения к чему-то более фундаментальному. Они не могут быть фундаментальными сами по себе.

В качестве второй попытки напомним (оставаясь в шести измерениях) калибровочно-инвариантное выражение, включающее структуры канонической размерности 6. Например,

$$\mathcal{L}_1 = \alpha \text{Tr}\{F_{MN}\square F^{MN}\} + \beta \text{Tr}\{F_M^N F_N^P F_P^M\}. \quad (16.26)$$

Коэффициенты α и β безразмерны, и теория (16.26) перенормируема. Можно в этом также убедиться, анализируя расходимости в фейнмановских графиках. Дополнительный квадратик в первом

члене в формуле (16.26) вносит дополнительный фактор $1/p^2$ в пропагатор калибровочного поля, который устраняет степенные ультрафиолетовые расходимости в интегралах.

Может ли лагранжиан (16.26) играть роль фундаментальной теории? К сожалению, нет. Заменяя (16.25) на (16.26), мы решили проблему неперенормируемости, но мы сталкиваемся в этом случае с другой серьёзной проблемой. Лагранжиан (16.26) включает высшие производные динамических переменных. А в таких теориях возникают духи.

16.4.2. Жизнь с духами

К сожалению, с этим вопросом (духами) в литературе имеет место изрядная путаница. Мы сделаем сейчас отступление, чтобы попытаться её прояснить, и вернёмся к нашей главной теме (ЕТВ) в конце главы и книги. Усталый читатель может при желании пролистать несколько следующих страниц.

Под «духами» люди обычно понимают поля с отрицательной кинетической энергией, с членами типа $-(\partial_\mu \varphi)^2$ в релятивистских лагранжианах. Энергию можно сделать положительной, приписав духовым квантовым состояниям отрицательную норму (так что явно нарушится унитарность), но это нефизичная и сбивающая с толку интерпретация. Значительно правильнее держать норму положительной, но тогда ни классический, ни квантовый гамильтонианы не имеют в таких системах основного состояния. Свойства системы, включающей духи, сходны (но не полностью совпадают) со свойствами системы, включающей тахионы. Разница в том, что «тахион» означает отрицательную потенциальную энергию, в то время как «дух» — отрицательную кинетическую.

Объясним теперь, почему появление духов — это родовая черта всех систем, включающих высшие производные. Рассмотрим вначале обычную механическую систему, описывающую движение частицы в центральном потенциале:

$$L = \frac{m\dot{r}^2}{2} - V(r). \quad (16.27)$$

Сохраняющаяся энергия есть

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + V(r). \quad (16.28)$$

Если потенциал ограничен снизу (как для осциллятора), то ограничена и полная энергия. Для притягивающего кулоновского потен-

циала классическая энергия не ограничена снизу, но спектр квантового гамильтониана ограничен.

Рассмотрим теперь простейшую систему с высшими производными, так называемый *осциллятор Пайса—Уленбека* с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}(\ddot{q} + \Omega_1^2 q)(\ddot{q} + \Omega_2^2 q), \quad (16.29)$$

явно зависящим не только от координаты q и скорости $\dot{q}$, но и от ускорения $\ddot{q}$. Динамические уравнения, следующие из этого лагранжиана¹,

$$\frac{d^2}{dt^2} \frac{\delta L}{\delta \ddot{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{q}} + \frac{\delta L}{\delta q} = \left(\frac{d^2}{dt^2} + \Omega_1^2 \right) \left(\frac{d^2}{dt^2} + \Omega_2^2 \right) q = 0, \quad (16.30)$$

имеют интеграл движения — энергию:

$$E = \left(\ddot{q} - \dot{q} \frac{d}{dt} \right) \frac{\delta L}{\delta \ddot{q}} + \dot{q} \frac{\delta L}{\delta \dot{q}} - L = \frac{1}{2} \ddot{q}^2 - \dot{q} \left(q^{(3)} + \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{2} \dot{q} \right) - \frac{\Omega_1^2 \Omega_2^2 q^2}{2} \quad (16.31)$$

($q^{(3)}$ обозначает тройную временную производную). Можно заметить, что выражение (16.31) включает члены различного знака и может принимать как сколь угодно большие положительные, так и сколь угодно большие отрицательные значения. Доказано, что это общее свойство всех систем с высшими производными.

Более того, в этом случае квантовый гамильтониан также не имеет дна. Существует каноническое преобразование, которое приводит *гамильтониан Остроградского*² для системы (16.29) с $\Omega_1 \neq \Omega_2$

¹ Левая часть формулы (16.30), приравненная нулю, представляет собой уравнение Лагранжа для произвольной функции $L(q, \dot{q}, \ddot{q})$. В данном конкретном случае $\delta L / \delta \ddot{q} = 0$.

² Михаил Остроградский показал, как выводить гамильтонианы для лагранжианов с высшими производными, ещё в 1850 г., в замечательной статье, опубликованной в «Memoires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg». Фактически он разработал там гамильтонов формализм независимо от Вильяма Гамильтона. Он применил этот метод к лагранжианам общего вида $L(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, \dots)$. В то время эта статья не привлекла большого внимания (в том числе, вероятно, и потому, что она не была написана очень ясно и педагогично), но её часто цитируют сейчас.

Однако наблюдение, что функции Гамильтона для систем с высшими производными не ограничены ни сверху, ни снизу — то, что сегодня многие называют «нестабильностью Остроградского», — принадлежит не Остроградскому (он вывел только общие формулы и не изучал конкретные динамические системы), а Абрахаму Пайсу и Джорджу Уленбеку, которые изучили классическую и квантовую динамику системы (16.29) в статье, опубликованной ровно сто лет спустя после статьи Остроградского.

к виду¹

$$H = \frac{1}{2}(P_1^2 + \Omega_1^2 Q_1^2) - \frac{1}{2}(P_2^2 + \Omega_2^2 Q_2^2). \quad (16.32)$$

Другими словами, система (16.29) эквивалентна двум обыкновенным осцилляторам, но её гамильтониан — это не сумма двух осцилляторных гамильтонианов, а их *разность*. Спектр квантовой задачи есть

$$E_{nm} = \hbar\Omega_1\left(\frac{1}{2} + n\right) - \hbar\Omega_2\left(\frac{1}{2} + m\right) \quad (16.33)$$

с целыми n, m .

Если отношение Ω_1/Ω_2 иррационально, то этот спектр *всюду плотен*² и *чисто точечен*, т. е. волновая функция каждого собственного состояния нормируема. Это, конечно, необычно, но не катастрофично. Как классическая, так и квантовая задача хорошо определены, волновые функции состояний можно выписать явно, и оператор эволюции (8.33) унитарен. На самом деле, в случае *свободного* осциллятора — обычного осциллятора или осциллятора Пайса—Уленбека — энергия не имеет большого динамического смысла и служит лишь для «бухгалтерского учёта».

Ситуация меняется при включении взаимодействия. Эвристически ясно, что взаимодействующая система с высшими производными «пытается» передать энергию от степеней свободы с положительными энергиями в духовый сектор с отрицательными энергиями. И это может привести к *коллапсу*.

Не только системы с высшими производными испытывают коллапс. Простейшая коллапсирующая система характеризуется лагранжианом (16.27) с потенциалом

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r^2}. \quad (16.34)$$

Известно, что если притяжение достаточно сильно,

$$\alpha > \frac{\hbar^2}{8m}, \quad (16.35)$$

то происходит *падение на центр*, на сингулярность при $r = 0$. В этом случае не только спектр не ограничен снизу, но сингулярность в центре не позволяет вдобавок аккуратно сформулировать шрёдингеровскую задачу и определить спектр. Оператор эволюции здесь не

¹При равных частотах $\Omega_1 = \Omega_2$ ситуация чуть сложнее. Мы не будем её здесь разбирать.

²Для каждого значения энергии E и для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое состояние $|nm\rangle$, что $|E - E_{nm}| < \varepsilon$.

унитарен — вероятность как бы «утекает» в сингулярность. Можно, конечно, регуляризовать задачу, сгладив сингулярность. Например, можно предположить, что потенциал имеет вид (16.34) только при $r > r_0$ и равен константе при $r \leq r_0$. В такой системе спектр ограничен снизу, но значения всех энергетических уровней существенно зависят от r_0 .

Заметим, что при любом α существуют классические траектории, сваливающиеся в сингулярность за конечное время. С другой стороны, при достаточно малых α , не превышающих предел (16.35), квантовый спектр ограничен и хорошо определён. Это говорит нам о том, что квантовые флуктуации пытаются помешать системе упасть в сингулярность и пропасть там, и если притяжение не слишком сильное, то это им удаётся. Иначе говоря, квантовая система, испытывающая коллапс, характеризуется также наличием классических коллапсирующих траекторий, но обратное, вообще говоря, неверно. С другой стороны, *если классическая система всегда ведёт себя «добропорядочно» и не попадает в сингулярность, то же относится и к квантовой системе.*

К лагранжиану Пайса—Уленбека можно добавить член с взаимодействием типа $\sim \alpha q^4$. Не входя в детали¹, мы только скажем, что в этом случае действительно *появляются* классические траектории, достигающие за конечное время сингулярности при $q = \infty$. Квантовая задача в этом случае тоже, по всей видимости, не определена — унитарность разрушается «злокачественными» духами.

Рассмотрим, однако, следующий нелинейный гамильтониан:

$$H = pP + D(\Omega^2 x + \lambda x^3), \quad (16.36)$$

где (p, P) — канонические импульсы для (x, D) . Кинетическая часть гамильтониана (16.36) не определена положительно, и, следовательно, в системе есть духи: спектр гамильтониана не ограничен снизу. Но эти духи в данном случае «доброкачественны». Они не приводят к коллапсу!

Система (16.36) имеет симпатичное свойство: помимо гамильтониана, она имеет дополнительный интеграл движения

$$N = \frac{1}{2}p^2 + \frac{\Omega^2 x^2}{2} + \frac{\lambda x^4}{4}, \quad (16.37)$$

так что как классическая, так и квантовая задача точно решаемы.

¹ Интересующиеся могут их найти в обзоре [arXiv:1710.11538](https://arxiv.org/abs/1710.11538) [hep-th] и в данных там ссылках.

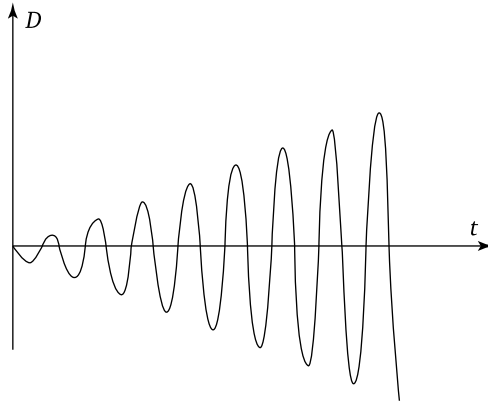


Рис. 16.8

Классические траектории выражаются через эллиптические функции. И $x(t)$, и $D(t)$ осциллируют; $x(t)$ остаётся ограниченным, а амплитуда осцилляций $D(t)$ растёт со временем, как на рис. 16.8. Однако линейный рост — это не коллапс; система не убегает на бесконечность за конечное время.

В этом случае можно также явно решить квантовую задачу: найти спектр и собственные состояния гамильтониана. Спектр в основном непрерывен с собственными значениями, лежащими в двух симметричных интервалах: $-\infty < E \leq -\Omega$ и $\Omega \leq E < \infty$. Кроме того, имеется бесконечное число состояний с $E = 0$. Оператор эволюции унитарен.

Другой пример гамильтониана с доброкачественными духами есть

$$H = \frac{1}{2}(P_1^2 + \Omega_1^2 Q_1^2) - \frac{1}{2}(P_2^2 + \Omega_2^2 Q_2^2) + \lambda(Q_1 - Q_2)(Q_1 + Q_2)^3. \quad (16.38)$$

Это осциллятор Пайса—Уленбека с весьма специальным взаимодействием. Система (16.38) не является аналитически решаемой, но её классические решения легко найти численно. Читатель, имеющий на своём компьютере «Математику» или «Maple», может убедиться, что решения гамильтоновых уравнений для $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$ представляют собой осциллирующие функции с медленно растущей амплитудой. Классического коллапса здесь нет, и, следовательно, как мы аргументировали раньше, здесь нет и квантового коллапса.

Имеются и другие подобные квантовомеханические примеры. Построен также пример взаимодействующей полевой теории с доброкачественными духами, не приводящей к коллапсу и потере унитарности. Он представляет собой естественное теоретико-полевое обобщение системы (16.36). Лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi \partial^\mu D - D(\Omega^2 \varphi + \lambda \varphi^3). \quad (16.39)$$

Эта нелинейная система имеет бесконечное число переменных $\varphi(\mathbf{x})$, $D(\mathbf{x})$ и только два интеграла движения [энергию и теоретико-полевой аналог интеграла (16.37)]. Значит, она не является точно решаемой. Решения можно, однако, найти численно. Мы исследовали эти решения для теории (16.39) в простейшем случае только одного пространственного измерения и не нашли следов коллапса.

Мы приходим к следующим выводам.

1) Системы с высшими производными всегда включают духовые степени свободы. Это означает, что спектр их квантовых гамильтонианов не ограничен снизу.

2) В большинстве случаев это приводит к квантовому коллапсу и потере унитарности.

3) Существуют некоторые специальные квантовомеханические и теоретико-полевые системы, в которых есть духи, но эти духи доброкачественны и не приводят к коллапсу. Такие системы необычны, но не патологичны — гамильтониан такой системы эрмитов и эволюция унитарна.

Я могу наконец облечь свою грёзу в словесную форму.

ЕТВ — это полевая теория с высшими производными, определённая в плоском пространстве Минковского некоторой высшей размерности и включающая доброкачественные духи. Наша Вселенная представляет 3-брану — солитонное решение уравнений движения ЕТВ, бесконечно протяжённое в обычном пространстве и локализованное в дополнительных измерениях. Гравитация возникает как эффективная теория, живущая в мировом объёме этой браны.

К сожалению, у меня нет сегодня никаких идей, каков может быть конкретный вид такой ЕТВ.

ЧАСТЬ VIII

Кофе

Рекомендуемая литература

Литература по квантовой теории поля обширна. Я вынужден произвести отбор, по необходимости субъективный, и отметить только несколько книг. Это, в общем, уже было сделано в основном тексте, но я хочу собрать здесь все наиболее существенные рекомендуемые ссылки и сопроводить их поясняющими комментариями. Некоторые книги, к сожалению, не переведены, но всюду, где русский перевод существует, я буду ссылаться именно на него. При наличии нескольких изданий буду стараться давать ссылку на самое недавнее.

- *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. М.: URSS, 2004.

Этот курс по общей физике рекомендуется каждому студенту-физику. Мы будем предполагать, что читатель с ним знаком. Такое знакомство достаточно, чтобы распробовать вкус «Аперитива» и «Закусок» в нашем обеде.

- Глава 5 содержит некоторые исторические замечания. Читателю, который захочет узнать больше об истории создания КЭД, можно посоветовать прочесть Нобелевскую лекцию Фейнмана (<http://scilib-physics.narod.ru/Feynman/NobelLecture.pdf>).

А если вам в руки попадёт очень хорошая книга *Schwaber S. S. QED and the Men Who Made It: Dyson, Feynman, Schwinger and Tomonaga.* Princeton University Press, 1994, полистайте её!

- Глава 6 — это краткий рассказ о теории групп. Я рекомендую две книги, написанные физиками. Прежде всего, это классический учебник

Jones H. F. Groups, Representations and Physics. Taylor & Francis Group, 1998,

но эта книга, к сожалению, не переведена на русский язык. Год назад вышла очень хорошая новая книга:

Исаев А. П., Рубаков В. А. Теория групп и симметрий: Конечные группы. Группы и алгебры Ли. М.: URSS, 2017.

- В главе 7 мы вспоминаем основы теоретической механики. Мы отсылаем читателя за деталями к первому тому курса Ландау: *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика. М.: Физматлит, 2012

и к первым четырём главам второго тома:

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Физматлит, 2012.

- Глава 8 посвящена теории рассеяния в квантовой механике. Мы рекомендуем

Ферми Э. Лекции по квантовой механике. М.: НИЦ «РХД», 2000.

Теория рассеяния обсуждается там в разделах 23 и 33, но этот конспект блестящих лекций Ферми заслуживает того, чтобы прочесть его целиком.

Более полный курс квантовой теории рассеяния можно найти в восьмой главе учебника

Коэн-Таннуджи К., Диу Б., Лалоз Ф. Квантовая механика / Пер. с фр. Л. Н. Новикова. Екатеринбург: изд-во Урал. ун-та, 2000, а ещё более полный — разумеется, в курсе Ландау, в главах XVII и XVIII третьего тома:

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М.: Физматлит, 2012.

В последнем параграфе главы 8 я рассказываю о фейнмановских интегралах по траекториям. Классическая ссылка здесь:

Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. Мир, 1968.

- Для тех, кто хочет продолжить изучение квантовой теории поля, я рекомендую два современных учебника:

Пескин М., Шрёдер Д. Введение в квантовую теорию поля. М.: НИЦ «РХД», 2001.

и

Зи Э. Квантовая теория поля в двух словах. М.: НИЦ «РХД», 2009.

Вторая книга более современна, и в ней помимо Стандартной модели обсуждаются другие аспекты КФТ, но она содержит значительно меньше вычислительных деталей.

- Энциклопедические сведения по КЭД с конкретными вычислениями множества различных процессов даны в четвёртом томе курса Ландау:

Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика. М.: Физматлит, 2002.

В качестве дальнейшего чтения по КХД я рискую предложить свою собственную книгу:

Smilga A. V. Lectures on Quantum Chromodynamics. World Scientific, 2001.

- К сожалению, перевода нет. Но о *пертурбативной* КХД можно также получить хорошее представление, прочтя книжку Пескина. А дальнейшие сведения по электрослабой теории можно найти у Пескина и также в небольшой хорошей книге
Окунь Л. Б. Лептоны и кварки. М.: Физматлит, 1990.
- В первом разделе нашей «Нормандской паузы» рассказаны истории из книги воспоминаний Фейнмана:
Фейнман Р. Вы, конечно, шутите, мистер Фейнман! М.: НИЦ «РХД», 2001.
О Ландау и его школе написано несколько книг. Я рекомендую две:
Халатников И. М. Воспоминания о Л. Д. Ландау. М.: Наука, 1988
и
Бессараб М. Лев Ландау; роман-биография. М.: Октопус, 2009.
 - Читателю, задумавшему изучить общую теорию относительно-сти, я рекомендую пять последних глав «Теории поля» Ландау и Лифшица, а также монументальную монографию
Вайнберг С. Гравитация и космология. М.: Мир, 1975.
 - Стандартный классический учебник по суперсимметрии — это
Весс Ю., Баггер Дж. Суперсимметрия и супергравитация. М.: Мир, 1986.
 - Трудно дать ссылку по квантовой гравитации — эта наука только рождается, и время писать учебники ещё не пришло. Имеется несколько серьёзных монографий по теории струн, но это непростое чтение. Несколько более педагогична книга
Zwieback B. A First Course in String Theory, Cambridge University Press, 2004.

Предметный указатель¹

γ -матрицы См. Дирака матрицы

$\lambda\varphi^4$ теория 69, 71, 149, 201–203

μSR метод 104

θ -член (в КХД) 292

J/ψ -мезон 228–234

ATLAS (коллаборация в ЦЕРНе)
286

СКМ-матрица 264, 281, 291

CMS (коллаборация в ЦЕРНе) 286

PMNS-матрица 264, 281, 291

SPS (Протонный суперсинхротрон
в ЦЕРНе) 283

амплитуда инвариантная 198

аномалия

— киральная 192, 254–256, 275

— конформная 256

асимптотическая свобода 95–97,
175, 294

асимптотические состояния 269

балк (гипотетическое много-
мерное пространство, где
формулируется Единая теория
всего) 399, 401–408

белые карлики 37

Березина интеграл 136

БНЛ (Брукхэвенская национальная
лаборатория) 228, 229

Большой

— адронный коллайдер (БАК) 32,
104, 283, 326, 352

— взрыв 27, 28, 65, 247, 372, 374

— схлоп 374, 375

Бора

— принцип соответствия 51

— радиус 35

— спектр 53

Борна—Оппенгеймера приближе-
ние 109

бутстрап 90, 320

бьёркеновский скэйлинг 93, 95

Вайнберга угол 112, 273, 278

вакуумная энергия См. постоянная
космологическая

вакуумное ожидание 252, 279, 291

валентная зона и зона прово-
димости (для электронов
в кристалле) 185

Вафы—Виттена теорема 252

Великое объединение 294–296, 350,
351, 407

Весса—Зумино модель 341–344

Вика теорема 202, 216

вимпы (слабовзаимодействующие
массивные частицы) 352

Винера мера 174

волновой функционал (в кванто-
вой полевой теории) 62

восьмеричный путь 11, 241

Гаусса—Бонне формула 387

Гейзенберга принцип неопреде-
лённости 46, 230

Гелл-Манна—Оакса—Реннера
соотношение 254, 255

¹ Этот указатель дополнителен по отношению к нашему «Меню». Мы пытались избежать, насколько это возможно, «двойного учета».

- Гелл-Манна—Окубо соотношение
240, 243, 256
- генераторы
— $SO(n)$ 124
— $SU(2)$ 127
— $SU(3)$ 128, 220, 243
— грассмановой алгебры 136
— группы Лоренца 126
— суперсимметрии 343
- Гёделя
— решения 73, 392
— теорема 73
- Гильберта—Эйнштейна действие
366, 380, 402
- Гинзбурга—Ландау теория 111, 269, 408
- гиперзаряд 274, 275, 279
- главное логарифмическое приближение 215
- глюобаллино 345
- глюоболлы 345
- глюино 344, 345
- голдстино 349, 350, 389
- горизонт событий 370, 371, 392–395
- гравитационные линзы 363, 364
- гравитационный радиус 33, 369
- гравитино 350, 352, 388, 390, 403
- Грина функция *См.* фундаментальное решение
- де Бройля волна 21, 161
- дебаевская частота 72
- дилатон 402, 403
- Дирака
— биспинор 193
— бра и кет векторы 70, 198
— матрицы
— — в спинорном представлении 23, 193
— — в стандартном представлении 195
— сопряжение 24, 194, 208, 245
- дисперсионное соотношение 60, 201, 251
- доменные стенки 248
- духи 183, 329
— в теориях с высшими производными 409–414
— — доброкачественные 412, 414
— — злокачественные 412
— Фаддеева—Попова 94, 96, 224
- единицы
— естественные ($\hbar = c = 1$) 20, 22
— планковские 22, 23, 32, 38, 325, 366, 382, 403
— СГС 20
— СИ 19, 20, 22
— хэвисайдовские 23, 60, 85, 111
- ЕТВ (Единая теория всего) 397, 399, 406, 414
- звёздные
— массы 38, 39, 375
— параллаксы 362
- иерархии проблема 350
- изотопические мультиплеты 237–240, 242, 244
- Иоффе формула 257
- ИТЭФ (Институт теоретической и экспериментальной физики) 236, 317–321
— правила сумм 257, 258, 261
- Каббибо угол 260, 263, 264
- Казимира оператор 225
- Калаби—Яу многообразия 404
- калибровочная инвариантность
110, 114, 153–155, 190–192, 212, 214, 219–296
- канонический
— гамильтониан 149, 155, 181
— преобразование 410

- размерность 180, 259, 260, 383, 387, 390, 408
- киральность 194
- Клиффорда алгебра 23, 188, 195, 338
- ковариантная производная 191, 219, 222, 267, 271, 274, 275, 344, 388
- ковариантные и контравариантные тензорные индексы
 - в кривом пространстве 356
 - в плоском пространстве Минковского 23, 120, 356
- комбинированная чётность 103, 264, 308
- комптоновская длина 21, 55, 87, 109, 155, 266, 395
- конденсат
 - Бозе 308
 - глюонный 257
 - кварковый 252–258
- консервативные системы 140
- контрчлены 382–391
- Коши
 - задача 44, 48, 72, 391, 392
 - теорема (из комплексного анализа) 165
- кривизна
 - внешняя 364
 - внутренняя (гауссова и риманова) 359–360, 374
- Кroneкера символ 119
- Кулона закон 19, 20
- куперовские пары 72, 114, 252, 269, 308
- Кюри точка 250
- лагранжиан
 - абелевой модели Хиггса 267
 - для теории $\lambda\varphi^4$ 149
 - заряженной релятивистской частицы 145, 146
 - КХД 219–222, 244, 245
 - КЭД 154, 194, 219
 - максвелловский 152, 153, 193
 - массивного векторного поля 154
 - неабелевой модели Хиггса 270
 - скалярной КЭД 204, 207
 - теории Ферми 259
 - — обобщённой 261–264
 - электрослабой теории (бозонный сектор) 271
 - электрослабой теории (фермионный сектор) 276–277
 - эффективный 249, 250, 254, 263, 402, 403
 - — в киральной теории 254, 383
 - — вильсоновский 382
 - — Гейзенберга—Эйлера 109
- Ландау
 - гамильтониан (для электрона в магнитном поле) 330, 332, 333
 - диамагнетизм 310, 330
 - курс теоретической физики 11, 73, 74, 76, 138, 156, 312, 319, 418–419
 - минимум 319
 - полюс 86, 90, 96, 294
- Лобачевского
 - длина 376
 - плоскость 359
 - пространство 374
- лондоновская длина 111
- магнетон ядерный 258
- магнитные монополи 407
- магнитный момент
 - барионов 257–258
 - кварков (хромо-) 233
 - электрона 210, 211, 328
- магноны 251
- Магнуса эффект 364
- майорановская масса 192, 280, 281, 292, 342

- майорановское поле 341, 388, 390, 402
- Мейсснера эффект 111
- Менделеева таблица 90, 92
- метрика
- в кривом пространстве 355, 356
 - — Фридмана 28, 64, 372–378
 - — Шварцшильда 369–371, 392
 - Минковского 23, 64, 120, 371, 380, 392, 399, 405
- мировая линия (частицы) 399
- мировой лист (струны) 399, 400, 402
- модель конститuentных кварков 91–93, 131, 236–244
- московский ноль *См.* Ландау полюс
- МФТИ 228, 313, 318, 319
- мюоний 105
- Намбу—Гото действие 399, 401
- нейтрино солнечные 288–290
- нейтронная звезда 38
- неоднозначности упорядочения 142, 182
- несохранение чётности 102, 104, 105, 274
- в атомных переходах 114
 - в физике адронов 265
- Нётер теорема 141, 244, 245, 329, 334
- Ньютона
- закон гравитационного притяжения 27, 32, 33, 64, 370
 - законы классической механики 43, 44, 50, 57, 58, 141, 391, 406
- обобщённый импульс 141, 144, 146, 149, 151, 155, 169, 335, 337, 412
- описание потока жидкости
- лагранжево 57
 - эйлерово 58
- орбита группы 250
- Остроградского гамильтониан 410
- осциллятор
- ангармонический 175
 - гармонический 62, 63, 69, 171, 182, 332, 333, 335, 411
 - грасманов 186, 188, 335
 - Пайса—Уленбека 410–413
 - суперсимметричный 335
- открытие
- Ω^- -гиперона 92
 - π -мезона 89
 - J/ψ -мезона 228–231, 321
 - W^- и Z -бозонов 113, 282
 - асимптотической свободы 95
 - атомного ядра 78, 158
 - бозона Хиггса 114, 269, 285–287
 - гравитационных волн 284, 367–368
 - гравитационных линз 364
 - нейтральных токов 113
 - нейтрона 37
 - Нептуна 44
 - несохранения чётности 102
 - осцилляций нейтрино 288–291
 - позитрона 185
 - радиоактивности 40
 - расширения Вселенной 65
 - реликтового излучения 373
 - сверхтекучести 315
 - электрона 286
- открытый и закрытый космологические сценарии *См.* метрика Фридмана
- очарованные мезоны 235
- падение на центр 411
- параметр порядка 114, 251, 252
- партоны 93
- Паули
- гамильтониан 189, 327, 329, 334
 - гипотеза о существовании нейтрино 100

- матрицы 23, 128, 245, 328
- принцип запрета 31, 39, 41, 67, 92, 131, 179, 184, 186
- Паули—Вайскопфа полево́й гамильтониан 62, 63, 67–69, 76
- петли времени См. Гёделя решения
- плазменная частота 111
- позитроний 231, 233
- поляриза́ционный оператор 212–215
- Понтекорво угол 288–289
- постньютоновское приближение (в общей теории относительности) 370
- постоянная
 - космологическая 64, 66, 365, 372, 378, 406
 - Ньютона 22, 32, 370, 403
 - Планка 20, 22, 56
 - сильной связи 97, 98, 220, 232, 256
 - Стефана—Больцмана 395
 - струнной связи 400, 403
 - тонкой структуры 22, 23, 39, 46, 211, 278
 - Ферми 108, 259, 276–278, 403
 - Хаббла 377, 378
- потенциал
 - воронки (для тяжёлых кварков) 226
 - донышка бутылки 249
 - кулоновский 79, 84, 85, 88, 163, 225, 369, 410
 - Лифшица 246, 267, 269, 349
 - Юкавы 89, 163, 164
- поток инвариантный 199
- предел
 - Ландау—Оппенгеймера—Волкова (для массы нейтронной звезды) 38
 - Чандрасекара (для массы белого карлика) 38
- представление
 - (квантовое описание)
 - — взаимодействия 70, 168
 - — Гейзенберга 70, 168
 - — Шрёдингера 70
 - векторное 131, 135
 - декуплетное [в $SU(3)$] 90, 132, 241
 - октетное [в $SU(3)$] 90, 238, 239, 242–244, 258
 - присоединённое 95, 132, 219, 222, 238, 344, 345
 - спинорное 129–135, 180, 188, 190, 195, 328, 343
 - фундаментальное (унитарной группы) 95, 131, 225, 280
- преобразования
 - Галилея 43, 45
 - калибровочные 153, 190, 191, 204, 220, 222, 267
 - Лоренца 45, 59, 60, 119, 120, 125, 126, 134, 135
 - общесоординатные 356, 365
 - суперсимметрии 334, 336, 389
- принцип
 - Арнольда 54, 250
 - бритвы Оккама 65, 293
 - Гюйгенса—Френеля 173
 - Мопертюи 173
 - наименьшего времени (Ферма) 173
 - наименьшего действия 138, 147, 173
- причинность (её нарушение) 73, 392
- Проблемы тысячелетия 226, 259
- пропагатор 107, 223, 383, 399
 - в теории с высшими производными 409
 - векторный 206, 208, 210, 212–214, 224, 266, 277

- нерелятивистский 166, 167, 201, 205
- скалярный 201, 203, 205
- фермионный 209, 214
- Пуанкаре гипотеза 104, 227
- Пуассона скобка 142–335
- пульсар См. нейтронная звезда

- размерная трансмутация 97, 256, 280
- Рариты—Швингера поле 388
- рассеяние
 - Баба 79
 - гравитонов 380–382, 387, 391
 - комптоновское 55, 208
 - кулоновское 78, 208, 381
 - Мёллера 79, 208
 - Мотта 77
 - неупругое 104, 113, 157, 287
 - пионов в киральной теории 255, 384–386
 - струн 399
 - упругое 15, 107, 157, 158, 197, 199, 264, 266
 - фотон-фотонное 109
- расслоение (его связность) 222, 388
- Редже теория 317, 320
- резерфордовское сечение 78, 158, 208
- резонансы 230, 235, 241, 283, 284, 287
- реликтовое излучение 28, 309, 372
- решёточный интеграл по траекториям 175
- риманова
 - геометрия 340, 355–360
 - поверхность 130
 - — её род 399, 400
- Риччи тензор 360, 367, 369

- сверхпроводимость 72, 74, 308, 325
- сверхтекучесть 72, 74, 308
- сверхтонкое расщепление 233, 241
- скалярный
 - кварк 293
 - электрон 341
- СЛАК (Стэнфордский линейный ускорительный центр) 93, 96, 99, 228, 229, 233
- база данных 96
- солитоны 407, 408, 414
- спектаторные кварки 262
- спиновые волны См. магноны
- спиноры См. представление спинорное
- спиральность 102, 118, 133, 194, 341, 344, 346, 388, 390
- старая диаграммная техника 82, 83, 167
- старая квантовая теория 53
- статистика
 - Бозе—Эйнштейна 179, 307
 - Ферми—Дирака 179
- стерильное нейтрино 276, 280
- странность 238, 239
- струи (адронов) 98–100, 283
- структурные константы 125, 129, 222
- струны
 - Абрикосова 408
 - их натяжение 227, 399
 - КХД 227, 228, 399
 - фундаментальные 397–406
- Супер-Камиоканде эксперимент См. открытие осцилляций нейтрино
- суперзаряд 329, 331, 334, 336, 337, 343–345, 347, 348
- суперполя 343
- суперпространство 343
- суперсимметричный
 - квантовая механика 327–338
 - — модель Виттена 348–349

- электродинамика 341, 342
- эффект Хиггса 350, 352, 389
- Янга—Миллса теория 345, 346, 389
- суперструнная революция 399, 405
- тахин 150, 401, 403, 409
- тензор напряжённости калибровочного поля
 - абелев 145, 152–154, 221, 222, 271
 - неабелев 222, 271
- теория относительности
 - общая 16, 32, 33, 72, 73, 120, 191, 326, 354–379, 404
 - специальная 11–13, 20, 33, 143, 347, 355, 364, 392
- тёмная
 - материя 351, 352, 372
 - энергия См. постоянная космологическая
- ток
 - $V - A$ 106, 261–265, 300
 - слабый заряженный 105–107, 113, 267, 281
 - слабый нейтральный 113, 265, 267, 278
 - электромагнитный 60, 77, 152, 196
 - — его сохранение 145, 146, 153, 213, 214, 224, 261
- тонкая подстройка 353
- топоний 236
- турбулентность 227
- ультрафиолетовые расходимости
 - 81–87, 97, 98, 106, 203, 212–214, 266, 352, 382, 384, 386, 387, 389, 404, 408, 409
- их регуляризация 85, 90, 97, 212, 382, 385
- их физическое обрезание 107, 266, 397, 398, 403, 404
- уравнение
 - Гамильтона 142, 336
 - Гельмгольца 162, 164, 167
 - Даламбера 206, 209
 - Дирака 54, 55, 66, 68, 183, 194–196
 - КФГ (Клейна—Фока—Гордона) 52–55, 59, 66, 68, 69, 76, 89, 121, 148, 155, 163, 195, 201, 209, 244
 - Лагранжа 141, 142, 146, 148, 410
 - Максвелла 23, 60, 61, 88, 147, 154, 163, 328
 - Менделеева—Клапейрона 73, 287
 - Навье—Стокса 58, 59, 61, 227
 - Прока 154, 210
 - Пуассона 163
 - — экранированное 163
 - Шрёдингера 48, 50–53, 62, 332, 334, 392, 396, 406, 411
 - Эйнштейна 73, 366, 367, 369, 374, 387, 392
- фазовое пространство 142, 186
- фазовый переход 251
- факторпространство 250, 251
- Фейнмановские лекции по физике 13, 19, 138, 143, 303, 417
- Ферма теорема 104
- Физтех См. МФТИ
- фоковские состояния 67, 83, 155
- фононы 72
- фотино 293, 341, 352, 390
- Фундаментальная теория мыла 406
- фундаментальное решение 162–164, 167, 170, 200, 206, 209
- хиггсино 293
- хиггсовское самодействие 31, 267–271, 291
- Хоукинга излучение 393–396
- Хоумстейкский эксперимент См. нейтрино солнечные

- ЦЕРН (Европейский центр ядерных исследований) 93, 113, 114, 229, 269, 282, 283, 326, 352
- чайки 204
- чармоний 231–236
- чёрные дыры 33, 34, 367, 371, 394–397
- чисто точечный спектр 411
- эволюции оператор 169, 411, 413
- Эйнштейна
- космологическое решение 64, 65, 372
- постулаты (специальной теории относительности) 11, 45
- соглашение о суммировании 118, 140
- энергии-импульса тензор 366, 374
- эфир 45, 346
- эффективный гамильтониан
- См. Борна—Оппенгеймера приближение
- Юкавы взаимодействие 31, 87, 279–281, 342
- Юнга модуль 36
- Янга—Миллса теория 94, 95, 222, 226, 227, 408
- суперсимметричная См. суперсимметричная Янга—Миллса теория

Указатель имен¹

‘т Хоофт, Геральд 96

Абрикосов, Алексей 74, 86, 308, 312

Акулов, Владимир 350

Андерсон, Карл 185

Аристотель 75

Архимед 171, 342

Ахизер, Александр 311

Баггер, Джонатан 419

Бариш, Барри 368

Барков, Лев 114

Беккерель, Анри 40

Березин, Феликс 136, 186

Берестецкий, Владимир 80, 198, 418

Берн, Цви 390

Бессараб, Майя 419

Бете, Ханс 312

Блезе, Жан-Поль 18

Блинников, Сергей 368

Бозе, Шатъендранат 307, 308

Бор, Нильс 100, 307, 308, 310, 311,
321

Борн, Макс 310

Браут, Роберт 269

Бронштейн, Матвей 309, 313

Брунелески, Филиппо 17

Брэдбери, Рэй 393

Брюсов, Валерий 165

Вайнберг, Стивен 12, 95, 112, 113,
274, 276, 354, 419

Вайнштейн, Аркадий 18

Вайс, Райтнер 368

Вайскопф, Виктор 311

ван Нивенхойзен, Питер 388

Ваняшин, Владимир 96

Варламов, Андрей 18

Венециано, Габриеле 318

Весс, Юлиус 419

Вигнер, Юджин 307

Вильсон, Роберт 373

Вильчек, Франк 95, 96

Виттен, Эдвард 402

Волков, Дмитрий 350

Вольтер 41

Галилей, Галилео 93

Галле, Иоганн 44

Гамильтон, Вильям 47, 410

Гамов, Георгий 309

Гарднер, Мартин 11

Гассер, Юрг 386

Гаусс, Карл Фридрих 363

Гейзенберг, Вернер 182, 307, 310

Гелл-Манн, Мюррей 11, 30, 90, 92,
95, 106, 242

Гильберт, Давид 141, 355

Гитлер, Адольф 314

Глэшоу, Шелдон 112

Голдстоун, Джеффри 250

Гольфанд, Юрий 341, 342

Гордон, Вальтер 53, 56, 75, 77

Горьков, Лев 74

Грибов, Владимир 318

Грин, Майкл 402

Гросс, Давид 95, 96

Гуральник, Джеральд 269

Дайсон, Фримен 86, 168

¹ А этот указатель дополнителен к меню и к предметному указателю (так, рисуя фейнмановские диаграммы, мы не давали каждый раз ссылку на Фейнмана).

- Дарелл, Клемент 11, 13
де Бройль, Луи 307, 308
де Токвиль, Алексис 75
Джойс, Джеймс 30
Джонс, Хью 17, 417
Дзялошинский, Игорь 74
Дирак, Поль 307, 308, 310, 311
Диу, Бернар 418
Дэвис, Раймонд 288, 290
- Евклид 339
Ежов, Николай 315
Елецкая, Татьяна 18
- Замолодчиков, Александр 318
Зельдович, Яков 315
Зи, Энтони 15, 59, 418
Золотарёв, Марк 114
Зортиан, Джерри 304
- Иваненко, Дмитрий 309
Иоффе, Борис 312, 320
Исаев, Алексей 417
- Каллош, Рената 390
Канчели, Олег 18
Капица, Пётр 309, 310, 314, 315, 321
Касалбуони, Роберто 186
Кельвин, Уильям 347
Кеплер, Иоганн 32
Киббл, Том 269
Клебанов, Игорь 18
Клейн, Оскар 53, 56, 75
Кован, Клайд 102
Компанеец, Александр 311
Коперник, Николай 93
Корец, Моисей 313, 314
Коэн-Таннуджи, Клод 156, 418
Крутков, Юрий 64
Курчатов, Игорь 315
- Лалоз, Франк 418
- Ландау, Лев 103, 306–317, 321, 327, 333
Леверье, Урбан 44
Ледерман, Леон 236
Лейбниц, Готфрид Вильгельм 42
Лейтон, Ральф 303, 417
Ленин, Владимир 207, 313
Ли, Софус 122, 124
Линдстрём, Ульф 390
Лифшиц, Евгений 11, 138, 156, 198, 311, 319, 418
Лихтман, Евгений 341, 342
Лобачевский, Николай 362
Лоренц, Хендрик 60, 347, 355
Лютвилер, Хайнрих 18, 95, 386
- Майкельсон, Альберт 347, 355, 368
Маринов, Михаил 186
Маршак, Роберт 106
Мигдал, Александр 318
Минковский, Герман 60
Морли, Эдвард 346
Морозов, Алексей 18
Муссолини, Бенито 314
- Намбу, Йоитиро 250
Невё, Андре 402
Нееман, Юваль 92
Нётер, Эмми 141
Нишиджима, Кадзухико 242
Новиков, Игорь 368
Ньютон, Исаак 27, 32, 307, 326, 363
- Окунь, Лев 228, 230, 282, 419
Остроградский, Михаил 410
- Пайс, Абрахам 410
Папагена 51
Папагено 51
Пати, Джозеф 95
Паули, Вольфганг 186, 310–312
Пензиас, Арно 373
Переводчикова, Татьяна 368

- Перельман, Григорий 227
Перельман, Яков 11
Пескин, Майкл 16, 198, 294, 418
Питаевский, Лев 198, 418
Полицер, Давид 95, 96
Полнарёв, Александр 368
Поляков, Александр 318, 402
Померанчук, Исаак 80, 311
Попов, Владимир 68
Пуанкаре, Анри 60, 347, 355
- Рамон, Пьер 402
Рассел, Джон 407
Рейнс, Фредерик 102
Рихтер, Буртон 228–230
Рубаков, Валерий 417
- Салам, Абдус 95, 112, 113, 274, 276, 343
Саскинд, Леонард 397
Сахаров, Андрей 315
Скобельцын, Дмитрий 185
Слотник, Мюррэй 83
Смилга, Альбана 18
Смилга, Вольдемар 105
Соня 55–57, 59, 61, 102, 150, 265, 358, 359, 361, 406, 407
Сорока, Вячеслав 350
Сталин, Иосиф 313–315
Стратди, Джон 343
Сударшан, Джордж 106
Сэндс, Мэтью 303, 417
- Тер-Мартirosян, Карен 317–321
Терентьев, Михаил 95
Тинг, Самуэль 228–230
Томонага, Син-Итиро 86
Томпсон, Джозеф 286
Торн, Кип 368
Туреану, Анка 18
- Уленбек, Джордж 410
- Фаулер, Уильям 311
- Фейнман, Ричард 83, 86, 94, 106, 143, 168, 171, 172, 299–306, 308, 309, 315, 317, 321
Ферми, Энрико 62, 76, 156, 418
Феррара, Сержио 388
Фирц, Маркус 186
Фок, Владимир 54, 56, 75, 76, 309, 314
Франклин, Бенджамин 220
Фридман, Александр 64, 65
Фридман, Дэн 388
Фритч, Харальд 95
- Хаббл, Эдвин 65
Хаген, Карл 269
Халатников, Исаак 86, 308, 419
Хаммурапи 75
Хау, Поль 390
Хиббс, Альберт 171
Хиггс, Питер 114, 269
Хоутерманс, Фриц 311, 313
Хриплович, Иосиф 95
- Цвибак, Буртон 419
- Чайчан, Масуд 18
Чедвик, Джеймс 100
- Шапошников, Михаил 18
Шварц, Джон 402
Шварцшильд, Карл 369
Швебер, Сильван 86, 417
Швингер, Джулиан 86, 168, 210
Шифман, Михаил 317
Шрёдер, Дэниел 16, 198, 418
Шрёдингер, Эрвин 53, 56, 307
- Эддингтон, Артур 363
Эйнштейн, Альберт 12, 20, 28, 60, 307, 326, 340, 347, 355, 361, 370
Энглерт, Франсуа 269
- Юкава, Хидеки 87

Магазин «Математическая книга»

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга» в Москве по адресу: Б. Власьевский пер., д. 11; тел. (499) 241-72-85; biblio.mccme.ru

Книга — почтой: <http://biblio.mccme.ru/shop/order>

Книги в электронном виде: <http://www.litres.ru/mcnmo/>

Мы сотрудничаем с интернет-магазинами

- Книготорговая компания «Абрис»; тел. (495) 229-67-59, (812) 327-04-50; www.umlit.ru, www.textbook.ru, абрис.рф
- Интернет-магазин «Книга.ру»; тел. (495) 744-09-09; www.kniga.ru

Наши партнеры в Москве и Подмоскowie

- Московский Дом Книги и его филиалы (работает интернет-магазин); тел. (495) 789-35-91; www.mdk-arbat.ru
- Магазин «Молодая Гвардия» (работает интернет-магазин): ул. Б. Полянка, д. 28; тел. (499) 238-50-01, (495) 780-33-70; www.bookmg.ru
- Магазин «Библио-Глобус» (работает интернет-магазин): ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1; тел. (495) 781-19-00; www.biblio-globus.ru
- Спорткомплекс «Олимпийский», 5-й этаж, точка 62; тел. (903) 970-34-46
- Сеть киосков «Аргумент» в МГУ; тел. (495) 939-21-76, (495) 939-22-06; www.arg.ru
- Сеть магазинов «Мир школьника» (работает интернет-магазин); тел. (495) 715-31-36, (495) 715-59-63, (499) 182-67-07, (499) 179-57-17; www.uchebnik.com
- Сеть магазинов «Шаг к пятёрке»; тел. (495) 728-33-09, (495) 346-00-10; www.shkolkniga.ru
- Издательская группа URSS, Нахимовский проспект, д. 56, Выставочный зал «Науку — Всем», тел. (499) 724-25-45, www.urss.ru
- Книжный магазин издательского дома «Интеллект» в г. Долгопрудный: МФТИ (новый корпус); тел. (495) 408-73-55

Наши партнеры в Санкт-Петербурге

- Санкт-Петербургский Дом книги: Невский пр-т, д. 62; тел. (812) 314-58-88
- Магазин кМир науки и медицины: Литейный пр-т, д. 64; тел. (812) 273-50-12
- Магазин «Новая техническая книга»: Измайловский пр-т, д. 29; тел. (812) 251-41-10
- Информационно-книготорговый центр «Академическая литература»: Васильевский остров, Менделеевская линия, д. 5
- Киоск в здании физического факультета СПбГУ в Петергофе; тел. (812) 328-96-91, (812) 329-24-70, (812) 329-24-71
- Издательство «Петроглиф»: Фарфоровская, 18, к. 1; тел. (812) 560-05-98, (812) 943-80-76; k_i@bk.ru, k_i@petroglyph.ru
- Сеть магазинов «Учебная литература»; тел. (812) 746-82-42, тел. (812) 764-94-88, тел. (812) 235-73-88 (доб. 223)

Наши партнеры в Челябинске

- Магазин «Библио-Глобус», ул. Молдавская, д. 16, www.biblio-globus.ru

Наши партнеры в Украине

- Александр Елисаветский. Рассылка книг наложенным платежом по Украине: тел. 067-136-37-35; df-al-el@bk.ru

ОТ АВТОРА

В этой книге я попытался разъяснить, что такое квантовая теория поля, человеку, который не собирается заниматься этим предметом профессионально, но любопытен и хочет знать, как выглядит современная теория фундаментальных взаимодействий. Для понимания книги необходимо некоторое знание математики и физики (в рамках первых трёх курсов университета).

Читателю предлагается праздничный обед из восьми перемен. Первые две части книги написаны на полупопулярном эвристическом уровне. В части «Кулинарные тайны» вы найдете дополнительную информацию, нужную для понимания центральных частей книги – «Первых» и «Вторых блюд». Читатель, успешно справившийся с ними, сможет отдохнуть в шестой части, где рассказывается о некоторых замечательных учёных прошлого века, кому мы обязаны нашим сегодняшним знанием. На «Десерт» вам подадут общую теорию относительности и некоторые сладкие спекуляции, касающиеся суперсимметрии и квантовой гравитации.

Приятного аппетита!

ISBN 978-5-4439-1365-0



9 785443 913650 >