

К.Д. Синельников
Б.Н. Руткевич

Лекции
**ПО ФИЗИКЕ
ПЛАЗМЫ**

К. Д. СИНЕЛЬНИКОВ, Б. Н. РУТКЕВИЧ

ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ ПЛАЗМЫ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов физических факультетов университетов СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ХАРЬКОВСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО
Х а р ь к о в 1964

В книге изложены основы физики плазмы, в которой при определенных условиях должны осуществляться термоядерные реакции. Описаны взаимодействия между частицами плазмы, движение плазмы в электрических и магнитных полях, приведены различные методы экспериментального изучения и теоретического описания плазмы, рассмотрены трудности, которые возникают при создании высокотемпературной плазмы для термоядерного синтеза.

Книга предназначена в качестве учебного пособия для студентов старших курсов физических факультетов.

Ответственный редактор проф. *Е. С. Боровик*

ПРЕДИСЛОВИЕ

Наука о четвертом состоянии вещества — физика плазмы — только еще создается. Однако эта наука служит основой решения наиболее актуальных и сложных научных и технических проблем современности, поэтому она стала в ряд важнейших разделов физики и уже входит в учебные планы многих высших учебных заведений.

В Харьковском государственном университете курс лекций по физике плазмы читается с 1957 года. Первые годы он читался одним из авторов этой книги (К. Д. Синельниковым), а последующие — другим (Б. Н. Руткевичем). Лекции явились содержанием данной книги, предназначенной для студентов старших курсов физических факультетов университетов в качестве учебного пособия.

В одной книге, тем более в учебнике, невозможно охватить все вопросы физики плазмы. Мы рассмотрели главным образом те свойства плазмы, которые представляют интерес с точки зрения проблемы управляемого термоядерного синтеза: взаимодействие между частицами высокотемпературной плазмы, движение плазмы в электрических и магнитных полях, распространение в ней электромагнитных волн, проблема устойчивости и т. д. В остальном выбор материала определялся педагогическим опытом авторов и их личными интересами. Мы стремились дать студентам такие знания по физике плазмы, которые позволили бы им самостоятельно читать и понимать текущую литературу по этому предмету. Мы стремились дать систематическое изложение основ науки, уделяя главное внимание физическим идеям, а не расчетно-математической стороне разбираемых вопросов, и в то же время избегали приводить формулы, идеи вывода которых могли быть неясными читателю.

При составлении лекций, наряду с оригинальными работами и обзорами, разбросанными на страницах специальных журналов и отчетов конференций, широко использованы известные книги Х. Альфвена, Л. Спитцера, Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица, Г. Каулинга, В. Л. Гинзбурга, Р. Поста, С. Б. Пикельнера, Д. Линхарта и, наконец, недавно изданная превосходная моно-

графия Л. А. Арцимовича. Мы видим, что в некоторых местах курс лекций уже отстает от современного уровня, например, в нем не получили должного освещения новейшие исследования Б. Б. Кадомцева, Р. З. Сагдеева и М. С. Иоффе по устойчивости плазмы, однако подобного рода отставания очень трудно избежать при составлении учебного пособия по такому быстро развивающемуся предмету, каким является физика плазмы.

Всюду, где это специально не оговорено, нами используется международная система единиц СИ, в которой основными единицами являются метр, килограмм, секунда, ампер и градус Кельвина. Диэлектрическая проницаемость и магнитная проницаемость свободного пространства имеют значения $\epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{ ф/м}$ и $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ гн/м}$.

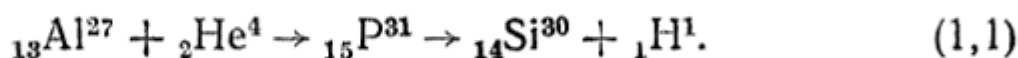
Мы глубоко благодарны проф. Е. С. Боровику и кандидату физ.-матем. наук Н. А. Хижняку за ценные замечания.

ГЛАВА I

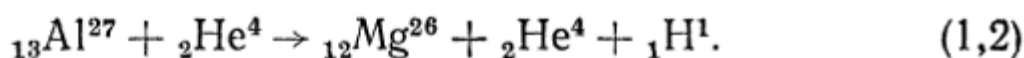
ВВЕДЕНИЕ

Классические исследования, проведенные проф. Э. Резерфордом и его учениками по изучению рассеяния α -частиц атомами различных веществ, привели к открытию в 1919 г. возможности осуществления искусственных ядерных реакций. Резерфорд обнаружил, что при бомбардировке α -частицами алюминия из последнего вылетают протоны, энергия которых превышает энергию бомбардирующих частиц. Поэтому вылет быстрых протонов следует понимать не как «раздробление» ядра алюминия, а как результат своеобразного ядерного взрыва нового «составного» ядра, которое образовалось благодаря присоединению к ядру алюминия ядра гелия. Так как атомный вес ядра алюминия 27, а заряд 13, то составное ядро должно иметь атомный вес 31 и заряд 15.

Эти величины характеризуют элемент фосфор, который в нормальном состоянии не радиоактивен. Поэтому дальнейший распад составного ядра (${}_{15}^{31}\text{P}$) следует приписать тому, что в результате слияния ядер ${}_{13}^{27}\text{Al} + {}_2^4\text{He} \rightarrow {}_{15}^{31}\text{P}$ ядро фосфора приходит в возбужденное состояние и способно распадаться на изотоп кремния и протон:



Уже из этой первой изученной ядерной реакции видно, что происходит не раздробление бомбардируемого ядра, а слияние или соединение ядер, при котором выделяется столь значительная энергия, что промежуточное или составное ядро оказывается неустойчивым и распадается на две частицы — тяжелый изотоп кремния ${}_{14}^{30}\text{Si}$ и протон. Если бы происходило раздробление ядра алюминия, мы должны были бы ожидать появления трех частиц:



Если принять во внимание, что ко времени этих экспериментов (1919 г.) единственным методом обнаружения быстрых ядерных частиц являлся метод визуального наблюдения сцинтилляций, то есть вспышек флуоресцирующего экрана, покрытого ZnS , при-

ходится поражаться поистине гениальной интуиции Резерфорда, сделавшего единственно правильный выбор между реакциями (1,1) и (1,2). Большая кинетическая энергия бомбардирующих алюминий α -частиц необходима не только для разрушения ядер алюминия, но и для преодоления электрических сил отталкивания, возникающих между ядром гелия и ядром-мишенью. Энергия, выделяющаяся при реакции (1,1), легко может быть подсчитана из известного соотношения Эйнштейна:

$$\Delta E = \Delta mc^2 \text{ дж} = \Delta M 9,31 \cdot 10^2 \text{ Мэв},$$

где Δm — убыль массы (в кг) продуктов реакции по сравнению с первоначальной массой реагирующих частиц,

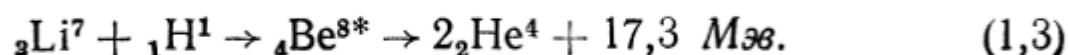
ΔM — убыль массы в ядерных единицах массы ($1/16$ массы атома кислорода).

Теоретическое осмысливание этих результатов встречало значительные затруднения. С одной стороны, опыты Резерфорда по рассеянию α -частиц на большие углы указывали на наличие потенциального барьера, вызванного кулоновскими силами отталкивания

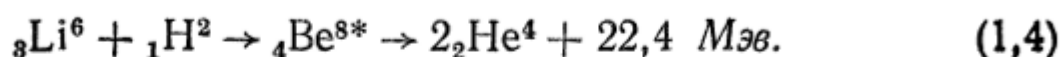
$$F = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

которые препятствуют сближению ядер; с другой стороны, была бесспорно доказана возможность ядерных реакций. Положение резко изменилось после опубликования в 1927 г. теоретических исследований Г. Гамова, объяснивших естественный α -распад квантово-механической «прозрачностью» потенциального барьера, окружающего ядро. Теория Гамова одновременно показала, что даже в том случае, когда энергия бомбардирующих ядер много меньше высоты кулоновского потенциального барьера, «прозрачность» последнего может привести к проникновению бомбардирующих частиц внутрь ядерной области, что в свою очередь может повести к слиянию ядер. Стало также очевидным, что наиболее эффективными бомбардирующими снарядами должны быть не ядра гелия (α -частицы), а протоны.

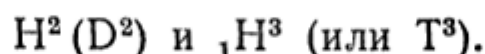
Открытие тяжелого изотопа водорода (дейтерия) и разработка методов получения его в чистом виде (Юри, 1932 г.) расширили возможности исследования ядерных реакций синтеза. В 1932 г. учеником Резерфорда Дж. Кокрофтом впервые была показана возможность ядерных реакций слияния под действием пучков быстрых протонов и дейтронов, ускоренных в разрядных трубках до энергий в несколько сот кэв. При бомбардировке протонами тонкой пластинки лития из последней, как оказалось, вылетают α -частицы с энергией 8,7 Мэв. Ядро изотопа лития ${}^7_3\text{Li}$ захватывает протон, образуя неустойчивый изотоп бериллия ${}^8_4\text{Be}^{*}$, который распадается на два ядра гелия:



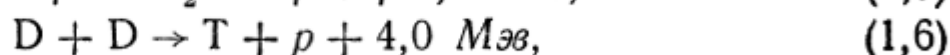
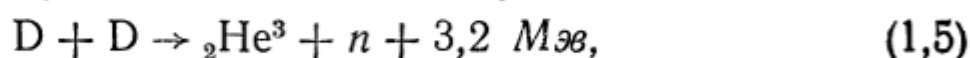
При бомбардировке этой же мишени ядрами тяжелого водорода происходит ядерная реакция дейтрона с легким изотопом лития:



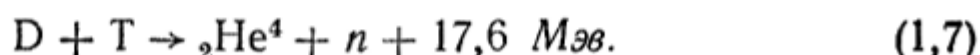
Наибольший интерес для всего дальнейшего представляют ядерные реакции синтеза с легчайшими элементами:



Как было доказано опытами Резерфорда, Кокрофта и Олифанта, при взаимодействии дейтронов возможны две реакции, протекающие примерно с одинаковыми вероятностями

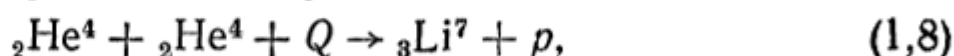


а при взаимодействии дейтронов с наиболее тяжелым изотопом водорода, тритием,



Кулоновские потенциальные барьеры для реакций DD и DT настолько низки, что протекание этих реакций можно наблюдать даже при энергии бомбардирующих частиц всего в несколько десятков кэв.

Каждой ядерной реакции, связанной с выделением энергии (экзотермической), соответствует обратная (эндотермическая) реакция, связанная с поглощением энергии, то есть с превращением кинетической энергии бомбардирующей частицы в потенциальную энергию. Например, путем бомбардировки гелия α -частицами можно получить ядра лития и протоны



если кинетическая энергия Q α -частиц будет превышать 17,3 Мэв. Таким образом, обратные или эндотермические реакции оказываются «пороговыми», то есть протекание реакции при кинетической энергии бомбардирующих частиц, меньшей определенного значения Q_0 , становится невозможным. Экзотермические реакции могут протекать при любых сколь угодно малых значениях кинетической энергии, но так как «прозрачность» потенциального барьера чрезвычайно сильно зависит от относительной скорости взаимодействующих частиц, вероятности экзотермических реакций при малых энергиях становятся чрезвычайно малыми. Как будет показано в дальнейшем, прозрачность потенциального барьера ядра дейтерия при реакции (1,5) или (1,6) имеет порядок

$$e^{-\frac{46}{\omega^{1/2}}},$$

где ω — кинетическая энергия дейтрона в кэв.

Если

$$w = 4 \cdot 10^5 \text{ эв} = 4 \cdot 10^2 \text{ кэв},$$

то

$$e^{-\frac{46}{w^{1/2}}} = e^{-\frac{46}{20}} = 0,1,$$

и эффективное поперечное сечение получается порядка

$$\sigma = \sigma_0 \cdot 0,1 = \pi R_0^2 \cdot 10^{-1},$$

где $R_0 \approx 1,4 \cdot 10^{-13} A^{\frac{1}{3}} \text{ см}$ (A — атомный вес ядра). При $A = 2$ $\sigma_0 \approx 10^{-25} \text{ см}^2$ и $\sigma \approx 10^{-26} \text{ см}^2$.

С другой стороны, газокинетические сечения нормальных атомов имеют порядок нескольких единиц на 10^{-16} см^2 , откуда видна чрезвычайно малая эффективность бомбардировки мишеней быстрыми протонами или дейтронами. Как бы ни была велика первоначальная кинетическая энергия бомбардирующих частиц, они, как правило, успевают растратить её на взаимодействие с электронными оболочками атомов мишени до того, как попадут на одно из ядер. Иначе говоря, подавляющее большинство бомбардирующих ядер полностью теряет свою энергию на ионизацию и возбуждение атомов мишени.

Естественно, возникает мысль устранить эти потери на ионизацию и возбуждение, используя в качестве мишени полностью ионизированный газ, то есть так называемую газоразрядную плазму. Элементарный подсчет показывает, что энергия, которую нужно затратить на полную ионизацию дейтерия, сравнительно невелика, она составляет несколько десятков джоулей на 1 см^3 дейтерия при атмосферном давлении. При этом, однако, возникает трудность, связанная с необходимостью удержания полностью ионизированной плазмы от соприкосновения со стенками сосуда, так как попадание ионов на стенки приведет к их немедленной нейтрализации. Не следует забывать также, что эффективное поперечное сечение ядерного взаимодействия достаточно велико, только если энергия бомбардирующих плазму ионов достигает десятков или сотен кэв. Очевидно, при многочисленных упругих соударениях ионы плазмы будут получать от бомбардирующих частиц значительные энергии, и трудности, связанные с необходимостью удержания ионов плазмы и упруго рассеянных ионов первичного пучка от попадания на стенки, сильно возрастут.

Подобные соображения, связанные с принципиальной возможностью утилизации энергии ядерного синтеза, безусловно, возникали у большинства физиков, работавших в 30-е годы в области ядерной физики. Причина того, что эта интереснейшая проблема не разрабатывалась в довоенные годы, двояка: во-первых, были очевидны колоссальные технические трудности, связанные с необходимостью термализации плазмы, а во-вторых, быстрые успехи ядерной

физики — открытие нейтронов и позитронов, искусственной радиоактивности — вселяли надежду на возможность утилизации ядерной энергии другим путем.

Действительно, нейтроны, для проникновения которых внутрь ядра нет потенциальных барьеров, казались тем «философским камнем» алхимиков, с помощью которого можно будет высвободить ядерную энергию. Эти надежды не оправдались, так как получение нейтронов было возможно опять-таки с помощью энергетически чрезвычайно неэффективного метода бомбардировки мишеней ускоренными ионами. Затем последовало открытие процесса деления ядра урана (1939 г.), и стали видны необъятные горизонты технического прогресса, связанного с возможностью утилизации цепных реакций деления урана или тория. Создание атомной бомбы в 1945 г. позволило всего через несколько лет показать возможность создания в земных условиях реакций синтеза в нерегулируемом процессе взрыва водородной бомбы. Конечно, создание водородной бомбы не может считаться решением проблемы утилизации в принципе чрезвычайно дешевой энергии синтеза легких элементов, так как прогресс человечества зависит от дешевого и неограниченно регулируемого источника энергии, а не от изобретения «взрывчатки» нового типа.

Возможность утилизации энергии слияния легких ядер необычайно заманчива, так как основным ядерным «горючим» может быть тяжелый изотоп водорода, т. е. дейтерий, запас которого в воде морей и океанов поистине неисчерпаем. В одном литре обычной воды содержится около 0,03 г дейтерия, который в энергетическом отношении эквивалентен 300 литрам бензина.

Мы уже упоминали, что непосредственная бомбардировка ионами дейтерия твердых или газообразных мишеней не может привести к положительному выходу энергии из-за потери ионами энергии на ионизацию и возбуждение. Мы указывали также, что эти потери могут быть в принципе сведены к нулю, если в качестве газовой мишени брать полностью ионизированный газ. Для устранения объемного заряда в единице объема этой плазмы должно в среднем находиться одинаковое число положительных ионов и свободных электронов. Легко показать, что благодаря электростатическим силам взаимодействия бомбардирующих ионов с положительной и отрицательной компонентой плазмы, средняя кинетическая энергия частиц плазмы начнет увеличиваться. Если принять меры к так называемой термоизоляции плазмы, при которой даже энергичные частицы пучка или плазмы не могут попасть на стенки сосуда, то вскоре установится стационарное максвелловское распределение частиц по скоростям, для характеристики которого достаточно знания двух параметров — температуры и плотности газа.

Мы приходим, таким образом, к необходимости использования «горячей» плазмы с настолько высокой температурой, чтобы столк-

новения частиц достаточно часто могли приводить к слиянию ядер и освобождению энергии. Поскольку процесс должен быть самоподдерживающимся, освобождающаяся энергия должна быть по крайней мере достаточной для поддержания температуры плазмы, г. е. она должна перекрывать все потери энергии, связанные с попаданием частиц на стенки, с излучением плазмы и т. д. Как мы увидим, для этого необходимы температуры порядка сотен миллионов градусов, что превышает температуру внутренних слоев Солнца.

Трудности создания и удержания такой «горячей» плазмы колоссальны. Начиная с 1950 г., когда академики А. Д. Сахаров и И. Е. Тамм предложили первую модель термоядерного реактора с магнитным удержанием плазмы, этой проблемой в Советском Союзе, также как и за рубежом, занимаются крупнейшие коллективы учёных и инженеров.

С первых же шагов были обнаружены «подводные камни», к которым в первую очередь следует отнести различного рода неустойчивости, чрезвычайно затрудняющие задачу нагрева и изоляции плазмы. Стало ясно, что вместе с необходимостью решения ряда сложнейших технических проблем, таких как обеспечение сверхвысокого вакуума (порядка 10^{-10} мм Hg) в больших объемах, создание очень сильных магнитных полей, разработка новых весьма тонких методов диагностики, то есть определения основных параметров плазмы, и т. д., существует необходимость в глубоком изучении физики плазмы, основанном на новейших достижениях электродинамики, гидродинамики и в особенности магнитогидродинамики, статистической физики, теории колебаний и других разделов физики.

Следует заметить, что значение физики плазмы не исчерпывается ее ролью в проблеме термоядерных реакций. Плазма представляет собой широко распространенное во вселенной состояние вещества, отличное от твердого, жидкого и газообразного состояний.

«Явления в откачанных трубках открывают для физической науки новый мир, — писал в 1879 г. В. Крукс, — мир, в котором материя может существовать в четвертом состоянии...»

И в самом деле, принадлежность к тому или иному состоянию определяется отношением кинетической энергии частиц к энергии связи. В твердом теле связь между молекулами обеспечивает сохранение жесткой кристаллической структуры, если кинетическая энергия молекул мала по сравнению с энергией связи. С повышением температуры средняя кинетическая энергия молекул может превзойти энергию связи в кристалле, и тогда произойдет переход в жидкое или газообразное состояние. В жидкости связь обеспечивается силами Ван-дер-Ваальса. Жидкость переходит в газ, когда кинетическая энергия молекул превзойдет соответствующую энергию связи. В обычном газе электроны связаны с атомными

ядрами; когда средняя кинетическая энергия частиц превосходит потенциал ионизации атомов, газ ионизуется, вещество переходит в четвертое состояние. Возможно также и следующее состояние, когда разрушаются связи нуклонов в ядрах.

Вероятно более 99,9% всего вещества во вселенной находится в состоянии плазмы. В этом состоянии находится вещество Солнца, звезд, газов межзвездного и межпланетного пространства. В связи с этим понятно тесное взаимодействие физики плазмы с астрофизикой.

На Земле для создания плазмы необходимы специальные условия, с нею мы имеем дело в технике всевозможных газоразрядных устройств, в технике усиления и генерирования электромагнитных колебаний.

Таким образом, физика плазмы — наука о четвертом состоянии вещества — имеет множество различных приложений. Однако бурное развитие физики плазмы в последнее десятилетие обусловлено главным образом её ролью в проблеме регулируемого термоядерного синтеза.

ГЛАВА 2

ИСТОЧНИКИ ЭНЕРГИИ ЗВЕЗД И ТЕРМОЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ

Уверенность в том, что в самом недалеком будущем основным источником энергии для человечества явится утилизация ядерной энергии, подкрепляется тем, что саморегулируемые термоядерные реакции в колоссальных масштабах происходят в природе и являются основным источником энергии Солнца и звезд.

Предположение, что источником солнечной энергии является обычная химическая реакция, было отвергнуто наукой еще в XVII веке. Первое приемлемое научное объяснение было выдвинуто примерно 100 лет тому назад Г. Гельмгольцем, который предположил, что высокая температура Солнца обусловлена действием гравитационных сил. Представим себе громадное газовое облако с массой, примерно равной массе Солнца, но в миллионы раз превосходящее его по размерам. Пусть эта масса газа будет достаточно удалена от остальных частей вселенной. Согласно закону всемирного тяготения, облако будет постепенно сжиматься. Уменьшение объема будет приводить ко все большему повышению температуры и плотности. Наконец, центральная часть первоначального газообразного облака будет сжата так сильно, что начнется конденсация, то есть переход из газообразного в жидкое или твердое состояние. Пользуясь этими элементарными представлениями, Гельмгольц показал возможность сравнительно длинного периода

существования Солнца. По его расчетам, Солнце, при той же интенсивности излучения, что и в настоящее время, могло бы существовать 10—40 миллионов лет. Во времена Гельмгольца эта цифра казалась правдоподобной, и его теория получила всеобщее признание.

Однако после открытия явлений радиоактивности возраст Земли был оценен по количеству в земной коре урана и продуктов его распада, и оказалось, что Земля существует не менее пяти миллиардов лет. Отсюда стала ясной недостаточность элементарной теории Гельмгольца.

После открытия радиоактивности в 90-х годах прошлого столетия делались многочисленные попытки решения проблемы об источнике энергии Солнца на основе предположения о существовании внутри Солнца достаточных количеств радиоактивных веществ, однако после установления Ф. Содди и Э. Резерфордом законов радиоактивного распада стало ясно, что для известных тогда радиоактивных веществ нельзя получить и того «времени жизни» Солнца, какое давала теория Гельмгольца.

Дальнейшие успехи физики позволили в основном решить эту проблему. Прежде всего оказалось, что теория Гельмгольца не так плоха, надо было только, пользуясь новейшими научными данными, уточнить и дополнить её (А. Эддингтон, 1923 г.). Дело в том, что Гельмгольц, определив колоссальные давления, которые должны существовать в центре Солнца, пользовался данными по сжимаемости жидких и твердых тел, полученными в лабораторных условиях, то есть при очень небольших давлениях. Использованная здесь экстраполяция недопустима в силу ряда причин. Прежде всего, при температурах, существующих внутри Солнца, атомы всех элементов должны быть почти полностью ионизированы, следовательно, минимальное сближение частиц будет определяться не атомными радиусами, порядка 10^{-8} см, а радиусами ядер, имеющими порядок 10^{-12} см. Полное разрушение электронных оболочек атомов может происходить не только вследствие высоких температур, но и вследствие очень больших давлений. В этом процессе «раздавливания» атомных электронных оболочек электроны коллективизируются, образуя электронный газ. Превращение атомного газообразного вещества в ансамбль, состоящий из положительных «голых» ядер и электронного газа, позволяет процессу сжатия идти значительно дальше, чем предполагал Гельмгольц.

Возможность «нетемпературной» ионизации, вызванной колоссальными давлениями, позволяет представить себе «сверхтяжёлое» состояние вещества. Представим себе, что среднее расстояние между ядрами не 10^{-8} см, как в обычном атомном состоянии вещества, а в сто раз меньше, то есть 10^{-10} см. Плотность вещества в этом случае должна повыситься в $(10^2)^3 = 10^6$ раз. Современные астрофизические данные полностью подтверждают предположение

о существовании во вселенной сверхтяжелых веществ с плотностью порядка $5 \cdot 10^5 \text{ г/см}^3$ (в так называемых «белых карликах»). Совершенно очевидно, что при столь сильном сближении ядер, благодаря квантово-механическому туннельному эффекту, ядерные реакции становятся очень вероятными. Однако астрономические данные указывают, что даже в самом центре Солнца его вещество еще не переходит в сверхтяжелое состояние. Средняя плотность Солнца $\bar{\rho}$ очень невелика. Ее легко вычислить, зная массу Солнца и его радиус: $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{33} \text{ г}$, $R_{\odot} = 7 \cdot 10^{10} \text{ см}$, следовательно, $\bar{\rho} = 1,4 \text{ г/см}^3$.

Принимая химический состав внутренних слоев Солнца тем же, что и солнечной атмосферы, можно определить температуру и плотность центральных слоев Солнца. Расчет приводит к значению плотности около 100 г/см^3 и температуры около 20 миллионов градусов. Последнее, разумеется, не противоречит хорошо известному факту, что исследование спектра Солнца указывает на излучение, близкое к излучению абсолютно черного тела с температурой вблизи 6000°К . Действительно, спектральное исследование может дать только поверхностные температуры, а не температуру внутри Солнца. Благодаря излучению, температура поверхности Солнца должна быть гораздо ниже температуры внутренних слоев.

Поверхностная температура звезд изменяется в довольно широких пределах: от $1 - 2 \cdot 10^3$ до $25 \cdot 10^3^\circ\text{К}$, причем между температурой и светимостью звезд существует эмпирически установленная зависимость, открытая в 1913 г. и носящая название диаграммы Ресселла — Герцшпрунга (рис. 2,1). На оси ординат здесь отложен логарифм светимости, отнесенный к светимости Солнца (светимость L обозначает полное излучение за единицу времени), а по оси абсцисс — поверхностная температура, которая может быть найдена по расположению максимума интенсивности в спектре излучения. Если известна абсолютная светимость



Рис. 2,1. Диаграмма Ресселла — Герцшпрунга.

L звезды и ее поверхностная температура, то из закона излучения абсолютно чёрного тела может быть найден радиус звезды (вернее, радиус фотосферы).

Наибольшая часть наблюдаемых звезд попадает на диаграмме Расселла — Герцшпрунга в сравнительно узкую полоску, носящую название «главной последовательности». Направо от главной последовательности лежит область «красных гигантов» — звезд с большой светимостью, но с низкими температурами поверхности; ясно, что эти звезды должны обладать очень большими радиусами. Налево от главной последовательности лежит область так называемых «белых карликов» — звезд с малой светимостью, но с очень высокой поверхностной температурой. Эти звезды должны обладать очень малыми диаметрами (иногда не превышающими диаметр Земли).

Современная наука позволяет не только указать источник звездной энергии, но и наметить общую картину эволюции звезд и постепенного образования всех элементов периодической системы из первоначальной материи — водорода. Астрофизические данные позволяют предполагать, что наша Галактика первоначально состояла из водорода, более тяжелые элементы образовались в процессе эволюции во внутренних областях звезд в течение всей истории развития Галактики. Большое число фактов говорит за то, что Солнце относится ко второму, а может быть и третьему поколению звезд, возникших в нашей Галактике, и образованию Солнца предшествовал период во много миллиардов лет звездной эволюции и синтеза элементов. Как показывают астрофизические наблюдения, вещества, из которых состоят звезды, выбрасываются или медленно, или посредством взрыва, и постепенное скопление этого межзвездного вещества приводит к образованию новых звезд, в состав которых теперь будут входить элементы, выброшенные из внутренних областей звезд предыдущего поколения.

Предполагается, что первое поколение звезд нашей Галактики было образовано из водорода. Последующие поколения могут содержать более тяжелые элементы; присутствие последних может существенно повлиять на эволюционный период звезды, хотя общий ход эволюции для звезд всех поколений примерно один и тот же.

Благодаря всемирному тяготению первоначальное газовое облако постепенно сжимается и потенциальная энергия гравитации переходит в кинетическую энергию газовых частиц. Этот процесс первоначального сжатия и нагрева занимает промежуток времени порядка 10^7 — 10^8 лет. К концу процесса температура в центре облака достигает 10^7 К при плотности порядка 100 г/см^3 . При этих условиях становится возможной термоядерная реакция слияния водорода, которая приводит к образованию ядер He^4 с выделением энергии, равной $26,7 \text{ Мэв} = 4,3 \cdot 10^{-12} \text{ Дж}$. При наличии

в звезде изотопов C^{12} и O^{16} синтез гелия из водорода может протекать с помощью каталитического так называемого CNO-цикла, на котором мы остановимся несколько позднее.

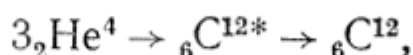
При температуре центральной части образующейся звезды в 10^7 градусов наиболее вероятная кинетическая энергия протонов по порядку величины равна 1 кэв. Все взаимодействующие ядра заряжены положительно и возникающие вследствие этого потенциальные барьеры настолько велики по сравнению с тепловой энергией ионов, что ядерные реакции возможны только благодаря квантовомеханическому туннельному эффекту. Благодаря тому, что «прозрачность» потенциального барьера чрезвычайно быстро возрастает с увеличением энергии взаимодействующих частиц, наибольшую роль играют протоны с энергиями в хвосте Максвелл — Больцмановского распределения.

Скорости термоядерных процессов зависят, конечно, не только от температуры, но и от плотности. При ядерных реакциях, в которых принимают участие два ядра, скорость реакции пропорциональна квадрату плотности. Для более редких ядерных реакций, в которых участвуют три ядра, скорость пропорциональна кубу плотности. Условия гидростатического равновесия между силами гравитации и внутренним газокINETическим давлением вместе с газовыми законами и уравнениями теплопроводности достаточны для определения плотности. Чрезвычайно важным для эволюции звезды является тот факт, что по мере «выгорания» определенного ядерного горючего гравитационные силы приводят к дальнейшему сжатию и увеличению плотности и температуры до значений, при которых продукты ядерных реакций, так сказать ядерный «пепел», смогут сами явиться новым ядерным горючим.

До тех пор, пока первоначальная термоядерная реакция на звезде не привела к сильному обеднению звезды водородом, звезда остается на главной последовательности диаграммы Расселла — Герцшпрунга. Звезды, находящиеся на этой последовательности, постепенно, в течение времени порядка 10^9 — 10^{10} лет, преобразуют водород в гелий. Наконец, наступает время, когда водородное «горючее» в центре звезды оказывается исчерпанным и замещается ядерным «пеплом» — гелием. Ядра гелия с двойным зарядом не могут реагировать друг с другом при температурах порядка 10^7 °, выделение энергии прекращается во всем объеме звезды, за исключением сравнительно тонкой области, где существовавшие более низкие температуры позволили сохраниться значительному количеству водорода. На этой фазе развития основным источником энергии является водород во внешней оболочке звезды, температура которой достигает $3 \cdot 10^7$ °, а плотность — порядка 10 г/см^3 . Отсутствие выделения энергии в центральной части звезды приводит к её сильному сжатию, сопровождающемуся повышением температуры. Излучение, исходящее из центральной части, вызы-

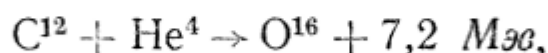
вает сильное расширение внешней оболочки. Звезда, таким образом, переходит в класс красных гигантов.

Предполагаемое сжатие внутренней части звезды доводит ее температуру до 10^8 К и плотность до 10^5 г/см³. При этих условиях становится возможной реакция

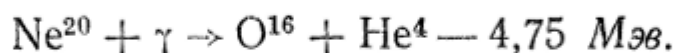


где C^{12*} — возбужденное ядро углерода с энергией возбуждения 7,65 Мэв.

При достаточном накоплении углерода становятся возможными реакции



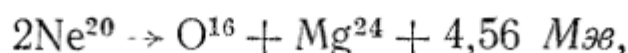
Эти реакции постепенно переводят центральное гелиевое ядро звезды в ядро, состоящее из C^{12} , O^{16} , Ne^{20} и, может быть, незначительного количества Mg^{20} . По мере «выгорания» гелия уменьшение выделения энергии за счет термоядерных реакций приводит к дальнейшему гравитационному сжатию центральной части звезды, увеличению её плотности и температуры. Реакции между ядрами C^{12} , O^{16} и Ne^{20} при температуре ниже 10^9 К не могут привести к сколько-нибудь значительному выделению энергии. Поэтому ядерная энергетика теряет значение, и в эволюции звезды снова основную роль начинает играть гравитационная энергия. При достижении температуры порядка 5 Мэв становится возможным протекание так называемых α -процессов, и ядерная энергетика опять становится преобладающей. В столь сильно нагретой плазме существует значительное количество фотонов с энергией порядка 5 Мэв, вследствие чего становится вероятной фотодезинтеграция неона



Освободившаяся α -частица может преодолеть потенциальный барьер Ne^{20} :



В результате мы имеем реакцию



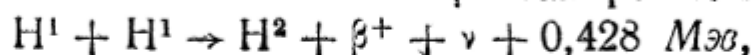
то есть под действием γ -кванта происходит передача α -частицы от одного ядра неона другому. Освобождающиеся в первой половине α -процесса ядра гелия могут образовывать кремний: $\text{Mg}^{24} (\alpha, \gamma) \text{Si}^{28}$. При постепенном возрастании концентрации кремния возможно образование серы $\text{Si}^{28} (\alpha, \gamma) \text{S}^{32}$, а затем фосфора и кальция.

С точки зрения ядерной физики ясно, что этот процесс образования все более и более тяжелых ядер должен закончиться на группе железа, так как согласно кривой дефекта масс элементы этой группы являются наиболее устойчивыми по сравнению с более тяжелыми и более легкими элементами. После превращения большей части ядер внутренней области звезды в ядра группы железа дальнейшее выделение энергии вследствие ядерных превращений прекращается, и снова преобладающую роль начинают играть гравитационные силы. Сжатие на этом этапе развития звезды может оказаться ускоренным благодаря охлаждающему действию возможных эндотермических реакций, переводящих элементы группы железа в более легкие.

Не надо забывать, что звезда на этом этапе относится к классу красных гигантов, колоссальные размеры и низкая поверхностная температура которых обусловлена наличием разделенных областей звезды — внутренней с плотностью 10^8 г/см^3 и температурой порядка $4 \cdot 10^9$, состоящей главным образом из элементов группы железа, и наружной — отброшенной от центральной части тем потоком энергии, который излучался внутренней частью при «сгорании» гелия и при α -процессах. Наружная оболочка содержит очень значительное количество еще не израсходованного водорода ($\rho \approx 10 \text{ г/см}^3$, $T \approx 3 \cdot 10^7 \text{ К}$).

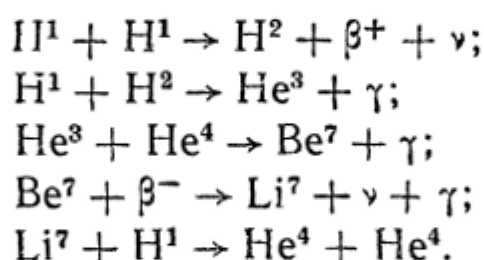
При прекращении ядерных процессов внутри звезды оболочка перестает удерживаться на большом расстоянии от центральной части, и, по-видимому, может начаться катастрофически быстрый процесс сжатия оболочки. Этот чрезвычайно быстрый процесс сжатия приводит к увеличению плотности оболочки до 10^5 г/см^3 и нагреву до 10^9 К . Звезда превращается в своеобразную водородную бомбу; яркость ее в течение суток может измениться на несколько порядков. Подобные взрывы наблюдаются астрономами, и взорвавшиеся звезды получили название «сверхновых». Громадные количества веществ из оболочки и центральных частей при возникновении «сверхновой» выбрасываются в межзвездное пространство, где они под действием гравитации могут образовывать звезды второго поколения, отличающиеся от первого тем, что в составе совсем еще молодой звезды будет присутствовать не только водород, но и более тяжелые элементы C^{12} , O^{16} и т. д. Благодаря наличию в молодой звезде второго поколения более тяжелых элементов процесс развития звезды может идти несколько иным путем.

Остановимся теперь более подробно на основных термоядерных реакциях, которые могут протекать на Солнце и звездах. Еще сравнительно очень недавно было распространено мнение, что основным источником энергии Солнца является так называемый CNO-цикл, в котором углерод играет роль катализатора, превращающего протоны в гелий. Более простая реакция

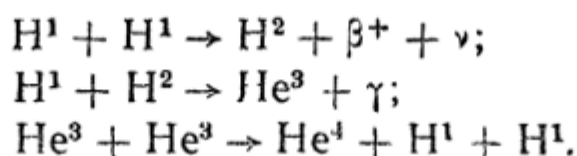


начинающая собою так называемый $p-p$ цикл, считалась несущественной из-за чрезвычайно малого сечения ($\sigma \approx 10^{-47} \text{ см}^2$). Однако более тщательный анализ цикла CNO и протонного цикла $p-p$, по-видимому, приводит к заключению, что для 1-го и 2-го поколения звезд основным источником термоядерной энергии является реакция $4\text{H}^1 \rightarrow \text{He}^4$.

Вначале предполагалась следующая последовательность реакций:



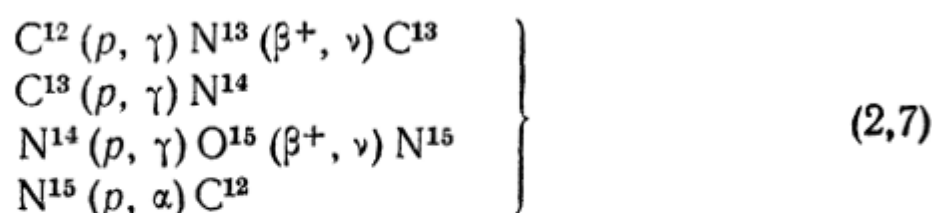
В 1951 г. В. Фаулер показал, что значительно большей вероятностью обладает последовательность



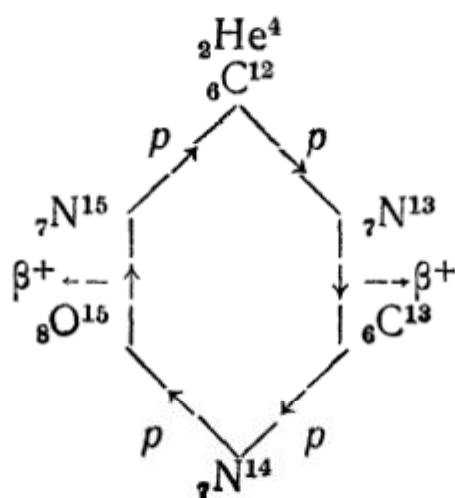
Сечение этого $p-p$ -цикла настолько мало ($\sigma = 10^{-23}$ барна), что в лабораторных условиях цикл не может наблюдаться.

Для толстой водородной мишени выход должен быть равен $5 \cdot 10^{-28}$ на один падающий протон с энергией 1 Мэв.

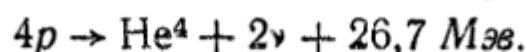
В конце 30-х годов Г. Бете и одновременно с ним К. Ф. Вайцзекер предложили следующую схему превращения водорода в гелий с помощью «каталитического» действия примеси углерода:



Эту последовательность реакций более удобно представлять в таком виде:



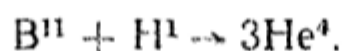
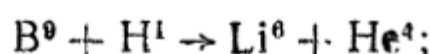
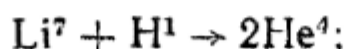
Последняя реакция $N^{15}(p, \alpha)C^{12}$ воспроизводит ядро углерода и дополнительно дает одно ядро гелия, так что в конечном итоге в CNO-цикле происходит синтез четырех протонов в ядре гелия:



Из выделяющейся энергии только 1,4 Мэв уносится нейтрино (ν). Исключительно малые сечения для $p-p$ - и CNO-циклов приводят к тому, что один грамм солнечного вещества в 1 сек дает всего около 2 эргов (обычная свеча на 1 г выделяет во много раз больше энергии). Зная массу Солнца ($M_{\odot} \approx 2 \cdot 10^{33} \text{ г}$), можно оценить полную излучаемую энергию. Она эквивалентна $4,2 \cdot 10^6$ тоннам в 1 секунду.

После значительного обеднения внутренних частей Солнца водородом должен начаться гелиевый цикл, а затем α -процессы.

Если в первоначальной звезде второго или более позднего поколения помимо C^{12} , O^{16} и Ne^{20} существуют более легкие элементы Li, Be, B, то они выгорят на самых первых ступенях эволюции звезды благодаря очень большим сечениям реакций



Для звезд второго поколения процесс выгорания гелия может отличаться от того же процесса в звездах первого поколения, так как становится возможным взаимодействие C^{13} и Ne^{21} с He^4 , сопровождаемое излучением нейтронов, которые в основном будут захватываться тяжелыми ядрами. При наличии в центре звезды элементов группы железа, последние, захватывая нейтроны, будут образовывать более тяжелые элементы. Особенно интенсивным будет излучение и поглощение нейтронов, вероятно, при образовании сверхновых. Взрыв при рождении сверхновых может выносить в межзвездную область самые тяжелые элементы, образованные благодаря захвату нейтронов, но не способные возникнуть и длительное время существовать в условиях, имеющих место в центре звезд.

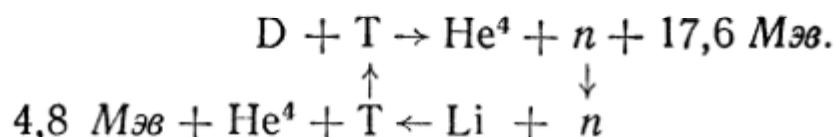
Приведенная нами картина эволюции звезд является весьма схематичной и упрощенной. В действительности эволюция может идти различными путями в зависимости от массы звезды, принадлежности её к тому или иному поколению и от других условий. Наука о процессах, протекающих в звездах, находится в стадии бурного развития и пока еще не дает ответа на многие важные вопросы. Современное её состояние весьма полно отражено в книгах М. Шварцшильда [1] и Д. А. Франк-Каменецкого [2].

Реакции $p-p$ и цикл CNO даже в условиях больших плотностей и температур порядка нескольких десятков миллионов градусов протекают настолько медленно, что использование их

в термоядерных лабораторных реакторах полностью исключается. Несравненно более выгодными могут оказаться реакции протонов с легкими элементами Li, Be, B. Еще более выгодными оказываются реакции, в которых принимают участие изотопы водорода — дейтерий (D) и тритий (T), рассмотренные нами ранее.

Как было указано во введении, возможность создания условий для протекания термоядерных реакций на Земле была показана взрывами водородных бомб. Обычная атомная бомба служит в ней запалом, создающим на несколько микросекунд колоссальные давления и температуры порядка $2 \cdot 10^7^\circ\text{K}$. Само собой разумеется, что применение газообразного дейтерия и трития нецелесообразно из-за их низкой плотности даже в сжиженном состоянии. Согласно американским опубликованным данным, первая американская водородная бомба (операция «Гринхауз», май 1951 г.) состояла из D_2O и T_2O ; кислород мог оказаться полезным, делая облако газов во время взрыва более непрозрачным и, следовательно, повышая температуру в центре взрыва. Согласно некоторым опубликованным данным, водородная бомба, взорванная на атоле Эниветок 1 марта 1954 г., состояла из дейтерида лития (Li^6).

Можно думать, что в водородной бомбе с добавкой лития могут протекать такие реакции:



Возможно, что в некоторых конструкциях бомб термоядерные реакции работают совместно с реакцией деления: термоядерная реакция дает быстрые нейтроны для реакции деления, реакция же деления доставляет энергию, способную компенсировать потери и, таким образом, поддерживать термоядерную реакцию. В этом случае в качестве горючего можно использовать U^{238} , который относительно дешев и не подвержен цепной реакции, благодаря чему не возникает трудности критических размеров и, следовательно, бомба может быть гораздо большей, чем обычная атомная бомба.

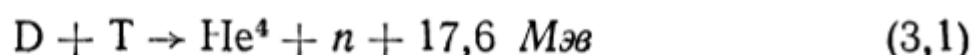
ГЛАВА 3

ЭФФЕКТИВНЫЕ СЕЧЕНИЯ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ БАЛАНС ПРИ ТЕРМОЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЯХ

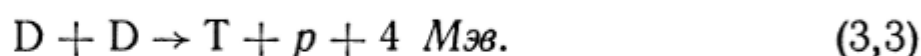
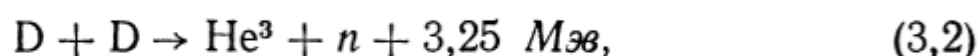
§ 3.1. Ядерные реакции

В настоящее время можно с уверенностью утверждать, что если не будут открыты какие-либо новые явления в ядерной физике, то единственно пригодным для регулируемых термоядер-

ных реакций горючим являются два изотопа водорода — дейтерий и тритий. Как будет показано ниже, реакция



может протекать с положительным энергетическим выходом при температурах значительно менее высоких, чем реакции DD:

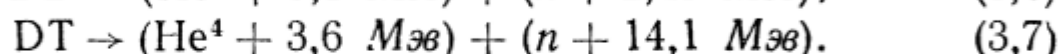
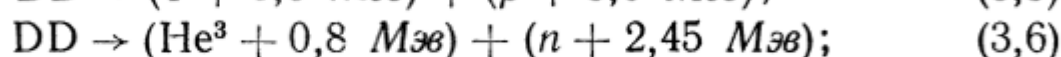
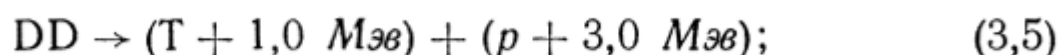


Однако в противоположность дейтерию тритий вследствие своей радиоактивности в природе практически не встречается, и его приходится получать искусственно, обычно облучением лития медленными нейтронами в ядерном реакторе. Ядро изотопа Li^6 , поглотив нейтрон, распадается затем на α -частицу и ядро трития:



Период полураспада трития — 12 лет, он переходит с испусканием электрона в устойчивый изотоп гелия He^3 .

При сравнении реакций DD и DT необходимо обратить внимание на заряд частиц — продуктов реакции. Если одной из таких частиц является нейтрон, то он почти наверное покинет реактор, и уносимую им долю энергии следует отнести к числу потерь. Распределение энергии между заряженными продуктами и нейтронами представляется следующим:



В случае DD-реакций в среднем 66% энергии приходится на долю заряженных частиц и 34% — на нейтроны, в случае же DT-реакции нейтронами уносится 80% освобождающейся энергии.

Интересующие нас термоядерные реакции происходят при значениях кинетических энергий частиц, малых по сравнению с величиной кулоновского потенциального барьера. Потенциальная энергия двух ядер с зарядами Z_1e и Z_2e равна

$$U = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

где Z_1 и Z_2 — атомные номера взаимодействующих частиц. При сближении двух ядер с массовыми числами A_1 и A_2 ядерное взаимодействие происходит на расстояниях, не превышающих

$$R_{12} = 1,4 \cdot 10^{-13} (A_1^{\frac{1}{3}} + A_2^{\frac{1}{3}}) \text{ см.}$$

На рис. 3,1 показана зависимость потенциальной энергии взаимодействия двух ядер от расстояния между их центрами. Ядерное взаимодействие возможно только при сближении двух ядер на расстояние $r \leq R_{12}$. Согласно классическим представлениям, для такого сближения кинетическая энергия относительного движения ядер должна быть не менее $\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}}$. Для двух ядер дейтерия $R_{12} = 1,4 \cdot 10^{-13} \cdot 2,5 \approx 3,5 \cdot 10^{-13}$ см и минимальная кинетическая энергия должна быть равной 400 кэв, что соответствует эффективной температуре $\approx 5 \cdot 10^9$ °К (энергии в 1 эв соответствует $1,6 \cdot 10^{-19}$ дж или эффективная температура $T = 1,16 \cdot 10^4$ °К).

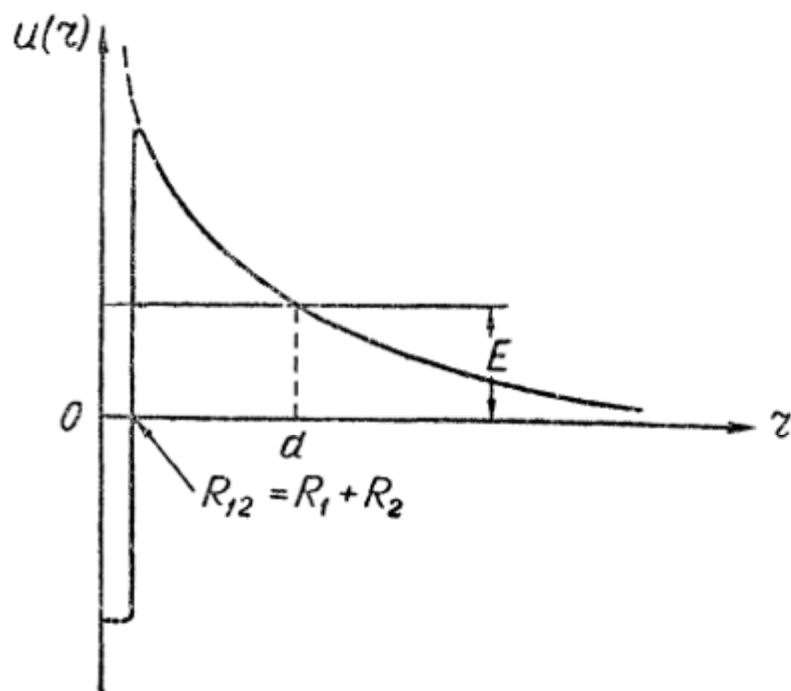


Рис. 3,1. Потенциальная энергия двух ядер как функция расстояния между их центрами.

В действительности, однако, благодаря квантовомеханическому «туннельному» эффекту взаимодействие между ядрами может происходить и при гораздо меньших энергиях.

Вероятность ядерного превращения определяется двумя факторами: эффективным сечением σ_0 и прозрачностью потенциального барьера. При взаимодействии нуклонов большой энергии сечение σ_0 в основном определяется геометрическим

сечением ядра $\pi R_0^2 = \pi (1,4 \cdot 10^{-13} A^{\frac{1}{3}})^2$ см².

При малых энергиях ядер сечение определяется более сложно. Согласно квантовой механике, волновые свойства частиц проявляются, когда размер системы (например, радиус ядра R), с которой частицы взаимодействуют, мал по сравнению с де-Бройлевской длиной волны $\lambda = \frac{h}{p}$ для данных частиц (p — импульс частицы). В случае малых энергий выполняется неравенство $\lambda > R$, сечение взаимодействия нуклонов определяется величиной λ^2 и может оказаться значительно больше геометрического сечения. В области сравнительно малых энергий, типичных для термоядерных реакций, $\lambda \gg R$ и для лобовых ударов порядок величины эффективных сечений может определяться по приближенной формуле

$$\sigma_0 = \pi \lambda^2 = \frac{\pi \hbar^2}{(Mv)^2} = \frac{\pi \hbar^2}{2ME}, \quad (3,8)$$

где $M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ — приведенная масса двух ядер и E — энергия относительного движения. Если $m_1 = m_2 = A m_p$, где A — массовое число и m_p — масса протона, и если одна из частиц покоится, а другая налетает на нее с энергией ω кэв, сечение взаимодействия будет

$$\sigma_0 \approx \frac{6 \cdot 10^{-22}}{A \omega \text{ кэв}} \text{ см}^2,$$

или в барнах ($1 \text{ барн} = 10^{-24} \text{ см}^2$)

$$\sigma_0 = \frac{600}{A \omega \text{ кэв}}. \quad (3,9)$$

Для дейтерия

$$\sigma_0 \approx \frac{300}{\omega \text{ кэв}} \text{ барн}.$$

Учёт нелобовых соударений не вносит существенных изменений в полученный результат.

Вероятность прохождения потенциального барьера при взаимодействии частиц с массами m_1 и m_2 и энергией относительного движения E дается известной функцией Гамова

$$P = \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \sqrt{2M} \int_{R_{12}}^d \sqrt{U(r) - E} dr \right\}, \quad (3,10)$$

где M — приведенная масса, $U(r)$ — энергия кулоновского взаимодействия и $(d - R_{12})$ — длина туннеля (см. рис. 3,1). В случае $R_{12} \ll d$ нижний предел интегрирования в (3,10) можно считать равным нулю. Интегрирование для кулоновского барьера

$$U = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{c}{r}$$

дает

$$\int_0^d \sqrt{\frac{c}{r} - E} dr = \frac{2c}{\sqrt{E}} \frac{\pi}{4},$$

следовательно

$$P = \exp \left\{ -\frac{\sqrt{2M}}{4\epsilon_0 \hbar} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\sqrt{E}} \right\}. \quad (3,11)$$

Скорость относительного движения $v = \sqrt{\frac{2E}{M}}$, поэтому

$$P = \exp \left\{ -\frac{Z_1 Z_2 e^2}{2\epsilon_0 \hbar v} \right\}. \quad (3,12)$$

При взаимодействии дейтронов

$$Z_1 = Z_2 = 1, v = 3,1 \cdot 10^5 \sqrt{\omega \text{ кэв}}$$

и

$$P = \exp \left\{ -\frac{45}{(\omega \text{ кэв})^{\frac{1}{2}}} \right\}.$$

Поэтому для реакции DD

$$\sigma = \sigma_0 P = \frac{300}{w} \exp \left\{ -\frac{45}{\frac{1}{w^2}} \right\} \text{ барн}, \quad (3,13)$$

где w — кинетическая энергия ионов, кэв.

Экспериментальное определение сечений реакции DD, проведенное проф. Дж. Таком в 1954 г., дало

$$\sigma = \frac{288}{w} \exp \left\{ -\frac{45,8}{\frac{1}{w^2}} \right\} \text{ барн}.$$

Сечения для DD и DT реакций в зависимости от энергии относительного движения частиц, приведены на рис. 3,2.

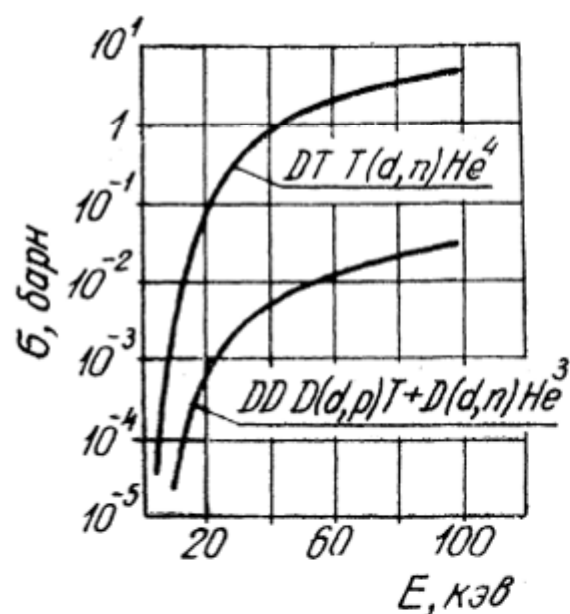


Рис. 3,2. Зависимость сечения DD- и DT-реакций от энергии относительного движения частиц.

Пусть на твердую или газообразную «мишень» падают ионы 1-го класса, ядра которых обладают массой m_1 и зарядом Z_1 ; мишень пусть состоит из ядер 2-го класса (m_2, Z_2), число ядер в единице объема мишени пусть будет n_2 . Тогда на одно падающее со скоростью v ядро приходится $n_2 \sigma v$, столкновений в 1 сек, приводящих к ядерной реакции. В условиях термоядерных реакций частицы 1-го и 2-го классов образуют газ, обладающий максвелловским распределением частиц по скоростям с температурой T . Частота столкновений в единице объема газа, ведущих к ядерному взаимодействию, будет теперь равна

$$v_{12} = n_1 n_2 \overline{\sigma(v) v}, \quad (3,14)$$

где n_1 и n_2 — число частиц 1-го и 2-го класса в единице объема и v — скорость относительного движения. Черта над $\sigma(v) v$ означает усреднение по всем возможным значениям v . В случае максвелловского распределения число частиц со скоростями, лежащими между v и $v + dv$, равно

$$dN = A e^{-\frac{Mv^2}{2kT}} v^2 dv, \quad (3,15)$$

где M — приведенная масса ядер, $M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, v — относительная скорость и A — множитель, не зависящий от v . Проведем усреднение:

$$\begin{aligned}\overline{\sigma v} &= \frac{\int_0^\infty \sigma v dN}{\int_0^\infty dN} = \frac{\int_0^\infty e^{-\frac{Mv^2}{2\kappa T}} v \sigma_0 P(v) v^2 dv}{\int_0^\infty e^{-\frac{Mv^2}{2\kappa T}} v^2 dv} = \\ &= \frac{4}{V\pi} \left(\frac{M}{2\kappa T}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty e^{-\frac{E}{\kappa T}} \sigma_0 \cdot \frac{2E}{M} P(v) \frac{dE}{M} = \frac{4}{V\pi} \left(\frac{M}{2\kappa T}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\pi \hbar^2}{M^3} I,\end{aligned}$$

где

$$I = \int_0^\infty e^{-\frac{E}{\kappa T} - \frac{V\sqrt{2M}Z_1Z_2e^2}{4\epsilon_0\hbar V\sqrt{E}}} dE.$$

Обозначим $y = \frac{E}{\kappa T}$ и $Q^3 = \frac{V\sqrt{2M}Z_1Z_2e^2}{8\epsilon_0\hbar V\sqrt{\kappa T}}$, тогда

$$I = \kappa T \int_0^\infty e^{-y-2Q^3y^{-\frac{1}{2}}} dy.$$

Чтобы вычислить этот интеграл, заметим, что подынтегральная функция имеет резкий максимум в точке $y = Q^2$. Экспоненциальный член очень круто спадает в обе стороны от этой точки, поэтому интеграл в основном определяется значениями аргумента, близкими к $y = Q^2$. Положим $y = Q^2 + u$, и считая u малой величиной, разложим в ряд по u показатель подынтегральной функции. Оставляя квадратные члены по u , получим

$$y + 2Q^3y^{-\frac{1}{2}} \approx 3Q^2 + \frac{3}{4} \frac{u^2}{Q^2},$$

поэтому

$$I = \kappa T e^{-3Q^2} \int_{-Q^2}^\infty e^{-\frac{3}{4} \frac{u^2}{Q^2}} du = 2\kappa T e^{-3Q^2} \int_0^\infty e^{-\frac{3}{4} \frac{u^2}{Q^2}} du = \frac{2\kappa T V\pi}{V^{\frac{1}{3}}} Q e^{-3Q^2}.$$

Следовательно,

$$\overline{\sigma v} = \frac{2 V\sqrt{2\pi}\hbar^2}{M V^{\frac{1}{3}} 3M\kappa T} Q e^{-3Q^2}, \quad (3,16)$$

где

$$Q = \left(\frac{V\sqrt{2M}Z_1Z_2e^2}{8\epsilon_0\hbar}\right)^{\frac{1}{3}} (\kappa T)^{-\frac{1}{6}}. \quad (3,17)$$

Величины для $\bar{\sigma v}$, для DD и DT реакций в зависимости от температуры T представлены графиками рис. 3,3.

Число столкновений, происходящих в 1 м^3 за 1 сек и приводящих к ядерным реакциям, будет

$$\nu_{12} = \frac{2 \sqrt{2} \pi \hbar^2 n_1 n_2}{M \sqrt{3 M k T}} Q e^{-3Q^2}. \quad (3,18)$$

Мы видим, что скорость протекания термоядерных реакций определяется в основном функцией вида $e^{-\left(\frac{\epsilon_1}{kT}\right)^{\frac{1}{3}}}$, где ϵ_1 — постоянная для данной системы величина.

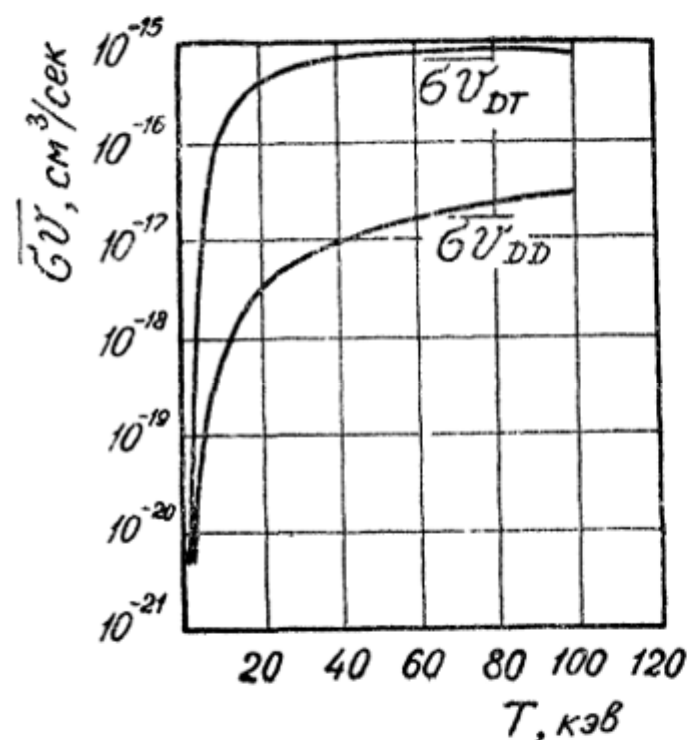


Рис. 3,3. $\bar{\sigma v}_{DD}$ и $\bar{\sigma v}_{DT}$ — параметры, характеризующие скорость протекания реакций для максвелловского распределения частиц.

Приведенный нами анализ указывает на то, что благодаря чрезвычайно сильной зависимости прозрачности потенциального барьера от относительной скорости частиц термоядерные реакции происходят только между частицами, лежащими в далёкой части «хвоста» максвелловского распределения. Поэтому, при не очень высоких температурах доля частиц, принимающих участие в реакции, очень невелика. Как указывалось выше, реакции осуществляются в основном при столкновении ядер с энергиями вблизи величины, определяемой условием $y = Q^2$, то есть

$$\frac{E}{kT} = \left(\frac{V \sqrt{2} M Z_1 Z_2 e^2}{8 \epsilon_0 \hbar \sqrt{kT}} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (3,19)$$

Для дейтронов $Z_1 = Z_2 = 1$ и $M = \frac{m_D}{2}$, следовательно

$$E = \left(\frac{e^2}{8 \epsilon_0 \hbar} \right)^{\frac{2}{3}} m_D^{\frac{1}{3}} (kT)^{\frac{2}{3}} \approx 3,5 \cdot 10^{-5} (kT)^{\frac{2}{3}}.$$

Переходя от джоулей к килоэлектронвольтам, получим следующее приближенное соотношение

$$E_{\text{кэВ}} \approx 6,5 (T_{\text{кэВ}})^{\frac{2}{3}}. \quad (3,20)$$

Здесь E — энергия относительного движения, то есть энергия дейтрона, отсчитываемая в системе, где центр масс покоится. Если одна из частиц до столкновения была неподвижной, то энергия налетающей частицы будет $\omega = 2E$, таким образом, энергия ω для которой частота соударений, приводящих к ядерным реакциям, максимальна, связана с температурой соотношением

$$\omega_{\text{кэв}} \approx 13 (T_{\text{кэв}})^{\frac{2}{3}}. \quad (3,21)$$

В табл. 3,1 приведены значения ω для дейтериевой плазмы при различных значениях T .

Таблица 3,1

T кэв . . .	10	20	30	40	50	60
ω кэв . . .	60	95	130	150	180	200

Зная частоту ядерных реакций и энергию Q , освобождающуюся в каждой реакции, легко подсчитать величину мощности от единицы объема плазмы:

$$P = \nu_{12} Q = n_1 n_2 \sigma v Q. \quad (3,22)$$

В качестве примера рассмотрим дейтериевую плазму при температуре 100 кэв. Из рис. 3,3 при 100 кэв находим $\sigma v = 3 \cdot 10^{-17} \text{ см}^3/\text{сек}$, средняя энергия, освобождаемая в DD реакциях (3,2 и 3,3) равна $1/2 (3,25 + 4) = 3,6 \text{ Мэв}$, следовательно,

$$P_{DD} = \frac{1}{2} n_D^2 (\sigma v) Q = 9 \cdot 10^{-30} n_D^2 \frac{\text{ватт}}{\text{см}^3},$$

где n_D — число частиц в 1 см^3 плазмы.

На рис. 3,4, взятом из статьи Р. Поста [3], представлена зависимость P_{DD} от плотности плазмы. Там же дана аналогичная зависимость для плотности энергии от реакции DT в 50% смеси D и T при температуре 100 кэв. Горизонтальная прямая при 100 ватт/см³ представляет типичную величину выхода энергии в обычном урановом реакторе. Мы видим, что в термоядерном реакторе при $T = 100 \text{ кэв}$ энергия того же порядка будет получаться при плотности дейтерия $10^{14} - 10^{15}$ частиц в кубическом

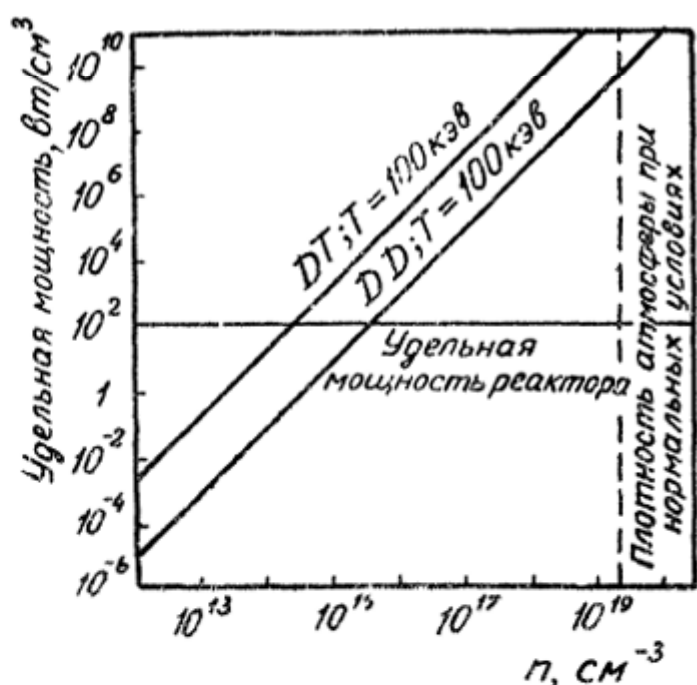


Рис. 3,4. Зависимость плотности энергии, выделяющейся в 1 сек, от плотности дейтронов.

сантиметре, что при 0°C соответствует давлению порядка 10^{-1} — 10^{-2} мм ртутного столба (при атмосферном давлении 0°C в 1 см^3 газа содержится $2,69 \cdot 10^{19}$ молекул, при 1 мм ртутного столба — $3,54 \cdot 10^{16}$), а при $T = 100\text{ кэВ}$ — десяткам атмосфер. Как видно из рис. 3,4, при плотности 10^{-12} см^{-3} , типичной для плазмы в газовых разрядах, выход энергии при $T = 100\text{ кэВ}$ становится ничтожным.

§ 3.2. Излучение плазмы

Здесь будут рассмотрены процессы тормозного и магнитотормозного излучения, являющиеся главной причиной потерь энергии полностью ионизованной плазмы, свободной от примесей. Явления, связанные с присутствием в плазме нейтральных частиц и примесей, будут описаны в § 3.4.

Если объем, занимаемый плазмой, так велик, что все фотоны, излучаемые нагретым газом, поглощаются внутри него, то поверхностное излучение плазмы должно соответствовать излучению абсолютно черного тела, определяемого формулой Стефана—Больцмана:

$$I = \sigma T^4, \quad (3,23)$$

где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}\text{ дж м}^{-2}\text{ сек}^{-1}\text{ град}^{-4}$. Если температура плазмы $T = 10\text{ кэВ} = 1,16 \cdot 10^8\text{ К}$, то излучение, согласно формуле (3,25), достигает совершенно неприемлемой величины $I = 10^{21}\text{ ватт/см}^2$. Достаточно сказать, что соответствующее радиационное давление равно $p = \frac{\sigma T^4}{c} = 10^{11}\text{ атм.}$

Однако при разумно выбранных размерах и плотности плазма оказывается прозрачной для большей части излучения. Излучение выходит почти не поглощаясь плазмой, так что равновесие между веществом и излучением не устанавливается и формула (3,23) оказывается неприменимой. Это обстоятельство весьма усложняет вопрос об интенсивности и составе излучения. Решая его, мы должны оценивать значение всех возможных видов излучения. В энергетическом балансе плазмы должны быть учтены тормозное, рекомбинационное, линейчатое и магнитное излучения.

Излучение электронов, испытывающих торможение в кулоновском поле атомных ядер, представляет главный радиационный процесс в горячей плазме ($T \sim 10^7\text{ }^\circ\text{К}$). Аналогичный процесс при столкновениях электрона с электроном проявляется в релятивистской области энергий и становится сравнимым с тормозными потерями при столкновениях электронов с тяжелыми частицами лишь при температурах порядка 100 кэВ .

Из электродинамики известно, что электрон, движущийся

с ускорением a (ускорение может быть положительным и отрицательным), излучает энергию

$$E = \frac{e^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \text{ ватт.} \quad (3,24)$$

На заряд e , движущийся в поле иона $+Ze$, действует сила

$$F = ma = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (3,25)$$

откуда

$$E = \frac{2}{3} \frac{Z^2 e^2}{(4\pi\epsilon_0)^3 c^3 m^2 r^4}. \quad (3,26)$$

Среднее время сильного ускорения или замедления равно по порядку величины $t \approx \frac{2r_0}{v}$, где r_0 — прицельный параметр; следовательно, полная энергия, излученная электроном, будет равна

$$E_r = \frac{4Z^2 e^6}{3 (4\pi\epsilon_0)^3 c^3 m^2 r_0^3 v}. \quad (3,27)$$

Если в единице объёма находится $n_+ = n_- = n$ зарядов, то умножая E_r на $vn^2 \cdot 2\pi r_0 dr_0$, мы найдем полную потерю энергии в единице объёма при параметре r_0 в интервале $(r_0, r_0 + dr_0)$. Интегрируя по всем r_0 от некоторого $r_{0 \min}$ до ∞ , получим

$$P_r = \frac{8\pi Z^2 e^6 n^2}{3 (4\pi\epsilon_0)^3 c^3 m^2 v r_{0 \min}} \int_{r_{0 \min}}^{\infty} \frac{dr_0}{r_0^2} = \frac{8\pi Z^2 e^6 n^2}{3 (4\pi\epsilon_0)^3 c^3 m^2 r_{0 \min}}. \quad (3,28)$$

Излучение является процессом квантовомеханическим и не может быть описано с помощью одной электродинамики. Строгая квантовомеханическая трактовка излучения электрона при его торможении дана А. Зоммерфельдом и В. Гайтлером. Однако, несколько отступая от академической строгости, мы можем найти $r_{0 \min}$ из соотношения неопределенности Гейзенберга:

$$\Delta q \Delta p \approx h.$$

Полагая

$$r_{0 \min} \approx \frac{\hbar}{mv} = \frac{\hbar}{(3kT_e m)^{\frac{1}{2}}},$$

получим

$$P_r = \frac{8\pi e^6}{3^{\frac{1}{2}} (4\pi\epsilon_0)^3 c^3 \hbar m^{\frac{1}{2}}} Z^2 n^2 (kT_e)^{\frac{1}{2}}. \quad (3,29)$$

Результат строгого расчета отличается от полученной формулы постоянным множителем порядка единицы.

Для дейтериевой плазмы

$$P_r = 5,3 \cdot 10^{-31} n^2 T_e^{\frac{1}{2}} \frac{\text{ватт}}{\text{см}^3} \quad (3,30)$$

и для смеси дейтерия с тритием

$$P_r = 2,1 \cdot 10^{-30} n_D n_T T_e^{\frac{1}{2}} \frac{\text{ватт}}{\text{см}^3}. \quad (3,31)$$

Здесь n — число частиц в 1 см^3 и T_e — температура, выраженная в килоэлектронвольтах. Потери за счет тормозного излучения быстро растут с увеличением атомного номера (как Z^2), что указывает на особую опасность тяжелых примесей в плазме. Источником примесей является поверхность стенок камеры, заключающей плазму. На поверхности стенок обычно оклюдированы большие количества газов, способных при нагревании и при бомбардировке стенок частицами плазмы выходить внутрь камеры и загрязнять плазму.

В плазме, удерживаемой магнитным полем, неизбежны потери за счет магнито-тормозного излучения. Потери электрона в магнитном поле H в нерелятивистском случае ($\beta = \frac{v}{c} \ll 1$) легко вычислить с помощью формулы (3,24), в которой ускорение a следует положить равным $\frac{e}{m} B v_{\perp}$. Тогда мы получим

$$E = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \omega_H^2 v_{\perp}^2, \quad (3,32)$$

где

$$\omega_H = \frac{e}{m} B \text{ — циклотронная частота.}$$

В релятивистском случае

$$E = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\omega_H^2 v_{\perp}^2}{1 - \beta^2}, \quad (3,33)$$

где $\beta = \frac{v}{c}$ и v — полная скорость электрона.

Спектр излучения линейчатый. Он состоит из основной частоты ω_H и ее гармоник. Если энергия электрона достаточно мала по сравнению с энергией покоя mc^2 , главная часть излучения приходится на основную частоту. С ростом энергии доля высших гармоник возрастает. Если предположить, что вся излучаемая энергия уходит из плазмы и что $kT_e \ll mc^2$, то потери энергии из единицы объема плазмы в 1 секунду составят

$$P_H = \frac{e^2 n \omega_H^2}{3\pi\epsilon_0} \frac{kT_e}{mc^2}. \quad (3,34)$$

Сравнивая эту величину с энергией, освобождающейся при реакциях термоядерного синтеза, можно убедиться, что в случае

реакции DT существует довольно широкий интервал температур, для которых $P_H < P_{DT}$, в то время как для реакций DD P_H всегда превосходит P_{DD} . В действительности формула (3,34) дает завышенные значения потерь за счет магнитного излучения, так как она не учитывает поглощения радиации самой плазмой. Как показывают работы Б. А. Трубникова [4, 5] в плотной плазме большая часть магнитного излучения, в особенности относящаяся к низкочастотной области спектра (основная частота ω_H и ее первые гармоники), поглощается плазмой, и лишь высокочастотная составляющая излучения выходит без существенного ослабления.

Дополнительным благоприятным фактором, уменьшающим потери на магнитное излучение, может служить отражение излучения стенками камеры. Коэффициент отражения типичных для магнитного излучения частот, лежащих обычно в далекой инфракрасной области и в области микрорадиоволн, может быть весьма высоким.

Укажем, наконец, на возможность удержания плазмы в пространстве без магнитного поля или с ослабленным магнитным полем, окруженном «магнитными стенками» (различные варианты так называемой остроконечной геометрии). В подобных системах магнитное излучение представляет собой лишь незначительный поверхностный эффект.

§ 3.3. Об условиях положительного энергетического выхода

В идеальных условиях, когда примеси в плазме отсутствуют, потери за счет магнитного излучения незначительны и температура плазмы достаточно высока, главным механизмом потерь является тормозное излучение. Согласно (3,29), потери на тормозное излучение растут как $\sqrt{T}$. В то же время энергия, освобождаемая в термоядерных реакциях, растет с температурой экспоненциально. При малых температурах плазмы радиационные потери преобладают, однако начиная с некоторой крити-

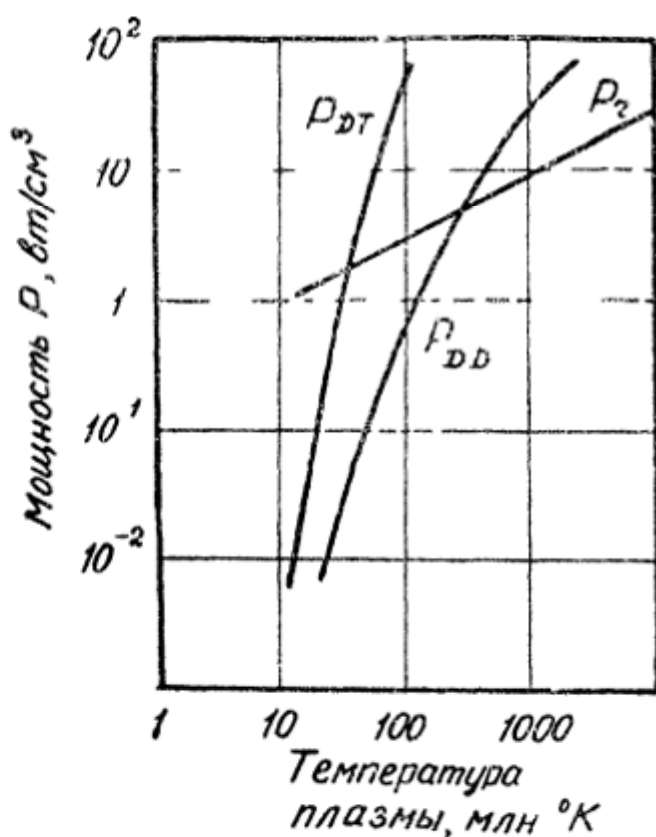


Рис. 3.5. Зависимость выделяемой и излучаемой мощности от температуры плазмы. Величины P_{DD} и P_{DT} учитывают лишь энергию, приходящуюся на заряженные продукты реакций. P_T представляет тормозное излучение. Графики построены для плотности плазмы около $10^{15} \frac{1}{\text{см}^3}$.

ческой температуры начинает преобладать поступление энергии.

На рис. 3,5 представлены кривые роста с температурой поступления энергии от реакций DT и DD (в виде энергии заряженных частиц) и кривые потерь на тормозное излучение. Точки пересечения кривых дают критические температуры, начиная с которых возможен положительный выход энергии. Для DD реакций критическая температура равна 36 кэВ ($4,1 \cdot 10^8$ К), а для DT реакций — 4 кэВ ($4,6 \cdot 10^7$ К). Этот результат не зависит от плотности плазмы, так как и потери и поступление энергии пропорциональны квадрату плотности плазмы. Здесь были учтены только тормозные потери, да и то весьма приближенно. Так, например, не приняты в расчет тормозные потери электронов на гелии, являющемся продуктом термоядерных реакций, не учтено также излучение при столкновениях между электронами. С другой стороны, не учтена вполне реальная возможность использования тормозного излучения, которое при интересующих нас температурах будет представлено главным образом мягкими рентгеновскими и ультрафиолетовыми лучами. Поэтому ясно, что полученная выше критическая температура может рассматриваться лишь как очень грубая характеристика возможных условий в термоядерном реакторе с положительным энергетическим выходом.

Очевидно понятие «критической температуры» было бы полезно в том случае, если бы энергия, выделяемая при реакции, могла идти на поддержание высокой температуры плазмы, то есть если бы продукты реакции большую часть своей энергии теряли внутри нагретого газа. Сделать это, однако, чрезвычайно трудно, так как пробег заряженных продуктов реакции в газе при 10^8 К и $p = 10^{-4}$ атм ($n = 3 \cdot 10^{17}$ частиц/см³) порядка 1 км. Кажется более вероятным, что в будущих термоядерных реакторах продукты реакции будут отдавать свою энергию стенкам реактора и получающаяся тепловая энергия с некоторым коэффициентом полезного действия будет вновь подводиться к нагретой плазме.

Рассмотрим следующий циклический процесс:

- а) газ мгновенно нагревается до температуры $T^\circ\text{К}$,
- б) температура газа выдерживается постоянной в течение t сек,
- в) газ остывает, и цикл повторяется.

На нагрев газа должна быть израсходована энергия $3nkT$ (учитывается теплоемкость электронного газа). В течение времени t нагретый газ будет излучать. Энергия излучения равна $P_r t$, причем P_r определяется главным образом выражениями (3,30) и (3,31). Энергия $q = 3nkT + P_r t$ должна быть доставлена плазме, чтобы в ней протекала термоядерная реакция. Затраченная таким образом энергия вместе с энергией термоядерной реакции $Q = Pt$ возвращается с некоторым коэффициентом полезного действия η .

Очевидно, для того чтобы последующие циклы были возможны, должно выполняться неравенство

$$\eta(Q + q) > q,$$

то есть энергия, необходимая для поддержания процесса, не должна превышать энергию, отдаваемую плазмой в каждом цикле. Обозначая

$$R = \frac{Q}{q} = \frac{P t}{P_r t + 3 n \kappa T} = \frac{\left(\frac{P}{3 n^2 \kappa T} \right)}{\left(\frac{P_r}{3 n^2 \kappa T} \right) + \frac{1}{n t}}, \quad (3,35)$$

перепишем предыдущее неравенство в виде

$$\eta(R + 1) > 1. \quad (3,36)$$

В выражении для R величины P и P_r , согласно (3,22), (3,30) и (3,31), пропорциональны n^2 , следовательно, числитель дроби в (3,35), так же как и первый член в знаменателе, от n не зависит. Таким образом, R является функцией величин T и nt : $R = f[T, (nt)]$.

Пользуясь формулами (3,22), (3,30) и (3,31), нетрудно вычислить R как функцию T для различных значений параметра (nt) . На рис. 3,6 и 3,7, взятых из статьи Д. Лоусона [6], приведены результаты вычислений. Согласно (3,36), при $\eta = 30\%$ (едва ли к. п. д. можно сделать более высоким) должно выполняться неравенство $R > 2$. Из графика для реакции DD

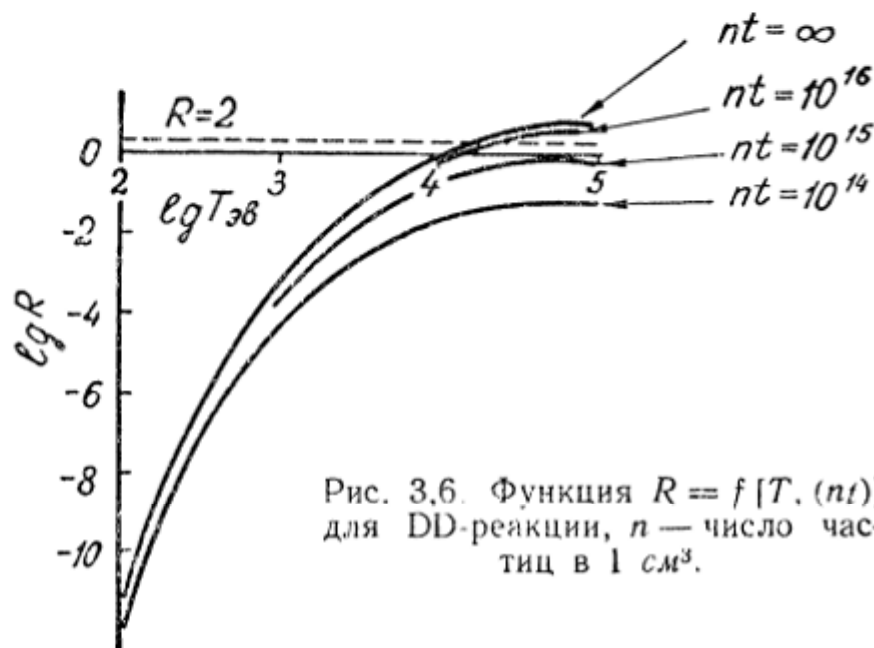


Рис. 3,6. Функция $R = f[T, (nt)]$ для DD-реакции, n — число частиц в 1 см^3 .

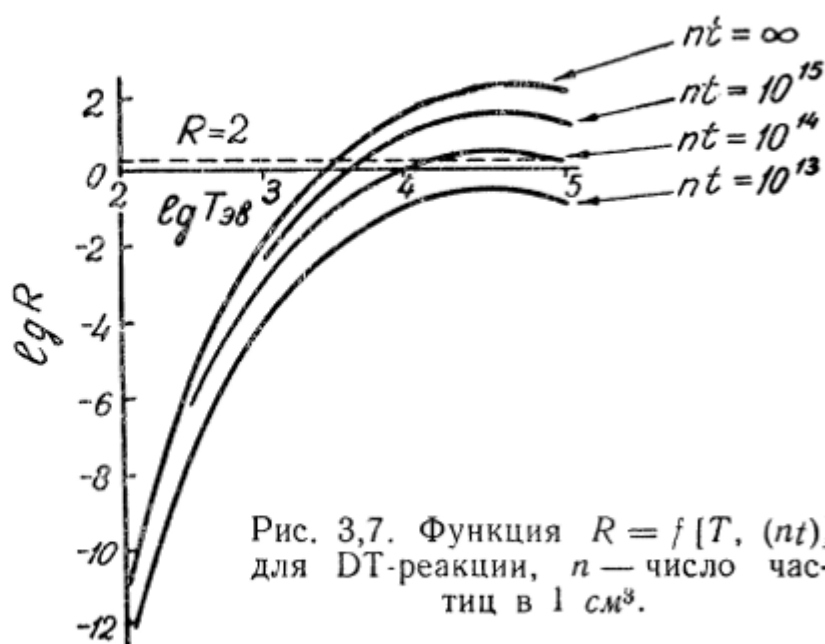


Рис. 3,7. Функция $R = f[T, (nt)]$ для DT-реакции, n — число частиц в 1 см^3 .

полняться неравенство $R > 2$. Из графика для реакции DD (рис. 3,6) видно, что при $nt = 10^{16} \frac{\text{сек}}{\text{см}^3}$ величина R становится больше двух при $T = 1,5 \cdot 10^8 \text{ }^\circ\text{K}$, а для DT при $nt = 10^{15}$ — при $T \approx 7 \cdot 10^7 \text{ }^\circ\text{K}$. Если при этом $n = 10^{15} \text{ см}^{-3}$, то для DD ре-

акции минимальная длительность импульса $t = 10$ сек, а для DT реакции $t = 1$ сек.

Условия $nt > 10^{16} \frac{\text{сек}}{\text{см}^3}$ для DD реакции и $nt \geq 10^{14} - 10^{15} \frac{\text{сек}}{\text{см}^3}$ для DT реакции указывают на невозможность получения термоядерной энергии с помощью импульсных методов с длительностями импульса порядка микросекунды (нагрев плазмы с помощью искры, волны сжатия и т. д.). С другой стороны, при $t \approx 1$ сек должно быть $n > 10^{16} \text{ см}^{-3}$, что является технически осуществимым.

§ 3.4. Роль нейтральных частиц и примесей

Нейтральные частицы и тяжелые примеси в водородной и дейтериевой плазме создают дополнительные потери энергии. Нейтральные частицы всегда присутствуют в плазме. Запас их по-

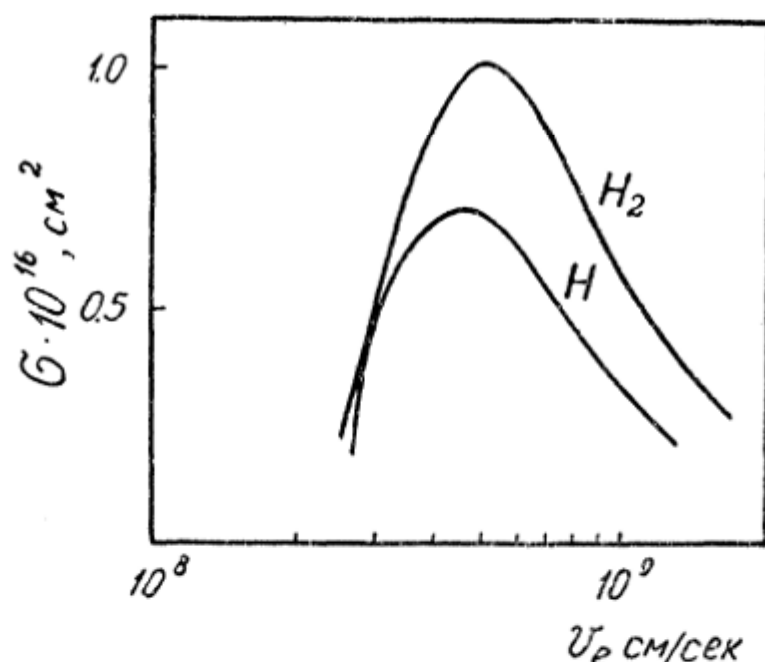


Рис. 3.8. Эффективные сечения ионизации атомного и молекулярного водорода электронным ударом.

полняется за счет остаточного газа и за счет притока их со стенок камеры, заключающей плазму. В горячей плазме нейтральные атомы и молекулы ионизируются электронными и ионными ударами. При низких температурах основную роль играют электронные удары. Эффективные сечения ионизации электронными ударами атомов и молекул водорода и некоторых других элементов приведены на рис. 3.8 и 3.9, взятых из книги Арцимовича [7].

В области высоких температур порядка 10 кэВ основным механизмом ионизации является соударение нейтральной частицы с ио-

ном. Экспериментальные данные об эффективном сечении ионизации молекулярного и атомного водорода протонами приведены на рис. 3,10.

Знание сечений ионизации электронным и ионным ударом (σ_e и σ_i) в зависимости от скорости позволяет находить время

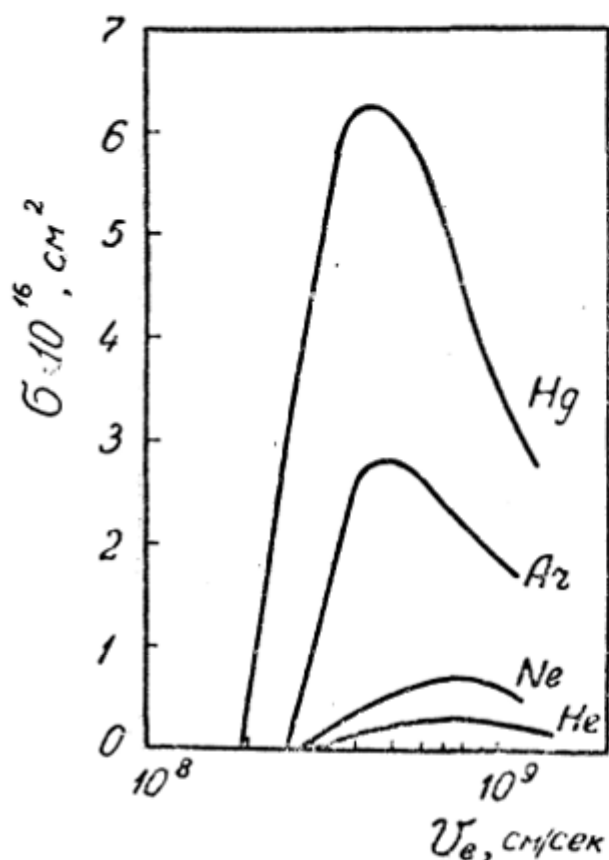


Рис. 3,9. Эффективные сечения ионизации электронным ударом для некоторых элементов.

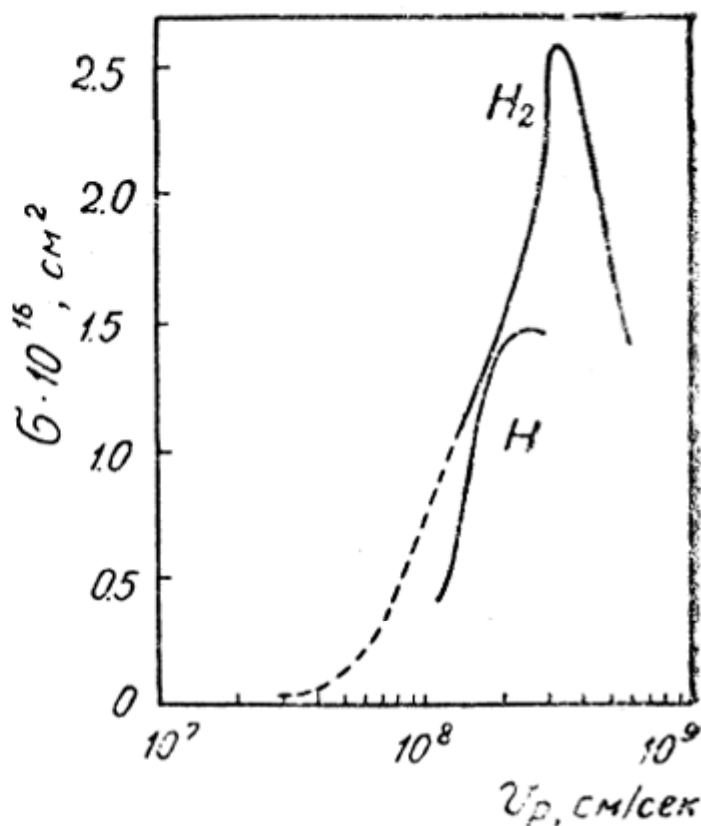


Рис. 3,10. Эффективные сечения ионизации молекулярного и атомного водорода протонами.

жизни нейтральной частицы в плазме с данной плотностью и температурой. Эта величина равна

$$\tau_{ion} = \frac{1}{n (\overline{v_e \sigma_e} + \overline{v_i \sigma_i})}. \quad (3,37)$$

Здесь n — плотность плазмы, v_e и v_i — скорости электронов и ионов. Значения $\overline{v_e \sigma_e}$ и $\overline{v_i \sigma_i}$ усредняются по максвелловскому распределению для данной температуры. Для атома водорода в водородной плазме с плотностью $n = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ зависимость времени ионизации τ_{ion} от температуры плазмы даётся графиком на рис. 3,11. Глубина проникновения в плазму нейтрального атома падающего на поверхность плазмы со скоростью v_0 , по порядку величины равна $v_0 \tau_{ion}$.

Если глубина проникновения нейтрального атома не мала по сравнению с размерами плазмы, вступает в силу новый процесс —

перезарядка. Этот процесс состоит в том, что ион плазмы, встретившийся с нейтральной частицей, передает ей свой заряд, а сам становится нейтральной частицей. Нейтральные частицы с малыми (тепло-

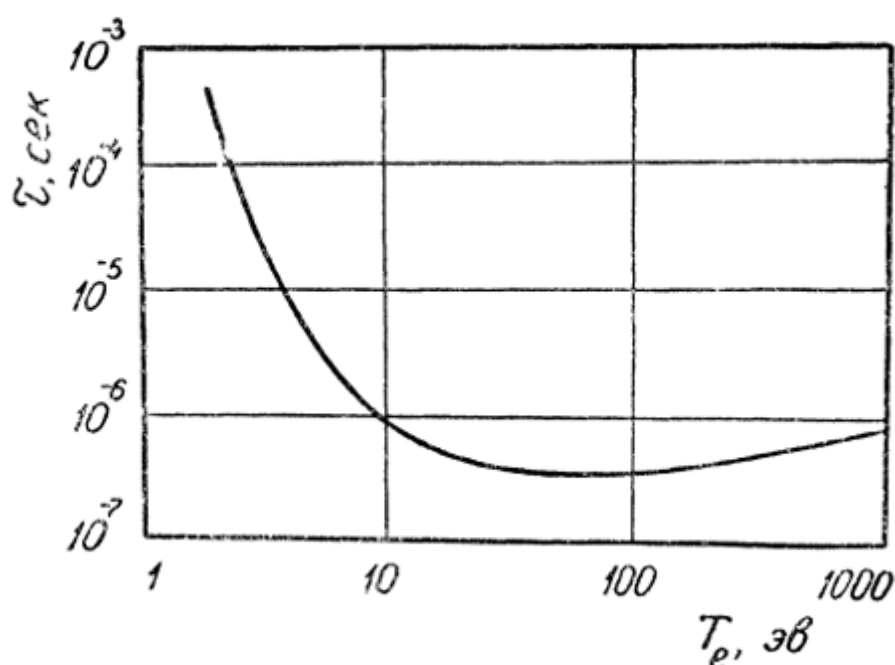


Рис. 3,11 Время ионизации для атома водорода в водородной плазме.

выми) скоростями попадают в плазму со стенок камеры, на поверхности которых могут быть оклюдированы очень большие количества

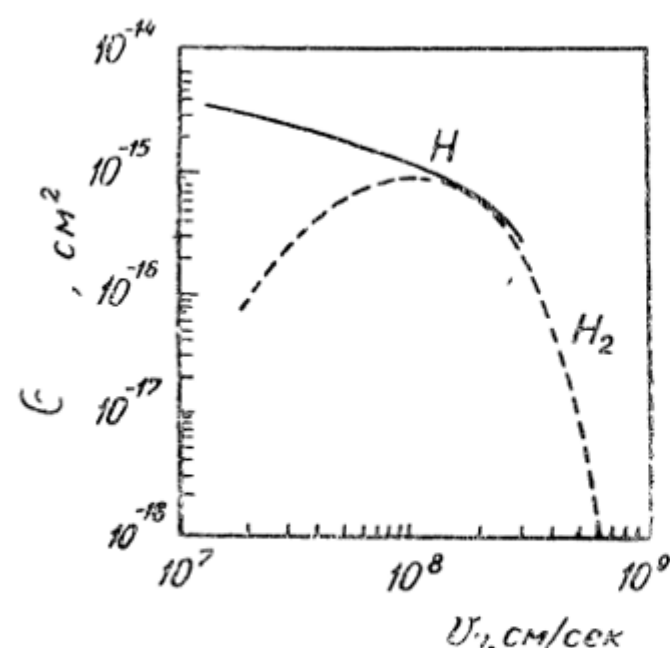


Рис. 3,12 Эффективные сечения перезарядки протонов в атомном и молекулярном водороде.

различных газов. Перезарядка ионов на таких частицах приводит к охлаждению плазмы, так как быстрый ион из горячей плазмы после перезарядки уходит на стенки в виде нейтральной частицы, унося энергию $\frac{3}{2} kT$. Более того, нейтральная частица, обладая значительной энергией, выбивает с поверхности стенки новые медленные частицы, которые снова загрязняют плазму. Таким образом, процесс сам себя поддерживает. При некоторых условиях он является основным механизмом охлаждения плазмы.

На рис. 3,12 и 3,13 приведены эффективные сечения перезарядки протонов в атомном и молекулярном водороде и на атомах некоторых других элементов. Как видно из рис. 3,12, для процесса $H^+ + H \rightarrow H + H^+$ сечение монотонно растет при уменьшении скорости. Это типично для так называемой резонансной пере-

зарядки, когда обмен зарядом происходит между атомами одного и того же элемента.

При сравнительно низких температурах большую роль в охлаждении плазмы играют рекомбинационное и в особенности

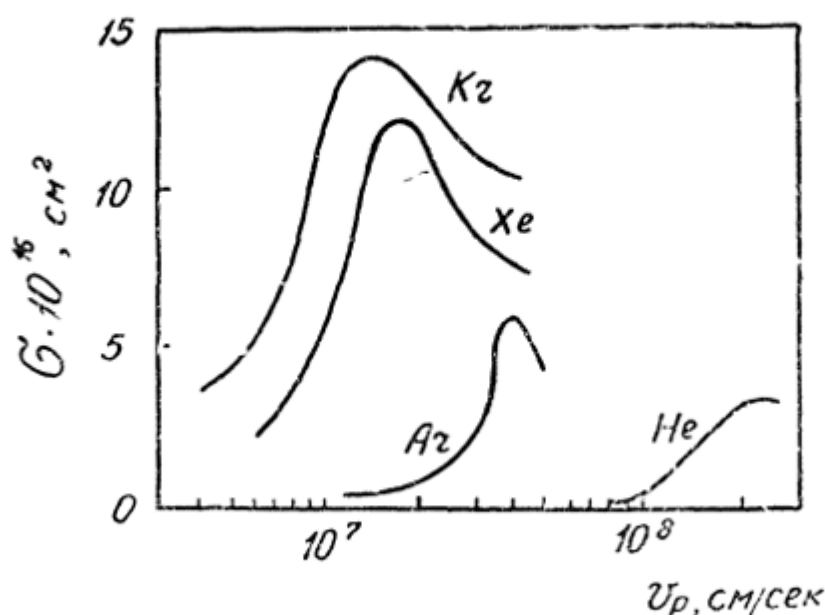


Рис. 3,13. Эффективные сечения перезарядки протонов на атомах различных элементов.

линейчатое излучение. Последнее возникает в результате того, что нейтральные и частично ионизованные атомы, присутствующие в плазме, испытывают термическое возбуждение, а затем излучают на собственных частотах.

Потери на линейчатое и рекомбинационное излучение очень быстро растут с увеличением номера элемента, вследствие чего присутствие в плазме тяжелых примесей является особенно опасным. Следует заметить, что тяжелые атомы плохо поддаются полной ионизации и даже при «термоядерных» температурах концентрация частично ионизованных атомов оказывается значительной. Вместе с тем остаются значительными потери вследствие линейчатого излучения.

Это иллюстрируется рис. 3,14, на котором приведены зависимости относительного содержания ионов с одним или большим числом электронов от температуры плазмы.

Присутствие примесей в водородной или дейтериевой плазме

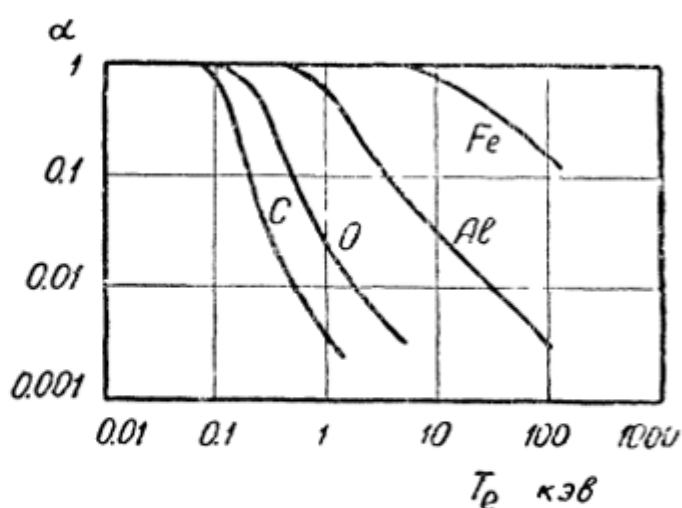


Рис. 3,14 Зависимость относительного содержания ионов (атомов) с одним или большим числом электронов от электронной температуры T_e в кэВ.

сильно затрудняет нагрев плазмы до «термоядерных» температур. Поэтому вопросы получения сверхвысокого вакуума, выбора материала стенок реактора, защиты стенок от излучения и бомбардировки частицами приобретают особое значение. В настоящее время в термоядерных устройствах до наполнения их плазмой считается обязательным разрежение порядка 10^{-8} — 10^{-9} мм рт.ст. Стенки камеры обычно подвергаются длительному прогреву до температуры 400 — 450° при непрерывной откачке (тепловая тренировка). Эти меры уменьшают потери и таким путем существенно влияют на характер процессов, протекающих в плазме [8,9].

ГЛАВА 4

СТОЛКНОВЕНИЯ И РЕЛАКСАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ

Важнейшие особенности ионизованных газов связаны с большим радиусом действия кулоновских сил. Взаимодействие между заряженными частицами, вообще говоря, не имеет характера парных соударений, в связи с чем методы газовой кинетики в применении к плазме оказываются далеко не столь простыми и эффективными, как в теории обычных газов.

Чтобы достаточно просто описать ту или иную сторону явления в плазме, очень часто приходится прибегать к различным моделям. Во многих случаях плазма ведет себя как проводящая жидкость, в то время как в иных случаях более удобно рассматривать ее как газ.

Выбор модели в конечном счете зависит от того, какого типа взаимодействия между частицами плазмы в данном случае существенны: «близкие» взаимодействия, подобные парным соударениям, или «далекие», коллективные взаимодействия, для описания которых вводится понятие самосогласованного поля. Чтобы уточнить смысл выражений «близкие» и «далекие» взаимодействия, необходимо рассмотреть поле заряда, расположенного в плазме.

Под действием электростатических сил вблизи каждого заряда в плазме создается избыточная концентрация зарядов противоположного знака, которая в некоторой степени экранирует поле данного заряда. Степень экранировки зависит от температуры: чем интенсивнее тепловое движение частиц, тем слабее эффект экранировки. В результате экранировки поля в плазме ослабевают с расстоянием быстрее, чем в вакууме. Эффект характеризуется расстоянием, на котором поле пробного заряда в плазме ослабевает в e раз. Это расстояние называется дебаевским ради-

усом экранирования. Дебаевский радиус естественным образом разделяет области значений температуры и плотности, для которых применимы различные модели плазмы. Взаимодействия, происходящие на расстояниях малых по сравнению с дебаевским радиусом, можно описывать как обычные столкновения. Они носят случайный характер, для них можно определить частоту соударений, длину свободного пробега. Взаимодействия на расстояниях больших по сравнению с дебаевским радиусом охватывают большое число частиц и приводят к «упорядоченным» движениям, подчиняющимся динамическим закономерностям.

В настоящей главе мы будем рассматривать близкие взаимодействия и процессы, в которых они играют главную роль: проводимость, диссипацию энергии поля, диффузию. Свойства плазмы связанные с «далекими» взаимодействиями, явятся предметом следующих глав.

§ 4.1. Дебаевский радиус

Допустим, что в плазму помещен электрический заряд q , и выясним закон убывания потенциала φ с увеличением расстояния r от заряда. Потенциал φ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dr} = -\frac{\rho(r)}{\epsilon_0}, \quad (4,1)$$

где $\rho = e(n_+ - n_-)$, а n_- и n_+ — концентрации электронов и ионов (мы считаем все ионы однозарядными и положительными). Будем предполагать, что концентрации n_+ и n_- в среднем по большому объему равны одной и той же величине n . Это предположение, означающее, что плазма в среднем нейтральна, обычно хорошо оправдывается, так как даже небольшое превышение концентрации частиц одного знака над концентрацией частиц другого знака в не слишком разреженной плазме привело бы к появлению очень больших полей.

Частицы плазмы находятся в тепловом движении. Допустим, что электроны и ионы обладают одной и той же температурой. При этих предположениях, согласно формуле Больцмана, мы можем написать для концентраций ионов и электронов следующие выражения:

$$n_+(\varphi) = ne^{-\frac{e\varphi}{kT}}, \quad (4,2)$$

$$n_-(\varphi) = ne^{\frac{e\varphi}{kT}}, \quad (4,3)$$

и, следовательно,

$$\rho = en \left(e^{-\frac{e\varphi}{kT}} - e^{\frac{e\varphi}{kT}} \right). \quad (4,4)$$

В случае слабого поля $\frac{e\varphi}{kT} \ll 1$, и последнее выражение приближенно представляется в виде

$$\rho = -\frac{2e^2 n \varphi}{kT}. \quad (4,5)$$

Таким образом, вблизи пробного заряда q потенциал должен удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{2e^2 n}{\epsilon_0 kT} \varphi = 0. \quad (4,6)$$

Решение, удовлетворяющее условию $\varphi \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, имеет вид

$$\varphi = A \frac{e^{-\frac{r}{D}}}{r}, \quad (4,7)$$

где A — постоянная величина и

$$D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 kT}{2e^2 n}}. \quad (4,8)$$

Величина D , имеющая размерность длины, называется дебаевским радиусом экранирования. Она характеризует глубину проникновения поля в плазму. Из (4,8) мы видим, что D убывает с увеличением плотности плазмы n и с уменьшением температуры. Тепловое движение заряженных частиц снижает эффективность поляризации, приводящей к экранировке плазмы.

Как было показано И. Ленгмюром, в плазме с плотностью n могут происходить колебания с частотой $\omega_0 = \left(\frac{e^2 n}{\epsilon_0 m} \right)^{\frac{1}{2}}$. В равновесии плазма квазинейтральна. Смещение электронной составляющей плазмы относительно ионной составляющей (ее можно считать неподвижной) вызывает появление электрических полей, стремящихся вернуть электроны в положение равновесия. Поле пропорционально величине смещения Δx

$$E = \frac{ne}{\epsilon_0} \Delta x,$$

следовательно, возвращающая сила $-F = -Ee$ также пропорциональна смещению. Электроны под действием этой силы совершают гармонические колебания с частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{F}{m \Delta x}} = \sqrt{\frac{e^2 n}{\epsilon_0 m}}.$$

Нетрудно убедиться, что по порядку величины дебаевский радиус равен расстоянию, которое проходит электрон со средней ско-

ростью $v_T = \sqrt{3 \frac{kT}{m}}$ в течение периода собственных колебаний плазмы.

Заметим, что формула (4,8) приложима к так называемому ленгмюровскому слою, образуемому при соприкосновении плазмы с твердым проводником (зондом). Если этот зонд изолирован, то электроны, обладающие большими скоростями, чем ионы, будут попадать на него в большем числе, и зонд зарядится отрицательно. Возникающее электрическое поле будет задерживать значительную часть электронного потока и в стационарном состоянии ток на зонд станет равным нулю. Вокруг зонда возникнет слой с недостатком электронов. Толщина слоя будет определяться величиной D .

§ 4.2. Столкновения между частицами плазмы

Эффективное сечение упругого рассеяния любой частицы с нейтральной молекулой равно πa^2 , где a есть радиус молекулы, которую мы представляем в виде шарика.

Вопрос о сечении упругого взаимодействия между двумя заряженными частицами более сложен. Решая его, можно исходить из следующих соображений. Допустим, что частица с зарядом e и массой m налетает на неподвижную частицу с таким же зарядом e . Определим расстояние наибольшего сближения частицы с рассеивающим центром, пользуясь условием равенства начальной кинетической энергии частицы $\frac{mv_0^2}{2}$ ее потенциальной энергии в поле рассеивающего центра

$$w_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0}. \quad (4,9)$$

Отсюда для сечения находим

$$\sigma = \pi r_0^2 = \frac{\pi e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 w_0^2} = \frac{e^4}{4\pi\epsilon_0^2 m^2 v_0^4}. \quad (4,10)$$

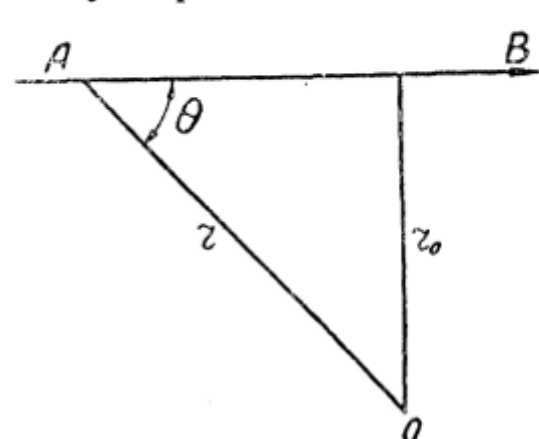
Величина (4,10) характеризует рассеяние лишь с достаточно малыми прицельными параметрами r_0 . В результате каждого такого столкновения происходит значительное изменение импульса частицы. В то же время, как будет показано, основную роль играют именно соударения с большими r_0 . Действительно, с увеличением r_0 каждый передаваемый импульс уменьшается, зато число таких слабых «толчков» очень быстро растет.

Найдем эффект слабых «толчков», то есть столкновений с большими r_0 . Каждое такое «столкновение» приводит к столь незначительному отклонению от прямолинейной траектории, что приближенный расчет можно производить без учета этого отклонения (рис. 4,1). Появляющаяся поперечная составляющая импульса

частицы при пролете мимо рассеивающего центра O может рассчитываться следующим образом:

$$\Delta p_{\perp} = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\perp} dt = \int_{-\infty}^{\infty} F_r \sin \theta dt,$$

где $F_r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. Пользуясь соотношением $r = \frac{r_0}{\sin \theta}$ и производя замену переменной



$$dt = \frac{dz}{v} = -\frac{r_0 d\theta}{v \sin^2 \theta},$$

мы получим

$$\Delta p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0 v} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 r_0 v}. \quad (4,11)$$

Рис. 4.1. Рассеяние зарядов в случае большого прицельного параметра r_0 . AB — траектория частицы, O — рассеивающий центр.

Найдем теперь среднее квадратичное изменение импульса $(\Delta p)^2$ заряда на 1 м пути в плазме с плотностью n . В цилиндрическом слое радиуса r_0 и толщиной dr_0 число рассеивающих центров будет

$$dn = 2\pi n r_0 dr_0,$$

следовательно,

$$d(\Delta p)^2 = \left(\frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 r_0 v} \right)^2 dn = \frac{e^4 n}{2\pi\epsilon_0^2 v^2} \frac{dr_0}{r_0}.$$

Интегрирование по всевозможным значениям параметра r_0 от $r_{\min}$ до $r_{\max}$ (к определению $r_{\min}$ и $r_{\max}$ мы возвратимся позднее) дает

$$(\Delta p)^2 = \frac{e^4 n}{2\pi\epsilon_0^2 v^2} \ln \Lambda, \quad (4,12)$$

где

$$\Lambda = \frac{r_{\max}}{r_{\min}}.$$

В кинетической теории газов пользуются понятием длины свободного пробега. Траектория частицы обычного газа представляется ломаной линией, прямолинейные участки которой соединяют места столкновений частицы с другими частицами газа. Средняя длина такого прямолинейного отрезка и есть длина свободного пробега. Характер движения частиц ионизованного газа существенно отличен. Заряженная частица испытывает множество слабых «толчков» со стороны других частиц и описывает плавную траекторию. Плавно изменяется и импульс частицы. Все же понятием длины свободного пробега можно воспользоваться и в этом слу-

чае, если определить его как расстояние, на котором импульс изменяется на величину порядка самого импульса $(\Delta p)^2 \approx p^2$. Из этого определения следует

$$\lambda = \frac{2\pi\epsilon_0^2 m^2 v^4}{e^4 n \ln \Lambda}. \quad (4,13)$$

Теперь можно ввести и эффективное сечение

$$\sigma = \frac{1}{\lambda n} = \frac{e^4 \ln \Lambda}{2\pi\epsilon_0^2 m^2 v^4}. \quad (4,14)$$

Остается определить величину $\ln \Lambda = \ln \frac{r_{\max}}{r_{\min}}$. Как было показано в начале этой главы, электрическое поле отдельной частицы проникает в плазму на расстояние порядка дебаевского радиуса D . Поэтому естественно положить $r_{\max} = D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 kT}{2e^2 n}}$, а под $r_{\min}$ разумеет расстояние наибольшего сближения, то есть положить $r_{\min} = r_0 = \frac{v^2}{4\pi\epsilon_0 \omega}$. Тогда

$$\Lambda = \left(\frac{\epsilon_0 kT}{2e^2 n} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{4\pi\epsilon_0 \omega}{e^2}.$$

В случае максвелловского распределения $\omega = \frac{3}{2} kT$

$$\Lambda = \frac{6\pi\epsilon_0}{e^3} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2n}} (kT)^{\frac{3}{2}}. \quad (4,15)$$

В табл. 4,1 приведены значения $\ln \Lambda$ для различных плотностей и температур. Как видно из этой таблицы, для плазмы с наиболее интересными для нас параметрами величина $\ln \Lambda$

Таблица 4,1

T кэВ	Плотность электронов в см^{-3}		
	10^{12}	10^{14}	10^{16}
0,1	15,5	13,2	10,9
1	19,0	16,6	14,4
10	22,4	20,1	17,8
100	25,8	23,6	21,2

близка к 20. Подставляя это значение в формулу (4,14), получим

$$\sigma = \frac{e^4}{8\pi\epsilon_0^2 \omega^2} \ln \Lambda = \frac{2,6 \cdot 10^{14}}{(\omega \text{ кэВ})^2} \text{ барн}. \quad (4,16)$$

Сравнивая полученную формулу с (4,10), мы видим, что учет столкновений с большими прицельными параметрами r_0 увеличивает σ в десятки раз. Таким образом мы убеждаемся, что для отклонения частицы гораздо более существенными оказываются слабые, но частые «толчки» со стороны удаленных зарядов, чем сильные, но редкие толчки со стороны частиц, мимо которых электрон проходит с малым прицельным параметром r_0 . В большинстве случаев достаточно учитывать столкновения с большими r_0 , что весьма упрощает вычисления, так как позволяет пользоваться результатами теории случайных блужданий. Как показали работы С. Чандрасекара и Л. Спигцера, методы теории случайных блужданий весьма плодотворны в применении к таким явлениям, как диффузия, электропроводность, теплопроводность, установление максвелловского распределения в плазме и т. д. Напомним одно полезное для нас соотношение этой теории.

Простейшим примером случайных блужданий могут служить перемещения точки вдоль некоторой прямой линии, совершаемые на равные отрезки Δx с равной вероятностью вперед и назад. После N таких шагов точка может оказаться в любом числе $m \leq N$ шагов от исходной точки. Среднее смещение равно нулю:

$$\bar{m} = 0.$$

Однако среднее квадратичное смещение отлично от нуля и пропорционально числу шагов:

$$\overline{m^2} = N, \quad (4,17)$$

или

$$\overline{x^2} = N (\Delta x)^2, \quad (4,18)$$

где $x = m \Delta x$.

Если шаги Δx не одинаковы и величины их случайны, в последнюю формулу войдет средняя квадратичная величина шага $\overline{(\Delta x)^2}$

$$\overline{x^2} = N \overline{(\Delta x)^2}. \quad (4,19)$$

Роль x может играть импульс, координата частицы плазмы, угол рассеяния θ и т. д.

Обратимся к вопросу о скорости обмена энергии между ионной и электронной компонентами плазмы. Здесь важное значение имеют два случая: 1) $\omega_e \gg \omega_i$ и 2) $\omega_e \ll \omega_i$. В первом случае ионы получают энергию от быстрых электронов, причем скорость увеличения энергии ионов ω_i будет в основном определяться частотой столкновений и средней энергией, передаваемой при соударении. Во втором случае ионы будут терять энергию, передавая ее электронам. В случае $\omega_e \gg \omega_i$ ион можно рассматривать как броуновскую частицу, бомбардируемую со всех сторон быстрыми электро-

нами. При столкновении быстрого электрона с «неподвижным» ионом первый теряет, а второй приобретает импульс (4,11)

$$\Delta p_i = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 r_0 v}, \quad (4,20)$$

где v — скорость электрона и Ze — заряд иона. Из общего числа хаотически движущихся электронов выделим те электроны, для которых параметры удара с данным ионом лежат в малом интервале $(r_0, r_0 + dr_0)$ и скорости близки к некоторой величине v . Выбранные таким образом электроны образуют цилиндрический слой радиуса r_0 . Число электронов, проходящих за время Δt через поперечное сечение слоя, мы обозначим

$$dN = 2\pi r_0 dr_0 v \Delta t dN_v, \quad (4,21)$$

причем для изотропного максвелловского распределения

$$dN_v = A e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv d\phi, \quad (4,22)$$

где $d\phi$ и dv — малые интервалы направлений и абсолютных значений скоростей, и A — множитель, определяемый из условия

$$\int dN_v = n. \quad (4,23)$$

Согласно формуле (4,19), результат действия dN электронов в среднем приводит к изменению импульса иона, определяемому выражением

$$d(\overline{\Delta p})^2 = (\overline{\Delta p_i})^2 dN. \quad (4,24)$$

Подставляя сюда приведенное выражение для dN и производя интегрирование по всем скоростям и параметрам удара, мы получим

$$(\overline{\Delta p})^2 = \frac{Z^2 e^4 n \ln \Lambda}{\pi \epsilon_0^2} \sqrt{\frac{m_e}{2\pi k T_e}} \Delta t. \quad (4,25)$$

Обозначим соответствующее приращение энергии иона

$$\Delta w_i = \frac{1}{2m_i} (\overline{\Delta p})^2.$$

Тогда полученный результат мы можем представить в виде

$$\frac{dw_i}{dt} = \frac{Z^2 e^4 n \ln \Lambda}{2\pi \epsilon_0^2} \sqrt{\frac{m_e}{2\pi m_e k T_e}} \frac{m_e}{m_i}. \quad (4,26)$$

Скорость «нагрева» ионов электронами падает с увеличением электронной температуры как $\frac{1}{\sqrt{T_e}}$.

Этот вывод указывает на малую эффективность различных методов нагрева, при которых энергия вначале передается электронам. К числу таких методов относится омический нагрев, имеющий место при протекании в плазме тока. Энергия тока

благодаря конечной проводимости плазмы переходит в энергию теплового движения электронов. С течением времени она будет передаваться ионам, однако скорость передачи убывает с ростом температуры плазмы и, как показывают расчеты, становится недопустимо малой уже при температуре порядка 1 миллиона градусов.

Приведенный простой метод рассмотрения нагрева ионов электронами неприменим к случаю $\omega_i > \omega_e$. В этом случае скорость передачи энергии от ионов к электронам определяется главным образом теми электронами, скорости которых сравнимы или меньше скоростей ионов. Столкновения с такими электронами приводят к появлению медленных ионов, на которых остальные ионы быстро «охлаждаются».

В американской литературе [10] приводится следующая формула, по-видимому, применимая к этому случаю:

$$\left(\frac{d\omega_i}{dt}\right)_{ei} = \frac{Z^2 e^4 n \ln \Lambda}{2\pi c_0^2 \sqrt{2\pi m_e k T_e}} \frac{m_e}{m_i} \left(1 - \frac{\omega_i}{\frac{3}{2} k T_e}\right) \text{ ватт.} \quad (4,27)$$

Если энергия ионов мала по сравнению с энергией электронов, эта формула совпадает с (4,26). В противоположном случае она дает

$$\frac{1}{\omega_i} \frac{d\omega_i}{dt} = -1,8 \cdot 10^{-12} \frac{n_e \left(\frac{Z^2}{A}\right)}{T_e^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\text{сек}}, \quad (4,28)$$

где A — массовое число, n_e — число электронов в 1 см^3 и T выражено в кэв.

Отсюда следует закон уменьшения энергии иона благодаря «динамическому трению» в электронном газе

$$\omega_i = \omega_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (4,29)$$

где

$$\tau = 5,5 \cdot 10^{11} \frac{T_e^{\frac{3}{2}}}{n_e} \left(\frac{A}{Z^2}\right) \text{ сек.} \quad (4,30)$$

К сожалению, приведенные результаты, так же как и многие другие важные выводы, касающиеся релаксационных процессов в плазме, до настоящего времени не подвергались серьезной экспериментальной проверке.

§ 4.3. Диффузия

Пригодность магнитного поля для изоляции плазмы определяется степенью его непроницаемости для частиц в поперечном направлении. Для отдельных частиц магнитное поле действительно непроницаемо, так как отдельные частицы могут двигаться лишь

по винтовым траекториям около силовых линий. Однако в плазме, благодаря взаимодействию, частицы могут переходить от одной силовой линии к другой, и таким путем «диффундировать» поперек магнитного поля. Различные типы взаимодействия приводят к разным видам ухода частиц. «Близкие» взаимодействия приводят к собственно «диффузии», «далекие» или коллективные взаимодействия — к различным неустойчивостям. Некоторые эффекты коллективного взаимодействия, вызывающие уход плазмы, мы рассмотрим в главах о волнах в плазме и о неустойчивости. Здесь же займемся взаимодействиями типа столкновений.

В то время, как в слабо ионизованном газе это — действительные столкновения зарядов с нейтральными молекулами, в случае полностью ионизованного газа столкновения понимаются в условном смысле. Если учитывать лишь взаимодействия с большими прицельными параметрами r_0 , то можно сказать, что кинетическая энергия заряженной частицы и направление ее движения изменяются достаточно медленно. Условно, однако, мы пользуемся понятием столкновения, полагая время между двумя столкновениями τ равным времени значительного изменения импульса частицы (времени релаксации). Введем среднее смещение $\Delta\xi$ в некотором направлении z , испытываемое частицей между двумя соударениями (то есть за время релаксации τ). Поскольку смещения случайны и независимы друг от друга, можно воспользоваться формулой (4,19) для определения среднего квадратичного смещения частицы в результате N столкновений

$$N(\Delta\xi)^2.$$

В 1 сек частица испытывает $\nu = \frac{1}{\tau}$ столкновений, следовательно, среднее квадратичное смещение частицы вдоль оси z в 1 сек будет равно $\nu(\Delta\xi)^2$.

Допустим теперь, что в направлении z имеется некоторый градиент плотности газа $\frac{dn}{dz}$ и, пользуясь простыми, хотя и не вполне строгими рассуждениями, вычислим поток частиц через единичную площадку, расположенную в плоскости $z = \text{const}$. Если бы плотность газа была постоянной, через площадку справа налево и слева направо в среднем проходило бы $n(\Delta\xi)\nu$ частиц в 1 сек, и результирующий поток был бы равен нулю. Однако слева и справа от площадки плотности не равны. Слева частицы поступают из слоя толщиной $\Delta\xi$, в котором плотность изменяется от $n(z) - \frac{dn}{dz}\Delta\xi$ до $n(z)$, в то время как справа плотность изменяется от $n(z)$ до $n(z) + \frac{dn}{dz}\Delta\xi$. В среднем можно считать, что потоки слева и справа равны выражениям

$$\nu\Delta\xi \left\{ n(z) - \frac{1}{2} \frac{dn}{dz} \Delta\xi \right\}$$

$$v\Delta\xi \left\{ n(z) + \frac{1}{2} \frac{dn}{dz} \Delta\xi \right\}.$$

Разность между ними дает плотность результирующего потока

$$\Phi = -v(\Delta\xi)^2 \frac{dn}{dz}. \quad (4,31)$$

Она пропорциональна градиенту плотности плазмы. Полученное выражение представляет собой уравнение для диффузионного потока, причем множитель

$$D = v(\Delta\xi)^2$$

есть коэффициент диффузии. Он равен среднему квадратичному смещению частицы за 1 секунду.

В магнитном поле каждое столкновение приводит к смещению в направлении перпендикулярном магнитному полю от нуля до диаметра ларморовской окружности.

Положим $\Delta\xi = k\rho$, где ρ радиус ларморовской орбиты и k — множитель порядка единицы. Тогда

$$\Delta\xi = \frac{kv_{\perp}}{\frac{e}{m}B} = \frac{kv_{\perp}}{\omega_H}$$

и

$$D_{\perp} = \frac{kv_{\perp}^2}{\omega_H^2 \tau}.$$

Если энергия $\frac{mv^2}{2}$ распределена равномерно между всеми тремя степенями свободы частицы, то $v_{\perp}^2 = \frac{2}{3}v^2$. Введем среднюю длину свободного пробега $\lambda = v\tau$ и выражение $D_0 = \frac{v\lambda}{3}$, представляющее коэффициент диффузии для нейтральных частиц. Тогда коэффициент диффузии в направлении перпендикулярном магнитному полю представится в виде

$$D_{\perp} = \frac{2kD_0}{\omega_H^2 \tau^2}.$$

Более строгий вывод даёт формулу

$$D_{\perp} = \frac{D_0}{1 + \omega_H^2 \tau^2}, \quad (4,32)$$

которая при $\omega_H^2 \tau^2 \gg 1$ переходит в предыдущую, если постоянный коэффициент k принять равным $1/2$.

Условие $\omega_H^2 \tau^2 \gg 1$ означает, что циклотронная частота значительно превосходит частоту столкновений электрона с частицами плазмы или, иными словами, что длина свободного пробега $\lambda = v\tau$

много больше ларморовского радиуса $\rho = \frac{v}{\omega_H}$. В интересующих нас случаях оно обычно выполняется.

В случае полностью ионизованной плазмы подстановка $\tau = \frac{1}{vn\sigma}$ и σ из (4,14) дает

$$D_{\perp} = \frac{e^2 n \ln \Lambda}{6\pi \epsilon_0^2 B^2 v}. \quad (4,33)$$

Формула (4,33) показывает, что коэффициент диффузии обратно пропорционален квадрату магнитного поля. При достижимых величинах H и интересующих нас значениях v и n диффузионный поток частиц перпендикулярно магнитному полю, согласно (4,31) и (4,33), может быть сделан очень малым. Однако (4,31) и (4,33) определяют поток частиц, обусловленный одними только тепловыми движениями и столкновениями частиц и не могут характеризовать скорость ухода частиц при наличии токов, полей, неоднородности температуры или значительных градиентов плотности. На практике нелегко избавиться от всех этих усложняющих обстоятельств и приблизиться к идеальным условиям. В общем случае определение ухода частиц поперек магнитного поля представляет сложную задачу [11, 12]. Решение её зависит от множества условий, определяющих состояние плазмы и в большинстве случаев не сводится к обычному уравнению диффузии. Заметим, что даже в рассмотренном нами простом случае процесс описывается нелинейным уравнением. Для нейтральных газов коэффициент диффузии представляет собой постоянную величину, не зависящую от плотности n . Поэтому уравнение диффузии

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -D \frac{\partial^2 n}{\partial z^2}.$$

является линейным. Коэффициент диффузии перпендикулярно магнитному полю в случае полностью ионизованного газа пропорционален, как мы видели, плотности n , и в этом случае дифференциальное уравнение для n оказывается нелинейным. Решение нелинейного уравнения диффузии для полностью ионизованного газа показывает, что характер расширения плазмы в направлении перпендикулярном магнитному полю существенно отличен от обычного диффузионного расширения. Расширение в магнитном поле не приводит к значительному размытию границ плазмы: плотность на границе расширяющейся полностью ионизованной плазмы довольно резко спадает от некоторого конечного значения до нуля.

Эксперименты по диффузионному расширению плазмы пока еще не дают ясной картины. Как правило, уход частиц перпендикулярно магнитному полю значительно превышает ожидаемую величину. Зависимость потока частиц от магнитного поля очень

часто не укладывается в формулу $D \sim \frac{1}{B^2}$, причем отклонения от этой формулы оказываются различными при различных условиях эксперимента. В некоторых частных случаях отклонения удается объяснить [13], однако в целом важнейший вопрос об уходе плазмы поперек магнитного поля остается нерешенным.

Заметим, что в недавно проведенных опытах [14] с полностью ионизованной цезиевой плазмой, в которой отсутствовали внешние электрические поля, коэффициент диффузии уменьшался с увеличением B как $\frac{1}{B^2}$, то есть в соответствии с формулой (4,33).

Во многих случаях диффузия электронов и ионов не может происходить независимо. Рассмотрим, например, плазменный стержень в отсутствие магнитного поля. Коэффициент диффузии пропорционален скорости

$$D_0 = \frac{1}{3} \lambda v, \quad (4,34)$$

поэтому электроны должны диффундировать гораздо быстрее ионов. Уход электронов из плазмы вызывает появление электрического поля E_r . Теперь для диффузионного потока ионов мы должны писать

$$n_i v_i = -D_{oi} \frac{dn_i}{dr} + \mu_i E_r n_i, \quad (4,35)$$

где μ_i — подвижность ионов, откуда

$$v_i = -\frac{D_{oi}}{n_i} \frac{dn_i}{dr} + \mu_i E_r. \quad (4,36)$$

Аналогично, для электронов

$$v_e = -\frac{D_{oe}}{n_e} \frac{dn_e}{dr} - \mu_e E_r. \quad (4,37)$$

В плотной плазме в силу квазинейтральности мы должны полагать $n_i = n_e = n$ и $v_i = v_e = v$.

Из приведенных равенств следует:

$$nv = -D_{амб} \frac{dn}{dr}, \quad (4,38)$$

где

$$D_{амб} = \frac{\mu_e D_{oi} + \mu_i D_{oe}}{\mu_i + \mu_e} \quad (4,39)$$

так называемый коэффициент амбиполярной диффузии. Пользуясь известным соотношением

$$\mu = \frac{eD_0}{\kappa T} \quad (4,40)$$

и полагая $T_i \approx T_e$, получим

$$D_{амб} = \frac{2D_{oi}D_{oe}}{D_{oi} + D_{oe}} \approx 2D_{oi}, \quad (4,41)$$

так как

$$D_{oe} \gg D_{oi}.$$

В достаточно сильном магнитном поле $D_{\perp} \approx \frac{D_0}{\omega_H^2 \tau^2}$ и выполняется неравенство $D_{i\perp} \gg D_{e\perp}$, поэтому амбиполярная диффузия, «равняясь» на более медленную компоненту, будет равна

$$D_{\perp амб} \approx 2D_{e\perp}, \quad (4,42)$$

если $T_e \approx T_i$.

В плазменном стержне амбиполярная диффузия будет обусловлена радиальной поляризацией. Если плазменный столб в продольном магнитном поле кончается положительным электродом, то возникающее электрическое поле E_r будет уничтожено в результате обмена зарядами вдоль магнитного поля. В этом случае диффузия будет определяться более быстрой компонентой, то есть D_i .

Мы исходили из выражения для коэффициента диффузии в частично ионизованном газе. В случае полной ионизации коэффициент диффузии дается формулой (4,33), и амбиполярная диффузия может возникнуть только если величины T_e и T_i сильно отличаются друг от друга.

§ 4,4. Проводимость плазмы без магнитного поля

Для отдельного электрона в переменном поле $E = E_0 e^{i\omega t}$ уравнение движения имеет вид

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E}_0 e^{i\omega t}. \quad (4,43)$$

Из этого следует соотношение

$$i\omega \mathbf{v} = \frac{e}{m} \mathbf{E}, \quad (4,44)$$

которое означает, что скорость электрона осциллирует с частотой ω и со сдвигом фазы по отношению к электрическому полю на 90° .

В вещественном выражении те же соотношения имеют вид

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos \omega t \quad (4,45)$$

$$\mathbf{v} = \frac{e}{m\omega} \mathbf{E}_0 \sin \omega t. \quad (4,46)$$

Работа, выполняемая полем в 1 сек, представляется периодической функцией времени

$$eE\mathbf{v} = \frac{e^2 E_0^2}{m} \sin \omega t \cos \omega t \quad (4,47)$$

и в среднем за период равна нулю: в течение части периода электрон ускоряется полем, отбирая энергию, зато в последующей части периода он тормозится и вся приобретенная энергия возвращается полю.

Если электрон находится в плазме, то благодаря взаимодействию с другими частицами, часть энергии, приобретенной электроном от поля, перейдет в тепло и не будет возвращена полю. Таким образом, энергия поля будет теряться. При упругом столкновении электрона с тяжелой частицей от одной частицы к другой может быть передана лишь ничтожная доля энергии порядка $\frac{m_e}{m_i}$. Однако из этого не следует малость диссипации энергии поля. Потери энергии связаны не столько с передачей её от электронов к тяжелым частицам, сколько с нарушением периодичности движения электронов в результате столкновений. Даже в случае упругих соударений с неподвижными центрами когда передача энергии совершенно отсутствует, энергия поля все же будет рассеиваться: она будет переходить в хаотическое движение электронов.

Результат «близких» взаимодействий, происходящих между частицами, лежащими в пределах дебаевского радиуса, в элементарной теории может быть представлен «силой трения» $m\nu\mathbf{v}$. Смысл этой величины ясен из определения ν или $\tau = \frac{1}{\nu}$. Согласно принятому нами определению, τ представляет время, в течение которого импульс частицы в результате столкновений в среднем изменяется на величину, равную первоначальному значению импульса. Поэтому $m\nu\mathbf{v} = \frac{m\mathbf{v}}{\tau}$ представляет собой обусловленное соударениями среднее изменение импульса частицы за 1 секунду.

Уравнение движения электрона в плазме будет

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + m\nu\mathbf{v} = eE_0 e^{i\omega t}. \quad (4,48)$$

Из него находим

$$\mathbf{v} = \frac{e}{m} \frac{E_0}{i\omega + \nu} e^{i\omega t}. \quad (4,49)$$

То же в вещественной записи:

$$E = E_0 \cos \omega t \quad (4,50)$$

$$\mathbf{v} = \frac{e}{m} \frac{E_0}{\omega^2 + \nu^2} (\omega \sin \omega t + \nu \cos \omega t). \quad (4,51)$$

Работа поля за 1 сек равна

$$A = e\mathbf{v}\mathbf{E} = \frac{e^2}{m} \frac{E_0^2}{\omega^2 + \nu^2} (\omega \sin \omega t \cos \omega t + \nu \cos^2 \omega t). \quad (4,52)$$

Усреднение по периоду дает величину, отличную от нуля:

$$\overline{A} = \frac{e^2 E_0^2}{2m (\omega^2 + \nu^2)}. \quad (4,53)$$

Она представляет энергию потерь, приходящуюся на 1 электрон в 1 секунду.

Как видно из (4,51), скорость электрона складывается из двух частей

$$\mathbf{v} = \frac{e}{m} \frac{E}{\omega^2 + \nu^2} (\nu - i\omega). \quad (4,54)$$

Одна часть смещена по фазе относительно E на 90° , другая находится в фазе с E . Произведение последней части на en , где n — концентрация электронов, представляет плотность тока j , связанную с полем законом Ома:

$$j = \sigma E. \quad (4,55)$$

Коэффициент пропорциональности — проводимость — представляется выражением

$$\sigma = \frac{e^2 n \nu}{m (\omega^2 + \nu^2)}. \quad (4,56)$$

В приведенном выводе содержится неточность, связанная с тем, что с частотой ν мы обращались как с постоянной величиной, в то время как она сама зависит от скорости. Неточность в большинстве случаев невелика, так как в выражение ν входит скорость относительного движения сталкивающихся электронов и ионов. Она определяется главным образом скоростью хаотического движения электронов, обычно намного превосходящей скорость упорядоченного движения $\mathbf{v}$. Таким образом, величина ν действительно слабо зависит от $\mathbf{v}$ и мы можем обращаться с ней как с постоянной величиной.

Однако, если скорость $\mathbf{v}$ составляет лишь небольшую часть полной скорости электронов, переход от равенства (4,54), полученного для одного электрона к выражениям (4,55) и (4,56), описывающим среду, является необоснованным. В этом случае необходимо кинетическое рассмотрение. Оно показывает, что в общем

случае формула (4,56) для проводимости непригодна. Точнее, проводимость можно представить в форме (4,56), если под ν понимать некоторую сложную функцию частоты. Только в предельных случаях $\omega \gg \nu$ и $\omega \ll \nu$ частота столкновений ν не зависит от частоты ω и формула (4,56) для σ является оправданной. При $\omega \gg \nu$ кинетическая теория даёт

$$\sigma \approx \frac{e^2 n \nu}{m \omega^2}, \quad (4,57)$$

причем частота столкновений ν складывается из двух частей

$$\nu = \nu_m + \nu_i. \quad (4,58)$$

Эти части соответствуют столкновениям с нейтральными молекулами и с ионами и определяются выражениями

$$\nu_m = \frac{4\pi}{3} a^2 \bar{\nu} n_m \quad (4,59)$$

и

$$\nu_i = \frac{e^4 \bar{\nu} n \ln \Lambda}{16 \pi \epsilon_0^2 (\kappa T)^2}, \quad (4,60)$$

где n_m — концентрация нейтральных частиц, n — плотность плазмы, $\bar{\nu} = \sqrt{\frac{8\kappa T}{\pi m}}$ — средняя арифметическая скорость электронов и a — радиус молекулы.

В предельном случае низких частот $\omega \ll \nu$

$$\sigma = \frac{e^2 n}{m \nu}. \quad (4,61)$$

В этом случае представление частоты в виде суммы (4,45) несправедливо, и мы можем определить её только в случае полностью ионизованной плазмы или в случае, если известно, что столкновения с нейтральными частицами играют определяющую роль. В первом случае в качестве ν следует брать выражение (4,59), а во втором — (4,60).

Столкновения между электронами в силу закона сохранения импульса не могут сами по себе изменить суммарный импульс электронного газа, однако в результате столкновений между электронами изменяется функция распределения, что влияет на изменение импульса при столкновении с тяжелыми частицами. В высокочастотном случае ($\omega \gg \nu$) соответствующий эффект ничтожен, в то время как в низкочастотном ($\omega \ll \nu$) он увеличивает эффективную частоту соударений в 1,73 раза [15, 16].

Возвратимся теперь к вопросу о соотношении между скоростью хаотического движения электронов плазмы и скоростью упорядоченного движения v . Как уже говорилось выше, при упругих соударениях с тяжелыми частицами электрон может

передать лишь незначительную часть своей энергии, не превышающую

$$\delta \approx \frac{4m_e}{m_i}$$

от полной энергии. Поэтому передача энергии от электронов к ионам осуществляется очень медленно. В то же время рассеяние энергии электрического поля в плазме может быть значительным. За счет энергии поля в этом случае растет энергия хаотического движения электронного газа. Обозначим величину энергии хаотического движения, приходящуюся в среднем на один электрон, буквой $\bar{K}$:

$$\bar{K} = \frac{m\bar{v}^2}{2}.$$

С возрастанием $\bar{K}$ растет, очевидно, энергия $\delta\bar{K}$, в среднем передаваемая при упругом соударении электрона с тяжелой частицей. В 1 сек электрон передает в среднем энергию, равную $\delta\bar{K}\nu$. Когда эта величина станет равной энергии, приобретаемой электроном от поля в 1 сек, наступит равновесие. Равновесное значение $\bar{K}$ будет определяться условием

$$\frac{e^2 E_0^2 \nu}{2m(\omega^2 + \nu^2)} = \delta\bar{K}\nu, \quad (4,62)$$

или

$$\frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{e^2 E_0^2}{2m(\omega^2 + \nu^2)\delta}. \quad (4,63)$$

Сравним $v_{\text{ср}} = \sqrt{\bar{v}^2}$ со скоростью упорядоченного движения. В случае $\omega \ll \nu$

$$v_{\text{ср}} = \frac{eE_0}{m\nu\sqrt{\delta}}, \quad (4,64)$$

в то время как скорость упорядоченного движения электрона в поле $E_0 e^{i\omega t}$ не превышает величины

$$v_{\text{max}} = \frac{eE_0}{m\nu}. \quad (4,65)$$

В случае $\omega \gg \nu$

$$v_{\text{ср}} = \frac{eE_0}{m\omega\sqrt{\delta}} \quad (4,66)$$

и

$$v_{\text{max}} = \frac{eE_0}{m\omega}. \quad (4,67)$$

В обоих случаях выполняется соотношение $v_{\text{ср}} = \frac{v_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$, которое означает, что скорость упорядоченного движения электронов в плазме мала по сравнению со скоростью установившегося хаотического движения электронов. Этот интересный вывод играет важную роль в теории плазмы. Наличие малой упорядоченной составляющей скорости означает малую асимметрию функции распределения f . Асимметрию функции распределения можно описать с помощью малой добавки f_1 к симметричной части f_0 и затем, исходя из кинетического уравнения (с интегралом столкновения), составить систему приближенных линейных дифференциальных уравнений для симметричной и несимметричной части f .

Знание обеих частей функции распределения позволяет найти токи в плазме, величину проводимости и другие величины, характеризующие плазму в установившемся режиме. При больших частотах ($\omega \gg \nu$) симметричная часть функции распределения f_0 представляется максвелловской функцией с эффективной температурой

$$T_{\text{эфф}} = T + \frac{e^2 E_0^2}{3 k m \omega^2 \delta}. \quad (4,68)$$

В случае низких частот ($\omega \ll \nu$) функция распределения плазмы в достаточно сильном электрическом поле существенно отличается от максвелловской функции. В частном случае, когда $\omega = 0$ (стационарное поле) и когда основную роль играют соударения с молекулами ($\nu \approx \nu_m$), f_0 представляется так называемой функцией Дрювестейна [15]:

$$f_0 \sim e^{-\frac{3m^2 v^4}{4e^2 m_m l^2 E^2}}, \quad (4,69)$$

где $l = \frac{v}{\nu_m}$ — длина свободного пробега электрона и m_m — масса молекулы.

Кинетическое уравнение не всегда имеет стационарное решение для f_0 . В полностью ионизованном газе стационарное распределение может вовсе не установиться. Физическая причина этого явления связана с тем, что сечение кулоновских столкновений электронов с ионами быстро падает с увеличением скорости ($\sigma \sim v^{-4}$). Мы можем считать частоту столкновения электрона с ионами не зависящей от скорости v , приобретенной во внешнем электрическом поле, пока эта скорость не слишком велика по сравнению со средней тепловой скоростью электронов плазмы $v_{\text{ср}}$. Тогда частота столкновений будет определяться формулой (4,60), в которой в качестве T должна фигурировать эффективная температура, соответствующая энергии хаотического движения электронов.

Установившееся состояние плазмы будет характеризоваться равновесием между силой торможения электрона и силой ускорения eE :

$$m\nu v = eE. \quad (4,70)$$

Подставляя сюда $v = \frac{j}{en}$, получим закон Ома

$$j = \frac{e^2 n}{m\nu} E \quad (4,71)$$

в полном согласии с формулой (4,61).

Для электрона со скоростью v , существенно превосходящей среднюю скорость хаотического движения электронов плазмы, частота столкновений должна определяться посредством соотношения (4,13). В этом случае сила трения $m\nu v$ оказывается обратно пропорциональной квадрату скорости и при достаточно большой скорости становится меньше силы eE . В результате электрон начинает «ускоряться», становится «убегающим» электроном. Критическая скорость приближенно может быть найдена из равенств (4,70) и (4,13)

$$v_{кр}^2 \approx \frac{e^3 \ln \Lambda}{2\pi\epsilon_0^2 m} \frac{n}{E}. \quad (4,72)$$

При $v_{кр} \gg v_{ср}$ процесс ускорения захватывает лишь электроны далекой области энергетического спектра. Благодаря столкновениям электронов с ионами убыль электронов из этой области непрерывно возмещается, в результате чего происходит непрерывная перестройка всей функции распределения, постепенный переход электронов плазмы из различных частей энергетического спектра в состояние «убегающих» электронов. Возникающие таким образом потоки быстрых электронов могут возбуждать колебания, вызывать неустойчивость плазмы, потерю частиц и энергии.

С увеличением $\frac{E}{n}$ критическая скорость уменьшается, и процесс ускорения захватывает более значительную долю электронов. При приближении $v_{кр}$ к $v_{ср}$ в этот процесс вовлекается основная часть энергетического спектра. Критическое поле дается выражением

$$E_k = 10^{-12} \frac{n}{T_e} \text{ (в/м)}, \quad (4,73)$$

где n — число электронов в 1 м^3 .

Эта формула, так же как и предыдущие, дана для водородной плазмы ($Z = 1$).

В данном параграфе мы не будем касаться вопросов проводимости плазмы в магнитном поле. Наложение магнитного поля вызывает сильную анизотропию проводимости и вопрос об электропроводности плазмы весьма усложняется. К нему мы не раз еще возвратимся в следующих главах.

ГЛАВА 5

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

§ 5.1. Приближение ведущего центра и адиабатический инвариант

Если частица обладает зарядом e и массой m , то движение её в электрическом поле $\mathbf{E}$ и магнитном поле с индукцией $\mathbf{B}$ описывается уравнением

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E} + e[\mathbf{v}\mathbf{B}], \quad (5,1)$$

где $\mathbf{v}$ — скорость частицы. Очень важен вывод следствий уравнения (5,1) для простейших частных случаев.

В отсутствие электрического поля частица с начальной скоростью $\mathbf{v}_\perp$, перпендикулярной к магнитному полю, описывает окружность с постоянной скоростью. Последнее очевидно, так как сила, обусловленная магнитным полем, перпендикулярна к скорости, и поэтому не может изменять полную энергию частицы. Угловая частота вращения — циклотронная частота — равна

$$\omega_H = \frac{e}{m} B. \quad (5,2)$$

Радиус окружности, описываемой частицей, равен

$$\rho = \frac{v_\perp}{\omega_H}. \quad (5,3)$$

Если частица обладает составляющей скорости, параллельной магнитному полю, то в случае постоянного и однородного поля она будет двигаться по винтовой линии с постоянным шагом. Движение складывается из двух движений: поступательного вдоль магнитного поля и вращательного в поперечной плоскости. Подобное же разделение на две компоненты возможно и в случае

неоднородного магнитного поля, а также при наличии различных сил, действующих на частицу. В этих случаях движение представляется в виде вращения около движущейся точки — ведущего центра. Такое представление не является строгим и может применяться только когда влияние различных сил проявляется незначительно в течение периода обращения частицы в магнитном поле, иначе говоря, когда движение является адиабатическим.

Понятие ведущего центра естественно вводится в случае движения в скрещенных электрическом и магнитном полях.

Рассмотрим движение частицы с зарядом e и массой m в постоянных и однородных полях $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Если скорость частицы представить в виде суммы

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u}, \quad (5,4)$$

причем составляющую $\mathbf{u}$ выбрать равной

$$\mathbf{u} = \frac{[\mathbf{E}\mathbf{B}]}{B^2}, \quad (5,5)$$

то после подстановки (5,4) в (5,1) мы получим уравнение циклотронного вращения

$$m \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = [\mathbf{v}'\mathbf{B}]. \quad (5,6)$$

Это значит, что движение в скрещенных полях можно разбить на две части: вращение с циклотронной частотой (5,2) по окружности с радиусом (5,3) и поступательное движение со скоростью $\mathbf{u}$, определяемой равенством (5,5). В системе, движущейся со скоростью $\mathbf{u}$, частица не испытывает действия электрического поля и описывает циклотронную орбиту. В лабораторной системе координат наложение вращательного движения на дрейф со скоростью $\mathbf{u}$, дает циклоидальную траекторию, причем возможны три типа циклоид (рис. 5,1). Их можно представить как траектории частиц, укрепленных на расстоянии ρ от центра катящейся окружности радиуса $R = \frac{m}{e} \frac{E}{B^2}$. Линейная скорость точек окружности $\omega_{H} R$ равна скорости дрейфа $\frac{E}{B}$. Если $\rho > R$, траекторией частицы будет удлиненная, а при $\rho < R$ — укороченная циклоида. В случае $\rho = 0$ частица движется параллельно оси x со скоростью $\mathbf{u} = \frac{E}{B}$. Этот случай движения осуществляется, если начальная скорость частицы в скрещенных полях дается выражением (5,5).

Обращаем особое внимание на то, что скорость дрейфа не зависит ни от знака, ни от величины заряда, ни от массы час-

тицы. Поэтому дрейф в скрещенных полях E и H не связан с появлением токов и не ведет к разделению зарядов.

Формула (5,5) легко обобщается на случай, когда вместо силы eE на частицу действует сила любой природы E :

$$u = \frac{1}{e} \frac{[FB]}{B^2}. \quad (5,7)$$

Например, в поле силы тяжести

$$u_g = \frac{m}{e} \frac{[gB]}{B^2}. \quad (5,8)$$

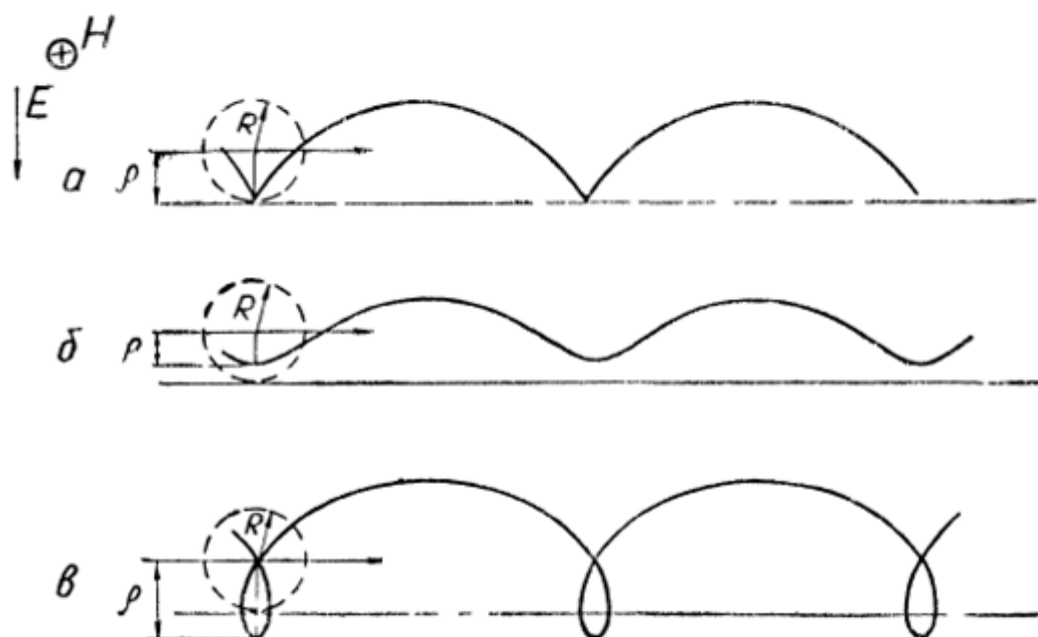


Рис. 5,1. Траектории электронов в скрещенных электрическом и магнитном полях, a — циклоида, b — укороченная циклоида, v — удлиненная циклоида.

Заряды разных знаков дрейфуют в гравитационном поле в противоположные стороны, благодаря чему происходит разделение зарядов. К разделению зарядов приводит дрейф под действием любой силы неэлектрического происхождения.

В скрещенных электрическом и магнитном полях дрейф происходит по эквипотенциальным линиям, так как он направлен по нормали к электрическому полю.

Средняя кинетическая энергия частицы в скрещенных полях равна сумме энергии дрейфа и энергии циклотронного вращения

$$\overline{\omega_{\perp}} = \frac{m}{2} \overline{(\mathbf{v}_{\perp} + \mathbf{u})^2} = \frac{m}{2} v_{\perp}^2 + \frac{mu^2}{2} + m \overline{(\mathbf{v}_{\perp} \mathbf{u})} = \frac{mv_{\perp}^2}{2} + \frac{mu^2}{2}.$$

Произведение $(\mathbf{v}_{\perp} \mathbf{u})$ является осциллирующей величиной и при усреднении за период дает нуль. Скорость дрейфа перпендикулярна к E , поэтому часто говорят, что дрейфовое движение не производит работы. В действительности частицы в скрещенных

полях движутся по циклоидам, причем на одной половине пути вектор скорости имеет составляющую параллельную, а на второй половине — антипараллельную $\mathbf{E}$ (рис. 5,1). Работа поля равна нулю только в среднем за период движения по циклоидальной траектории.

Допустим, что магнитное поле с течением времени изменяется $H = H(t)$. Тогда возникает вихревое электрическое поле

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Согласно теореме Стокса, циркуляция электрического поля по замкнутому контуру равна скорости изменения магнитного потока Φ через площадку, ограниченную контуром

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (5,9)$$

следовательно, изменение энергии циклотронного вращения может быть найдено так:

$$\frac{d\omega_{\perp}}{dt} \approx \frac{\Delta\omega_{\perp}}{T} = \frac{e}{T} \frac{\partial}{\partial t} (\pi r^2 B),$$

где T — период циклотронного вращения и r — радиус орбиты.

Если магнитное поле изменяется настолько медленно, что за время одного оборота радиус циклотронной орбиты изменяется лишь незначительно, дальнейший расчет становится особенно простым и приводит к важному результату

$$\frac{d\omega_{\perp}}{dt} = \frac{\pi e r^2}{T} \frac{dB}{dt} = \pi e \left(\frac{m v_{\perp}}{e B} \right)^2 \left(\frac{e B}{m 2\pi} \right) \frac{dB}{dt} = \frac{m v_{\perp}^2}{2B} \frac{dB}{dt} = \frac{\omega_{\perp}}{B} \frac{dB}{dt}. \quad (5,10)$$

Как мы сейчас увидим, отношение $\frac{\omega_{\perp}}{B}$ является адиабатическим инвариантом и представляет собой магнитный момент вращающегося в магнитном поле заряда.

Действительно, двигаясь по окружности, частица создает замкнутый ток

$$I = e\nu,$$

где ν — число оборотов в секунду.

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_H}{2\pi},$$

откуда

$$I = \frac{e^2 B}{2\pi m}.$$

Такой круговой ток обладает магнитным моментом μ , равным силе тока, умноженной на обтекаемую током площадь $S = \pi r^2$:

$$\mu = IS = \frac{e^2 B}{2\pi m} \cdot \pi \left(\frac{m v_{\perp}}{e B} \right)^2 = \frac{m v_{\perp}^2}{2B} = \frac{\omega_{\perp}}{B}. \quad (5,11)$$

Магнитное поле, создаваемое вращающимся зарядом, всегда противоположно внешнему магнитному полю H , следовательно, момент μ всегда антипараллелен H и поэтому представляет собой диамагнитный момент заряда.

Из (5,11) следует

$$\mu B = \frac{mv_{\perp}^2}{2} = \omega_{\perp}.$$

Дифференцируя по времени и пользуясь (5, 10), получим

$$\frac{d\omega_{\perp}}{dt} = \mu \frac{dB}{dt} = \frac{d}{dt} (\mu B) = \mu \frac{dB}{dt} + B \frac{d\mu}{dt},$$

откуда следует, что $\frac{d\mu}{dt} = 0$. (5,12)

Мы видим, что магнитный момент является инвариантом движения. Из постоянства μ вытекает постоянство магнитного потока, охватываемого циклотронной орбитой, в чем легко убедиться, подставляя в выражение потока $\pi r^2 B$ величину $r = \frac{m}{e} \frac{v_{\perp}}{B}$.

В предыдущем выводе было использовано предположение о медленности изменения магнитного поля. Это условие состоит в том, чтобы относительное изменение магнитного поля за период циклотронного вращения было малым, то есть, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{T}{H} \left| \frac{dH}{dt} \right| \ll 1, \quad (5,13)$$

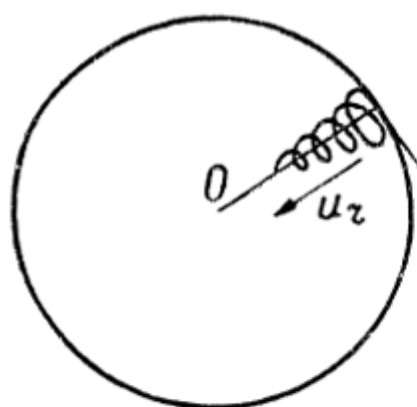


Рис. 5,2. Движение заряда в медленно нарастающем во времени магнитном поле.

где T — период циклотронного вращения, и H — магнитное поле в точке, в которой расположена частица в данный момент.

Теорема о постоянстве μ тем более точна, чем лучше выполнено условие (5, 13). Таким образом, мы видим, что магнитный момент является не точным, но адиабатическим инвариантом.

При выполнении условий адиабатичности анализ движения, благодаря существованию инварианта, весьма упрощается. Рассмотрим, например, движение заряда в медленно нарастающем во времени однородном магнитном поле $H(t)$. Для определенности будем полагать, что поле создается бесконечным соленоидом, поперечное сечение которого изображено на рис. 5,2. Если в начальный момент времени магнитное поле в соленоиде было H_0 и заряд e с массой m обращался по циклотронной орбите с энергией ω_0 , то с увеличением магнитного поля до величины H , энергия циклотронного вращения станет равной

$$\omega = \omega_0 \frac{H}{H_0}. \quad (5,14)$$

Кроме того, частица будет дрейфовать к центру в скрещенных полях $H = H_z$ и $E = E_0 = -\frac{r}{2} \frac{\partial B}{\partial t}$. Азимутальное электрическое поле E_0 возникает вследствие изменения магнитного поля и определяется уравнением Максвелла (5,9). Если радиус циклотронной орбиты мал, по сравнению с расстоянием частицы до оси соленоида, неоднородность электрического поля E_0 можно не принимать во внимание, тогда скорость радиального дрейфа представится выражением

$$u_r = \frac{dr}{dt} = \frac{E_0}{B} = -\frac{r}{2B} \frac{\partial B}{\partial t},$$

откуда

$$\frac{r^2}{r_0^2} = \frac{B_0}{B}, \quad (5,15)$$

где r_0 — расстояние частицы от оси соленоида в начальный момент. Переходя от одной частицы к множеству частиц, заполняющих некоторую цилиндрическую область радиуса r , мы видим из соотношений (5,14) и (5,15), что энергия циклотронного вращения частиц при увеличении магнитного поля растет обратно пропорционально сечению цилиндрической области, занятой частицами

$$\frac{w}{w_0} = \frac{r_0^2}{r^2}. \quad (5,16)$$

Возрастающее магнитное поле сжимает плазму. Это сжатие сопровождается повышением энергии частиц, таким же, как при адиабатическом сжатии газа, частицы которого обладают двумя степенями свободы.

Если магнитное поле периодически изменяется около среднего значения H_0 , причем период колебаний совпадает с периодом циклотронного обращения заряда в поле H_0 , то энергия циклотронного вращения будет монотонно изменяться. При некотором соотношении фаз движения частицы и колебаний магнитного поля энергия будет возрастать и частица будет описывать развертывающуюся спираль. В данном случае осуществляется так называемый параметрический резонанс [17].

Хорошо известным примером параметрического резонанса является раскачивание качели. Ритмично приседая и выпрямляясь на качелях, их можно раскачать или остановить. Качели в этом случае представляют собой маятник с периодически изменяющейся длиной — параметром, определяющим период колебаний маятника. Периодическое изменение длины с частотой в два раза большей частоты колебаний маятника, вызывает увеличение (или уменьшение) амплитуды его колебаний. В случае циклотронного вращения период обращения заряда определяется магнитным полем. Периодическое изменение этого параметра около H_0 вызы-

вает увеличение энергии циклотронного вращения, если частота колебаний поля равна $\omega_H = \frac{e}{m} B_0$ (циклотронный резонанс). Вместе с увеличением энергии циклотронного вращения $\omega_\perp$, растет магнитный момент $\mu = \frac{\omega_\perp}{B_0}$. Эффект будет иметь место и в том случае, если амплитуда колебаний H настолько мала, что условие адиабатичности

$$\frac{T}{H} \left| \frac{dH}{dt} \right| \ll 1 \quad (5,13)$$

оказывается выполненным. Мы видим, что это условие не является достаточным для постоянства μ . Оно должно быть дополнено требованием, чтобы изменение магнитного поля не было периодическим, согласованным по фазе с движением заряда, то есть чтобы не было резонанса. Необходимость последнего требования согласуется с основными положениями общей теории адиабатического движения [18].

В циклотронном резонансе осуществляется эффективная передача энергии от поля к частицам, что имеет большое практическое значение для нагрева плазмы. В простейшем случае механизм передачи энергии легко понять, не прибегая к строгой теории параметрического резонанса. Частица получает энергию от электрического поля, пропорционального $\frac{dB}{dt}$. Если магнитное поле создается соленоидом, то колебания магнитного поля вызывают периодическое поле E_θ . Допустим, что ларморовский радиус мал по сравнению с расстоянием центра орбиты от оси соленоида. Тогда составляющая скорости v_θ частицы (ось цилиндрической системы координат совпадает с осью соленоида) совершает почти гармонические колебания с угловой частотой ω_H .

Перед нами — случай вынужденных колебаний осциллятора под действием периодической силы eE_θ . При совпадении частот наступает резонанс, работа поля $eE_\theta v_\theta$ сохраняет знак и энергия частицы монотонно возрастает. Если условие малости ларморовского радиуса по сравнению с расстоянием центра вращения от оси системы не выполняется, анализ становится более сложным. Знак произведения $eE_\theta v_\theta$ периодически изменяется, однако в среднем за период частица все же может ускоряться. Передача энергии уменьшается при приближении центра вращения к оси и оказывается равной нулю для частиц, вращающихся около оси соленоида. В последнем случае скорость v_θ становится постоянной, и работа поля $eE_\theta v_\theta$ оказывается периодической величиной, в среднем равной нулю.

Перейдем теперь к случаю, когда магнитное поле постоянно, а электрическое возрастает со временем. Для простоты будем

считать, что начальные скорости частиц очень малы, то есть $\mathbf{v}' + \mathbf{u} = 0$ при $t = 0$. В этом случае частица движется по циклоиде с радиусом $R = \frac{m E(t)}{e B^2}$. По мере увеличения $E(t)$ величина R растет и ведущий центр удаляется от оси x (рис 5,1), причем смещение ведущего центра dR , связанное с приращением поля dE , определяется соотношением

$$dR = \frac{m}{e} \frac{dE}{B^2}.$$

В случае большого числа частиц величина dR характеризует среднее смещение зарядов плазмы в направлении поля E . Положительные и отрицательные заряды смещаются в противоположные стороны, что приводит к поляризации. Ток поляризации равен

$$I = ne(v_i + v_e) = \frac{n(m_e + m_i)}{B^2} \frac{dE}{dt} = \frac{\rho}{B^2} \frac{dE}{dt}, \quad (5,17)$$

где $\rho = n(m_i + m_e) \approx nm_i$ — плотность массы. В данном случае плазма подобна диэлектрику с «поляризуемостью» $\frac{\rho}{\epsilon_0 B^2}$ и диэлектрической постоянной

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{\rho}{B^2}. \quad (5,18)$$

Значения $\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ могут быть очень велики; для дейтериевой плазмы при $n = 10^{18} \text{ м}^{-3}$ ($\rho = 3,3 \cdot 10^{-9} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$) и при $B = 0,1 \frac{\text{вб}}{\text{м}^2}$ $\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \approx 3,8 \cdot 10^4$.

Из (5,18) непосредственно вытекает выражение для так называемой магнитогидродинамической альфвеновской скорости. Показатель преломления, то есть отношение скорости света к фазовой скорости электромагнитных волн в данной среде, равен

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} = \left(1 + \frac{\rho}{\epsilon_0 B^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{B} \sqrt{\frac{\rho}{\epsilon_0}},$$

следовательно,

$$v = \frac{c}{n} = B \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\rho}} \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \rho}} = \frac{B}{\sqrt{\mu_0 \rho}}. \quad (5,19)$$

Направление гидромагнитных волн при этом предполагается совпадающим с направлением внешнего поля H .

Из вывода соотношений (5,17) видно, что эти соотношения, так же как и следующие из них формулы (5,18) и (5,19), можно применять только для частот $\omega \ll \omega_{H_i}$, где ω_{H_i} — циклотронная частота для ионов. Более подробно эти вопросы будут рассмотрены в последующих главах.

Согласно законам электродинамики, плотность энергии электрического поля внутри диэлектрика равна

$$\omega_E = \frac{\varepsilon E^2}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon}.$$

Подставляя сюда $\varepsilon \approx \frac{\rho}{B^2}$, мы получим

$$\omega_E = \frac{\rho}{2} \left(\frac{E}{B} \right)^2 = nm_i \frac{u^2}{2},$$

то есть плотность энергии электрического поля в плазме равна плотности кинетической энергии дрейфа частиц плазмы.

Следует учитывать то обстоятельство, что диэлектрическая постоянная плазмы по своей природе несколько отлична от диэлектрической постоянной обычных диэлектриков, в которых ε обусловлено наличием или появлением дипольных моментов. Прикосновение к диэлектрику металлических пластин, создающих поле, не приводит к исчезновению поляризации и поле внутри диэлектрика остается равным $\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} E_{\text{вн}}.$ В случае плазмы мы имеем разделение зарядов и появление реальных свободных зарядов на поверхности плазмы. Нейтрализация этих зарядов на металлических электродах поведет к возникновению тока проводимости и к увеличению поля внутри плазмы, что, в свою очередь, вызовет новый приток частиц на электроды.

§ 5.2. Диамагнетизм плазмы

Мы видели, что отдельные частицы, составляющие плазму, во внешнем магнитном поле обладают магнитными моментами $\mu = \frac{w_{\perp}}{B}$. Если частицы плазмы находятся в термодинамическом равновесии друг с другом (но не со стенками!) и им можно приписать некоторую температуру T , то на каждую степень свободы приходится энергия $\frac{1}{2} kT$. Так как кинетической энергии поперечного (по отношению к магнитному полю) движения соответствуют две степени свободы, то

$$\omega_{\perp} = \frac{mv_{\perp}^2}{2} = 2 \left(\frac{1}{2} kT \right) = kT. \quad (5,20)$$

Рассмотрим цилиндрический столб плазмы с площадью поперечного сечения S и высотой, равной единице длины. Общий диамагнитный момент этого плазменного цилиндра будет

$$M = -Sn\mu = -\frac{Sn\omega_{\perp}}{B} = -\frac{SnkT}{B}, \quad (5,21)$$

где n — плотность плазмы.

Отметим следующее важное обстоятельство. Как было показано Н. Бором еще в 1910 г., свободные заряды в магнитном поле не создают диамагнетизма, если они находятся в термодинамическом равновесии со стенками, окружающими и удерживающими эти заряды. Это можно видеть из следующих элементарных соображений. Свободные заряды оказывают давление $p = nkT$ на ограничивающие их стенки, следовательно, такое же давление со стороны стенок испытывает газ, составленный из зарядов. Если давление в основном обусловлено электронным газом и число электронов, ударяющихся в 1 сек об единичную площадку стенки, равно v , то на каждый ударяющийся электрон приходится эффективная сила $F = \frac{nkT}{v}$. Воспользовавшись формулой (5,7), мы найдем, что эта сила вызовет дрейф со скоростью

$$u = \frac{nkT}{evB}.$$

Ему будет соответствовать ток

$$I^* = veu = \frac{nkT}{B}, \quad (5,22)$$

магнитный момент которого равен

$$M^* = I^*S = \frac{SnkT}{B}. \quad (5,23)$$

Сравнивая результат с (5,21), можно убедиться, что дрейфовый ток полностью уничтожает диамагнитный эффект. Этот вывод мы поясним следующими примерами. Допустим, что заряды заполняют цилиндрическую полость с магнитным полем, направленным вдоль оси. Частицы описывают замкнутые орбиты вокруг силовых линий, расположенных от границы полости не менее чем на расстоянии ларморовского радиуса. При условии равномерного распределения зарядов элементарные токи в «глубинных» точках в среднем уравниваются, в то время как судьба периферических токов зависит от свойств стенок. Предположим вначале, что заряды исчезают, попадая на стенки. В этом случае элементарные токи на поверхности останутся нескомпенсированными. Они могут быть представлены некоторым поверхностным током I , текущим по огибающей всех периферических элементарных орбит. Нескомпенсированный ток создает диамагнитный момент IS . Ясно, что данный пример представляет неравновесную систему: в ней обязательно будет существовать диффузионный поток частиц к стенкам, поглощающим эти частицы.

Рассмотрим теперь другой случай, когда стенки отражают частицы, падающие на них. Как видно из рис. 5,3, частицы, испытывающие отражения, вызовут периферический ток, равный и

противоположный упомянутому выше диамагнитному току. В результате диамагнетизм исчезнет. Отражение электронов от стенок совершенно естественно, если рассматривать электроны внутри металла, в этом случае стенкой является граница металл — вакуум. Предположение об отражении заряженных частиц плазмы от

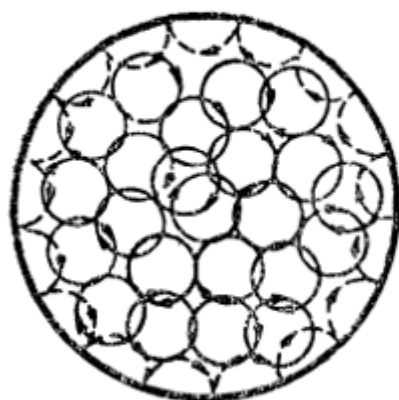


Рис. 5,3. Траектории зарядов внутри цилиндра, ограждающими стенками

металлических стенок безусловно искусственно, поэтому мы рассмотрим еще третий случай, в котором равновесие между стенками и газом действительно достигается.

Допустим, что стенки полости нагреты до такой температуры, что становится значительным эффект термоэлектронной эмиссии. Излучаемые электроны заполняют полость. В случае равновесия число эмитируемых частиц равно числу частиц, возвращающихся к стенкам. Так же как и в примере с отражающими стенками, диамагнитный ток будет скомпенсирован током эмитируемых электронов, что и приведет к отсутствию диамагнетизма в данной термически равновесной системе.

§ 5,3. Магнитные пробки

Рассмотрим теперь движение заряженной частицы в изменяющемся вдоль движения магнитном поле. Если поле возрастает, то магнитные силовые линии будут сходящимися. Если прямую, вдоль которой движется ведущий центр, совместить с осью z , то наряду с продольной составляющей поля H_z неизбежно будет существовать радиальная составляющая H_r , благодаря которой частица, описывающая окружность около ведущего центра, будет испытывать силу $ev_0 B_r$, действующую в направлении — z . Чтобы вычислить эту силу, воспользуемся условием $\text{div } \mathbf{B} = 0$, которое в аксиально симметричном поле дает

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \quad (5,24)$$

Проинтегрируем (5,24) по r :

$$r B_r = - \int r \frac{\partial B_z}{\partial z} dr. \quad (5,25)$$

Если магнитное поле изменяется медленно, мы можем считать величину $\frac{\partial B_z}{\partial z}$ не зависящей от r и равной $\frac{\partial B}{\partial z}$. В этом случае

$$B_r = - \frac{r}{2} \frac{\partial B}{\partial z}. \quad (5,26)$$

Пользуясь (5,1), для продольной компоненты движения найдем

$$\begin{aligned} m \frac{dv_{\parallel}}{dt} &= e [\mathbf{v} \mathbf{B}]_z = ev_{\theta} B, = -ev_{\theta} \frac{1}{2} \rho \frac{\partial B}{\partial z} = -\frac{1}{2} \frac{ev_{\theta}^2}{\omega_H} \frac{\partial B}{\partial z} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{mv_{\theta}^2}{B} \frac{\partial B}{\partial z} = -\mu \frac{\partial B}{\partial z}. \end{aligned} \quad (5,27)$$

Умножая на $v_{\parallel}$, получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv_{\parallel}^2 \right) = -\mu \frac{dB}{dt}. \quad (5,28)$$

Кроме того, из условия сохранения кинетической энергии

$$\frac{1}{2} m (v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2) = \text{const} \quad (5,29)$$

находим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv_{\parallel}^2 \right) = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv_{\perp}^2 \right) = -\frac{d}{dt} (\mu B). \quad (5,30)$$

Из (5,28) и (5,30) снова следует постоянство магнитного момента μ .

Напомним, что вывод о постоянстве μ является приближенным и не соблюдается, если магнитное поле существенно изменяется в пределах одного оборота частицы по циклотронной орбите, то есть, если не выполняется условие (5,13). Предположение о медленности изменения магнитного поля было использовано при интегрировании (5,25).

Частица, движущаяся в возрастающем магнитном поле, под действием тормозящей силы (5,27) может остановиться и начать движение в обратном направлении. Условия отражения непосредственно вытекают из постоянства кинетической энергии частицы и постоянства магнитного момента μ . Действительно, с увеличением B энергия циклотронного вращения должна возрастать: $\omega_{\perp} = \mu B$. Однако движение частицы в сторону возрастающего поля H должно прекратиться, как только величина μB станет равной полной кинетической энергии ω_0 . Равенство $\mu B(z) = \omega_0$ определяет плоскость z , в которой происходит отражение.

Обозначим через θ угол между скоростью частицы и осью z . Из соотношений

$$\mu = \frac{\omega_{\perp}}{B} = \frac{mv_0^2 \sin^2 \theta}{2B} = \text{const}$$

видно, что с увеличением магнитного поля угол θ должен возрастать, чтобы отношение $\frac{\sin^2 \theta}{B}$ оставалось постоянным. Ясно, что это условие не может выполняться при магнитных полях, превышающих некоторое значение H_m , критическое для частицы с

данным направлением скорости. Для частицы, скорость которой составляет угол θ_0 с магнитным полем H , критическое значение H_m определяется равенством

$$\sin^2 \theta_0 = \frac{H}{H_m}. \quad (5,31)$$

Если магнитное поле в некоторой области достигает максимальной величины H_m , то все частицы, для которых выполняется условие

$$\sin^2 \theta > \frac{H}{H_m} \quad (5,32)$$

будут отражаться. Из условия (5,32) видно, что для отражения существенна не кинетическая энергия частицы, а наклон вектора скорости к оси z . Отражающая область обычно называется «магнитным зеркалом» или «магнитной пробкой». Отношение $\eta = \frac{H_m}{H}$ называют «коэффициентом магнитной пробки». Чем больше η , тем сильнее вектор скорости должен быть наклонен к оси, чтобы частица не отразилась и прошла через «пробку».

§ 5,4. Параметрическое возбуждение колебаний частиц плазмы

Рассмотрим еще один пример адиабатического движения зарядов в магнитном поле.

Согласно (5,28), в продольном, неоднородном магнитном поле $H(z)$ частица с магнитным моментом $\mu = \frac{\omega_{\perp}}{B} = \frac{mv_{\perp}^2}{2B}$ испытывает

действие силы

$$F = -\mu \frac{dB(z)}{dz}.$$

Если магнитное поле усиливается к краям системы (рис. 5,4) по параболическому закону $H = H_0(1 + kz^2)$, сила F пропорциональна смещению частиц от положения равновесия $z = 0$ и частица может совершать гармонические колебания около точки $z = 0$. Частота колебаний, как видно из уравнения движения

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{2B_0 k \mu}{m} z = 0, \quad (5,33)$$

равна

$$\omega = \sqrt{\frac{2k\mu B_0}{m}}. \quad (5,34)$$

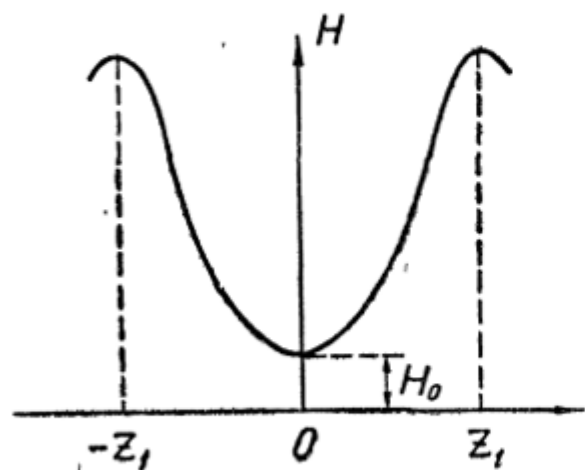


Рис. 5,4. Параболическое распределение магнитного поля вдоль оси z .

Колебания могут возбуждаться различными способами, например, путем периодического изменения магнитного поля во времени:

$$B = B_0 (1 + kz^2) (1 + b \cos \Omega t), \quad b \ll 1. \quad (5,35)$$

В этом случае движение описывается уравнением Матье

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{2kB_0\mu}{m} (1 + b \cos \Omega t) z = 0,$$

или

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} + (a - 2q \cos 2\tau) z = 0, \quad (5,36)$$

$$\text{где } \tau = \frac{\pi}{2} - \frac{\Omega t}{2}, \quad (5,37)$$

$$a = \frac{8kB_0}{m\Omega^2} \mu \quad (5,38)$$

и

$$q = \frac{4kB_0 b \mu}{m\Omega^2}. \quad (5,39)$$

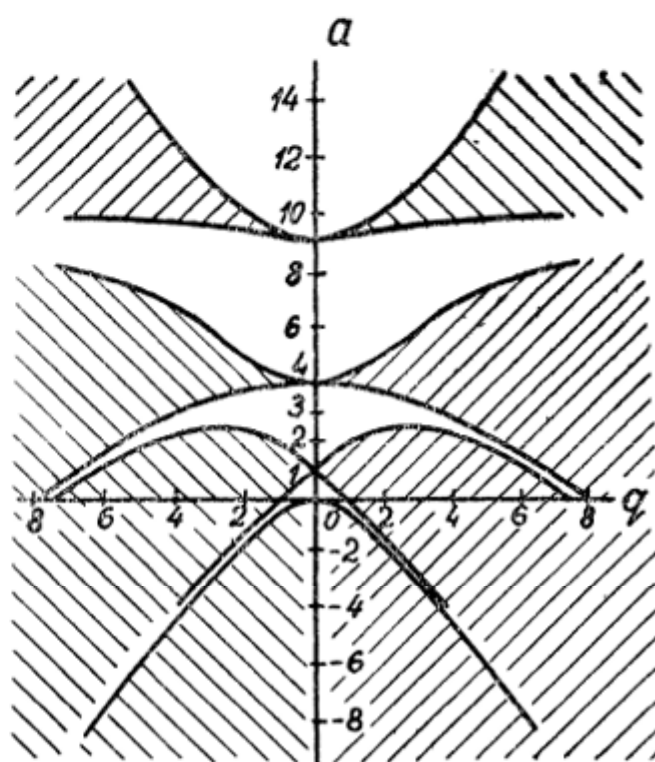


Рис. 5,5. Диаграмма устойчивости решений уравнения Матье. Характеристические кривые разделяют плоскость (a, q) на области устойчивости. Штриховкой отмечены «неустойчивые» области значений a и q ; для них решения уравнения Матье могут иметь характер колебаний с нарастающей амплитудой.

Как известно, для решений уравнения Матье существуют области неустойчивости (рис. 5,5), при малых q определяющиеся условиями $a = 1, 4, 9, \dots$ (параметрический резонанс). В практически наиболее важной области, $a = 1$, интересующее нас решение представляется функцией вида $e^{\xi\tau}\varphi(\tau)$, где $\varphi(\tau)$ — определенная периодическая функция, коэффициент ξ при малом b приблизительно равен $\frac{b}{4}$. Амплитуда колебаний частицы в моду-

лированном магнитном поле при $a = 1$ будет экспоненциально нарастать с инкрементом $\frac{b\Omega}{8}$. Таким путем может осуществляться передача энергии магнитного поля частицам с определенным значением $\frac{\mu}{m}$. В отсутствие соударений раскачка колебаний закончится выходом частицы за пределы системы (за пробки z_1 и $-z_1$).

Если нашей целью является нагрев плазмы, необходимо, чтобы осуществлялась достаточно быстрая передача энергии от раскачиваемых частиц другим частицам. Она, однако, не должна быть слишком большой, чтобы описанный процесс возбуждения коле-

баний не нарушался. Если основным типом взаимодействия является соударение между частицами, частота соударения должна быть малой по сравнению с собственной частотой ω . С увеличением плотности газа частота соударений возрастает, что требует увеличения частоты ω . Последнее возможно путем увеличения параметра k , определяющего скорость нарастания магнитного поля на концах системы, что в свою очередь требует увеличения магнитного поля пробки при данном H_0 . Это, как показывают численные оценки, может привести к значительному ограничению применимости метода для разогрева плазмы.

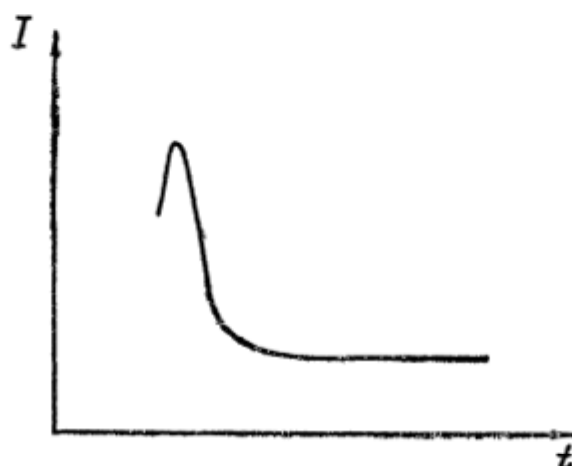


Рис 5,6 Предполагаемое изменение тока частиц, выбрасываемых из плазмы при параметрическом возбуждении колебаний.

Интересно отметить, что модуляция магнитного поля с данной частотой позволяет раскачивать частицы лишь с определенным $\frac{\mu}{m}$. Если частота соударений невелика, частицы с этим значением $\frac{\mu}{m}$ будут раскачиваться до тех пор, пока не выйдут за магнитные пробки ($-Z_1, Z_1$). Если за пробками расположить коллекторы, то подавая на них различные потенциалы, можно измерять токи, создаваемые выходящими из плазмы электронами и ионами. Можно предположить, что вслед за включением модулирующего магнитного поля ($b \cos \Omega t$), в случае резонанса, в цепи коллектора возникнет импульс тока, после чего ток спадет до некоторого стационарного значения (рис. 5,6).

Высота импульса будет характеризовать число частиц в плазме с данным $\frac{\mu}{m}$, последующий же стационарный ток позволит судить о скорости восстановления функции распределения ионизированного газа. Удаление частиц с данным $\frac{\mu}{m}$ создает «щель» в распределении частиц по скоростям, которая будет постепенно заполняться за счет диффузии частиц из прочих частей пространства

импульсов. Ток в цепи коллектора определит величину этого диффузионного потока. Изменяя частоту модуляции ω , можно исследовать различные участки функции распределения. Возможно, что такая методика дала бы ценный материал, касающийся, например, роли коллективных взаимодействий и нелинейных процессов в максвеллизации плазмы.

§ 5.5. Дрейф заряженных частиц в неоднородном магнитном поле

Ведущий центр заряженной частицы с магнитным моментом μ в неоднородном поле $\mathbf{H}$ при выполнении условий адиабатичности движется как некоторая частица в поле силы $\mathbf{F}$ с потенциальной функцией, равной $-\mu B$. Под действием силы

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{2} \mu \frac{\nabla B^2}{B} \quad (5,40)$$

ведущий центр должен испытывать дрейф

$$\mathbf{u} = -\frac{\mu}{2e} \frac{1}{B^2} \left[\frac{\nabla B^2}{B} \mathbf{B} \right]. \quad (5,41)$$

Направление дрейфа перпендикулярно к $\mathbf{B}$ и к $\frac{\nabla B^2}{B}$. Присутствие в выражении для скорости (5,41) величины e , означает, что



Рис. 5.7. Дрейф заряженных частиц в неоднородном магнитном поле.

положительные и отрицательные частицы в неоднородном магнитном поле дрейфуют в противоположных направлениях, создавая токи одного направления (рис. 5,7).

В качестве примера рассмотрим магнитное поле прямолинейного тока. Оно направлено по азимуту и спадает с удалением от проводника с током как $\frac{1}{r}$.

Радиальный градиент величины $B_\theta = B$ создает силу F_{r1} , под действием которой частица совершает дрейф, параллельный току.

Скорость дрейфа по абсолютной величине равна

$$u_1 = \frac{w_{\perp}}{eB^2} \left| \frac{dB}{dr} \right|. \quad (5,42)$$

Заряд в поле прямолинейного тока, описывая винтовую траекторию, движется вдоль круговой силовой линии (рис. 5,8), поэтому он испытывает еще и действие центробежной силы

$$F_{r2} = \frac{mv_{\parallel}^2}{r} = \frac{2w_{\parallel}}{r}. \quad (5,43)$$

Центробежная сила также вызывает дрейф, параллельный току, создающему магнитное поле,

$$u_2 = \frac{1}{e} \frac{F_{r2}}{B} = \frac{2w_{\parallel}}{eB}. \quad (5,44)$$

Складывая (5,42) и (5,44) и пользуясь формулой

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

для магнитного поля, создаваемого током, мы получим окончательно

$$u = \frac{1}{eB} (2w_{\parallel} + w_{\perp}). \quad (5,45)$$

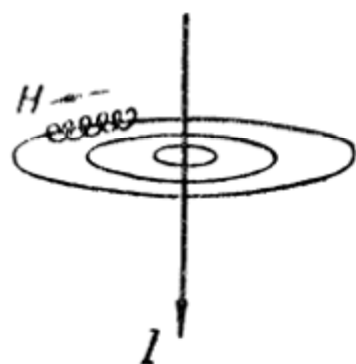


Рис. 5,8. Движение заряда в магнитном поле прямолинейного тока.

Простые соображения (см. рис. 5,6) показывают, что дрейф положительных ионов будет параллелен току, создающему поле H , а дрейф электронов — антипараллелен. Направленный в противоположные стороны дрейф положительных и отрицательных частиц будет приводить к разделению зарядов и к появлению продольного электрического поля E_z , что в свою очередь вызовет дрейф, направленный по радиусу (перпендикулярно E_z и H_0).

Из приведенного примера видно, что наряду с силой (5,40) на частицу в неоднородном магнитном поле действуют силы инерции. В общем случае магнитного поля произвольной конфигурации эти силы нетрудно учесть, если только выполняется условие адиабатичности движения. В магнитном поле, изменяющемся достаточно плавно, неоднородность магнитного поля должна давать малую поправку к выражению скорости движения всдущего центра в однородных полях

$$u_0 = v_{\parallel} \frac{B}{B} + \frac{[E \ B]}{B^2}. \quad (5,46)$$

Первый член правой части этого выражения представляет продольную компоненту скорости дрейфа, а второй — поперечную.

Малая поправка, кроме силы $-\frac{1}{2}\mu\frac{\nabla B^2}{B}$, испытываемой магнитным моментом μ в неоднородном поле H , должна учитывать силу инерции $-m\frac{d\mathbf{u}_0}{dt}$. Таким образом, в первом приближении поперечная составляющая скорости дрейфа равна

$$\mathbf{u}_\perp = \frac{[\mathbf{E} \mathbf{B}]}{B^2} - \frac{\mu}{e} \frac{1}{B^3} \left[\frac{\nabla B^2}{2} \mathbf{B} \right] - \frac{m}{e} \frac{1}{B^2} \left[\frac{d\mathbf{u}_0}{dt} \mathbf{B} \right]. \quad (5,47)$$

Выполним теперь некоторые преобразования. Инерционный дрейф распадается на две части, соответствующие двум слагаемым в выражении для $\mathbf{u}_0$ (5,46). Первому слагаемому соответствует центробежный дрейф, обусловленный кривизной силовых линий,

$$\mathbf{u}_1 = \frac{m}{e} \frac{v_{||}}{B^2} \left[\mathbf{B} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{B}}{B} \right) \right].$$

Производная $\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{B}}{B} \right)$ представляет изменение направления вектора магнитного поля для движущейся частицы. Она может быть записана в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{B}}{B} \right) = v_{||} \left(\left(\frac{\mathbf{B}}{B} \right) \nabla \right) \frac{\mathbf{B}}{B} = \frac{v_{||} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B}}{B^2}.$$

Тогда

$$\mathbf{u}_1 = \frac{m}{e} \frac{v_{||}^2}{B^4} [\mathbf{B}_0 (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B}]. \quad (5,48)$$

Вторая часть инерционного дрейфа обусловлена изменением скорости дрейфа в скрещенных полях:

$$\mathbf{u}_2 = \frac{m}{e} \frac{1}{B^2} \left[\mathbf{B} \frac{d}{dt} \frac{[\mathbf{E} \mathbf{B}]}{B^2} \right]. \quad (5,49)$$

Второй член в (5,47) можно преобразовать, пользуясь тождеством

$$\frac{\nabla B^2}{2} = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} - \text{rot } \mathbf{B}.$$

Последний член в нем можно отбросить, если не учитывать токов, создаваемых движением частиц.

Выполняя все указанные преобразования, мы получим выражение для поперечной составляющей скорости дрейфа в виде

$$\mathbf{u}_\perp = \frac{[\mathbf{E} \mathbf{B}]}{B^2} + \frac{m}{e} \frac{1}{B^4} \left(v_{||}^2 + \frac{v_\perp^2}{2} \right) [\mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B}] + \frac{m}{e} \frac{1}{B^2} \left[\mathbf{B} \frac{d}{dt} \frac{[\mathbf{E} \mathbf{B}]}{B^2} \right]. \quad (5,50)$$

Это уравнение нам потребуется далее при рассмотрении влияния поляризационных явлений на движение плазмы в неоднородных полях.

ГЛАВА 6

УДЕРЖАНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ МАГНИТНЫМИ ПОЛЯМИ

§ 6.1. Примеры магнитных полей

Займемся вопросом о возможности использования магнитных полей различной конфигурации в качестве «ловушек» заряженных частиц, обеспечивающих длительное удержание частиц в ограниченной области пространства.

Рассмотренное в предыдущей главе магнитное поле прямолинейного тока для этой цели, очевидно, непригодно, так как дрейф, связанный с центробежной силой и с радиальной неоднородностью магнитного поля, все время будет перемещать частицы вдоль проводника с током.

Магнитное поле идеального тороидального соленоида (рис. 6,1), то есть обычного прямолинейного соленоида, свернутого в кольцо, вполне аналогично магнитному полю прямолинейного тока.

Магнитное поле, равномерное для прямолинейного идеального соленоида, становится неравномерным при сворачивании его в кольцо, в результате чего появляется радиальный градиент величины $H = H_0$, такой же, как и в случае поля прямолинейного тока. Вследствие этого и в поле тороидального соленоида движение частиц не может быть вполне устойчивым: дрейф вдоль оси z приведет к попаданию частиц на стенки тора. Этот дрейф благодаря разделению зарядов может вызвать значительные поля E_z . Тогда частицы будут дрейфовать в радиальном направлении и также попадут на стенки.

Рассмотрим магнитное поле двухпроводной линии (рис. 6,2). Пусть в некоторой точке, где поле равно H_1 , появилась частица с первоначальной скоростью v_0 , составляющей угол θ_1 , с направлением силовой линии H в той же точке. Двигаясь по спирали вдоль этой силовой линии, частица попадет в область, где поле

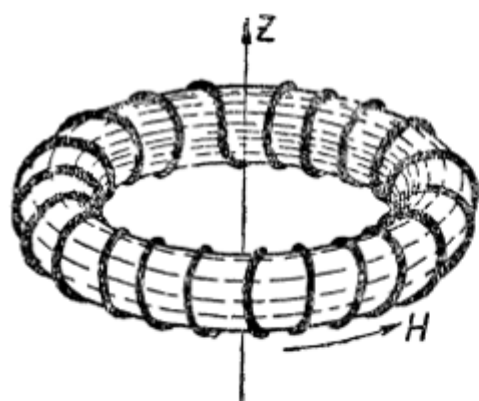


Рис 6,1. Тороидальный соленоид.

$H = H_2 > H_1$. Если $\sin \theta_1 > \sqrt{\frac{H_1}{H_2}}$, частица не сможет описать замкнутую кривую около провода с током и будет совершать колебания по спирали, навитой на внешней части силовых трубок, одновременно совершая дрейф вдоль линии. Как и в предыдущих случаях, дрейф приведет к разделению зарядов и к возникновению электрического поля. Магнитное поле кругового тока (рис. 6,3) напоминает рассмотренный случай. Частицы разобьются на две категории а) частицы, для которых $\sin \theta_1 < \sqrt{\frac{H_1}{H_{\max}}}$ будут

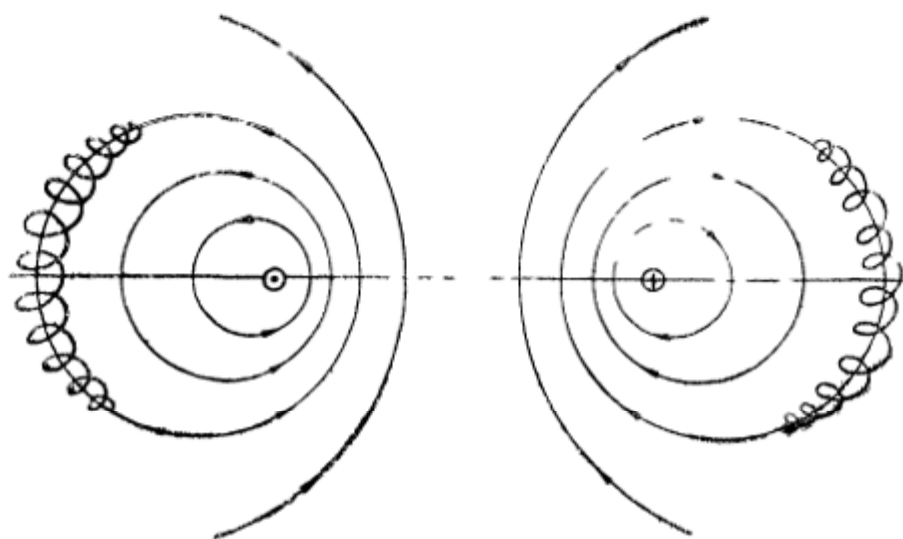


Рис. 6,2. Магнитное поле двухпроводной линии.

описывать замкнутые траектории, б) частицы, у которых $\sin \theta_1 > \sqrt{\frac{H_1}{H_{\max}}}$, будут совершать колебательные движения вдоль некоторой внешней части магнитных силовых трубок. На это дви-

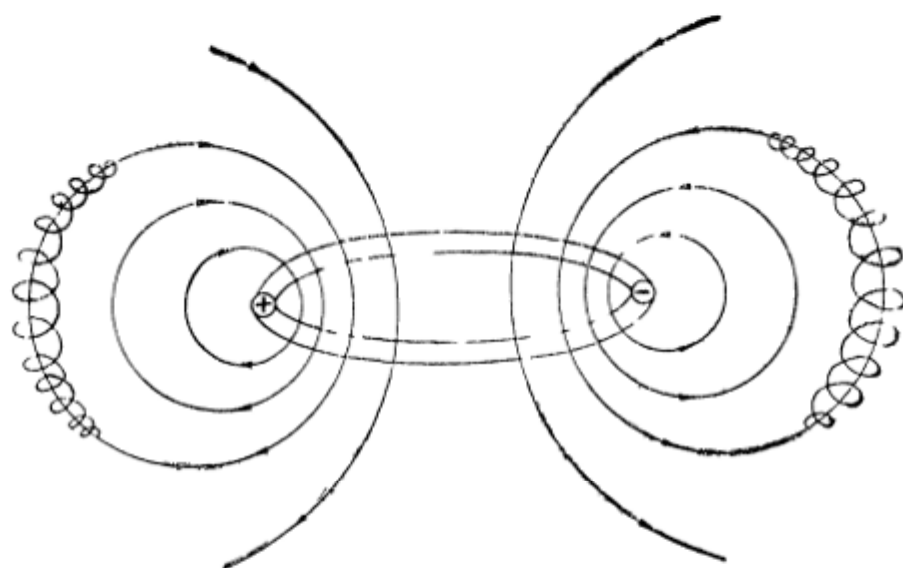


Рис. 6,3. Магнитное поле токового витка.

жение будет накладываться дрейф со скоростью (5,45) по направлению тока, создающего магнитное поле. Благодаря замкнутости тока дрейф частиц разного знака, направленный в противоположные стороны, не приведет к разделению зарядов и к появлению электрических полей. В отличие от предыдущих случаев, этот

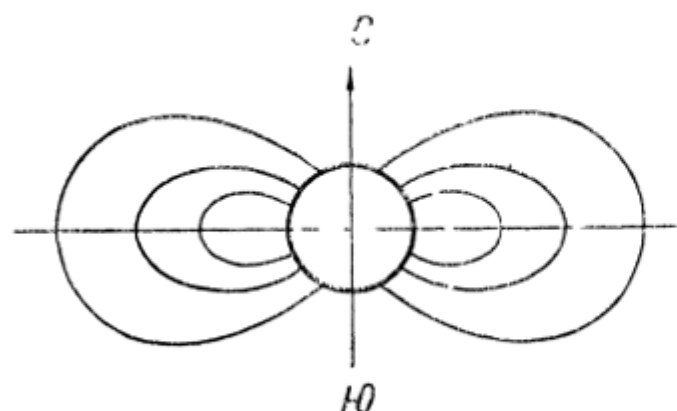


Рис. 6,4. Магнитное поле Земли обладает осевой симметрией и является ловушкой заряженных частиц.

добавочный дрейф не будет выводить частицы из рассматриваемого объема, следовательно, магнитное поле замкнутого витка представит собой «идеальную» ловушку плазмы. Это значит, что частицы плазмы могут выходить из ловушки только путем диффузии поперек магнитного поля.

Нетрудно видеть, что ловушка будет удерживать частицы и в том случае, если на поле H кругового тока будет наложено добавочное поле H_0 прямолинейного тока I_2 , направленного по оси витка. Результирующее поле может быть представлено спиральными силовыми линиями, окружающими круговой ток I_1 . Тот факт, что первоначально замкнутые силовые линии превращаются в разомкнутые спиральные силовые линии результирующего поля $H = H_1 + H_2$, существенно не изменяет траектории частиц.

Как было показано выше, поле тороидального соленоида не создает идеальной ловушки. Однако тщательные и довольно сложные теоретические исследования показали, что если внутри такого тороидального соленоида поместить круговой токовый виток, то результирующее поле

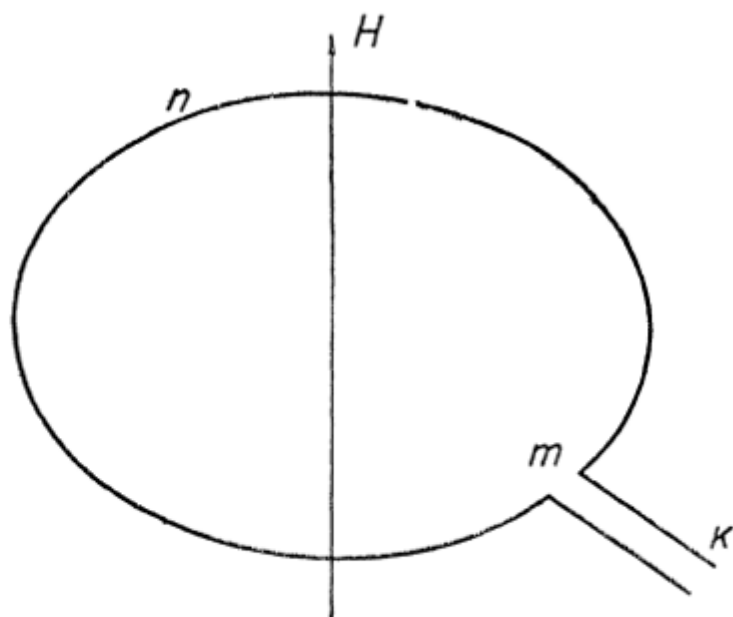


Рис. 6,5 Осевая симметрия токового витка нарушается подводщими проводами.

обладает свойствами идеальной ловушки. Но, как мы видели, поле тороидального соленоида вполне подобно полю прямолинейного тока, которое хотя и не нарушает «идеальности» свойств поля кругового тока, не приносит ничего нового. С этой точки зрения поле кругового тока внутри тороидального соленоида ничем не лучше поля одного кругового токового витка.

Очевидно, многие магнитные конфигурации с аксиальной симметрией, при условии, что H вдоль оси симметрии не равно нулю, являются ловушками. Например, поле Земли (рис. 6,4), как давно уже было указано норвежским астрофизиком Штермером, может захватывать образующиеся в нем заряженные частицы, которые остаются в этом поле долгое время, совершая колебательные движения (класс b), не заходя глубоко в полярные области (в полярных областях лежат точки поворота).

Необходимо особо подчеркнуть, что для создания областей, являющихся идеальными магнитными ловушками, необходимо располагать такими системами, магнитное поле которых аксиально-симметрично. Этому условию не удовлетворяет реальный токовый виток, у которого есть подводящие ток провода, нарушающие симметричность поля (рис. 6,5). Магнитное поле в точке n отлично от магнитного поля в симметричной точке m , и частицы, дрейфуя вдоль кругового витка, будут уходить из системы в область двухпроводной линии k . Это полностью относится к частицам категории a . Частицы категории b , дрейфующие по внешним областям силовых трубок, также будут уходить из системы. Однако в отношении к части-

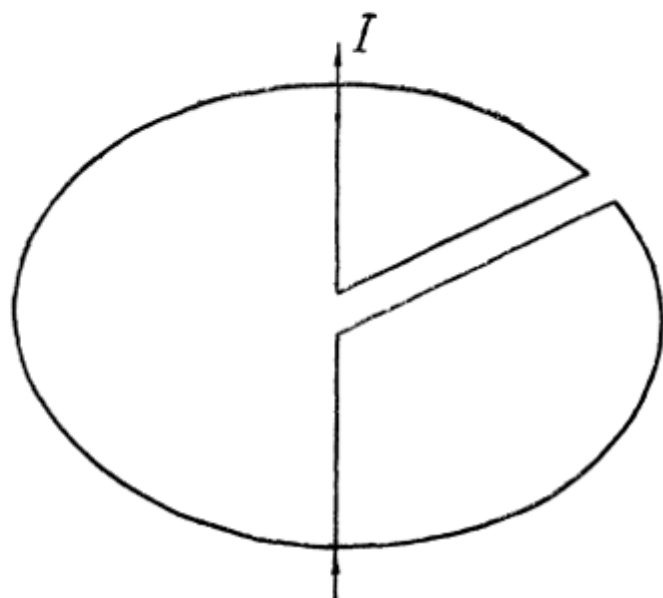


Рис. 6,6. Асимметрию токового витка можно ослабить надлежащим расположением подводящих проводов

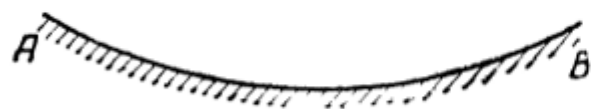
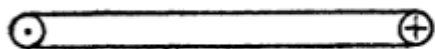


Рис 6,7. Сверхпроводящий виток с током — пример идеальной магнитной ловушки

Такой виток будет представлять собой ловушку для заряженных частиц. В ней будут удерживаться только частицы типа b , наклон вектора скорости которых достаточно велик. Это ограничение возникает благодаря использованию подводящих проводов: в поле идеального кругового проводника удерживались бы все частицы с энергией, меньшей некоторой величины ω_0 , независимо

дрейфуя вдоль кругового витка, будут уходить из системы в область двухпроводной линии k . Это полностью относится к частицам категории a . Частицы категории b , дрейфующие по внешним областям силовых трубок, также будут уходить из системы. Однако в отношении к частицам категории b дело обстоит не столь безнадежно: подводящие провода можно отогнуть внутрь витка и вывести их сверху и снизу, как показано на рис. 6,6. Двигаясь по внешней стороне силовой трубки, частицы класса b не будут пересекать проводящих проводов и смогут оставаться в системе неопределенно долго.

от угла наклона вектора скорости к силовой линии. В этом смысле подобного рода ловушки и называются идеальными.

Разумеется, в результате соударений между частицами они могут покидать идеальную ловушку, однако здесь одно соударение может сместить ведущий центр частицы поперек поля не более, чем на один диаметр циклотронной орбиты, в то время как в «неидеальной» ловушке одного такого соударения достаточно для перехода частицы из класса b в класс a с последующим выходом ее из ловушки. Таким образом, идеальными мы называем те ловушки, которые теряют частицы только в результате диффузии (если не говорить о неупругих процессах, например, о перезарядке).

В принципе, создание кольцевого тока без подводящих проводников возможно. Это может быть ток в кольцевом сверхпроводнике. Правда, здесь возникает вопрос о таком механическом креплении этого сверхпроводящего витка, при котором частицы не наталкивались бы на него при своем движении. Но и эта задача для сверхпроводящего кольца решается просто: чтобы

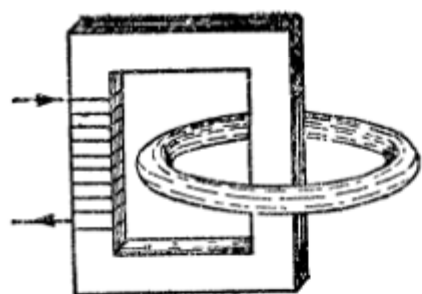


Рис. 6,8. «Безэлектродный» кольцевой газовый разряд.

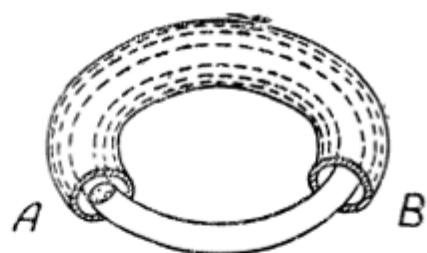


Рис. 6,9. Кольцевой газовый разряд в проводящей оболочке AB .

подвесить такое кольцо, нужно расположить его над поверхностью другого сверхпроводника AB (рис. 6,7), в последнем возникнут незатухающие токи Фуко, которые будут отталкивать кольцо и уравновесят силу тяжести. Вопрос об устойчивости равновесия решается соответствующим выбором формы поверхности AB . Вполне возможно, что для полной стабилизации поверхность второго проводника AB должна быть также двухсвязной, окружающей сверхпроводящий виток со всех сторон.

Модель со сверхпроводящим кольцом поможет нам разобраться в устройстве, имеющем практическое значение. Приближением к идеальному полю сверхпроводящего витка, свободно висащего в пространстве, является «безэлектродный» кольцевой газовый разряд, вызванный вихревым электрическим полем (рис. 6,8). Если электропроводность плазмы в этом разряде велика, то время

существования индуктированного в плазме тока по порядку величины равно

$$t = \mu_0 \sigma S,$$

где σ — электропроводность плазмы, S — площадь поперечного сечения плазменного шнура и $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{гн}}{\text{м}}$. Для горячей плазмы σ может быть взято $\sigma = 10^8$; полагая $S = 10^{-2} \text{ м}^2$, получим $t \approx 1 \text{ сек}$: В течение достаточно большого промежутка времени подобный индуктированный виток с током будет создавать поля, удовлетворяющие условию идеальной магнитной ловушки.

Аналогия со сверхпроводящим контуром может быть продолжена и дальше. В приведенном выше примере второй сверхпроводник (рис. 6,7) служил для удержания сверхпроводящего витка в подвешенном состоянии. Для плазменного шнура гравитационные силы ничтожно малы, но проводящая оболочка, окружающая плазменный цилиндр (AB, рис. 6,9), может служить для выравнивания изгибов и неоднородностей в отшнурованном газовом разряде. Возникающие в шнуре изгибы будут индуктировать в проводящей оболочке локальные токи Фуко, которые будут отталкивать плазму и выравнивать изгибы шнура. Таким образом, проводящая оболочка будет оказывать стабилизирующее действие.

Ясно, что разделение частиц плазмы на две категории, одна из которых создает магнитное поле, а другая удерживается этим магнитным полем, является совершенно искусственным. Задача должна формулироваться иначе: требуется найти такую конфигурацию электрических токов в плазме, магнитные поля которых при наличии или отсутствии внешних магнитных полей создавали бы поля, удерживающие частицы плазмы (как создающие ток, так и движущиеся беспорядочно) внутри данного объема. Основным здесь будет вопрос об устойчивости движения.

§ 6.2. Заряды в магнитном поле Земли

Вернемся теперь к магнитному полю Земли, представляющему, как мы видели, магнитную ловушку. В последние годы эта естественная магнитная ловушка интенсивно изучалась. Было установлено, что она действительно улавливает заряженные частицы, которые затем движутся вдоль силовых линий геомагнитного поля от одного полюса к другому. С помощью искусственных спутников Земли и космических ракет были обнаружены две пространственно разобщенные зоны излучения повышенной интенсивности.

Приведем некоторые данные из статьи С. Н. Вернова и А. Е. Чудакова «Исследования космических лучей и земного корпускулярного излучения при полетах ракет и спутников» («Успехи физических наук», т. LXX, вып. 4, Изд-во физ.-мат. литературы, М., 1960). Внешняя зона в экваториальной плоскости начинается на расстоянии около 20 тыс. км от центра Земли и

простирается до 60 тыс. км. Внутренняя зона начинается на высоте 600 км и простирается до расстояний порядка радиуса Земли. Границами зон являются силовые линии геомагнитного поля.

На рисунке 6,10 представлено распределение интенсивности излучения в плоскости, проходящей через магнитную ось Земли. Цифры на горизонтальной оси дают расстояния от центра Земли в земных радиусах. Распределение дано контурами равной плотности излучения; соответствующие плотности указаны в относительных единицах цифрами на контурах. Точками отмечены

Магнитная ось Земли

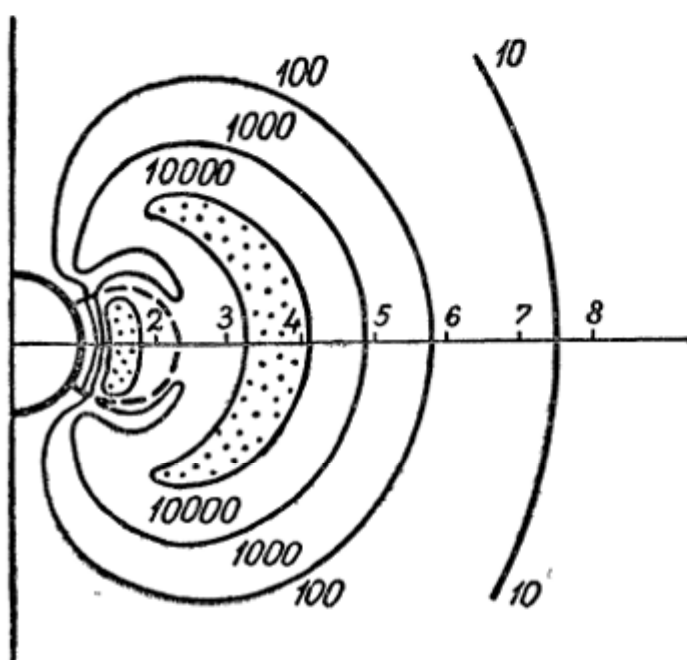


Рис. 6,10. Распределение интенсивности корпускулярного излучения в плоскости, проходящей через магнитную ось Земли.

и могут быть разделены на две группы. Первая группа состоит из электронов с энергией в несколько десятков килоэлектронвольт. Поток их достигает $10^9 \text{ см}^{-2} \text{ сек}^{-1} \text{ стеррадиан}^{-1}$. Вторая группа состоит из электронов с энергией порядка 10^6 эв . Поток таких электронов в максимуме составляет $10^5 \text{ см}^{-2} \text{ сек}^{-1} \text{ стеррадиан}^{-1}$.

Несомненно, что электроны и протоны обеих зон удерживаются магнитным полем Земли. При полете второй советской космической ракеты на Луну было установлено отсутствие радиационных поясов вокруг Луны, что, конечно, связано с отсутствием (или малостью) магнитного поля Луны. Каждая частица описывает винтовую траекторию около некоторой линии геомагнитного поля и движется вдоль этой линии до тех пор, пока не достигнет точки, где напряженность магнитного поля достаточно велика, чтобы привести ее к отражению. Частицы, таким образом, совершают колебания от одного магнитного полюса к другому. Кроме того, они участвуют в дрейфовом движении вокруг Земли по широте, возникающем благодаря неоднородности геомагнитного поля. Положительно заряженные частицы отклоняются к западу,

зоны наиболее плотной радиации.

Целый ряд исследований показал, что характер радиации во внешней и внутренней зонах совершенно различен. Судя по пробегу и удельной ионизации, излучение во внутренней зоне состоит из протонов с энергией порядка 100 Мэв и электронов с энергиями до 1 Мэв. Поток протонов составляет $10^2 \text{ протонов см}^{-2} \text{ сек}^{-1} \text{ стеррадиан}^{-1}$.

Частицы, входящие в состав внешней зоны, являются электронами,

а отрицательно заряженные — к востоку. Для электронов с энергией 5 Мэв время перехода от одной точки отражения к другой измеряется десятками долями секунды, в то время как время обращения таких электронов вокруг Земли по широте составляет сотни секунд (это время меняется в зависимости от энергии электрона, его магнитного момента и высоты, достигаемой им в момент наибольшего удаления от поверхности Земли).

Заряженные частицы не могут удерживаться магнитным полем Земли вечно. Они должны теряться уже вследствие столкновений с молекулами присутствующей в области зон весьма разреженной атмосферы. Как же пополняется число заряженных частиц в зонах?

Магнитное поле ловушки удерживает частицы с достаточно большим магнитным моментом μ , но оно препятствует также проникновению таких частиц извне. Единственная возможность ввести частицу в магнитную ловушку состоит в том, чтобы на некоторое время нарушить уравнения движения частицы, следствием которых является удержание ее в ловушке. Это может быть осуществлено, если заряженные частицы возникают в магнитном поле Земли из нейтральных частиц, беспрепятственно проникающих сквозь магнитное поле внутрь магнитной ловушки. Примером таких нейтральных частиц могут служить нейтроны, испускаемые земной атмосферой под действием космических лучей.

Другой способ ввести частицы в магнитную ловушку состоит в том, чтобы временно нарушить магнитное поле и создать тем самым как бы канал для инъекции частиц в магнитную ловушку. Это может осуществляться при внедрении в магнитное поле Земли сгустков корпускулярных потоков Солнца. Если плотность энергии частиц корпускулярных потоков больше плотности энергии магнитного поля $\frac{\mu H^2}{2}$, то такой сгусток будет разрушать магнитное поле. Когда сгусток разрушится и расплывется в пределах магнитной ловушки, находящиеся в этом сгустке частицы окажутся пойманными. Почти не возникает сомнений, что именно таким путем образуется обширная внешняя зона. Наблюдаемый спектр и состав излучения во внутренней зоне согласуется с гипотезой ее происхождения на основе нейтронного распада: преобладающая компонента составлена из электронов, имеющих спектр, очень похожий на спектр электронов нейтронного распада, а меньшая компонента (непроникающая) состоит из протонов с энергией порядка 100 Мэв.

На рис. 6,10 пунктиром обозначен искусственный радиационный пояс, созданный в августе — сентябре 1958 г. в результате эксперимента, известного под названием «Операции Аргус». На высоте 460 км были взорваны три атомных бомбы. Продукты распада, главным образом электроны, стали распространяться вдоль силовых линий геомагнитного поля и создали слой толщи-

ною в несколько десятков километров. Электроны передвигались вдоль силовых линий и в то же время дрейфовали на восток. Взрывы бомб были произведены в южном полушарии. Сопряженная точка, то есть точка входа соответствующей силовой линии в атмосферу в северном полушарии, находилась над Азорскими островами, которые использовались для наблюдения эффектов, вызываемых взрывом.

Через несколько секунд после взрыва на радиолокационной установке, расположенной в месте запуска, и позже, менее чем через минуту, на установке, расположенной в сопряженной точке, наблюдался отраженный сигнал от «полярного» сияния. Полярное сияние возникло в результате возбуждения электронами атомов азота и кислорода в атмосфере.

Образовавшиеся в результате взрывов электронные слои в течение нескольких месяцев, пока не рассеялись, исследовались с помощью ракет и спутника, пересекшего эти оболочки в общей сложности 164 раза.

§ 6.3. Ловушка с магнитными пробками

Аксиально-симметричное магнитное поле, однородное в средней части и усиливающееся к концам (рис. 6,11), является магнитной ловушкой. Усиления на концах представляют собой магнит-

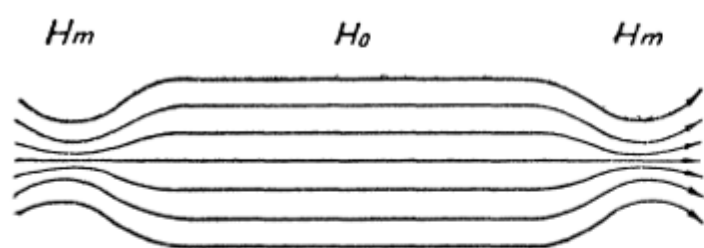


Рис. 6,11. Ловушка с магнитными пробками.

ные пробки, закрывающие частицам выход из ловушки вдоль магнитных силовых линий. Если вектор скорости частицы в средней части ловушки, где $H = H_0$, наклонен к оси z под углом θ , то частица не сможет пройти через пробку при условии

$$\sin \theta > \sqrt{\frac{H_0}{H_m}}.$$

Она отразится и будет, таким образом, совершать колебания между пробками. Опыт показывает, что этот вывод, полученный на основании приближенной теории (в действительности величина $\mu = \frac{w_{\perp}^2}{B}$ не является строго постоянной), выполняется для отдельной частицы с высокой степенью точности. Соответствующие эксперименты были выполнены в 1959 г. в Сибирском физическом институте С. Н. Родионовым и в США Г. Гибсоном и Е. Лауэром [19, 20]. Родионов наполнял ловушку с магнитными пробками тритием, который в результате радиоактивного распада дает β -частицы со средней энергией близкой к 6 кэв. На-

блюдение за концентрацией β -частиц велось по току ионизации, осуществляемой β -частицами. В результате было установлено, что частицы в ловушке удерживаются в течение времени порядка одной секунды. За это время β -частица испытывает число отражений от магнитных пробок, превышающее 10^7 .

Таким образом, магнитная ловушка достаточно долго может удерживать одну частицу или частицы плазмы с очень малой плотностью. С увеличением плотности появляется целый ряд новых путей ухода частиц и время удержания резко падает. Прежде всего, частицы диффундируют поперек магнитного поля. Диффузионные потери, как мы видели, существенно превышают величину потерь, предсказываемую элементарной теорией этого явления. Кроме того, соударения между частицами могут переводить их из класса б в класс а. Мы можем сказать, что в пространстве импульсов имеется «опасный» конус (рис. 6,12) с углом при вершине $2\theta_1$, связанный с «пробочным» отношением равенством

$$\sin \theta_1 = \sqrt{\frac{H}{H_m}}. \quad (6,1)$$

Рис. 6,12. «Опасный» конус в пространстве импульсов.

Вероятность попадания частицы в опасный конус и вылета ее из ловушки в результате одного столкновения равна отношению объема опасного конуса к полному объему в импульсном пространстве, то есть при малом θ_1 равна $\frac{\theta_1^2}{2}$. Считая пробег большим, по сравнению с расстоянием между пробками, для потока частиц в опасный конус мы, следовательно, должны написать:

$$I = n \frac{\theta_1^2}{2\tau}, \quad (6,2)$$

где τ — время рассеяния частицы на угол порядка единицы, а n — число частиц плазмы в данном объеме.

При значительной ионизации, когда основную роль начинают играть взаимодействия между заряженными частицами, уход частиц через пробки сильно возрастает. В этом случае, как мы

знаем, рассеяние происходит на малые углы, так что частица непрерывно диффундирует в пространстве импульсов. Решение соответствующего уравнения диффузии, полученное Г. И. Будкером [21], позволило получить следующее выражение для эффективного сечения попадания ионов дейтерия в опасный конус [25]:

$$\sigma_{\text{эфф}} = \frac{10^{-21}}{(\ln \theta_1) T^2} \text{ см}^2, \quad (6,3)$$

где T — энергия ионов в Мэв.

Поток частиц в опасный конус дается произведением $n^2 \sigma_{\text{эфф}} v$, где v — средняя скорость относительного движения ионов. Из формулы (6,3) видно, что потери частиц через пробки слабо зависят от угла θ_1 и сильно зависят от температуры плазмы: ловушка лучше удерживает горячую плазму. На рис. (6,13) представлена мощность, уносимая через пробки, и мощность, выделяющаяся в термоядерных реакциях в зависимости от температуры.

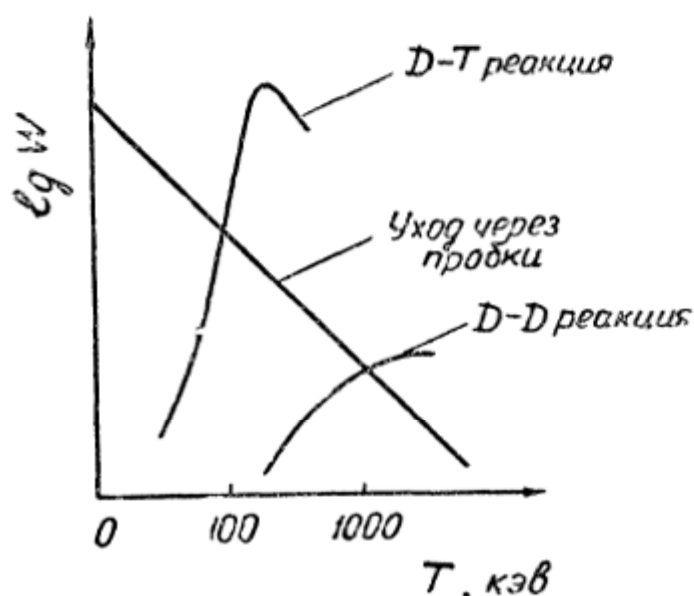


Рис. 6,13 Потери энергии через пробки магнитной ловушки и энергия, выделяющаяся в термоядерных реакциях в зависимости от температуры [25]

Соответствующие кривые пересекаются для DD реакции при $T \approx 1$ Мэв и в случае DT реакции — при 100 кэв, откуда следует, что даже в простейшем виде ловушка с магнитными пробками представляет практический интерес.

Важнейшей причиной ухода частиц может быть неустойчивость данной плазменной конфигурации. Плотная плазма, сжатая магнитным полем, подвержена различным видам неустойчивости, приводящей к движению ее поперек магнитных силовых линий и к нарушению термоизоляции. К проблеме устойчивости мы возвратимся в одной из следующих глав.

Горячая плазма в ловушке может получаться либо путем нагрева плазмы, уже захваченной ловушкой, либо путем инжекции частиц достаточно большой энергии. В последнем случае потери частиц могут восполняться непрерывно, в то время как первый способ должен быть импульсным. Действительно, уход частиц неизбежен, и спустя некоторое время после наполнения в ловушку снова должна быть введена порция плазмы.

Рассмотрим этот способ несколько подробнее. Допустим, что ловушка наполняется холодной плазмой, которая затем путем адиабатического сжатия нагревается до необходимой температуры. Сжатие может осуществляться сближением магнитных пробок

(осевое сжатие) и усилением магнитного поля, приводящим к уменьшению радиуса циклотронных орбит и к сближению ведущих центров (радиальное сжатие). Нагрев плазмы осуществляется за счет работы изменяющегося магнитного поля. В случае адиабатического сжатия этот процесс обратим, следовательно, возможно расширение, возвращающее энергию удерживающим полям. Если в ловушке достигается режим, необходимый для осуществления термоядерной реакции, можно представить себе «плазменную машину», в которой будет осуществляться прямое превращение энергии плазмы в электрическую энергию: в первой части периода плазма сжимается магнитным полем, так что достигаются условия термоядерной реакции, в последующей же части идет термоядерная реакция, и за счет освобождающейся энергии производится расширение плазмы.

Механизм нагрева в результате осевого сжатия плазмы, осуществляющегося посредством сближения магнитных пробок, таков же, как и при сжатии обычного газа. Если сжатие осуществляется достаточно медленно (адиабатически), то средняя энергия продольного движения возрастает по формуле

$$\omega_{||} \sim n^{\gamma-1}, \quad (6,4)$$

где γ — отношение удельной теплоемкости при постоянном давлении к удельной теплоемкости при постоянном объеме. Для идеального газа из частиц с m степенями свободы

$$\gamma = \frac{2 + m}{m}. \quad (6,5)$$

Если за время сжатия энергия продольного движения не успевает перераспределиться между остальными степенями свободы, m следует полагать равным единице и тогда

$$\omega_{||} \sim n^2. \quad (6,6)$$

Мы видим, что сжатие вдоль оси приводит к увеличению энергии продольной составляющей движения каждой частицы на величину, пропорциональную квадрату коэффициента сжатия:

$$\omega_{||}(t) = \omega_{||}(0) k_{||}^2, \quad (6,7)$$

где $k_{||}$ — коэффициент осевого сжатия. Увеличение одной только продольной составляющей скорости движения ведет к уменьшению угла между вектором скорости и направлением магнитного поля, поэтому продольное сжатие приводит к ухудшению захвата. Напротив, при радиальном сжатии энергия поперечной составляющей возрастает и условия захвата улучшаются. Нагрев плазмы при радиальном сжатии находится из условия постоянства магнитного момента:

$$\frac{\omega_{\perp}(t)}{H(t)} = \frac{\omega_{\perp}(0)}{H(0)}. \quad (6,8)$$

Увеличение магнитного поля можно представить сгущением магнитных силовых линий. При этом ведущие центры частиц следуют силовым линиям и, следовательно, плотность плазмы возрастает пропорционально плотности магнитного потока, то есть пропорционально напряженности магнитного поля. Назовем коэффициентом поперечного сжатия $k_{\perp}$ величину, характеризующую изменение поперечного сечения плазмы в ловушке. Он равен коэффициенту увеличения магнитного поля α :

$$k_{\perp} = \alpha = \frac{H(t)}{H(0)} = \frac{\omega_{\perp}(t)}{\omega_{\perp}(0)}. \quad (6,9)$$

Тот же результат можно получить, представляя плазму, испытывающую радиальное сжатие, как газ с двумя степенями свободы. В этом случае $m = 2$, $\gamma = 2$ и $\omega_{\perp} \sim n$. При пропорциональном увеличении магнитного поля во всех частях ловушки происходит не только радиальное сжатие, но и осевое. Найдем коэффициент осевого сжатия в этом случае.

В магнитном поле ловушки частица вращается в поперечной плоскости и, кроме того, осциллирует от одной пробки к другой. Энергия этих осцилляций зависит от величины магнитного поля. При медленном изменении магнитного поля существует адиабатический инвариант, равный распространенной на один период величине действия

$$A = \oint p_{\parallel} du, \quad (6,10)$$

где $p_{\parallel}$ — импульс частицы вдоль магнитной силовой линии и u — расстояние, отсчитываемое от плоскости симметрии ловушки вдоль силовой линии, на которой расположен ведущий центр данной частицы. Импульс $p_{\parallel}$ можно выразить через функцию $R(u) = \frac{H(u)}{H(0)}$:

$$\begin{aligned} p_{\parallel} &= \sqrt{2m\omega_{\parallel}^2} = \sqrt{2m}(\omega_0 - \omega_{\perp})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2m\omega_{\perp}^2} [B_m - B(u)]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \sqrt{2m\omega_{\perp}^2} B^{\frac{1}{2}}(0) (R_m - R)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

(Здесь B_m означает магнитную индукцию в области магнитной пробки).

Тогда из (6,10) следует:

$$B^{\frac{1}{2}}(0) \int_{u_1}^{u_2} (R_m - R)^{\frac{1}{2}} du = \text{const}, \quad (6,11)$$

где u_1 и u_2 — экстремальные значения u , которые достигаются при движении частицы (точки поворота). Пользуясь уравнением (6,11), мы можем определить изменение положения концевых точек u_1 и u_2 , определяющих длину области, занятой плазмой.

Допустим, например, что напряженность поля центральной области магнитной ловушки выражена параболическим законом

$$R(u) = 1 + \left(\frac{u}{\lambda}\right)^2. \quad (6,12)$$

Подставим это выражение для R в (6,11):

$$B^{\frac{1}{2}}(0) \int_{u_1}^{u_2} \left[R_m - 1 - \left(\frac{u}{\lambda}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} du = B^{\frac{1}{2}}(0) (R_m - 1) \lambda \frac{\pi}{2} = \text{const},$$

или
$$B(0) u_m^4 = \text{const}, \quad (6,13)$$

где u_m — половина расстояния между пробками (предполагается, что ловушка симметрична относительно плоскости $u = 0$).

Мы видим, что при увеличении магнитного поля кроме поперечного происходит также продольное сжатие, причем величина сго в данном случае равна

$$k_{||} = \frac{u_m(t)}{u_m(0)} = \left[\frac{B(0, t)}{B(0, 0)} \right]^{\frac{1}{4}}. \quad (6,14)$$

Объединяя коэффициенты продольного и поперечного сжатия, найдем, что плотность изменяется как

$$\frac{n(t)}{n(0)} = k_{\perp} k_{||} = \alpha^{\frac{5}{4}}. \quad (6,15)$$

Эксперименты по адиабатическому сжатию плазмы проводились Р. Постом и группой его сотрудников в Ливерморе (США) [22, 23]. Плазма от импульсного источника вводилась в ловушку с магнитными пробками, а затем сжималась нарастающим магнитным полем. В течение 0,5 мсек магнитное поле возрастало с 400 до 40000 эрстед. Согласно уравнению сжатия, плотность плазмы в ловушке должна при этом возрасть на два или три порядка и достигать 10^{14} см^{-3} . Экспериментальное исследование показало, что распределение электронов в сжатой плазме близко к максвелловскому, соответствующему температуре от 10 до 20 кэв. Температура ионов на основании некоторых косвенных данных оценивается равной по порядку величины 1 кэв.

Неожиданно большим оказалось время удержания горячей плазмы. Она существует в ловушке в течение миллисекунд, в то время, как теория предсказывает для такой плазмы неустойчивость и развал за время на несколько порядков меньшее. Возможное объяснение этого факта мы рассмотрим в главе об устойчивости плазмы.

Не останавливаясь на других опытах по адиабатическому сжатию плазмы [24], перейдем к ловушкам с инжекцией быстрых частиц.

Очевидным преимуществом таких ловушек является то, что плазму в них не надо нагревать, кроме того, можно надеяться

создать таким путем стационарную ловушку с непрерывным восполнением потерь в плазме. Однако все это возможно, если найден способ инъекции частиц в магнитную ловушку.

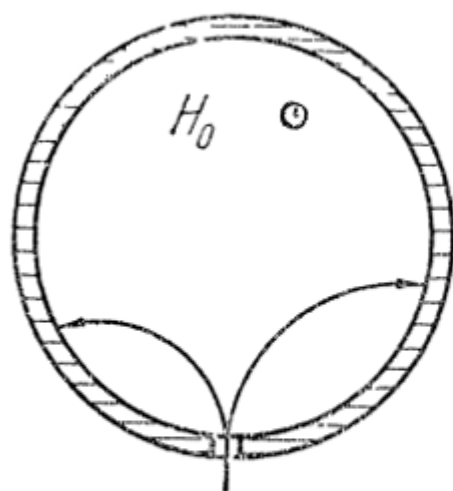


Рис. 6,14. Заряженные частицы, входящие в ловушку через отверстие в боковой стенке, неизбежно попадают на стенку.

Наиболее естественной представляется инъекция через магнитную пробку. Для того чтобы частица вошла в ловушку с магнитными пробками H_m , ее магнитный момент μ должен быть меньше величины $\frac{\omega_0}{B_m}$,

где ω_0 — полная кинетическая энергия инжектируемой частицы, но такая частица не будет удерживаться пробками и немедленно выйдет из ловушки. В ловушке могут остаться только те частицы, которые испытают одно или несколько соударений с другими частицами, если их моменты при этом достаточно сильно возрастут. На процессы такого рода, однако, рассчиты-

вать нельзя, поскольку длина свободного пробега иона обычно намного превышает размеры ловушки. Можно попытаться вводить частицы сбоку, перпендикулярно к магнитному полю.

Если ввести пучок заряженных частиц как показано на рис. 6,14, то частицы, описав в магнитном поле дугу окружности, попадут на стенки. Ясно, что пучок должен вводиться на расстоянии от стенки, не меньшем радиуса ларморовской окружности. Ионная пушка должна заканчиваться входящей внутрь ловушки ферромагнитной трубкой. Чтобы после первого оборота частица не попала на эту трубку, последнюю следует слегка наклонить по отношению к оси z , тогда частица будет иметь некоторую скорость вдоль оси z и начнет описывать винтовую линию. Шаг винта должен быть достаточно большим, чтобы ионная пушка не задевалась частицей на первом обороте (рис. 6,15).

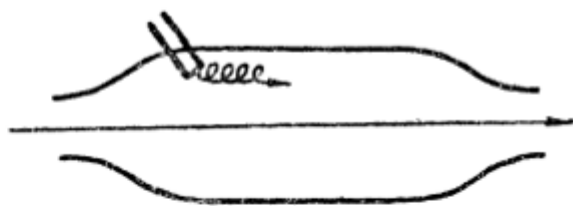


Рис. 6,15. Инжектор должен быть наклонен к оси ловушки

Попадание частицы на ионный источник после первого отражения от пробки можно предотвратить, используя азимутальный дрейф частиц, связанный с неоднородностью магнитного поля. В результате длина траектории частицы внутри ловушки может быть весьма увеличена, но она будет все же несравненно меньше длины свободного пробега иона относительно интересующей нас ядерной реакции. Опасность попадания частиц на инжектор необходимо еще уменьшить.

Если в ловушку инжектировать однократно ионизованные мо-

лекулы дейтерия, то они могут диссоциировать на атомах остаточного газа. Диссоциация приводит к появлению атомарного иона дейтерия и нейтрального атома дейтерия, либо двух атомарных ионов и одного электрона. На каждый атом приходится половина массы и половина энергии молекулярного иона, благодаря чему радиус циклотронной окружности уменьшается вдвое (рис. 6,16) и частица может оказаться вне опасности попадания на

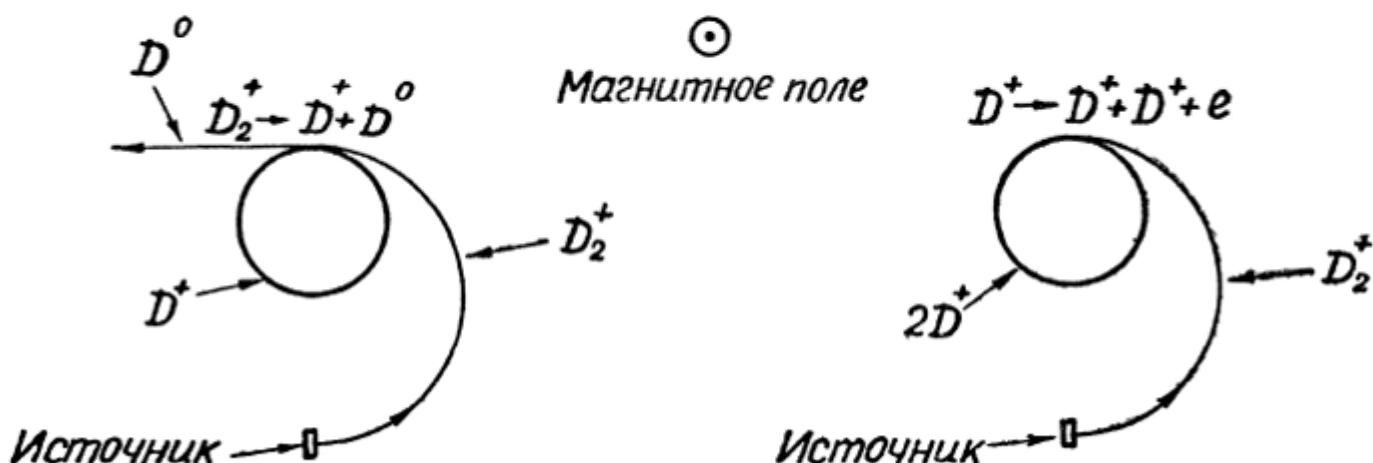


Рис. 6,16. Диссоциация молекулярных ионов.

инжектор. Такой метод инжекции использован в «Огре» — магнитной ловушке, построенной в Институте атомной энергии в Москве.

При таком способе ввода частиц наиболее трудным оказывается этап первоначального накопления ионов. Диссоциация должна осуществляться на молекулах остаточного газа. С другой стороны, молекулы остаточного газа весьма нежелательны, так как на них будет происходить перезарядка. Процесс перезарядки состоит в том, что быстро движущийся ион обменивается с атомом нейтрального газа электроном и, продолжая движение как нейтральная частица, попадает на стенку камеры. Взамен быстрого иона в ловушке оказывается медленный ион, энергия же движения уносится на стенки. Сечение перезарядки обычно на несколько порядков превышает сечения интересующих нас ядерных реакций и эффективное сечение выхода частиц через пробки. Роль перезарядки может быть снижена путем повышения степени ионизации плазмы, создания столь больших ионных токов, чтобы наступила перестройка газа в ловушке в полностью ионизованную плазму. Критический для этого ток — ток перевала — определяется выражением [25]

$$I_k = \frac{1}{4} \frac{\sigma_1 v V}{\sigma_2^2 L^2} \text{ ионов в секунду,} \quad (6,16)$$

где V — объем ловушки, v — скорость иона, σ_1 — сечение перезарядки атомарного иона на молекуле H_2 , σ_2 — сечение диссоциации молекулярного иона при столкновении с молекулой H_2 , L — длина пробега иона до попадания на электрод инжектора.

Приведем основные данные о самой крупной адиабатической ловушке «Огре» [25, 26].

Это — прямая труба с продольным постоянным во времени магнитным полем, в которое инжектируются ионы H_2^+ с энергией до 200 кэв. Расстояние между центрами пробок равно 12 м, магнитное поле в пробках достигает 8000 э, в центре магнитное поле равно 5000 э, потребляемая обмоткой мощность — 4000 квт. Вакуумная камера из нержавеющей стали имеет внутренний диаметр 1,4 м; камера откачивается ртутным насосом до 10^{-6} мм рт. ст.; для дальнейшей откачки до 10^{-8} мм рт. ст. служат ионно-сорбционные титановые насосы и прямое напыление титана на внутренней поверхности камеры.

Магнитное поле «Огры» может противостоять давлению водородной плазмы с плотностью до 10^{13} см $^{-3}$. Длина пробега молекулярного иона до возвращения его на стенки магнитного канала (инжектора) приблизительно равна 10^5 см. Ток перевала для ионов H_2^+ с энергией 200 кэв составляет по расчетам 200 ма, а для D_2^+ — 2а. Атомарные ионы при плотности плазмы 10^{13} см $^{-3}$ должны двигаться в ловушке в течение сотен секунд, проходя до выхода через пробки более 100 тысяч километров.

В магнитной ловушке «DCX», построенной в Окридже (США), диссоциация облегчается применением специальной угольной дуги высокой энергии, горящей в высоком вакууме в продольном магнитном поле. Молекулярные ионы с энергией 600 кэв инжектируются в ловушку «DCX» с таким расчетом, чтобы они проходили сквозь дугу. При токе 200 а концентрация частиц в дуге достигает 10^{14} см $^{-3}$. На этих частицах с большой вероятностью происходит диссоциация молекулярных ионов, в результате чего образуются атомарные ионы с энергией 300 кэв. В поле 10000 эрстед они описывают орбиты диаметром около 27 см, создавая кольцевой ионный поток. В кольце удастся накопить 10^{12} дейтронов. Время существования кольца составляет 10 мсек, распад связан главным образом с перезарядкой. Важнейшей задачей этого направления работ является уменьшение потерь за счет перезарядки и достижение тока перевала, при котором должно произойти «выгорание» нейтральных частиц газа в ловушке.

Не останавливаясь на многих других интересных идеях [7], рассмотрим «стелларатор», представляющий собою замечательный пример ловушки без магнитных пробок.

§ 6.4. Стелларатор

Магнитные пробки уменьшают уход плазмы через концы ловушки, но не устраняют его полностью. Лучшее решение, казалось бы, состоит в том, чтобы согнуть ловушку по кругу и соединить ее концы, но тогда получится тор, который, как мы знаем, не может удерживать частицы. Кривизна и неоднородность магнитного поля тора вызывает дрейф заряженных частиц. Электроны и ионы дрейфуют вдоль оси z (рис. 6,1) в противо-

положительных направлениях, что приводит к разделению зарядов, к радиальному дрейфу всей плазмы и к уходу ее на стенку тора.

Л. Спитцер и его сотрудники нашли способ снизить и практически устранить влияние дрейфа в тороидальном поле. Для этого оказалось необходимым «перекрутить» тороидальное магнитное поле вокруг его круговой (магнитной) оси. Каждая силовая линия такого «перекрученного» поля, описывая винтовую линию, то поднимается над плоскостью магнитной оси, то уходит под эту плоскость. Если на участке, где она проходит над магнитной осью, ведущий центр некоторой частицы благодаря кривизне поля несколько сместится вверх, то на следующем участке, на котором силовая линия уйдет под магнитную ось, частица окажется ниже силовой линии. Дрейф, направленный по-прежнему вверх, снова приблизит ее к силовой линии. Таким образом, дрейф будет вызывать лишь колебания ведущих центров частиц около данной силовой линии, не приводя к значительным перемещениям плазмы.



Рис. 6,17. Преобразование поворота

Силовая линия «перекрученного» магнитного поля, вообще говоря, не замыкается после обхода вдоль тора. Если в данном сечении тора силовая линия начиналась в точке P_1 , то после

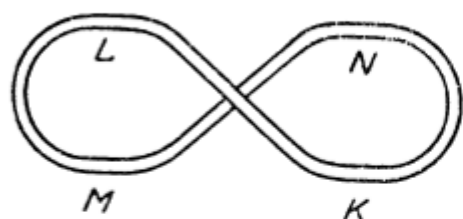


Рис 6,18 Тор, согнутый в восьмерку.



обхода вдоль тора она попадает в точку P_2 . Последующие обходы дадут точки P_3 , P_4 и т. д., располагающиеся на некоторой замкнутой кривой в данном сечении (6,17). Каждый обход вдоль тора пре-

образует эту кривую саму в себя, причем преобразование получается смещением всех точек в одном и том же направлении. Это есть преобразование поворота, характеризующее «перекручивание» магнитного поля в стеллараторе.

Каждая силовая линия стелларатора после многих обходов вокруг тора описывает некоторую магнитную поверхность. Если стелларатор заполнен плазмой (не слишком искажающей магнитное поле стелларатора), то благодаря высокой проводимости плазмы вдоль магнитных силовых линий все точки магнитной поверхности окажутся под одним потенциалом, что исключает возможность появления опасных поляризационных полей. Магнитные поверхности оказываются вложенными одна в другую и все они охва-

тывают магнитную ось — единственную замкнутую магнитную силовую линию.

Чтобы получить преобразование поворота, достаточно вывести тор из одной плоскости. Подходящей системой может служить

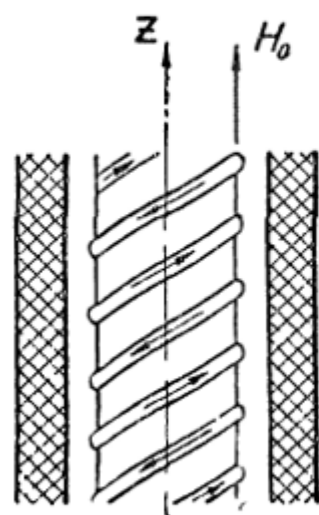


Рис. 6,19 Проводники, создающие винтовое поле.

тор, свернутый в восьмерку (рис. 6,18). Магнитное преобразование в восьмерке состоит в повороте около магнитной оси на угол i , постоянный для всех точек и зависящий только от конфигурации восьмерки. Если полукруглые участки трубы LM и KN (рис. 6,18) находятся в плоскостях, наклоненных под углом α по отношению к параллельным плоскостям, в которых размещаются соединяющие секции LK и MN , то

$$i = 4\alpha. \quad (6,17)$$

Другая возможность осуществления преобразования поворота состоит в наложении на тороидальное поле дополнительного поперечного магнитного поля. Это магнитное поле создается рядом витков, по которым ток течет в противоположных направлениях в соседних участках обмотки (рис. 6,19). В такой системе угол поворота при обходе силовой линии вдоль тора зависит от расстояния от магнитной оси системы; с удалением от оси угол поворота растет. Это создает сложное переплетение силовых линий, повышающее устойчивость плазмы внутри тора.

Исследования со стелларатором ведутся в Принстонском университете с 1951 года. Было построено несколько установок такого рода. В них применялись изолирующие магнитные поля напряженностью от 20000 до 40000 эрстед. Плазма в стеллараторах создавалась и предварительно нагревалась посредством разряда в газе. Для этой цели тороидальная трубка охватывалась железным трансформаторным сердечником (рис. 6,20). Через первичную обмотку разряжалась конденсаторная батарея. Вторичной обмоткой служил газ в стеллараторе — водород или гелий при давлении 10^{-3} мм рт. ст., предварительно ионизованный до нескольких процентов. При разряде батареи в газе индуцируется продольное электрическое поле, которое ускоряет существующие в газе электроны. При достижении достаточно большой энергии электроны ионизуют газ и число свободных электронов быстро возрастает. Энергия поля переходит в кинетическую энергию электронов. Частично она расходуется на ионизацию, частично высвечивается нейтральными атомами и уходит из плазмы в виде тормозного и

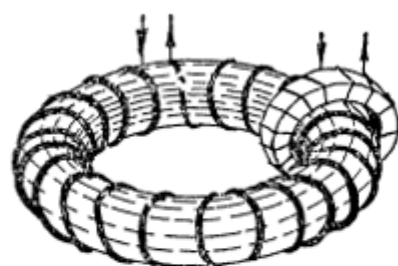


Рис. 6,20. Схема создания и омического нагрева плазмы в стеллараторе.

магнитотормозного излучения. Часть энергии электронов передается ионам в результате соударений. Температура электронов растет гораздо быстрее температуры ионов. Вместе с тем изменяется распределение электронов по скоростям: появляется группа электронов, скорость которых быстро возрастает в электрическом поле (убегающие электроны).

По мере возрастания температуры плазмы эффективность омического нагрева уменьшается. Все меньшая доля энергии электронов передается ионам и все более значительным становится разрыв между температурами электронной и ионной составляющих плазмы. Температура ионов доводилась таким путем лишь до 10^5 — 10^6 градусов.

Как показал опыт, скорость ухода частиц из разряда оказывается несравненно большей, чем предсказывается классической теорией диффузии. Отчасти этот уход связан с магнитогидродинамическими неустойчивостями, приводящими к выбросу горячей плазмы на стенки стелларатора. Для стелларатора существует кроме того специфический механизм неустойчивости, связанный с тем, что собственное магнитное поле тока в стеллараторе при больших токах нарушает условия магнитного преобразования, необходимого для эффективной изоляции плазмы.

Ток I , текущий вдоль оси тора, подобно току в «стеллараторных» обмотках, осуществляет поворот силовых линий около оси стелларатора. Достаточно большой ток может полностью компенсировать поворот магнитного поля, задаваемый стеллараторными обмотками, что приведет к нарушению равновесия плазменного витка.

Однако равновесие может нарушаться и при меньших токах. Достаточно, чтобы полный поворот на одном обходе $i + \varphi$, обусловленный стеллараторными обмотками (i) и током в плазме (φ), оказался кратным 2π . В этом случае силовые линии результирующего поля окажутся замкнутыми и не будут образовывать магнитных поверхностей.

Предположим, что угол вращательного преобразования заключен в интервале $2\pi n < i < 2\pi(n + 1)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$, тогда допустимый ток I определится условием, чтобы полный поворот $i + \varphi$ заключался внутри того же интервала. Если ток I сосредоточен на поверхности плазменного цилиндра радиуса a , то магнитное поле тока будет $H_\theta = \frac{I}{2\pi a}$, и угол поворота на всей длине

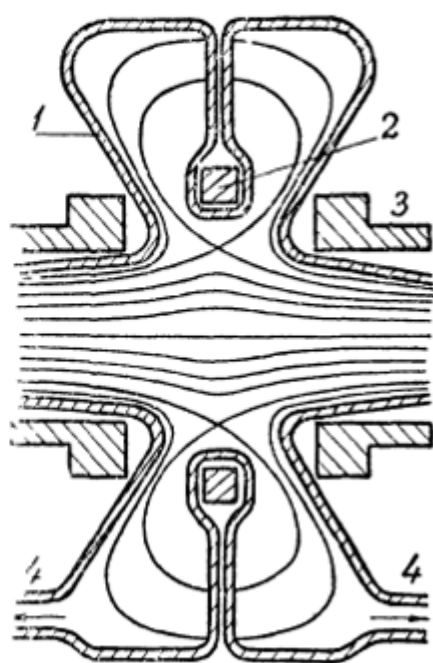


Рис 6,21. Схема дивертора: 1 — стенка камеры, 2 — средняя катушка, вызывающая резкое искривление силовых линий магнитного поля, 3 — основная катушка, 4 — отверстие для откачки.

витка $2\pi R$ будет равен $\frac{H_0 \cdot 2\pi R}{H_1 \cdot a} = \frac{IR}{H_1 a^2}$, где H_1 — основное торoidalное поле. Теперь условие устойчивости плазменного шнура для двух направлений тока представится неравенствами

$$\begin{aligned} i + \frac{IR}{H_1 a^2} &< 2\pi(n+1) \\ i - \frac{IR}{H_1 a^2} &< 2\pi(n-1). \end{aligned} \quad (6,18)$$

Это условие было найдено М. Крускалом и В. Д. Шафрановым. Оно получило полное подтверждение в экспериментах на стеллараторах.

Возможной причиной быстрого ухода частиц могут служить убегающие электроны. Потоки убегающих электронов могут возбуждать в плазме колебания, приводящие к резкому увеличению диффузии частиц поперек магнитного поля.

По-видимому, однако, кроме перечисленных механизмов существует какой-то еще неизвестный механизм, являющийся основной причиной ухода частиц. Газ не проявляет признаков особой неустойчивости, но ионы и электроны «тихо» исчезают из разряда. Это исчезновение получило название «откачки». Попадая на стенки, ионы выбивают из нее атомы различных элементов, которые затем интенсивно излучают энергию, понижая температуру плазмы. Для уменьшения количества газов, абсорбированных стенками, в стеллараторах применялся прогрев при температуре 450°C в течение 12 часов при непрерывной откачке.

Кроме того, для уменьшения концентрации примесей в плазме применялось специальное приспособление, названное дивертором (рис. 6,21). В диверторе внешний слой магнитных силовых линий отклоняется от основного поля. Заряженные частицы,двигающиеся вдоль этих силовых линий и, следовательно, стремящиеся диффундировать к стенке, перед попаданием на стенки увлекаются в отдельную камеру дивертора. Примеси, поступающие со стенок в дивертора, удаляются вакуумным насосом. Дивертор позволяет уменьшить уровень примесей примерно в пять раз. В прокаленной установке больших размеров дивертор может свести влияние примесей практически к нулю.

Стелларатор обладает рядом существенных преимуществ перед другими ловушками. Он не имеет концов; проблема дрейфа и разделения зарядов в нем разрешена применением магнитного преобразования; создано магнитное поле с переплетением силовых линий, обеспечивающим значительную устойчивость удерживаемой им плазмы. В то же время мы убеждаемся в существовании процессов, приводящих к поразительно быстрой потере частиц. Возможно, что последнее связано с применяемым способом создания и нагрева плазмы. Возможности этой ловушки при иных способах создания горячей плазмы, например, при инжекции заряженных частиц или плазменных сгустков, до сих пор не изучены.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

§ 7.1. Введение

В предыдущих главах мы рассматривали движение заряженных частиц в заданных полях. В плотной плазме, однако, поля нельзя считать заданными: они в значительной степени определяются зарядами и токами в самой плазме. Это сильно усложняет динамику плазмы и заставляет прибегать к модельным представлениям.

Во многих случаях плазму можно рассматривать как жидкость, обладающую проводимостью. При движении ее в магнитном поле в ней возникают электрические поля и токи, взаимодействие которых с внешним магнитным полем, в свою очередь, влияет на движение жидкости. На связь между механическими силами и электрическими и магнитными полями в проводящей жидкости,

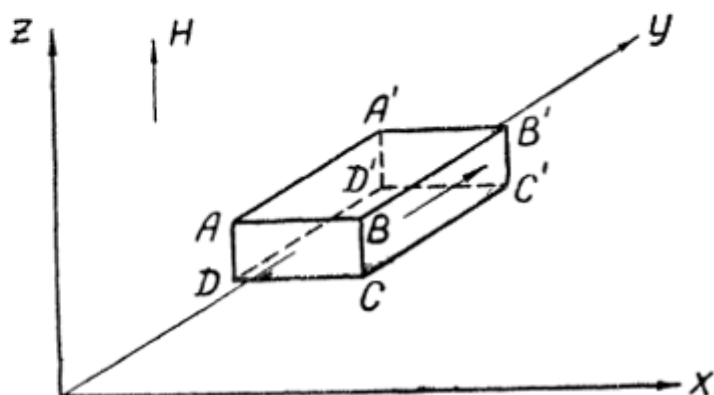


Рис. 7.1. При движении участка проводящей жидкости в направлении y в ней возникает электрическое поле, параллельное оси x .

по-видимому, впервые обратил внимание в 1940 г. профессор Я. И. Френкель, но достаточно разработанную теорию дал в 1942 г. шведский физик Х. Альфвен. Связь, существующая между гидродинамическими и электромагнитными величинами, вызывает появление совершенно новых и неожиданных явлений. Наиболее важным из них является появление совершенно своеобразного типа волн — магнитогидродинамических волн. Понять их физическую сущность можно из рассмотрения следующего примера. Пусть мы располагаем неограниченной проводящей средой, находящейся в магнитном (однородном) поле H , направленном по оси z . Пусть вся жидкость, за исключением области с сечением $ABCD$, в начальный момент времени находится в покое по отношению к выбранной нами системе координат (x, y, z) (рис. 7.1). Если область $ABCD$ движется со скоростью v параллельно оси y , то в ней возникает электрическое поле

$$E = -[vB], \quad (7.1)$$

направленное перпендикулярно к H и v , то есть параллельно оси x . Поля в движущейся призме вызывают токи, направленные по оси x , которые должны замыкаться через окружающую

неподвижную жидкость (рис. 7,2). На электрический ток в магнитном поле действует сила

$$F = [IB]. \quad (7,2)$$

Выясним направление этой силы в движущейся плазме и в прилегающих к ней слоях.

В движущейся плазме ток течет по направлению оси x и сила F тормозит движение, то есть направлена по $-y$. В сосед-

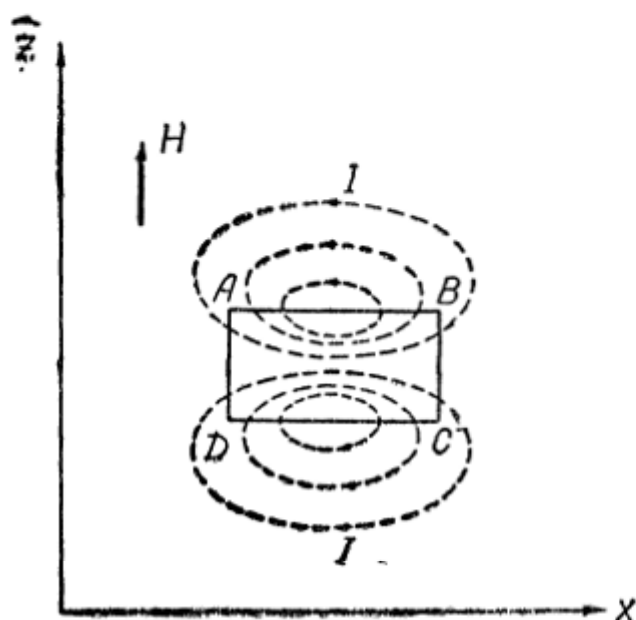


Рис. 7,2. Токи в движущемся участке жидкости замыкаются через окружающую неподвижную жидкость.

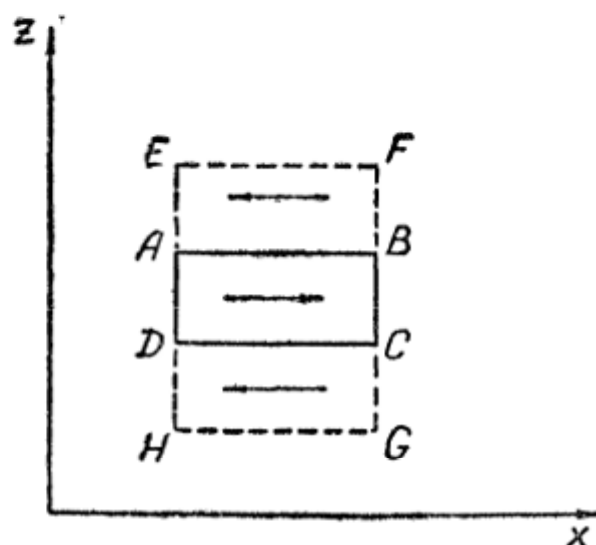


Рис. 7,3. Направление токов в данном участке плазмы и в прилегающих слоях.

них частях ($ABFE$ и $DCGH$, рис. 7,3) ток течет в противоположном направлении, поэтому и сила направлена по y . Действием этих сил первоначально движущаяся часть плазмы будет останавливаться, а соседние — приводиться в движение в том направлении, в котором первоначально двигалась призма $ABCD$.

Повторяя те же рассуждения для пришедших в движение соседних слоев, можно убедиться, что движение передается на все более и более удаленные части плазмы вдоль оси z : возникает магнитогидродинамическая волна, передающая состояние движения вдоль магнитного поля.

Возможность существования магнитогидродинамических волн была теоретически показана Х. Альфвенем в 1942 г. и в 1951 г. получила блестящее экспериментальное подтверждение (С. Лундквист).

§ 7,2. Магнитогидродинамические уравнения

Уравнения магнитной гидродинамики — это уравнения электродинамики и гидродинамики, в которых, однако, учтена связь между движением и магнитным полем.

Считая проводимость жидкости высокой, мы будем пренебрегать токами смещения, кроме того, пренебрежем накоплением заряда в уравнении непрерывности заряда и будем считать все электрические токи замкнутыми. Тогда уравнения Максвелла представятся в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}; \quad (7,3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad (7,4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (7,5)$$

Кроме того, запишем уравнение непрерывности заряда

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad (7,6)$$

и закон Ома

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + [\mathbf{v} \mathbf{B}]), \quad (7,7)$$

где σ — электропроводность жидкости и $\mathbf{j}$ — плотность тока

Уже приведенные уравнения позволяют выявить некоторые важные свойства проводящей жидкости.

Применяя оператор rot к уравнению (7,3), получим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{j} = -\sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \sigma \operatorname{rot} [\mathbf{v} \mathbf{B}],$$

то есть

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\mathbf{v} \mathbf{B}] + \nu_m \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (7,8)$$

где $\nu_m = (\mu_0 \sigma)^{-1}$. Величину ν_m , пропорциональную удельному сопротивлению, часто называют магнитной вязкостью.

Если жидкость покоится ($\mathbf{v} = 0$), то уравнение (7,8) приводится к уравнению диффузии

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nu_m \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (7,9)$$

характеризующему «диффузию» магнитного поля в проводящую среду. По порядку величины

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial z^2} \approx \frac{B^2}{L^2},$$

где L — характерный размер (размер проводящего тела или расстояние, на котором B заметно меняется). Приближенно можно написать

$$\frac{\partial B}{\partial t} \approx \nu_m \frac{B}{L^2},$$

откуда можно найти характерное время диффузии:

$$\tau = \frac{L^2}{\nu_m} = \mu_0 \sigma L^2. \quad (7,10)$$

Мы получили известную из электродинамики формулу для времени затухания тока в проводнике с сечением L^2 . Время затухания пропорционально проводимости и квадрату линейных размеров. Оно бесконечно для сверхпроводников и весьма велико для космических объектов. Например, время затухания магнитного поля солнечного пятна составляет не менее 300 лет. Для проводников, применяемых в лабораториях, оно измеряется

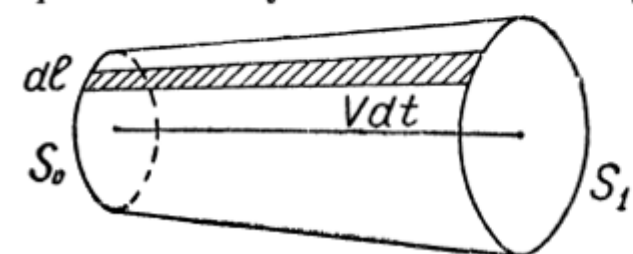


Рис. 7,4. Перемещение площадки, движущейся вместе с жидкостью, за время dt .

обычно долями секунды.

В случае высокой проводимости плазмы ($\sigma \rightarrow \infty$, $\nu_m \rightarrow 0$) (7,8) сводится к уравнению

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{v} B], \quad (7,11)$$

из которого следует «вмороженность» магнитного поля в плазму: при движении идеально проводящей жидкости в направлении, перпендикулярном магнитному полю, последнее изменяется так, как будто магнитные силовые линии жестко связаны с веществом.

Чтобы выяснить точный смысл «вмороженности», рассмотрим внутри жидкости некоторую площадку и вычислим изменение пронизывающего ее магнитного потока. Магнитный поток может изменяться не только вследствие изменения магнитного поля, но и вследствие изменения самой площадки. Если, например, поток Φ равен BS , то

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{dB}{dt} S + B \frac{dS}{dt}. \quad (7,12)$$

Допустим, что площадка, выбранная нами внутри жидкости, в момент времени $t = 0$ имеет величину S_0 , а через dt перемещается вместе с жидкостью на расстояние vdt и становится равной S (рис. 7,4). Так как $\text{div } \mathbf{B} = 0$, то разность потоков через

S_0 и S_1 , соответствующая последнему члену в (7,12), должна равняться потоку через боковую поверхность, элемент которой равен $[\mathbf{v}d\mathbf{l}] dt$. Таким образом, мы должны писать

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S} + \oint \mathbf{B} [\mathbf{v}d\mathbf{l}] = \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S} + \oint [\mathbf{B}\mathbf{v}] d\mathbf{l}.$$

Пользуясь выражением (7,11) для $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, получаем

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int \text{rot} [\mathbf{v}\mathbf{B}] d\mathbf{S} + \oint [\mathbf{B}\mathbf{v}] d\mathbf{l}.$$

Но, согласно теореме Стокса, правая часть последнего равенства равна нулю, следовательно,

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0. \quad (7,13)$$

Мы видим, что магнитный поток через любой проводящий контур в идеально проводящей жидкости не изменяется со временем. Магнитные силовые линии перемещаются в поперечном направлении вместе с жидкостью; силовые линии магнитного поля как бы «вморожены» в жидкость.

Легко показать, что для жидкости с конечной проводимостью соотношение (7,13) должно быть заменено равенством

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} d\mathbf{S} = \nu_m \int \nabla^2 \mathbf{B} d\mathbf{S}. \quad (7,14)$$

В этом случае магнитный поток через замкнутый контур, движущийся с жидкостью, не сохраняется, силовые линии как бы «проскакивают» через жидкость.

При выводе соотношений (7,8) и (7,13) мы использовали только уравнения Максвелла, дополненные законом Ома. Совершенно очевидно, что для полного описания гидромагнитных явлений необходимы уравнения гидродинамики, учитывающие связь между скоростью жидкости $\mathbf{v}$ и магнитным полем $\mathbf{B}$. Таким уравнением является уравнение Навье — Стокса:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) \mathbf{v} \right\} = -\nabla p + \mathbf{F} + \rho \nu \nabla^2 \mathbf{v},$$

где ρ — плотность, p — давление, ν — кинематическая вязкость жидкости, а $\mathbf{F}$ — внешняя сила, действующая на жидкость. В нашем случае в качестве силы $\mathbf{F}$ мы должны взять пондеромоторную силу $[\mathbf{j}\mathbf{B}]$. Считая вязкость малой, получим

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad } p + [\mathbf{j}\mathbf{B}]. \quad (7,15)$$

Производная $\frac{d}{dt}$ означает здесь «субстанциональную» производную, определяющую изменение величины при перемещении вместе с движущимся элементом жидкости

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \text{ grad}).$$

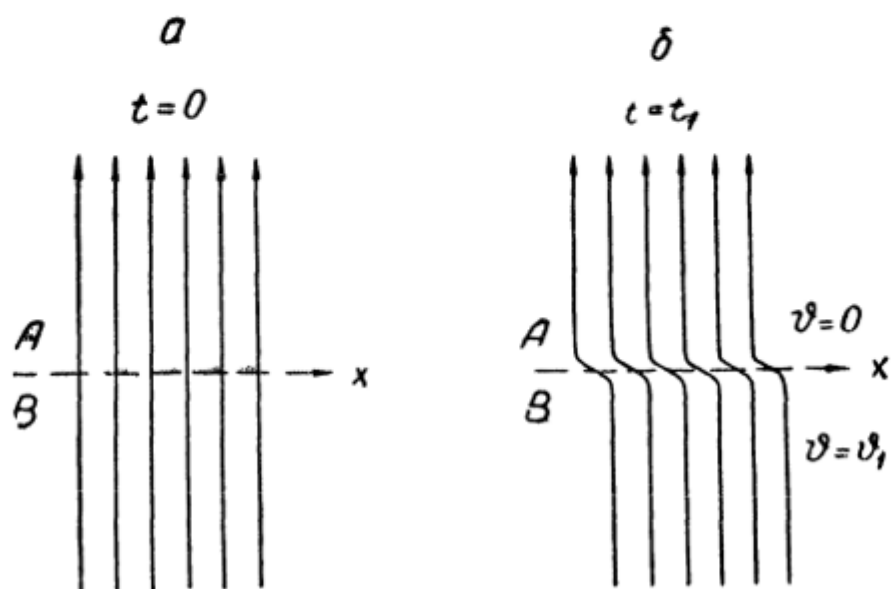


Рис. 7,5. Магнитные силовые линии, вмороженные в проводящую жидкость, искривляются при смещении нижнего слоя жидкости относительно верхнего.

Последний член уравнения (7,15) дает связь между магнитным полем $\mathbf{H}$ и полем скоростей $\mathbf{v}$. Закон сохранения энергии должен выполняться для суммы этих полей. Это значит, что энергия движения жидкости может переходить в энергию магнитного поля и наоборот. Рассмотрим следующий пример.

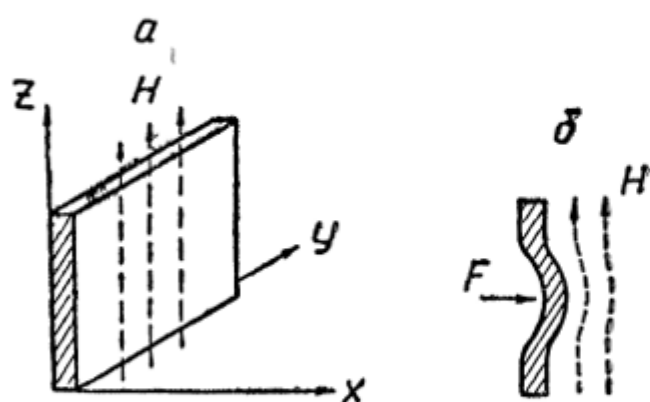


Рис. 7,6. «Вмороженность» магнитных силовых линий в твердый проводник.

Пусть в момент $t = 0$ покоящаяся жидкость пронизывается магнитным полем H_z (рис. 7,5) и пусть с помощью какой-либо внешней силы мы придали нижней части жидкости B скорость v_x . Так как силовые линии «вморожены», они начнут двигаться в нижней части, а поле между A и B начнет возрастать, так как появится новая составляющая H_x . Увеличение энергии магнитного поля между слоями A и B происходит за счет кинетической энергии нижнего слоя, который будет испытывать торможение. Если верхний слой не закреплен, энергия, запасенная в магнитном поле, частично будет ему передаваться, и верхний слой придет в движение.

«Вмороженность» силовых линий можно наблюдать не только в жидких, но и в эластичных твердых проводниках. Пусть в однородное магнитное поле помещена тонкая эластичная пластинка (рис. 7, 6), плоскость которой совпадает с направлением поля H_z . Если мы с помощью внешних сил F деформируем эту пластинку, как показано на рис. (7,6), то вблизи изгиба появится магнитное поле H_x , которое может быть обнаружено экспериментально.

Одним из авторов этой книги в 1956 г. был поставлен следующий демонстрационный опыт. Тонкий латунный цилиндр

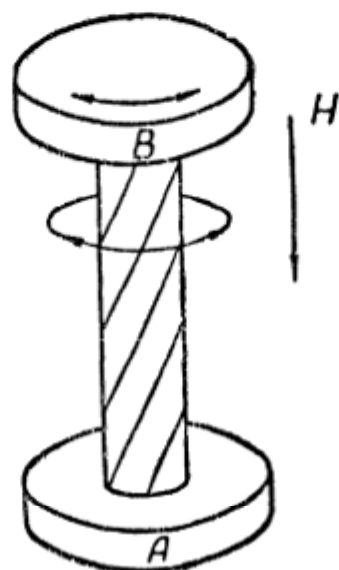


Рис. 7,7. Опыт, демонстрирующий «вмороженность» магнитных силовых линий в твердый проводник.

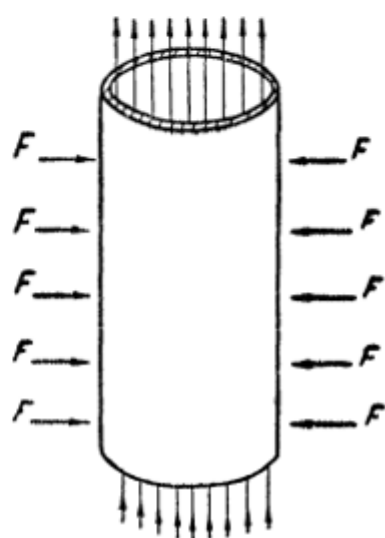


Рис. 7,8. Сжатие магнитного поля, проходящего через металлическую трубку.

Вследствие закручивания проводящей трубки силовые линии также должны были закручиваться и на однородное поле H_z внутри трубки должно было бы накладываться осциллирующее поле H_θ . Это поле легко обнаруживалось.

Представим теперь тонкостенную хорошо проводящую трубку (рис. 7,8), пронизываемую магнитным полем. Если с помощью внешних сил очень быстро деформировать трубку, так чтобы ее поперечное сечение уменьшилось в k раз, то благодаря постоянству магнитного потока

$$\int B dS = BS = \text{const}$$

поле H внутри трубки увеличится в k раз (если сжатие произведено достаточно быстро). Эта идея, высказанная проф. Терлецким, была осуществлена Фюртом (США, Ливермор). Для очень быстрого сжатия Фюрт применял взрыв тринитротолуола, окружавшего трубку. Таким образом удалось увеличить магнитное поле с $2 \cdot 10^5$ до 10^7 гаусс в течение 1 мксек.

§ 7.3. Магнитное давление

Механическую силу $[jB]$ удобно представлять как давление $\frac{\mu_0 H^2}{2}$ в направлении, перпендикулярном силовым линиям. Для жид-

кости в стационарном состоянии $\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0\right)$ уравнение Навье — Стокса (7,9) представится равенством

$$\text{grad } p = [jB],$$

из которого видно, что сила давления может уравниваться механической силой, действующей на ток в магнитном поле. Ток в последнем равенстве можно исключить с помощью уравнения (7,3):

$$\text{grad } p = [jB] = \mu_0 [\text{rot } \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}] = -\frac{\mu_0}{2} \text{grad } H^2 + \mu_0 (\mathbf{H} \text{ grad}) \mathbf{H}. \quad (7,16)$$

Если силовые линии представляются параллельными прямыми, то $(\mathbf{H} \text{ grad}) \mathbf{H} = 0$, и мы получаем

$$\text{grad} \left(p + \frac{\mu_0 H^2}{2} \right) = 0,$$

или

$$p + \frac{\mu_0 H^2}{2} = \text{const.}$$

Проводящая жидкость может удерживаться магнитным полем в ограниченном объеме. Для этого необходимо, чтобы сумма гидростатического давления p и «магнитного давления» $\frac{\mu_0 H^2}{8\pi}$ внутри жидкости была равна внешнему «магнитному давлению» $\frac{\mu_0 H^2}{2}$:

$$p + \frac{\mu_0 H'^2}{2} = \frac{\mu_0 H^2}{2}. \quad (7,17)$$

Второе слагаемое в выражении (7,16) связано с кривизной силовых линий. Исходя из определения градиента векторного поля по вектору, мы можем записать это слагаемое в виде

$$(\mathbf{H} \nabla) \mathbf{H} = H \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{H(s + \Delta s) - H(s)}{\Delta s},$$

где Δs — длина, отсчитываемая вдоль силовой линии. Как видно из рис. (7,9)

$$\left((\mathbf{H} \nabla) \mathbf{H} \right)_\perp = H^2 \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \mathbf{n} = \frac{H^2}{R} \mathbf{n}, \quad (7,18)$$

где R — радиус кривизны силовой линии и n — единичный вектор в направлении главной нормали к силовой линии. Мы видим, что искривление магнитной силовой линии вызывает силу, аналогичную упругой силе, возникающей при искривлении натянутой струны. С этой точки зрения смысл уравнения (7,16) состоит в том, что градиент полного давления в проводящей жидкости $\left(p + \frac{\mu_0 H^2}{2}\right)$ уравнивается «натяжением силовых линий».

Отношение давлений $\frac{p}{\left(\frac{\mu_0 H^2}{2}\right)}$, где H — внешнее магнитное поле, часто обозначают буквой β . Поскольку интенсивность выделения энергии в результате термоядерной реакции пропорциональна n^2 и, следовательно, p^2 , с точки зрения эффективности системы, выгодно при данном H увеличивать β . Наибольшее значение $\beta = 1$ достигается, когда в плазме магнитное поле отсутствует.

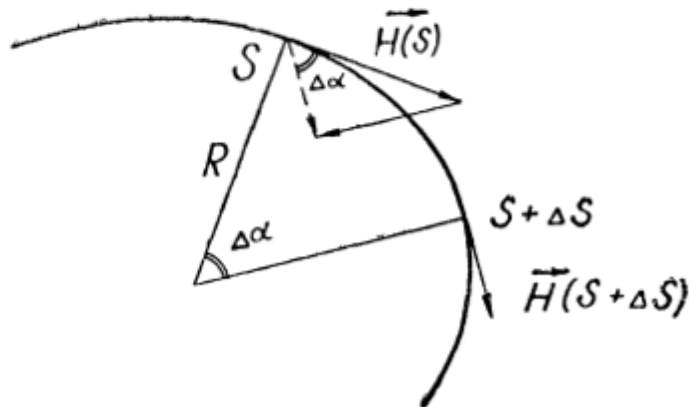


Рис. 7,9. Связь между градиентом магнитного поля по направлению H и кривизной силовых линий.

Равновесие возможно и в случае $\beta \approx 0$, то есть при $p \ll \frac{\mu_0 H^2}{2}$. В этом случае смысл равенства (7,16) состоит в том, что магнитное давление уравнивается натяжением силовых линий. Магнитные поля, обладающие таким свойством, называются бессиловыми. Согласно условию (7,16), которое в данном случае может быть переписано в виде

$$[jH] = 0,$$

или

$$[\text{rot } H \cdot H] = 0,$$

токи в бессиловых полях должны течь только вдоль силовых линий, то есть должно выполняться равенство

$$\text{rot } H = \alpha H.$$

Коэффициент α может быть любой скалярной функцией координат, в простейшем же случае — это постоянная величина. Можно показать, что бессиловое поле с $\alpha = \text{const}$ представляет собой в замкнутой системе состояние с минимальной энергией [27]. Из этой важной теоремы следует устойчивость бессилового поля. Любое малое нарушение конфигурации поля требует затраты энергии и поэтому не может развиваться самопроизвольно, без участия внешних сил.

Магнитное давление возникает в результате действия магнитного поля на токи в плазме, которые, в свою очередь, определяются через магнитные поля. В ограниченной плазме существуют токи, обусловленные тепловым движением частиц. Кроме того, магнитное поле на границе плазмы неоднородно, следовательно, должен существовать еще ток, связанный с дрейфом заряженных частиц в неоднородном магнитном поле. Выясним связь между этими токами на конкретном примере, пользуясь методом ведущего центра.

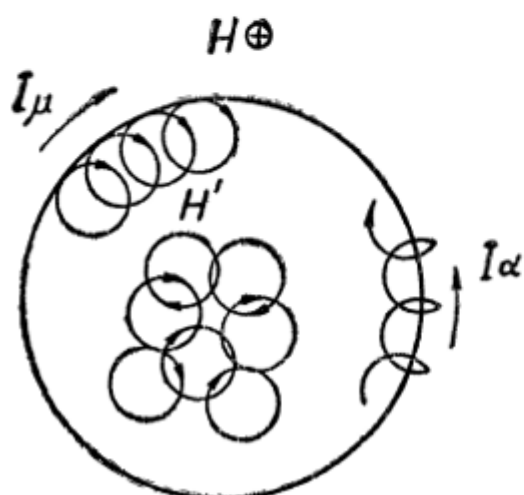


Рис. 7,10. Поперечное сечение плазменного стержня в магнитном поле. Микроскопические токи внутри стержня в среднем взаимно компенсируются. Поверхностные токи (на единицу длины стержня) создаются орбитальным (I_μ) и дрейфовым (I_d) движением периферических зарядов.

Обычно магнитные свойства тел мы связываем с наличием элементарных «амперовых» токов, обладающих магнитными моментами μ . Результирующий магнитный момент, приходящийся на единицу объема, называют магнитной поляризацией M :

$$M = n\mu. \quad (7,19)$$

Плотность тока, связанная с поляризацией, равна

$$j = -\text{rot } M. \quad (7,20)$$

Для аксиально симметричной системы и M , направленного вдоль оси z , плотность тока имеет только азимутальную составляющую

$$j = \frac{\partial}{\partial r} M = \frac{\partial}{\partial r} (n\mu).$$

Если бы элементарные магнитные моменты были закреплены на своих местах, то при $\mu = \frac{\kappa T}{B}$ мы имели бы

$$j = j_\mu = \frac{\partial}{\partial r} \frac{n\kappa T}{B} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{B} \right) = \frac{1}{B} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{p}{B^2} \frac{\partial B}{\partial r}. \quad (7,21)$$

Токи, соответствующие двум слагаемым в полученном выражении одинаково направлены, если $\frac{\partial p}{\partial r} < 0$, а $\frac{\partial B}{\partial r} > 0$, как на границе диамагнитной среды (мы по-прежнему обозначаем $B = \mu_0 H$).

В плазме элементарные магнитные моменты не закреплены, но дрейфуют под действием внешних сил. В неоднородном магнитном поле действует сила $-\mu \frac{\partial B}{\partial r}$, и электроны дрейфуют в азимутальном направлении со скоростью

$$u_d = \frac{\mu}{e} \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial r}.$$

Соответствующая плотность тока равна

$$j_d = neu_d = n\mu \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial r} = \frac{\rho}{B^2} \frac{\partial B}{\partial r}. \quad (7,22)$$

Она направлена в сторону, противоположную j_ν . Алгебраическая сумма j_ν и j_d даёт

$$j = \frac{1}{B} \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (7,23)$$

В плазме, удерживаемой магнитным полем (рис. 7,10), поле H' почти всюду однородно и только в поверхностном слое толщиной порядка диаметра циклотронной орбиты электрона во внешнем поле H , возрастает от H' до H [28]. Обычно, толщина переходного слоя мала, и мы можем считать, что переход осуществляется скачком. Разрыв магнитного поля определяет поверхностную плотность тока

$$I = H - H'. \quad (7,24)$$

Последнее соотношение выводят из уравнения Максвелла (7,3), применяя теорему Стокса к переходному слою толщиной dr (рис. 7,11):

$$\int_s j ds = \int_s \text{rot } H ds = \oint_l H dl,$$

где s — сечение слоя плоскостью, проходящей через ось плазменного цилиндра (в расчете на единицу высоты цилиндра) и l — контур, ограничивающий это сечение. При уменьшении толщины слоя dr величина $\int_s j ds$ стремится к

плотности поверхностного тока I , а контурный интеграл переходит в $H - H'$, и мы получаем (7,24).

В случае резкой границы плазмы (7,23) переходит в

$$I = \frac{\rho}{B_{\text{ср}}},$$

причем $B_{\text{ср}} = \frac{\mu_0}{2} (H + H')$. Подставляя это выражение в (7,24), мы придем к ранее полученному условию равенства давлений на границе плазмы, удерживаемой магнитным полем:

$$p + \frac{\mu_0 H'^2}{2} = \frac{\mu_0 H^2}{2}. \quad (7,17)$$

Рассмотрим теперь следующую простую задачу. Допустим, что плазма вначале заполняла цилиндрическую область в магнитном поле H_1 , причем температура и плотность плазмы были равны p_1 и T_1 . При медленном увеличении магнитного поля

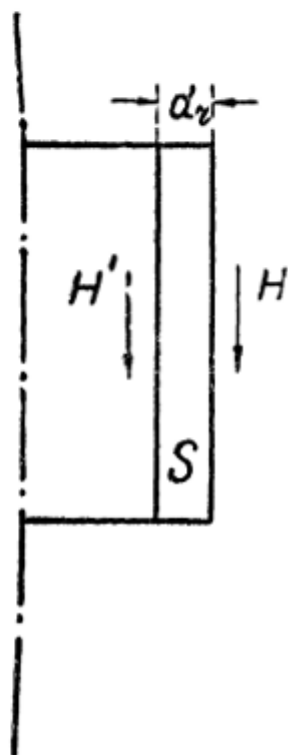


Рис. 7,11. Осевое сечение плазменного стержня в магнитном поле.

плазма сжимается и нагревается. Найдем давление и температуру, которые установятся в плазме, когда магнитное поле достигнет величины H_2 .

Запишем условие равновесия, пользуясь индексами 1 и 2 для начального и конечного состояний:

$$p_1 = n_1 \kappa T_1 = \frac{\mu_0}{2} (H_1^2 - H_1'^2), \quad (7,25)$$

$$p_2 = n_2 \kappa T_2 = \frac{\mu_0}{2} (H_2^2 - H_2'^2). \quad (7,26)$$

Кроме того, поскольку магнитное поле изменяется медленно, элементарные магнитные моменты сохраняются и мы можем написать

$$\frac{\kappa T_1}{H_1'} = \frac{\kappa T_2}{H_2'}. \quad (7,27)$$

Наконец, для адиабатического сжатия выполняется соотношение

$$T \sim n^{\gamma-1},$$

где γ — отношение удельной теплоемкости при постоянном давлении к удельной теплоемкости при постоянном объеме. Величина γ определяется числом степеней свободы частиц:

$$\gamma = \frac{2 + m}{m}. \quad (7,28)$$

Для частиц плазмы в магнитном поле степени свободы, связанные с движениями поперек и вдоль магнитного поля, не равноправны: передача энергии между «поперечными» степенями свободы может осуществляться гораздо быстрее, чем от «поперечных» к «продольной». В этом случае m следует считать равным двум и тогда для адиабатического сжатия

$$T \sim n. \quad (7,29)$$

Приведенных выше уравнений достаточно, чтобы определить n_2 , T_2 , H_1' и H_2' при заданных n_1 , T_1 и H_1 . Решение дается равенствами

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{H_2'}{H_1'} = \frac{H_2}{H_1} \quad (7,30)$$

и

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{H_2^2}{H_1^2}.$$

Очевидно, все эти рассуждения страдают тем недостатком, что не учитывают наличия в плазме частиц разных знаков. Тот же недостаток присущ рассмотренной выше гидродинамической модели плазмы. Плазма представляется как однокомпонентная нейтральная проводящая жидкость. Позднее будет показано, как гидродинамическая модель может быть уточнена. Вначале, однако, мы применим однокомпонентную модель для исследования магнито-гидродинамических волн.

§ 7.4. Магнитогидродинамические волны

Допустим, что в магнитном поле H_0 находится хорошо проводящая жидкость с плотностью ρ_0 и выясним вопрос о возможности распространения в ней колебаний малой амплитуды. Будем предполагать, что колебания распространяются в виде плоской волны с частотой ω и волновым вектором k , так что все переменные величины в плазме изменяются как

$$e^{i(\omega t - kr)}.$$

Предположение о форме волны не ограничивает общности выводов, так как периодический процесс любой формы в теории малого сигнала можно представить суммой гармонических колебаний, а затем исследовать каждое из них в отдельности. Задача будет состоять в выводе дисперсионного уравнения, устанавливающего связь между частотой колебаний и скоростью распространения волны.

Пренебрегая сопротивлением жидкости, будем исходить из следующих уравнений:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}; \quad (7,3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad (7,4)$$

$$\mathbf{E} + [\mathbf{v}\mathbf{B}] = 0; \quad (7,31)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0; \quad (7,32)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + [j\mathbf{B}]. \quad (7,15)$$

Пользуясь предположением о малости амплитуды колебаний, произведем линеаризацию уравнений, то есть отбросим все члены, квадратичные относительно переменных величин. Тогда из уравнений (7,31), (7,32) и (7,15) получим:

$$\mathbf{E} + [\mathbf{v}\mathbf{B}_0] = 0; \quad (7,33)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \quad (7,34)$$

$$\rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -u_0^2 \nabla \rho_1 + [j\mathbf{B}_0]. \quad (7,35)$$

В последнем уравнении использовано преобразование

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial \rho} \nabla \rho_1 = u_0^2 \nabla \rho_1,$$

где $\rho_1 = \rho - \rho_0$ — возмущение плотности, и u_0^2 — постоянный коэффициент, представляющий собой квадрат скорости звука $u_0^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$.

Уравнение (7,4) преобразуем, применяя операцию rot :

$$\nabla^2 E - \text{grad div } E = \mu_0 \frac{\partial j}{\partial t}. \quad (7,36)$$

Далее, пользуясь тем, что все величины зависят от координат и времени как $e^{i(\omega t - kr)}$, перейдем от дифференциальных уравнений к алгебраическим уравнениям:

$$k^2 E - k(kE) = -i\mu_0 \omega j, \quad (7,37)$$

$$E = -[vB_0], \quad (7,38)$$

$$\omega \rho_1 = \rho_0 (kv), \quad (7,39)$$

$$\omega \rho_0 v = u_0^2 k \rho_1 - i[jB_0]. \quad (7,40)$$

Исключая $\rho_1 E$ и j , получим

$$u^2 v = \frac{1}{\mu_0 \rho_0} \left\{ [B_0 [vB_0]] - \left[B_0 \frac{k}{k} \right] \cdot \left(\frac{k}{k} [vB_0] \right) \right\} + \\ + u_0^2 \frac{k}{k} \left(\frac{k}{k} v \right),$$

или

$$\left(u^2 - \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_0} \right) v = -\frac{1}{\mu_0 \rho_0} \left\{ B_0 (B_0 v) + \left[B_0 \frac{k}{k} \right] \left(v \left[B_0 \frac{k}{k} \right] \right) \right\} + \\ + u_0^2 \frac{k(kv)}{k^2}, \quad (7,41)$$

где $u \equiv \frac{\omega}{k}$ — фазовая скорость волны.

Выберем декартову систему координат так, чтобы одна из осей (x) была перпендикулярна к плоскости векторов k и H_0 , вторая (y) совпадала с вектором H_0 , а третья, следовательно, лежала в плоскости векторов k и H_0 и была перпендикулярна H_0 (рис. 7,12), запишем уравнение (7,41) в проекциях на эти оси. Проекция на первую ось дает одно из возможных решений для u

$$u_1^2 = \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_0} \cos^2 \theta, \quad (7,42)$$

где θ — угол между векторами H_0 и k . Проекции на две другие оси дадут уравнения

$$u^2 \cos \psi = u_0^2 \cos \theta \cos (\psi - \theta); \quad (7,43)$$

$$u^2 \sin \psi = \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_0} \sin \psi + u_0^2 \sin \theta \cos (\psi - \theta), \quad (7,44)$$

где ψ — угол между H и проекцией вектора v на плоскость, в

которой лежат $\mathbf{k}$ и $\mathbf{H}_0$. Исключая ψ , получим еще два решения для u :

$$u_{2,3}^2 = \frac{1}{2} \left(u_0^2 + \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_0} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{B_0^4}{(\mu_0 \rho_0)^2} + u_0^4 - 2 \frac{B_0^2 u_0^2}{\mu_0 \rho_0} \cos 2\theta}. \quad (7,45)$$

Мы получили три дисперсионных уравнения для трех независимых колебаний, которые могут распространяться в виде плоских волн в проводящей жидкости в магнитном поле. Вектор скорости $\mathbf{v}$ перпендикулярен вектору распространения $\mathbf{k}$ в волне, соответствующей решению (7,42), поэтому последнее описывает поперечную волну. Две другие волны в общем случае не являются ни чисто продольными ни чисто поперечными.

Рассмотрим несколько частных случаев. Остановимся прежде всего на распространении волн вдоль магнитного поля, то есть положим $\theta = 0$. Тогда мы получим две поперечные волны ($\mathbf{k} \perp \mathbf{v}$), распространяющиеся со скоростью

$$u_1^2 = u_2^2 = \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_0}, \quad (7,46)$$

и одну продольную ($\psi = \theta = 0$, то есть $\mathbf{k} \parallel \mathbf{v}$) со скоростью, равной скорости звука в данной жидкости

$$u_3^2 = u_0^2. \quad (7,47)$$

Совпадение скорости распространения волны со звуковой скоростью является следствием того, что при движении жидкости вдоль магнитного поля последнее не оказывает на жидкость никакого действия и, следовательно, движение протекает так же, как в отсутствие магнитного поля.

В случае $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$u_1^2 = u_3^2 = 0 \quad (7,48)$$

и

$$u_2^2 = u_0^2 + \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_0}, \quad (7,49)$$

то есть перпендикулярно магнитному полю в проводящей жидкости может распространяться только продольная волна ($\psi = \theta = 0$,

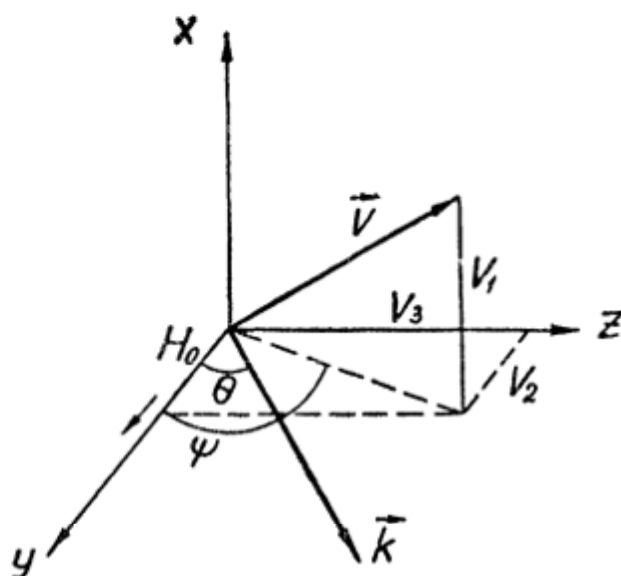


Рис. 7,12. Расположение векторов $\mathbf{H}_0$, $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}$ в декартовой системе координат.

т. е. $k \parallel v$). Это так называемая магнитозвуковая волна. При $H \rightarrow 0$ она переходит в обычную звуковую волну. Увеличение скорости волны при наложении магнитного поля вполне естественно, так как магнитное поле сообщает плазме дополнительную упругость в направлении, перпендикулярном к силовым линиям поля.

В то время, как в обычной непроводящей жидкости возможна только продольная звуковая волна, в проводящей жидкости при $H_0 \neq 0$ вдоль силовых линий могут, как мы видели, распространяться поперечные волны, названные магнитогидродинамическими. Фазовая скорость этих волн

$$u = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}} \quad (7,50)$$

не зависит от частоты и, следовательно, совпадает с групповой скоростью

$$u_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = \left[\frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega}{u} \right) \right]^{-1} = u. \quad (7,51)$$

Из (7,3), (7,37) и (7,38) при $\theta = 0$ легко вывести зависимость между скоростью v и возмущением магнитного поля $H_1 = H - H_0$. Она представляется равенством

$$H_1 = \frac{H_0}{u} v,$$

пользуясь которым, можно показать, что энергия переменной составляющей магнитного поля в одном кубическом метре $\frac{\mu_0 H_1^2}{2}$ равна кинетической энергии $\frac{\rho v^2}{2}$ в том же объеме.

Магнитогидродинамические волны допускают наглядное истолкование в духе старых представлений Фарадея — Максвелла о силовых линиях, как об упругих нитях. Как известно, при разработке основ электродинамики в середине прошлого столетия Максвелл и другие ученые рассматривали магнитные силовые линии как реально существующие линии натяжения в идеальной упругой среде, называемой эфиром. Магнитное поле, «вмороженное» в хорошо проводящую жидкость, обладает свойствами, весьма близкими к «упругости» эфира.

Как мы уже видели, при $\sigma \rightarrow \infty$ невозможно смещение поля относительно жидкости: жидкость увлекает за собой магнитные силовые линии, так как если бы частицы жидкости были «приклеены» к силовым линиям. Формально (согласно представлениям XIX столетия) единице длины каждой силовой линии можно приписать массу $\frac{\rho}{B}$ (каждая единичная площадка поперечного сечения жидкости пронизывается B силовыми линиями). Как было

показано выше, механическое действие магнитного поля можно представить в виде гидростатического давления $\frac{B^2}{2\mu_0}$ и продольного натяжения $\frac{B^2}{\mu_0}$. В несжимаемой жидкости действует только натяжение. Величина натяжения на одну силовую линию равна $\frac{B}{\mu_0}$.

Теперь мы можем воспользоваться уравнением струны

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = S \frac{d^2 y}{dz^2},$$

где y — смещение, m — масса единицы длины и S — натяжение. Как известно, из этого уравнения следует, что поперечные колебания

распространяются вдоль струны (по z) со скоростью $u = \left(\frac{S}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Подставляя сюда $m = \frac{\rho}{B}$ и $S = \frac{B}{\mu_0}$, мы получим величину, совпадающую с найденной ранее скоростью распространения магнито-гидродинамических волн:

$$u = \frac{B}{\sqrt{\mu_0 \rho}}.$$

Экспериментально магнито-гидродинамические волны исследовались С. Лундквистом (1951 г.) и Б. Ленертом (1954 г.) Лундквист проводил исследования на ртути, налитой в металлический цилиндр в вертикальном магнитном поле напряженностью 13 000 эрстед. Волны возбуждались с помощью горизонтального диска с радиальными ребрами, находящегося на дне сосуда со ртутью. Диск совершал малые крутильные колебания вокруг вертикальной оси. От диска вверх распространялась бегущая волна, отражающаяся затем от свободной поверхности ртути. Колебания поверхности ртути регистрировались с помощью плавающего зеркала. Скорость распространения определялась по отставанию по фазе колебаний на поверхности относительно колебаний, возбуждаемых диском на дне сосуда.

Полученные Лундквистом данные качественно согласуются с результатами расчета, однако совпадение не является полным (рис. 7,13). Расхождение можно объяснить нерегулярностью движения вблизи ребер на вибрирующем диске, неточностью учета

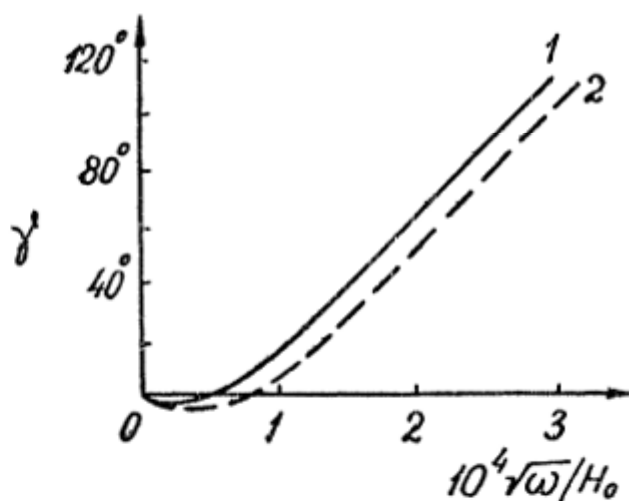


Рис. 7,13. Зависимость разности фаз колебаний γ на поверхности ртути и на дне сосуда от величины $\frac{\sqrt{\omega}}{H_0}$ (эрстед): 1 — экспериментальная кривая, полученная Лундквистом; 2 — теоретическая кривая.

граничных условий и т. д. Ленерт проводил более точные измерения, причем вместо ртути он взял более легкую и хорошо проводящую жидкость — жидкий натрий, и в результате добился несколько лучшего согласия теории с экспериментом.

Вопросы возбуждения и распространения магнитогидродинамических волн в плазме имеют большое практическое значение и являются предметом многочисленных исследований. Открытие этих волн позволило объяснить некоторые астрофизические явления. В частности, механизм их распространения лежит в основе гипотезы Альфвена о природе солнечных пятен.

§ 7.5. Уточнение гидродинамической модели

Наиболее полно состояние газа описывается функцией распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, представляющей плотность частиц в пространстве координат и скоростей. Согласно теореме Лиувилля, эта величина вдоль фазовой траектории изменяется со скоростью, определяемой столкновениями между частицами

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{ст}}. \quad (7,52)$$

Здесь $\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{ст}}$ обозначает изменение f , обусловленное столкновениями между частицами. Для множества одинаковых частиц уравнение (7,52) запишется в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{du_i}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{ст}}, \quad (7,53)$$

где $i = 1, 2, 3$, а оси x, y, z обозначены через x_1, x_2, x_3 . Поскольку $\frac{dx_i}{dt} = u_i$ и $\frac{du_i}{dt} = \frac{F_i}{m}$, где F_i — компонента внешней силы, которую мы будем считать консервативной, уравнение (7,53) можно переписать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_i \frac{F_i}{m} \frac{\partial f}{\partial u_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{ст}}. \quad (7,54)$$

Последнее уравнение, называемое кинетическим, определяет изменение функции f под действием заданных сил F_i . Написание правой части уравнения в явном виде требует знания законов взаимодействия между частицами. Для частиц ионизованного газа основную роль играют взаимодействия на больших расстояниях. Они могут быть представлены как результат воздействия полей, которые, в свою очередь, создаются частицами плазмы. Мы можем, пользуясь уравнениями Максвелла, выразить эти поля через заряды и токи, то есть, в конечном счете, через ту же функцию распределения, и затем включить найденные таким путем поля в выражения для силы F_i в левой части уравнения.

В результате получится система уравнений, состоящая из кинетического уравнения и уравнений Максвелла. Функция распределения, являющаяся решением этой системы уравнений, дает полное описание состояния газа. По ней можно найти любую «макроскопическую» величину, например, плотность, макроскопическую скорость, плотность тока. Если $Q(\mathbf{u})$ — какая-либо функция скорости частицы, то соответствующая ей макроскопическая величина $\overline{Q(\mathbf{r}, t)}$ определяется через функцию распределения следующим образом:

$$\overline{Q(\mathbf{r}, t)} = \frac{1}{n(\mathbf{r}, t)} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} Q(\mathbf{u}) f(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) du_x du_y du_z, \quad (7.55)$$

где $n(\mathbf{r}, t)$ — плотность частиц, определяемая равенством

$$n(\mathbf{r}, t) = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) du_x du_y du_z. \quad (7.56)$$

В большинстве случаев кинетическое уравнение оказывается слишком сложным, чтобы его можно было разрешить относительно функции f . Мы используем его для вывода уравнений магнитной гидродинамики. При выполнении подобной работы выясняется смысл входящих в уравнения величин, четко формулируются использованные предположения и, таким образом, устанавливаются границы применимости данной физической модели.

Чтобы от кинетического уравнения перейти к уравнениям для макроскопических величин $\overline{Q(\mathbf{r}, t)}$, мы должны будем подобрать соответствующую функцию скорости частицы $Q(\mathbf{u})$, затем помножить уравнение (7.54) на $Q(\mathbf{u}) du_x du_y du_z$ и проинтегрировать его по всем скоростям.

Вычислим предварительно следующие интегралы:

$$\begin{aligned} 1. \int \int \int_{-\infty}^{\infty} Q(\mathbf{u}) \frac{\partial f}{\partial t} du_x du_y du_z &= \frac{\partial}{\partial t} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} Q(\mathbf{u}) f du_x du_y du_z = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (n\overline{Q}); \end{aligned} \quad (7.57)$$

$$\begin{aligned} 2. \int \int \int_{-\infty}^{\infty} Q(\mathbf{u}) u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} du_x du_y du_z &= \frac{\partial}{\partial x_i} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} Q(\mathbf{u}) u_i f du_x du_y du_z = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} (n\overline{u_i Q}); \end{aligned} \quad (7.58)$$

$$\begin{aligned}
3. \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\mathbf{u}) F_i(\mathbf{r}, \mathbf{u}) \frac{\partial f}{\partial u_i} du_x du_y du_z = \\
= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f \frac{\partial}{\partial u_i} \{F_i(\mathbf{r}, \mathbf{u}) Q(\mathbf{u})\} du_x du_y du_z = - n \overline{\frac{\partial}{\partial u_i} (F_i Q)}. \quad (7,59)
\end{aligned}$$

При вычислении (7,59) мы выполнили интегрирование по частям и воспользовались предположением, что $f(\mathbf{u})$ обращается в нуль при $u_i = \pm \infty$.

Положим теперь $Q = 1$ и выполним интегрирование всех членов уравнения (7,54) по всем скоростям. Первый член дает скорость изменения плотности $\frac{\partial n}{\partial t}$, второй $\nabla(n\mathbf{v})$, где $\mathbf{v} = \overline{\mathbf{u}}$. Интеграл от третьего члена равен нулю, если выполняется условие $\frac{dF_i}{du_i} = 0$. Последнее выполняется для всех интересующих нас сил. Правая часть не дает никакого вклада, поскольку столкновения не изменяют числа частиц на единицу объема. В результате мы получили уравнение непрерывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(n\mathbf{v}) = 0. \quad (7,60)$$

Чтобы найти уравнение для изменения макроскопической скорости $\mathbf{v}$, необходимо положить $Q = m\mathbf{u}$. Снова умножаем (7,61) на $Q du_x du_y du_z$ и интегрируем по всем скоростям. Тогда первый член (7,54) дает

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial t} (m\mathbf{u}) du_x du_y du_z &= \frac{\partial}{\partial t} (mn\mathbf{v}) = \\
&= mn \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + m\mathbf{v} \frac{\partial n}{\partial t} = mn \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \nabla(nm\mathbf{v}).
\end{aligned}$$

Второй член требует более сложных вычислений:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_i u_i \mathbf{u} \frac{\partial f}{\partial x_i} du_x du_y du_z &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_x \mathbf{u} f du_x du_y du_z + \\
&+ \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_y \mathbf{u} f du_x du_y du_z + \frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_z \mathbf{u} f du_x du_y du_z = \\
&= i \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 f du_x du_y du_z + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_y u_x f du_x du_y du_z + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_z u_x f du_x du_y du_z \Big\} + \mathbf{j} \Big\{ \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_x u_y f du_x du_y du_z + \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_y^2 f du_x du_y du_z + \frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_z u_y f du_x du_y du_z \Big\} + \\
& + \mathbf{k} \Big\{ \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_x u_z f du_x du_y du_z + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_y u_z f du_x du_y du_z + \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_z^2 f du_x du_y du_z \Big\}.
\end{aligned}$$

Вводя обозначение $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ и замечая, что $\boldsymbol{\omega} = 0$, продолжим преобразования следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{i} \Big\{ \frac{\partial}{\partial x} (nv_x^2 + n\overline{\omega_x^2}) + \frac{\partial}{\partial y} (nv_x v_y + n\overline{\omega_x \omega_y}) + \frac{\partial}{\partial z} (nv_x v_z + n\overline{\omega_x \omega_z}) \Big\} + \\
& + \mathbf{j} \Big\{ \frac{\partial}{\partial x} (nv_y v_x + n\overline{\omega_y \omega_x}) + \frac{\partial}{\partial y} (nv_y^2 + n\overline{\omega_y^2}) + \frac{\partial}{\partial z} (nv_y v_z + n\overline{\omega_y \omega_z}) \Big\} + \\
& + \mathbf{k} \Big\{ \frac{\partial}{\partial x} (nv_z v_x + n\overline{\omega_z \omega_x}) + \frac{\partial}{\partial y} (nv_y v_z + n\overline{\omega_y \omega_z}) + \frac{\partial}{\partial z} (nv_z^2 + n\overline{\omega_z^2}) \Big\}.
\end{aligned}$$

В простейшем случае имеется изотропное максвелловское распределение. Тогда при разных α и β $\overline{\omega_\alpha \omega_\beta} = 0$, и $\overline{\omega_x^2} = \overline{\omega_y^2} = \overline{\omega_z^2} = \frac{\kappa T}{m}$. Слагаемые с $\boldsymbol{\omega}$ дают, следовательно,

$$\frac{1}{m} \nabla (n\kappa T) = \frac{1}{m} \nabla p,$$

где $p = n\kappa T$ — давление газа. Если распределение не изотропно, давление представляется тензором [16].

Обычно состояние с анизотропной функцией распределения возникает в результате сжатия плазмы, высокочастотного нагрева и других процессов, при которых не все степени свободы частиц плазмы получают равную энергию, и, кроме того, если обмен энергией между различными степенями свободы осуществляется недостаточно быстро. В связи с этим часто приходится различать «продольные» и «поперечные» давления и температуры.

Слагаемые, содержащие компоненты вектора $\mathbf{v}$, приводятся к выражению

$$(n\mathbf{v}) \nabla \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) (n\mathbf{v}).$$

Таким образом, второй член уравнения дает

$$m (n \mathbf{v}) \nabla \mathbf{v} + m (\mathbf{v} \nabla) (n \mathbf{v}) + \nabla p.$$

Третий член преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_i \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{F_i}{m} m \mathbf{u} \frac{\partial f}{\partial u_i} du_x du_y du_z &= -n \sum_i \overline{\frac{\partial}{\partial u_i} (F_i \mathbf{u})} = \\ &= -n \left(\sum_i \overline{\frac{\partial F_i}{\partial u_i} \mathbf{u}} + \sum_i \overline{F_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial u_i}} \right) = \\ &= -n \{ q \mathbf{E} + q [\mathbf{v} \mathbf{B}] \}. \end{aligned}$$

Вклад столкновений обозначим буквой $\mathbf{P}$. Он представляет изменение импульса частиц данного рода в результате столкновений их с частицами другого рода; столкновения между одинаковыми частицами в силу третьего закона Ньютона не приводят к изменению импульса.

Складывая вычисленные выше интегралы, мы получим искомое уравнение переноса импульса:

$$nm \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] = nq (\mathbf{E} + [\mathbf{v} \mathbf{B}]) - \nabla p + \mathbf{P}. \quad (7,61)$$

Плазма состоит по меньшей мере из двух компонент — электронной и ионной. Для каждой из них должно быть составлено уравнение переноса. Снабжая буквы, относящиеся к электронам и ионам индексами e и i и полагая $q_i = eZ$ и $q_e = -e$, получим

$$\frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + (\mathbf{v}_e \nabla) \mathbf{v}_e = -\frac{e}{m_e} (\mathbf{E} + [\mathbf{v}_e \mathbf{B}]) - \frac{\nabla p_e}{n_e m_e} + \frac{\mathbf{P}_{ie}}{n_e m_e}; \quad (7,62)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \nabla) \mathbf{v}_i = \frac{Ze}{m_i} (\mathbf{E} + [\mathbf{v}_i \mathbf{B}]) - \frac{\nabla p_i}{n_i m_i} + \frac{\mathbf{P}_{ei}}{n_i m_i}. \quad (7,63)$$

Эти уравнения представляют двухжидкостную модель плазмы. От нее можно перейти к одножидкостной модели, уточненной по сравнению с моделью, рассмотренной нами в начале настоящей главы.

В дальнейшем мы будем считать плазму нейтральной: $Zn_i = n_e$. Кроме того, всюду будем пренебрегать отношением $\frac{m_e}{m_i}$ по сравнению с единицей и величиной $\frac{m_e}{m_i} \rho_i$ по сравнению с ρ_e . Наконец, скорости и токи будем считать настолько малыми, чтобы квадратичными членами по этим величинам можно было пренебречь. Плотность, гидродинамическую скорость и плотность

тока в однокомпонентной жидкости, которая будет служить моделью плазмы, мы определим следующим образом:

$$\rho = n_i m_i + n_e m_e; \quad (7,64)$$

$$\rho \mathbf{v} = n_i m_i \mathbf{v}_i + n_e m_e \mathbf{v}_e; \quad (7,65)$$

$$\mathbf{j} = e (n_i Z \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e). \quad (7,66)$$

Умножим уравнения (7,62) и (7,63) на $m_e n_e$ и $m_i n_i$ соответственно и результаты сложим. Тогда, пользуясь упомянутыми выше упрощающими предположениями, мы получим

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = [\mathbf{jB}] - \nabla p, \quad (7,67)$$

где $p = p_e + p_i$. Члены P_{ie} и P_{ei} при сложении взаимно уничтожились в силу третьего закона Ньютона. Умножая (7,62) на n_e и (7,63) на $Z n_i$ и вычитая первое уравнение из второго, получим второе уравнение однокомпонентной модели:

$$\frac{m_e}{n_e e^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \mathbf{E} + [\mathbf{vB}] + \frac{1}{n_e e} \nabla p_e - \frac{1}{n_e e} [\mathbf{jB}] - \eta \mathbf{j}. \quad (7,68)$$

Последний член в правой части уравнения (7,62) обусловлен соударениями между частицами. Количество движения, которым обмениваются электроны и ионы при столкновениях, пропорционально относительной скорости движения электронов и ионов, то есть P_{ei} пропорционально $\mathbf{j}$. Коэффициент пропорциональности мы представляем в виде произведения $e n_e \eta$.

$$P_{ei} = e n_e \eta \mathbf{j},$$

чем и определяется множитель η , входящий в уравнение (7,68).

При $\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = 0$ и $\nabla p_i = 0$ уравнение (7,68) сводится к закону Ома, в котором η играет роль сопротивления $\eta = \frac{1}{\sigma}$, поэтому уравнение (7,68) называют обобщенным законом Ома. Присутствие в нем члена с $[\mathbf{jB}]$ указывает на то, что направление тока в плазме не всегда совпадает с направлением электрического поля. Перпендикулярная составляющая тока (ток Холла) при $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ становится весьма значительной, если частота столкновений между частицами плазмы мала по сравнению с циклотронной частотой ($\nu \ll \omega_H$).

Уравнения (7,67) и (7,68) следует еще дополнить уравнениями Максвелла, уравнением сохранения заряда, уравнениями сохранения числа частиц для каждого вида частиц и, наконец, уравнением, определяющим полное давление.

Уточненная гидродинамическая модель применима, разумеется, к более широкому кругу явлений, чем модель, рассмотренная в начале настоящей главы. Мы рассмотрим две задачи, которые могут решаться только с использованием уточненной модели. Одна из задач касается диффузии частиц поперек магнитного поля. В случае стационарного движения $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$ уравнения (7,67) и (7,68) приводятся к виду

$$\nabla p = [jB], \quad (7,69)$$

$$E + [vB] = \eta j + \frac{1}{en_e} \nabla p_i. \quad (7,70)$$

Здесь p_i представляет давление ионов, равное разности $p - p_e$.

Поскольку интерес представляют только поперечные компоненты движения, мы будем считать векторы v и j перпендикулярными к магнитному полю H .

Умножая (7,70) векторно на B , определим поперечную скорость

$$v_{\perp} = \left[\frac{B}{B^2} \left(-E + \frac{1}{en_e} \nabla p_i \right) \right] - \frac{\eta \nabla p}{B^2}. \quad (7,71)$$

Первый член полученного выражения представляет дрейф частиц, обусловленный электрическим полем и градиентом давления. Этот дрейф не нарушает изоляции плазмы, так как движение вещества происходит параллельно изобарам и не ведет к расходимости. Второй член обусловлен сопротивлением и представляет дрейф в направлении градиента давления. Это — поперечная диффузия. Скорость диффузии обратно пропорциональна квадрату магнитного поля. Из вывода ясно, что диффузия обусловлена лишь столкновениями частиц разного рода. Столкновения частиц одного рода не увеличивают диффузию. Причину этого легко понять, если заметить, что при столкновении одинаковых частиц их ведущие центры смещаются в противоположные стороны, в то время как при соударении частиц разных знаков ведущие центры смещаются в одну и ту же сторону.

Умножая второй член в (7,71) на плотность плазмы $n = n_e$, мы получим плотность диффузионного потока в направлении, перпендикулярном к магнитному полю:

$$\Phi = - \frac{n \eta \nabla p}{B^2}.$$

Для изотермической плазмы имеем

$$\nabla p = \kappa T \nabla n = \frac{mv^2}{3} \nabla n,$$

следовательно,

$$\Phi = -\frac{n\eta mv^2}{3B^2} \nabla n.$$

Множитель при ∇n представляет коэффициент диффузии плазмы перпендикулярно к магнитному полю. Подставляя сюда $\eta = \frac{1}{\sigma}$ из (4,61) и $v = \frac{v}{\lambda}$ из (4,13), мы придем к выражению

$$D_{\perp} = \frac{e^2 n \ln \Lambda}{6\pi \epsilon_0^2 B^2 v}, \quad (4,33)$$

найденному в главе 4 иным способом.

Диффузионное расширение плазмы тесно связано с затуханием в ней токов.

Идеально проводящий плазменный стержень неопределенно долго удерживается магнитным полем H (рис. 7,10). Газокинетическое давление в нем уравнивается силой, с которой магнитное поле действует на ток I , текущий по поверхности стержня. Сопротивление реальной плазмы, однако, отлично от нуля, и такая система не может быть стационарной. В обычных проводниках сопротивление ведет к затуханию тока, причем энергия упорядоченного движения зарядов переходит в тепловую энергию. Подобного рода процесс должен, по-видимому, осуществляться и в данном случае, что может показаться не ясным, так как поверхностный ток I сам обусловлен тепловым движением заряженных частиц.

Как мы видели, соударения ведут к диффузии поперек магнитного поля и к расширению плазменного стержня. В результате такого расширения магнитное поле H' внутри поля будет возрастать, приближаясь к магнитному полю вне плазмы, а ток будет уменьшаться согласно формуле

$$I = (H - H'). \quad (7,21)$$

Вместе с ростом магнитного поля H' внутри плазмы вследствие инвариантности магнитного момента будет увеличиваться энергия циклотронного вращения частиц, то есть температура $T = T_{\perp}$. Если благодаря диффузии в магнитном поле H плотность частиц уменьшилась с величины n_1 до n_2 , то температура увеличится с T_1 до T_2 , причем если движение частиц в направлении магнитного поля существенной роли не играет, величина T_2 может быть найдена из системы уравнений

$$n_1 \kappa T_1 = \frac{H_0^2}{2} (H_1^2 - H_1'^2); \quad (7,72)$$

$$n_2 \kappa T_2 = \frac{H_0^2}{2} (H_1^2 - H_2'^2); \quad (7,73)$$

$$\frac{\kappa T_1}{H_1'} = \frac{\kappa T_2}{H_2'}. \quad (7,74)$$

Мы видим, таким образом, что в плазменном стержне, удерживаемом магнитным полем, ток действительно затухает благодаря соударениям между частицами плазмы и энергия тока в конце концов переходит в энергию теплового движения частиц.

Второй пример касается распространения в плазме колебаний с частотой, близкой к ионной циклотронной частоте:

$$\omega_{H_i} = \frac{e}{m_i} B. \quad (7,75)$$

Мы будем исходить из следующей системы уравнений:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = [j\mathbf{B}]; \quad (7,76)$$

$$\mathbf{E} + [\mathbf{v}\mathbf{B}] = \frac{1}{en} [j\mathbf{B}]; \quad (7,77)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad (7,78)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}. \quad (7,79)$$

Второе из уравнений этой системы представляет собой обобщенный закон Ома для случая, когда сопротивление и градиент давления не существенны. В обобщенном законе Ома (7,68)

имеется еще член, пропорциональный $\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}$, однако, как легко видеть, при частотах порядка ионной циклотронной частоты он составляет долю порядка $\frac{m_e}{m_i}$ от одного из оставленных в (7,77)

членов $\frac{1}{en} [j\mathbf{B}]$ и, следовательно, может не учитываться. При отсутствии правой части уравнение (7,77) совпадает с законом Ома для идеально проводящей жидкости (7,31), в которой, как мы видели, возможны поперечные магнитогидродинамические волны, распространяющиеся вдоль магнитного поля со скоростью

$$u = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}}. \quad (7,50)$$

Учет слагаемого с $[j\mathbf{B}]$ в законе Ома позволит нам обнаружить интересную зависимость фазовой скорости волны от частоты, особенно сильно проявляющуюся вблизи ионной циклотронной частоты.

Рассмотрим малую по амплитуде поперечную волну $e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$, распространяющуюся вдоль магнитного поля ($\mathbf{k} \parallel \mathbf{H}_0$, $\mathbf{v} \perp \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \perp \mathbf{k}$) и найдем фазовую скорость волны $u_i = \frac{\omega}{k}$. Обозначая буквами ρ_0 и $H_0 = \frac{1}{\mu_0} B_0$ постоянные составляющие плотности плазмы и магнитного поля, а буквами $H_1 = \frac{1}{\mu_0} B_1$, E , $\mathbf{v}$ и $\mathbf{j}$ переменные поля, скорость и плотность тока, мы в линейном приближении из системы (7,76) — (7,79) получим

$$i\omega\rho_0\mathbf{v} = [\mathbf{j}B_0]; \quad (7,80)$$

$$\mathbf{E} + [\mathbf{v}B_0] = \frac{1}{en} [\mathbf{j}B_0]; \quad (7,81)$$

$$[\mathbf{k}E] = \omega B_1; \quad (7,82)$$

$$-i[\mathbf{k}H_1] = \mathbf{j}. \quad (7,83)$$

Исключим из этих уравнений H_1 , E и $\mathbf{j}$, тогда получится однородное уравнение относительно $\mathbf{v}$:

$$\frac{i\omega\rho_0 k^2}{en} \mathbf{v} = \left(k^2 - \frac{\mu_0 \rho_0 \omega^2}{B_0^2} \right) [\mathbf{v}B_0].$$

То же уравнение после умножения (векторно) на B_0 , представляется в виде

$$\frac{i\omega\rho_0 k^2}{en} [\mathbf{v}B_0] = - \left(k^2 - \frac{\mu_0 \rho_0 \omega^2}{B_0^2} \right) \mathbf{v} B_0^2.$$

Приравнявая произведение левых частей последних двух уравнений произведением правых и сокращая их на $\mathbf{v} [\mathbf{v}B_0]$, мы получим соотношение между k и ω , являющееся условием существования отличных от нуля решений для $\mathbf{v}$:

$$\left(\frac{\omega\rho_0 k^2}{en} \right)^2 = B_0^2 \left(k - \frac{\mu_0 \rho_0 \omega^2}{B_0^2} \right)^2$$

или

$$u_i^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_0} \left(1 \pm \frac{\omega}{\omega_{H_i}} \right). \quad (7,84)$$

Мы нашли формулу для скорости распространения так называемых ионно-циклотронных волн. При низких частотах ($\omega \ll \omega_{H_i}$) она переходит в формулу (7,50) для скорости распространения магнито-гидродинамических волн. Знаки «плюс» и

«минус» в (7,84) относятся к двум волнам, отличающимся поляризацией. Наиболее интересна волна, соответствующая знаку минус: при приближении частоты к $\omega_{H\epsilon}$ скорость волны стремится к нулю. Теория ионных циклотронных волн имеет важное применение в технике высокочастотного нагрева плазмы.

§ 7,6. О методах описания плазмы

В кинетической теории газов основные явления связаны с взаимными столкновениями частиц, в то время как в разреженной плазме основным является взаимодействие заряженных частиц с электрическими и магнитными полями, как внешними, так и создаваемыми зарядами и токами в самой плазме. Можно указать три метода теоретического описания процессов, протекающих в плазме: микроскопическое описание, использующее дрейфовое приближение, статистическое описание, основанное на решении кинетического уравнения совместно с уравнениями Максвелла, и макроскопическое описание с помощью уравнений магнитной гидродинамики.

Микроскопическое описание сводится к вычислению траекторий частиц плазмы (или ведущих центров) в полях, создаваемых частицами плазмы и внешними источниками. При микроскопическом рассмотрении полностью пренебрегают взаимными столкновениями частиц. Такой элементарный подход не позволяет дать полное количественное описание свойств плазмы, однако этот метод обладает преимуществом наглядности, благодаря чему он больше, чем другие методы, помог качественно понять многие явления физики плазмы. К сожалению, применимость метода существенно ограничена требованием, чтобы частота столкновений ν была малой по сравнению с характерными динамическими частотами рассматриваемой проблемы ($\omega_0 = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m}}$, $\omega_H = \frac{e}{m} B$). Микроскопическое рассмотрение, приложенное к ансамблю заряженных частиц, позволяет установить наличие макроскопических зарядов (поляризация) и токов, создающих дополнительные магнитные и электрические поля. Поэтому уравнения движения зарядов или ведущих центров, рассмотренные в конце главы 5, должны быть дополнены уравнениями Максвелла для самосогласованных полей.

В основе статистического рассмотрения лежит уравнение Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f + \frac{e}{m} (\mathbf{E} + [\mathbf{v} \mathbf{B}]) \nabla_{\mathbf{v}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{ст}},$$

дополненное уравнениями Максвелла. Уравнение Больцмана

должно составляться для каждого рода частиц плазмы. При решении конкретных проблем физики плазмы нас редко интересует сама функция распределения, более интересными являются макроскопические величины (гидродинамическая скорость, давление), получаемые путем усреднения по всему множеству частиц. Для вычисления этих макроскопических величин следовало бы решить кинетическое уравнение, то есть найти функцию распределения, а затем путем усреднения определить искомую величину. Математическая сложность решения уравнения Больцмана с учетом $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{ст}}$ очень затрудняет применение такого прямого метода для решения практических задач. Поэтому часто предпочитают идти иным путем. Еще со времен Максвелла было известно, что путем усреднения из кинетического уравнения можно получить уравнения гидродинамики (см., например, книгу Тимирязева «Кинетическая теория материи», гл. 16), то есть уравнение непрерывности, уравнение переноса импульса и уравнение сохранения энергии. Как мы видели, таким путем можно получить также основные уравнения магнитной гидродинамики.

Прибегая к той или иной модели, необходимо знать область ее применимости. Гидродинамическая модель применима при больших частотах столкновения. Плазму естественно рассматривать как жидкость, если длина свободного пробега ее частиц мала по сравнению с характерными размерами и прежде всего с размерами области, занятой плазмой. Однако в магнитном поле границы применимости гидродинамической модели значительно расширяются. Как показали Г. Чу, М. Гольдбергер и Ф. Лоу [29], уравнения магнитной гидродинамики оказываются справедливыми и в случае малой частоты столкновений, если только движение происходит в направлении, перпендикулярном магнитному полю, или, говоря более точно, если перенос импульса вдоль магнитного поля отсутствует. В этом месте области применимости гидродинамической модели и дрейфового приближения пересекаются.

Естественно сопоставить скорость дрейфа со средней, гидродинамической скоростью. При этом возникает совершенно законный вопрос, всегда ли дрейфовая скорость равна гидродинамической скорости. Прежде всего, сделаем следующее замечание. При вычислении макроскопических скоростей мы разбиваем газ на элементарные ячейки, которые должны содержать в себе значительное число частиц и в то же время должны быть достаточно малыми, чтобы интересующие нас макроскопические величины менялись внутри этих ячеек очень незначительно.

Рассмотрим элементарный объем размера L (рис. 7,14). Мы можем различить три класса частиц: класс А — ведущий центр и сама частица находятся внутри ячейки, класс В — частица в

данный момент находится в объеме ячейки, а ведущий центр — вне ячейки, и класс С — ведущий центр внутри ячейки, а частица за ее пределами. При вычислении макроскопической скорости мы усредняем индивидуальные скорости частиц классов

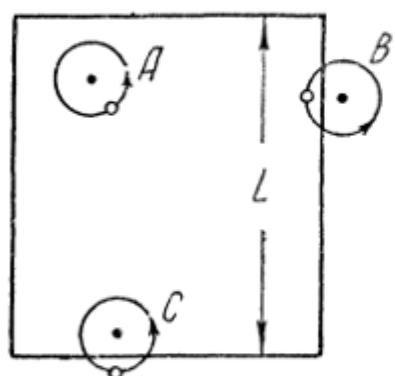


Рис. 7,14. Возможные случаи расположения зарядов и их ведущих центров относительно выделенного контура.

А и В, так как мы при этом не пользуемся понятием ведущего центра. С другой стороны, при определении средней скорости ведущих центров мы должны вести усреднение по классам А и С. Ясно, что разница между результатами двух усреднений может возникнуть только тогда, когда ларморовский радиус ρ сравним с размерами ячейки L . При $\rho \ll L$ практически все частицы будут принадлежать классу А, что дает основание приравнивать гидродинамическую скорость средней скорости дрейфа.

Л. Спитцер и А. Шлютер обратили внимание на то, что при достаточно больших градиентах давления или концентрации могут возникать макроскопические скорости даже в том случае, когда отсутствует скорость дрейфа u_d . Рассмотрим следующий идеализированный случай. Пусть частицы плазмы находятся вне элементарного объема L^3 в магнитном поле H_z и пусть вдоль оси x (рис. 7,15) существует $\text{grad } n$. Тогда на границе слоя x_4 все скорости вращающихся частиц будут направлены по $(-y)$, на границе x_3 у четырех частиц скорости направлены по $(+y)$, а у трех вдоль $(-y)$ и т. д.

Таким образом возникают макроскопические скорости и токи, перпендикулярные H и $\text{grad } n$. Легко видеть, что направления этих скоростей для ионов и электронов противоположны, поэтому токи электронов и ионов складываются.

С другой стороны, ведущие центры в данных условиях покоятся и поэтому, казалось бы, никаких макроскопических скоростей и токов появляться не должно. Противоречие возникает, если не учитываются граничные условия. Если $\text{grad } \rho$ уравновешивается справа на рис. 7,15 твердой стенкой x_4 , то возникают макроскопические скорости, направленные вдоль $(-y)$,

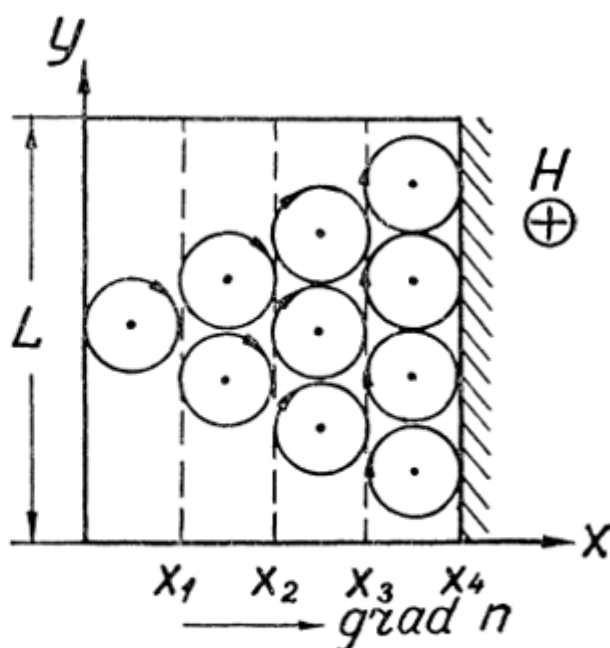


Рис. 7,15. Макроскопическая скорость и скорость дрейфа в плазме с градиентом концентрации.

в точности равные макроскопическим скоростям предыдущего микроскопического рассмотрения. Картина появления макроскопических токов аналогична картине, рассмотренной нами при обсуждении диамагнетизма плазмы.

ГЛАВА 8

САМОСЖАТЫЙ РАЗРЯД И УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ

Наиболее ранние варианты термоядерных устройств основывались на использовании джоулева нагрева и сжатия плазмы в газовом разряде. Если в газе создать достаточно большое электрическое поле, возникнет разряд. Газ ионизуется и заряженные частицы, ускоряясь полем, будут приобретать кинетическую энергию. Эта энергия благодаря столкновениям с другими частицами будет равномерно распределяться между всеми степенями свободы данного множества частиц — плазма будет нагреваться. Кроме того, если ток велик, возникнет магнитное поле, охватывающее и сжимающее плазму (пинч-эффект).

Таким образом, в разряде плазма не только создается и нагревается, но и удерживается благодаря магнитному полю разрядного тока.

Внешнее электрическое поле может создаваться подачей разности потенциалов на разрядный промежуток, заполненный газом. Это — прямой разряд (рис. 8,1, а). Можно использовать также вихревое электрическое поле, возникающее при изменении во времени магнитного поля. Так создаются кольцевые безэлектродные разряды (рис. 8,1, б).

Воспользуемся некоторыми данными об экспериментах с прямым разрядом, приведенными И. В. Курчатовым в лекции, прочитанной им в атомном центре в Харуэлле (Англия) в 1956 году.

Разряды проводились в цилиндрических камерах, наполненных газом при давлении от 0,005 мм рт. ст. до 1 атмосферы. Длина разрядного промежутка в различных опытах варьировалась от нескольких сантиметров до двух метров, а диаметр — от 5 до 60 см. Разряд питался напряжением в несколько

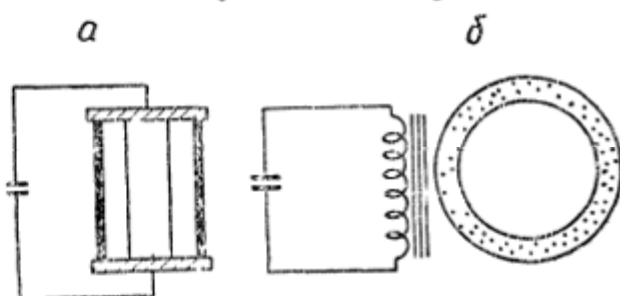


Рис. 8,1. Виды самосжатого разряда: а — прямой разряд; б — кольцевой разряд.

десятков киловольт. Максимальная сила тока в разряде составляла от 10^{10} а/см² до 10^{12} а/см². Максимальная мгновенная мощность, выделявшаяся в плазме, доходила до 40 млн. квт. Источниками электрического питания служили батареи высоковольтных конденсаторов. В этом устройстве очень важно было свести к минимуму паразитную индуктивность электрического контура, ограничивающего величину тока и скорость его нарастания. При напряжении 50 кв и общей емкости конденсаторной батареи, достигающей нескольких сот микрофард, паразитная индуктивность доводилась до 0,02—0,03 мкгн.

Примером установки второго рода может служить английская установка «Зета». Разряд зажигался в тороидальной камере с диаметром свыше метра. Нарастающее магнитное поле создавалось током при разряде батареи конденсаторов на первичную обмотку трансформатора, вторичной обмоткой которого служил сам тороидальный разряд (рис. 8,1). Напряжение на конденсаторной батарее составляло 20 кв, максимальный ток в газовом разряде достигал 200 ка. Длительность импульса тока между значениями, отвечающими половине максимальной величины, равнялась приблизительно 2 мсек.

Нагрев и удержание плазмы в подобных устройствах встретил очень серьезные трудности, связанные главным образом с неустойчивостью образующихся плазменных шнуров. В настоящее время возможность достижения в них условий протекания термоядерных реакций представляется сомнительной, однако самосжатый разряд остается важным средством исследования процессов, протекающих в плазме. Экспериментальные исследования, проведенные на прямых и безэлектродных разрядах показали недостаточность и даже ошибочность первоначальных представлений о механизме разряда. Пересмотр этих представлений привел к значительному прогрессу в области физики плазмы.

§ 8.1. Пинч-эффект

Рассмотрим вначале равновесное состояние самосжатого газового разряда. Допустим, что плазма имеет цилиндрическую форму и через плазму вдоль оси протекает ток с плотностью j_z постоянной по всему сечению цилиндра. Для описания данной системы мы воспользуемся уравнением движения (7,15) и уравнением Максвелла (7,3). Считая все величины независимыми от t (стационарное движение), θ и z , исходные уравнения представим в виде

$$\frac{dp}{dr} = -j_z B_\theta; \quad (8,1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r H_\theta) = j_z. \quad (8,2)$$

Из последнего уравнения следует:

$$H_{\theta} = \begin{cases} j_z r & \text{при } r < r_1, \\ j_z \frac{r_1^2}{r} & \text{при } r > r_1, \end{cases} \quad (8,3)$$

где r_1 — радиус плазменного цилиндра.

Теперь можно проинтегрировать уравнение (8,1)

$$p = p_0 - \frac{\mu_0}{4} j_z^2 r^2, \quad (8,4)$$

где p_0 — давление на оси. Полагая плотность частиц n и температуру T постоянными по сечению плазменного цилиндра, выразим эти величины через ток $I = \pi r_1^2 j_z$. Если при $r = r_1$, давление равно нулю, то

$$p_0 = \frac{\mu_0}{4} j_z^2 r_1^2.$$

Подставляя сюда

$$p_0 = nkT = \frac{2N}{\pi r_1^2} kT,$$

где N — число частиц одного знака на единице длины плазменного цилиндра, получим искомое соотношение

$$NkT = \frac{\mu_0}{8\pi} I^2. \quad (8,5)$$

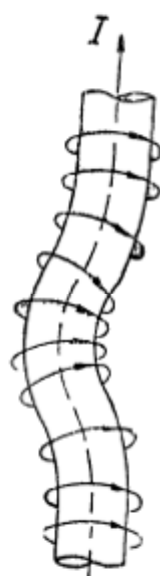


Рис. 8,2.
Деформация изгиба.

Здесь ничего не говорится о механизме нагрева плазмы и об устойчивости — необходимом условии возможности осуществления данной системы. Формула (8,5) показывает лишь, что температура плазмы должна расти пропорционально квадрату тока, чтобы газокINETическое давление уравновешивалось магнитным полем тока. С помощью (8,5) можно оценить масштаб тока в самосжатом разряде. При $n = 10^{15} \text{ см}^{-3}$ и энергии частиц порядка 100 кэВ сила тока в разряде с сечением 1 см^2 должна составлять 10^5 ампер — величину, вполне достижимую в современных установках. Однако основную трудность в осуществлении самосжатого разряда представляет его неустойчивость. Природа этой неустойчивости поясняется рисунком (8,2).

Из рисунка видно, что если плазменный шнур испытает небольшую деформацию изгиба, магнитные силовые линии сойдутся со стороны вогнутости и разойдутся на выпуклости, в результате магнитное давление станет большим со стороны вогнутости и деформация усилится. Неустойчивость такого типа наблюдалась как в прямых, так и в тороидальных разрядах.

Она приводит к быстрому попаданию частиц на стенки и к разрушению плазменного шнура. Характерная деформация плазменного шнура видна на фотографии разряда в тороидальной камере (рис. 8,3).

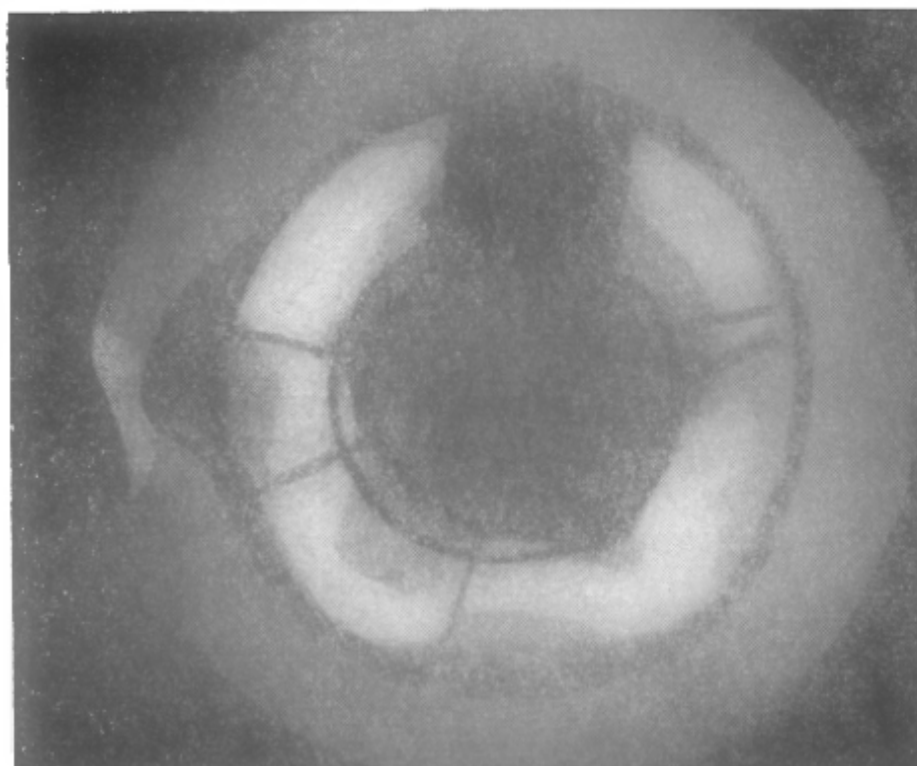


Рис. 8,3. Фотография кольцевого разряда. Заметна деформация изгиба.

Легко видеть также, что небольшое локальное уменьшение диаметра плазменного шнура увеличивает давление магнитного поля, сжимающего плазму, так как $H \sim \frac{I}{r}$ (рис. 8,4). В результате «перетяжка» на плазменном шнуре становится более глубокой и шнур разрывается. При отсутствии внешнего продольного стабилизирующего по-

ля наиболее легко развиваются именно такие неустойчивости.

Дальнейшие исследования показали, что неустойчивы и многие другие плазменные конфигурации и что создание устойчивой конфигурации представляет весьма сложную проблему. Ей посвящается большое число экспериментальных и в особенности теоретических работ, описывающих множество различных типов неустойчивости [30]. Нами будут рассмотрены лишь некоторые из них.

§ 8,2. Поверхностная неустойчивость

Прежде чем перейти к вопросу об устойчивости плазмы, сжатой магнитным полем, посмотрим, как задача об устойчивости решается в обычной гидродинамике.

Начнем с задачи об устойчивости жидкости в гравитационном поле. Заранее можно сказать, что жидкость с горизонтальной поверхностью будет устойчива. Мы воспользуемся этим простым примером только

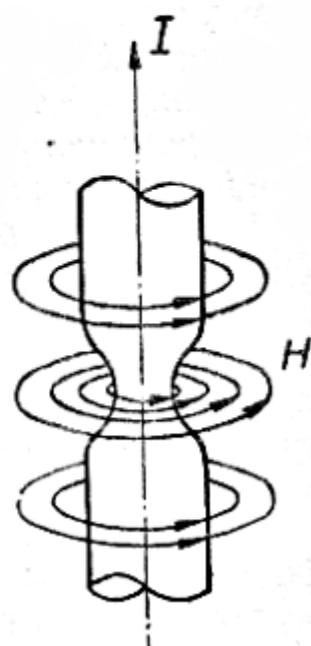


Рис. 8,4. Деформация типа «перетяжки».

для того, чтобы обсудить схему решения задач подобного рода.

Небольшое возмущение жидкости, покоящейся в поле силы тяжести, вызывает волну, распространяющуюся по поверхности жидкости. Скорость распространения поверхностной волны может быть найдена из уравнения движения и уравнения непрерывности:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mathbf{f}; \quad (8,6)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (8,7)$$

где ρ , $\mathbf{v}$, p и $\mathbf{f}$ — плотность, скорость, давление и сила тяжести $\mathbf{f} = \rho \mathbf{g}$. Для простоты будем считать выполненными следующие условия: на поверхности жидкости давление равно нулю ($p=0$), жидкость несжимаема ($\rho = \text{const}$) и, кроме того, рассматривается безвихревое движение ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$). Последнее условие позволяет ввести потенциал скорости φ :

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi. \quad (8,8)$$

Силу тяжести мы также можем выразить через потенциальную энергию $w = \rho g z$:

$$\mathbf{f} = -\nabla(\rho g z). \quad (8,9)$$

Далее, считая амплитуду колебаний малой, мы пренебрежем нелинейным членом в выражении производной скорости

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}.$$

В результате (8,7) приведет к уравнению

$$\nabla^2 \varphi = 0,$$

а условие отсутствия давления на поверхность жидкости — к равенству

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g z \right) = 0.$$

В системе, однородной в направлении y , уравнение для φ может быть записано в виде

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (8,10)$$

при

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (8,11)$$

на поверхности жидкости.

Решение мы будем искать в виде волны, бегущей вдоль оси x :

$$\varphi = A(z) e^{i(\omega t - kx)}. \quad (8,12)$$

Подставляя это выражение в (8,10), определим зависимость амплитуды колебаний от координаты z :

$$A(z) = c_1 e^{kz} + c_2 e^{-kz},$$

где c_1 и c_2 — произвольные числа. Ясно, что с удалением от поверхности при $z \rightarrow -\infty$ амплитуда колебаний должна уменьшаться, поэтому постоянную c_2 мы должны положить равной нулю. Таким образом,

$$\varphi = c_1 e^{kz} e^{i(\omega t - kx)}. \quad (8,13)$$

Подстановка полученного выражения для φ в равенство (8,11), представляющее граничное условие, дает дисперсионное соотношение

$$\omega = \pm \sqrt{kg}. \quad (8,14)$$

Результат состоит в том, что амплитуда поверхностной волны экспоненциально убывает вглубь жидкости и фазовая скорость распространения волны $\frac{\omega}{k}$ как функция частоты определяется соотношением (8,14). Вид этого соотношения позволяет сделать определенный вывод об устойчивости системы. Вещественность частоты ω означает, что данное равновесное состояние устойчиво.

В общем случае решение дисперсионного уравнения имеет мнимую часть

$$\omega = \omega_1 + i\omega_2.$$

Подставляя это выражение для частоты в (8,13), легко видеть, что при $\omega_2 \neq 0$ движение не будет периодическим. В случае $\omega_2 < 0$ величина φ с течением времени неограниченно возрастает, что и является показателем неустойчивости системы. Разумеется, отклонение от состояния равновесия в действительности не будет расти «неограниченно». В силу примененной нами линеаризации исходных уравнений мы не можем проследить за движением при значительных отклонениях и отмечаем лишь тенденцию роста сколь угодно малого начального возмущения. При $\omega_2 < 0$ и

$\omega_1 \neq 0$ происходят колебания с нарастающей амплитудой, в случае же $\omega_2 < 0$ и $\omega_1 = 0$ имеет место апериодическое удаление от состояния равновесия. В связи с этим различают колебательную и апериодическую неустойчивости.

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости двух жидкостей в поле силы тяжести. Допустим, что в равновесном случае одна жидкость (индекс 1) располагается над плоскостью XOY , а вторая (индекс 2) — под этой плоскостью.

Возможные движения в системе описываются теперь четырьмя уравнениями:

$$\rho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + p_1 + \rho_1 g z = 0; \quad (8,15)$$

$$\rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + p_2 + \rho_2 g z = 0; \quad (8,16)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = 0; \quad (8,17)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} = 0. \quad (8,18)$$

На границе между двумя жидкостями должно выполняться соотношение

$$\rho_1 \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right), \quad (8,19)$$

которое получается из (8,15) и (8,16) и условия равенства давлений $p_1 = p_2$ на границе.

Снова ищем решения в виде плоских волн:

$$\varphi_1 = A_1(z) e^{i(\omega t - kx)} \quad (8,20)$$

$$\varphi_2 = A_2(z) e^{i(\omega t - kx)} \quad (8,21)$$

причем

$$A_1(z) = C_1 e^{-kz}$$

и

$$A_2(z) = C_2 e^{kz}.$$

Из условия непрерывности скорости на границе

$$\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right|_{z=0}$$

находим связь между постоянными C_1 и C_2 и исключаем одну из этих величин.

Тогда плоские волны представятся в виде

$$\varphi_1 = C_1 e^{-kz} e^{i(\omega t - kx)} \quad (8,22)$$

и

$$\varphi_2 = -C_1 e^{kz} e^{i(\omega t - kx)}. \quad (8,23)$$

В результате подстановки (8,22) и (8,23) в условие (8,19) на границе получается дисперсионное соотношение. Его можно привести к виду

$$\omega = \pm \sqrt{gk \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2}}. \quad (8,24)$$

При $\rho_2 > \rho_1$ частота представляется действительным числом, то есть система устойчива, при $\rho_1 > \rho_2$ частота становится чисто мнимой, что указывает на апериодическую неустойчивость системы. Слой более плотной жидкости может находиться в равновесии над слоем менее плотной жидкости, если в начальный момент граница между двумя слоями абсолютно плоская (то есть $z=0$). Однако ничтожно малое локальное отклонение приводит к развитию апериодической неустойчивости и равновесие будет достигнуто только тогда, когда более плотная жидкость окажется под менее плотной. Очевидно, общая потенциальная энергия в поле силы тяжести при устойчивом равновесии будет минимальна.

Рассмотренный нами случай (неустойчивость Релея — Тейлора) является примером так называемых «перестановочных» неустойчивостей, которые легко развиваются в плазме, удерживаемой магнитным полем.

Пусть однородная плазма занимает пространство над плоскостью $z=0$. На плазму в направлении $-z$ действует сила тяжести, которая уравнивается магнитным полем H , направленным по x . Магнитное поле всюду внутри и вне плазмы однородно, но на границе оно испытывает скачок. Сила тяжести уравнивается избыточным магнитным давлением в пространстве, не занятом плазмой. Задача об устойчивости поверхности плазмы решается в гидродинамическом приближении по уже известному нам плану. Возмущение представляется в виде волны малой амплитуды и из уравнений магнитной гидродинамики находится дисперсионное соотношение. В данном случае дисперсионное соотношение имеет мнимое решение для ω , что и указывает на неустойчивость плазмы (М. Крускал и М. Шварцшильд [31]). Тем же путем была показана неустойчивость самосжатого разряда, рассматриваемого как идеально проводящий цилиндр с продольным током на поверхности, создающим азимутальное сжимающее магнитное поле. Исследование возмущений вида $e^{i(m\theta + kz + \omega t)}$, где m — целое число, показало, что разряд неустойчив (В. Д. Шафранов [32]). Различным m соответствуют различные виды неустойчивости. Значению $m=0$ соответствует симметричная по θ деформация, имеющая характер шейки (рис. 8, 4), в то время как значению $m=1$ соответствует деформация изгиба (рис. 8, 2).

Более детальный анализ явлений неустойчивости дает дрейфовое приближение (Розенблют и Лонгмайр [33]). Движение частиц плазмы в магнитном поле можно представлять в виде суммы орбитального движения вокруг ведущего центра и движе-

ния самого ведущего центра, то есть дрейфа. Поперечный дрейф (продольная составляющая дрейфа в данном случае не представляет интереса) состоит из электрического дрейфа и дрейфа под действием различных неэлектрических сил F :

$$u = \frac{[EB]}{B^2} + \frac{1}{e} \frac{[FB]}{B^2}. \quad (8,25)$$

Величина F может учитывать силы инерции, силу тяжести и т. д.

Рассмотрим вначале плазму в гравитационном поле. Если в равновесном состоянии плазма ограничена снизу плоскостью $z = 0$ (рис. 8, 5), то под действием силы $F = mg$ частицы будут дрейфовать вдоль оси y со скоростью

$$u = \frac{m}{e} \frac{[gB]}{B^2}. \quad (8,26)$$

Из формулы видно, что определяющую роль играет дрейф ионов, поэтому в дальнейшем только его мы и будем учитывать, и буквой m будем обозначать массу иона.

Ионный дрейф создает ток $j_y = enu_y$. Возникающая при этом сила $j_y B_x$ уравнивает силу тяжести.

Допустим теперь, что поверхность плазмы испытала деформацию

$$\Delta z = a \sin ky. \quad (8,27)$$

Тогда дрейф по y сразу же вызывает разделение зарядов и создает поляризионные поля E_y и E_z , которые, в свою очередь, вызовут дрейф по z и по y , еще более увеличивающий деформацию поверхности плазмы.

Для расчета этого эффекта найдем величину поверхностного заряда, возникающего благодаря дрейфу ионов вдоль оси y . Допустим, что за время dt ионы плазмы из положения I переместились в положение II (рис. 8,5). В результате заряды некоторого поверхностного слоя плазмы толщиной $u_y dt \sin \alpha \approx u_y \frac{d(\Delta z)}{dy} dt$ окажутся нескомпенсированными (α — угол деформации). Плотность возникающего поверхностного заряда σ пропорциональна толщине нескомпенсированного слоя, так что

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = neu_y ak \cos ky = \frac{nm g}{B} ka \cos ky. \quad (8,28)$$

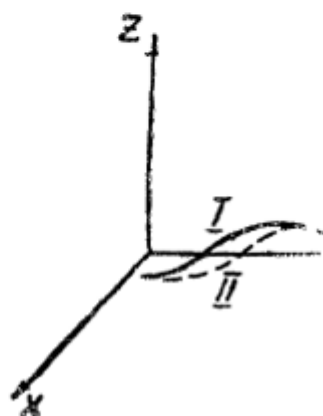


Рис. 8,5. Развитие поверхностной деформации плазмы, удерживаемой магнитным полем. Плазма занимает пространство над плоскостью $z = 0$. Магнитное поле направлено вдоль оси x . Деформация поверхности плазмы в моменты времени t и $t + dt$ представлена кривыми I и II .

Переходя к вычислению поля, создаваемого поверхностным зарядом $\sigma = \sigma_0 \cos ky$, заметим, что в силу уравнения Лапласа для электрического потенциала вне области поверхностного заряда

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

и из синусоидальной зависимости φ от y следует экспоненциальная зависимость φ от z ($\varphi \sim e^{-kz}$). Такой же будет зависимость от z напряженности электрического поля. На границе плазмы нормальная составляющая электрической индукции испытывает разрыв:

$$\epsilon E_{\perp}^{(\text{пл})} - \epsilon_0 E_{\perp}^{(\text{вак})} = \sigma_0 \cos ky, \quad (8,29)$$

где $\epsilon = \epsilon_0 + \frac{\rho}{B^2}$ — диэлектрическая постоянная плазмы. Полагая $\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \gg 1$, для поля внутри плазмы получим

$$E_{\perp} = \frac{\sigma_0}{\epsilon} \cos kye^{-kz}. \quad (8,30)$$

Очевидно, в случае малого возмущения ($ka \ll 1$) имеет место приближенное равенство $E_z \approx E_{\perp}$. Другая составляющая поля E_y может быть найдена из уравнения

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0. \quad (8,31)$$

В результате для поля в плазме мы можем записать

$$E_y = \frac{\sigma_0}{\epsilon} \sin kye^{-kz}; \quad (8,32)$$

$$E_z = \frac{\sigma_0}{\epsilon} \cos kye^{-kz}. \quad (8,33)$$

Электрическое поле вызывает дрейф по y и z :

$$u_y = \frac{\sigma_0}{\epsilon B} \cos ky e^{-kz}; \quad (8,34)$$

$$u_z = \frac{\sigma_0}{\epsilon B} \sin kye^{-kz}. \quad (8,35)$$

Скорость u_z на границе ($kz \approx 0$) означает увеличение с течением времени амплитуды возмущения a :

$$\frac{da}{dt} = \frac{\sigma_0}{\epsilon B}. \quad (8,36)$$

Из (8,28) и (8,36) следует:

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = \frac{1}{\epsilon B} \frac{d\sigma_0}{dt} = gka, \quad (8,37)$$

откуда

$$a(t) = a_0 e^{\pm \sqrt{gk} t}. \quad (8,38)$$

Одному из решений соответствует экспоненциальное возрастание амплитуды возмущения. При изменении знака g мы полу-

чаем осциллирующее решение для a , соответствующее устойчивости.

Существенным в механизме рассмотренной неустойчивости является разделение зарядов, вызываемое гравитационной силой. Подобное же разделение может быть вызвано любой другой силой, перпендикулярной магнитному полю и не зависящей от знака зарядов. Если силовые линии магнитного поля искривлены, такой силой является центробежная сила и сила, связанная с неоднородностью магнитного поля. Как было показано ранее, эти силы приводят к дрейфу, направленному от центра кривизны силовых линий, со скоростью

$$u = \frac{1}{erB} (2\omega_{\parallel} + \omega_{\perp}),$$

где r — радиус кривизны магнитных силовых линий, а $\omega_{\parallel}$ и $\omega_{\perp}$ — энергия движения частицы в направлении магнитного поля и в перпендикулярном к нему направлении. В этом случае мы можем использовать формулу (8,38), заменяя ускорение силы тяжести

g величиной $\frac{1}{r} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right)$ или вектор $\mathbf{g}$ вектором $\frac{\mathbf{r}}{r^2} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right)$. В результате получается важный вывод.

Рассмотренной выше системе с силой тяжести, направленной из плазмы в вакуум, соответствует плазма с выпуклой границей (центр кривизны силовых линий магнитного поля, удерживающего плазму, лежит внутри плазмы). Следовательно, мы можем сказать что выпуклая граница плазмы неустойчива. Согласно этому выводу, к числу неустойчивых следует отнести многие рассмотренные выше плазменные конфигурации, в том числе различные виды самосжатого разряда, а также адиабатическую ловушку с магнитными пробками.

Поиски устойчивой конфигурации привели к различным модификациям «остроконечной геометрии», простейшим примером которой может служить ловушка, изображенная на рис. 8,6. Токи в витках A и B создают магнитные поля, всюду обращенные выпуклостью внутрь объема, в котором должна удерживаться плазма. Плотность магнитного поля внутри такой конфигурации растет от середины, где магнитное поле равно нулю, к краям, образуя магнитные стенки для плазмы. Плазма в такой ловушке устойчива, однако время удержания в ней сильно сокращается интенсивным уходом частиц вдоль силовых линий в плоскости MN [34].

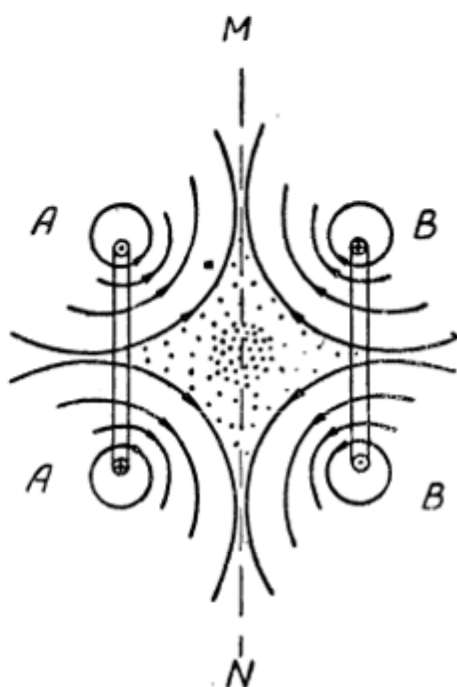


Рис. 8,6. Магнитная ловушка со встречными полями.

§ 8.3. Конвективная неустойчивость

Обратимся теперь к примеру неустойчивости, связанной с перемещениями внутренних слоев плазмы.

Как было показано в главе 7, плазма может удерживаться магнитным полем тока, текущего через плазму. Удерживающая сила создается натяжением силовых линий, охватывающих данный ток. Это натяжение уравнивает градиент полного давления. В аксиально симметричной конфигурации условие равновесия представляется равенством (см. 7, 16 и 7, 18)

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(p + \frac{\mu_0 H^2}{2} \right) = - \frac{\mu_0 H^2}{r}. \quad (8,39)$$

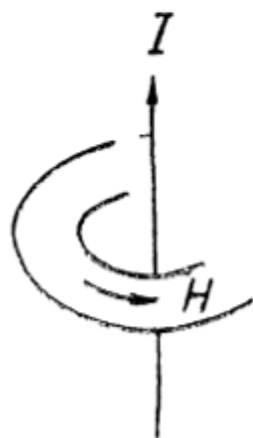


Рис. 8,7. Силовая трубка магнитного поля, создаваемого линейным током.

В частном случае, когда ток равномерно распределен по сечению плазмы, условие (8,39) совпадает с равенством (8,1), в чем легко убедиться, подставляя в (8,39) $H = \frac{rj_z}{2}$. Равновесие обеспечивается выполнением равенства (8,39) во всех точках. Однако оно будет устойчивым лишь при определенных условиях, налагаемых на распределение магнитного поля.

Допустим, что плазма удерживается магнитным полем линейного тока I и рассмотрим тонкую силовую трубку на расстоянии r от оси (рис. 8, 7). При смещении трубки на расстояние δr появляются силы либо уменьшающие, либо увеличивающие смещение трубки. В последнем случае имеет место неустойчивость. Чтобы найти условие устойчивости, необходимо выяснить направление равнодействующей всех сил, возникающих при смещении силовой трубки на расстояние δr .

Мы предполагаем, что при смещении трубки объем ее изменяется так, что полное давление в трубке всегда остается равным давлению окружающей ее плазмы. Натяжение магнитных линий при этом изменяется. Если это изменение следует зависимости натяжения от расстояния r в невозмущенной плазме, состояние равновесия не нарушается. В противном случае появляется сила

$$\begin{aligned} \delta F &= \delta \frac{\mu_0 H_T^2}{r} - \delta \frac{\mu_0 H^2}{r} = \frac{2\mu_0 H \delta H_T}{r} - \frac{2\mu_0 H}{r} \frac{dH}{dr} \delta r = \\ &= \frac{2\mu_0 H^2}{r} \left(\frac{\delta H_T}{H} - \frac{dH}{dr} \frac{\delta r}{H} \right), \end{aligned} \quad (8,40)$$

где H — магнитное поле в равновесной плазме и H_T — магнитное поле в силовой трубке. Величина изменения магнитного поля в силовой трубке δH_T при смещении ее на расстояние δr находится

из условия равенства полного давления в трубке внешнему давлению:

$$\begin{aligned} p_T + \frac{\mu_0 H_T^2}{2} &= \left(p + \frac{\mu_0 H^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(p + \frac{\mu_0 H^2}{2} \right) \delta r = \\ &= \left(p + \frac{\mu_0 H^2}{2} \right) - \frac{\mu_0 H^2}{r} \delta r; \\ \delta p_T + \mu_0 H \delta H_T &= - \frac{\mu_0 H^2}{r} \delta r. \end{aligned} \quad (8,41)$$

Здесь использовано условие равновесия (8,39). Обозначения определяются равенствами $p_T = p + \delta p_T$, $H_T = H + \delta H_T$.

При адиабатическом изменении объема трубки V имеем

$$pV^\gamma = \text{const}$$

и, следовательно,

$$\frac{\delta p_T}{\gamma p} = - \frac{\delta V_T}{V}. \quad (8,42)$$

Изменение объема δV_T , в силу неизменности магнитного потока, пронизывающего сечение S силовой трубки, связано с изменением магнитного поля H_T соотношениями

$$\begin{aligned} H_T S &= \text{const}, \\ \frac{\delta H_T}{H} = - \frac{\delta S_T}{S} &= - \frac{\delta \left(\frac{V}{2\pi r} \right)}{\left(\frac{V}{2\pi r} \right)} = - \frac{\delta V_T}{V} + \frac{\delta r}{r}. \end{aligned} \quad (8,43)$$

Исключая δV_T и δp_T из уравнений (8,41), (8,42) и (8,43), мы получим

$$\frac{\delta H_T}{H} (\gamma p + \mu_0 H^2) = \left(- \frac{\mu_0 H^2}{r} + \frac{\gamma p}{r} \right) \delta r,$$

или

$$\frac{\delta H_T}{H} = \frac{- \frac{\mu_0 H^2}{r} + \frac{\gamma p}{r}}{\gamma p + \mu_0 H^2} \delta r. \quad (8,44)$$

Сила, действующая на трубку при смещении ее на расстояние δr , согласно (8,40) и (8,44), равна

$$\delta F = \frac{2\mu_0 H^2}{r^2} \left(\frac{-\mu_0 H^2 + \gamma p}{\mu_0 H^2 + \gamma p} - \frac{r}{H} \frac{dH}{dr} \right) \delta r. \quad (8,45)$$

Устойчивость будет, если сила направлена противоположно смещению, то есть если δF и δr имеют разные знаки. Следовательно, условие устойчивости представляется неравенством

$$\frac{-\mu_0 H^2 + \gamma p}{\mu_0 H^2 + \gamma p} - \frac{r}{H} \frac{dH}{dr} < 0,$$

или

$$\frac{r}{H} \frac{dH}{dr} > \frac{1 - \frac{\mu_0 H^2}{\gamma p}}{1 + \frac{\mu_0 H^2}{\gamma p}}. \quad (8,46)$$

В случае несжимаемой плазмы ($\gamma \rightarrow \infty$) это условие имеет вид

$$\frac{dH}{dr} > \frac{H}{r}$$

или

$$H > \text{const } r;$$

в случае же плазмы малой плотности ($p \ll \frac{\mu_0 H^2}{2}$) устойчивость имеет место, когда распределение поля удовлетворяет условию

$$\frac{dH}{dr} > -\frac{H}{r},$$

то есть $H > \frac{\text{const}}{r}$.

В случае малой плотности можно получить общий критерий устойчивости, применимый к плазме любой конфигурации. Условие малой плотности позволяет исключить из рассмотрения пере-

мещения плазмы, приводящие к искажениям магнитного поля. Действительно, искажение магнитного поля требует выполнения работы, которая не может производиться за счет энергии плазмы при условии $p \ll \frac{\mu_0 H^2}{2}$. Это не означает, од-

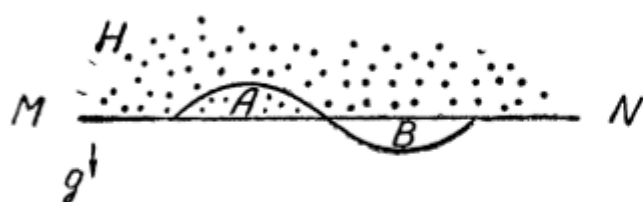


Рис. 8,8. Желобковая деформация возникает в результате перестановки магнитных силовых трубок A и B.

нако, что поперечные перемещения идеально проводящей плазмы невозможны. Плазма, вместе с замороженным в нее магнитным полем, может так перемещаться, что в результате распределение поля в пространстве останется неизменным, произойдет лишь перестановка магнитных трубок.

Рассмотрим, например, плазменный слой в поле силы тяжести (рис. 8, 8) в однородном магнитном поле, направленном перпендикулярно к плоскости рисунка. В начальный момент плазма ограничена снизу плоскостью MN. Пусть A и B — две магнитные силовые трубки, отличающиеся лишь тем, что трубка A запол-

нена плазмой. Очевидно, обмен трубок местами не вызовет искажений магнитного поля, хотя и изменит форму поверхности плазмы: на поверхности появится выступ и впадина. Ясно, что перестановка должна произойти по всей длине трубки, так как иначе неизбежно ее искривление, поэтому деформация поверхности должна иметь вид «желобка» — желобковая деформация.

Возможность развития такой деформации зависит от того, является ли она энергетически «выгодной». В данном случае (рис. 8,8) она выгодна, так как сопровождается понижением участка плазмы, то есть уменьшением потенциальной энергии плазмы в гравитационном поле. В неоднородных полях перестановка сопровождается изменением объема силовой трубки и является энергетически выгодной, когда трубка расширяется, так как при этом уменьшается энергия сжатого в трубке газа. Если сечение трубки равно S , то интеграл $\int S dl$, взятый вдоль силовых линий, представит объем силовой трубки. В силу постоянства магнитного потока в трубке ($SB = \mu_0 SH = \text{const}$), объем можно представить в виде $\int \frac{dl}{H}$ и условие осуществимости данной перестановки представляется неравенством

$$\Delta \int \frac{dl}{H} > 0.$$

Плазма устойчива, если любые перестановки данной силовой трубки с соседними трубками сопряжены с уменьшением объема трубки, то есть если выполняется неравенство

$$\delta \int \frac{dl}{H} < 0. \quad (8,47)$$

Конечно, перестановка силовых трубок возможна не только на поверхности плазмы, но и во внутренних слоях, как мы видели на примере движения плазмы в магнитном поле прямолинейного тока. Перемещения трубок в плазме во многом напоминают конвекцию подогреваемой жидкости, благодаря чему связанную с ними неустойчивость часто называют конвективной неустойчивостью.

Важный случай конвективной неустойчивости, приводящей к потерям частиц в ловушках с магнитными пробками, был исследован Б. Б. Кадомцевым. Согласно развитой им теории [35], в плазме непрерывно происходит вытеснение в поверхностные слои трубок, заполненных плазмой с плотностью несколько большей, чем в соседних трубках, и, следовательно, обладающей большим диамагнитным моментом. Вытолкнутая на поверхность, такая трубка отдает часть плазмы металлическим стенкам ловушки и снова погружается внутрь. Этот механизм обеспечивает непрерывный поток частиц к стенкам ловушки, значительно превосходящий нормальный диффузионный поток. Согласно экспериментальным данным М. С. Иоффе [36], время удержания плазмы в ловушке

с пробками действительно ограничивается неустойчивостью желобкового типа. При переходе к конфигурации, в которой магнитное поле возрастает от оси к периферии, это время увеличивается с 0,1 до 10—15 мсек.

С другой стороны, опыты Р. Поста и его сотрудников по адиабатическому сжатию плазмы говорят об устойчивости плазмы в обычных ловушках с магнитными пробками. Сжатая горячая плазма удерживается в ловушке Поста в течение нескольких миллисекунд, что на несколько порядков превосходит предсказываемое теорией время развития конвективной неустойчивости. Как было указано Розенблютом, стабилизирующую роль в данном случае может играть холодная плазма, осуществляющая электрический контакт между горячей плазмой и металлическими торцовыми стенками ловушки. В механизме конвективной неустойчивости существенную роль играют электрические поля в плазме, перпендикулярные H . Однако такие поля не могут возникнуть в среде, между любыми точками которой может протекать ток. В ловушке Поста между любыми точками горячей плазмы ток может идти вдоль магнитных силовых линий, а затем замыкаться на металлической торцовой поверхности. В пользу приведенного объяснения говорит тот факт, что время удержания плазмы резко уменьшается, если стенки ловушки сделать непроводящими.

§ 8.4. Стабилизация пинчевого разряда

Когда была обнаружена неустойчивость самосжатого разряда, естественно, возник вопрос о способах его стабилизации. Было предложено два способа. Один заключался в использовании металлического экрана, окружающего разряд, второй основан на стабилизирующем влиянии внешнего магнитного поля. Оба метода нашли применение во многих экспериментальных установках для создания высокотемпературной плазмы.

Влияние проводящего экрана мы обсуждали в главе 5. Если проводимость экрана высока, он может считаться непроницаемым для быстро изменяющегося магнитного поля. При изгибании плазменного шнура (неустойчивость типа «змейки», $m = 1$), плотность магнитного поля возрастает в тех местах, где шнур приближается к экрану, и в этой области создается избыточное магнитное давление, устраняющее деформацию. То же можно сказать иначе: на внутренней поверхности экрана возникают «токи изображения», отталкивающие приближающийся к ним плазменный цилиндр. Стабилизирующее действие будет появляться, если время развития неустойчивости мало по сравнению со временем проникновения магнитного поля через экран. В противном случае экран не будет «непроницаемым» для магнитного поля. Очевидно, эффективность такого метода стабилизации убывает с уменьшением продольных размеров деформации: коротковолновые деформации

могут развиваться раньше, чем шнур существенно приблизится к экрану. В этом отношении особенно опасны деформации типа «шеек» ($m = 0$). Для борьбы с ними особое значение имеет второй метод.

Магнитное поле, вмороженное в плазму, сообщает ей «жесткость»: искривление магнитных линий вызывает появление восстанавливающей силы. Допустим, что внутри плазменного стержня радиуса a вморожено продольное магнитное поле H_z и рассмотрим деформацию типа «змейки». Как мы уже знаем, со стороны вогнутости силовые линии магнитного поля H , создаваемого током в пинче, сжимаются, а со стороны выпуклости — разрежаются. В результате магнитное давление на плазму со стороны вогнутости станет больше давления со стороны выпуклости, что и вызовет силу еще более искривляющую плазменный стержень. Чтобы оценить величину этой искривляющей силы, окружим пинч некоторым цилиндрическим объемом радиуса, приблизительно равного длине искривленного участка λ , и выделим некоторую часть этого объема, лежащую между двумя плоскостями, которые проходят через центр кривизны пинча (рис. 8,9). Сила магнитного давления, искривляющая плазменный стержень, может быть найдена как составляющая магнитного давления на торцах нашего цилиндрического объема:

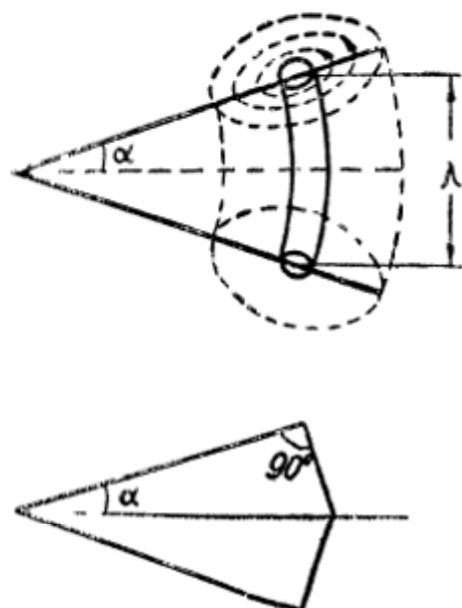


Рис. 8,9. Деформация разряда в продольном магнитном поле ведет к искривлению силовых линий и вызывает «упругую» силу.

$$F_1 = 2 \int_a^\lambda \frac{\mu_0 H^2}{2} \cdot 2\pi r dr, \quad (8,48)$$

где 2α — угол между торцами изогнутого цилиндрического объема. Если R — радиус кривизны пинча, то

$$\alpha = \frac{\lambda}{2R}. \quad (8,49)$$

Учитывая, что поле, создаваемое линейным током, спадает с расстоянием как $\frac{1}{r}$ и полагая азимутальное поле на поверхности пинча равным H_0 , из (8,48) получим следующее выражение для силы, действующей в направлении смещения:

$$F_1 = 2\pi\mu_0 a^2 H_0^2 \alpha \ln \frac{\lambda}{a}.$$

На единицу длины пинча приходится сила

$$\frac{F_1}{\lambda} = \frac{\pi \mu_0 a^2 H_0^2}{R} \ln \frac{\lambda}{a}. \quad (8,50)$$

Наряду с этим при искривлении пинча с замороженным в него магнитным полем H_1 возникает квазиупругая сила, равная (на единицу длины)

$$\frac{F_2}{\lambda} = - \frac{\mu_0 H_1^2}{R} \pi a^2. \quad (8,51)$$

Полная сила (на единицу длины) равна

$$\frac{F}{\lambda} = \frac{F_1}{\lambda} + \frac{F_2}{\lambda} = \frac{\pi \mu_0 a^2}{R} \left(H_0^2 \ln \frac{\lambda}{a} - H_1^2 \right). \quad (8,52)$$

Условие устойчивости заключается в том, чтобы полная сила была направлена в сторону вогнутости, что обеспечивается неравенством

$$\frac{H_1^2}{H_0^2} > \ln \frac{\lambda}{a}. \quad (8,53)$$

Учитывая, что увеличение H_1 увеличивает полное давление внутри плазмы, из (8,53) можно заключить, что пинч нельзя стабилизировать внутренним продольным полем относительно длинноволновых возмущений.

В случае деформации типа «шейки» основную роль играет не жесткость силовых линий, а увеличение магнитного давления внутри пинча. Пусть, например, на шнуре образовалась «шейка», то есть местное уменьшение радиуса на величину Δa . Тогда давление сжимающего магнитного поля

$$H_0 = \frac{I}{2\pi a}$$

возрастет на величину

$$\frac{\mu_0 H_0^2}{2} \left[\frac{a^2}{(a - \Delta a)^2} - 1 \right] = \frac{\mu_0 H_0^2}{2} \frac{2\Delta a}{a}, \quad (8,54)$$

в то время как внутреннее давление увеличится на величину

$$\frac{\mu_0 H_1^2}{2} \left[\frac{a^4}{(a - \Delta a)^4} - 1 \right] = \frac{\mu_0 H_1^2}{2} \frac{4\Delta a}{a}, \quad (8,55)$$

так как поток замороженного в плазму магнитного поля $\pi a^2 B_1 = \pi a^2 \mu_0 H_1$ сохраняется. Пинч устойчив, если вторая величина превосходит первую; таким образом, критерий устойчивости относительно деформаций типа «шейки» представляется неравенством

$$H_1^2 > \frac{1}{2} H_0^2. \quad (8,56)$$

Если продольное стабилизирующее поле H_1 сравнимо по величине с магнитным полем тока в плазменном шнуре H_0 , то

результатирующее поле представится винтовыми линиями, охватывающими плазменный шнур. В этом случае деформации, минимально искажающие магнитное поле, также будут винтовыми с тем же шагом. Они представляют наибольшую опасность, так как не вызывают восстанавливающих квазиупругих сил со стороны магнитного поля. Для кольцевых плазменных шнуров в связи с этим существует условие устойчивости, полученное независимо М. Крускалом и В. Д. Шафрановым. Оно состоит в том, что шаг винтовой линии должен превосходить длину шнура. Если a — радиус сечения шнура, то шаг винтовой линии, охватывающей шнур, равен $2\pi a \frac{H_1}{H_0}$. Условие устойчивости представляется неравенством

$$2\pi a \frac{H_1}{H_0} > 2\pi R, \quad (8,57)$$

где $2\pi R$ — длина шнура. Критерий определяет критическое значение тока в шнуре, превышение которого может вызвать неустойчивость и разрушение плазменного шнура. Для стелларатора критерий Крускала — Шафранова может быть записан в виде неравенств (6,18).

В предыдущих параграфах мы рассмотрели неустойчивости, связанные с поперечным движением на границе плазмы и во внутренних слоях. Те и другие приводят в конечном счете к расширению плазмы поперек магнитного поля: плазма смещает силовые линии и вытекает через возникающие области ослабленного магнитного поля. С наибольшей легкостью возникают «желобковые» деформации, когда плазма в виде языка проникает через «щель» между силовыми линиями. Силовые линии при этом почти не деформируются и квазиупругая сила не возникает. Происходит как бы перестановка плазмы между областями с большой плотностью плазмы и меньшей плотностью магнитной энергии и соседними областями со сравнительно низким давлением плазмы и большей напряженностью магнитного поля.

Неустойчивости относительно «желобковых» деформаций можно частично стабилизировать созданием достаточного «закручивания» силовых линий удерживающего поля. Разделим цилиндрический разряд на ряд концентрических слоев и допустим, что магнитные линии удерживающего поля имеют форму винтовых линий в каждом слое, причем шаг винтовой линии от слоя к слою меняется. Система силовых линий создает тогда подобие сетки, которая затрудняет обычную перестановочную неустойчивость: при радиальном смещении силовые трубки «перепутываются» и возникает квазиупругая сила.

Подобные поля могут быть созданы специальными спиральными обмотками, однако в обычном пинчевом разряде в продольном магнитном поле они автоматически создаются благодаря конечной

проводимости плазмы в разряде. Если ток течет не только по поверхности разряда, но и в объеме, то магнитное поле в плазме имеет как продольную, так и азимутальную составляющие. В сумме они составляют именно такую сетку винтовых линий, о которой говорилось выше. В каждом данном слое трубка может передвигаться, если смещение ее однородно, вдоль силовых линий, однако по мере удаления от своего слоя квазиупругая сила растет, что и ограничивает величину смещения. Конечно, появление поверхностной неустойчивости, локализованной вблизи некоторой магнитной поверхности, все же возможно.

При изучении условий устойчивости в случае непрерывного распределения плазмы и поля в разряде с успехом был использован так называемый энергетический принцип. Плазму подвергают виртуальному смещению ξ и вычисляют результирующее изменение полной энергии δW магнитогидродинамической системы. Устойчивость зависит от того, может ли некоторое смещение ξ привести к уменьшению полной энергии. Очевидно, устойчивым будет состояние с минимальной энергией, когда любое состояние требует добавления энергии извне.

Пользуясь энергетическим принципом, Б. Сайдем [37] нашел следующий критерий устойчивости относительно возмущений типа $m \neq 0$: необходимым условием устойчивости является выполнение неравенства

$$\frac{r}{4} \left(\frac{\mu'}{\mu} \right)^2 + \frac{2p'}{\mu_0 H_z^2} > 0 \quad (8,58)$$

в каждой точке внутри плазмы. Здесь $\mu = \frac{H_0}{r H_z}$, p — давление, штрих

обозначает дифференцирование по r . Величина $\mu = \frac{H_0}{r H_z}$ имеет простой физический смысл. Сложение полей H_z и H_0 дает винтообразное поле, и μ можно рассматривать как число витков магнитного

поля на единице длины вдоль оси z . Величина $\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dr}$ характеризует изменение угла винтовой линии при удалении от оси. Так как эта величина входит в квадрате в левую часть уравнения, степень стабильности не зависит от знака «закручивания» и всегда

увеличивается при увеличении $\left(\frac{\mu'}{\mu} \right)$. Величина $p' = \frac{dp}{dr}$ всегда отрицательна, если идти в сторону увеличения r с внешней стороны пинчевого разряда.

Перепишем условие (8,58) в следующем виде:

$$\frac{\mu_0 r}{8} \left(\frac{H'_0}{H_0} H_z - H'_z - \frac{H_z}{r} \right)^2 > -p'. \quad (8,58')$$

Характерное распределение полей H_z и H_θ в стабилизированном пинче представлено на рис 8,10. При изменении r от $r=0$ до $r=r_0$ (токовый слой), величины $\left(\frac{H'_\theta}{H_0} H_z\right)$ и $(-H'_z)$ положительны и велики по сравнению с $\frac{H_z}{r}$.

После прохождения слоя $r=r_0$ величина $(-H'_z)$ убывает и приближается к нулю. При достаточно большом $r=r_1 > r_0$ азимутальное поле должно изменяться как $\frac{1}{r}$, то есть $\frac{H'_\theta}{H_0} = -\frac{1}{r}$ и выражение $\left(\frac{H'_\theta}{H_0} H_z - \frac{H_z}{r}\right)$ становится

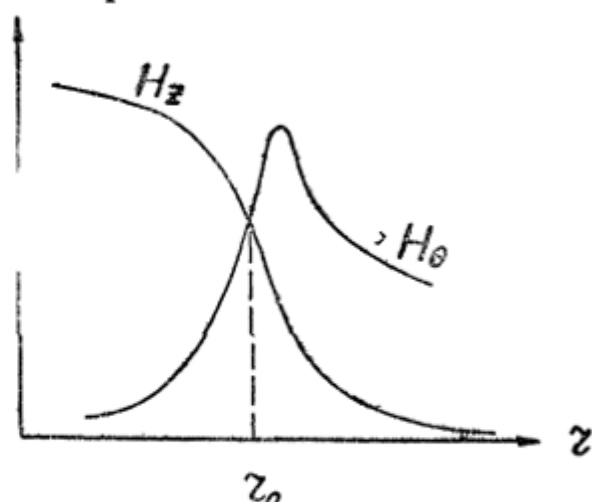


Рис 8,10 Характерное распределение полей H_z и H_θ в стабилизированном пинче

отрицательным. Отсюда следует, что при некотором промежуточном значении r ($r_0 < r < r_1$) это выражение обращается в нуль и критерий Сайдема не выполняется. Как было указано Сайдемом,

критерий выполняется, если значение H_z становится отрицательным снаружи токового слоя. По видимому, однако, область устойчивости при этом настолько узка, что возникает сомнение в практической осуществимости подобного рода конфигурации.

Несравненно легче удовлетворить условию Сайдема с помощью «обращенного пинча» (одной из разновидностей «твердокерновых» конфигураций, предложенных и исследованных Колгейтом в 1959 г.). Схема обращенного стабилизированного пинча представлена на рис 8,11. Вначале включается стабилизирующее поле H_z , а затем между проводящим сердечником (керном) и нижним электродом прилагается разность потенциалов и зажигается разряд. Возникающее азимутальное поле H_θ отжимает плазменный разряд от

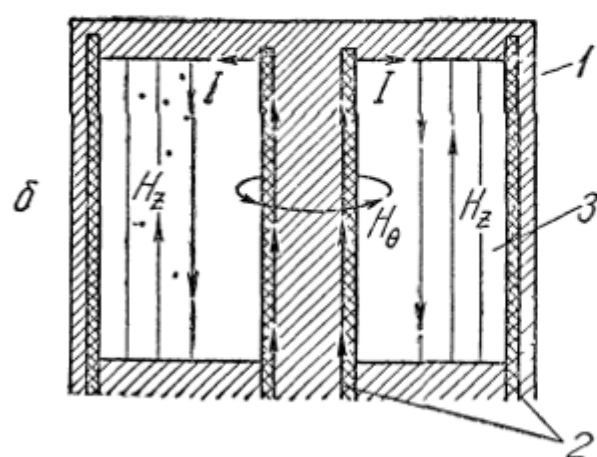
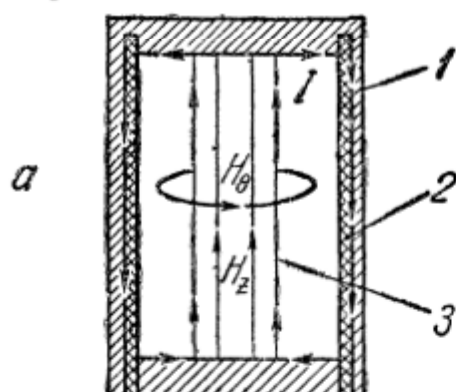


Рис 8,11 а — обычный стабилизированный пинч, б — обращенный стабилизированный пинч. 1 — медь, 2 — изолятор, 3 — плазма

внутренней стенки, а сжимающееся поле H_z не позволяет плазменному цилиндру расширяться до соприкосновения с наружной стенкой. На рисунке (рис. 8,12) в несколько идеали-

зированном виде представлено распределение полей в обращенном пинче.

Прежде всего, надо отметить, что при наличии плазмы поле H_θ внутри плазмы изменяется быстрее, чем $\frac{1}{r}$, поэтому величина

на $\left(\frac{H'_\theta}{H_0} - \frac{1}{r}\right)$ отрицательна. Величина $(-H'_z)$ также отрицательна, поэтому левая часть неравенства (8,58') нигде в нуль не обращается, и условие стабильности можно выполнить. Заметим, что в обращенном стабилизированном пинче максимум давления плазмы p расположен между внутренним и внешним электродами. Поэтому на внутренней поверхности плазменного цилиндра $\frac{\partial p}{\partial r} > 0$ и правая часть неравенства (8,58') существенно отрицательна. Таким образом, критерий Сайдема выполняется и для внутренней поверхности плазменного цилиндра.

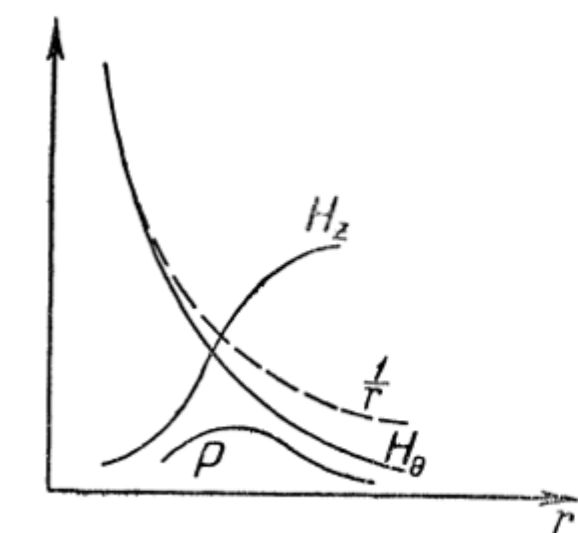


Рис. 8,12. Характерное распределение полей H_z и H_θ в обращенном стабилизированном пинче.

Эксперименты, проведенные в течение последних двух лет Н. Фюртом, С. Колгейтом и др. в Ливерморской лаборатории (США)

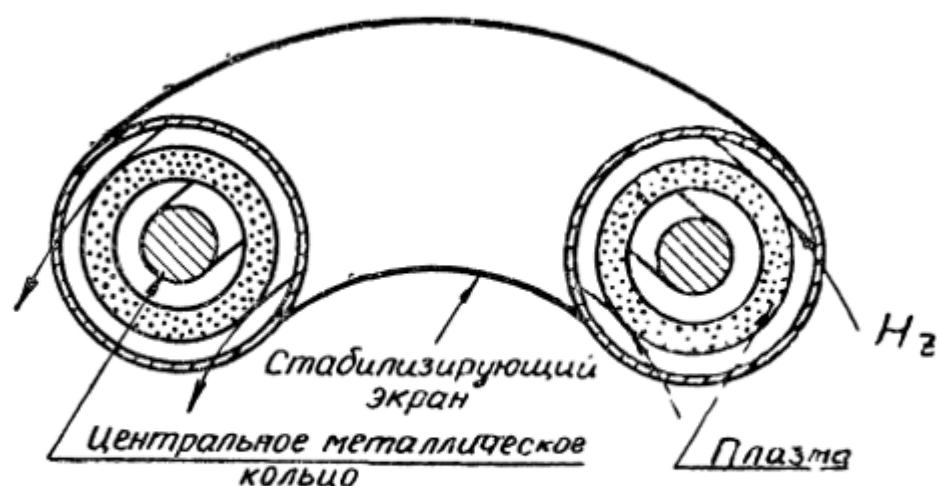


Рис. 8,13. «Левитрон» — торoidalный вариант твердоядерной конфигурации с подвешенным внутри металлическим кольцом.

действительно подтвердили магнитогидродинамическую устойчивость подобных стабилизированных пинчей. Однако эти же опыты показали, что возникают микромасштабные неустойчивости, названные «флаттерами» (от английского слова flutter — порхать), происхождение которых до сих пор не ясно. Кроме того, потери энергии на электроды не позволили нагревать плазму до $T > 50$ эв.

Последнее обстоятельство привело к разработке установки, в которой «твердоядерная» конфигурация осуществляется внутри замкнутого тороида. Тороидальным вариантом твердоядерной конфигурации является тороидальная камера с подвешенным внутри металлическим кольцом (рис. 8,13). Подвешивание или «левитация» массивного кольца осуществлена с помощью взаимодействия индуктированных в нем токов с внешним неоднородным полем.

§ 8,5. Кинетическая неустойчивость

Рассмотренные выше неустойчивости ведут к расширению плазмы, сжатой магнитным полем. Расширение сопровождается возрастанием энтропии, так как состояние, в котором плазма и магнитное поле пространственно разделены, обладает большей степенью «упорядоченности», чем состояние, в котором плазма и магнитное поле «перемешаны». В данном случае проявляется тенденция плазмы перейти к состоянию с наибольшей энтропией в пространстве координат. Аналогичный эффект имеет место и в пространстве скоростей.

Равновесным в пространстве скоростей является, как известно, максвелловское распределение. В обычном газе оно устанавливается благодаря парным соударениям между частицами, и время установления (время релаксации) по порядку величины равно среднему времени пробега частицы между двумя соударениями. В ионизованном газе также происходят парные соударения, однако гораздо большую роль играют коллективные взаимодействия. Они делают возможными новые механизмы перехода системы в равновесное состояние, причем время этого перехода оказывается значительно меньше времени между соударениями частиц.

Примером системы с немаксвелловским распределением может служить плазма, пронизываемая электронным пучком. Если плазма обладает максвелловским распределением, а электронный пучок в достаточной степени монохроматичен и обладает энергией, существенно превосходящей среднюю энергию движения частиц плазмы, то функция распределения всей системы представляется кривой с двумя максимумами. Такая система неустойчива по отношению к плазменным колебаниям (А. И. Ахиезер и Я. Б. Файнберг [38,39], Д. Бом и Е. П. Гросс [40]). С течением времени энергия пучка переходит в энергию колебаний, которая затем либо излучается, либо рассеивается в плазме, повышая ее температуру. В результате кривая распределения приближается к максвелловской кривой.

Другим примером может служить плазма с анизотропной функцией распределения. Анизотропия вызывает неустойчивость, способствующую максвеллизации плазмы. Механизм неустойчивости основан на магнитном взаимодействии частиц.

Допустим, что функция распределения анизотропна. Такая

функция распределения может появиться в результате магнитного сжатия плазмы либо в результате циклотронного нагрева, при котором энергия внешнего поля переходит в энергию циклотронного вращения частиц, а парные соударения не успевают передать энергию из поперечного движения в продольное. Распределение по поперечным скоростям, так же как и по продольным, может быть максвелловским, но температуры $T_{\perp}$ и $T_{\parallel}$ будут различаться. В однородном магнитном поле H , направленном вдоль оси z , соответствующее распределение представится функцией

$$f \sim e^{-\frac{mv_z^2}{2\kappa T_{\parallel}} - \frac{m(v_y^2 + v_x^2)}{2\kappa T_{\perp}}}. \quad (8,59)$$

При отсутствии соударений каждая частица вращается вокруг ведущего центра с линейной скоростью $v_{\perp}$ и угловой частотой $\omega_H = \frac{e}{m} B$. С величинами v_x и v_y скорость $v_{\perp}$ и фазовый угол $\theta = \omega_H t$ связаны соотношениями

$$v_x = v_{\perp} \cos \theta; \quad (8,60)$$

$$v_y = v_{\perp} \sin \theta. \quad (8,61)$$

Переходя к новым переменным, мы можем записать функцию распределения в виде

$$f \sim e^{-\frac{mv_z^2}{2\kappa T_{\parallel}} - \frac{mv_{\perp}^2}{2\kappa T_{\perp}}} = e^{-\frac{mv_z^2}{2\kappa T_{\parallel}} - \frac{\mu B}{\kappa T_{\perp}}}, \quad (8,62)$$

где $\mu = \frac{\omega_{\perp}}{B} = \frac{mv_{\perp}^2}{2B}$ — магнитный момент частицы. Результат обобщается на случай неоднородного, но достаточно плавно изменяющегося магнитного поля. Распределение частиц плазмы в таком поле представляется функцией скорости $v_{\parallel}$ и магнитного момента μ :

$$f(\mu, v_{\parallel}) = A e^{-\frac{mv_{\parallel}^2}{2\kappa T_{\parallel}} - \frac{\mu B}{\kappa T_{\perp}}}. \quad (8,63)$$

Постоянный множитель A определяется из условия нормировки:

$$\int f(\mu, v_{\parallel}) d\tau = n, \quad (8,64)$$

где n — плотность частиц данного рода. Элемент объема $d\tau$ в пространстве скоростей, как видно из (8,60) и (8,61), с точностью до постоянного множителя равен $d\mu dv_{\parallel}$; таким образом, для вычисления A мы имеем

$$A \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_{\parallel}^2}{2\kappa T_{\parallel}} - \frac{\mu B}{\kappa T_{\perp}}} d\mu dv_{\parallel} = n,$$

откуда

$$A = \frac{nB}{\kappa T_{\perp}} \sqrt{\frac{m}{2\pi\kappa T_{\parallel}}}. \quad (8,65)$$

Давление в газе с анизотропной функцией распределения не будет скалярной величиной. Согласно определению, давление есть сила, действующая на единицу поверхности. Если единичную площадку расположить перпендикулярно к H , то в течение одной секунды на нее попадет $v_{\parallel} f(\mu, v_{\parallel}) d\mu dv_{\parallel}$ частиц со значениями μ и $v_{\parallel}$ в интервалах $(\mu, \mu + d\mu)$ и $(v_{\parallel}, v_{\parallel} + dv_{\parallel})$. Каждая частица передаст импульс $2mv_{\parallel}$, и, следовательно, полный импульс, передаваемый площадке в течение одной секунды, будет

$$2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} mv_{\parallel}^2 f(\mu, v_{\parallel}) d\mu dv_{\parallel}.$$

Это и есть сила, действующая на нашу площадку в направлении магнитного поля. Таким образом,

$$p_{\parallel} = 2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} mv_{\parallel}^2 f(\mu, v_{\parallel}) d\mu dv_{\parallel} = n\kappa T_{\parallel}. \quad (8,66)$$

Точно так же сила, действующая на единичную площадку, расположенную перпендикулярно магнитному полю, равна

$$p_{\perp} = 2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \mu B f(\mu, v_{\parallel}) d\mu dv_{\parallel} = n\kappa T_{\perp}. \quad (8,67)$$

Мы видим, что в анизотропной плазме $p_{\parallel} \neq p_{\perp}$.

Анизотропия функции распределения возникает вследствие малого сечения парных соударений между частицами. Однако возможны иные типы взаимодействий, например, магнитное взаимодействие. Каждая частица, описывающая ларморовскую орбиту, обладает магнитным моментом μ , в силу чего она может взаимодействовать с внешним магнитным полем и с другими частицами. Магнитное взаимодействие может обеспечивать новые механизмы выравнивания температур. Благодаря большому радиусу действия магнитных сил магнитное взаимодействие описывается средствами гидродинамического приближения, в рамках которого должна, следовательно, обнаруживаться и тенденция плазмы к максвеллизации.

Действительно, пользуясь уравнениями магнитной гидродинамики, можно показать, что плазма с анизотропной функцией распределения ($T_{\perp} \neq T_{\parallel}$) неустойчива. Нелинейный анализ неустойчивости, выполненный для ряда простых предельных случаев А. А. Веденовым и Р. З. Сагдеевым [41], показал, что она приводит к перекачке кинетической энергии частиц из поперечного

движения в продольное, если неустойчивость связана с тем, что $T_{\perp} > T_{\parallel}$, и наоборот в противоположном случае.

Гидродинамическое приближение дает качественно правильную картину развития неустойчивости, однако границы области неустойчивости определяются им со значительной ошибкой. Это связано с тем, что уравнения гидродинамики, строгие в применении к средам, в которых длина свободного пробега частицы мала по сравнению с характерными размерами среды, применяются к разреженной плазме, в которой длина свободного пробега превышает размеры возмущений, исследуемых в плазме, и зачастую больше размеров всего объема, занимаемого плазмой. Вопрос о применимости гидродинамической модели в этом случае исследовался Г. Чу, М. Гольдбергером и Ф. Лоу [29]. Ими было показано, что гидродинамическое приближение правильно описывает такие движения разреженной плазмы, при которых отсутствует перенос импульса вдоль силовых линий магнитного поля. В данном случае последнее условие не выполняется и поэтому возникает необходимость в более строгом анализе.

Кинетическая теория [42, 43] уточняет границы области неустойчивости плазмы в магнитном поле. Если θ — угол между направлением распространения магнитогидродинамических волн и направлением магнитного поля, то безграничная и однородная плазма оказывается неустойчивой по отношению к таким волнам, если выполняется следующее условие [42]:

$$\beta(1 - \eta) \sin^2 \theta + \frac{\beta}{2} \left(1 - \frac{1}{\eta}\right) \cos^2 \theta + 1 < 0, \quad (8,68)$$

где

$$\beta = \frac{2\rho_{\perp}}{\mu_0 H^2} \text{ и } \eta = \frac{\rho_{\perp}}{\rho_{\parallel}}. \quad (8,69)$$

В частном случае $\theta = 0$ (волна распространяется вдоль магнитного поля) это условие выполняется лишь при $\rho_{\parallel} > \rho_{\perp}$, причем оно имеет вид

$$\rho_{\parallel} - \rho_{\perp} > \mu_0 H^2. \quad (8,70)$$

При $\theta = \frac{\pi}{2}$ (распространение перпендикулярно направлению поля) неустойчивость возможна только при $\rho_{\perp} > \rho_{\parallel}$, причем условие неустойчивости имеет следующий вид:

$$\rho_{\perp} \left(\frac{\rho_{\perp}}{\rho_{\parallel}} - 1 \right) > \frac{\mu_0 H^2}{2}. \quad (8,71)$$

Физический смысл условий (8,70) и (8,71) нетрудно выяснить, исходя из простого сопоставления сил, возникающих в возмущенной плазме.

Вначале рассмотрим магнитогидродинамические волны, распространяющиеся вдоль магнитного поля. Такие волны можно

описывать как колебания магнитных силовых линий. Поперечное смещение участка силовой линии ведет к ее искривлению и к появлению квазиупругой силы

$$F_1 = [jB]. \quad (8,72)$$

В выражении для j необходимо учитывать ток намагничивания, возникающий вследствие малых поворотов элементарных моментов μ_1 , всюду направленных противоположно вектору напряженности внешнего магнитного поля:

$$j = \text{rot } H - \text{rot} \int \vec{\mu} f dv_{||} d\mu. \quad (8,73)$$

Квазиупругая сила, следовательно, равна

$$F_1 = [\text{rot } H \cdot B] - [\text{rot} \int \vec{\mu} f(\mu, v_{||}) dv_{||} d\mu \cdot B]. \quad (8,74)$$

Помимо этого, при движении частицы вдоль искривленной силовой линии возникает центробежная сила $\frac{mv_{||}^2}{R}$. Выражая радиус кривизны R силовой линии через магнитное поле и суммируя действие всех частиц в единице объема плазмы, мы получим

$$F_2 = \frac{(B \nabla) B}{B^2} \int m v_{||}^2 f dv_{||} d\mu. \quad (8,75)$$

Малое искривление магнитного поля H мы представляем добавлением к невозмущенному полю H_1 перпендикулярного к нему вектора $H_{\sim}$. Вместе с магнитным полем изменяет направление и магнитный момент $\vec{\mu}$, остающийся всюду антипараллельным магнитному полю. Возмущение момента $\vec{\mu}$ можно представить малой добавкой $\vec{\mu}_{\sim} = -\mu_1 \frac{H_{\sim}}{H_1}$ к величине $\vec{\mu}_1$.

Поскольку $H_{\sim}$ изменяется как $e^{i(\omega t - kr)}$ и $k \parallel H_1$, имеют место соотношения

$$\text{rot } H_{\sim} = -i[kH_{\sim}]$$

и

$$(H \nabla) H = -i(H_1 k) H_{\sim} = -ikH_1 H_{\sim}.$$

Пользуясь приведенными замечаниями, преобразуем выражения для сил F_1 и F_2 :

$$F_1 = -i [[kH_{\sim}] B_1] - i \int [[kH_{\sim}] B_1] \frac{\mu_1}{H_1} f d\mu_1 dv_{||} = \\ = - \frac{i [[kH_{\sim}] B_1]}{\mu_0 H_1^2} \left(\mu_0 H_1^2 + B_1 \int \mu_1 f d\mu_1 dv_{||} \right) = \frac{ikH_{\sim}}{H_1} (\mu_0 H_1^2 + p_{\perp}); \quad (8,76)$$

$$F_2 = -i \frac{kH_1 H_{\sim}}{H_1^2} \int m v_{||}^2 f dv_{||} d\mu = - \frac{ikH_{\sim}}{H_1} p_{||}. \quad (8,77)$$

Искривление магнитных силовых линий будет возрастать, если выполняется неравенство $|F_2| > |F_1|$, что совпадает с условием неустойчивости (8, 70), полученным в строгой кинетической теории.

Неустойчивость такого типа возникает при достаточно большом давлении $p_{||}$. Она аналогична известной неустойчивости гибкого шланга с жидкостью под высоким давлением: местное искривление шланга вызывает появление центробежной силы при движении жидкости вдоль шланга, под действием которой шланг еще сильнее искривляется.

Рассмотрим теперь волну, распространяющуюся почти перпендикулярно к магнитному полю $\mathbf{k} \perp \mathbf{H}_1$. Она подобна звуковой волне, однако уплотнения и разрежения газа сопровождаются сгущениями и разрежениями магнитных силовых линий. Если волны распространяются не строго перпендикулярно магнитному полю, то в области разрежения силовых линий образуется как бы ловушка с магнитными пробками. Под действием силы $-\mu \nabla B$ частицы собираются к средней части ловушки и концентрация их в области разрежения силовых линий возрастает. Это приводит к дальнейшему раздвижению силовых линий. Эффект здесь связан с изменением функции распределения плазмы в возмущенном магнитном поле. Функция распределения

$$f = A e^{-\frac{\mu B}{\kappa T_{\perp}} - \frac{w_{||}}{\kappa T_{||}}}$$

в результате малого возмущения $H_{\sim} = \frac{B_{\sim}}{\mu_0}$ магнитного поля изменяется на величину

$$f_{\sim} = \left(-\frac{\mu}{\kappa T_{\perp}} - \frac{dw_{||}}{dB} \frac{1}{\kappa T_{||}} \right) B_{\sim} f_1,$$

где f_1 — функция распределения невозмущенной плазмы.

В силу того, что полная энергия частицы сохраняется, имеем

$$dw_{||} = -dw_{\perp} = -\mu dB,$$

следовательно,

$$f_{\sim} = - \left(1 - \frac{T_{\perp}}{T_{||}} \right) \frac{\mu B_{\sim}}{\kappa T_{\perp}} f_1.$$

Связанное с этим изменение поперечного давления вычисляется следующим образом:

$$p_{\sim} = \int m v_{\perp}^2 f_{\sim} dv_{\parallel} d\mu = \frac{2B_1 B_{\sim}}{\kappa T_{\perp}} \left(\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} - 1 \right) \int \mu^2 f_1 d\mu dv_{\parallel} = \\ = \frac{2B_{\sim}}{B_1} p_{\perp} \left(\frac{p_{\perp}}{p_{\parallel}} - 1 \right) = \frac{2H_{\sim}}{H_1} p_{\perp} \left(\frac{p_{\perp}}{p_{\parallel}} - 1 \right). \quad (8,78)$$

С изменением давления в некоторой части плазмы возникает сила

$$-\nabla_{\perp} p_{\sim} = ik \frac{2H_{\sim}}{H_1} p_{\perp} \left(\frac{p_{\perp}}{p_{\parallel}} - 1 \right). \quad (8,79)$$

Противодействующая ей квазиупругая сила равна

$$[\text{rot } \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}_1] = -ik B_1 H_{\sim} \quad (8,80)$$

(вектор $\mathbf{H}_{\sim}$ в этом случае также перпендикулярен магнитному полю $\mathbf{H}_1$). Неустойчивость возникает, когда сила, связанная с изменением поперечного давления (8,79), превосходит квазиупругую силу (8,80), то есть когда выполняется условие (8,71), строго выведенное в кинетической теории.

Как видно из (8,70) и (8,71), в обоих случаях анизотропия функции распределения должна быть достаточно большой, чтобы могла возникнуть неустойчивость рассмотренного типа.

ГЛАВА 9

ДИНАМИЧЕСКИЙ ПИНЧ И УДАРНЫЕ ВОЛНЫ

Согласно первоначальным представлениям, основным механизмом нагрева газа в самосжатом разряде является омический нагрев. Предполагалось, что во внешнем продольном электрическом поле ускоряются главным образом электроны. Электроны осуществляют ионизацию газа и путем столкновений передают ионам часть своей энергии. Так создается высокотемпературная плазма. Роль магнитного поля разряда состоит в противодействии силам давления, то есть в удержании плазменного столба внутри некоторого цилиндра.

В действительности, как показали исследования мощных разрядов в газе, при больших скоростях нарастания тока (порядка

10^{10} — 10^{11} а/сек) с самого начала равновесие между электродинамическими силами и газокINETическим давлением отсутствует, и плазма быстро сжимается по направлению к оси разрядной трубки [44]. Основную роль при этом, наряду с магнитными силами, действующими на газ, играет кINETическая энергия ионов. Влияние газокINETического давления сказывается только на стадии сильного сжатия, в начальной же стадии при наличии скин-эффекта внутренняя часть газа еще не нагрета, давление мало и играет второстепенную роль. По всей вероятности, в условиях быстрого нарастания тока сжатие плазмы электродинамическими силами является основным механизмом ее нагрева. На основе такого рода представлений М. А. Леонтович и С. М. Осовец еще в 1953 г. развили теорию сжатия плазменного шнура [45]. Эта теория позволила оценить время сжатия. Результат оказался в хорошем согласии с экспериментальными данными.

В упомянутой работе предполагалось, что сжатие является адиабатическим. Однако такое предположение не является единственно возможным. Не исключена возможность образования в цилиндрическом разряде ударной волны, движущейся от периферии к оси. Ударная волна будет приводить газ в движение и увеличивать его температуру. Работа электродинамических сил по-прежнему будет переходить в тепло, однако эффективность передачи энергии может быть более высокой. Если предположить, что ток течет по внешней поверхности плазменного стержня (скин-эффект), то магнитное поле внутри газа будет отсутствовать, и для расчета эффектов сжатия и нагрева можно воспользоваться хорошо разработанной теорией ударных волн в магнитных средах. Такой расчет был выполнен Дж. Алленом [46].

Однако возможность использования подобной модели в интересующих нас условиях встречает возражения. Ударная волна, как поверхность, на которой определенные параметры среды испытывают разрыв, очень точно описывает соответствующее явление в плотной среде. Поверхность разрыва представляет собой идеализацию, оправдывающуюся, когда длины свободного пробега малы и переход от одних значений параметров к другим осуществляется в тонком слое. В интересующих нас случаях длины свободных пробегов велики по сравнению с характерными размерами плазмы, поэтому об ударной волне в обычном смысле здесь говорить нельзя. Мы приходим к необходимости детального исследования движения частиц в быстро сжимающемся ионизованном газе в условиях, когда соударения не существенны. Значительный успех в этом направлении был достигнут М. Розенблютом [47].

В последующих параграфах будут приведены некоторые результаты теории ударных волн и вкратце рассмотрена развитая Розенблютом теория сжимающегося газа в магнитном поле. Кроме того, будут описаны эксперименты по нагреву плазмы путем сжатия ее быстро нарастающим магнитным полем.

§ 9.1. Ударные волны

Как известно, малые возмущения плотности в обычном газе или жидкости распространяются со скоростью звука, возмущения же достаточно большой амплитуды приводят к образованию ударной волны, распространяющейся со скоростью большей скорости звука. Ударная волна представляет собой поверхность, на которой происходит резкое, скачкообразное повышение давления, сопровождающееся сжатием, нагревом и изменением скорости движения вещества. Математически ей соответствуют разрывные решения уравнений движения «идеальной» среды, то есть среды без вязкости и теплопроводности.

«Идеальность» не означает, что при распространении ударной волны не происходит диссипации энергии. Напротив, энергия волны всегда переходит в тепловую энергию. Этот переход осуществляется в тонком слое «фронта» волны в результате соударений между частицами вещества в слое.

Для описания происходящего в ударной волне перехода среды из одного состояния в другое нет необходимости в детальном изучении процессов, протекающих в тонком пограничном слое. Достаточно использовать совершенно очевидные условия непрерывности потоков вещества, энергии и импульса через разрывную поверхность. Они приводят к системе уравнений, связывающих между собой величины скачков всех параметров, характеризующих состояние вещества. Как показывает анализ [48], эта система уравнений допускает решения двух типов. Одному из них соответствует случай, когда поток вещества через поверхность разрыва отсутствует. Такой разрыв называется тангенциальным. Во втором случае вещество переходит с одной стороны разрыва на другую — это ударная волна.

Давление и удельный объем до и после прохождения ударной волны ($p_1 V_1$ и $p_2 V_2$) не удовлетворяют уравнению адиабаты Пуассона $S(p, V) = \text{const}$, так как энтропия S на поверхности разрыва возрастает. Связь между $p_1 V_1$ и $p_2 V_2$ дается так называемой ударной адиабатой Гюгонио:

$$\epsilon_1 - \epsilon_2 + \frac{1}{2} (V_1 - V_2) (p_1 + p_2) = 0, \quad (9.1)$$

где ϵ_1 и ϵ_2 — внутренняя энергия единицы объема среды до и после прохождения ударной волны.

В случае идеального газа внутренняя энергия находится по формуле

$$\epsilon = \frac{pV}{\gamma - 1}, \quad (9.2)$$

где γ — показатель адиабаты, равный отношению теплоемкостей $\frac{c_p}{c_v}$, и ударная адиабата представляется в виде

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{(\gamma + 1) p_1 + (\gamma - 1) p_2}{(\gamma - 1) p_1 + (\gamma + 1) p_2}. \quad (9.3)$$

Она позволяет по величинам ρ_1 и V_1 , характеризующим состояние невозмущенной среды, и одной из величин ρ_2 или V_2 определить другую, то есть определить состояние газа после прохождения ударной волны.

Выводы, получаемые для обычных газов, остаются в основном справедливыми и для ионизованных газов. Различие будет только в типе взаимодействия между частицами, что может проявиться лишь на структуре фронта ударной волны: в узком пограничном слое в плазме возникнут электрические поля, обеспечивающие совместное движение двух различных газов, составляющих плазму,— электронного и ионного.

Для проводящей среды в магнитном поле исследование разрывных решений проводится по тому же плану, что и для обычных сред. В результате обнаруживается большое число типов разрывов. Ударные волны по-прежнему характеризуются потоком вещества через поверхность разрыва и наличием скачка плотности на этой поверхности. В качестве примера рассмотрим простой частный случай, когда магнитное поле H параллельно фронту ударной волны, а поток вещества нормален к этому фронту.

Совместим плоскость $x = 0$ декартовой системы координат с поверхностью разрыва, а ось y направим вдоль магнитного поля. На поверхности разрыва поток вещества должен сохраняться:

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2, \quad (9,4)$$

где ρ_1 и ρ_2 , v_1 и v_2 — плотность среды и скорость её движения относительно поверхности разрыва с той и другой стороны от этой поверхности ($x = 0$).

Кроме того, должно выполняться условие непрерывности тангенциальной составляющей электрического поля, в данном случае приводящее к равенству

$$v_1 H_1 = v_2 H_2. \quad (9,5)$$

Условия непрерывности потока импульса и потока энергии мы получим, исходя из уравнения движения

$$\rho v \frac{dv}{dx} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(p + \frac{\mu_0 H^2}{2} \right). \quad (9,6)$$

Произведем интегрирование:

$$\int \rho v \frac{dv}{dx} dx + \left(p + \frac{\mu_0 H^2}{2} \right) = \text{const.}$$

Произведение ρv в силу равенства (9,4) можно вынести за знак интеграла, тогда

$$\rho v^2 + \left(p + \frac{\mu_0 H^2}{2} \right) = \text{const.},$$

то есть

$$\rho_1 v_1^2 + \left(p_1 + \frac{\mu_0 H_1^2}{2} \right) = \rho_2 v_2^2 + \left(p_2 + \frac{\mu_0 H_2^2}{2} \right). \quad (9,7)$$

Разделим теперь правую и левую часть уравнения (9,6) на ρ и снова проинтегрируем:

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(p + \frac{\mu_0 H^2}{2} \right) dx = \text{const.} \quad (9,8)$$

Преобразуем интеграл

$$\int \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(p + \frac{\mu_0 H^2}{2} \right) dx = \int V dp + \mu_0 \int \frac{H}{\rho} dH = Vp - \int p dV + \mu_0 \frac{H^2}{\rho}.$$

Здесь мы ввели обозначение V для удельного объема $\frac{1}{\rho}$, произвели интегрирование по частям и, кроме того, вынесли отношение $\frac{H}{\rho}$ за знак интеграла, пользуясь постоянством этого отношения в идеально проводящей жидкости (вмороженность магнитного поля). Интеграл $\int p dV$ представляет собой внутреннюю энергию. Действительно, в термодинамическом соотношении

$$d\varepsilon = T dS - p dV$$

первый член, представляющий изменение энергии за счет притока тепла, равен нулю, поскольку мы пренебрегаем теплопроводностью («идеальность» среды). В результате соотношение (9,8) представляется в виде

$$\frac{v^2}{2} + pV + \varepsilon + \mu_0 H^2 V = \text{const}$$

или

$$\varepsilon_1 + \frac{v_1^2}{2} + p_1 V_1 + \mu_0 H_1^2 V_1 = \varepsilon_2 + \frac{v_2^2}{2} + p_2 V_2 + \mu_0 H_2^2 V_2. \quad (9,9)$$

Выпишем полученные нами уравнения (9,4), (9,5), (9,7) и (9,9), заменяя $\frac{1}{\rho}$ на V :

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_1}{V_1} &= \frac{v_2}{V_2}; \\ v_1 H_1 &= v_2 H_2; \\ \frac{v_1^2}{V_1} + \left(p_1 + \frac{\mu_0 H_1^2}{2} \right) &= \frac{v_2^2}{V_2} + \left(p_2 + \frac{\mu_0 H_2^2}{2} \right); \\ \varepsilon_1 + \frac{v_1^2}{2} + p_1 V_1 + \mu_0 H_1^2 V_1 &= \varepsilon_2 + \frac{v_2^2}{2} + p_2 V_2 + \mu_0 H_2^2 V_2. \end{aligned} \right\} \quad (9,10)$$

Система уравнений (9,10) определяет состояние среды после прохождения ударной волны по состоянию ее до прохождения

и по величине скачка любого из параметров v , V , H и p на фронте ударной волны. Из системы можно вывести уравнение ударной адиабаты в магнитной гидродинамике:

$$(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \frac{p_2 + p_1}{2} (V_2 - V_1) + \frac{\mu_0}{4} (V_2 - V_1) (H_2 - H_1)^2 = 0. \quad (9,11)$$

От уравнения Гюгонио (9,1) оно отличается третьим членом. Скорость потока, движущегося по направлению к ударной волне, v_1 можно рассматривать как скорость распространения ударной волны в первоначально неподвижной среде. С помощью уравнений (9,4) и (9,7) она может быть выражена через величины разрывов давления, плотности и магнитного поля на фронте ударной волны:

$$\frac{p_1}{p_2} v_1^2 = \frac{p_2 - p_1}{p_2 - p_1} + \frac{\mu_0 (H_2^2 - H_1^2)}{2 (p_2 - p_1)}. \quad (9,12)$$

При приближении разрывов к нулю уравнение (9,12) дает

$$v_1^2 \rightarrow \frac{dp}{d\rho} + \frac{\mu_0}{2} \frac{dH^2}{d\rho} = u_0^2 + \mu_0 H \frac{dH}{d\rho} = u_0^2 + \frac{\mu_0 H^2}{\rho}. \quad (9,13)$$

Здесь использовано предположение о «вмороженности» магнитного поля $\frac{H}{\rho} = \text{const}$. Мы видим, что скорость слабой ударной волны стремится к скорости распространения малого возмущения в магнитной жидкости (7,50). При отсутствии магнитного поля эта скорость равна скорости звука u_0 .

Теоретически показано, что ударная магнитогидродинамическая волна не всегда устойчива. При некоторых условиях она может расщепляться на несколько ударных волн [49].

В то время как при отсутствии магнитного поля ширина фронта ударной волны по порядку величины равна средней длине свободного пробега частицы между двумя соударениями, в магнитном поле становится существенным магнитное взаимодействие частиц, и движение с резким скачком параметров среды может осуществляться даже в случае, если длина свободного пробега частицы будет велика по сравнению с размерами области, занятой плазмой. Пример движения такого рода будет рассмотрен в следующем параграфе.

§ 9.2. Динамика сжимающегося газа

Рассмотрим отражение плазменного потока магнитным полем. Допустим, что плазма движется вдоль оси x со скоростью u_0 , затем отражается магнитным полем, направленным вдоль оси z , и возвращается в сторону увеличения x . Плоскость отражения частиц плазмы будем считать координатной плоскостью $x = 0$. На большом удалении от этой плоскости магнитное поле отсутствует, отражение же происходит в области достаточно сильного

магнитного поля. Входя в эту область, частицы описывают дуги в плоскостях $z = \text{const}$ и снова уходят в толщу плазмы.

При отсутствии других частиц ион описал бы дугу гораздо большего радиуса, чем электрон с той же скоростью. Однако в плотной плазме ионы и электроны не могут двигаться независимо друг от друга. Небольшое отставание электронов в движении их по x вызывает электрическое поле $E = E_x$, устраняющее разрыв между ионной и электронной компонентами. Исходя из этого, мы будем считать, что всюду плотность электронов равна плотности ионов (квазинейтральность плазмы) и в то же время будем учитывать действие поляризаационного поля $E = E_x$.

Для каждой частицы мы можем написать следующие уравнения:

$$\frac{du}{dt} = \frac{e}{m} (E + vB); \quad (9,14)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{e}{m} uB, \quad (9,15)$$

где

$$u = \frac{dx}{dt} \text{ и } v = \frac{dy}{dt}.$$

Вдоль оси z движения нет.

Поскольку задача стационарна и имеется зависимость только от x , производные по времени $\frac{du}{dt}$ и $\frac{dv}{dt}$ можно заменить выражениями $u \frac{du}{dx}$ и $u \frac{dv}{dx}$, тогда для электронной и ионной компоненты уравнения движения запишутся так:

$$u_e \frac{du_e}{dx} = -\frac{e}{m_e} (E + v_e B); \quad (9,16)$$

$$u_e \frac{dv_e}{dx} = \frac{e}{m_e} u_e B; \quad (9,17)$$

$$u_i \frac{du_i}{dx} = \frac{e}{m_i} (E + v_i B); \quad (9,18)$$

$$u_i \frac{dv_i}{dx} = -\frac{e}{m_i} u_i B. \quad (9,19)$$

Плотность потока частиц любого рода должна быть постоянной во всех точках, так как накопление частиц не происходит. Поэтому $n_e u_e = n_i u_i = n_0 u_0$, где n_0 — плотность плазмы при $x \rightarrow \infty$. В силу предположения о квазинейтральности плазмы, отсюда следует равенство скоростей движения электронов и ионов в направлении оси x в любой точке: $u_e = u_i$. Мы будем обозначать эту скорость просто буквой u . Скорости v_e и v_i не совпадают, и мы введем обозначение $v = v_i - v_e$. Исключая E , пренебрегая

величиной $\frac{m_e}{m_i}$ по сравнению с единицей и пользуясь новыми обозначениями, из (9,16)—(9,19) мы получим

$$u \frac{du}{dx} = \frac{e}{m_i} v B; \quad (9,20)$$

$$\frac{dv}{dx} = - \frac{e}{m_e} B. \quad (9,21)$$

К этому следует добавить уравнение Максвелла, связывающее магнитное поле в плазме с током, направленным вдоль оси u :

$$\frac{dH}{dx} = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dx} = -nev, \quad (9,22)$$

и уравнение непрерывности

$$nu = n_0 u_0, \quad (9,23)$$

чтобы получилась полная система уравнений для u , v , B и n . Исключая B из (9,20) и (9,21) и производя интегрирование, получим соотношение

$$m_i u^2 + m_e v^2 = m_i u_0^2, \quad (9,24)$$

которое показывает, что при торможении ($u^2 < u_0^2$) энергия ионов $\frac{m_i u^2}{2}$ передается электронам, движущимся вдоль оси y .

Введем новую переменную ψ :

$$u = u_0 \cos \psi. \quad (9,25)$$

Тогда, согласно (9,24), будем иметь

$$v = v_0 \sin \psi, \quad (9,26)$$

где

$$v_0 = \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} u_0, \quad (9,27)$$

и уравнения (9,21), (9,22) и (9,23) примут вид

$$\frac{d\psi}{dx} v_0 \cos \psi = - \frac{e}{m_e} B, \quad (9,28)$$

$$\frac{dB}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{dx} = - \mu_0 nev_0 \sin \psi; \quad (9,29)$$

$$n = \frac{n_0}{\cos \psi}. \quad (9,30)$$

Исключая n и $\frac{d\psi}{dx}$, получим

$$\frac{B}{\mu_0} \frac{dB}{d\psi} = n_0 v_0^2 m_e \sin \psi.$$

Отсюда

$$\frac{\mu_0 H^2}{2} = -n_0 m_e v_0^2 \cos \psi + C.$$

Постоянная интегрирования C определяется из условия: при $x = \infty$ $H = 0$ и, кроме того, $u = u_0$, то есть $\psi = 0$. В результате для магнитного поля находим следующее соотношение:

$$\frac{\mu_0 H^2}{2} = 2q (1 - \cos \psi), \quad (9,31)$$

где $q = n_0 \frac{m_i u_0^2}{2}$ — начальная энергия ионов в единице объема плазмы. Подставляя H из (9,31) в (9,28); мы получим дифференциальное уравнение для ψ :

$$\frac{d\psi}{dx} \cos \psi = -\frac{2e \sqrt{\mu_0 q}}{m_e v_0} (1 - \cos \psi)^{\frac{1}{2}},$$

откуда

$$x = -\frac{m_e v_0}{2e \sqrt{\mu_0 q}} \int \frac{\cos \psi d\psi}{(1 - \cos \psi)^{\frac{1}{2}}} + C = -\frac{m_e v_0}{e \sqrt{2\mu_0 q}} \left(\ln \operatorname{tg} \frac{\psi}{4} + 2 \cos \frac{\psi}{2} \right) + C.$$

Плоскость $x = 0$ была определена нами как плоскость отражения, следовательно, при $x = 0$ $u = 0$ и $\psi = \frac{\pi}{2}$. Отсюда находим

$$C = \frac{m_e v_0}{2 \sqrt{2\mu_0 q}} \left(\ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} + \sqrt{2} \right)$$

и

$$x = \frac{c}{\omega_0} \left(\ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{\operatorname{tg} \frac{\psi}{4}} - 2 \cos \frac{\psi}{2} + \sqrt{2} \right), \quad (9,32)$$

где $\omega_0 = \frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 m_e}$ — собственная частота колебаний плазмы с плотностью n_0 . Уравнения (9,25), (9,26), (9,31) и (9,32) дают распределение скоростей и магнитного поля в плазме.

Отражающее магнитное поле определяется равенством

$$\frac{\mu_0 H^2}{2} = n_0 m_i u_0^2.$$

Глубина проникновения магнитного поля плазмы обратно пропорциональна квадратному корню из плотности отражаемого потока. На рис. 9,1 представлена зависимость величины $\eta = \frac{\mu_0 H^2}{2 m_i n_0 u_0^2}$

от $\xi = \frac{\omega_0}{c} x$, характеризующая распределение магнитного поля в плазме.

Переходя в систему координат, связанную с набегающей на магнитное поле плазмой, мы получаем задачу о движении плазмы под действием набегающего магнитного поля, то есть к задаче о динамическом пинче. В достаточно разреженной плазме сжимающегося разряда, когда соударения между частицами еще не играют роли, ударной волны в обычном смысле этого слова не образуется. Не происходит и адиабатического сжатия как в нейтральном газе. Гораздо ближе к действительности представление о магнитной «стенке», набегающей на плазму и создающей в ней

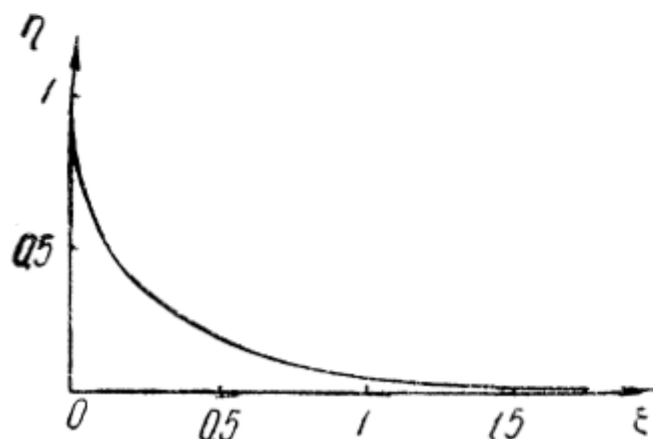


Рис. 9,1. Распределение магнитного поля в плазменном потоке;

$$\eta = \frac{\mu_0 H^2}{2m_i n_0 u_0^2}, \quad \xi = \frac{\omega_0}{c} x.$$

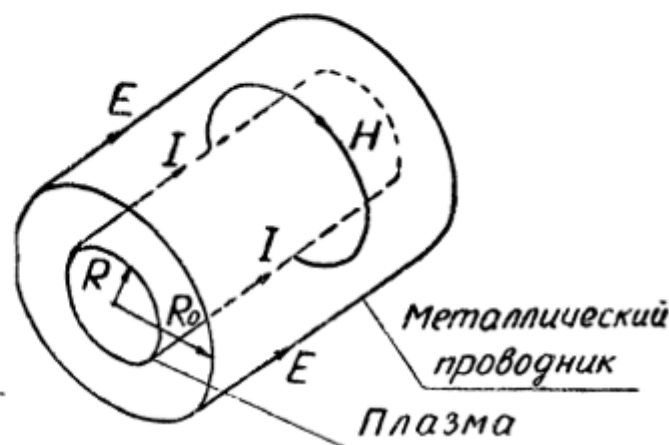


Рис. 9,2. Поля и токи в самосжатом разряде.

поток отраженных частиц, направленный к оси. После прохождения оси этот поток встречает поверхность в диаметрально противоположной точке. Это может привести к обратному движению поверхности разряда, что, по-видимому, соответствует экспериментально наблюдаемым колебаниям радиуса пинча.

Исходя из этих представлений, Розенблют определил время сжатия разряда [47]. Следуя Розенблюту, рассмотрим бесконечно проводящий плазменный стержень, по поверхности которого течет ток I (рис. 9,2). Этот ток создает вне плазмы поле

$$H = \frac{I}{2\pi R}, \quad (9,33)$$

сжимающее плазму. Необходимо найти, как с течением времени при заданном электрическом поле E будет изменяться радиус плазменного стержня R . Уравнение Максвелла

$$\text{rot } E = - \frac{\partial B}{\partial t}$$

позволяет определить связь электрического поля с магнитным потоком:

$$E = - \frac{d}{dt} \int_R^{R_0} B dR = - \frac{d}{dt} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{R_0}{R}. \quad (9,34)$$

Скорость движения границы плазмы такова, что магнитное давление $\frac{\mu_0 H^2}{2}$ уравнивается «давлением» на поверхности сжимающейся плазмы. Относительно этой поверхности каждая частица движется со скоростью $\frac{dR}{dt}$ (тепловая скорость не учитывается), следовательно, импульс каждой иона равен $m_i \frac{dR}{dt}$. При отражении импульс частицы сохраняется по абсолютной величине, но меняет знак, так что изменение импульса равно $2m_i \frac{dR}{dt}$. Если в единице объема плазмы содержится n ионов, то каждой единичной площадке поверхности в одну секунду передается импульс

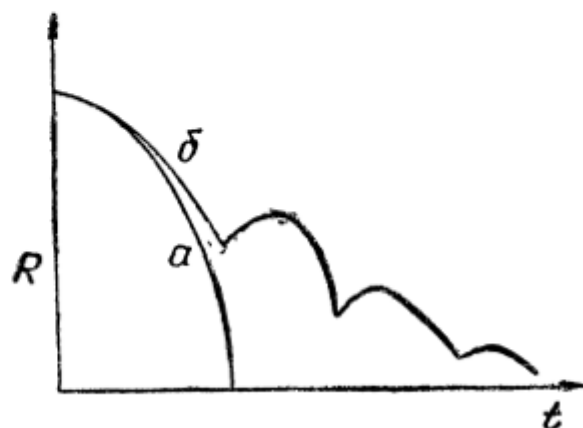


Рис. 9,3. Изменение радиуса самосжатого разряда со временем.

$$2m_i \left(\frac{dR}{dt} \right) n \frac{dR}{dt} = 2m_i n \left(\frac{dR}{dt} \right)^2.$$

Уравнение баланса имеет вид

$$\frac{\mu_0 H^2}{2} = 2nm_i \left(\frac{dR}{dt} \right)^2. \quad (9,35)$$

После исключения I и H из последних трех уравнений получается дифференциальное уравнение для R :

$$\frac{R}{t} \ln \frac{R_0}{R} \frac{dR}{dt} = - \frac{E}{2\sqrt{\mu_0 n m_i}}, \quad (9,36)$$

интегрирование которого дает

$$R_0^2 - R^2 \left(1 + 2 \ln \frac{R_0}{R} \right) = \frac{Et^2}{\sqrt{\mu_0 n m_i}}. \quad (9,37)$$

Радиус плазменного цилиндра уменьшается, как показано на кривой a (рис. 9,3), и достигает нуля за время

$$t = R_0 \sqrt[4]{\frac{\mu_0 n m_i}{E^2}}. \quad (9,38)$$

Как указывалось выше, частица после отражения от границы плазмы летит по направлению к диаметрально противоположной точке, снова сталкивается со стенкой, отражается и т. д. Благодаря этому граница плазмы, как показывает интегрирование уточненных уравнений, временами отходит назад (б, рис. 9,3),

так что поверхность разряда совершает колебания, постепенно сжимаясь к центру.

Следует заметить, что другие модели динамического пинча приводят к оценке времени сжатия, близкой к (9,38), что вполне естественно, так как подобные оценки, в сущности, получаются как следствия закона сохранения импульса, а не специфики рассматриваемой модели.

§ 9.3. Сжатие плазмы быстро нарастающим внешним магнитным полем

Энергия ударной волны частично переходит в тепловую энергию газа. В связи с этим представлялось возможным получение термоядерных температур с помощью ударных волн. Для этой цели казалось выгодным использовать сходящиеся цилиндрические или сферические волны. В

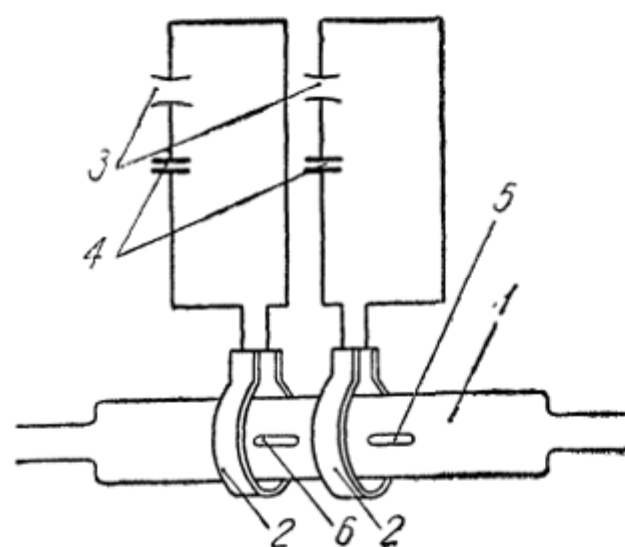


Рис. 9,4. Принципиальная схема «Сциллы».

сходящейся ударной волне энергия на одну частицу вырастает, так как по мере распространения волны в движение вовлекается все меньшее и меньшее число частиц. Однако нагревание частиц приводит к увеличению длины свободного пробега и, следовательно, к расширению фронта ударной волны. Ясно, что область, в которую сходится ударная волна, должна превосходить ширину фронта, следовательно, она не может быть произвольно малой. Это и ограничивает энергию час-

тиц, которая может быть получена с помощью сходящейся ударной волны.

Опыты с ударными волнами в различных газах показали, что ударные волны большой амплитуды могут ионизовать газ и нагревать его до температуры, составляющей несколько электрон-вольт. Эта температура сравнительно невысока, однако образующаяся таким образом плазма может использоваться для дальнейшего нагрева посредством адиабатического сжатия. Эта идея осуществлена в термоядерном устройстве, известном под названием «Сцилла».

Приведем краткое описание одного из вариантов этой установки [50]. Принципиальная схема «Сциллы» дана на рис. 9,4. Цилиндрическая камера (1) из керамики, пирекса или кварца с внутренним диаметром 5 см наполняется дейтерием при давлении от 0,01 до 1 мм ртутного столба. На камеру надеты медные витки, через которые разряжается конденсаторная батарея. Ток

в витках создает продольное магнитное поле пробочной конфигурации. Вместе с током разряда это поле возрастает со временем, в результате чего вблизи стенок камеры индуцируется азимутальное электрическое поле. Величина его зависит от времени нарастания магнитного поля, которое определяется емкостью конденсаторной батареи и индуктивностью разрядного контура.

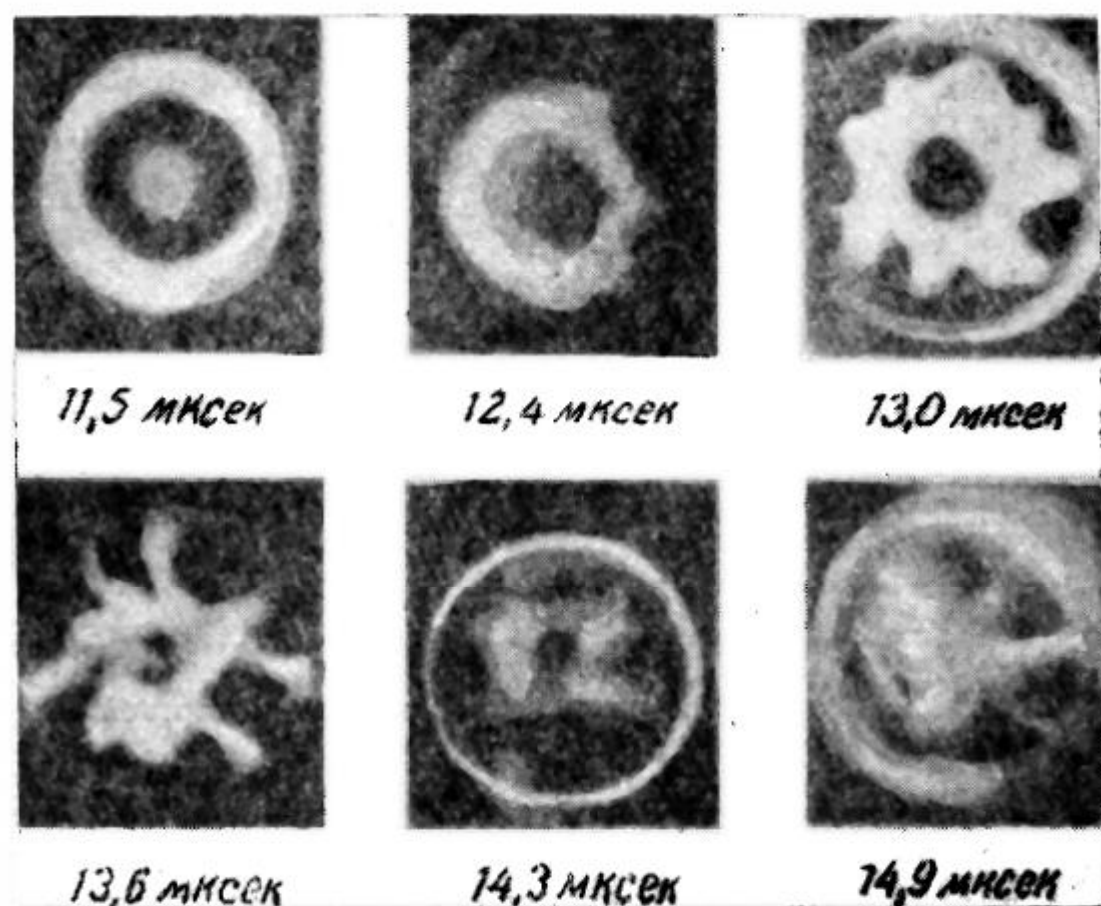


Рис. 9,5. Деформация плазменного сгустка, образующегося при разряде в дейтерии.

В описываемом эксперименте батарея из 10 конденсаторов емкостью 0,9 мкф каждый заряжалась до 80 кв, а затем разряжалась через катушку с помощью 10 разрядников. Индуктивность источника равна 0,035 мкгн, а катушки — 0,040 мкгн. Разряд создает в цепи затухающие колебания тока. Через 1,25 мксек от начала разряда ток в витках 2 (рис. 9,4) достигает 750000 а, и магнитное поле в центре витка растет до 65 кгс. Максимальная напряженность индуцированного электрического поля составляет 1,6 кв/см. В дейтерии происходит пробой и возникает кольцевой ток. Взаимное отталкивание этого тока с разрядным током в медных ободках приводит к быстрому уходу плазмы по направлению к оси и в стороны от катушек.

Фотографирование разряда через окно в торце камеры позволяет проследить за движением в плоскости, перпендикулярной оси системы. На рис. 9,5 приведены кадры скоростной киносъемки,

полученные на установке описанного типа. Видно, что плазма возникает у стенок камеры в виде светящегося кольца, которое затем быстро сжимается к оси. При этом форма светящегося кольца сильно искажается быстро растущими «складками» или «языками», свидетельствующими о неустойчивости разряда. Это неустойчивость той же природы, что и в линейном пинче. Разряд в нарастающем продольном магнитном поле часто называют θ -пинчем. От линейного пинча он отличается направлением тока:

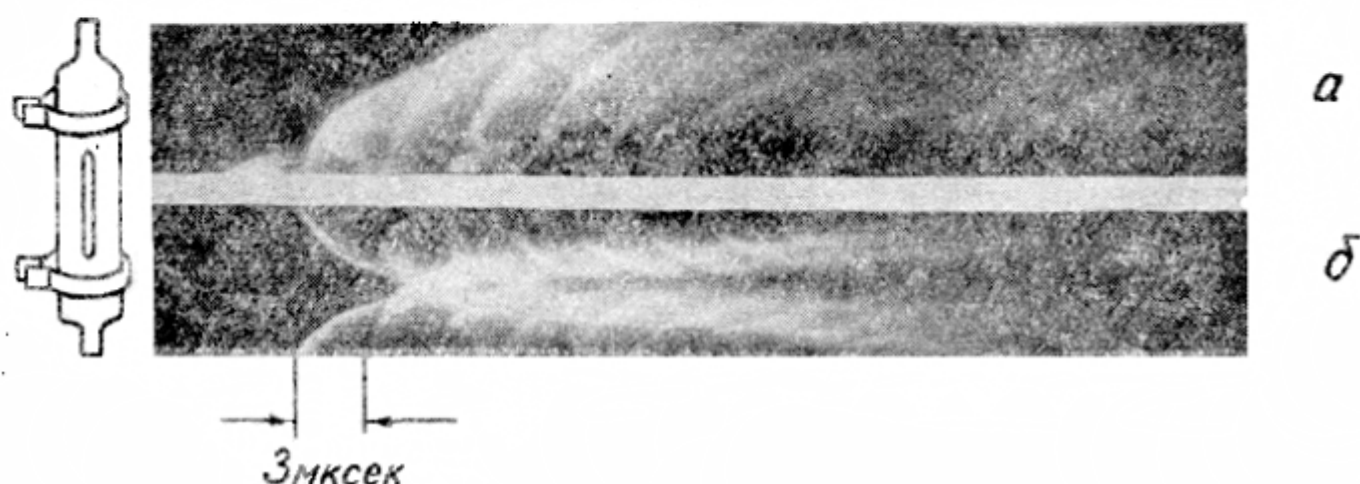


Рис. 9.6. Фотографии разряда с временной разверткой.

в линейном пинче ток течет вдоль оси, а в θ -пинче — в азимутальном направлении. При описании процессов сжатия газа в θ -пинче естественно пользоваться теорией динамического пинча, развитой М. А. Леонтовичем и С. М. Осовцом, а также М. Розенблютом, на основе экспериментов с прямолинейным самосжатым разрядом.

Продольное движение газа можно наблюдать через продольную щель в камере (5, рис. 9,4). На рис. 9,6,а приведена фотография с разверткой во времени, полученная посредством сверхскоростного фоторегистратора (СФР) на установке, аналогичной «Сцилле» [51]. Вертикальная ось фотографии расположена вдоль оси камеры, по горизонтальной оси отсчитывается время. Яркие полосы на фотографии представляют, очевидно, движение ударных волн, возникающих в каждом полупериоде колебательного разряда конденсаторных батарей 4 (рис. 9,4). Период колебаний равен 6 мксек. Наклон полос характеризует скорость распространения ударных волн. Первая волна (слева), распространяющаяся в неионизованном газе, обладает малой скоростью. Следующая волна в течение некоторого времени движется в ионизованном газе со скоростью, приблизительно равной $5 \cdot 10^6$ см/сек, затем настигает вторую волну, переходит в нейтральный газ и здесь

быстро теряет энергию на ионизацию. Уменьшение амплитуды волны ведет к потере скорости, которая быстро убывает до скорости звука. То же происходит с последующими волнами. По мере затухания разряда конденсаторной батареи амплитуда и скорость распространения ударных волн падают. Фотография б (рис. 9,5) получена с помощью щели б (рис. 9,4), расположенной между двумя витками. Ударные волны от обоих витков сходятся посередине между витками.

В «Сцилле» в момент минимального магнитного поля, когда величина его изменяется наиболее быстро, происходит испускание рентгеновских лучей и нейтронов. Жесткие рентгеновские лучи появляются в результате бомбардировки стенок камеры электронами, ускоренными индуцированным электрическим полем, в то время как мягкое рентгеновское излучение, захватывающее область видимого спектра, является тормозным излучением. Измерения спектра мягкого рентгеновского излучения, так же как и исследование нейтронного излучения, по-видимому, говорят о существовании квазиравновесных высоких температур и о термоядерном происхождении нейтронов.

Американец А. Колб, который проводил опыты на установке типа «Сцилла», показал, что излучение нейтронов происходит только в том случае, когда внутри плазменного сгустка существует «замороженное» поле обратного знака. По первоначальным представлениям плазма в Сцилле образует диамагнитный эллипсоид (рис. 9,7, а). Зондовые измерения Колба показали, что плотная плазма, образующаяся за второй полупериод, несет внутри себя магнитное поле первого полупериода. Это поле снаружи плазменного витка (рис. 9,7, б) увеличивает магнитное давление, а внутри — создает давление (p_2), отжимающее плазму от оси.

Колб высказал предположение, что в течение первого полупериода создается плазма малой плотности, пронизанная магнитным полем. В течение второго полупериода эта плазма с «вмороженным» полем сжимается новым θ -пинчем и образует систему плазменного витка (рис. 9,7, б). Было также показано, что очень быстрое нагревание плазмы ($T_e \approx T_i \approx 1$ кэВ при $n \approx 10^{16}$ см $^{-3}$) происходит одновременно с уничтожением внутреннего поля.

В 1961 г. Колб с сотрудниками опубликовали дальнейшие исследования, которые показали, что первоначально достаточно длинный плазменный виток через 4—5 мксек сжимается вдоль оси z (при H , направленном по z) и стягивается в два тонких

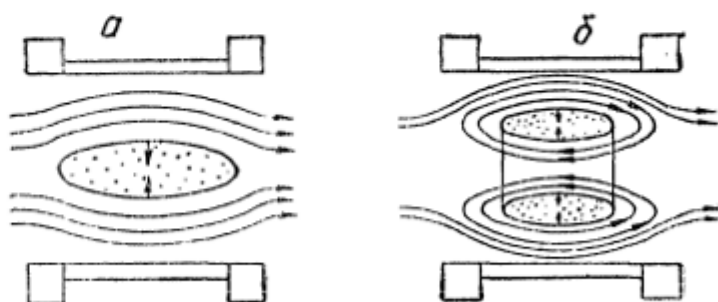


Рис. 9,7. Магнитное поле в сжимающейся плазме.

плазменных кольца (рис. 9,8), вращающихся около оси z с угловой скоростью порядка 10^7 сек^{-1} . При этом в образующихся кольцах проявляется неустойчивость. Быстрый нагрев плазмы происходит в основном благодаря процессу перемешивания полей.

Напомним, что характерное время проникновения магнитного поля в проводящую жидкость, согласно соотношению (7,10),

$$\tau = \mu_0 \sigma L^2$$

пропорционально квадрату линейного размера плазмы. Это значит,

что диффузионное проникновение магнитного поля будет тем быстрее, чем меньше поперечное сечение проводника. Как мы знаем, проникновение магнитного поля связано с омическими потерями, которые, следовательно, возрастают при разделении плазменного витка на более мелкие витки.

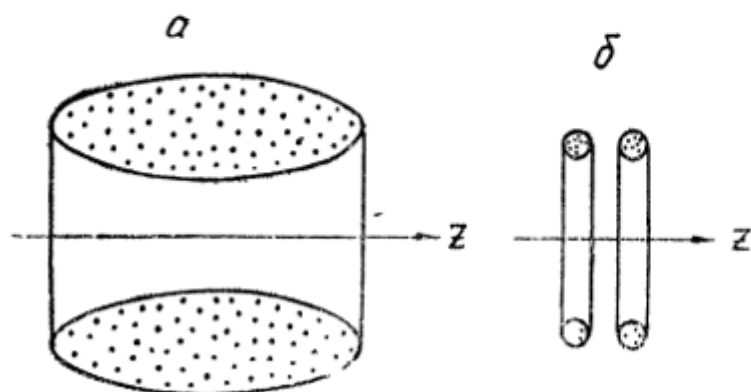


Рис. 9,8. Деление длинного плазменного витка на две части.

Вопрос об образовании нескольких токовых шнуров из одного шнура большого сечения до сих пор теоретически не изучен. На первый взгляд, линейные токи, притягиваясь друг к другу, должны сливаться в один ток. Однако не исключена возможность, что система многих токов энергетически может быть более выгодной, чем один виток, и что один виток является неустойчивым относительно разделения на несколько токовых нитей. Здесь возникает задача, подобная задаче о гравитационной неустойчивости.

Классические исследования Дж. Джинса (1929 г.) показали, что однородная гравитационная среда должна распадаться на отдельные сгустки с размерами порядка $\lambda = C_a \sqrt{\frac{\pi}{G \rho_0}}$, где C_a — величина порядка скорости звука, G — гравитационная постоянная, а ρ_0 — плотность. Возможно, что подобного же рода процесс будет происходить в плазменном токовом витке. Разделение его на несколько нитей должно приводить к быстрому проникновению внешнего поля внутрь плазменных шнуров и к увеличению омических потерь. Такое увеличение потерь или уменьшение проводимости (по сравнению с расчетной величиной) действительно обнаруживается экспериментально. Разделение токового витка на множество нитей играет, по-видимому, такую же роль, как развитие турбулентностей в потоке вязкой жидкости. Развитие мелкомасштабных турбулентностей в потоке приводит к сильной диссипации энергии, так как скорость перехода кинетической энергии в тепло зависит от размеров турбулентности и становится

значительной только когда разовьются мелкомасштабные турбулентности. Если такая аналогия правильна, сопротивление, определяемое формулой (4,61), мы должны сопоставить с обычной кинетической вязкостью ν , а наблюдаемое аномально большое сопротивление плазмы — с турбулентной вязкостью, которая может значительно превосходить величину ν .

Самые последние исследования Колба проводились на установке «Фараос», где θ -пинч имел длину 1,8 м и начальный диаметр 10,5 см. При увеличении магнитного поля до 80 килоэрстед (в течение 9 мксек), диаметр разряда уменьшается до 1,7 см. Образующийся трубчатый пинч не обнаруживает неустойчивости или разделения на несколько плазменных витков [52].

Неоднократно делались попытки также создать θ -пинч в тороидальной геометрии. Легко видеть, что в подобной конфигурации помимо желобковых неустойчивостей будет иметь место обычный тороидальный дрейф. Системой, по идее, свободной от тороидального дрейфа, а также от возникновения желобковых неустойчивостей, является стеллараторное поле (см. § 6, 4). Как мы уже отмечали, стеллараторные системы до последнего времени, к сожалению, экспериментально почти не изучены. Отрицательные результаты ранних экспериментов в значительной мере обусловлены неудачным методом заполнения стелларатора плазмой и нагрева плазмы (омический нагрев). Малое число экспериментов со стеллараторным полем объясняется также большой стоимостью стеллараторных установок.

В начале 1962 г. английскими физиками Тейлором и Робертсом [53] была предложена упрощенная система «Нова» для осуществления θ -пинча в тороидальном поле стеллараторного типа.

Как мы знаем (§ 6, 4), удержание частиц в стеллараторе обеспечивается специальной конфигурацией магнитных силовых линий, образующих замкнутые магнитные поверхности. Сечение магнитных поверхностей плоскостью, перпендикулярной к магнитной оси стелларатора, в случае трёхзаходной винтовой обмотки схематически представлено на рис. 9,9. Замкнутые магнитные поверхности вложены друг в друга и заполняют некоторую область, ограниченную сепаратриссой, которая обозначена на рис. 9,9 жирной линией. Вне фигуры ABC расположены магнитные поверхности, охватывающие проводники с током и, следовательно, пересекающие стенки вакуумной камеры. Только частицы, движущиеся во внутренней области могут удерживаться стеллараторным магнитным полем. При движении вдоль оси стелларатора вся система магнитных поверхностей вместе с сепаратриссой вращается вокруг этой оси, совершая один оборот на расстоянии, равном шагу винтовой обмотки.

Заменяем теперь сепаратриссу, либо какую-нибудь иную внутреннюю магнитную поверхность, проводящим слоем и создадим

в нем ток $I_s = [Hn]$, где H — поле на выбранной нами магнитной поверхности, а n — нормаль. Нетрудно видеть, что поле в области, охватываемой проводящим слоем, будет стеллараторным с ротационным преобразованием, а поле снаружи всюду будет равно нулю. Подвод тока к слою, представляющему одновитковую тороидальную катушку, может быть сделан через разрез вдоль большого периметра тока. При малой ширине этого разреза искажение магнитного поля должно быть незначительным. Авторы предполагают разряжать на такую одновитковую катушку мощную конденсаторную батарею, что должно вызвать быстро

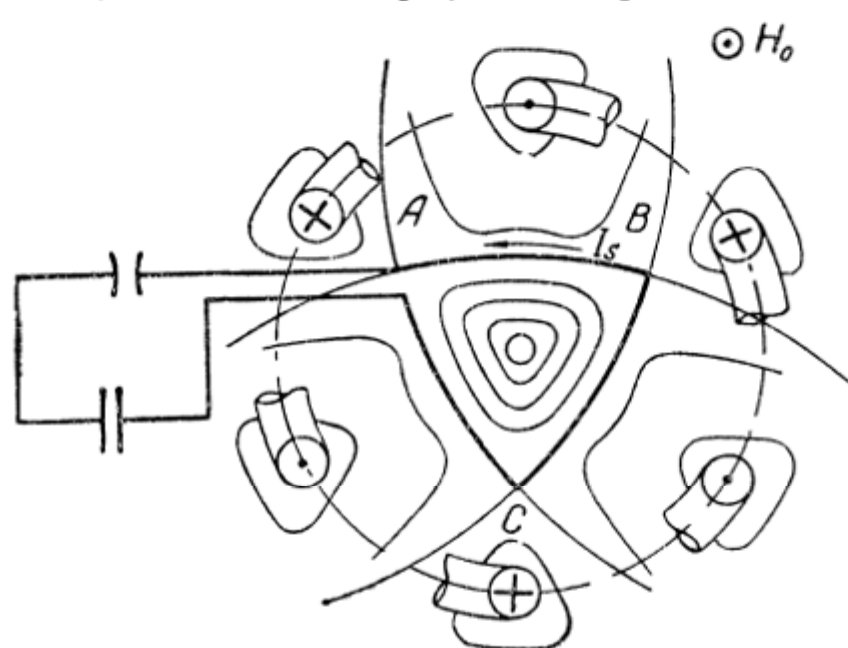


Рис. 9,9. Стеллараторное поле может быть создано током I_s в проводящем слое ABC , имеющем форму сепаратриссы.

нарастающее магнитное поле и образование плазмы внутри системы. Во избежание отдельных радиальных потоков плазмы к центру сечения, они предполагают осуществлять основной нагрев не схлопыванием θ -пинча, а быстрой диффузией магнитного «обратного» поля, создаваемого вначале программированным во времени магнитным полем.

Если поле изменяется не с нуля, а с некоторого обратного поля ($-H_1$), проходит через нуль и затем быстро возрастает, то внутри θ -пинча создается «замороженное» поле ($-H_1$), в то время как снаружи будет поле ($+H_2$). Перемешивание полей будет сопровождаться передачей значительной энергии от поля плазме.

В описанной установке тороидальная катушка с разрезом по большому периметру взята только из желания превратить стелларатор в импульсную машину. Нетрудно видеть, что если взять полую трубу из диэлектрика, по форме совпадающую с одной из магнитных поверхностей стелларатора, и уложить вплотную на её поверхности витки изолированной проволоки или шины, то получится система, пригодная для экспериментов почти любой длительности.

При таком методе формирования магнитных поверхностей одна катушка или токовая поверхность создает как продольное, так и винтовое стеллараторное поле, вектор магнитного поля вблизи токонесущих поверхностей всюду параллелен этим поверхностям и, следовательно, силовые линии их не пересекают

Конечно, изготовление тора с довольно сложной поверхностью представляет некоторые технические трудности, которые, однако, не являются непреодолимыми. Тор нужной формы может быть изготовлен с помощью ручной фрезы и лекала из алюминиевого тора кругового сечения; затем этот тор можно покрыть медью путем медленного гальванопластического покрытия и, наконец, растворить алюминий в щелочи.

ГЛАВА Ю

ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ

Начиная с 1929 г., когда И. Ленгмюр и Л. Тонкс описали открытые ими плазменные колебания, проблемы распространения, возбуждения и затухания волн в плазме привлекают все более широкие круги исследователей. Изучение этих проблем стимулируется потребностями физики и техники газового разряда, радиофизики (распространение волн в ионосфере), астрофизики (генерация радиосигналов звездами), техники усиления и генерирования микрорадиоволн.

В вопросах удержания, нагрева и диагностики (то есть измерения основных параметров) плазмы для целей управляемого термоядерного синтеза теория колебаний в плазме имеет первостепенное значение.

§ 10.1. Колебания плазмы при отсутствии магнитного поля

Рассмотрим вначале плазму при отсутствии внешних полей.

В состоянии равновесия на единицу объема плазмы приходится одинаковое число положительных и отрицательных зарядов ($n_e = n_i = n_0$), так что в среднем плазма нейтральна. Условие нейтральности выполняется лишь в среднем для размеров, существенно превосходящих дебаевский радиус экранирования. Нейтральность плазмы поддерживается автоматически в силу того, что любое нарушение равенства $n_e = n_i$ в какой-либо области плазмы создает электрическое поле, которое вызывает пе-

ремещение зарядов, восстанавливающее нейтральность. В зависимости от условий обмена энергией между частицами это движение может быть аperiodическим либо периодическим. В последнем случае оно во многом подобно обычным колебаниям под действием упругой силы. Роль упругой силы играет поле объемного заряда E , возникающее благодаря разности концентраций положительных и отрицательных зарядов $n = n_e - n_i$.

Под действием поля E электроны уходят из области, где они были в избытке, и разность n уменьшается до нуля. Однако благодаря инерции электроны продолжают движение, так что разность концентраций n меняет знак. В результате появляется поле противоположного направления, электроны возвращаются в данную область и движение повторяется. Ионы, обладающие сравнительно большой массой, почти не участвуют в движении.

Частоту колебаний плазмы можно найти из следующей системы уравнений:

$$\operatorname{div} E = -\frac{en}{\epsilon_0}; \quad (10,1)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{e}{m}E; \quad (10,2)$$

$$\frac{dn}{dt} + n_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (10,3)$$

Эти уравнения линеаризованы в предположении малости колебаний: в уравнениях (10,2) и (10,3) отброшены малые второго порядка $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$ и $n \operatorname{div} \mathbf{v}$. Из системы (10,1) — (10,3) легко получить уравнение колебаний плотности объемного заряда, которая пропорциональна разности концентраций электронов и положительных ионов (для простоты ионы мы полагаем однозарядными):

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} + \frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 m} n = 0. \quad (10,4)$$

Частота колебаний

$$\omega_0 = \left(\frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (10,5)$$

зависит только от плотности плазмы.

Заметим, что плазменные колебания имеют локальный характер, они не распространяются и не образуют волн. Последний вывод, однако, не точен. Строгая теория, учитывающая тепловое движение частиц, приводит к выводу, что плазменные колебания распространяются в плазме в виде продольной волны, причем постоянная распространения k связана с частотой ω соотношением

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3\kappa T}{m} k^2, \quad (10,6)$$

где T — температура электронного газа. Это соотношение допускает возможность существования продольных волн с частотами, не совпадающими с ω_0 . При $T = 0$ формула (10,6) дает прежний результат: $\omega = \omega_0$, каково бы ни было k .

Плазменные колебания представляют собой электростатические колебания. Наряду с ними в плазме могут распространяться электромагнитные волны. Действительно, достаточно разреженная плазма существенно не изменит электромагнитных волн, обычно распространяющихся в вакууме. Возможные изменения могут быть связаны главным образом со смещениями зарядов в поле E волны, то есть с поляризацией.

Напишем уравнение Максвелла

$$\operatorname{rot} H = j + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}; \quad (10,7)$$

$$\operatorname{rot} E = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} \quad (10,8)$$

и применим операцию rot ко второму из них:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} E &= \operatorname{grad} \operatorname{div} E - \nabla^2 E = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} H) = \\ &= -\mu_0 \frac{\partial j}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (10,9)$$

В данном случае мы ограничимся рассмотрением поперечной волны, не связанной с колебаниями плотности зарядов, поэтому $\operatorname{div} E = 0$ и уравнение (10,9) примет вид

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial j}{\partial t} = 0. \quad (10,10)$$

Как известно из электродинамики, дальнейшие выводы определяются характером связи плотности тока в среде j с электрическим полем волны E . Например, для проводящей среды имеет место связь $j = \sigma E$. В этом случае из уравнения (10,10) следует, что электромагнитные волны, попадая в проводящую среду, быстро затухают, проникая в нее на глубину «скин-слоя»:

$$d = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}}. \quad (10,11)$$

В случае плазмы $j = e(n_i v_i - n_e v_e)$, и искомая связь получается из уравнений движения

$$m_e \frac{dv_e}{dt} = -eE; \quad (10,12)$$

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = eE. \quad (10,13)$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial j}{\partial t} &= e \left(n_i \frac{\partial v_i}{\partial t} - n_e \frac{\partial v_e}{\partial t} \right) = \frac{e^2}{m} \left(\frac{n_i}{m_i} + \frac{n_e}{m_e} \right) E \approx \\ &\approx \frac{ne^2}{m_e} E, \end{aligned} \quad (10,14)$$

так как $m_i \gg m_e$. Полученное выражение для $\frac{\partial j}{\partial t}$ мы можем подставить в уравнение (10,10), которое теперь примет вид

$$\nabla^2 E - \frac{\omega_0^2}{c^2} E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0, \quad (10,15)$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{e^2 n}{\epsilon_0 m_e}.$$

Для плоскополяризованной волны, распространяющейся вдоль оси z ,

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{\omega_0^2}{c^2} E_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0. \quad (10,16)$$

Полагая поле волны пропорциональным величине $e^{i(\omega t - kz)}$, из волнового уравнения (10,16) легко получить дисперсионное соотношение, связывающее постоянную распространения k с частотой ω :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right). \quad (10,17)$$

Последнее позволяет определить фазовую скорость $v_\Phi = \frac{\omega}{k}$, показатель преломления $n = \frac{c}{v_\Phi}$ и диэлектрическую постоянную среды $\epsilon = \epsilon_0 n^2$.

Из (10,17) видно, что при $\omega > \omega_0$ значение k действительно, и электромагнитная волна в плазме распространяется без затухания с фазовой скоростью

$$v_{\Phi} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}} > c. \quad (10,18)$$

Если $\omega < \omega_0$, постоянная распространения становится чисто мнимой:

$$k = \pm i \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1} = \pm i\alpha. \quad (10,19)$$

Тогда экспоненциальный множитель представляет колебания с затухающей или нарастающей вдоль оси z амплитудой

$$e^{i(\omega t - kz)} = e^{\mp \alpha z} e^{i\omega t}.$$

Нарастающая ветвь не имеет физического смысла, если в системе нет источников энергии колебаний. Остающееся решение $e^{-\alpha z} e^{i\omega t}$ означает, что поле E затухает в e раз на расстоянии

$$l = \frac{1}{\alpha} = \frac{c}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}}. \quad (10,20)$$

Показатель преломления равен отношению скорости света c к фазовой скорости v_{Φ} :

$$n = \frac{c}{v_{\Phi}} = \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} = \sqrt{\epsilon}. \quad (10,21)$$

При $\omega > \omega_0$ $n < 1$, с приближением частоты колебаний ω к плазменной частоте ω_0 показатель преломления стремится к нулю, и электромагнитная волна, падая на плазму, полностью отражается. Действительно, согласно электромагнитной теории, коэффициент отражения от среды 2 (плазма) в среду 1 (вакуум) равен

$$R = \left| \frac{v_{\Phi_1} - v_{\Phi_2}}{v_{\Phi_1} + v_{\Phi_2}} \right| = 1.$$

Диэлектрическая постоянная, согласно (10,21), представляется выражением

$$\epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right). \quad (10,22)$$

Дробь $\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ при $\omega > \omega_0$ всегда меньше единицы.

Следует подчеркнуть, что полное отражение от поверхности плазмы и затухание при $\omega < \omega_0$ не связано с диссипативными процессами. При $\omega \rightarrow \omega_0$ токи в плазме затухают, но затухание вызвано не потерями в плазме, а поляризационными явлениями,

приводящими к отражению волны. Обращаясь к равенству (10,14) мы видим, что величины $\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}$ и $\mathbf{E}$ осциллируют в одной и той же фазе. Отсюда следует, что $\mathbf{j}$ и $\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ сдвинуты по фазе на величину π , то есть вычитаются. Условие, при котором они взаимно компенсируются, легко получить, приравнявая полный ток к нулю:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \left(-\frac{ne^2}{m\omega} + \epsilon_0 \omega \right) \mathbf{E} = 0.$$

Оно представляется равенством $\omega = \omega_0$. При приближении частоты электромагнитных колебаний к ω_0 полный ток убывает до нуля и затем при $\omega < \omega_0$ меняет знак на обратный, вместе с тем волна, падающая на плазму, испытывает отражение. При $\omega \ll \omega_0$ глубина проникновения равна $\frac{c}{\omega_0} \approx 5,3 \cdot 10^8 n^{-\frac{1}{2}}$ см. Эту глубину не следует смешивать с глубиной «скин-слоя»

$$d = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \omega \sigma}},$$

существование которого связано с диссипативными процессами в плазме.

§ 10,2. Распространение электромагнитных волн в плазме в магнитном поле

Если электрический вектор плоской волны совпадает по направлению с постоянным магнитным полем, то последнее не оказывает никакого влияния на распространение волны.

Рассмотрим случай, когда волна распространяется вдоль постоянного магнитного поля. Считая частоту столкновений малой ($\nu \ll \omega$), запишем уравнение движения электронов в поле поперечной волны в виде

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{e}{m}(\mathbf{E} + [\mathbf{v}\mathbf{B}_0]). \quad (10,23)$$

От скорости можно перейти к плотности тока $\mathbf{j} = -ne\mathbf{v}$ (движение ионов не учитывается), тогда последнее уравнение переписывается так:

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{ne^2}{m}\mathbf{E} - \frac{e}{m}[\mathbf{j}\mathbf{B}_0]. \quad (10,24)$$

Это уравнение должно рассматриваться совместно с волновым уравнением (10,10).

Будем искать решение уравнений (10,10) и (10,24) в виде волны с круговой поляризацией, то есть волны, электрический вектор которой вращается в поперечной плоскости, так что

$$E_x = E \cos(\omega t - kz); \quad (10,25)$$

и

$$E_y = \pm E \sin(\omega t - kz). \quad (10,26)$$

Знаки (+) и (—) в последнем выражении соответствуют вращению вектора электрического поля в противоположных направлениях. Аналогичные выражения должны быть записаны для составляющих плотности тока

$$j_x = j \cos(\omega t - kz); \quad (10,27)$$

$$j_y = \pm j \sin(\omega t - kz). \quad (10,28)$$

Возьмем проекцию векторных соотношений (10,24) и (10,10) на направление x , и заменим составляющие векторов E и j , пользуясь соотношениями (10,25) — (10,28):

$$\frac{dj_x}{dt} = \varepsilon_0 \omega_0^2 E_x - \omega_H j_y;$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial j_x}{\partial t} = 0;$$

$$- \omega j \sin(\omega t - kz) = \varepsilon_0 \omega_0^2 E \cos(\omega t - kz) \pm \omega_H j \sin(\omega t - kz)$$

$$- k^2 E \cos(\omega t - kz) + \frac{\omega^2}{c^2} E \cos(\omega t - kz) + \mu_0 \omega j \sin(\omega t - kz) = 0$$

Условие совместности полученных уравнений представляется равенством

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{1}{1 \pm \frac{\omega_H}{\omega}} \right], \quad (10,29)$$

которое и является искомым дисперсионным соотношением между k и ω .

Два знака, как было сказано выше, относятся к двум направлениям вращения вектора E , причем знак (—) соответствует направлению, совпадающему с направлением циклотронного вращения электрона (эта волна в оптике носит название «необыкновенной»), знак (+) соответствует противоположному направлению вращения («обыкновенная» волна).

Фазовая скорость равна

$$v_\Phi = \frac{\omega}{k} = c \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{1}{1 \pm \frac{\omega_H}{\omega}} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (10,3)$$

При $H_0 = 0$ последняя формула переходит в (10,18).

При отсутствии магнитного поля H_0 полоса пропускания начинается с частоты $\omega = \omega_0$. При наличии второй характеристической частоты ω_H , то есть при $H_0 \neq 0$, полоса пропускания частот значительно расширяется. На рисунке (10,1) представлены дисперсионные кривые для различных отношений $\frac{\omega_H}{\omega_0}$. В то время как при $H_0 = 0$ фазовые скорости всегда превосходят скорость света c (см. кривую O на рис 10,1), при наличии магнитного поля H_0 появляются медленные необыкновенные волны (1 и $\frac{1}{2}$ на рис 10,1). Необыкновенная волна может распространяться в плазме даже при сравнительно малых частотах, однако в этом случае следует учитывать еще одну характеристическую частоту — ионную циклотронную частоту:

$$\omega_{H_i} = \frac{e}{m_i} B.$$

Движение ионов нетрудно учесть в приведенной выше схеме вывода дисперсионного соотношения. С учетом ионов оно имеет вид

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = n^2 = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 \left(1 \pm \frac{\omega_H}{\omega} - \frac{\omega_H \omega_{H_i}}{\omega^2} \right)}. \quad (10,31)$$

Влияние величины $\frac{\omega_H \omega_{H_i}}{\omega^2}$ мало при $\omega \gg \omega_{H_i}$, однако в противоположном случае ($\omega \ll \omega_{H_i}$) эта величина становится преобладающей в знаменателе выражения (10,31) и тогда показатель преломления n определяется выражением

$$\begin{aligned} n^2 = \frac{c^2}{v_\Phi^2} &= 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_H \omega_{H_i}} = 1 + \frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e \left(\frac{e}{m_e} B \cdot \frac{e}{m_i} B \right)} = 1 + \frac{\mu_0 \rho}{B^2} c^2 \approx \\ &\approx \frac{c^2}{v_A^2}, \end{aligned}$$

где v_A — скорость распространения волн Альфвена, найденная нами ранее в результате чисто макроскопического рассмотрения.

Плазма в магнитном поле представляет собой анизотропную или, говоря более точно, гиротропную среду [48]: ее свойства в направлении внешнего магнитного поля и в поперечных к нему направлениях различны. С этим связано разделение падающей на плазму электромагнитной волны на две волны с круговой поля-

ризацией — на обыкновенную и необыкновенную. В оптике подобное явление характерно для кристаллических сред и носит название двойного лучепреломления. Плоские волны, распространяющиеся в обычных средах, можно представлять как результат сложения волн, поляризованных по кругу с электрическими векторами, вращающимися в противоположных направлениях. Обе волны в изотропных средах распространяются с одной и той же скоростью. В противоположность этому, в гиротронных средах и, в частности, в плазме в магнитном поле обыкновенная и необыкновенная волны распространяются с различными скоростями, что приводит к явлению поворота плоскости поляризации, совершенно аналогичному явлению Фарадея в оптике.

Мы рассмотрели частный случай, когда волна распространяется вдоль магнитного поля. Это практически важный, но не единственно возможный случай. Направление распространения может не совпадать с направлением магнитного поля H_0 . В этом случае волны не являются чисто поперечными или чисто продольными и движение становится более сложным [15,54].

В нашем рассмотрении не упоминалась еще одна характери-

стическая частота, ионная плазменная частота $\omega_{oi} = \left(\frac{e^2 n}{\epsilon_0 m_i} \right)^{\frac{1}{2}}$,

аналогичная электронной плазменной частоте $\omega_0 = \left(\frac{e^2 n}{\epsilon_0 m_e} \right)^{\frac{1}{2}}$. Прежде всего, следует заметить, что смещение положительной компоненты плазмы вызывает появление неоднородностей плотности и давления $\delta \rho$ и δp , что может сопровождаться появлением акустических волн. Электрические ионные колебания при низких температурах и при $H_0 = 0$ невозможны, так как частота ω_{oi} столь низка, что электроны, обладающие малой инерцией, очень быстро будут нейтрализовать поля, которые могли бы возникнуть при смещении ионов. При достаточно высоких температурах, когда величина дебаевского радиуса становится сравнимой с длиной волны, которую могут вызвать ионные колебания, экранирующее действие электронного газа снимается, и становятся возможными ионные колебания с частотой, близкой к ω_{oi} .

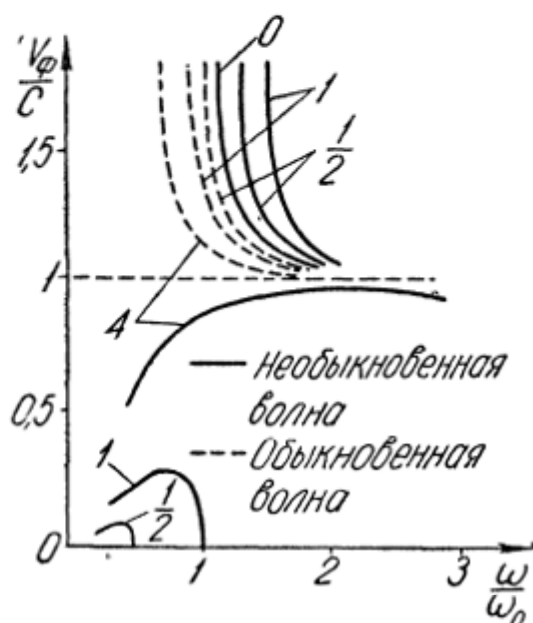


Рис. 10,1. График дисперсионной зависимости для поперечной электромагнитной волны, распространяющейся в плазме вдоль магнитного поля. Числа на графике

дают величины $\frac{\omega H}{\omega_0}$.

§ 10.3. Специфическое затухание

В результате взаимодействия между частицами колебания в плазме затухают, причем энергия колебаний переходит в энергию хаотического движения частиц. Взаимодействия мы условились подразделять на парные и коллективные. Первые представляются нами как обычные столкновения, а вторые описываются в уравнениях плазмы посредством самосопряженных полей. В соответствии с этим разделением мы должны различать затухание, связанное со столкновениями, и так называемое специфическое затухание, обусловленное коллективным взаимодействием

частиц. На простых примерах мы познакомимся с различными видами специфического затухания.

Рассмотрим продольную волну, распространяющуюся вдоль оси z со скоростью $v_\phi < c$ в неподвижной (в среднем) плазме. Частицы плазмы участвуют в тепловом движении и некоторые из них могут перемещаться вдоль оси z со скоростью, близкой к фазовой скорости волны v_ϕ . В системе координат, движущейся со скоростью v_ϕ , поле волны представляется стационарным, пе-

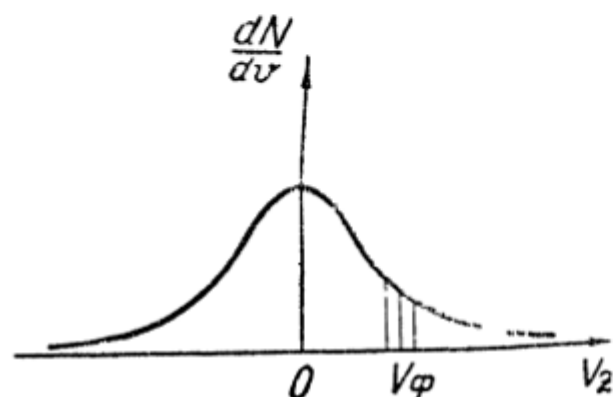


Рис 10,2 В окрестности точки v_ϕ преобладающее число частиц имеет скорости меньше v_ϕ .

риодическим в пространстве распределением потенциала ϕ . В таком периодическом поле возможны два вида движения электронов. Электроны либо перемещаются все время в одном направлении, периодически ускоряясь и замедляясь полем волны, либо осциллируют около одного и того же потенциального минимума.

Первый случай движения характерен для электронов с большой начальной скоростью относительно волны, в то время как второй — для электронов, обладающих достаточно малой энергией в движущейся системе координат, то есть для электронов некоторого интервала максвелловского распределения вблизи v_ϕ . Все частицы этого интервала будут двигаться вдоль оси z вместе с волной в среднем со скоростью v_ϕ , хотя первоначально скорости их могли несколько отличаться от v_ϕ в ту или другую сторону. Чтобы следовать за волной, электроны с избытком скорости должны были замедлиться, а с недостатком — ускориться.

Поскольку v_ϕ находится на спаде кривой распределения, число электронов с недостатком скорости преобладает (рис. 10,2), поэтому в среднем захват электронов волной сопровождается потерей энергии — волна затухает. Конечно, функция распределения может иметь и восходящую ветвь. Например, для плазмы, ионизируемой электронным потоком, она может представляться

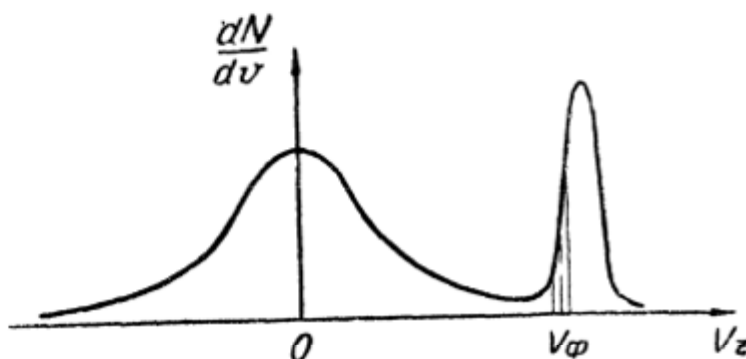
кривой с двумя максимумами (рис. 10, 3). В этом случае возможно усиление волны.

Эффективное взаимодействие между частицами и излучением возможно и в том случае, если частицы движутся под некоторым углом к направлению распространения волны. Важно лишь, чтобы проекция скорости на это направление была достаточно близка к v_ϕ , то есть чтобы выполнялось приближенное равенство

$$\omega \approx (kv), \quad (10,32)$$

где v — скорость электрона.

Разумеется, эффект возможен только для волн, распространяющихся со скоростью меньшей скорости света c . Он невозможен, например, для электромагнитных волн в плазме при отсутствии магнитного поля, так как скорость их, согласно формуле (10, 18), превышает скорость света в вакууме



Плазменные (электростатические) колебания подвержены специфическому затуханию. Впервые этот эффект был предсказан Л. Д. Ландау имен-

Рис. 10,3. Для системы пучок — плазма существуют скорости v_ϕ , в окрестности которых преобладают быстрые частицы ($v > v_\phi$).

но для плазменных колебаний [55]. Специфическое затухание становится тем более значительным, чем меньше фазовая скорость. Это естественно, так как с уменьшением v_ϕ все большее число электронов захватывается волной (см. рис. 10,2). Соотношение (10,6), переписанное в виде

$$\frac{v_\phi^2}{v^2} = \frac{\omega_0^2}{v^2 k^2} + 1,$$

показывает, что v_ϕ приближается к $\sqrt{\frac{\omega_0^2}{v^2}}$ при малом отношении $\frac{\omega_0^2}{v^2 k^2}$. Но это отношение равно

$$\frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 m} \left(\frac{3kT}{m} \right)^{-1} k^{-2} = \frac{1}{24\pi^2} \frac{\lambda^2}{D^2},$$

где λ — длина плазменной волны, и D — дебаевский радиус экранирования. Таким образом, мы можем сказать, что при условии $\lambda \gg D$ плазменные колебания практически не затухают, частота их при этом условии оказывается равной собственной частоте плазменных колебаний ω_0 , определяемой формулой (10,5).

В плазме, находящейся в магнитном поле, скорость волны, распространяющейся вдоль магнитного поля, при некоторых условиях меньше скорости света. Однако такая волна не может увлекать за собою электроны, так как вектор электрического поля волны не имеет составляющей в направлении распространения.

Зато в этом случае возможен иной механизм взаимодействия, также приводящий к затуханию волны.

Для электрона, движущегося в магнитном поле и в поле необыкновенной волны, при совпадении частоты изменения поля с частотой циклотронного вращения ω_H или с кратной ей частотой $s\omega_H$, где s — любое целое число, наступает резонанс. Поле волны $e^{i(\omega t - k z)}$ для электрона, движущейся со скоростью v , в нерелятивистском случае обладает частотой $\omega - vk$ (доплеровское смещение частоты), поэтому условие резонанса для такого электрона представляется равенством

$$\omega_H = \omega - vk = \omega \left(1 - \frac{v}{v_\Phi}\right). \quad (10,33)$$

Описанный механизм вызывает затухание электромагнитных волн в нагретой плазме, если даже условие $\omega = \omega_H$ не выполняется (магнито-тормозное поглощение), поскольку в нагретой плазме существуют частицы со скоростью v , для которой выполняется условие резонанса (10,33). С уменьшением фазовой скорости волны и с увеличением температуры плазмы эффект возрастает. Доплеровское смещение при $v > v_\Phi$ приводит к изменению знака частоты, что указывает на возможность магнито-тормозного поглощения не только на необыкновенной, но и на обыкновенной волне. Магнито-тормозное поглощение возможно также на ионах. При низких частотах оно может стать весьма существенным.

§ 10,4. Пучковая неустойчивость

Мы рассмотрели процессы, приводящие к поглощению энергии волн плазмой. При некоторых условиях возможны обратные процессы, вызывающие усиление волн за счет кинетической энергии заряженных частиц. Некоторые из них давно уже использовались в технике генерирования и усиления микрорадиоволн. Примером может служить лампа с двумя взаимодействующими электронными пучками. Взаимодействие пучков в ней вызывает усиление волн объемного заряда, распространяющихся вдоль оси лампы. Подобный процесс может интересовать нас по различным причинам. Если он происходит за счет продольного движения частиц в адиабатической ловушке, результатом может явиться увеличе-

ние дроби $\frac{v_\perp^2}{v_\perp^2 + v_\parallel^2}$, необходимое для захвата частиц в пробоч-

ной конфигурации. В данном случае эффект будет полезным. В других случаях он возбуждает колебания в плазме, вызывает неустойчивость и уход энергии и частиц из плазмы. По-видимому, такого рода неустойчивость является одной из причин малой эффективности омического нагрева плазмы в кольцевых разрядах и стеллараторах. Приведем элементарную теорию пучковой неустойчивости в простейшем случае.

Допустим, что две группы частиц с зарядами e_1 и e_2 и массами m_1 и m_2 движутся вдоль оси z со скоростями v_1 и v_2 и рассмотрим волну, связанную с колебаниями плотности n_1 и n_2 в той и другой группе частиц. Для простоты мы будем полагать, что потоки безграничны и однородны в направлениях, перпендикулярных оси z (одномерный случай).

Поле волны связано с возмущениями плотности равенством

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{1}{\epsilon_0} (e_1 n_{1\sim} + e_2 n_{2\sim}). \quad (10,34)$$

Кроме того, для каждого пучка мы выпишем уравнение движения и уравнение непрерывности, предполагая вибрации малыми и ограничиваясь линейным приближением:

$$\frac{\partial v_{\sim}}{\partial t} + v \frac{\partial v_{\sim}}{\partial z} = \frac{e}{m} E, \quad (10,35)$$

$$\frac{\partial n_{\sim}}{\partial t} + v \frac{\partial n_{\sim}}{\partial z} + n \frac{\partial v_{\sim}}{\partial z} = 0. \quad (10,36)$$

Тильдой здесь обозначены вибрационные члены. Для волны $e^{i(\omega t - kz)}$ последние уравнения приводятся к виду

$$i v_{\sim} (\omega - kv) = \frac{e}{m} E \quad (10,37)$$

$$i n_{\sim} (\omega - kv) - n k v_{\sim} = 0, \quad (10,38)$$

откуда

$$n_{\sim} = \frac{en k}{i m (\omega - kv)^2} E. \quad (10,39)$$

Подставляя найденные значения $n_{\sim}$ в (10,34), мы получим дисперсионное соотношение для волны в системе двух пучков

$$\frac{\omega_{01}^2}{\left(\frac{\omega}{k} - v_1\right)^2} + \frac{\omega_{02}^2}{\left(\frac{\omega}{k} - v_2\right)^2} = k^2, \quad (10,40)$$

где

$$\omega_{01,2}^2 = \frac{e_{1,2}^2 n_{1,2}}{\epsilon_0 m_{1,2}} \dots$$

плазменные частоты для первой и второй группы частиц. При данной частоте (10,40) представляет уравнение 4-й степени отно-

сительно k . Четырем корням этого уравнения соответствуют четыре волны, причем распространению с постоянной амплитудой соответствуют вещественные корни. Для их вычисления можно воспользоваться графическим методом. В плоскости (x, y) следует вычертить кривые

$$y = \frac{\omega_{01}^2}{(x - v_1)^2} + \frac{\omega_{02}^2}{(x - v_2)^2} \quad (10,41)$$

и

$$y = k^2 \quad (10,42)$$

и найти точки их пересечения (рис. 10,4). Последние, очевидно, удовлетворяют уравнению (10,40), если $x = \frac{\omega}{k}$. В положитель-

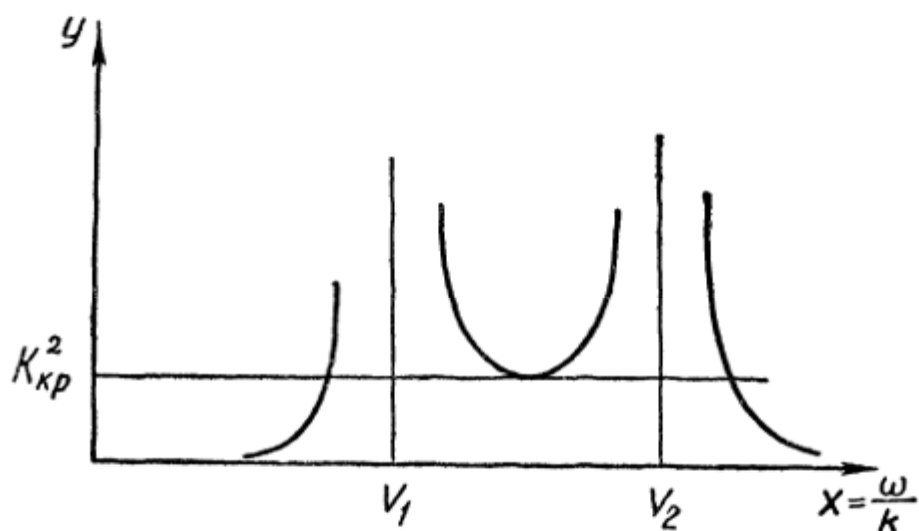


Рис 10,4 Графическое решение дисперсионного уравнения (10,40) для системы двух пучков.

ной полуплоскости (вверх от оси абсцисс) кривая (10,41) представляется тремя ветвями, пересекающимися с прямой $y = k^2$ в четырех точках при $k^2 > k_{кр}^2$ и в двух при $k^2 < k_{кр}^2$ (рис. 10,4).

В первом случае всем четырем корням соответствуют чисто периодические движения, то есть волны с постоянной амплитудой, в то время как во втором случае два корня содержат мнимые части и соответствуют нарастающим и затухающим волнам. Из рис. 10,4 видно, что к неустойчивости приводят лишь достаточно длинноволновые возмущения. Критическая длина волны определяется из условия касания кривых (10,41) и (10,42). Простые вычисления дают для $k_{кр}$ уравнение:

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda_{кр}}\right)^2 = k_{кр}^2 = \frac{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2}{(v_1 - v_2)^2} \quad (10,43)$$

С учетом теплового разброса в пучках дисперсионное уравнение имеет вид

$$\frac{\omega_{01}^2}{\left(\frac{\omega}{k} - v_1\right)^2 - \overline{v_1^2}} + \frac{\omega_{02}^2}{\left(\frac{\omega}{k} - v_2\right)^2 - \overline{v_2^2}} = k^2. \quad (10,44)$$

В частном случае, когда $e_1 = e_2$, $m_1 = m_2$ — заряд и масса электрона и, кроме того, $v_1 = 0$ и $\overline{v_2^2} = 0$, мы получаем дисперсионное соотношение для плазмы со средней тепловой скоростью частиц $\sqrt{\overline{v_1^2}}$, пронизываемой монохроматическим электронным пучком [38]:

$$\frac{\omega_{01}^2}{\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 - \overline{v_1^2}} + \frac{\omega_{02}^2}{\left(\frac{\omega}{k} - v_2\right)^2} = k^2. \quad (10,45)$$

При $\omega_{02}^2 = 0$ (10,45) сводится к уже известному нам уравнению для плазменных волн

$$\omega^2 = \omega_{01}^2 + \overline{v_1^2} k^2. \quad (10,46)$$

Как видно из (10,45), наличие электронного потока малой плотности не вносит существенных изменений в дисперсионное соотношение, если знаменатель второго слагаемого в (10,45) достаточно велик. В противном случае, т. е. если выполняется приближенное равенство $\omega \approx kv_2$, изменение может быть существенным, и тогда пучок должен учитываться.

Приближенное решение уравнения (10,45) при $\omega \approx kv_2$, имеет вид [27]:

$$\omega = kv_2 + \alpha \left(\frac{\omega_{01}\omega_{02}^2}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{\overline{v_1^2}}{v_2^2} \right)^{\frac{1}{6}}, \quad (10,47)$$

где

$$\alpha \equiv \sqrt[3]{1} = 1; 0,5(-1 \pm i\sqrt{3}).$$

Один из трех корней ω имеет отрицательную мнимую часть. Ему соответствует нарастающая волна. Скорость нарастания амплитуды волны, как видно из (10,47), убывает с увеличением теплового разброса.

§ 10,5. Электромагнитные волны на границе плазмы

До сих пор мы рассматривали колебания в безграничной плазме, между тем, во многих случаях существенную роль играют явления на границе плазмы. Характер волнового движения вблизи

границы, как обычно, определяется дисперсионным соотношением, которое позволяет судить об области частот, при которых возможно распространение незатухающих колебаний, о скорости распространения и об устойчивости системы относительно колебаний данного типа. Общий план вывода дисперсионных уравнений состоит в том, что уравнения для колебаний в граничащих между собой средах дополняются известными из электродинамики условиями, которым должны удовлетворять поля при переходе через

границу. Эти условия сводятся к соотношению между ω и k , которое и является искомым дисперсионным соотношением.

В качестве простейшего примера рассмотрим колебания в плазме, занимающей пространство под плоскостью yz (рис. 10,5). Как будет показано, вблизи границы плазмы могут распространяться медленные электромагнитные волны ($v_{\phi} < c$), причем область существования незатухающих волн определяется

неравенством $\omega < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$. Напомним, что в безграничной плазме электромагнитные

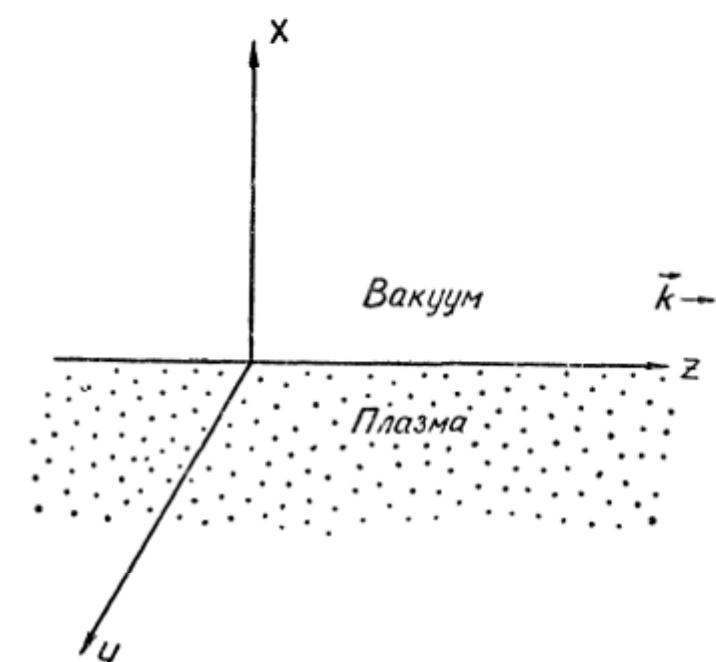


Рис. 10,5. Плазма занимает пространство под плоскостью yz . Поверхностная волна распространяется в направлении z .

волны с частотой, лежащей ниже ω_0 , при отсутствии магнитного поля не распространяются. Рассматриваемый случай аналогичен распространению электромагнитной волны вдоль границы диэлектрика [56].

Если, например, на поверхность диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ϵ падает плоская однородная волна, причем вектор $\mathbf{E}$ лежит в плоскости падения, то при угле падения θ , меньшем критического угла $\theta_{кр} = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon}}$, волна будет отражаться (полное внутреннее отражение). Сумму падающей и отраженной волн можно представить в виде плоской волны, распространяющейся вдоль поверхности диэлектрика с некоторой фазовой скоростью. Эта плоская волна, вообще говоря, не однородна, поля в ней зависят от координаты x . Если волна распространяется в направлении оси z , то наряду с компонентами H_y и E_x будет существовать также продольная составляющая электрического поля E_z . Поле поверхностной волны проникает на некоторую глубину внутрь диэлектрика, экспоненциально затухая с увеличением расстояния от поверхности.

Таков же характер волнового движения на поверхности плазмы. Мы ограничимся рассмотрением волн, не связанных с колебаниями плотности зарядов, то есть будем полагать

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \quad (10,48)$$

Для определения E_z воспользуемся волновым уравнением

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{\omega_0^2}{c^2} \mathbf{E} = 0, \quad (10,15)$$

из которого следует

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} - \frac{\omega_0^2}{c^2} E_z = 0. \quad (10,49)$$

Составляющая E_x связана с E_z соотношением (10,48):

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0. \quad (10,50)$$

Высокочастотное магнитное поле, согласно уравнению Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (10,51)$$

имеет только одну составляющую, для которой будем иметь

$$\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right). \quad (10,52)$$

Для волны, распространяющейся вдоль оси z ($E \sim e^{i(\omega t - kz)}$), уравнение (10,49) принимает вид

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right) E_z = 0, \quad (10,53)$$

где

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}. \quad (10,54)$$

Мы ограничимся случаем $k^2 > \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ и введем обозначение

$$\gamma^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\epsilon}{\epsilon_0} > 0. \quad (10,55)$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \gamma^2 E_z = 0. \quad (10,56)$$

Высокочастотное электрическое поле можно, следовательно, представить в виде

$$E_z = (Ae^{\gamma x} + Be^{-\gamma x}) e^{i(\omega t - kz)}. \quad (10,57)$$

Аналогичное выражение получится и для поля в вакууме

$$E_{z, \text{ вак}} = (Ce^{\gamma_0 x} + De^{-\gamma_0 x}) e^{i(\omega t - kz)}, \quad (10,58)$$

где

$$\gamma_0 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}. \quad (10,59)$$

Из условия ограниченности полей при $x = \pm \infty$ следует $B = C = 0$, так что

$$E_{z, \text{ пл}} = Ae^{\gamma x} e^{i(\omega t - kz)} \quad (10,60)$$

и

$$E_{z, \text{ вак}} = De^{-\gamma_0 x} e^{i(\omega t - kz)}. \quad (10,61)$$

Пользуясь уравнениями (10,50) и (10,51), нетрудно теперь вычислить переменное магнитное поле

$$H_{y, \text{ пл}} = \frac{i\omega\varepsilon}{\gamma} Ae^{\gamma x} e^{i(\omega t - kz)}; \quad (10,62)$$

$$H_{y, \text{ вак}} = -\frac{i\omega\varepsilon_0}{\gamma_0} De^{-\gamma_0 x} e^{i(\omega t - kz)}. \quad (10,63)$$

Из условия непрерывности тангенциальных составляющих полей на поверхности плазмы ($x = 0$) вытекает равенство

$$\frac{\varepsilon}{\gamma} = -\frac{\varepsilon_0}{\gamma_0}, \quad (10,64)$$

определяющее искомую связь между k и ω . Запишем полученное соотношение в виде

$$\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}.$$

Очевидно, при действительных ω и k оно может быть выполнено только в случае $\varepsilon < 0$.

Для удобства введем величину

$$\xi = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1$$

и после некоторых простых преобразований представим дисперсионное уравнение (10,64) в виде

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\xi}{\xi - 1}}. \quad (10,65)$$

Вещественное решение для k возможно только в случае $\xi > 1$, то есть при частотах

$$\omega < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}.$$

Скорость распространения волны равна

$$v_\Phi = \frac{\omega}{k} = c \sqrt{1 - \frac{1}{\xi}}.$$

При $\omega \rightarrow \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} v_{\Phi} \rightarrow 0$, при $\omega \rightarrow 0 v_{\Phi} \rightarrow c$. Амплитуда колебаний

наиболее значительна на поверхности и экспоненциально убывает внутрь плазмы. Глубина проникновения поля убывает с ростом плотности плазмы. При $\omega_0 \rightarrow \infty$ поле не проникает внутрь плазмы, кроме того, $v_{\Phi} \rightarrow c$.

Рассмотренный метод применим к задачам о распространении волн в плазменном слое или в плазменном цилиндрическом «стержне». Во всех этих случаях оказываются возможными медленные ($v_{\Phi} < c$) волны с максимальной амплитудой полей у поверхности. Медленные волны представляют большой практический интерес, так как они могут эффективно взаимодействовать с частицами, скорость которых близка к v_{Φ} . Указанное взаимодействие может быть использовано для усиления высокочастотных электромагнитных колебаний и для ускорения заряженных частиц.

Конечно, плазменные волноводы достаточно большой плотности немыслимы без магнитного поля. Наложение магнитного поля существенно усложняет картину колебаний, но в то же время открывает новые возможности. В плазменных «стержнях» в магнитном поле могут распространяться колебания, амплитуда которых имеет максимум на оси, кроме того, в плазменном ускорителе оказывается возможным одновременное достижение фазовой и радиальной устойчивости [57].

§ 10.6. Высокочастотный нагрев плазмы

Пользуясь одним только омическим нагревом, то есть нагревом плазмы током, возникающим в ней при наложении поля E , по всей вероятности невозможно достичь термоядерных температур. Это связано с тем, что в случае омического нагрева энергия поля передается главным образом электронам, к ионам же она переходит от электронов в результате столкновений. Медленность передачи энергии от электронов к ионам при высоких температурах T_e приводит к большому разрыву между электронной и ионной температурами: чтобы достичь некоторой ионной температуры, электронную температуру необходимо поднять до гораздо более высокого уровня.

Эксперименты на стеллараторах показали, что методом омического нагрева температуру плазмы T_i можно довести до 10^6 градусов. Для дальнейшего нагрева необходимы иные, более эффективные методы.

Весьма эффективным представляется метод высокочастотного нагрева, использующий идею ионного циклотронного резонанса.

Наряду с ним предлагались методы, в которых нагревание достигалось путем периодического сжатия плазмы магнитным полем. Они объединяются названием «методы магнитной накачки». Рассмотрим один из них.

Допустим, что магнитное поле, удерживающее плазму, периодически изменяется. Изменения должны быть достаточно медленными, чтобы сохранялся магнитный момент ионов $\mu = \frac{\omega_{\perp}}{B}$. В этом случае увеличение H в течение полупериода сопровождается таким же увеличением $\omega_{\perp}$. При отсутствии соударений в следующем полупериоде энергия $\omega_{\parallel}$ вслед за H возвращается к первоначальному значению, так что никакого нагрева не происходит. Однако если во время максимального H между двумя частицами произойдет столкновение, некоторая часть энергии $\omega_{\perp}$, полученной от поля при сжатии плазмы (при увеличении магнитного поля), будет передана продольному движению и не будет возвращена магнитному полю во второй половине периода.

Поясним это на примере. Допустим, что магнитное поле периодически изменяется от H до $2H$. Пусть в поле H полная энергия иона равна ω . Ион обладает тремя степенями свободы, следовательно, на две поперечные степени свободы (на ларморовское вращение) в среднем приходится $\omega_{\perp} = \frac{2}{3}\omega$. При возрастании магнитного поля до $2H$ энергия ларморовского вращения достигнет $\frac{4}{3}\omega$, и полная энергия станет равной

$$\frac{4}{3}\omega + \frac{1}{3}\omega = \frac{5}{3}\omega.$$

Пусть в этот момент времени произойдет столкновение и энергия снова равномерно распределится между степенями свободы. На каждую степень свободы придется $\frac{5}{9}\omega$, а на две поперечные степени $\frac{10}{9}\omega$. При последующем уменьшении магнитного поля до H энергия ларморовского вращения уменьшится вдвое и полная энергия станет равной

$$\frac{5}{9}\omega + \frac{5}{9}\omega = \frac{10}{9}\omega, \quad (10,66)$$

то есть увеличится на одну девятую первоначальной величины. Как показывает расчет, в магнитном поле

$$H = H_0 (1 + \alpha \sin \omega t)$$

энергия частиц растет по закону

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\alpha^2}{6} \frac{\omega^2 \nu}{\frac{9}{4} \nu^2 + \omega^2} \omega. \quad (10,67)$$

При различных методах магнитной накачки требуется совпадение периода колебаний магнитного поля с теми или иными характерными временами, например, с периодом акустических колебаний, временем пролета типичным ионом (то есть ионом со средней скоростью) участка плазмы с пульсирующим магнитным полем. В рассмотренном случае, как видно из (10,67), наиболее быстрый прирост энергии происходит при $\omega \approx \nu$.

На идее циклотронного резонанса мы останавливались ранее. При колебаниях магнитного поля с частотой, равной ионной циклотронной частоте, ионы описывают орбиты с увеличивающимися с течением времени радиусами, то есть движутся по развертывающимся спиралям. Простые оценки показывают, что эффективность передачи энергии при этом достаточно высока, и метод может обеспечить нагрев плазмы до термоядерных температур.

Известной трудностью является обеспечение хорошей связи между источником колебаний и плазмой, представляющей собой резонансную нагрузку. Обычно она вызывается поляризационными эффектами. Под действием периодического магнитного поля ионы совершают вращательные движения приблизительно в одной фазе, то есть все ионы, описывая циклотронные орбиты, одновременно удаляются от оси плазменного цилиндра, сжатого магнитным полем, а затем одновременно приближаются к ней. Электронная часть плазмы, удерживаемая магнитным полем, почти не участвует в этих радиальных пульсациях. В результате возникает поляризационное электрическое поле, которое вместе с азимутальным электрическим полем, пропорциональным $\frac{\partial B}{\partial t}$, дает поле, поляризованное по кругу, направленное в сторону, противоположную ларморовскому вращению ионов. Это поле задерживает рост энергии ионов. Таким путем плазма как бы экранирует себя от внешнего электрического поля $E_\theta \sim \frac{\partial B}{\partial t}$.

Остроумное решение проблемы было найдено Т. Стиксом, воспользовавшимся тем, что электроны плазмы свободно перемещаются вдоль силовых линий магнитного поля и могут нейтрализовать поляризационные поля, если они имеют продольную составляющую [58]. Стикс предложил для создания переменного магнитного поля воспользоваться несколькими (двумя, тремя) магнитными катушками, расположенными в ряд на одной оси. Токи в соседних катушках должны быть в противофазе, так чтобы в соседних

участках плазмы под катушками ионы смещались по радиусам в противоположных направлениях. Электронные потоки между соседними участками будут устранять поляризационный эффект.

Строгая теория этого процесса показала, что таким путем поляризация будет сниматься не полностью. Это связано с тем, что электроны не вполне свободно перемещаются вдоль силовых линий, так как переменный электронный ток, частота которого равна ω_{Hi} , индуцирует обратную э. д. с. Тем не менее описанный способ ввода высокочастотной мощности в плазму представляется весьма перспективным.

Наряду с ним исследуются иные пути. В плазме на частоте несколько меньшей ω_{Hi} могут возбуждаться ионно-циклотронные волны (см. гл. 7). Последние распространяются почти без затухания при частоте достаточно удаленной от ω_{Hi} . С приближением ω к ω_{Hi} затухание растет. Если в некоторой части пространства, занятого плазмой, создать понижение магнитного поля, ионно-циклотронные волны надлежащей частоты будут испытывать значительное затухание в этой части пространства. Конечно, переход в область плазмы с измененным H может вызвать отражение. Вероятно, отражения можно избежать путем достаточно плавного изменения магнитного поля. Эта задача имеет много общего с задачей согласования нагрузки в технике сверхвысоких частот.

Наряду с другими методами следует упомянуть о возможности ввода энергии в плазму с помощью электронного пучка. Создание пучков, несущих мощность, измеряемую киловаттами в непрерывном режиме и мегаваттами в импульсном режиме, в настоящее время не представляет проблемы. Очень заманчиво передавать эту мощность непосредственно плазме, не переводя ее предварительно в форму высокочастотного излучения.

Можно представить себе различные способы передачи энергии от пучка плазме. Допустим, например, что плазма пронизывается цилиндрическим электронным пучком, направленным вдоль магнитного поля. Если пучок сгруппирован, то поле объемного заряда пучка будет иметь переменную составляющую $E_0 \cos \omega t$. В случае ионного резонанса, при $\omega = \omega_{Hi}$, энергия пучка будет переходить в энергию ларморовского вращения ионов.

Предварительная модуляция пучка не обязательна, так как взаимодействие пучка с плазмой при некоторых условиях приводит к автоматической модуляции его и к эффективной передаче энергии продольного движения электронов колебаниям того или иного вида. Современные представления о явлениях, происходящих при взаимодействии пучка с плазмой, достаточно полно представлены в обзоре Я. Б. Файнберга [59].

Различные методы нагрева плазмы всегда приводят к нарушению равновесного распределения частиц, например, к анизотропии температуры. В результате плазма становится неустойчивой —

в ней развиваются разного рода периодические или аperiodические процессы. Чтобы избежать их, нагрев следует осуществлять медленно, так чтобы энергия, вводимая в плазму, успевала перераспределяться между всеми степенями свободы, и отклонения от равновесного распределения оставались бы незначительными. Основным механизмом перераспределения энергии будет в этом случае столкновение между частицами, поэтому допустимая скорость нагрева определяется временем релаксации за счет столкновений. Как показывают расчеты, соответствующие скорости нагрева крайне малы.

Однако условие устойчивости плазмы не является абсолютно необходимым. Представляют опасность лишь те неустойчивости, которые ведут к нарушению изоляции плазмы. «Малые» неустойчивости не только допустимы, но в некотором смысле даже полезны.

При исследовании малых отклонений от состояния равновесия мы говорим о неустойчивости, когда получаем экспоненциально нарастающее решение. Последнее описывает развитие процесса только на ранней стадии, когда отклонения от состояния равновесия действительно малы. С увеличением амплитуды этих отклонений закон нарастания обычно изменяется. Колебания со значительной амплитудой нарушают условия нарастания, в результате чего происходит стабилизация, то есть устанавливаются колебания постоянной амплитуды. Если эта амплитуда достаточно мала, чтобы изоляция плазмы не нарушалась, данная неустойчивость не представляет опасности. Напротив, колебания, устанавливающиеся в плазме могут представлять собой механизм максвеллизации гораздо более эффективный, чем парные столкновения.

Количественный анализ этого явления требует решения нелинейных уравнений. Нелинейные процессы при значительной амплитуде обычно характеризуются появлением многих частот. Чем больше амплитуда, тем богаче спектр возбуждаемых в системе частот. В отличие от линейных колебаний, для которых имеет место принцип суперпозиции, нелинейные колебания с различными частотами взаимно связаны. Характер движения при больших амплитудах становится настолько сложным, что обычные методы нелинейного анализа теряют применимость. На смену им приходят представления и методы теории турбулентных движений.

Для турбулентного движения характерен переход энергии от крупномасштабных движений к мелкомасштабным. Например, от длинноволновых колебаний к коротковолновым, от низких частот к высоким. Процесс заканчивается переходом энергии в тепло. Следует ожидать, что в режиме турбулентности возможна наиболее эффективная передача энергии от внешних источников к плазме. К сожалению, в настоящее время этот интересный вопрос совершенно не изучен.

§ 10,7. Применение микроволновой техники для определения основных параметров плазмы

Одновременно с развитием физики плазмы развивалось особое направление измерительной техники, которое получило не совсем удачное название «диагностики плазмы».

Если первые исследователи плазмы, то есть сильно ионизованного газа, удовлетворялись измерениями с помощью классических зондов Лангмюра, то при дальнейшем развитии физики плазмы, когда плотность плазмы стала достигать $10^{15} - 10^{17} \text{ см}^{-3}$, а электронная и ионная температура 1 кэВ , применение классических методов оказалось невозможным. В особенности это относится к экспериментам, в которых плазма находится в сильном магнитном поле. Помимо того, что метод зондов Лангмюра не применим при наличии сильных полей, введение в горячую плазму каких-либо зондов может коренным образом изменить состояние плазмы.

Совершенно свободным от этих возражений является метод спектрального исследования плазмы, но этот метод очень ограничен, так как чистая водородная плазма при высокой температуре излучает в основном только сплошной спектр торможения и циклотронную частоту с ее гармониками. В слабо ионизованном и возбужденном газе основными характеристическими частотами являются обычные частоты оптического возбуждения, в сильно ионизованном газе появляются новые характерные частоты: плазменная частота ω_0 , электронная циклотронная ω_H и ионная циклотронная ω_{H_i} частоты. Они становятся заметными, если превосходят частоту парных столкновений. Первые две частоты

$$\text{и} \quad \omega_0 = 5,6 \cdot 10^4 (n \text{ см}^{-3})^{\frac{1}{2}} \quad (10,68)$$

$$\omega_H = 1,8 \cdot 10^7 B (\text{гс}) = 1,8 \cdot 10^{11} B \left(\frac{\text{эВ}}{\text{м}^2} \right) \quad (10,69)$$

соответствуют длинам волн

$$\lambda_0 = 3,4 \cdot 10^8 (n \text{ см}^{-3})^{-\frac{1}{2}} \text{ см} \quad (10,70)$$

$$\text{и} \quad \lambda_H = 1,07 \cdot 10^4 (B \text{ гс})^{-1} \text{ см} = 1,07 \left(B \frac{\text{эВ}}{\text{м}^2} \right)^{-1} \text{ см}. \quad (10,71)$$

Лангмюровская частота плазмы при $n \approx 10^{14} \text{ см}^{-3}$ соответствует длине волны $\lambda_0 \approx 0,34 \text{ см}$, а циклотронная частота при $B \approx 1 \frac{\text{эВ}}{\text{м}^2}$ длине волны порядка 1 см .

Одним из самых простых методов применения высокочастотных колебаний для определения концентрации электронов является нахождение такой частоты колебаний, при которой радиоволны перестают проникать в плазму. Согласно формуле (10,68), по граничной частоте легко определить концентрацию электронов $n = 1,2 \cdot 10^{-8} \left(\frac{\omega_0}{2\pi} \right)^2 \text{ см}^{-3}$.

Основным недостатком этого метода является необходимость располагать набором генераторов с соответствующими волноводными системами на миллиметровом диапазоне. В настоящее время получил распространение другой, несколько более сложный метод, свободный от указанного недостатка. В нем используются зондирующие частоты, лежащие выше частоты плазменных колебаний, то есть $\omega > \omega_0$. При этом применяется схема, совершенно аналогичная схеме оптического интерферометра, служащего для определения малых показателей преломления. Схема оптического интерферометра представлена на рис. 10,6.

Лучи от монохроматического источника света S , проходя линзу L_1 , становятся параллельными и падают на тонкую полупрозрачную пластинку P_1 , на которой происходит разделение на два луча — I и II .

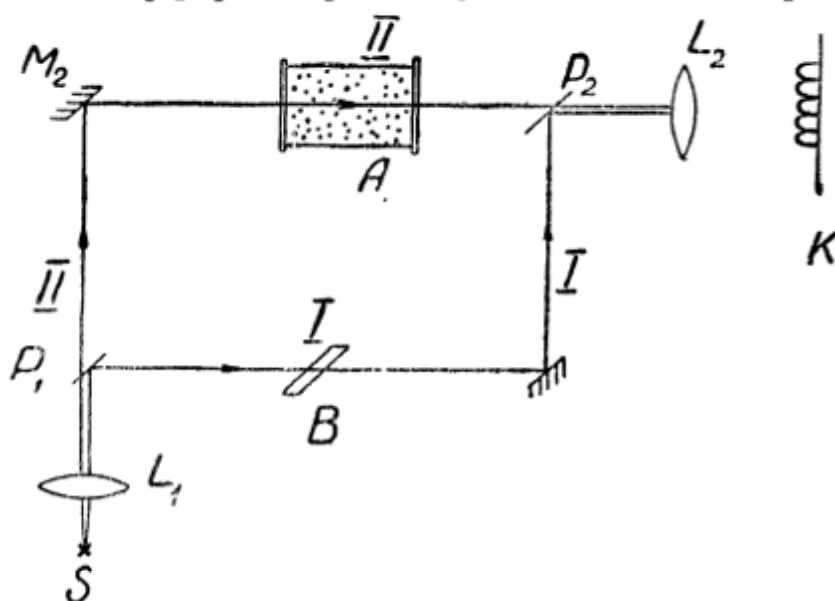


Рис. 10,6. Схема оптического интерферометра.

Вторая полупрозрачная пластинка P_2 соединяет два луча вместе, которые затем проходят через линзу L_2 и дают на экране K интерференционные полосы. В сосуде A находится газ, показатель преломления которого n исследуется. Интерференционные полосы на экране K обусловлены оптической разностью хода лучей I и II , которая зависит от показателя преломления среды и геометрических факторов. Вначале сосуд A откачивается и геометрическая разность хода устраняется поворотом стеклянной пластинки B . Затем начинают впускать в A исследуемый газ и следят за смещением интерференционных полос. Проход одной полосы соответствует оптической разности хода $\Delta = \lambda = l(n - 1)$, где l — длина сосуда A .

В радиоинтерферометре рис. (10,7) электромагнитные волны также разделяются на два пути: I — через аттенюатор C и фазовращатель B (аналог пластины B в оптическом интерферометре), и II — через волноводы с рупорами и сосуд с плазмой A . Обе волны соединяются в точке $б$. Ток кристаллического детектора D регистрируется осциллографом. Если внешнее магнитное поле H равно нулю или если электрический вектор поляризованной волны совпадает с H , то, согласно (10,21),

$$n = \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}.$$

В предположении малости $\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$, если есть основание концентрацию n_e считать постоянной вдоль пути волн внутри сосуда с плазмой, мы можем написать

$$n = 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_0^2}{\omega^2}.$$

Тогда оптическая разность хода равна

$$\Delta = P\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} P = l(n - 1) \approx -l \frac{e^2}{\epsilon_0 m \omega^2} n_e,$$

где P — число полос интерференции, прошедших при внесении оптически активной среды толщиной l , то есть при заполнении сосуда A плазмой.

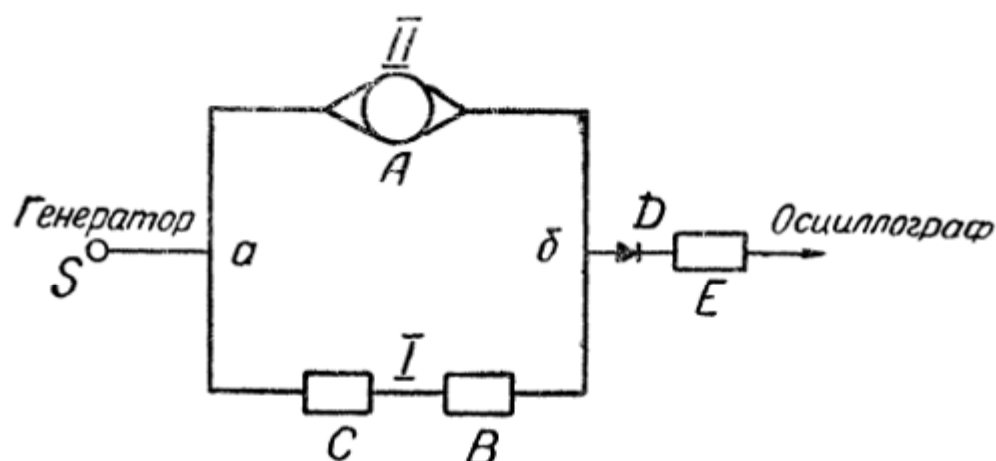


Рис. 10,7. Радиointерферометр для диагностики плазмы.

Радиointерферометр позволяет измерять изменение плотности плазмы во времени, например, во время пинчевого разряда или во время удержания плазмы в магнитной ловушке. Подобные измерения позволяют достаточно надежно определять плотность электронной компоненты плазмы, однако ничего не говорят о температуре электронов и ионов. Поэтому неосторожное использование метода часто приводит к ошибкам. Плазма может вызывать со стенок вторичную эмиссию электронов, температура которых очень низка. В результате высокочастотный метод может дать завышенное время удержания или распада плазмы.

Путем некоторого усложнения интерференционного метода можно определять также ослабление волны, проходящей через плазму. Поскольку затухание волн связано со столкновениями, а частота столкновений зависит от температуры (4,60), такого рода измерения позволяют также оценивать температуру электронной компоненты плазмы. Помимо изложенных методов, можно было бы указать на ряд других высокочастотных методов, например, на метод определения плотности плазмы по смещению собственных частот резонатора, заполняемого данной плазмой, или

определение плотности плазмы в магнитном поле по фарадеевскому вращению плоскости поляризации поперечной электромагнитной волны. Обзор различных методов высокочастотной диагностики можно найти в статье И. С. Шпигеля и М. Д. Райзера [60].

ГЛАВА 11

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯДОВ В ПОЛЯХ С ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ. ПЛАЗМЕННЫЕ СГУСТКИ

§ 11,1. Плазменные сгустки

Динамика плазменных потоков и плазменных сгустков имеет важнейшие приложения в различных областях физики и техники; достаточно указать на технику плазменных двигателей, в которых плазменные потоки развивают реактивную тягу. В проблеме управляемых термоядерных реакций ее роль определяется главным образом возможностью инъекции плазмы в магнитные ловушки. Такая возможность весьма заманчива, так как в плазменных потоках нет объемных зарядов, сильно ограничивающих величину тока в ионных пучках, вместе с тем при инъекции плазмы не возникает проблемы нейтрализации зарядов, уже захваченных ловушкой.

Плазма в сгустках представляет интересный и удобный объект исследования. Она обладает высокой степенью ионизации, так как нейтральные частицы не ускоряются электродинамическими силами и отстают от сгустка; сгусток можно очищать от примесей, пользуясь тем, что дрейф частиц в неоднородных полях зависит от массы частиц; состав плазмы в сгустках легко контролировать с помощью простого масспектрографа Томпсона. Измерения скоростей частиц и плотности плазмы в сгустках также не составляют большого труда, они сводятся к определению импульса и энергии сгустка методом баллистического маятника и калориметрическим методом. По расширению сгустка можно исследовать диффузию плазмы. Сгустки можно нагревать, ускорять и т. д. Однако чтобы использовать все эти возможности, необходимо овладеть техникой создания и ускорения достаточно плотных плазменных сгустков, изучить законы движения их в магнитных полях различной конфигурации, исследовать эффекты взаимодействия сгустков между собой.

В технике создания и ускорения сгустков достигнут определенный успех. В последнее время были разработаны плазменные

инжекторы или пушки, позволяющие получать сгустки, содержащие $10^{17} - 10^{18}$ дейтронов, со скоростью $3 - 5 \cdot 10^7$ см/сек.

В конце 1961 г. в лаборатории ФТИ АН УССР Б. Г. Сафроновым, В. П. Гончаренко и их сотрудниками был найден особый режим коаксиального источника плазмы, при котором энергия ионов водорода или дейтерия в среднем равна 15 кэв и простирается до 50—60 кэв. Подобный же режим работы коаксиального источника по-видимому, был найден в Лос-Аламосе (США), где, согласно сообщению Ошера [61], проводились эксперименты по инъекции

плазмы со средней энергией 13 кэв в ловушку со встречными полями.

Схематически плазменную пушку можно представить в виде двух коаксиальных труб, изображенных на рис. 11,1. Промежуток между

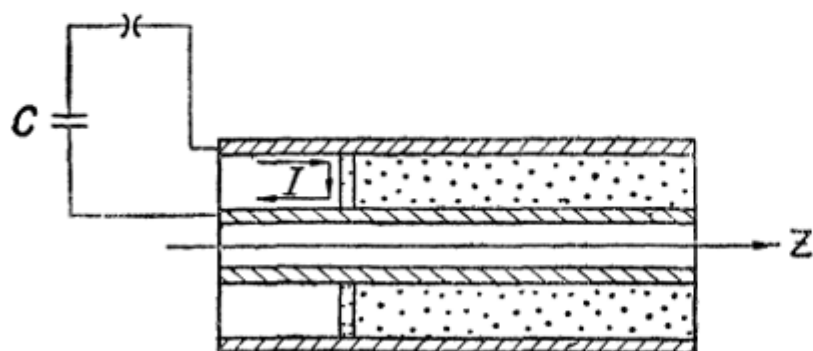


Рис. 11,1. Схема плазменного инжектора.

трубами с помощью специального быстродействующего клапана заполняется газом, и затем на этот промежуток подается напряжение от конденсаторной батареи C . В начале коаксиальной системы начинается разряд, возникает кольцевой слой плазмы, который под действием электродинамических сил ускоряется вдоль системы. Природу электродинамических сил можно толковать различно. Ток разряда конденсаторной батареи, обходя контур, обозначенный на рис. 11,1 стрелками, создает магнитное поле, которое оказывает на плазму давление $\frac{\mu_0 H^2}{2}$. Ту же силу можно рассматривать как результат взаимодействия тока I с собственным магнитным полем. Энергия тока I , обходящего данный контур, равна

$$\omega = \frac{1}{2} L I^2,$$

где L — индуктивность контура. В данном случае индуктивность зависит от положения кольцевого плазменного слоя и определяется соотношением

$$L = L_0 + \xi z,$$

где L_0 — паразитная индуктивность контура, ξ — индуктивность единицы коаксиальной линии, образованной трубами, и z — длина коаксиальной линии до кольцевого плазменного сгустка (рис. 11). Энергия тока ω изменяется при перемещении сгустка вдоль оси z . Сила, действующая на сгусток, равна $\frac{d\omega}{dz} = \frac{1}{2} I^2 \frac{dL}{dz}$. Под действием этой силы плазма ускоряется вдоль оси z . В простейшем

случае, когда напряжение на батарее конденсаторов C можно считать постоянным ($V = V_0$) и, кроме того, выполняется условие $L_0 \gg \xi z$, скорость плазмы по мере продвижения вдоль системы растет согласно формуле

$$\dot{z} = \sqrt[4]{\frac{4\xi V_0^2}{3S\rho_0 L_0^2}} z^2,$$

где буквой S обозначена площадь свободного сечения между цилиндрами и ρ_0 — начальная плотность газа [7].

Динамика плазменных сгустков весьма сложна, и строгого математического описания движения их в различных полях пока не существует. В большинстве случаев приходится довольствоваться качественными соображениями, опирающимися на небогатый имеющийся к настоящему времени экспериментальный материал, на некоторые теоретические результаты, полученные для крайне идеализированных условий и, конечно, на знание законов движения отдельных частиц в данных магнитных полях. Обычно применяются поля с осевой симметрией. Движению зарядов в таких полях посвящен следующий параграф.

§ 11.2. Поля с осевой симметрией

Обычно магнитные поля получаются при помощи круговых витков с током, причем плоскости витков перпендикулярны (или почти перпендикулярны) к оси системы (оси z), а центры лежат на этой оси. Векторный потенциал такого поля

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}}{R} dV \quad (11,1)$$

имеет только азимутальную составляющую A_θ . Индукция магнитного поля

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (11,2)$$

имеет две составляющие, связанные с A_θ соотношениями

$$B_r = -\frac{\partial A_\theta}{\partial z} \quad (11,3)$$

и

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta). \quad (11,4)$$

Как известно, в силу неоднозначности определения векторного потенциала соотношением (11,2), его можно выбрать так, чтобы выполнялось условие

$$\text{div } \mathbf{A} = 0. \quad (11,5)$$

В пространстве, свободном от тока, векторный потенциал определяется уравнением

$$\Delta A = 0, \quad (11,6)$$

которое в нашем частном случае имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_0}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 A_0}{\partial z^2} - \frac{A_0}{r^2} = 0. \quad (11,7)$$

Благодаря осевой симметрии B_z является четной функцией r , следовательно, как видно из (11,4), A_0 является нечетной функцией r , и значит, A_0 можно разложить в ряд по нечетным степеням r :

$$A_0(r, z) = r f_1(z) + r^3 f_3(z) + \dots \quad (11,8)$$

Величина $f_1(z)$ представляет собой умноженную на $1/2$ индукцию магнитного поля на оси системы. В этом легко убедиться, вычисляя H_z с помощью (11,4) и (11,8) и полагая $r = 0$. Величины $f_3(z)$, $f_5(z)$, ... можно выразить через $f_1(z)$. Для этого ряд (11,8) для A_0 следует подставить в (11,7) и затем приравнять нулю коэффициенты при всех степенях r . В результате для A_0 получается выражение

$$A_0(r, z) = \frac{r}{2} B(z) - \frac{r^3}{2^2 \cdot 4} B''(z) + \frac{r^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} B^{IV}(z) + \dots \quad (11,9)$$

Мы видим, что магнитное поле, обладающее осевой симметрией, определяется во всем пространстве заданием напряженности $H(z)$ или индукции магнитного поля $B(z) = \mu_0 H(z)$ на оси z .

Приведем примеры [62].

Поле, создаваемое круговым витком радиуса R с током I , определяется функцией

$$H(z) = \frac{R^2 I}{2(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (11,10)$$

Поле на оси бронированной магнитной линзы обычно аппроксимируется выражением

$$H(z) = H_0 e^{-\frac{z^2}{\alpha^2}}, \quad (11,11)$$

где α — расстояние, на котором поле спадает в e раз от своего максимального значения. При увеличении силы тока может начаться насыщение железа, бронирующего катушку, тогда распределение магнитного поля будет изменяться, переходя от (11,11) к колоколообразному распределению:

$$H(z) = \frac{H_0}{1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2}. \quad (11,12)$$

Здесь a — расстояние, на котором поле спадает до половины максимального значения. Зная $H(z)$, нетрудно, пользуясь формулой (11,9), определить магнитное поле в любой точке (r, z) .

На расстояниях r от оси, малых по сравнению с расстояниями вдоль оси z , на которых магнитное поле существенно изменяется, векторный потенциал достаточно точно представляется первым членом ряда (11,9)

$$A_\theta = \frac{rB(z)}{2}, \quad (11,13)$$

и следовательно,

$$H_r = -\frac{\partial A_\theta}{\partial z} = -\frac{r}{2} \frac{\partial B(z)}{\partial z}. \quad (11,14)$$

В полях с осевой симметрией уравнения движения частицы приобретают довольно простой вид. Будем исходить из уравнений Гамильтона для электрона в электрическом и магнитном полях:

$$\frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r}; \quad (11,15)$$

$$\frac{dp_z}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z}; \quad (11,16)$$

$$\frac{dp_\theta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}. \quad (11,17)$$

В этих уравнениях H — функция Гамильтона, и p_z , p_r и p_θ — компоненты обобщенного импульса $\mathbf{p}$.

Так как векторный потенциал $\mathbf{A}$ имеет единственную составляющую A_θ , компоненты обобщенного импульса даются равенствами

$$p_r = mv_r; \quad (11,18)$$

$$p_z = mv_z; \quad (11,19)$$

$$p_\theta = mrv_\theta - erA_\theta. \quad (11,20)$$

Функция Гамильтона представляет полную энергию частицы

$$H = \frac{1}{2m} \left[p_r^2 + p_z^2 + \left(\frac{p_\theta}{r} + eA_\theta \right)^2 \right] - e\varphi, \quad (11,21)$$

где φ — потенциал электрического поля, отсчитываемый от потенциала катода (предполагается, что электроны выходят из

катода с нулевыми скоростями). Из условия осевой симметрии следует, что $\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$ и, согласно (11,17),

$$\frac{dp_\theta}{dt} = 0. \quad (11,22)$$

Иначе говоря, в аксиально симметричной системе обобщенный момент частицы p_θ является инвариантом. Отсюда следует, что третий член в квадратных скобках выражения (11,22) представляет собой функцию одних только координат и может быть присоединен к потенциальной функции $e\varphi$. Функция Гамильтона в этом случае запишется в виде

$$H = \frac{1}{2m} (p_r^2 + p_z^2) - \chi, \quad (11,23)$$

где χ — новая потенциальная функция, равная

$$\chi = e\varphi - \frac{1}{2m} \left(\frac{p_\theta}{r} + eA_\theta \right)^2 = e\varphi - \frac{m}{2} v_\theta^2. \quad (11,24)$$

Мы пришли к двумерному движению частицы в некоторой «меридиональной» плоскости (r, z) с определенной на этой плоскости потенциальной функцией (11,25). Движение описывается уравнениями

$$m \frac{dv_r}{dt} = \frac{\partial \chi}{\partial r}; \quad (11,25)$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial \chi}{\partial z}. \quad (11,26)$$

Особенно просто выглядят уравнения движения, когда $p_\theta = 0$. Этот случай осуществляется, например, когда частица начинает движение в области пространства, лежащей вне магнитного поля, или из точки, лежащей на оси системы. Если движение происходит в приосевой области и радиальное электрическое поле отсутствует ($\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$), уравнение (11,26) принимает вид уравнения осциллятора

$$\frac{d^2 r}{dt^2} \approx - \frac{e^2 B^2(z)}{4m^2} r, \quad (11,27)$$

периодически проходящего через нулевую точку ($r = 0$). Это значит, что при $p_\theta = 0$ электрон в магнитном поле будет описывать траекторию, периодически проходящую через ось системы.

§ 11.3. Магнитный момент заряда, входящего в магнитное поле

Воспользуемся теперь полученными уравнениями, чтобы разобраться в вопросе о магнитном моменте частицы, входящей в магнитное поле. В медленно изменяющемся магнитном поле магнитный момент частицы $\mu = \frac{\omega_1}{B}$ сохраняется, что позволяет весь-

ма просто описывать движение. Например, если частицы движутся в плавно нарастающем аксиально-симметричном магнитном поле, мы без труда установим, что ведущие центры частиц, следуя за силовыми линиями, приблизятся к оси. Благодаря радиальной неоднородности нарастающего магнитного поля частицы будут, кроме того, испытывать азимутальный дрейф, величину которого нетрудно определить по формуле (5,41), если известен магнитный момент μ . Зная μ , нетрудно проследить за уменьшением радиуса ρ циклотронной орбиты. Он определяется формулой

$$\rho^2 = \frac{2\omega_{\perp}}{m\omega_H^2} = \frac{2m\mu}{e^2B}. \quad (11,28)$$

Энергия циклотронного вращения частицы изменяется согласно равенству $\omega_{\perp} = \mu B$. Поскольку полная энергия частицы в стационарном магнитном поле не изменяется, возрастание $\omega_{\perp}$, так же как и азимутальный дрейф, идет за счет энергии продольного движения. Частица в нарастающем поле тормозится. Эффект торможения также легко вычислить, зная μ .

Если частица первоначально двигалась в магнитном поле H_0 , причем энергия циклотронного вращения ее в этом магнитном поле была $\omega_{\perp 0}$, то магнитный момент вполне определен:

$$\mu = \frac{\omega_{\perp 0}}{B_0} = \frac{\omega_{\perp 0}}{\mu_0 H_0}.$$

Если же частица начинает движение вне магнитного поля, заранее не известно, какой момент она будет иметь, войдя в магнитное поле H .

На этот вопрос легко ответить в следующем частном случае.

Допустим, что магнитное поле при $z > 0$ равно нулю, в плоскости $z = 0$ резко возрастает до H_0 и затем остается постоянным (рис. 11,2). Электрон входит в магнитное поле со стороны $z > 0$, имея при $z = \infty$ скорость v_{∞} , параллельную оси z , и двигаясь на расстоянии r_{∞} от оси. Обобщенный момент электрона p_{θ} за пределами магнитного поля равен нулю, следовательно, азимутальная составляющая скорости в магнитном поле должна удовлетворять равенству

$$mrv_{\theta} = erA_{\theta}. \quad (11,29)$$

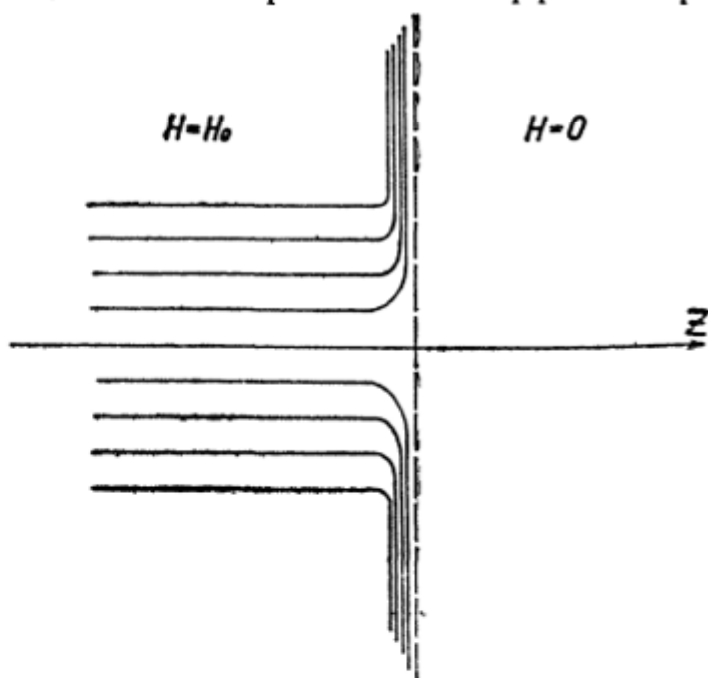


Рис. 11,2. Резко обрывающееся магнитное поле.

В однородном магнитном поле

$$A_0 = \frac{rB}{2}, \quad (11,30)$$

поэтому

$$v_0 = \frac{r}{2} \frac{eB}{m} = \frac{r\omega_H}{2}. \quad (11,31)$$

Уравнения движения в однородном поле приобретают вид

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{\omega_H^2}{4} r \quad (11,32)$$

и

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = 0. \quad (11,33)$$

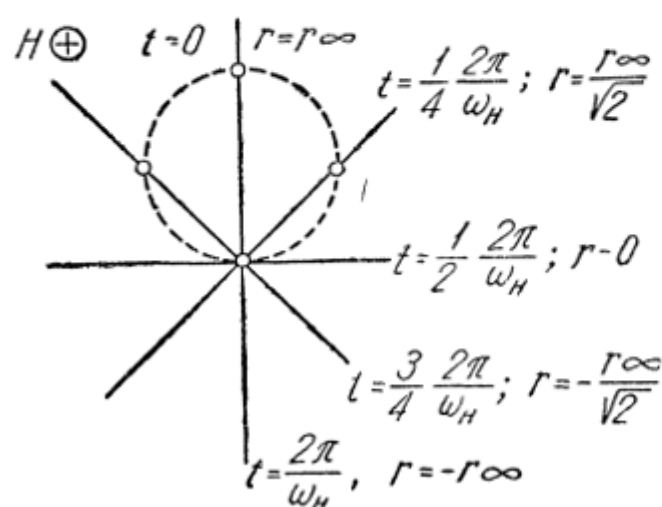


Рис. 11,3. В плоскости, вращающейся с периодом $\frac{4\pi}{\omega_H}$, частица осциллирует

по закону $r = r_\infty \cos \frac{\omega_H}{2} t$. За время полуоборота плоскости частица описывает круговую орбиту.

Убедимся, что за время $\frac{2\pi}{\omega_H}$, в течение которого плоскость поворачивается на угол π , частица описывает полную окружность. Центр окружности не лежит на оси, но отстоит от нее на расстоянии, равном радиусу орбиты. Один раз в течение периода обращения частица пересекает ось.

Циклотронное вращение возникает при прохождении электрон тонкого слоя, в котором магнитное поле возрастает от нуля до постоянного значения H_0 . В этом слое магнитные силовые линии идут по радиусам и электрон при прохождении слоя испытывает азимутальный импульс $\frac{er_\infty B_0}{2}$, «выводящий» его на циклотронную орбиту. Орбита проходит через ось, наиболее же удаленная ее точка лежит на расстоянии r_∞ от оси. Радиус орбиты, таким образом, равен $\frac{1}{2} r_\infty$. Скорость орбитального движения равна $\frac{r\omega_H}{2}$. Эта величина не может превышать начальную скорость, следовательно, электроны, для которых неравенство $v_\infty >$

$> \frac{\omega_H r_\infty}{2}$ не выполняется, будут отражаться магнитным полем. Магнитный момент электрона определяется величиной магнитного поля и расстоянием от оси

$$\mu = \frac{\omega_\perp}{B} = \frac{m}{2} \frac{r_\infty^2 \omega_H^2}{4} \frac{1}{B_0} = \frac{e^2 r_\infty^2 B_0}{8m}. \quad (11,34)$$

Несколько изменим условия входа. Допустим, что магнитное поле, начиная от нуля, резко возрастает до $H_1 < H_0$, а затем

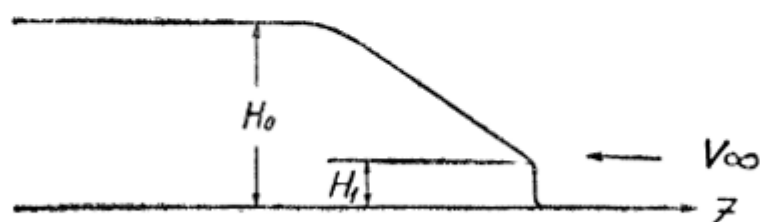


Рис. 11,4. Магнитное поле с резким скачком от 0 до H_1 и последующим плавным увеличением до значения H_0 .

плавно увеличивается до H_0 (рис. 11,4). Электрон, входящий в магнитное поле H_1 , по-прежнему будет описывать окружность радиуса $\frac{r_\infty}{2}$, имея энергию орбитального движения

$$\omega_\perp = \frac{r_\infty^2 e^2 B_1^2}{8m} \quad (11,35)$$

и магнитный момент

$$\mu = \frac{r_\infty^2 e^2 B_1}{8m}. \quad (11,36)$$

Это значение магнитного момента будет сохраняться при переходе электрона из H_1 в H_0 . Сравнивая (11,34) и (11,36), мы видим, что при одних и тех же r_∞ , v_∞ и H_0 магнитный момент частицы оказывается различным при разных условиях входа, то есть при разных способах возрастания магнитного поля от нуля до H_0 . Магнитный момент частицы пропорционален величине скачка H_1 магнитного поля.

Ларморовский радиус в поле H_0 равен

$$r_0 = \sqrt{\frac{2m}{e^2} \frac{\mu}{B_0}} = \frac{r_\infty}{2} \sqrt{\frac{B_1}{B_0}} = \frac{r_\infty}{2} \sqrt{\frac{H_1}{H_0}} \quad (11,37)$$

и при заданном H_0 убывает вместе с уменьшением скачка магнитного поля на входе. Вместе с тем электронная траектория «прижимается» к оси, так как обобщенный момент всюду равен нулю и, следовательно, все окружности, описываемые электроном, проходят через ось.

В предельном случае $H_1 = 0$ все электроны, независимо от r_∞ ,

должны двигаться по оси с $\mu = 0$, если, разумеется, всюду выполнено условие адиабатичности

$$\frac{L}{H} \left| \frac{dH}{dz} \right| \ll 1,$$

где L — смещение частицы за период.

Полагая $v_z \approx \text{const}$ и $L = \frac{2\pi v_z}{\omega_H}$, легко показать, например, что поле

$$H = \frac{H_0}{1 + \frac{e\mu_0 H_0}{2\pi m v_0} z} \quad (11,38)$$

не удовлетворяет поставленному требованию, так как выражение $\frac{L}{H} \left| \frac{dH}{dz} \right|$ равно для него единице. Поля, обычно встречающиеся на практике, нарастают более круто. Они подавно не удовлетворяют условию адиабатичности. Возьмем, например, поле витка

$$H(z) = \frac{R^2 I}{2(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (11,39)$$

Для него условие (11,38) имеет вид

$$\frac{12\pi m v_z}{e\mu_0 R^2 I} z (z^2 + R^2)^{\frac{1}{2}} \ll 1.$$

При достаточно больших z оно нарушается. То же можно сказать о колоколообразном поле:

$$H(z) = \frac{H_0}{1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2}. \quad (11,40)$$

Условие адиабатичности для него имеет вид неравенства

$$\frac{4\pi m v_z}{e\mu_0 H_0 a^2} z \ll 1,$$

которое также нарушается в области больших z . Очевидно, в этой области и устанавливается магнитный момент частицы, входящей в магнитное поле.

В связи с этим следует поставить два вопроса: 1) чем определяется величина приобретаемого частицей момента μ и 2) как устанавливается эта величина. Отнесем эти вопросы к частному случаю, когда магнитное поле имеет колоколообразную форму (11,12).

Допустим, что при $z < 0$ поле равно постоянной величине H_0 , в то время как при $z > 0$ оно описывается формулой (11,12). Электрон движется со стороны больших значений z . При $z \rightarrow \infty$ его скорость равна v_∞ и электрон удален на расстояние r_∞ от

оси z . Полагая $r_\infty \ll a$, мы будем пользоваться приближенным выражением (11,13) для A_0 . Тогда потенциальная функция χ в уравнениях (11,25) и (11,26) примет вид

$$\chi = -\frac{e^2 B_0^2}{8m} \frac{r^2}{\left[1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2\right]^2},$$

где $B_0 = \mu_0 H_0$.

Чтобы упростить задачу, мы будем предполагать также, что при движении в магнитном поле в поперечную компоненту движения будет переходить малая доля кинетической энергии электрона $\frac{mv_\infty^2}{2}$, так что скорость продольного движения можно считать постоянной и равной v_∞ . В этом случае от системы (11,26) и (11,27) останется только уравнение для r , из которого в результате замены переменной t , $dt = \frac{dz}{v_\infty}$, легко получить уравнение траектории

$$\frac{d^2 r}{dz^2} + \frac{e^2 B_0^2}{4m^2 v_\infty^2} \frac{r}{\left[1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2\right]^2} = 0. \quad (11,41)$$

Пользуясь подстановкой

$$z = a \operatorname{ctg} \varphi, \quad (11,42)$$

получим r в виде

$$r = C_1 \frac{\sin(\nu\varphi + C_2)}{\sin \varphi}, \quad (11,43)$$

где ν , C_1 и C_2 — постоянные числа. Из условий $r = r_\infty$ и $\frac{dr}{dz} = 0$ при $z = \infty$ следует, что $C_1 = \frac{1}{\nu} r_\infty$ и $C_2 = 0$. Параметр ν определяется соотношением

$$\nu^2 = 1 + \frac{e^2 B_0^2}{4m^2} \frac{a^2}{v_\infty^2}. \quad (11,44)$$

Второе слагаемое в (11,44) представляет квадрат отношения времени пролета электрона через область неоднородного магнитного поля к периоду циклотронного вращения в магнитном поле H_0 . Наиболее интересен случай большого ν . Для него мы можем воспользоваться приближенным выражением

$$\nu = \frac{e B_0}{2m} \frac{a}{v_\infty}, \quad (11,45)$$

тогда решение уравнения (11,41) представится равенством

$$r = r_\infty \frac{\sin \nu\varphi}{\nu \sin \varphi}, \quad (11,46)$$

в котором ν и φ определяются соотношениями (11,45) и (11,42). Введем теперь величину

$$M = \frac{\omega_{\perp}}{B_z} = \frac{m(v_{\theta}^2 + v_r^2)}{2B_0 \sin^2 \varphi} \quad (11,47)$$

и выясним, как она изменяется в зависимости от z . Согласно (11,31), имеем

$$v_{\theta} = \frac{r_{\infty} v_{\infty}}{a} \sin \varphi \sin \nu \varphi. \quad (11,48)$$

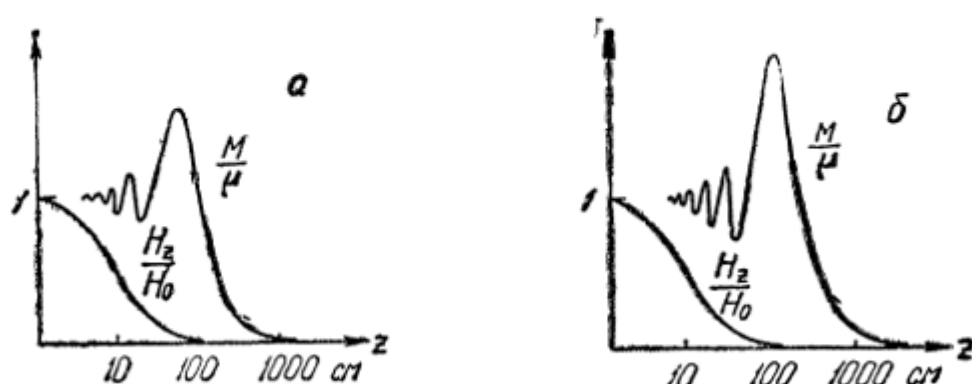


Рис. 11,5. Изменение величины $M = \frac{\omega_{\perp}}{H}$ для электрона, входящего в колоколообразное магнитное поле:

$$H(z) = \frac{H_0}{1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2}.$$

$H_0 = 1000 \text{ э (} B_0 = 0,1 \frac{66}{\text{м}^2} \text{)}$, $a = 10 \text{ см}$, начальная энергия: $a - 100 \text{ эв}$, $b - 25 \text{ эв}$.

Кроме того,

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{dr}{dt} = v_{\infty} \frac{dr}{dz} = -v_{\infty} \frac{\sin^2 \varphi}{a} \frac{dr}{d\varphi} = \\ &= \frac{r_{\infty} v_{\infty}}{a \nu} (\sin \nu \varphi \cos \varphi - \nu \cos \nu \varphi \sin \varphi). \end{aligned} \quad (11,49)$$

После подстановки выражений v_{θ} и v_r в (11,47) мы получим

$$M = \frac{m v_{\infty}^2}{2B_0} \frac{r_{\infty}^2}{a^2} \left(1 - \frac{1}{\nu} \frac{\sin 2\nu \varphi}{\operatorname{tg} \varphi} + \frac{1}{\nu^2} \frac{\sin^2 \nu \varphi}{\operatorname{tg}^2 \varphi} \right). \quad (11,50)$$

Как видно из (11,42), переменная φ при $z \rightarrow 0$ равна $\frac{\pi}{2}$, а при $z \rightarrow \infty$ уменьшается до нуля. Подставляя эти значения φ в (11,50), легко убедиться, что M изменяется от нуля до величины

$$\mu = \frac{m v_{\infty}^2}{2B_0} \frac{r_{\infty}^2}{a^2}, \quad (11,51)$$

которая и будет магнитным моментом электрона в постоянном магнитном поле H_0 . Формула (11,51) отвечает на вопрос о величине приобретаемого частицей магнитного момента, в то время как формула (11,50) показывает, как эта величина устанавливается. На рис. (11,5) представлена зависимость M от z для сле-

дующих условий: $H_0 = 1000$ э ($B_0 = 0,1 \frac{эб}{м^2}$), $a = 10$ см, $r_\infty = 1$ см, скорость v_∞ соответствует энергии 100 эв (рис. 11,5 а) и 25 эв (рис. 11,5 б). Очевидно, скорость продольного движения изменяется незначительно, если выполняется неравенство

$$\frac{mv_\infty^2}{2} \gg \mu B_0 = \frac{mv_\infty^2}{2} \frac{r_\infty^2}{a^2}.$$

Таким образом, использованная нами замена скорости v_z постоянной величиной v_∞ допустима, если выполняется неравенство

$$\frac{r_\infty^2}{a^2} \ll 1. \quad (11,52)$$

Это условие не является необходимым, так как в большинстве случаев магнитный момент устанавливается раньше, чем поле достигает величины H_0 .

Если в магнитное поле (11,12) входит пучок электронов, последние будут приобретать различные моменты, зависящие от r_∞ . Если по достижении величины H_0 магнитное поле будет плавно увеличиваться, электроны будут испытывать отражение, причем в первую очередь будут отражаться периферические электроны входящего пучка. Критический радиус $r_{\infty \text{кр}}$ для данного магнитного барьера $H_m > H_0$ может быть найден из известного условия отражения

$$\begin{aligned} \mu B_m &= \frac{mv_\infty^2}{2B_0} \frac{r_{\infty \text{кр}}^2}{a^2} B_m = \frac{mv_\infty^2}{2}, \\ r_{\infty \text{кр}} &= a \cdot \sqrt{\frac{B_0}{B_m}} = a \sqrt{\frac{H_0}{H_m}}. \end{aligned} \quad (11,53)$$

§ 11.4. Пространственно-периодическое магнитное поле

Формулы, выведенные в § 11,2, мы используем теперь для анализа движения заряженных частиц в магнитных полях с пространственной модуляцией. Рассмотрим аксиально-симметричное поле, заданное распределением на оси:

$$H_z = H_0(1 + \alpha \cos \nu z). \quad (11,54)$$

При некоторых условиях магнитный момент заряда, движущегося в такой системе, не сохраняется даже при условии малой глубины модуляции ($\alpha \ll 1$), что может найти применение для инжекции заряженных частиц в магнитные ловушки.

В сущности, в основе любого способа наполнения стационарной магнитной ловушки лежит нарушение условий адиабатичности движения. В «Огре» магнитный момент резко изменяется в момент диссоциации молекулярного иона. Если ион создается путем ионизации нейтральных частиц в ловушке, магнитный момент μ возникает скачком и затем уже сохраняет свою величину.

Частицы можно вводить через магнитную пробку. Чтобы обеспечить захват частиц, магнитный момент частицы, вошедшей в ловушку, необходимо увеличить, иначе частица покинет ловушку тем же путем, каким вошла в нее. Для этой цели можно использовать высокочастотное поле. В случае циклотронного резонанса энергия циклотронного вращения частиц будет расти, при достаточном увеличении $\mu = \frac{\omega \perp}{B}$ частица не сможет выйти через магнитные пробки и окажется запертой в магнитной ловушке. К тому же результату приводит пространственная модуляция магнитного поля. Заряженная частица, движущаяся в поле (11,54), испытывает действие силы Лоренца

$$F = e[vB], \quad (11,55)$$

азимутальная составляющая которой равна

$$F_{\theta} = ev_r B_r. \quad (11,56)$$

Величина B_r вблизи оси определяется приближенной формулой

$$B_r = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\alpha B_0 \nu r}{2} \sin \nu z, \quad (11,57)$$

следовательно,

$$F_{\theta} = \frac{e \nu z \alpha B_0 \nu r}{2} \sin \nu z t. \quad (11,58)$$

Мы видим, что частица испытывает действие периодической силы. При совпадении частоты νz с собственной частотой заряда в данном магнитном поле

$$\nu z = \omega_H = \frac{e}{m} B_0 \quad (11,59)$$

наступает резонанс, и энергия циклотронного вращения начинает монотонно возрастать или убывать, в зависимости от фазы внешнего воздействия по отношению к циклотронному вращению. Если частица входит в пространственно-периодическое магнитное поле с начальной скоростью, направленной вдоль оси z , то на нескольких периодах $L = \frac{2\pi}{\nu}$ она приобретет достаточно большой момент μ , чтобы испытать отражение от пробки, закрывающей выход из ловушки. Эффект возрастает с увеличением расстояния от оси, так как сила F_{θ} пропорциональна r .

Описанный механизм аналогичен обычному циклотронному резонансу в магнитном поле, модулированном во времени. Единственное отличие состоит в том, что в последнем случае кинетическая энергия частицы возрастает, в то время как в пространственно-периодическом поле она остается неизменной, так что энергия циклотронного вращения возрастает за счет продольного

движения. Вектор скорости частицы в пространственно-периодическом поле сохраняет длину, но меняет направление, так что увеличение магнитного момента сопровождается торможением частицы. Сила торможения представляет собой продольную составляющую силы Лоренца (11,55). Вследствие уменьшения v_z условие резонанса (11,59) с течением времени перестает выполняться, что вызывает смещение фазы лоренцовой силы F по отношению к циклотронному вращению.

В достаточно длинной системе фазовый сдвиг будет возрастать до тех пор, пока не начнется обратный процесс — переход энергии из поперечной составляющей движения в продольную. Скорость v_z начнет теперь возрастать, пройдет через резонансное значение $\frac{\omega_H}{v}$, и весь цикл повторится. В длинной пространственно-периодической системе величина v_z испытывает колебания с периодом большим, чем время пролета частицей длины $L = \frac{2\pi}{v}$.

Величина $\omega_{\perp}$ также колеблется между определенными значениями. Таким образом, в данной системе передача энергии из продольного движения в поперечное может осуществляться лишь до определенного предела. Обычно, при глубине модуляции α порядка 0,1, этот предел несколько превосходит половину начальной энергии частицы [63, 64, 65].

Обратный процесс, переводящий энергию из поперечных степеней свободы в продольную, приводит к уходу частиц из ловушки, что составляет основную трудность в использовании пространственно-периодического поля для накопления частиц в ловушке.

Обратный процесс полностью исключить нельзя. Действительно, в консервативных динамических системах возможны лишь периодические движения, поэтому введенная извне частица по истечении более или менее длительного времени покинет ловушку. Однако не исключено, что время пребывания частицы в ловушке будет большим. В этом случае небольшой ток инжекции может создать значительную концентрацию частиц в ловушке. Можно представить себе стационарный режим, когда поток инжектируемых частиц равен потоку частиц, покидающих ловушку. «Добротность» такой системы будет характеризоваться отношением числа частиц в ловушке к потоку входящих частиц.

Определение «добротности» является, в сущности, статистической задачей. Действительно, при большом числе отражений от пробок движение частицы в ловушке очень сильно зависит от условий инжекции, поэтому даже при небольшой неопределенности в начальных условиях мы не в состоянии проследить за движением частиц в течение всего времени пребывания их в ловушке, тем более, что движение усложняется взаимодействием между частицами. В этих условиях имеют значение лишь усредненные характеристики движения.

К сожалению, теории, которая позволила бы определить время удержания частиц в ловушках подобного типа, пока не существует. Однако исходя из качественных соображений, можно указать основные направления, в которых должны вестись поиски системы с наибольшим временем удержания. Можно показать, что стремление к высокой «добротности» приводит к высоким требованиям к точности изготовления системы и к однородности инжектируемого пучка частиц по скоростям и направлениям. Резонанс должен осуществляться для узкой области значений v_z , чтобы вероятность обратного процесса, приводящего к вылету частиц, была по возможности малой. Острота резонанса может быть увеличена уменьшением глубины модуляции α магнитного поля. Однако вместе с α уменьшается доля энергии, которая может быть передана поперечной составляющей движения, поэтому уменьшение α выгодно лишь до некоторого предела. Для системы рассмотренного типа должно существовать оптимальное значение глубины модуляции, при котором время удержания достигает максимальной величины.

Допустим теперь, что одна из величин H_0 или L не постоянна, но изменяется вдоль оси z , причем зависимость ее от z такова, что для частиц с данными условиями входа на значительной длине системы выполняется условие резонанса (11,59). В такой системе, если она достаточно длинна, в поперечную составляющую движения может быть переведена в принципе любая часть энергии при сколь угодно малой глубине модуляции.

В качестве примера рассмотрим магнитное поле, распределение которого на оси дается выражением

$$H(z) = H_0(z) (1 - \alpha \cos \nu z), \quad (11,60)$$

где по-прежнему $\alpha \ll 1$ и $\nu = \frac{2\pi}{L} = \text{const}$, но $H_0(z)$ является медленно изменяющейся функцией координаты z . Мы должны определить зависимость $H(z)$, которая обеспечивает выполнение условия резонанса (11, 59).

Для простоты расчета предположим, что частицы инжектируются из пространства, в котором магнитное поле отсутствует, то есть обобщенный момент p_θ равен нулю. В этом случае уравнение движения для приосевого электрона запишется в виде

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{1}{4} \left(\frac{eB(z)}{m} \right)^2 r. \quad (11,61)$$

Пользуясь выражением (11,60) для $H(z)$, получим уравнение

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{\omega_H^2}{4} (1 - \alpha \cos \nu z)^2 r = 0, \quad (11,62)$$

которое вследствие условия $\alpha \ll 1$, можно переписать в виде

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{\omega_H^2}{4} (1 - 2\alpha \cos \nu z) r = 0, \quad (11,63)$$

где

$$\omega_H = \frac{e}{m} B_0.$$

Воспользуемся преобразованиями

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dz} v_z, \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d^2 r}{dz^2} v_z^2 + \frac{dr}{dz} \frac{dv_z}{dz} \approx \frac{d^2 r}{dz^2} v_z^2.$$

Слагаемое с $\frac{dv_z}{dz}$ мы отбросили, считая v_z медленно изменяющейся функцией z . Теперь из (11,63) легко получить уравнение траектории:

$$\frac{d^2 r}{dz^2} + \frac{\omega_H^2}{4v_z^2} (1 - 2\alpha \cos \nu z) r = 0. \quad (11,64)$$

Производя замену переменной

$$\nu z = 2x,$$

предполагая, что вследствие надлежащего выбора зависимости $H_0(z)$ величина $\frac{\omega_0}{\nu v_z}$ остается постоянной, мы получим уравнение Матье в канонической форме:

$$\frac{d^2 r}{dx^2} + (a - 2q \cos 2x) r = 0, \quad (11,65)$$

где

$$a = \frac{\omega_H^2}{\nu^2 v_z^2} \quad (11,66)$$

и

$$q = \alpha \frac{\omega_H^2}{\nu^2 v_z^2}. \quad (11,67)$$

При некоторых условиях уравнение Матье имеет неустойчивые решения, представляющие собой колебания с монотонно изменяющейся амплитудой. Эти условия даются известной диаграммой, представленной на рис. (5,5). Области неустойчивых решений заштрихованы. При малых q они расположены вблизи $a = 1, 4, 9, \dots$. Первая область неустойчивости ($a = 1$) соответствует ранее найденному резонансу, объяснение остальных областей неустойчивости также не вызывает затруднений.

При $a = 1$ неустойчивое решение может быть представлено в виде

$$r = A e^{\gamma x} \varphi(x) + B e^{-\gamma x} \varphi(-x), \quad (11,68)$$

где A и B — произвольные постоянные,

$\xi \approx \frac{a}{2}$ и $\varphi(x)$ — известная периодическая функция [66].

При некоторых начальных условиях $B = 0$, и решение представляется колебаниями с экспоненциально нарастающей амплитудой. Легко видеть, что этому решению соответствует движение заряда по винтовой линии, витки которой проходят через ось системы ($\rho_0 = 0$). Радиус витков растет как $e^{\frac{\alpha v z}{4}}$ и энергия циклотронного вращения $\omega_{\perp}$ увеличивается с расстоянием как $e^{\frac{\alpha v z}{2}}$.

Закон сохранения энергии

$$\frac{m}{2} (r_{\perp}^2 + v_{\theta}^2 + v_z^2) = \left(\omega_{\perp} + \frac{mv_z^2}{2} \right) = \frac{mv_0^2}{2}, \quad (11,69)$$

где $\frac{mv_0^2}{2}$ — полная кинетическая энергия частицы, вместе с условием

$$\frac{\omega_H}{v v_z} = \text{const} \quad (11,70)$$

образует систему уравнений, из которой можно найти как $v_z(z)$, так и функцию $H_0(z)$, обеспечивающую выполнение условия резонанса (11,59) для движущейся частицы.

В системе с точным резонансом значительная часть энергии частицы может быть переведена в поперечную составляющую движения при сколь угодно малой глубине модуляции. Обратный процесс при повторных прохождении частицы через систему в направлении инжекции почти исключается, так как зависимость $H_0(z)$ получена из условия точного резонанса для частицы, испытывающей торможение. Обратный процесс при движении по направлению к инжектору представляет главную опасность, однако здесь можно воспользоваться интересной идеей Р. С. Вингерсона [67], развитой затем в работе Х. Дрисера и др. [68]. Идея состоит в следующем.

Для частицы, движущейся со скоростью v_z , пространственно-периодическое магнитное поле подобно набегающей плоскополяризованной электромагнитной волне. Плоская волна, как известно, может быть разложена на две волны, поляризованные по кругу с векторами электрического поля, вращающимися в противоположных направлениях. В случае циклотронного резонанса частица эффективно взаимодействует с той составляющей, вектор электрического поля которой вращается в сторону циклотронного обращения частицы. Другая составляющая не играет никакой роли и может отсутствовать.

Поле, соответствующее волне с круговой поляризацией может быть создано с помощью специальной намотки проводников с током, либо с помощью ферромагнитной шины, навитой в виде

спирали на соленоид, создающий магнитное поле H_0 . Для частицы, движущейся вдоль системы, «спиральное» возмущение магнитного поля эквивалентно волне, поляризованной по кругу, причем направление вращения вектора электрического поля зависит от направления скорости v_z (рис. 11,6). Если при движении в направлении инжекции оно совпадает с направлением циклотронного вращения частицы, то при обратном движении вдоль оси направление вращения поля меняется на противоположное, и воздействие поля на частицу перестает быть эффективным.

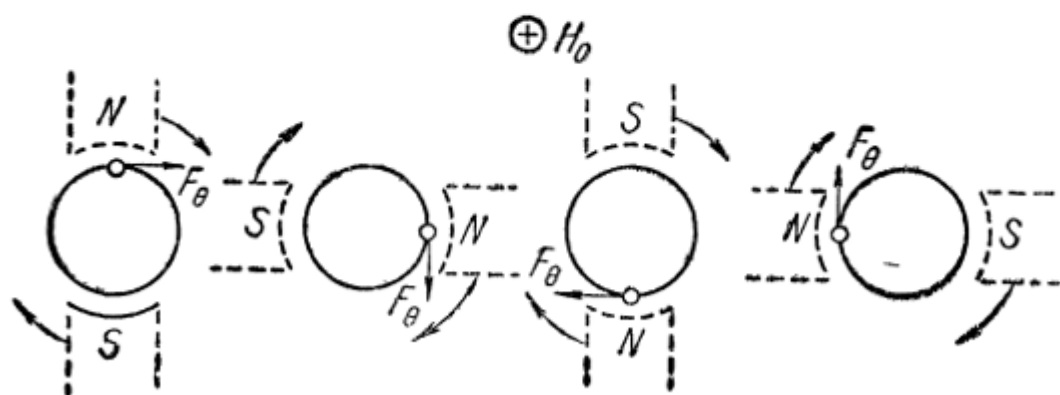


Рис. 11,6. Четыре сечения системы с винтовой модуляцией магнитного поля, расположенные друг от друга на расстоянии четверти периода модуляции.

В случае резонанса сила $F_\theta = \frac{e}{c} v_z H_r$ непрерывно ускоряет частицу на циклотронной орбите. Обратный процесс невозможен.

Таким образом, в «винтовом» магнитном поле обратное движение частицы не может приводить к уменьшению магнитного момента μ . Ловушка с винтовым полем была осуществлена в Лос-Аламосской лаборатории [68]. Измерения показали, что время жизни частицы в такой ловушке невелико. Оно соответствует приблизительно 70 отражениям от пробок. Это объясняется, вероятно, очень малой избирательностью системы к энергии частиц. Как показывают экспериментальные кривые, приведенные в работе [68], система эффективно перераспределяет энергию частиц в широком диапазоне энергии инжекции, составляющем не менее половины среднего ее значения. Ясно, что даже значительное изменение v_z при одном пролете частицы, не исключает эффективного взаимодействия при последующих пролетах в том же направлении, результатом чего может быть обратный процесс, приводящий к увеличению v_z за счет энергии поперечного движения и к вылету частицы из системы. Высокая избирательность является необходимым условием высокой «добротности» ловушки. Она может быть достигнута уменьшением глубины модуляции магнитного поля, что, однако, связано с необходимостью увеличения длины системы. Возможно, что значительное повышение избирательности к входным параметрам пучка даст переход от первой «широкой» области неустойчивости уравнения Матве к

гораздо более «узкой» второй области ($a = 4$) или даже к третьей ($a = 9$).

Возможности использования пространственно-периодического поля для инъекции заряженных частиц еще не вполне изучены. По мнению Е. В. Лаинга и А. Е. Робсона [69], этот метод должен применяться в сочетании с методом диссоциации, используемом в «Огре» и «ДСХ». Пространственно-периодическое поле позволит значительно увеличить эффективную длину ловушки и, следовательно, уменьшить критический ток молекулярных ионов, необходимый для достижения условий «выгорания» нейтронов в объеме ловушки. Другое важное преимущество этой системы они видят в том, что молекулярные ионы, не испытывавшие диссоциации, выходят через пробки и могут быть выведены на значительное расстояние от ловушки, в то время как в «Огре» они попадают на инжектор, который становится источником нежелательного нейтрального газа внутри ловушки. Указанное свойство системы с пространственно-периодическим полем также должно привести к уменьшению критического тока и физических размеров аппаратуры, необходимых для достижения условий выгорания.

Значительный интерес представляют исследования движения плазменных сгустков в пространственно-периодическом магнитном поле [70]. При таком движении возможны электронный и ионный резонансы, наблюдающиеся в покоящейся плазме в магнитном поле с временной периодической модуляцией. В результате происходит циклотронный «нагрев» — переход энергии продольного движения частиц в энергию поперечного движения. По замедлению сгустка можно видеть, что таким путем в поперечную составляющую движения переходит до 50% энергии продольного движения сгустка [70]. Возможно, что это явление позволит использовать пространственно-периодическое поле для инъекции плазменных сгустков в магнитные ловушки. Как было показано в § 6,3, при адиабатическом сжатии плазмы магнитным полем, вырастающим от $H(0)$ до $H(t)$, энергия частиц увеличивается от $\omega_{\perp}(0)$ до $\omega_{\perp}(t)$, причем

$$\omega_{\perp}(t) = \omega_{\perp}(0) \frac{H(t)}{H(0)}.$$

Температура сжатой плазмы тем выше, чем больше энергия поперечного движения до сжатия. Если ловушка перед сжатием заполняется путем инъекции плазменных сгустков, целесообразно по возможности увеличить энергию поперечного движения $\omega_{\perp}(0)$, для чего может быть использовано пространственно-периодическое поле. Заметим, кстати, что плазменные сгустки в этом поле могут очищаться от примесей, поскольку периодическое поле, в силу условия (11,59), эффективно замедляют частицы лишь с определенным значением $\frac{e}{m}$.

§ 11,5. Потоки заряженных частиц

Если в магнитном поле движется не одна частица, а достаточно плотный поток заряженных частиц, становится необходимым учет электрических и магнитных сил, действующих между частицами. Учет взаимодействия осуществляется введением самосогласованных полей.

В качестве примера мы кратко изложим теорию электронного потока в однородном магнитном поле, впервые описанного Л. Бриллюэном [71]. Электроны потока создают электрическое поле, действие которого представляется членом $e\varphi$ в потенциальной функции (10,25). В однородном по z цилиндрическом пучке это поле направлено по радиусу, так что электроны потока движутся в скрещенных полях E_r и $H_0 = H_z$ и, следовательно, дрейфуют в азимутальном направлении. В потоке Бриллюэна электроны движутся вдоль оси z и, кроме того, дрейфуют в азимутальном направлении, сохраняя постоянное расстояние от оси. Поперечные размеры потока сохраняются на всей его длине, что делает этот частный случай движения практически особенно важным.

Электроны начинают движение вне магнитного поля, и мы должны положить $p_\theta = 0$. Тогда условие отсутствия радиального движения может быть выполнено при специальном распределении поля в потоке, удовлетворяющем равенству

$$\chi = e\varphi - \frac{1}{2m} (eA_\theta)^2 = e\varphi - \frac{e^2}{2m} \frac{r^2 B_0^2}{4} = e\varphi_0 = \text{const}, \quad (11,71)$$

где φ_0 — потенциал на оси, отсчитываемый от потенциала катода. Отсюда следует, что поле E_r должно быть линейно связано с радиусом

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{m\omega_H^2}{4e} r. \quad (11,72)$$

Необходимое для этого распределение объемного заряда находится из уравнения Пуассона

$$\frac{en}{\varepsilon_0} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_r) = \frac{m\omega_H^2}{2e}. \quad (11,73)$$

Мы видим, что в потоке Бриллюэна объемный заряд распределен по сечению равномерно.

Из (11,31) и условия $\frac{dr}{dt} = 0$ видно, что все электроны вращаются около оси потока с одной и той же угловой частотой $\frac{\omega_H}{2}$, то есть весь поток вращается как целое. Энергия вращения $\frac{mr^2\omega_H^2}{8}$ возрастает от оси к периферии. Азимутальный дрейф должен

происходить за счет энергии продольного движения и, следовательно, казалось бы, периферические слои должны отставать от приосевых. Однако этого не происходит, так как внутренние слои также замедляются. Причиной замедления является понижение потенциала φ от периферии к оси. Если потенциал катода принять за начало отсчета, полная энергия электрона, равная сумме потенциальной и кинетической энергии

$$\frac{mv_z^2}{2} + \left[\frac{mr^2}{2} \left(\frac{\omega_H}{2} \right)^2 - e\varphi \right],$$

должна оставаться постоянной и равной для всех электронов нулю (то есть энергии в момент вылета из катода). Согласно (11,71), квадратная скобка в последнем выражении сохраняет постоянную для всех электронов величину, следовательно, остается постоянным и первое слагаемое $\frac{mv_z^2}{2}$. Таким образом, все электроны бриллюэновского потока движутся вдоль оси с одной и той же скоростью

$$v_z = \sqrt{2 \frac{e}{m} \varphi_0}, \quad (11,74)$$

где φ_0 — потенциал на оси пучка, отсчитываемый от потенциала катода.

Электростатические поля играют важную роль и в плазменных потоках. Допустим, например, что в поле, образующем магнитный барьер, движется плазменный сгусток. Пусть скорость сгустка на значительном расстоянии от магнитного барьера равна v . Кроме того, пусть электроны и ионы в поперечной плоскости движутся с одинаковыми магнитными моментами μ . Вопрос об отражении частицы с данным μ решается в зависимости от полной энергии. Если эта энергия достаточна, чтобы всюду обеспечить постоянство $\mu = \frac{\omega_{\perp}}{B}$, частица проходит через барьер, в противном случае — отражается. Ясно, что при условии равенства скоростей и моментов большей «проходимостью» обладают ионы, чем электроны. Высоту магнитного барьера H_m можно выбрать таким образом, чтобы условие отражения выполнялось для электронов и не выполнялось для ионов.

В очень разреженной плазме такой барьер вызовет разделение плазмы на электронную и ионную составляющие. В противоположном случае, когда плотность плазмы достаточно велика, ионная и электронная составляющие испытают лишь относительное смещение, продолжая движение как одно целое, связанное поляризационным полем. Под действием поля поляризации электроны будут следовать за ионами через магнитный барьер, получая от

ионов необходимую для этого энергию. Последняя частично будет переходить в ларморовское вращение электронов.

Как было замечено В. И. Векслером, подобный механизм может осуществлять генерацию релятивистских электронов при движении квазинейтральной плазмы в неоднородных магнитных полях в космических пространствах [72].

Если энергия ионов достаточна, чтобы обеспечить постоянство магнитного момента электронов $\mu = \frac{\omega_{\perp}}{B}$, плотный сгусток пройдет через барьер, в противном случае — целиком отразится. Считая, что энергия заключена главным образом в ионной компоненте, мы можем представить условие отражения плотного сгустка в виде неравенства

$$\omega_i < 2\mu B_m,$$

где ω_i — начальная энергия иона.

После прохождения магнитного барьера электроны под действием силы $-\mu \nabla B$ испытают ускорение, направленное вперед вдоль оси z , и опередят ионную составляющую плазмы, в результате чего возникнет поляризационное поле противоположного знака. Электроны начнут увлекать ионную составляющую, возвращая ей энергию, приобретенную ими на первой половине пути.

Однако мы исходим из весьма искусственных предположений. В большинстве случаев магнитные моменты частиц, составляющих плазму, не одинаковы, продольные скорости также обладают некоторым разбросом, причем распределение частиц по v_z и μ зависит от условий формирования сгустка и от условий входа его в магнитное поле.

Кроме того, в случае плотных плазменных сгустков определяющее значение может иметь магнитное взаимодействие. Если плазму рассматривать как проводящую жидкость, то ясно, что в плазменном сгустке, движущемся в неоднородном магнитном поле, появятся токи и возникнет сила взаимодействия тока с внешним полем. Задача о движении плазменного сгустка в неоднородном магнитном поле с учетом возникающих в сгустке токов в высшей степени важна. К сожалению, до настоящего времени полного решения ее еще нет. Сложность задачи заставляет прибегать к различным моделям плазменного сгустка, среди которых видное место занимает модель гибкого токового витка. Плазменный сгусток заменяется проводящим витком, способным сжиматься и растягиваться в радиальном направлении под действием электродинамических сил. Такое приближение позволяет правильно предсказать некоторые особенности взаимодействия сгустков с полями пробочной конфигурации [73].

Из простых качественных соображений явствует, что прохождение потока частиц через магнитный барьер облегчается с увеличением плотности потока. Действительно, токи, возникающие

в плазме, должны понижать энергетические барьеры, создаваемые внешними магнитными полями. Дж. Так использовал это соображение в своей идее наполнения плазмой магнитной ловушки [74]. Смысл идеи легко понять с помощью рис. 11,7. На рисунке изображена ловушка, образованная встречными магнитными полями. Поле такой ловушки спадает от краев к середине, что, как мы знаем, имеет по крайней мере два преимущества. Во-первых, плазма, заполняющая такую ловушку, обладает гидродинамической устойчивостью и, во-вторых, магнитное излучение плазмы в ней должно быть гораздо менее значительным, чем в ловушке типа магнитной бутылки.

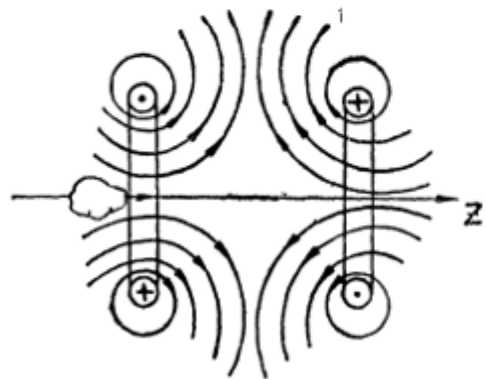


Рис. 11,7. Плотный плазменный сгусток должен «раздвигать» силовые линии на входе в магнитную ловушку.

данной скорости. При прорыве магнитной стенки должно происходить рассеяние частиц на границах области прорыва, в результате чего энергия направленного движения частично перейдет в энергию беспорядочного движения и на противоположную «стенку» ловушки попадет распавшийся и ослабленный сгусток, уже не способный осуществить прорыв. Рисунок (11,7) поясняет механизм прохождения сгустка и хаотизации движения его частиц в такой «энтропийной» ловушке. Плазменный сгусток в силу его диамагнетизма как бы раздвигает силовые линии, преграждающие вход в ловушку, и после схлопывания входного отверстия оказывается захваченным магнитным полем.

Конечно, приведенная картина представляет механизм прорыва в крайне упрощенном виде. Совершенно ясно, например, что приосевая часть плазменного потока будет проходить через входную пробку (рис. 11,7) при сколь угодно малой величине ρv_0^2 . Доля проходящих частиц зависит от конфигурации магнитного поля на входе. Чем более плавно магнитное поле нарастает, тем большей будет эта доля. Мы видим, что величина «критического ρv_0^2 », в сущности, не является критической

Вопрос о проницаемости магнитной пробки для плазменного сгустка должен решаться с учетом электрических сил, вызываемых поляризацией, и токов, индуцируемых в плазме. Весьма интересным и важным представляется также вопрос о степени хаотизации движения частиц, то есть о повышении энтропии плазмы,

проходящей через пробку, вопрос о том, как повышение энтропии зависит от условий инъекции и может ли оно быть достаточным для эффективного захвата плазменного сгустка ловушкой. Опыты, проведенные в Лос-Аламосской лаборатории, по-видимому, подтверждают основную мысль о возможности захвата плазмы «энтропийной» ловушкой, хотя некоторые результаты не находят объяснения в рамках изложенной выше упрощенной трактовки.

§ 11, 6. Плотный плазменный сгусток в магнитном поле

Зададимся вопросом, может ли плазменный сгусток двигаться в магнитном поле перпендикулярно силовым линиям? Ответ зависит от того, насколько велика плотность плазменного сгустка.

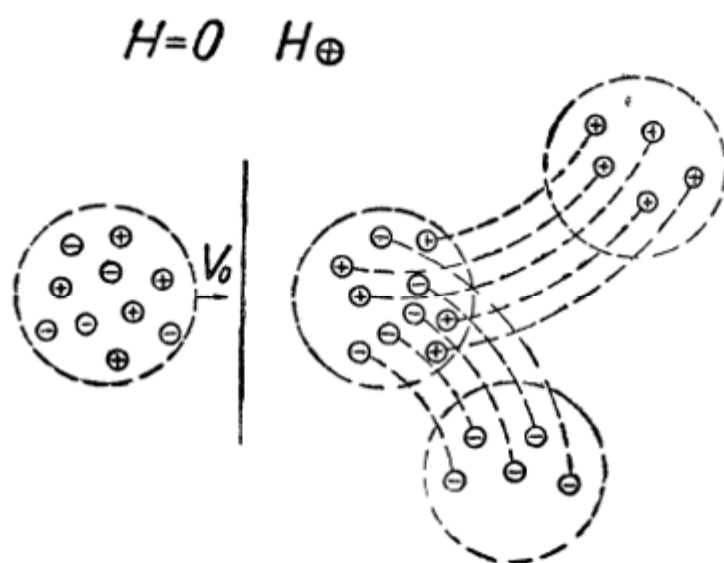


Рис. 11,8. В случае малой плотности плазменный сгусток в поперечном магнитном поле делится на электронную и ионную составляющие.

Если она очень мала, частицы разных знаков, описывая циклотронные орбиты, начнут отклоняться в противоположные стороны, что приведет к частичному или полному разделению сгустка на положительную и отрицательную составляющие (рис. 11,8). Поступательное движение сгустка в направлении, перпендикулярном магнитному полю, в этом случае невозможно.

С увеличением плотности сгустка становятся существенными электрические силы между положительной и отрицательной компонентами плазмы. Становится возможным рассматривать плазму, как проводящую квазинейтральную жидкость. При движении в магнитном поле сгусток такой жидкости должен поляризоваться, но в целом он нейтрален и, в первом приближении, не должен «замечать» магнитного поля. Действительно, в системе координат, в которой сгусток покоится, магнитное поле $\mathbf{H}$ создает электрическое поле $\mathbf{E} = [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}]$. Под действием этого поля $\mathbf{E}$ происходит

смещение зарядов в направлении, перпендикулярном к E и H (рис. 11,9), в результате чего поле E нейтрализуется. В системе сгустка частицы в среднем покоятся и не испытывают никаких сил. В лабораторной системе координат будет наблюдаться только электрическое поле, вызванное смещением зарядов. Равномерное движение со скоростью v_0 будет представляться как дрейф в скрещенных полях H и E :

$$v_0 = \frac{[EB]}{B^2}.$$

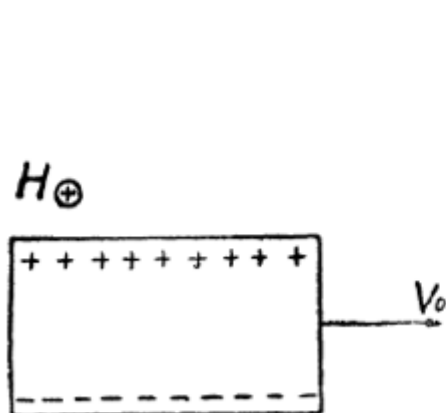


Рис. 11,9. Благодаря поляризации, плотный плазменный сгусток пересекает магнитное поле, не испытывая действия внешних сил.

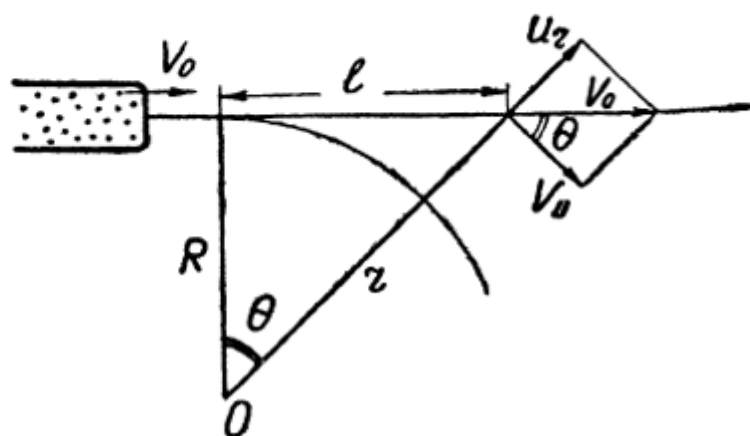


Рис. 11,10. Плотный плазменный сгусток в магнитном поле с криволинейными силовыми линиями.

Конечно, все это справедливо только для внутренних частей сгустка. Периферические электроны будут находиться в полях, меньших (по абсолютной величине), чем $E = [v_0 B]$, так как в поверхностном слое поляризационное поле должно постепенно спадать от E до нуля. Частицы, расположенные в поверхностном слое, будут испытывать дрейф со скоростью меньшей v_0 и, следовательно, будут отставать от сгустка, обнажая его внутренние слои. Сгусток, движущийся перпендикулярно магнитному полю, будет терять таким образом свои периферические частицы.

Рассмотрим теперь движение плотного сгустка в неоднородном магнитном поле.

Допустим, что в некоторой части пространства магнитные силовые линии прямолинейны, а затем изменяют направление. На рис. 11,10 изображена одна из силовых линий поля. Она имеет прямолинейную часть и закругление с центром кривизны в точке O . Пусть плазменный сгусток движется вдоль прямолинейной части к закруглению. Начальная скорость сгустка равна v_0 . Необходимо выяснить характер движения сгустка в пространстве с неоднородным магнитным полем. Мы приведем здесь решение задачи в дрейфовом приближении, предложенное Г. Шмидтом [75].

Введем цилиндрическую систему координат с осью z , проходящей через центр кривизны силовой линии перпендикулярно к плоскости рис. 11,10, и, пользуясь формулами (5,46) и (5,50), найдем составляющие скорости движения ведущего центра u . Очевидно первый член выражения (5,50) не ведет к разделению зарядов, второй дает дрейф в z -направлении и приводит к разделению зарядов. В результате появляется поле E_z , которое, в свою очередь, создает радиальный дрейф. Последний член перпендикулярен к H и к скорости изменения электрического дрейфа, направленного по r . Соответствующий дрейф направлен по z и также приводит к разделению зарядов. Пользуясь этими соображениями, легко получить уравнения для компонент скорости дрейфа:

$$u_z = -\frac{m}{erB} \left(v_{||}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right) + \frac{m}{e} \frac{1}{B} \frac{d}{dt} \left(\frac{E}{B} \right) \quad (11,75)$$

и

$$u_r = \frac{E}{B}. \quad (11,76)$$

Покажем теперь, что в плотном плазменном сгустке величина u_z мала и может не учитываться. Действительно, допустим, что плазменный сгусток имеет форму стержня с прямоугольным поперечным сечением. Если положительные и отрицательные заряды благодаря дрейфу вдоль оси z сместятся на расстояния d_+ и d_- , то возникнет поляризационное поле

$$E_z \approx -\frac{ne}{\epsilon_0} (d_+ - d_-).$$

Это соотношение после дифференцирования можно представить в виде

$$\frac{dE_z}{dt} = -\frac{ne}{\epsilon_0} (u_z^+ - u_z^-) \approx -\frac{ne}{\epsilon_0} u_z^+. \quad (11,77)$$

Последний член в правой части выражения (11,75) равен

$$-\frac{nm_i}{\epsilon_0 B^2} u_z^+.$$

Отношение этого члена к левой части уравнения (11,75) представляет собой диэлектрическую постоянную плазмы

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \frac{nm_i}{\epsilon_0 B^2} \approx \frac{nm_i}{\epsilon_0 B^2}. \quad (11,78)$$

Как было показано в главе 5, величина эта обычно значительно превосходит единицу, что и доказывает малость левой части уравнения (11,75). Пренебрегая ею, мы получаем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{E}{B} \right) = \frac{1}{r} \left(v_{||}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right). \quad (11,79)$$

Если энергия циклотронного вращения частиц составляет малую долю кинетической энергии, то есть $v_{\perp} \ll v_{\parallel}$, последнее соотношение примет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{E}{B} \right) = \frac{1}{r} v_{\parallel}^2$$

или

$$\frac{du_r}{dt} = \frac{v_{\parallel}^2}{r}. \quad (11,80)$$

Нетрудно убедиться, что уравнение (11,80) представляет движение по прямой, продолжающей прямолинейный участок силовой линии (рис. 11,9), со скоростью v_0 . Действительно, при таком движении компоненты скорости можно выразить через угол θ соотношениями

$$\begin{aligned} u_r &= v_0 \sin \theta, \\ v_{\parallel} &= v_0 \cos \theta. \end{aligned}$$

Обозначая буквой l путь, пройденный от точки касания до данной точки, заметим, что

$$l = r \sin \theta = \frac{r}{v_0} u_r,$$

откуда следует

$$v_0 = \frac{dl}{dt} = \frac{1}{v_0} \frac{dr}{dt} u_r + \frac{r}{v_0} \frac{du_r}{dt} = \frac{u_r^2}{v_0} + \frac{r}{v_0} \frac{du_r}{dt}.$$

Пользуясь равенством $v_0^2 = v_{\parallel}^2 + u_r^2$, последний результат можно представить в виде соотношения, совпадающего с (11,80).

Мы видим, что плазменный сгусток не следует за изгибами силовых линий магнитного поля. Он движется прямолинейно, «не замечая» этих изгибов.

Пренебрежение слагаемым $\frac{v_{\perp}^2}{2}$ в уравнении (11,79) можно оправдать в случае его малости. Часто считают, что циклотронное вращение связано с тепловым движением частиц, энергия которого $\frac{mv_{\perp}^2}{2}$ мала по сравнению с энергией их поступательного движения $\frac{mv_{\parallel}^2}{2}$. Но это может оказаться неверным, если, например, сгусток входит в магнитное поле из пространства, свободного от поля или если образование сгустка подобно маленькому взрыву (искра) в магнитном поле. Величина $v_{\perp}$ в этих случаях может быть весьма значительной. В этом случае вместо (11,80) мы будем иметь неравенство

$$\frac{du_r}{dt} > \frac{v_{\parallel}^2}{r},$$

из которого следует, что плазменный сгусток отклоняется от прямой, еще более удаляясь от силовой линии, вдоль которой он двигался в ее прямолинейной части. Необходимо отметить также, что с увеличением $v_{\perp}$ растет роль токов в плазменном сгустке, не учитываемых в рассмотренной выше задаче.

Существующий экспериментальный материал не достаточен для проверки вывода о том, что плотный сгусток «не замечает» изгибов магнитного поля. Конечно, при сравнении с экспериментальными данными важно убедиться, что условия эксперимента соответствуют предположениям задачи. Так, например, этот вывод не относится к случаю движения аксиально-симметричного сгустка в аксиально-симметричном поле с магнитным барьером. Действительно, направлению z рис. 11,10 (бинормаль силовой линии) соответствует азимутальное направление в нашем примере. Следовательно, дрейфу по z соответствует азимутальный дрейф. В силу осевой симметрии он не приводит к поляризации и, следовательно, не вызывает дрейфа, спрямляющего траектории ведущих центров.

Следует учесть еще один момент. При доказательстве малости левой части уравнения (11,75) мы исходили из предположения, что продольная составляющая поляризационного поля мала и может быть отброшена. Последний вывод, однако, далеко не всегда верен, так как даже малые электрические поля в направлении силовых линий магнитного поля могут вызывать значительные токи. Это особенно важно для достаточно протяженных сгустков. Если начало сгустка входит в неоднородное поле, в то время как конец находится за пределами поля, продольные потоки частиц могут снять поляризацию, вызываемую неоднородностью магнитного поля.

Действительно, вне магнитного поля токи могут замыкаться. Если даже сгусток и не выходит за пределы магнитного поля, поляризация на закруглении магнитных линий может существенно ослабляться движением зарядов вдоль силовых линий и распределением их на части сгустка, расположенные в данный момент в области однородного магнитного поля. В результате плазма будет следовать за изгибами силовых линий.

Это подтверждается опытами, проведенными Б. Г. Сафроновым и его сотрудниками еще в 1958 году [76]. Опыты показали, что плазменные сгустки с плотностью до $n \approx 10^{12} \text{ см}^{-3}$ могут загибаться в неоднородном поле на углы, превышающие $\frac{\pi}{2}$. Тогда же было открыто чрезвычайно интересное и практически важное свойство закругленных плазмоводов. Оказалось, что сгустки плазмы, получаемые из искровых источников Бостика [77], дающих большое число примесей (углерода, кислорода, меди), полностью очищаются, проходя через закругленную часть плазмовода (угол поворота

$0 = \frac{\pi}{2}$). Понять механизм очистки нетрудно: скорость дрейфа в неоднородном магнитном поле пропорциональна массе, поэтому примеси быстро удаляются от оси, а центральный плазменный шнур практически не смещается.

§ 11.7. Токи в плазменном сгустке

В предыдущих параграфах неоднократно отмечалась значительная роль токов в плазменных сгустках при движении их в неоднородных магнитных полях. Процессы, связанные с возникновением и затуханием токов весьма сложны. Мы попытаемся качественно описать их для простейшего частичного случая.

Рассмотрим неоднородность магнитного поля типа магнитного барьера в аксиально симметричной системе. В области барьера поле возрастает от H_1 до H_2 .

В однородном поле H_1 плазменный поток имеет сечение радиуса r_1 . За барьером в однородном поле H_2 на достаточно большом расстоянии от барьера, устанавливается стационарное движение плазмы, причем радиус сечения равен r_2 . Очевидно здесь возможны лишь «диамагнитные» токи, обеспечивающие равенство давлений на границе плазмы.

Ради простоты мы будем пренебрегать тепловым движением частиц в плазме и, следовательно, будем считать, что токи существуют только вблизи барьера.

Если бы вместо плазмы через магнитный барьер двигался металлический стержень, мы сказали бы, что в последнем благодаря изменению магнитного потока индуцируется ток $j_\theta = \sigma E_\theta$, который затем затухает вследствие омических потерь. Такое объяснение годилось бы и для плазмы с низкой проводимостью. Однако в случае высокой проводимости непосредственным результатом появления поля $E_\theta \sim \frac{\partial B_z}{\partial t}$ будет не ток j_θ , а радиальный дрейф частиц, приводящий к сжатию плазмы. Иным будет и механизм затухания тока: он не сводится к омическим потерям и не может характеризоваться величиной проводимости определенной нами в предыдущих главах (гл. 4 и гл. 7).

В случае, когда частота столкновений мала по сравнению с электронной циклотронной частотой, в качестве первого приближения следует полагать $\sigma = \infty$.

Если бы через магнитный барьер двигался твердый идеальный проводник ($\sigma = \infty$), то поле деформировалось бы таким образом, чтобы магнитный поток через сечение сверхпроводника оставался постоянным (рис. 11,11). То же в первый момент должно происходить при движении плазменного сгустка. Однако в последующие моменты плазма будет сжиматься.

Если отвлечься от продольных движений, то можно сказать, что процесс сжатия подобен θ — пинчу: под действием возрастающего магнитного поля граница плазмы движется к оси. Поверхностные электроны отбрасываются внутрь плазмы силой Лоренца, а ионы втягиваются внутрь плазмы полем объемного заряда электронов. Огибающая траекторий, описываемых при отражении заряженными частицами, определит направление поверхностного тока, величина которого соответствует перепаду магнитного поля при переходе через границу плазмы.

Предельно упрощая задачу, мы сможем произвести некоторые оценки.

Будем считать систему однородной по z , а магнитное поле — функцией времени, представленной на рис. (11, 12).

Будем полагать, что функция $H(t)$ удовлетворяет условию адиабатичности для электронов, и, как это часто бывает на практике, не удовлетворяет условию адиабатичности движения для ионов.

Энергию начального поперечного движения частиц плазмы будем считать малой, чтобы не усложнять задачу учетом теплового диамагнетизма.

До момента $t = 0$, магнитное поле как вне, так и внутри плазменного стержня равно H_1 , в последующее же время движение происходит так, как если бы электроны плазмы были «приклеены»

к магнитным силовым линиям. Отсюда следует, что поток магнитного поля через сечение плазмы остается постоянным.

При $t < 0$ электроны и ионы плазмы заполняют цилиндр радиуса r_1 , поля и токи в плазме отсутствуют. Увеличение маг-

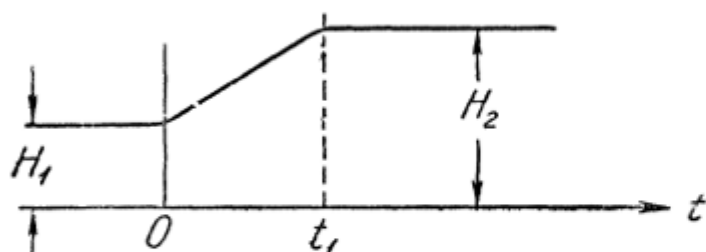


Рис 11,12 Зависимость магнитного поля, сжимающего плазму, от времени.

нитного поля можно представлять как сгущение силовых линий, приближение их к оси. Вместе с силовыми линиями начинают двигаться электроны плазмы, в то время как ионы, в силу их большой массы, почти не смещаются в плоскости, перпендикулярной к оси. В результате происходит разделение зарядов и в некотором поверхностном слое δ возникает электрическое поле E_r . Если бы масса ионов была бесконечной, сжатие электронного газа прекратилось бы, плотность осталась бы равной n_1 и магнитное поле — H_1 , как в твердом идеальном проводнике. По истечении

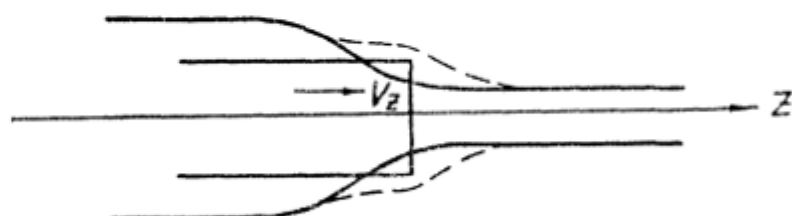


Рис. 11,11. Твёрдый идеальный проводник деформирует магнитное поле

времени t_1 перепад магнитного поля на поверхности плазмы достиг бы величины $H_2 - H_1$. Этому перепаду соответствует поверхностный ток

$$I_0 = (H_2 - H_1), \quad (11,81)$$

который создается электронами поверхностного слоя δ , дрейфующими со скоростью

$$v_0 = \frac{E_r}{B_{\text{среднее}}} = \frac{E_r}{\frac{1}{2}(B_2 + B_1)}. \quad (11,82)$$

Мы можем написать

$$I_0 = ne\delta v_0,$$

что приводит к соотношению

$$ne\delta E_r = \frac{\mu_0}{2} (H_2^2 - H_1^2). \quad (11,83)$$

Если для δ принять приближенное выражение

$$\delta = \frac{c}{\omega_0} = \frac{c}{\left(\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

то приведенные выше формулы позволят оценить все величины, характеризующие процесс. Найдем, например, энергию дрейфового движения одного электрона в плазме с плотностью n :

$$\omega_e = \frac{m}{2} v_0^2 = \frac{m}{2} \left(\frac{I_0}{ne\delta} \right)^2 = \frac{\mu_0}{2n} (H_2 - H_1)^2.$$

Энергия, приходящаяся на один электрон, растет с уменьшением плотности плазмы.

В случае бесконечной массы ионов в предположениях нашей задачи ток I_0 никогда бы не исчез. Уменьшение тока в реальной плазме происходит вследствие движения ионов под действием поля E_r . Плазма постепенно сжимается до размера $r_2 = r_1 \sqrt{\frac{H_1}{H_2}}$, тогда разность между внешним и внутренним полями исчезает и величины E_r и I_0 обращаются в нуль.

Допустим вначале, что время протекания всех переходных процессов t_2 велико по сравнению с временем нарастания магнитного поля t_1 . Тогда сразу же после установления вне плазмы поля H_2 состояние системы описывается приведенными выше формулами, а затем происходит сжатие плазмы и увеличение поля H' внутри плазмы. Вместе с тем убывает ток

$$I_0 = (H_2 - H').$$

Скорость движения границы плазмы $v_r = \frac{dr}{dt}$ можно оценить из условия равенства магнитного давления импульсу, передаваемому плазме через единицу поверхности в одну секунду:

$$2m_i v_r^2 n = \frac{\mu_0}{2} (H_2^2 - H'^2). \quad (11,84)$$

Здесь учтен лишь импульс, передаваемый ионам. Каждый ион в поле E_r приобретает скорость, равную $2v_r$ и погружается внутрь плазмы, унося импульс $2m_i v_r$. На поверхности плазмы оказываются новые ионы, находившиеся до этого во внутреннем слое. Затем и эти ионы отразятся и войдут в поток частиц, направляющихся к оси плазменного стержня. Строгий расчет потребовал бы знания того, как будет продолжаться движение в плазме, возникнет ли ударная волна, или ионы будут двигаться без взаимодействия с другими частицами и достигнут стенок плазменного стержня в диаметрально противоположных точках, или может быть они опишут циклотронные орбиты и снова выйдут на поверхность. Ограничиваясь задачей качественного описания, мы будем предполагать, что плотность плазмы и магнитный поток в каждый момент времени можно считать равномерно распределенными в сечении стержня. В этом случае выполняются соотношения,

$$nr^2 = n_1 r_1^2 \quad (11,85)$$

$$H' r^2 = H_1 r_1^2, \quad (11,86)$$

и мы с помощью этих соотношений из (11,84) получаем

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{H_1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{m_i n_1}} \frac{r_1}{r} \left(\frac{H_2^2 r^4}{H_1^2 r_1^4} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (11,87)$$

Радиус плазменного стержня уменьшается до величины

$$r_2 = \sqrt{\frac{H_1}{H_2}} r_1,$$

при которой магнитное поле внутри плазмы становится равным внешнему магнитному полю H_2 . Время сжатия равно

$$t_2 = \frac{r_1}{H_2} \sqrt{\frac{n_1 m_i}{\mu_0}} \ln \left[\frac{H_2}{H_1} + \sqrt{\frac{H_2^2}{H_1^2} - 1} \right]. \quad (11,88)$$

Если, например, $H_1 = 10^3 \text{ э} \left(\frac{1}{4\pi} \cdot 10^6 \frac{\text{а}}{\text{м}} \right)$, $H_2 = 2 \cdot 10^3 \text{ э} \left(\frac{1}{4\pi} \times \times 2 \times 10^6 \frac{\text{а}}{\text{м}} \right)$, $r_1 = 4 \text{ см}$, $n_1 = 10^{14} \text{ см}^3$, то для ионов водорода формула (11,88) дает $t_2 = 1,3 \cdot 10^{-7} \text{ сек}$.

Затухание тока сопровождается передачей энергии ионам. В конечном счете энергия эта перейдет в тепло, однако, как мы

видим, затухание не может быть описано как омические потери и скорость затухания не характеризуется величиной электронной проводимости σ .

В экспериментах с плазменными сгустками время изменения магнитного поля t_1 обычно бывает больше найденного нами времени установления t_2 . В этом случае в уравнение (11,87) вместо постоянной величины H_2 должна входить известная функция времени $H(t)$, которая в течение времени t_1 возрастает от H_1 до H_2 .

Обозначим

$$x = \frac{r^2}{r_1^2}, \quad h = \frac{H(t)}{H_1}, \quad \tau = \frac{H_1}{r_1} \sqrt{\frac{\mu_0}{n_1 m_i}} t.$$

Тогда уравнение (11,87) примет вид

$$x' = (h^2 x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}, \quad (11,89)$$

где

$$x' = \frac{dx}{d\tau}.$$

Найдем приближенное решение этого уравнения в случае медленно изменяющегося магнитного поля ($t_1 \gg t_2$) и определим изменение тока I_0 со временем. В новых обозначениях

$$I_0 = H(t) - H' = H_1 \left(h - \frac{1}{x} \right)$$

Из (11,89)

$$x = \frac{\sqrt{x'^2 + 1}}{h}, \quad (11,90)$$

следовательно,

$$I_0 = H_1 h \left[1 - (x'^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \right].$$

При медленном возрастании магнитного поля величину x' можно считать малой по сравнению с единицей, поэтому

$$I_0 \approx H_1 h \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2} x'^2 \right) \right] = \frac{1}{2} H_1 x'^2 h.$$

Из (11,90) при $x' \ll 1$ следует $x \approx \frac{1}{h}$

и $x' = -\frac{h'}{h^2}$, таким образом

$$I_0 \approx \frac{H_1}{2} \frac{h'^2}{h^3}. \quad (11,91)$$

Если, например,

$$h(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } \tau < 0, \\ 1 + a \left(1 - \cos \frac{\pi\tau}{\tau_1}\right) & \text{при } 0 < \tau < \tau_1, \\ 1 + 2a & \text{при } \tau > \tau_1, \end{cases}$$

то для I_θ мы получаем

$$I_\theta = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau < 0 \\ \frac{H_1 a^2 \pi^2 \sin^2 \frac{\pi\tau}{\tau_1}}{2\tau_1^2 \left[1 + a \left(1 - \cos \frac{\pi\tau}{\tau_1}\right)\right]^3} & \text{при } 0 < \tau < \tau_1, \\ 0 & \text{при } \tau > \tau_1. \end{cases}$$

Измерения тока в плазменном сгустке, проходящем через магнитный барьер, хорошо согласуются с результатами приведенного расчета.

Работа сжатия, приходящаяся на единицу длины плазменного сгустка, выражается интегралом

$$\omega = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_0}{2} [H^2(t) - H'^2] 2\pi r dr. \quad (11,92)$$

В случае быстрого нарастания магнитного поля ($t_1 \ll t_2$) эта величина равна

$$\omega = \pi r_1^2 \frac{\mu_0 H_1^2}{2} \left(1 - \frac{H_2}{H_1}\right)^2. \quad (11,93)$$

В противоположном случае ($t_1 \gg t_2$)

$$\begin{aligned} \omega &= \pi r_1^2 \frac{\mu_0 H_1^2}{2} \int \frac{(h^2 x^2 - 1) dx}{x^2} \approx \pi r_1^2 \frac{\mu_0 H_1^2}{2} \int \frac{x'^2}{x^2} dx \approx \\ &\approx \pi r_1^2 \frac{\mu_0 H_1^2}{2} \int_0^{\tau_1} \frac{(h')^3}{h^4} d\tau. \end{aligned} \quad (11,94)$$

Мы видим, что энергия сжатия сильно зависит от скорости нарастания магнитного поля:

$$h' = \frac{d}{d\tau} \frac{H(t)}{H_1} = \frac{r_1}{H_1^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{n_1 m_i}} \frac{dH}{dt}.$$

При $h' \rightarrow 0$ работа сжатия приближается к нулю, как и следовало ожидать, поскольку мы предполагаем, что энергия поперечного движения частиц пренебрежимо мала. Заметим, что последнее несовместимо с допущением о больших значениях работы сжатия, так как работа сжатия определяет величину

энергии, переходящей в радиальное движение ионов и затем в тепловое движение.

В случае $H = H(t)$ работа совершается магнитным полем, в то время как при движении сгустка через постоянный во времени магнитный барьер, источником энергии является продольное движение сгустка. Величина ω в этом случае определяет торможение сгустка, при котором часть поступательной энергии ионов переходит в энергию поперечного движения. Строгий анализ движения сгустка через магнитный барьер нуждается в учете продольных поляризационных полей, что существенно усложняет задачу.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Шварцшильд. Строение и эволюция звезд, ИЛ, М., 1961.
2. Д. А. Франк-Камснецкий. Физические процессы внутри звёзд, Физматгиз, М., 1959.
3. Р. Пост. Применение физики высокотемпературной плазмы к осуществлению управляемых реакций слияния атомных ядер, УФН, 61, 491 (1957).
4. Б. А. Трубников. Излучение плазмы в магнитном поле, ДАН СССР, 118, 913 (1958).
5. Б. А. Трубников, А. Е. Бажанова. Магнитное излучение слоя плазмы. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, т. III, 191, АН СССР, 1958.
6. Дж. Д. Лоусон. Некоторые критерии для энергетического термоядерного реактора. Управляемые термоядерные реакции, стр. 12, Атомиздат, М., 1960.
7. Л. А. Арцимович. Управляемые термоядерные реакции, Физматгиз, М., 1961.
8. В. С. Василевский, В. С. Муховатов, В. С. Стрелков, Н. А. Явлинский. Торондальная установка с сильным магнитным полем «Токомак 2», ЖТФ, XXX, 1137 (1960).
9. Е. П. Горбунов, Г. Г. Долгов-Савельев, В. С. Муховатов, В. С. Стрелков, Н. А. Явлинский. Исследование тороидального разряда в сильном магнитном поле, ЖТФ, XXX, 1152 (1960).
10. Р. Пост. Высокотемпературная плазма и управляемые термоядерные реакции, ИЛ, М., 1961.
11. M. N. Rosenbluth, A. N. Kaufman. Plasma diffusion in a magnetic field, Ph. Rev. 109, 1 (1958).
12. В. Е. Голант и А. И. Жилинский. Исследование диффузионного распада плазмы в магнитном поле, ЖТФ, XXXII, 1313 (1962).
13. В. В. Kadomtsev, A. W. Nedospasov. Instability of the positive column in a magnetic field and the «anomalous» diffusion effect, Nuclear Fusion, Plasma Physics, 1, 230 (1960).
14. N. D'Angelo, N. Rynn. Diffusion and recombination of highly ionized cold plasma in magnetic field, Phys. Fluids 4, 1303 (1961).
15. В. Л. Гинзбург. Распространение волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
16. Л. Спитцер. Физика полностью ионизованного газа, ИЛ, 1957.
17. Л. И. Мандельштам. Полное собр. трудов, т. IV, АН СССР, 1955.
18. А. Зоммерфельд. Строение атомов и спектры, т. I, ГИТТЛ, М., 1956.
19. С. Н. Родионов. Экспериментальная проверка поведения заряженных частиц в адиабатической ловушке, Атомная энергия, 6, 623 (1959).
20. G. Gibson, W. Jordan, E. Lauer. Containment of positrons in a mirror machine, Phys. Rev. Letters 5, 141 (1960).
21. Г. И. Будкер. Термоядерные реакции в системе с пробками. К вопросу о непосредственном преобразовании ядерной энергии в электрическую.

Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, т. III, АН СССР, 1958.

22. Р. Пост. Итоги исследований на пиротронах (ловушках с магнитными пробками) в лаборатории излучений Калифорнийского университета. Труды Второй Женевской конференции по мирному использованию атомной энергии, доклады иностранных ученых, М., 1959.

23. R. Post, R. Ellis, F. Ford, M. Rosenbluth. Stable confinement of a high-temperature plasma, *Phys. Rev. Letters* 4, 166, (1960).

24. F. Coensgen, W. Cummins, W. Nexsen, A. Sherman. Evidence of containment of a 3 kev deuterium plasma, *Phys. Rev. Letters*, 5, 459 (1960).

25. И. В. Курчатов. О некоторых работах Института атомной энергии Академии Наук СССР по управляемым термоядерным реакциям, «Атомная энергия», 5, 105 (1958).

26. И. Н. Головин, Л. И. Артеменков, Г. Ф. Богданов, Д. А. Панов, В. И. Пистуневич, Н. Н. Семашко. О работах на термоядерной экспериментальной установке ОГРЕ, УФН, 73, 685, 1961.

27. С. Б. Пикельнер. Основы космической электродинамики, Физматгиз, М., 1961.

28. L. Tonks. Trajectory-wise analysis of cylindrical and plane plasmas in a magnetic field in a magnetic and without collisions, *Phys. Rev.*, 113, 400 (1959).

29. G. Chew, M. Goldberger, F. Low. The Boltzman equation and the one-fluid hydromagnetic equation in the absence of particle collisions, *Proc. Roy. Soc. A*, 236, 112 (1956).

30. А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев. Устойчивость плазмы, УФН, 73, 701 (1961).

31. M. Cruskal, M. Schwarzschild. Some instabilities of completely ionised plasma, *Proc. Roy. Soc.* 223A, 438 (1954).

32. В. Д. Шафранов. Об устойчивости цилиндрического газового проводника в продольном магнитном поле, «Атомная энергия» 5, 38 (1956).

33. М. Розенблют, К. Лонгмайр. Стабильность плазмы, ограниченной магнитным полем, Пробл. совр. физики, № 1, 99 (1958).

34. С. Ю. Лукьянов, И. М. Подгорный. Магнитная ловушка с встречными магнитными полями, «Атомная энергия» 11, 336, (1961).

35. Б. Б. Кадомцев. О турбулентности плазмы в ловушке с магнитными пробками, ЖЭТФ, 40, 328 (1961).

36. М. С. Иоффе, Р. И. Соболев, В. Г. Тельковский, Е. Е. Юшманов. Об уходе плазмы из ловушки с магнитными пробками, ЖЭТФ, 40, 40, (1961).

37. Б. Сайдем. Устойчивость самосжатого линейного разряда, Труды Второй Женевской конференции по мирному использованию атомной энергии, доклады иностранных ученых, т. I, М., 1959.

38. А. И. Ахиезер, Я. Б. Файнберг. О взаимодействии пучка заряженных частиц с электронной плазмой, ДАН СССР, LXIX, 555 (1949).

39. А. И. Ахиезер, Я. Б. Файнберг. О высокочастотных колебаниях электронной плазмы, ЖЭТФ, 21, 1262 (1951).

40. D. Bohm, E. P. Gross. Theory of plasma oscillations, *Phys. Rev.* 75, 1851, 1864 (1949).

41. А. А. Веденов, Р. З. Сагдеев. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, т. 3, стр. 278, АН УССР, 1958.

42. S. Chandrasekhar, A. N. Kaufman, K. M. Watson. The stability of the pinch. *Proc. Roy. Soc. A* 245, 435 (1958).

43. А. Б. Киценко, К. Н. Степанов. О неустойчивости плазмы с анизотропным распределением скоростей ионов и электронов, ЖЭТФ, 38, 1840 (1960).

44. Л. А. Арцимович, А. М. Андрианов, Е. И. Доброхотов, С. Ю. Лукьянов, И. М. Подгорный, В. Н. Синицын, Н. В. Филиппов. Исследование импульсных разрядов с большой силой тока, «Атомная энергия», 3, 76, (1956).

- 45 М А Леонтович С М Осовец О механизме сжатия тока при быстром и мощном газовом разряде, «Атомная энергия», 3, 81 (1956)
- 46 Дж Г Аллен Элементарная теория быстрого пинчевого разряда, Управляемые термоядерные реакции стр 37, Атомиздат, М, 1960
- 47 М Розенблют Динамика сжимающегося газа, Магнитная гидродинамика Атомиздат, 1958
- 48 Л Д Ландау и Е М Лифшиц Теория сплошных сред, ГИИТЛ, М, 1957
- 49 А И Ахиезер Г Я Любарский и Р В Половин Об устойчивости ударных волн в магнитной гидродинамике, ЖЭТФ, 35, 731 (1958)
- 50 K Boyer, W C Elmore, E M Little, W E Quinn and J L Tuck Studies of plasma heated in a fast rising axial magnetic field (Scylla), Phys Rev 119, 831 (1960)
- 51 И М Золототрубов, Ю М Невиков, Н М Рыжов, И П Скоблик и В Т Толок Магнитное сжатие плазмы ЖГФ 31, 518 (1961)
- 52 N Rostoker Fission of a hot plasma Phys Rev, 124 965 (1961)
- 53 T B Taylor and K V Roberts Rotational transforms in a toroidal fast compression Experiment, Phys Rev Letters, 8, 52 (1962)
- 54 J G Linhart Plasma Physics, Amsterdam, 1960
- 55 Л Д Ландау О колебаниях электронной плазмы, ЖЭТФ 16, 574 (1946)
- 56 С Рамо и Дж Уиннери Поля и волны в современной радио технике, ГИИТЛ М, 1952
- 57 Я Б Файнберг Ускорение частиц в плазме, «Атомная энергия», 6, 431 (1959)
- 58 Т Стикс, Р Палладино Эксперименты по ионному циклотронному резонансу, Труды Второй Женевской конференции по мирному использованию атомной энергии, доклады иностранных ученых, т I, М, 1959
- 59 Я Б Файнберг Взаимодействие пучков заряженных частиц с плазмой, «Атомная энергия», 11, 313 (1961)
- 60 М Д Райзер и И С Шпигель Исследование плазмы при помощи микрорадиоволн, УФН, 64, 641 (1958)
- 61 J E Osher Trapping and prolonged confinement of an energetic deuterium plasma in a static cusped magnetic field, Phys Rev Letters, 8, 305 (1962),
- 62 Н С Зинченко Курс лекций по электронной оптике, Изд во Харьковского ун та, Харьков, 1961
- 63 В Д Федорченко, Б Н Руткевич, Б М Черный Движение электрона в пространственно периодическом магнитном поле ЖТФ, XXIX, 1212 (1959)
- 64 К Д Синельников, Б Н Руткевич, В Д Федорченко Движение заряженных частиц в пространственно периодическом магнитном поле, ЖТФ XXX, 249 (1960)
- 65 К Д Синельников, В Д Федорченко, Б Н Руткевич, Б М Черный, Б Г Сафронов Исследование магнитной ловушки с объемным зарядом, ЖТФ, XXX, 256 (1960)
- 66 Н В Мак Лахлан Теория и приложения функций Матье, Ил, М, 1953
- 67 R C Wingerson «Corkscrew», a Device for Changing the Magnetic Moment of charged Particles in a Magnetic Field, Ph Rev 116, 446 (1961)
- 68 H Dreicer, H J Karr, E A Knapp, J A Phillips, E J Stovall, Jr and J L Tuck Cyclotron Resonance in the static Magnetic Field of a Helix, Nuclear Fusion, Supplement, Part 1 299 (1962)
- 69 E W Laing and A E Robson Non adiabatic Magnetic Traps, J Nucl Energy, Part C Plasma Phys, 3, 146 (1961)
- 70 А А Калмыков, Н И Терешин, С А Трубочанинов, Б Г Сафронов Взаимодействие плазменных сгустков с пространственно-периодическим магнитным полем, ЖТФ, XXXII, 579, 1962

71. L. Brillouin. A Theorem of Larmor and its importance for electrons in magnetic field, Phys. Rev. 67, 260 (1945).

72. В. И. Векслер. О новом механизме генерации релятивистских электронов в космическом пространстве. ДАН СССР, 118, 263 (1958).

73. К. Д. Синельников, Н. А. Хижняк, Б. Г. Сафронов. О движении гибкого токового витка в неоднородном магнитном поле, физика плазмы и проблема управляемого термоядерного синтеза, вып. 1, Изд-во АН УССР, Киев, 1962.

74. J. L. Tuck. Plasma jet piercing of magnetic fields and entropy trapping into a conservative system, Phys. Rev. Letters, 3, 313 (1959).

75. G. Schmidt. Plasma Motion across magnetic fields, Phys. Fluids, 3, 961 (1960).

76. Б. Г. Сафронов, В. С. Войцеля, И. И. Коновалов. Получение чистой водородной плазмы, ЖТФ, XXXII, 678 (1962).

77. К. Д. Синельников, Б. Г. Сафронов, И. Т. Гужовский, Ю. Г. Яременко. Распространение плазменных сгустков в свободном от полей пространстве. Физика плазмы и проблема управляемого термоядерного синтеза, вып. 1, Изд-во АН УССР, Киев, 1962.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адиабатические инварианты 62, 88
 Адиабатическое сжатие 63, 89
 Адиабата Гюгонио 157
 Альфвеновская скорость 65, 112, 180
 Амбиполярная диффузия 50, 51
 Анизотропия функции распределения 117, 150
 Безэлектродный разряд 80
 Белые карлики 14
 Бессилое магнитное поле 105
 Больцмана (кинетическое) уравнение 114
 Ведущий центр 50
 Вмороженность магнитного поля 101
 Водородная бомба 20
 Волны Альфвена 27, 180
 Высокочастотный нагрев плазмы 191—195
 Гидродинамическая модель плазмы 97, 124
 Главная последовательность 13
 Дебаевский радиус 39, 40
 Деформация изгиба 129
 Деформация типа перетяжки 130
 Диагностика плазмы 196—199
 Диаграмма Ресселла Герцшпрунга 13
 Диамагнетизм плазмы 66
 Дивертор 96
 Динамический пинч 164
 Динамическое трение 46
 Дисперсионные уравнения, 111, 132, 179, 188
 Диссоциация молекулярных ионов 90
 Диффузия 46, 121
 Диэлектрическая проницаемость плазмы 65
 Допплер-эффект 184
 Дрейф в неоднородном магнитном поле 73—75
 Дрейф в скрещенных электрическом и магнитном полях 59
 Зоны излучения повышенной интенсивности 81
 Идеальные магнитные ловушки 79
 Ионно-циклотронные колебания 123
 Ионизация 35
 Квазинейтральность 39
 Кинетические неустойчивости 149—155
 Кинетическое уравнение 114
 Конвективная неустойчивость 138—142
 Конус потерь 85
 Красные гиганты 14
 Критерий Крускала—Шафранова 95, 145
 Критерий Лоуссона 33
 Критерий Сайдема 146
 Лангмюровская частота 40, 174
 Ларморовский радиус 48, 58
 Линейчатое излучение 37
 Ловушка со встречными полями 137, 222
 «Магнитная накачка» 191
 Магнитное давление 104
 Магнитные ловушки 76
 Магнитные пробки 58—70
 Магнитный момент 61
 Магнитогидродинамические волны 97, 109—114
 Магнито тормозное излучение 30
 «Натяжение магнитных силовых линий» 105
 «Необыкновенная волна» 181
 «Нова» 171
 Обобщенный закон Ома 119
 Обращенный пинч 147
 Обыкновенная волна 181
 Огра» 91
 Остроконечная геометрия 137
 Парметрический резонанс 63, 71, 215
 Парные соударения 38
 Перезарядка 36
 Перестановочные неустойчивости 140
 Пинч-эффект 128
 Плазменная пушка 200
 Плазменный сгусток 199—201
 Поверхностная неустойчивость 130—137
 Поля с осевой симметрией 201—211
 Поток Бриллюэна 219
 Пространственно-периодическое магнитное поле 211—218

- Преобразование поворота 93
Проводимость плазмы 53
Протонный цикл 18
Прямой разряд 127
Пучковая неустойчивость 184
Радиационные потери 28—31
Реакция синтеза 21
Ротационное преобразование 93
Самосжатый разряд 127
Сверхновые 17
Сгустки плазмы 199
Сжатие плазмы 87, 88, 166
Скорость дрейфа 59, 75
Случайные блуждания 44
Специфическое затухание 182
Стабилизация пинчевого разряда 142—149
Стелларатор 92
Столкновения между частицами плазмы 41
«Сцилла» 166
Ток перевала 91
Тормозное излучение 28
Тороидальное магнитное поле 76
Туннельный эффект 6, 22
Турбулентность 195
Убегающие электроны 57
Углеродный цикл 18
Ударная адиабата 160
Ударные волны 157—160
Уравнения магнитной гидродинамики 99, 119
«Фараос» 171
Флаттеры 148
Холловский ток 119
Циклотронная частота 30 58
Циклотронный резонанс 64
Частота столкновений 54
Экзотермические реакции 7
Электромагнитные волны в плазме 178
Эндотермические реакции 7
Энергия связи
Эффективные сечения DD и DT реакций 24
Явление Фарадея 181
-

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие	3
Глава 1. Введение	5
Глава 2. Источники энергии звезд и термоядерные реакции	11
Глава 3. Эффективные сечения и энергетический баланс при термоядерных реакциях	20
§ 3,1. Ядерные реакции	20
§ 3,2. Излучение плазмы	28
§ 3,3. Об условиях положительного энергетического выхода	31
§ 3,4. Роль нейтральных частиц и примесей	34
Глава 4. Столкновения и релаксационные процессы	38
§ 4,1. Дебаевский радиус	39
§ 4,2. Столкновения между частицами плазмы	41
§ 4,3. Диффузия	46
§ 4,4. Проводимость плазмы без магнитного поля	51
Глава 5. Движение заряженной частицы в электрическом и магнитном полях	58
§ 5,1. Приближение ведущего центра и адиабатический инвариант	58
§ 5,2. Диамагнетизм плазмы	66
§ 5,3. Магнитные пробки	68
§ 5,4. Параметрическое возбуждение колебаний частиц плазмы	70
§ 5,5. Дрейф заряженных частиц в неоднородном магнитном поле	73
Глава 6. Удержание заряженных частиц магнитными полями	76
§ 6,1. Примеры магнитных полей	76
§ 6,2. Заряды в магнитном поле Земли	81
§ 6,3. Ловушка с магнитными пробками	84
§ 6,4. Стелларатор	92
Глава 7. Основные положения магнитной гидродинамики	97
§ 7,1. Введение	97
§ 7,2. Магнитогидродинамические уравнения	98
§ 7,3. Магнитное давление	104
§ 7,4. Магнитогидродинамические волны	109
§ 7,5. Уточнение гидродинамической модели	114
§ 7,6. О методах описания плазмы	124
Глава 8. Самосжатый разряд и устойчивость плазмы	127
§ 8,1. Пинч-эффект	128
§ 8,2. Поверхностная неустойчивость	130
§ 8,3. Конвективная неустойчивость	138
§ 8,4. Стабилизация пинчевого разряда	142
§ 8,5. Кинетическая неустойчивость	149
Глава 9. Динамический пинч и ударные волны	155
§ 9,1. Ударные волны	157
§ 9,2. Динамика сжимающегося газа	160
§ 9,3. Сжатие плазмы быстро нарастающим внешним магнитным полем	166

Глава 10. Волны в плазме	173
§ 10,1. Колебания плазмы при отсутствии магнитного поля	173
§ 10,2. Распространение электромагнитных волн в плазме в магнитном поле	178
§ 10,3. Специфическое затухание	182
§ 10,4. Пучковая неустойчивость	184
§ 10,5. Электромагнитные волны на границе плазмы	187
§ 10,6. Высокочастотный нагрев плазмы	191
§ 10,7. Применение микроволновой техники для определения основных параметров плазмы	196
Глава 11. Движение зарядов в полях с осевой симметрией. Плазменные сгустки	199
§ 11,1. Плазменные сгустки	199
§ 11,2. Поля с осевой симметрией	201
§ 11,3. Магнитный момент заряда, входящего в магнитное поле	204
§ 11,4. Пространственно-периодическое магнитное поле	211
§ 11,5. Потоки заряженных частиц	219
§ 11,6. Плотный плазменный сгусток в магнитном поле	223
§ 11,7. Токи в плазменном сгустке	228
Литература	235
Алфавитный указатель	239

Кирилл Дмитриевич СИНЕЛЬНИКОВ и Борис Николаевич РУТКЕВИЧ
ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ ПЛАЗМЫ

Редактор *Д. А. Вайнберг*
Техредактор *А. С. Трофименко*
Корректор *Л. И. Качанова*

Сдано в набор 24/XII 1962 г. Подписано к печати 28/X 1963 г. БЦ 12481. Формат $60 \times 90^{1/16}$. Объем 7,62 бум. л., 15,25 печ. л., 15,25 усл. печ. л., 13,2 уч.-изд. л.
Зак. 2-1862. Тираж 10 000. Цена 50 коп.

Отпечатано с матриц книжной фабрики им. Фрунзе в типографии Издательства
Харьковского университета. Харьков, Университетская ул., 16. Зак. 395.

Цена 50 коп.

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ХАРЬКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА