Ю. С. Сикорский

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

С приложениями к механике

ББК 22.161.5 22.162 22.21

Сикорский Ю. С.

Элементы теории эллиптических функций: С приложениями к механике. Изд. 2-е, испр. — М.: КомКнига, 2006. — 368 с.

ISBN 5-484-00401-2

Настоящая книга, написанная известным отечественным математиком, профессором Ю. С. Сикорским, посвящена эллиптическим функциям. Книга особенно ценна вычислительной стороной дела: читатель не только знакомится с теорией, но и полностью овладевает техникой расчетов с помощью эллиптических функций. Изложенный в доступной форме материал не предполагает у читателя предварительных знаний по теории функций. Приложения эллиптических функций иллюстрируются на многочисленных, детально разобранных задачах из механики. В конце книги даются таблицы для вычисления эллиптических функций и интегралов.

Книга представляет большой интерес для математиков, механиков, инженеров, преподавателей механики и математики во втузах. Несмотря на элементарный характер, она, благодаря разнообразному и интересному материалу и большому числу задач, может служить также пособием для студентов университетов.

Издательство «КомКнига». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.
Подписано к печати 19.12.2005 г. Формат 60×90/16. Тираж 350 экз. Печ. л. 23. Зак. № 378.
Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, д. 11А, стр. 11.

ISBN 5-484-00401-2

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА
E-mail: URSS@URSS.ru
Каталог изданий в Интернете:
http://URSS.ru
Тел./факс: 7 (095) 135-42-16
URSS Тел./факс: 7 (095) 135-42-46

3291 ID 33913
9 785484 004010 >

ПРЕДИСЛОВИЕ

Выпускаемая книга рассчитана на читателя, интересующегося эллиптическими функциями преимущественно с точки зрения их приложений. Ввиду этого в ней развита вычислительная сторона больше, чем это вообще принято делать в руководствах по эллиптическим функциям.

Содержание книги разбито на восемь глав, образующих как бы три концентра сведений из теории эллиптических функций. Именно, главы I и II образуют первый концентр, содержа определения, основные свойства, способы вычисления и простейшие приложения эллиптических функций Якоби-Абеля. При этом от читателя не требуется знакомства с теорией аналитических функций, элементы которой, необходимые для дальнейшего изложения, даются в главе III, составляющей вместе с главами IV, V, VI и VII второй концентр сведений. Здесь читатель знакомится с функциями $\wp u$, ζu и σu Вейерштрасса, с теорией тэта-функций и их приложениями к вычислению значений эллиптических функций, с общими эллиптическими интегралами и с приложениями вейерштрассовых функций к различным задачам механики. Наконец, содержащийся в главе VIII общий очерк теории эллиптических функций, на основе теории аналитических функций образует третий концентр. Следует отметить, что в предыдущих главах эллиптические функции определяются как функции, обратные эллиптическим интегралам.

Имея прикладной характер, книга в то же время содержит теоретический материал, усвоение которого может быть полезным для первоначального знакомства с учением об эллиптических функциях.

Напечатанные в конце книги таблицы должны в значительной мере облегчить практическое применение эллиптических функций и интегралов.

Ю. С. Сикорский

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Глава IV. **Функции Вейерштрасса.**

Глава V. **Тэта-функции**

Стр.

Глава VI. **Эллиптические интегралы в общем виде**

Глава VII. **Дальнейшие примеры приложений эллиптических функций к задачам механики**

Глава VIII. **Эллиптические функции в общем случае**

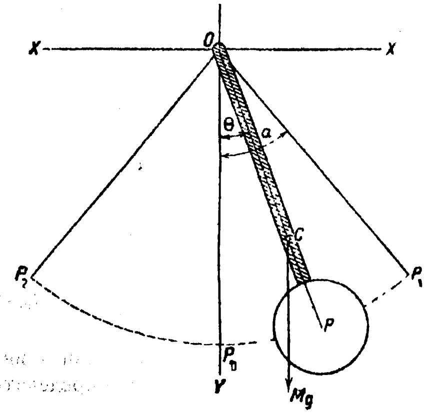
Приложения (таблицы)

ГЛАВА I

НОРМАЛЬНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ И ФУНКЦИИ ЯКОБИ

§ 1. Задача о колебаниях маятника

Представим себе, что маятник OP совершает колебания около горизонтальной оси, которую надо представить себе проходящей через точку O (фиг. 1) и перпендикулярной к плоскости колебаний маятника.



Фиг. 1

Приняв точку O за начало координат, направим ось OX горизонтально, а OY вертикально вниз. Время t будем отсчитывать от того момента $t=0$, когда маятник, колеблясь, занимает вертикальное положение OP_0. Пусть OP_1 есть то положение маятника, при котором скорость его становится равной нулю. Угол P_0OP_1 обозначим буквою α, а угол P_0OP — буквою θ; OP есть некоторое положение маятника, занимаемое им в момент t. Масса маятника пусть будет M; расстояние от точки привеса O до центра тяжести C равно h. Момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку C и параллельной оси вращения, равен Mr^2, где r — радиус инерции относительно этой оси. При этих обозначениях момент инерции относительно оси вращения выразится через

$$M(r^2+h^2).$$

Диференциальное уравнение колебаний маятника представится в виде:

$$-M(r^2+h^2)\frac{d^2\theta}{dt^2}=Mgh\sin\theta,$$

причем $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ есть угловое ускорение, а $Mgh\sin\theta$ — момент силы тяжести относительно оси вращения. После сокращений получим:

$$\left(\frac{r^2}{h}+h\right)\frac{d^2\theta}{dt^2}=-g\sin\theta$$

или
$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta, \tag{1}$$
где $l = \frac{r^2}{h} + h$.

Продлив прямую OC, отложим на ней отрезок $CP = \frac{r^2}{h}$. Найденная таким образом точка P называется центром качания маятника, а длина — приведенною его длиною.

Точка P обладает весьма замечательным свойством. Чтобы его обнаружить представим себе, что маятник опрокинут и подвешен к оси вращения в точке P. Вычислим приведенную длину вновь полученного маятника. Эта длина
$$l_1 = \frac{r^2}{CP} + CP = h + \frac{r^2}{h},$$
т. е. $l_1 = l$.

Таким образом выходит, что если маятник подвесить за центр качания, то прежняя точка привеса станет центром качания. Точка привеса в центр качания — сопряженные точки.

Переходя к интегрированию, помножим левую часть уравнения (1) на $\frac{d\theta}{dt}dt$, а правую на $d\theta$ и, заметив, что
$$\frac{d^2\theta}{dt^2}dt = d\left(\frac{d\theta}{dt}\right),$$
получим:
$$l\cdot\frac{d\theta}{dt}\cdot d\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = -g\sin\theta\, d\theta;$$
откуда, интегрируя, найдем:
$$l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2g\cos\theta + \Gamma,$$
где Γ — произвольная постоянная интегрирования.

Эту постоянную можно определить, если заметить, что в тот момент, когда угловая скорость $\frac{d\theta}{dt} = 0$, угол $\theta = \alpha$.

Ввиду этого
$$0 = 2g\cos\alpha + \Gamma.$$
Следовательно:
$$l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2g(\cos\theta - \cos\alpha)$$
и
$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 4n^2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right),$$
где $n^2 = \frac{g}{l}$.

Отсюда:
$$\frac{d\theta}{dt} = \pm 2n\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}. \tag{2}$$

Так как при перемещении маятника из положения OP_0 в положение OP_1 угол θ с течением времени возрастает, то $\frac{d\theta}{dt} > 0$ и
$$t = \frac{1}{n}\int_0^\theta \frac{d\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}.$$

Выполняя под знаком интеграла замену переменного, положим, что
$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\varphi. \tag{3}$$

В таком случае:
$$d\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\varphi\cdot d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\varphi}}$$
и
$$nt = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\varphi}}.$$

Полагая $\sin\frac{\alpha}{2} = k$, будем иметь:
$$t = \frac{1}{n}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}. \tag{4}$$

Если время перемещения маятника от положения OP_0 до OP_1 обозначим через $\frac{T}{4}$, то соответствующие этим положениям значения угла θ будут 0 и α, а угла φ будут 0 и $\frac{\pi}{2}$. Поэтому
$$\frac{T}{4} = \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}.$$

Нетрудно видеть из выражения (2), что угловая скорость $\frac{d\theta}{dt}$ станет равной нулю в тот момент, когда маятник займет положение OP_2, симметричное относительно оси OY с положением OP_1. Промежутки времени, в течение которых точка P проходит дуги P_0P_1 и P_0P_2, равны между собою.

Периодом колебания обыкновенно называют время, в течение которого маятник из положения OP_0 придет в положение OP_1 и затем в OP_2 и, наконец, вернется в OP_0. Очевидно этот период
$$T = \frac{4}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}.$$

§ 2. Эллиптические интегралы первого рода

Мы видели, что время колебания маятника выражается через интеграл:

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \tag{5}$$

который, по предложению Лежандра, называют эллиптическим интегралом первого рода и обозначают через $F(\varphi, k)$, или иногда короче $F(\varphi)$. В частном случае, когда верхний предел $\varphi = \frac{\pi}{2}$, мы имеем так называемый полный эллиптический интеграл первого рода:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

обозначаемый обыкновенно буквою K, а иногда и $K(k)$. При таком обозначении период колебания маятника можно представить так:

$$T = 4K\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Верхний предел φ называют амплитудою интеграла, а число k его модулем. В дальнейшем мы будем предполагать, если не будет оговорено противоположное, что $0 < k < 1$. Поэтому можно будет положить, что $k = \sin\theta$. Угол θ называют модулярным углом (l'angle modulaire). Желая подчеркнуть зависимость интеграла первого рода от модулярного угла, иногда вводят обозначение:

$$F(\theta).$$

Наряду с интегралом (5) часто приходится рассматривать интеграл:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}, \tag{6}$$

модуль которого k' определяется из равенства:

$$k^2 + k'^2 = 1$$

называется дополнительным для модуля k.

§ 3. Дуга эллипса и эллиптические интегралы второго и третьего рода

Пусть дан эллипс, полуоси которого равны a и b; его параметрические уравнения

$$x = a\cdot\sin\varphi;$$
$$y = b\cdot\cos\varphi.$$

Диференциал его дуги:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = a\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

где $k = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ есть эксцентриситет эллипса.

Дуга эллипса выразится через

$$s = a\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Интеграл

$$\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

согласно терминологии Лежандра, называется эллиптическим интегралом второго рода и обозначается через $E(\varphi, k)$, или короче $E(\varphi)$. В случае, когда верхний предел $\varphi = \frac{\pi}{2}$, имеем полный эллиптический интеграл второго рода:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

который мы будем обозначать буквою E или $E(k)$.

Интеграл с дополнительным модулем будет:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

причем $k^2 + k'^2 = 1$.

Кроме интегралов первого и второго рода приходится рассматривать эллиптические интегралы третьего рода:

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

обозначаемые через $\Pi(\varphi, n, k)$.

Относительно параметра n будем считать, что

$$n \gtreqless 0;\quad n \gtreqless -1 \quad \text{и} \quad n \gtreqless -k^2.$$

Модуль k, как и раньше, будем считать бо́льшим нуля и меньшим единицы.

В начале этого параграфа мы привели задачу о нахождении дуги эллипса. Мы видем, что дуга эллипса выражается помощью эллиптического интеграла второго рода. Заметим, что именно этому обстоятельству эллиптические интегралы и обязаны своим названием.

§ 4. Преобразование эллиптических интегралов к новым переменным. Высшие трансцендентные

Если положим, что $\sin\varphi = x$, то интеграл первого рода представится в виде:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}. \tag{7}$$

Для интеграла второго рода будем иметь:

$$\int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = \int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} - k^2\int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Отсюда мы видим, что кроме (7), типичной для эллиптических интегралов является форма:

$$\int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Что касается интеграла третьего рода, то его можно представить так:

$$\int_0^x \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Здесь мы сделаем одно общее замечание об интегрировании функций.

Если предложено интегрировать функцию $f(x)$, то только лишь в редких случаях интеграл

$$\int f(x)\,dx \tag{8}$$

может быть выражен посредством известных из алгебры и тригонометрии функций. Случаи эти хорошо изучены и излагаются в курсах интегрального исчисления. Задача интегрального исчисления, понятая в том смысле, чтобы результат интегрирования был представлен элементарными функциями, была бы сравнительно весьма узкой.

При произвольном виде функции $f(x)$ интеграл (8), вообще говоря, не берется в конечном виде (не выражается при помощи конечного числа элементарных функций) и представляет новую функцию от x. Таким образом интегральное исчисление является богатейшим источником происхождения новых функций.

Целесообразно ли, однако, введение этих функций? Этот вопрос решается, исходя из соображений об их практической пригодности и простоты их свойств. Рассмотренные нами выше эллиптические интегралы и происходящие от них эллиптические функции, о которых будет речь

впереди, представляют собою простейшие примеры новых функций, или так называемых высших трансцендентных. Простота их свойств, наряду с теми обширными применениями, которые они нашли себе в различных отделах механики, физики, математики и прикладных наук, послужила поводом к созданию теории эллиптических функций.

Мы видели, что вопрос о времени колебания маятника привелся к эллиптическому интегралу первого рода, а о вычислении дуги эллипса — к интегралу второго рода. Мы в дальнейшем укажем на целый ряд вопросов, приводимых к эллиптическим интегралам и эллиптическим функциям. Лежандр, немало потрудившийся над изучением свойств этих интегралов, составил особые таблицы, напечатанные в его руководстве: «Traité des fonctions elliptiques», т. II, и перепечатанные впоследствии многими другими авторами. В этих таблицах содержатся численные значения эллиптических интегралов первого и второго рода, найденные для различных значений модуля k и амплитуды φ [1]).

Мы перечислили три рода эллиптических интегралов. Кроме приложений к конкретным задачам, они привлекают наше внимание еще и потому, что через них, как об этом будет речь в главе VI, может быть выражен всякий интеграл

$$\int f(x;\ \sqrt{R})\,dx,$$

где R есть многочлен вида:

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,$$

либо вида:

$$ax^3+bx^2+cx+d,$$

а f есть рациональная функция как относительно x, так и относительно $\sqrt{R}$.

§ 5. Функции sn, cn и dn

Рассматривая интеграл

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \qquad (0<k<1)$$

как функцию φ, мы видим, что эта функция определена для любого вещественного φ. Более того, она непрерывна при любом φ и имеет конечную и отличную от нуля производную:

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Так как последняя всегда положительна, то u возрастает с возрастанием φ, причем, как нетрудно видеть, u возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, когда φ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. В самом деле, подинтегральное выражение всегда больше или равно единице и, следовательно, $|u| \geqslant |\varphi|$.

1) Таблицы эллиптических интегралов читатель может найти в конце настоящего руководства.

Отсюда следует, что и φ также является однозначной функцией от u, определенной для любого u, непрерывной и имеющей конечную производную:

$$\frac{d\varphi}{du} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}.$$

Для этой функции — *амплитуды* интеграла u—Якоби ввел обозначение

$$\varphi = \operatorname{am}(u, k)$$

или короче:

$$\varphi = \operatorname{am} u,$$

а для функций от u:

$$\sin\varphi = \sin(\operatorname{am} u) \quad \text{и} \quad \cos\varphi = \cos(\operatorname{am} u),$$

являющихся также однозначными, непрерывными и диференцируемыми функциями u, обозначения:

$$\sin(\operatorname{am} u) = \sin\operatorname{am} u, \quad \cos(\operatorname{am} u) = \cos\operatorname{am} u.$$

Якоби также рассматривал как функцию u положительное значение квадратного корня $\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$ и обозначал ее через $\Delta \operatorname{am} u$:

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - k^2 (\sin\operatorname{am} u)^2} = \Delta \operatorname{am} u.$$

Эти функции: $\sin\operatorname{am} u$, $\cos\operatorname{am} u$ и $\Delta\operatorname{am} u$, называются эллиптическими функциями Якоби и, по предложению Гудермана, обозначаются короче следующим образом:

$$\sin\operatorname{am} u = \operatorname{sn} u; \quad \cos\operatorname{am} u = \operatorname{cn} u; \quad \Delta\operatorname{am} u = \operatorname{dn} u.$$

Последние обозначения общеприняты в настоящее время. Читаются они обычно так: «эс эн у», «це эн у», «дэ эн у».

Функции Якоби, в силу самого их определения, связаны между собой простыми алгебраическими соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u &= 1, \\ \operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Вследствие этого каждые две из них могут быть алгебраически выражены через третью. Например:

$$\begin{aligned} \operatorname{cn} u &= \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 u}, \\ \operatorname{dn} u &= \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u}. \end{aligned}$$

§ 6. Периодичность функций Якоби. Четность и нечетность. Формулы «приведения»

Покажем здесь, что $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$ — периодические функции, причем $\operatorname{sn} u$ и $\operatorname{cn} u$ имеют период $4K$, а $\operatorname{dn} u$ — период $2K$, где

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Иными словами, мы покажем, что каково бы ни было u, всегда:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sn}(u + 4K) &= \operatorname{sn} u, \\ \operatorname{cn}(u + 4K) &= \operatorname{cn} u, \\ \operatorname{dn}(u + 2K) &= \operatorname{dn} u. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Для этого достаточно будет доказать, что увеличение u на $2K$ вызывает увеличение φ на π, т. е., что

$$\operatorname{am}(u + 2K) = \operatorname{am} u + \pi. \tag{11}$$

Действительно, если мы установим это, то будем иметь:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(u + 4K) &= \sin[\operatorname{am}(u + 4K)] = \sin[\operatorname{am}(u + 2K) + \pi] = \\ &= \sin(\operatorname{am} u + 2\pi) = \sin(\operatorname{am} u) = \operatorname{sn} u, \\ \operatorname{cn}(u + 4K) &= \cos[\operatorname{am}(u + 4K)] = \cos[\operatorname{am}(u + 2K) + \pi] = \\ &= \cos(\operatorname{am} u + 2\pi) = \cos(\operatorname{am} u) = \operatorname{cn} u, \\ \operatorname{dn}(u + 2K) &= \sqrt{1 - k^2 \sin^2[\operatorname{am}(u + 2K)]} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\operatorname{am} u + \pi)} = \\ &= \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\operatorname{am} u)} = \operatorname{dn} u, \end{aligned}$$

т. е. формулы (10).

Но в справедливости формулы (11) можно убедиться следующим образом.

Записывая сначала $2K$ в виде:

$$2K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt_1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t_1}},$$

полагаем во втором интеграле $t_1 = \pi - t$. Получаем:

$$2K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} = \int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}.$$

Если теперь в равенстве

$$u + 2K = \int_0^{\varphi} \frac{dt_1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t_1}} + \int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}$$

положить в первом интеграле: $t_1 = t - \pi$, то найдем:

$$u + 2K = \int_{\pi}^{\pi + \varphi} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} + \int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} = \int_0^{\varphi + \pi} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Таким образом увеличение интеграла на $2K$ вызывает увеличение амплитуды на π, откуда и следует равенство (11), а вслед за ним и равенства (10), выражающие периодичность функций Якоби.

Из равенства (11), кроме того, непосредственно следуют формулы:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sn}(u+2K) &= -\operatorname{sn} u, \\ \operatorname{cn}(u+2K) &= -\operatorname{cn} u. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

В самом деле, например:

$$\operatorname{sn}(u+2K) = \sin[\operatorname{am}(u+2K)] = \sin(\operatorname{am} u+\pi) = -\sin(\operatorname{am} u) = -\operatorname{sn} u.$$

Можно, наконец, получить и еще несколько следствий из формулы (11), установив сначала важный сам по себе факт нечетности $\operatorname{sn} u$ и четности $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$. Действительно, полагая в подинтегральном выражении, в правой части равенства:

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}$$

$t = -t_1$, получаем:

$$-u = \int_0^{-\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}},$$

откуда

$$\operatorname{am}(-u) = -\operatorname{am} u,$$

т. е. $\operatorname{am} u$ есть нечетная функции u. Но тогда, в согласии с нашими утверждениями:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{sn}(-u) = \sin[\operatorname{am}(-u)] = \sin(-\operatorname{am} u) = -\sin \operatorname{am} u = -\operatorname{sn} u, \\ &\operatorname{cn}(-u) = \operatorname{cn} u, \\ &\operatorname{dn}(-u) = \operatorname{dn} u. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Из формул (12), (10) и (13) вытекают следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sn}(K-u) &= -\operatorname{sn}(-K-u) = \operatorname{sn}(K+u), \\ \operatorname{cn}(K-u) &= -\operatorname{cn}(K+u), \\ \operatorname{dn}(K-u) &= \operatorname{dn}(K+u). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$\begin{gathered} \operatorname{sn}(2K-u) = -\operatorname{sn}(2K+u), \quad \operatorname{cn}(2K-u) = \operatorname{cn}(2K+u), \\ \operatorname{dn}(2K-u) = \operatorname{dn}(2K+u). \end{gathered} \tag{15}$$

Очевидно, формулы (10), (12), (13), (14) и (15) аналогичны формулам «приведения» элементарной тригонометрии.

Полезно еще заметить некоторые частные значения якобиевых функций. Так, из того, что

$$0 = \int_0^0 \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

и

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

следует:

$$\operatorname{am} 0 = 0, \quad \operatorname{am} = K\frac{\pi}{2},$$

и поэтому:

$$\begin{aligned} &\operatorname{sn} 0 = \sin(\operatorname{am} 0) = 0, \\ &\operatorname{cn} 0 = \cos(\operatorname{am} 0) = 1, \\ &\operatorname{dn} 0 = \sqrt{1-k^2\sin^2(\operatorname{am} 0)} = 1, \\ &\operatorname{sn} K = \sin(\operatorname{am} K) = 1, \\ &\operatorname{cn} K = \cos(\operatorname{am} K) = 0, \\ &\operatorname{dn} K = \sqrt{1-k^2\sin^2(\operatorname{am} K)} = \sqrt{1-k^2} = k'. \end{aligned}$$

Пользуясь формулами (12) и (10), мы теперь можем утверждать, что

$$\begin{aligned} &\operatorname{sn} 2K = 0, \quad \operatorname{cn} 2K = -1, \quad \operatorname{dn} 2K = 1, \\ &\operatorname{sn} 3K = -1, \quad \operatorname{cn} 3K = 0, \quad \operatorname{dn} 3K = k' \end{aligned}$$

и вообще:

$$\begin{aligned} &\operatorname{sn} 4nK = 0, \ \operatorname{sn}(4n+1)K = 1, \ \operatorname{sn}(4n+2)K = 0, \ \operatorname{sn}(4n+3)K = -1, \\ &\operatorname{cn} 4nK = 1, \ \operatorname{cn}(4n+1)K = 0, \ \operatorname{cn}(4n+2)K = -1, \ \operatorname{cn}(4n+3)K = 0, \\ &\operatorname{dn} 2nK = 1, \ \operatorname{dn}(2n+1)K = k', \end{aligned}$$

где n — целое число или нуль.

§ 7. Вторая группа формул «приведения»

Теперь мы выведем формулы, аналогичные тем, которые связывают тригонометрические функции дуги $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ и дуги α. В интеграле

$$\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$$

положим:

$$\sin\psi = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \tag{16}$$

В таком случае:

$$\cos\psi = \frac{k'\sin\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}; \tag{17}$$

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\psi} = \frac{k'}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \tag{18}$$

$$\cos\psi\, d\psi = -\frac{k'^2\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)^3}},$$

где $k'^2 = 1-k^2$. Вследствие этого

$$\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = -\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Но при $\psi=0$ имеем: $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}-\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

или

$$\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}=K-u,$$

где $\operatorname{am} u=\varphi$.

Отсюда видно, что

$$\psi=\operatorname{am}(K-u).$$

Заменив в (16), (17) и (18) ψ и φ их значениями, придем к соотношениям:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sn}(K-u)&=\frac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}u},\\ \operatorname{cn}(K-u)&=\frac{k'\operatorname{sn}u}{\operatorname{dn}u},\\ \operatorname{dn}(K-u)&=\frac{k'}{\operatorname{dn}u}.\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

Заменив в равенствах (19) u на $-u$, пользуясь тем, что функция sn нечетна, а cn и dn — четные (см. § 6), находим:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sn}(K+u)&=\frac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}u},\\ \operatorname{cn}(K+u)&=-\frac{k'\operatorname{sn}u}{\operatorname{dn}u},\\ \operatorname{dn}(K+u)&=\frac{k'}{\operatorname{dn}u}.\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

§ 8. Производные от функций Якоби. Диференциальные уравнения функций Якоби

В § 5 было указано, что

$$\frac{d\varphi}{du}=\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}.$$

Но

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}=\operatorname{dn}u.$$

Поэтому

$$\frac{d\varphi}{du}=\operatorname{dn}u.$$

Исходя из этого, без труда получаем:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\operatorname{sn}u}{du}&=\frac{d\sin\varphi}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{du}=\cos\varphi\cdot\operatorname{dn}u=\operatorname{cn}u\cdot\operatorname{dn}u,\\ \frac{d\operatorname{cn}u}{du}&=\frac{d\cos\varphi}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{du}=-\sin\varphi\cdot\operatorname{dn}u=-\operatorname{sn}u\cdot\operatorname{dn}u,\\ \frac{d\operatorname{dn}u}{du}&=\frac{d\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{du}=-k^2\sin\varphi\cdot\cos\varphi=-k^2\operatorname{sn}u\cdot\operatorname{cn}u.\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

При помощи формул (9) § 5 правые части формул (21) могут быть выражены, соответственно, через $\operatorname{sn}u$, $\operatorname{cn}u$ и $\operatorname{dn}u$. Именно:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\operatorname{sn}u}{du}&=\sqrt{(1-\operatorname{sn}^2u)(1-k^2\operatorname{sn}^2u)},\\ \frac{d\operatorname{cn}u}{du}&=-\sqrt{(1-\operatorname{cn}^2u)(k'^2+k^2\operatorname{cn}^2u)},\\ \frac{d\operatorname{dn}u}{du}&=-\sqrt{(1-\operatorname{dn}^2u)(\operatorname{dn}^2u-k'^2)},\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

где $k'^2=1-k^2$ — дополнительный для k модуль (см. § 2).

Каждое из уравнений (22) является диференциальным уравнением первого порядка относительно соответствующей функции Якоби.

Знаки, стоящие перед радикалами, относятся лишь к значениям u, близким к нулю (они годятся до ближайшего к $u=0$ нуля производной), и вообще должны ставиться в соответствии со знаками правых частей формул (21), которые (знаки), очевидно, различны при разных u. С учетом этой оговорки уравнения (22) могут быть переписаны в виде:

$$\left.\begin{aligned}u&=\int_0^{\operatorname{sn}u}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},\\ u&=\int_1^{\operatorname{cn}u}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(k'^2+k^2t^2)}},\\ u&=\int_1^{\operatorname{dn}u}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(t^2-k'^2)}},\end{aligned}\right\}\tag{23}$$

т. е. каждая из эллиптических функций Якоби появляется при обращении соответствующего эллиптического интеграла первого рода.

При этом под обращением интеграла вообще понимается рассмотрение предела интеграла как функции от величины интеграла.

Заметим, что лишь первый из интегралов (23) непосредственно представлен в нормальном виде интеграла первого рода (см. § 4). Остальные два могут быть приведены к нормальному виду посредством простых подстановок, на которых мы здесь не останавливаемся.

§ 9. Некоторые приложения

В этом параграфе мы покажем, каким образом при помощи формул приведения задача обращения эллиптического интеграла может быть решена в более сложных случаях.

Пример 1. Обратить интеграл

$$u=\int\limits_0^z \frac{dz}{\sqrt{1+z^2-2z^4}}.$$

Переписав наше выражение в виде:

$$u=\int\limits_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1+2z^2)}},$$

мы переменную z заменим на x помощью подстановки $z=\sqrt{1-x^2}$. Легкие вычисления приведут нас к равенству:

$$u\sqrt{3}=\int\limits_\infty^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\left(1-\frac{2}{3}x^2\right)}}=$$

$$=\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\left(1-\frac{2}{3}x^2\right)}}-\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\left(1-\frac{2}{3}x^2\right)}}$$

или

$$\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\left(1-\frac{2}{3}x^2\right)}}=K-u\sqrt{3}.$$

Отсюда следует, что

$$x=\operatorname{sn}(K-u\sqrt{3}),$$

или, в силу первой из формул (19):

$$x=\frac{\operatorname{cn}(u\sqrt{3})}{\operatorname{dn}(u\sqrt{3})},$$

$$z=\frac{\sqrt{\operatorname{dn}^2(u\sqrt{3})-\operatorname{cn}^2(u\sqrt{3})}}{\operatorname{dn}(u\sqrt{3})}.$$

Но так как

$$\operatorname{dn}^2(u\sqrt{3})=1-\frac{2}{3}\operatorname{sn}^2(u\sqrt{3}) \quad \text{и} \quad \operatorname{cn}^2(u\sqrt{3})=1-\operatorname{sn}^2(u\sqrt{3}),$$

то

$$z=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\operatorname{sn}(u\sqrt{3})}{\operatorname{dn}(u\sqrt{3})};$$

и задача обращения разрешена.

Пример 2. В виде более сложного примера обратим еще интеграл:

$$u=\int\limits_0^z \frac{dz}{\sqrt{(z^2+z+1)(3z^2+z+1)}}.$$

Прежде всего упростим наш интеграл. Введем вместо переменной z новую ξ при помощи соотношения:

$$z=\frac{\alpha\xi+\beta}{\xi+1},$$

в котором коэфициенты α и β выберем так, чтобы после преобразования находящийся под знаком корня многочлен не содержал нечетных степеней переменной. Применяемая нами подстановка имеет весьма важное значение в интегральном исчислении и о ней еще будет речь в главе VI. Произведя действия, мы увидим, что

$$dz=\frac{(\alpha-\beta)\,d\xi}{(\xi+1)^2},$$

$$z^2+z+1=\frac{(\alpha^2+\alpha+1)\xi^2+(2\alpha\beta+\alpha+\beta+2)\xi+\beta^2+\beta+1}{(\xi+1)^2},$$

$$3z^2+z+1=\frac{(3\alpha^2+\alpha+1)\xi^2+(6\alpha\beta+\alpha+\beta+2)\xi+3\beta^2+\beta+1}{(\xi+1)^2}.$$

Выберем числа α и β так, чтобы пропали в числителях дробей первые степени ξ. Это случится, если:

$$2\alpha\beta+\alpha+\beta+2=0,$$
$$6\alpha\beta+\alpha+\beta+2=0,$$

откуда

$$\alpha=0, \quad \beta=-2$$

и, следовательно,

$$z=-\frac{2}{\xi+1}.$$

Вместе с тем:

$$z^2+z+1=\frac{\xi^2+3}{(\xi+1)^2}, \quad 3z^2+z+1=\frac{\xi^2+11}{(\xi+1)^2},$$

и

$$dz=\frac{2d\xi}{(\xi+1)^2}.$$

Вследствие чего:

$$u=\int\limits_{-\infty}^{\xi} \frac{2d\xi}{\sqrt{(\xi^2+3)(\xi^2+11)}}.$$

Здесь удобно положить

$$\xi=-\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}\varphi.$$

Это дает:

$$u=\frac{2}{\sqrt{11}}\int\limits_\varphi^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{8}{11}\sin^2\varphi}},$$

или

$$u=\frac{2}{\sqrt{11}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{8}{11}\sin^2\varphi}}-\frac{2}{\sqrt{11}}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{8}{11}\sin^2\varphi}},$$

откуда

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{8}{11}\sin^2\varphi}}=K-\frac{u\sqrt{11}}{2}.$$

Поэтому

$$\sin\varphi=\operatorname{sn}\left(K-\frac{u\sqrt{11}}{2}\right)=\frac{\operatorname{cn}\frac{u\sqrt{11}}{2}}{\operatorname{dn}\frac{u\sqrt{11}}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}}=\sqrt{\frac{11}{3}}\cdot\frac{\operatorname{cn}\frac{u\sqrt{11}}{2}}{\operatorname{sn}\frac{u\sqrt{11}}{2}},$$

$$z=\frac{2}{\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}\varphi-1}=\frac{2\operatorname{sn}\frac{u\sqrt{11}}{2}}{\sqrt{11}\cdot\operatorname{cn}\frac{u\sqrt{11}}{2}-\operatorname{sn}\frac{u\sqrt{11}}{2}}.$$

§ 10. Выражение угла отклонения маятника, его угловой скорости и координат центра качания через эллиптические функции

В виде приложения эллиптических функций покажем, каким образом при их помощи могут быть выражены угол отклонения маятника от положения равновесия, его угловая скорость и координаты центра качания.

В § 1 для половины угла θ мы имели формулы (3):

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\varphi=k\cdot\sin\varphi.$$

Но из формулы (4) того же параграфа следует, что

$$\varphi=\operatorname{am}(nt)=\operatorname{am}\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

Следовательно,

$$\sin\frac{\theta}{2}=k\cdot\operatorname{sn}\left(t\cdot\sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

Если еще заметим, что

$$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)}=\operatorname{dn}\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right),$$

то для целого угла θ будем иметь:

$$\sin\theta=2k\operatorname{sn}\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)\cdot\operatorname{dn}\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

Если координаты центра качания P обозначим буквами x и y, то на основании фиг. 1 будем иметь:

$$x=l\cdot\sin\theta=2kl\operatorname{sn}\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)\cdot\operatorname{dn}\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right),$$

$$y=l\cdot\cos\theta=l\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)=l\left[1-2k^2\operatorname{sn}^2\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)\right].$$

Выразим еще в эллиптических функциях угловую скорость маятника. Воспользуемся для этого равенством (§ 1):

$$\frac{d\theta}{dt}=2n\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}},$$

из которого нетрудно получить, что угловая скорость

$$\frac{d\theta}{dt}=2k\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot\operatorname{cn}\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

§ 11. Случаи вырождения эллиптических функций

Если модуль $k=0$ или 1, то эллиптические функции вырождаются в тригонометрические или в гиперболические (показательные).

Действительно, в первом случае при $k=0$ мы имеем:

$$u=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

откуда $u=\arcsin x$, т. е. $x=\sin u$.

Следовательно, в этом случае

$$\operatorname{sn}u=\sin u;\quad \operatorname{cn}u=\cos u;\quad \operatorname{dn}u=1.$$

Во втором случае, когда $k=1$,

$$u=\int_0^x\frac{dx}{1-x^2}$$

или

$$u=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}},$$

т. е.

$$\frac{1+x}{1-x}=e^{2u}\quad\text{и}\quad x=\frac{e^{2u}-1}{e^{2u}+1}=\frac{e^u-e^{-u}}{e^u+e^{-u}}.$$

Но выражение $\frac{e^u-e^{-u}}{e^u+e^{-u}}$ есть гиперболический тангенс; поэтому

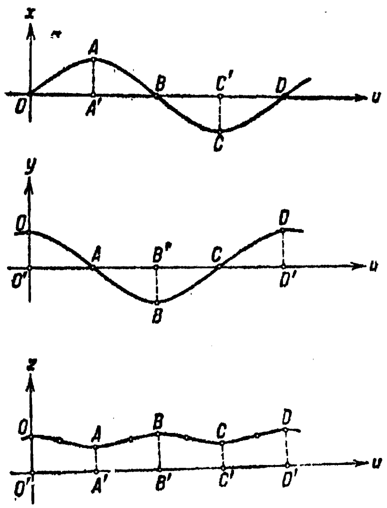
$$\operatorname{sn}u=\operatorname{th}u,$$

$$\operatorname{cn}u=\sqrt{1-\operatorname{th}^2u}=\sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2u-\operatorname{sh}^2u}{\operatorname{ch}^2u}}=\frac{1}{\operatorname{ch}u}.$$

Точно так же и $\operatorname{dn} u = \frac{1}{\operatorname{ch} u}$. Мы видим, таким образом, что тригонометрические и гиперболические функции представляют лишь весьма частные случаи эллиптических.

§ 12. Графики функций $\operatorname{sn} u$ $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$

Для того чтобы построить график функции $x = \operatorname{sn} u$, заметим сначала, что это функция периодическая, с периодом $4K$. Поэтому достаточно построить график для промежутка $0 \leqslant u \leqslant 4K$, чтобы затем путем смещений его в направлении оси u на величины, кратные $4K$, получить весь график функции.



Фиг. 2

Далее, согласно первой из формул (15):

$$\operatorname{sn}(2K - u) = -\operatorname{sn}(2K + u),$$

т. е. график симметричен относительно точки $(2K, 0)$ и достаточно построить его часть для промежутка $0 \leqslant u \leqslant 2K$, чтобы затем, для промежутка $2K \leqslant u \leqslant 4K$, взять кривую, симметричную построенной относительно точки $(2K, 0)$.

Наконец, согласно первой из формул (14):

$$\operatorname{sn}(K - u) = \operatorname{sn}(K + u),$$

т. е. график симметричен относительно прямой: $u = K$, почему достаточно ограничиться построением его части для промежутка:

$$0 \leqslant u \leqslant K.$$

В этом промежутке первая производная

$$\frac{dx}{du} = \operatorname{cn} u \cdot \operatorname{dn} u$$

[см. первую из формул (21)] положительна, т. е. x растет вместе с u от $\operatorname{sn} 0 = 0$ до $\operatorname{sn} K = 1$. Вследствие указанного свойства симметрии графика относительно прямой $u = K$, при $u = K$, $\operatorname{sn} u$ имеет максимум.

Заметим, что вид графика $\operatorname{sn} u$ зависит от величины модуля k. При $k = 0$, $\operatorname{sn} u$ вырождается в тригонометрическую функцию $\sin u$ с периодом

$$4K = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = 2\pi.$$

При значениях K, не слишком близких к единице, график $\operatorname{sn} u$ еще весьма напоминает синусоиду (см. первый из чертежей на фиг. 2, где

взято $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$). По мере приближения к единице период $4K$ растет, приближаясь к ∞. При этом кривая по своему внешнему виду все более отличается от синусоиды (см. первый чертеж на фиг. 3, где взято $k = \sqrt{\frac{15}{16}}$). Наконец, при $k = 1$, $\operatorname{sn} u$ вырождается в гиперболическую функцию $\operatorname{th} u$, которая уже не имеет вещественного периода ($4K = \infty$) и для которой поэтому рассуждения начала этого параграфа неприменимы.

На тех же фигурах[1]) и для тех же значений k даны графики $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$. Рассматривая их, полезно иметь перед глазами графики, соответствующие предельным случаям:

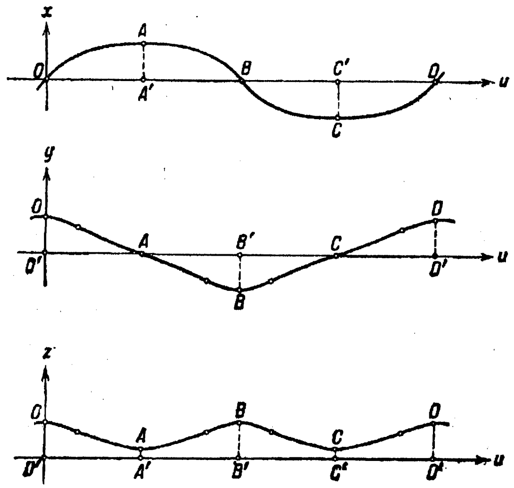
при $k = 0$:

$\operatorname{cn} u = \cos u$, $\operatorname{dn} u = 1$

и при $k = 1$:

$$\operatorname{cn} u = \frac{1}{\operatorname{ch} u},$$

$$\operatorname{dn} u = \frac{1}{\operatorname{ch} u}.$$



Фиг. 3

Важно отметить, что вещественным значениям аргумента соответствуют вещественные значения функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$.

Обратим внимание читателя еще на одно обстоятельство: косинусоида, как известно, может быть совмещена с синусоидой простым перемещением на $\frac{\pi}{2}$ вдоль оси ou. Возможность такого совмещения есть следствие соотношения

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + u\right) = \cos u.$$

Но из формулы

$$\operatorname{sn}(K + u) = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}$$

мы видим, что от прибавления K к аргументу u функция sn не переходит в cn.

Поэтому кривые sn и cn вообще совмещены быть не могут.

§ 13. Приближенное вычисление периода колебаний маятника

При малых модулях k полные эллиптические интегралы первого и второго рода могут быть с большим удобством приближенно вычисляемы посредством разложения подинтегральной функции в ряд и почленного

[1]) Фиг. 2 и 3 заимствованы из *Theorie der Elliptischen Funktionen*, M. Krause.

интегрирования этого ряда. Действительно, согласно формуле бинома Ньютона:

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot k^4\sin^4\varphi+\ldots$$

Помня, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\varphi\,d\varphi=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\cdot\frac{\pi}{2},$$

и интегрируя обе части предыдущего равенства в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$, находим:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2k^4+\ldots\right].$$

если угол α отклонения маятника от положения равновесия мал, то модуль $k=\sin\frac{\alpha}{2}$ тоже мал. Пренебрегая вторым и прочими членами суммы, заключенной в скобках, мы получим, что период колебания маятника

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

е. получаем общеизвестное выражение.

Пользуясь тем же приемом для интеграла второго рода, можно найти, т. о

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=\frac{\pi}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2k^4-\ldots\right].$$

§ 14. Преобразование Ландена

Сейчас мы переходим к решению весьма важной практически задачи о том, как вычислять эллиптические интегралы $F(\varphi, k)$ при различных значениях аргумента φ и модуля k. Иными словами, переходим к вопросу о том, как составить таблицы численных значений эллиптических интегралов. Нам придется здесь встретиться с равенствами, связывающими эллиптические интегралы, имеющие различные модули.

Если требуется вычислить интеграл

$$F(\varphi,k)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

модуль k и амплитуда φ которого известны, то один из способов, помощью которых вопрос может быть решен, есть так называемое преобразование Ландена. Оно заключается в том, что данный интеграл при-

водят к другому, модуль которого меньше модуля данного интеграла. Повторяя операцию и уменьшая постепенно модули, можно дойти до интеграла, модулем которого можно пренебречь и свести вопрос к интегралу

$$\int_0^{\varphi_n}d\varphi_n=\varphi_n.$$

Переходя к самому преобразованию, мы заменим аргумент φ на φ_1 помощью соотношения:

$$\sin(2\varphi-\varphi_1)=k_1\sin\varphi_1, \tag{24}$$

где k_1 есть число пока произвольное.

Диференцируя последнее равенство, получим:

$$2\cos(2\varphi-\varphi_1)\,d\varphi-\cos(2\varphi-\varphi_1)\,d\varphi_1=k_1\cos\varphi_1\,d\varphi_1,$$

откуда

$$\frac{d\varphi_1}{\cos(2\varphi-\varphi_1)}=\frac{2d\varphi}{k_1\cos\varphi_1+\cos(2\varphi-\varphi_1)}.$$

Но

$$\cos(2\varphi-\varphi_1)=\sqrt{1-k_1^2\sin^2\varphi_1}.$$

Поэтому

$$\frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\varphi_1}}=\frac{2d\varphi}{k_1\cos\varphi_1+\cos2\varphi\cos\varphi_1+\sin2\varphi\cdot\sin\varphi_1}.$$

Замечая, что $\cos\varphi_1=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi_1}}$, будем иметь:

$$\frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\varphi_1}}=\frac{2\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi_1}\cdot d\varphi}{k_1+\cos2\varphi+\sin2\varphi\cdot\operatorname{tg}\varphi_1}.$$

Но

$$\sin2\varphi\cos\varphi_1-\sin\varphi_1\cos2\varphi=k_1\sin\varphi_1,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{\sin2\varphi}{k_1+\cos2\varphi};$$

следовательно:

$$1+\operatorname{tg}^2\varphi_1=\frac{k_1^2+2k_1\cos2\varphi+1}{(k_1+\cos2\varphi)^2},$$

а также

$$k_1+\cos2\varphi+\sin2\varphi\cdot\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{(k_1+\cos2\varphi)^2+\sin^22\varphi}{k_1+\cos2\varphi}=\frac{k_1^2+2k_1\cos2\varphi+1}{k_1+\cos2\varphi}.$$

Поэтому

$$\frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\varphi_1}}=\frac{2d\varphi}{\sqrt{1+2k_1\cos2\varphi+k_1^2}}.$$

Но

$$1+2k_1\cos2\varphi+k_1^2=1+2k_1(1-2\sin^2\varphi)+k_1^2=$$

$$=(1+k_1)^2\left[1-\frac{4k_1}{(1+k_1^2)}\cdot\sin^2\varphi\right].$$

И если число k_1 подберем так, чтобы

$$k^2=\frac{4k_1}{(1+k_1)^2},$$

то будем иметь:

$$1+2k_1\cos 2\varphi+k_1^2=(1+k_1)^2(1-k^2\sin^2\varphi).$$

Следовательно:

$$\frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\varphi_1}}=\frac{2}{1+k_1}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}};$$

и далее:

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{1+k_1}{2}\int_0^{\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\varphi_1}}, \tag{25}$$

ибо при $\varphi=0$ и $\varphi_1=0$, как это следует из (24).

Желая сравнить новый модуль k_1 с модулем k, заметим, что

$$1-k^2=1-\frac{4k_1}{(1+k_1)^2}=\left(\frac{1-k_1}{1+k_1}\right)^2.$$

Если к модулю k введем дополнительный k', то будем иметь:

$$1-k^2=k'^2$$

и стало быть:

$$k'=\frac{1-k_1}{1+k_1};$$

отсюда

$$k_1=\frac{1-k'}{1+k'}=\frac{1-k'^2}{(1+k')^2}=\frac{k^2}{(1+k')^2},$$

т. е. $k_1<k^2$, и так как $k<1$, то $k_1<k$.

Таким образом модуль k_1 вновь полученного интеграла меньше модуля k.

Последовательное n-кратное применение равенства (25) приведет нас к соотношениям:

$$F(\varphi, k)=\frac{1+k_1}{2}F(\varphi_1, k_1),$$

$$F(\varphi_1, k_1)=\frac{1+k_2}{2}F(\varphi_2, k_2),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$F(\varphi_{n-1}, k_{n-1})=\frac{1+k_n}{2}F(\varphi_n, k_n).$$

Перемножая эти равенства и сокращая на общий множитель, получим

$$F(\varphi, k)=\frac{(1+k_1)(1+k_2)\dots(1+k_n)}{2^n}F(\varphi_n, k_n),$$

причем модули $k, k_1, k_2, \dots, k_n$ образуют быстро убывающую последовательность чисел. Если модуль k_n достаточно мал, то, пренебрегая им, найдем, что

$$F(\varphi_n, k_n)=\varphi_n;$$

и следовательно:

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{(1+k_1)(1+k_2)\dots(1+k_n)}{2^n}\varphi_n. \tag{26}$$

§ 15. Вычисление амплитуд

Исходя из основного равенства

$$\sin(2\varphi-\varphi_1)=k_1\sin\varphi_1,$$

нетрудно получить формулу, удобную для вычисления амплитуды φ_1, когда дано φ и k.

В предыдущем параграфе было показано, что модуль

$$k_1=\frac{1-k'}{1+k'},$$

где k' есть модуль дополнительный для модуля k. Ввиду этого будем иметь

$$\frac{\sin(2\varphi-\varphi_1)}{\sin\varphi_1}=\frac{1-k'}{1+k'},$$

откуда, составив производную пропорцию, получим:

$$\frac{\sin\varphi_1+\sin(2\varphi-\varphi_1)}{\sin\varphi_1-\sin(2\varphi-\varphi_1)}=\frac{1}{k'}.$$

Преобразуя сумму и разность синусов, без затруднения придем к равенству:

$$\operatorname{tg}(\varphi_1-\varphi)=k'\operatorname{tg}\varphi, \tag{27}$$

по которому удобно вычислять амплитуду φ_1 последующего интеграла, когда известна амплитуда φ и модуль $k'=\sqrt{1-k^2}$ предыдущего.

§ 16. Приведение формулы (26) к логарифмическому виду

Пусть $k', k_1', k_2', \dots$ — модули дополнительные для модулей $k, k_1, k_2, \dots$ формулы (26). Так как все они суть числа, меньшие единицы, то можно положить:

$$k=\sin\theta;\quad k_1=\sin\theta_1;\quad k_2=\sin\theta_2\dots$$

и тем самым

$$k'=\cos\theta;\quad k_1'=\cos\theta_1;\quad k_2'=\cos\theta_2\dots$$

В таком случае будем иметь:

$$k_1=\frac{1-k'}{1+k'}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}=\sin\theta_1;$$

таким же образом

$$k_2=\operatorname{tg}^2\frac{\theta_1}{2}=\sin\theta_2$$

и т. д. Следовательно:

$$1+k_1=1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}};\quad 1+k_2=\frac{1}{\cos^2\frac{\theta_1}{2}}$$

и т. д.

Внося эти выражения в равенство (26), находим:

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot\cos^2\frac{\theta_1}{2}\dots\cos^2\frac{\theta_{n-1}}{2}}\cdot\frac{\varphi_n}{2^n}. \tag{28}$$

При приближенном вычислении эллиптического интеграла первого рода можно пользоваться этой формулой. Но можно подвергнуть ее и дальнейшему преобразованию. Заметим, что

$$k_1^{2\prime}=1-k^2{}_1=1-\operatorname{tg}^4\frac{\theta}{2}=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^4\frac{\theta}{2}}=\frac{\cos\theta}{\cos^4\frac{\theta}{2}}=\cos^2\theta_1,$$

т. е.

$$\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\cos\theta_1}{\sqrt{\cos\theta}};$$

точно так же

$$\frac{1}{\cos^2\frac{\theta_1}{2}}=\frac{\cos\theta_2}{\sqrt{\cos\theta_1}}$$

и т. д.

После подстановки и сокращений равенство (28) принимает вид:

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{\varphi_n}{2^n}\cos\theta_n\cdot\sqrt{\frac{\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2\ldots\cos\theta_{n-1}}{\cos\theta}}. \qquad (29)$$

Сравнивая эту формулу с (28), мы видим, что (29) заключает в себе одну лишнюю величину, а именно $\cos\theta_n$. Но на практике приходится принимать $\cos\theta_n=1$, как это будет выяснено на примере.

§ 17. Пример

Вычислить интеграл

$$u=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}.$$

[*Bertrand*, Calcul intégral, стр. 662.]

Пользуясь формулой (29), вычисляем θ. В данном случае $\sin^2\theta=\frac{1}{2}$; $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$; следовательно, $\theta=45°$.

Вычисляем θ_1. Имеем:

$$\sin\theta_1=\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}=\operatorname{tg}^2 22°30',$$

$$\lg\sin\theta_1=2\lg\operatorname{tg}22°30'=\bar{1},\ 23444,$$

$$\theta_1=9°52'45''.$$

Вычисляем θ_2. Имеем:

$$\sin\theta_2=\operatorname{tg}^2\frac{\theta_1}{2}=\operatorname{tg}^2 4°56'22'',5,$$

$$\lg\sin\theta_2=2\lg\operatorname{tg}4°56'22'',5=\bar{3},87328,$$

$$\theta_2=25'41''.$$

Вычисляем θ_3. Имеем:

$$\sin\theta_3=\operatorname{tg}^2\frac{\theta_2}{2}=\operatorname{tg}^2 12'50'',5,$$

$$\lg\sin\theta_3=2\lg\operatorname{tg}12'50'',5=\bar{5},14434.$$

Можно принять $\theta_3=0$.

Вычисляем амплитуду φ_1. Согласно уравнению (27), имеем:

$$\operatorname{tg}(\varphi_1-\varphi)=k'\operatorname{tg}\varphi=\cos\theta\operatorname{tg}\varphi.$$

Но $\varphi=30°$; $k'=\cos 45°$; поэтому

$$\operatorname{tg}(\varphi_1-30°)=\cos 45°\cdot\operatorname{tg}30°=\frac{1}{\sqrt{6}};\quad \varphi_1=52°12'28''.$$

Вычисляем амплитуду φ_2. Имеем:

$$\operatorname{tg}(\varphi_2-\varphi_1)=k_1'\operatorname{tg}\varphi_1=\cos\theta_1\operatorname{tg}\varphi_1,$$

т. е.

$$\operatorname{tg}(\varphi_2-52°12'28'')=\cos 9°52'45''\operatorname{tg}52°12'28'',$$

$$\lg\operatorname{tg}(\varphi_2-52°12'28'')=0,10395,$$

$$\varphi_2-52°12'28''=51°47'32'',$$

$$\varphi_2=104°.$$

Вычисляем амплитуду φ_3. Имеем:

$$\operatorname{tg}(\varphi_3-\varphi_2)=k_2'\operatorname{tg}\varphi_2=\cos\theta_2\operatorname{tg}\varphi_2,$$

т. е.

$$\operatorname{tg}(\varphi_3-104°)=\cos 25'41''\operatorname{tg}104°,$$

или

$$\operatorname{tg}(180°-\varphi_3+104°)=\cos 25'41''\operatorname{ctg}14°,$$

$$\lg\operatorname{tg}(284°-\varphi_3)=0,60322,$$

$$284°-\varphi_3=75°59'59'';$$

$$\varphi_3=208°0'1''.$$

Отвлеченная мера

$$\varphi_3=\frac{748\,801\pi}{648\,000}.$$

Теперь, согласно (29), имеем:

$$u=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}=\frac{748\,801\pi}{2^8\cdot 648\,000}\cdot\cos 0\cdot\sqrt{\frac{\cos 9°52'45''\cdot\cos 25'41''}{\cos 45°}},$$

$$\lg u=\bar{1},\ 72883,$$

$$u=0,53562.$$

§ 18. Об одном свойстве интегралов первого и второго рода

Так как этим свойством нам в дальнейшем придется неоднократно пользоваться, то мы его здесь предварительно и отметим.

Докажем, что

$$\int_0^{n\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = nK,$$

где $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$, а n — целое число.

Считая n положительным, будем иметь:

$$\int_0^{n\frac{\pi}{2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \int_{\pi}^{3\frac{\pi}{2}} + \ldots + \int_{\frac{(n-1)\pi}{2}}^{n\frac{\pi}{2}}$$

Но каждый из интегралов второй части этого равенства равен K. Относительно первого это очевидно. Во втором положим $\varphi=\pi-\psi$. Получим:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = K.$$

В третьем интеграле придется положить $\varphi=\pi+\psi$; в четвертом $\varphi=2\pi-\psi$ и т. д. Следовательно:

$$\int_0^{n\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = nK. \tag{30}$$

Равенство это имеет место и при отрицательном n, в чем нетрудно убедиться, заменяя φ на $-\varphi$.

Совершенно так же можно доказать, что

$$\int_0^{n\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\; d\varphi = nE. \tag{31}$$

Из (30) следует еще, что

$$\int_0^{n\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = 2nK. \tag{32}$$

§ 19. Вычисление полного интеграла $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$

В § 13 уже было сделано предварительное замечание о вычислении этого интеграла. Теперь мы покажем, каким образом к его вычислению можно приспособить формулу (26).

Из равенства

$$\operatorname{tg}(\varphi_1-\varphi) = k' \operatorname{tg}\varphi$$

следует, что при $\varphi=0$ амплитуда $\varphi_1=0$, а при $\varphi=\frac{\pi}{2}$ амплитуда $\varphi_1=\pi$. Поэтому из (25):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1+k_1}{2}\int_0^{\pi} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi_1}}.$$

Но на основании формулы (32) предыдущего параграфа

$$\int_0^{\pi} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\varphi_1}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\varphi_1}}.$$

Следовательно:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = (1+k_1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\varphi_1}}$$

и далее:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\varphi_1}} = (1+k_2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi_2}{\sqrt{1-k_2^2\sin^2\varphi_2}}$$

. . . .

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi_{n-1}}{\sqrt{1-k_{n-1}^2\sin^2\varphi_{n-1}}} = (1+k_n)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi_n}{\sqrt{1-k_n^2\sin^2\varphi_n}}.$$

Если k_n достаточно мало, то можно считать, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi_n}{\sqrt{1-k_n^2\sin^2\varphi_n}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi_n = \frac{\pi}{2}.$$

Перемножение ряда полученных равенств после сокращения результата на общий множитель дает формулу:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = (1+k_1)(1+k_2)\ldots(1+k_n)\cdot\frac{\pi}{2}, \qquad (33)$$

которой, повторив выкладки § 16, можно придать удобный для логарифмирования вид:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2}\cos\theta_n\sqrt{\frac{\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2\cdots\cos\theta_{n-1}}{\cos\theta}}, \qquad (34)$$

Пример. Вычислить интеграл:

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2 75^\circ \sin^2\varphi}}.$$

Пользуемся формулой (34).

Согласно заданию, угол $\theta = 75^\circ$.

Вычисляем θ_1. Имеем:

$$\sin\theta_1 = \mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2} = \mathrm{tg}^2\, 37^\circ 30',$$

$$\lg\sin\theta_1 = 2\lg\mathrm{tg}\, 37^\circ 30' = \overline{1},76996,$$

$$\theta_1 = 36^\circ 4' 17''.$$

Вычисляем θ_2. Имеем:

$$\sin\theta_2 = \mathrm{tg}^2\frac{\theta_1}{2} = \mathrm{tg}^2\, 18^\circ 2' 8'',5,$$

$$\lg\sin\theta_2 = 2\lg\mathrm{tg}\, 18^\circ 2' 8'',5 = \overline{1},02454$$

$$\theta_2 = 6^\circ 4' 26''.$$

Вычисляем θ_3. Имеем:

$$\sin\theta_3 = \mathrm{tg}^2\frac{\theta_2}{2} = \mathrm{tg}^2\, 3^\circ 2' 13'',$$

$$\lg\sin\theta_3 = 2\lg\mathrm{tg}\, 3^\circ 2' 13'' = \overline{3},44944,$$

$$\theta_3 = 0^\circ 9' 42''.$$

Примем $\theta_4 = 0$.

Внося значения θ, θ_1, θ_2, θ_3 и θ_4 в формулу (34), получим:

$$K = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\cos 36^\circ 4' 17''\cdot\cos 6^\circ 4' 26''\cdot\cos 0^\circ 9' 42''}{\cos 75^\circ}},$$

$$\lg K = 0,44218,$$

$$K = 2,76807.$$

§ 20. Преобразование Ландена (продолжение)

Применяя в § 14 преобразование Ландена, мы рассматривали такие эллиптические интегралы первого рода, модули которых, уменьшаясь, стремятся к нулю.

Но существует и другой способ преобразования, основанный на применении возрастающих и стремящихся к единице модулей. Дело в том, что если модуль $k_n = 1$, то эллиптический интеграл может быть легко вычислен. Действительно, в этом случае

$$F(\varphi_n, 1) = \int_0^{\varphi_n} \frac{d\varphi_n}{\cos\varphi_n} = \ln\mathrm{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi_n}{2}\right). \qquad (35)$$

Переходя к самому преобразованию, мы заменим в основном интеграле $F(\varphi, k)$ его аргумент φ на новый φ_1, помощью равенства

$$\sin(2\varphi_1 - \varphi) = k\sin\varphi. \qquad (36)$$

Повторив выкладки, выполненные в § 14, мы придем к соотношению:

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{2}{1+k}\int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\varphi_1}}, \qquad (37)$$

котором модули k и k_1 связаны так, что

$$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}.$$

Следуя пути, намеченному в § 14, можно убедиться в том, что $k_1 > k$, т. е. что при преобразовании модуль возрастает.

Если через k_1' обозначим модуль, дополнительный модулю k_1, то будем иметь:

$$k_1' = \frac{1-k}{1+k}.$$

Отсюда

$$\frac{2}{1+k} = 1 + k_1'. \qquad (38)$$

Ввиду этого (37) дает:

$$F(\varphi, k) = (1+k_1')\,F(\varphi_1, k_1),$$

$$F(\varphi_1, k_1) = (1+k_2')\,F(\varphi_2, k_2),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F(\varphi_{n-1}, k_{n-1}) = (1+k_n')\,F(\varphi_n, k_n).$$

Перемножая эти равенства и сокращая результат на общего множителя, получим:

$$F(\varphi, k) = (1+k_1')(1+k_2')\ldots(1+k_n')\cdot F(\varphi_n, k_n).$$

Если модуль k_n близок к единице, то, принимая его равным единице, на основании (35) будем иметь:

$$F(\varphi,k)=(1+k_1')(1+k_2')\ldots(1+k_n')\ln\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi_n}{2}\right). \qquad (39)$$

Приведем эту формулу к виду, удобному для вычисления. Положим в (37), что верхний предел интеграла $\varphi_1=\frac{\pi}{2}$. Представив (36) в виде,

$$\operatorname{tg}(\varphi-\varphi_1)=k_1'\operatorname{tg}\varphi_1$$

(см. § 15), мы найдем, что при $\varphi_1=\frac{\pi}{2}$ аргумент $\varphi=\pi$. Приняв во внимание сказанное в § 18, найдем, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\varphi_1}}=(1+k)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \qquad (40)$$

Заменим здесь модуль k на k_1'. В силу соотношения

$$k'=\frac{2\sqrt{k_1'}}{1+k_1'}$$

придется k_1 заменить на k', и мы получим:

$$K'=(1+k_1')K_1'$$

и далее:

$$K'_1=(1+k_2')K_2'$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$K'_{n-1}=(1+k_n')K_n'.$$

Перемножение этих равенств и сокращение на общего множитель дает:

$$K'=(1+k_1')(1+k_2')\ldots(1+k_n')K_n'. \qquad (41)$$

Но так как модуль k_n' при беспрестанном возрастании n стремится к нулю, то при достаточно малом k_n' можно принять, что интеграл $K_n'=\frac{\pi}{2}$. В таком случае:

$$K'=(1+k_1')(1+k_2')\ldots(1+k_n')\frac{\pi}{2}.$$

Вследствие этого из (39) получим формулу:

$$F(\varphi,k)=\frac{2K'}{\pi}\ln\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi_n}{2}\right), \qquad (42)$$

удобную для вычисления интеграла $F(\varphi,k)$.

Отметим здесь еще одно соотношение, которым нам придется воспользоваться впоследствии.

На основании (40) имеем:

$$K_1=(1+k)K$$

и далее:

$$K_2=(1+k_1)K_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$K_n=(1+k_{n-1})K_{n-1}.$$

Отсюда

$$K_n=(1+k)(1+k_1)\ldots(1+k_{n-1})K. \qquad (43)$$

Теперь перемножим (41) и (43). Результат будет такой:

$$K_nK'=(1+k)(1+k_1')\ldots(1+k_{n-1})(1+k_1')(1+k_2')\ldots$$
$$\ldots(1+k_n')K_n'K.$$

Но на основании (38):

$$(1+k)(1+k_1')=2$$

и далее:

$$(1+k_1)(1+k_2')=2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(1+k_{n-1})(1+k_n')=2.$$

Следовательно:

$$K_nK=2^n\cdot K_n'\cdot K.$$

Если теперь положим, что n безгранично растет, то

$$\lim K_n'=\frac{\pi}{2}$$

и

$$\lim\frac{K_n}{2^n\cdot K}=\frac{\pi}{2K'}.$$

Пример. Формула (42) практически особенно удобна в тех случаях, когда модуль k близок к единице.

Пусть, например, требуется вычислить интеграл

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2 89^\circ\sin^2\varphi}}.$$

Исходя из равенства $\sin(2\varphi_1-\varphi)=k\cdot\sin\varphi$, находим:

$$\sin(2\varphi_1-30^\circ)=\sin 89^\circ\cdot\sin 30^\circ,$$

$$\lg\sin(2\varphi_1-30^\circ)=\bar{1},69890,$$

$$2\varphi_1-30^\circ=29^\circ59'41'',$$

$$45^\circ+\frac{\varphi_1}{2}=59^\circ59'55''.$$

В табл. 3 находим, что при $\theta=1^\circ$ полный интеграл $K'=1,57092$. Теперь имеем:

$$I=\frac{3,14184}{\pi}\cdot\ln\operatorname{tg}59^\circ59'55''.$$

Произведя вычисления, получим:

$$I=0,54930.$$

§ 21. Таблицы эллиптических интегралов и их применение (табл. 1)

В конце этой книги напечатаны таблицы, в которых имеются значения эллиптических интегралов, вычисленные с пятью десятичными знаками.

Табл. 1 содержит значения эллиптических интегралов первого рода, вычисленные для всех амплитуд φ от 0° до 90° и для всех модулярных углов от 0° до 90°, причем как амплитуды, так и модулярные углы идут через 1°. Эта таблица заимствована из книги Potin «Formules et tables numériques». Но из числа девяти десятичных знаков, имеющихся у Potin, здесь удержаны только пять.

Эллиптические интегралы первого рода обозначены в таблице через $F(\theta)$; буква θ обозначает модулярный угол.

Способ применения таблиц поясним на нескольких примерах.

Пример 1. Найти интеграл $F(\theta)$, если амплитуда $\varphi=41°$ и модуль $k=0{,}60182$.

Из уравнения $\sin\theta=0{,}60182$ находим модулярный угол $\theta=37°$. Таблица дает непосредственно:

$$F(37°)=0{,}73714.$$

Пример 2. Найти $F(\theta)$, если амплитуда $\varphi=27°$ и модуль $k=0{,}9474$.

Из уравнения $\sin\theta=0{,}9474$ получаем модулярный угол $\theta=71°20'$. В таблице непосредственно находим, что:

$$\text{углу } \theta=71° \text{ соответствует } F(71°)=0{,}48756,$$
$$\text{углу } \theta=72° \text{ соответствует } F(72°)=0{,}48778.$$

Предполагая, что приращения интеграла $F(\theta)$ пропорциональны приращениям угла θ, будем иметь:

$$\frac{F(71°20')-F(71°)}{F(72°)-F(71°)}=\frac{71°20'-71°}{72°-71°},$$

откуда, приняв во внимание значения $F(71°)$ и $F(72°)$, получим:

$$F(71°20')=0{,}48763.$$

Пример 3. Дано $F(9°)=1{,}09481$. Найти амплитуду φ.

В таблице находим, что

$$\text{амплитуде } \varphi=62° \text{ соответствует } F(9°)=1{,}08623,$$
$$\text{амплитуде } \varphi=63° \text{ соответствует } F(9°)=1{,}10385.$$

Предполагая, что приращения амплитуды пропорциональны приращениям интеграла F, получим:

$$\frac{\varphi-62°}{63°-62°}=\frac{1{,}09481-1{,}08623}{1{,}10385-1{,}08623},$$

откуда $\varphi=62°29'13''$.

§ 22. Интерполяционная формула

При вычислениях в более сложных случаях удобно пользоваться интерполяционной формулой, которую мы сейчас и составим.

Предположим, что требуется найти значение интеграла F, соответствующее модулярному углу θ и амплитуде φ, причем заданные углы θ и φ непосредственно в таблице не имеются.

Пусть θ_0 и φ_0 выраженные в градусах значения модулярного угла и амплитуды, ближайшие меньшие к заданным θ и φ и имеющиеся в таблице. Пусть F_0 соответствующее значение интеграла.

Будем иметь соответствие:

$$\begin{array}{lll} F_0 & \theta_0 & \varphi_0 \\ F_1 & \theta_0+1° & \varphi_0 \\ F_2 & \theta_0 & \varphi_0+1° \end{array}$$

Здесь F_1 и F_2 значения интегралов, соответствующие углам, находящимся в одной с ними строчке. Все числа этой таблицы нам известны. Величина F есть функция от θ и φ и если F, θ и φ мы примем за координаты некоторой точки, то точки (F, θ, φ) расположатся на некоторой поверхности. Интерполируя, примем в первом приближении эту поверхность за плоскость, причем плоскость должна проходить через точки:

$$(F_0, \theta_0, \varphi_0) \quad (F_1, \theta_0+1, \varphi_0) \quad (F_2, \theta_0, \varphi_0+1°).$$

Уравнение такой плоскости:

$$F-F_0=(F_1-F_0)\frac{\theta-\theta_0}{1°}+(F_2-F_0)\frac{\varphi-\varphi_0}{1°}. \qquad (44)$$

Отсюда, зная θ и φ, легко вычислить F. Этой же формулой можно пользоваться для вычисления θ, когда даны F и φ, и для вычисления φ, когда даны F и θ.

Пример 1. Вычислить $F(33°24')$, если амплитуда $\varphi=77°40'$. Здесь: $\theta=33°24'=33°{,}4$; $\theta_0=33°$; $\varphi_0=77°$.

В таблице находим:

$$F_0=1{,}44235; \quad F_1=1{,}44876; \quad F_2=1{,}46295.$$

После подстановки в формулу (44) и выполнения действий получим:

$$F=1{,}45865.$$

Пример 2. Вычислить модулярный угол θ, если $F(\theta)=1{,}27222$ и $\varphi=63°36'$.

Приняв $\varphi_0=63°$, подыскиваем в таблице для $F(\theta)$ ближайшее меньшее число. Находим $F_0=1{,}26920$, причем $\theta_0=53°$. Теперь находим:

$$F_1=1{,}27515 \quad \text{и} \quad F_2=1{,}29523.$$

Если подставим значения $\varphi, \varphi_0, \theta_0, F, F_0, F_1$ и F_2 в (44), то получим:

$$\theta=53°52'58''.$$

§ 23. Таблицы 2 и 3

Обе эти таблицы заимствованы из книги L. Lévy, «Précis élementaire de la théorie des fonctions elliptiques».

Табл. 2 содержит значения эллиптических интегралов второго рода, вычисленные для всех амплитуд от 0° до 90° и модулярных углов от 0° до 90°, причем амплитуды идут через 1°, а модулярные углы через 5

Эллиптические интегралы второго рода обозначены в таблице через $E(\theta)$. Способ пользования таблицей тот же, что и предыдущей. Но так как модулярные углы идут через 5°, то интерполяционная формула будет иметь вид:

$$E-E_0=(E_1-E_0)\frac{\theta-\theta_0}{5^\circ}+(E_2-E_0)\frac{\varphi-\varphi_0}{1^\circ}, \tag{45}$$

причем $\theta, \theta_0, \varphi, \varphi_0$ выражены в градусах.

Табл. 3 содержит значения полных эллиптических интегралов первого и второго рода.

Пример. Вычислить полный интеграл E при модуле $k=0,72$.

Из уравнения $\sin\theta=0,72$ находим $\theta=46°3'15''=46°,054$. В табл. 3 непосредственно находим, что углу $\theta=46°$ соответствует $E=1,34181$, углу $\theta=47°$ соответствует $E=1,33287$.

Так же, как и в § 21, составим пропорцию:

$$\frac{E-1,34181}{1,33287-1,34181}=\frac{46°,054-46°}{47°-46°},$$

из которой $E=1,34133$.

§ 24. Эллиптические интегралы с модулем, большим единицы

В практике вычислений приходится иногда отыскивать эллиптические интегралы с модулем, большим единицы. Такие интегралы всегда можн привести к интегралам с модулем, меньшим единицы. Пусть, наприме требуется вычислить интеграл

$$\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

модуль которого $k>1$, а верхний предел α определяется из равенства $\sin\alpha=\frac{1}{k}$. Введем вместо φ новую переменную ψ так, чтобы $\sin\varphi=\frac{1}{k}\cdot\sin\psi$. Мы видим, что если $\sin\varphi$ изменяется от 0 до $\frac{1}{k}$, то $\sin\psi$ изменяется от 0 до 1, т. е. ψ от 0 до $\frac{\pi}{2}$; и так как

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{d\psi}{\sqrt{k^2-\sin^2\psi}},$$

то

$$\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{1-\frac{1}{k^2}\sin^2\psi}}=\frac{1}{k}K\left(\frac{1}{k}\right).$$

На этом основании, например,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-2\sin^2\varphi}}=\frac{1}{\sqrt{2}}K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Но модулю $\frac{1}{\sqrt{2}}$ соответствует модулярный угол $\theta=45°$. И согласно табл. 3 имеем:

$$K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1,85407.$$

Следовательно:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-2\sin^2\varphi}}=1,311.$$

Можно показать, что для интегралов второго рода имеет место формула:

$$\int_0^\alpha \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\cdot d\varphi=\frac{1}{k}K\left(\frac{1}{k}\right)+k\left\{E\left(\frac{1}{k}\right)-K\left(\frac{1}{k}\right)\right\},$$

где $\sin\alpha=\frac{1}{k}$. Согласно этой формуле, пользуясь табл. 3, найдем:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-2\sin^2\varphi}\cdot d\varphi=0,599.$$

§ 25. Формула сложения для функции sn

1. Под именем формулы сложения для функции f вообще понимают выражение функции $f(u+v)$ через функции $f(u)$ и $f(v)$. Если зависимость между ними имеет характер алгебраический, то ее называют алгебраической формулой (иногда теоремой) сложения. Мы сейчас рассмотрим формулу сложения для функции $\operatorname{sn} u$ и покажем, что эта функция, взятая от суммы аргументов, выражается рационально через эллиптические функции каждого аргумента в отдельности. Имея в виду осветить вопрос путем аналогии, мы сначала дадим вывод формулы сложения для синуса, исходя, однако, из соображений, совершенно отличных от тех, которые приводятся в тригонометрии. За исходную точку рассуждений мы примем диференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=0 \tag{46}$$

и будем искать его интеграл в алгебраической форме.

Это можно сделать следующим образом: перепишем данное уравнение в виде:

$$\sqrt{1-y^2}\cdot dx+\sqrt{1-x^2}\cdot dy=0$$

и интегрируя его, получим:

$$\int\sqrt{1-y^2}\cdot dx+\int\sqrt{1-y^2}\cdot dy=\alpha,$$

где α — произвольная постоянная.

Но интегрирование по частям дает:

$$\int \sqrt{1-y^2}\,dx = x\sqrt{1-y^2} + \int \frac{xy\,dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dy = y\sqrt{1-x^2} + \int \frac{xy\,dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Следовательно:

$$x\cdot\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} + \int xy\left(\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\right) = \alpha.$$

Отсюда, принимая во внимание (46):

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = \alpha, \tag{47}$$

и, таким образом, интеграл в алгебраической форме найден. Теперь положим:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = u \quad \text{и} \quad \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = v, \tag{48}$$

т. е.

$$x = \sin u \quad \text{и} \quad y = \sin v$$

и, стало быть:

$$\sqrt{1-x^2} = \cos u; \quad \sqrt{1-y^2} = \cos v.$$

В таком случае (47) перепишется в форме:

$$\sin u\cdot\cos v + \sin v\cdot\cos u = \alpha. \tag{49}$$

С другой стороны, уравнение (46) можно представить в виде:

$$du + dv = 0,$$

если только учесть равенства (48). Интегрируя, имеем:

$$u + v = \beta, \tag{50}$$

где β — новая произвольная постоянная. Она, однако, связана с прежней. Связь между ними можно обнаружить очень просто, если в (49) и (50) положить $v = 0$. Это дает:

$$\sin u = \alpha \quad \text{и} \quad u = \beta.$$

т. е. $\alpha = \sin\beta$. Заменяя в этом равенстве α и β их значениями (49) и (50), приходим к формуле:

$$\sin(u+v) = \sin u\cdot\cos v + \cos u\cdot\sin v,$$

выражающей теорему сложения для синуса. И мы видим, что формула эта установлена помощью интегрального исчисления.

2. Этот же способ можно применить для установления формулы сложения эллиптической функции sn.

Будем искать интеграл уравнения

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = 0 \tag{51}$$

в алгебраической форме.

Умножим обе части уравнения на

$$\frac{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}{1-k^2x^2y^2}$$

и результат проинтегрируем. Получим:

$$\int \frac{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}{1-k^2x^2y^2}\,dx + \int \frac{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}\,dy = \alpha,$$

где α — произвольная постоянная.

Применив к первому из этих интегралов формулу интегрирования по частям, находим:

$$\int \frac{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}{1-k^2x^2y^2}\,dx =$$

$$= \frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}{1-k^2x^2y^2} + \int xy\,\frac{(1+k^2)(1+k^2x^2y^2)-2k^2(x^2+y^2)}{(1-k^2x^2y^2)^2\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}\,dy -$$

$$-2k^2\int \frac{x^2y^2}{(1-k^2x^2y^2)^2}\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}\cdot dx.$$

Аналогичный результат можно получить и для второго интеграла. Складывая оба результата, приходим к равенству:

$$\frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}{1-k^2x^2y^2} + \frac{y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2} +$$

$$+\int xy\,\frac{(1+k^2)(1+k^2x^2y^2)-2k^2(x^2+y^2)}{(1-k^2x^2y^2)^2}\left\{\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} +\right.$$

$$\left.+\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}\right\} -$$

$$-2k^2\int \frac{x^2y^2}{(1-k^2x^2y^2)^2}\left\{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}\cdot dx +\right.$$

$$\left.+\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\cdot dy\right\} = \alpha.$$

Но в силу данного уравнения (51) выражения, заключенные в фигурные скобки, исчезают, и мы имеем:

$$\frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} + y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2} = \alpha. \tag{52}$$

Такова алгебраическая форма интеграла уравнения (51). Теперь положим, что

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = u \quad \text{и} \quad \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = v, \tag{53}$$

т. е.

$$x = \operatorname{sn} u; \quad y = \operatorname{sn} v;$$

и, следовательно:

$$\sqrt{1-x^2}=\operatorname{cn} u;\ \sqrt{1-y^2}=\operatorname{cn} v;\sqrt{1-k^2x^2}=\operatorname{dn} u;\ \sqrt{1-k^2y^2}=\operatorname{dn} v.$$

В таком случае равенство (52) представится в виде:

$$\frac{\operatorname{sn} u\cdot\operatorname{cn} v\cdot\operatorname{dn} v+\operatorname{sn} v\cdot\operatorname{cn} u\cdot\operatorname{dn} u}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\cdot\operatorname{sn}^2 v}=\alpha. \tag{54}$$

Но, с другой стороны, ввиду (53), уравнение (51) можно переписать в виде:

$$du+dv=0,$$

откуда

$$u+v=\beta, \tag{55}$$

где β — произвольная постоянная. Отыскивая зависимость между α и β, положим в (54) и в (55) $v=0$. Будем иметь: $\operatorname{sn} v=0$; $\operatorname{cn} v=1$; $\operatorname{dn} v=1$. Следовательно, $\alpha=\operatorname{sn} u$ и $u=\beta$, т. е. $\alpha=\operatorname{sn}\beta$. Внося сюда на место α и β выражения (54) и (55), приходим к формуле:

$$\operatorname{sn}(u+v)=\frac{\operatorname{sn} u\cdot\operatorname{cn} v\cdot\operatorname{dn} v+\operatorname{sn} v\cdot\operatorname{cn} u\cdot\operatorname{dn} u}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\cdot\operatorname{sn}^2 v}, \tag{56}$$

выражающей теорему сложения для эллиптической функции sn.

§ 26. Формулы сложения для функций cn и dn. Формулы вычитания

Обращаясь к равенству (52), образуем выражения для $1-\alpha^2$ и для $1-k^2\alpha^2$. Получим:

$$1-\alpha^2=\frac{(1-k^2x^2y^2)^2-\left[x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}+y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\right]^2}{(1-k^2x^2y^2)^2}$$

и

$$1-k^2\alpha^2=\frac{(1-k^2x^2y^2)^2-k^2\left[x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}+y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\right]^2}{(1-k^2x^2y^2)^2}$$

Произведя несложные выкладки и извлекая затем квадратные корни найдем:

$$\sqrt{1-\alpha^2}=\frac{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}-xy\sqrt{1-k^2x^2}\cdot\sqrt{1-k^2y^2}}{1-k^2x^2y^2}.$$

и

$$\sqrt{1-k^2\alpha^2}=\frac{\sqrt{1-k^2x^2}\cdot\sqrt{1-k^2y^2}-k^2xy\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}}{1-k^2x^2y^2},$$

или

$$\operatorname{cn}(u+v)=\frac{\operatorname{cn} u\cdot\operatorname{cn} v-\operatorname{sn} u\cdot\operatorname{sn} v\cdot\operatorname{dn} u\cdot\operatorname{dn} v}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{sn}^2 v}, \tag{57}$$

$$\operatorname{dn}(u+v)=\frac{\operatorname{dn} u\cdot\operatorname{dn} v-k^2\operatorname{sn} u\cdot\operatorname{sn} v\cdot\operatorname{cn} u\cdot\operatorname{cn} v}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\cdot\operatorname{sn}^2 v}. \tag{58}$$

Правильность выбора знака при извлечении квадратного корня в этих формулах можно проверить, полагая $v=0$.

Если $k=0$, то из (56) и (57) получим формулы для $\sin(u+v)$ и $\cos(u+v)$; (58) дает тождество $1=1$.

Если в трех формулах сложения заменим v на $-v$, то будем иметь формулы вычитания:

$$\operatorname{sn}(u-v)=\frac{\operatorname{sn} u\cdot\operatorname{cn} v\cdot\operatorname{dn} v-\operatorname{sn} v\cdot\operatorname{cn} u\cdot\operatorname{dn} u}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\cdot\operatorname{sn}^2 v},$$

$$\operatorname{cn}(u-v)=\frac{\operatorname{cn} u\cdot\operatorname{cn} v+\operatorname{sn} u\cdot\operatorname{sn} v\cdot\operatorname{dn} u\cdot\operatorname{dn} v}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\cdot\operatorname{sn}^2 v},$$

$$\operatorname{dn}(u-v)=\frac{\operatorname{dn} u\cdot\operatorname{dn} v+k^2\operatorname{sn} u\cdot\operatorname{sn} v\cdot\operatorname{cn} u\cdot\operatorname{cn} v}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\cdot\operatorname{sn}^2 v}.$$

§ 27. Формулы умножения и деления аргумента на 2

Полагая в (56), (57) и (58) $v=u$, находим формулы удвоения аргумента:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sn} 2u&=\frac{2\operatorname{sn} u\cdot\operatorname{cn} u\cdot\operatorname{dn} u}{1-k^2\operatorname{sn}^4 u},\\ \operatorname{cn} 2u&=\frac{\operatorname{cn}^2 u-\operatorname{sn}^2 u\cdot\operatorname{dn}^2 u}{1-k^2\operatorname{sn}^4 u},\\ \operatorname{dn} 2u&=\frac{\operatorname{dn}^2 u-k^2\operatorname{sn}^2 u\cdot\operatorname{cn}^2 u}{1-k^2\operatorname{sn}^4 u}.\end{aligned}\right\} \tag{60}$$

Нетрудно получить и формулы деления аргумента на 2. Для этого можно вычесть $\operatorname{dn} 2u$ из единицы и $\operatorname{cn} 2u$ прибавить к единице; это дает:

$$1-\operatorname{dn} 2u=\frac{1-k^2\operatorname{sn}^4 u-\operatorname{dn}^2 u+k^2\operatorname{sn}^2 u\cdot\operatorname{cn}^2 u}{1-k^2\operatorname{sn}^4 u},$$

$$1+\operatorname{cn} 2u=\frac{1-k^2\operatorname{sn}^4 u+\operatorname{cn}^2 u-\operatorname{sn}^2 u\cdot\operatorname{dn}^2 u}{1-k^2\operatorname{sn}^4 u}.$$

Заменим в этих равенствах $\operatorname{cn}^2 u$ и $\operatorname{dn}^2 u$ их выражениями $\operatorname{cn}^2 u=1-\operatorname{sn}^2 u$ и $\operatorname{dn}^2 u=1-k^2\operatorname{sn}^2 u$ и разделим почленно первое на второе. Получим:

$$\frac{1-\operatorname{dn} 2u}{1+\operatorname{cn} 2u}=k^2\operatorname{sn}^2 u,$$

откуда, после замены u на $\frac{u}{2}$ и извлечения квадратного корня имеем:

$$\operatorname{sn}\frac{u}{2}=\pm\frac{1}{k}\sqrt{\frac{1-\operatorname{dn} u}{1+\operatorname{cn} u}}. \tag{61}$$

Выражение для $\operatorname{cn}\frac{u}{2}$ можно вывести так. Найти:

$$\operatorname{cn} 2u+\operatorname{dn} 2u=\frac{\operatorname{cn}^2 u-\operatorname{sn}^2 u\cdot\operatorname{dn}^2 u+\operatorname{dn}^2 u-k^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{cn}^2 u}{1-k^2\operatorname{sn}^4 u},$$

$$1+\operatorname{dn} 2u=\frac{1-k^2\operatorname{sn}^4 u+\operatorname{dn}^2 u-k^2\operatorname{sn}^2 u\cdot\operatorname{cn}^2 u}{1-k^2\operatorname{sn}^4 u},$$

затем заменить $\operatorname{sn}^2 u$ и $\operatorname{dn}^2 u$, согласно формулам:

$$\operatorname{sn}^2 u = 1 - \operatorname{cn}^2 u \quad \text{и} \quad \operatorname{dn}^2 u = 1 - k^2 + k^2 \operatorname{cn}^2 u$$

и полученные после этого равенства почленно поделить. Это приведет к соотношению:

$$\frac{\operatorname{cn} 2u + \operatorname{dn} 2u}{1 + \operatorname{dn} 2u} = \operatorname{cn}^2 u.$$

Отсюда после замены u на $\frac{u}{2}$ и извлечения квадратного корня, получим:

$$\operatorname{cn}\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{cn} u + \operatorname{dn} u}{1 + \operatorname{dn} u}}. \tag{62}$$

Формула деления аргумента на 2 для функции dn имеет вид:

$$\operatorname{dn}\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{cn} u + \operatorname{dn} u}{1 + \operatorname{cn} u}} \tag{63}$$

и выводится аналогично.

Найденные сейчас формулы для $\operatorname{sn}\frac{u}{2}$, $\operatorname{cn}\frac{u}{2}$ и $\operatorname{dn}\frac{u}{2}$ дают по два значения для каждой из этих функций. Это, однако, в том случае, когда известны $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$. Если известен только $\operatorname{sn} u$, то формулы несколько усложняются. Для функции $\operatorname{sn}\frac{u}{2}$ в зависимости от $\operatorname{sn} u$ получается восемь значений.

Заметим еще, что, исходя из формул сложения и вычитания, можно получить большое число соотношений, напоминающих тригонометрические.

§ 28. Функции sn, cn и dn от чисто мнимого аргумента

В § 8 мы отметили, что u и $\operatorname{sn} u$ связаны соотношением:

$$u = \int_0^{\operatorname{sn} u} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

В этом интеграле $\operatorname{sn} u = \sin(\operatorname{am} u)$ по абсолютной величине не больше единицы. Итак, функция $z = \operatorname{sn} u$ для вещественных значений u определяется посредством обращения эллиптического интеграла

$$\int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

в котором интегрирование ведется от $z=0$ до значения z, расположенного на отрезке $(-1, +1)$.

Мы придем к определению $\operatorname{sn} u$ для чисто мнимых значений аргумента рассматривая обращение интеграла

$$\int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

взятого от точки $z=0$ до точки с чисто мнимым аффиксом $z=yi$, вдоль соответствующего отрезка мнимой оси (о комплексных функциях, производных и интегралах от них см. ниже, главу III).

Так как при интегрировании вдоль отрезка мнимой оси от точки $z=0$ до точки $z=yi$ переменное интеграции t является чисто мнимым числом $t=ri$, причем вещественный коэфициент r изменяется от нуля до y, то имеем:

$$\int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = i\int_0^y \frac{dr}{\sqrt{(1+r^2)(1+k^2r^2)}}.$$

Интеграл, стоящий в правой части, является числом вещественным. Обозначая его через

$$v = \int_0^y \frac{dr}{\sqrt{(1+r^2)(1+k^2r^2)}}$$

и рассуждая так же, как это мы делали в начале § 5, найдем, что v возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, когда y возрастает от $-\infty$ до $+\infty$; иными словами, не только каждому значению y соответствует определенное значение v, но и обратно, каждому значению v соответствует определенное значение y. Следовательно, в соотношении:

$$w = iv = i\int_0^y \frac{dr}{\sqrt{(1+r^2)(1+k^2r^2)}} = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

каждому значению $w = iv$ соответствует определенное значение $z = iy$, т. е. z можно рассматривать как функцию от w. Эту функцию мы снова обозначаем через $\operatorname{sn} w$ и таким образом записываем:

$$z = iy = \operatorname{sn}(iv).$$

Таким образом, согласно нашему определению, sn от чисто мнимого аргумента (iv) имеет чисто мнимые значения. Покажем теперь, что коэфициент y в выражении $\operatorname{sn}(iv)$ можно просто выразить через эллиптические функции вещественного аргумента v. Для этого в эллиптическом интеграле

$$v = \int_0^y \frac{dr}{\sqrt{(1+r^2)(1+k^2r^2)}}$$

сделаем замену переменного интегрирования по формуле: $r = \frac{\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}$. Тогда получим:

$$v = \int_0^{\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}} \frac{\frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)^3}}}{\sqrt{\frac{1}{1-\tau^2}\cdot\frac{1-(1-k^2)\tau^2}{1-\tau^2}}} = \int_0^{\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}} \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k'^2\tau^2)}},$$

где

$$k'^2 = 1 - k^2.$$

Отсюда выводим, замечая, что $\left|\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right| < 1$:

$$\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = \operatorname{sn} v \quad \text{или} \quad y = \frac{\operatorname{sn} v}{\sqrt{1-\operatorname{sn}^2 v}} = \frac{\operatorname{sn} v}{\operatorname{cn} v}.$$

В обозначениях якобиевых функций здесь необходимо указать, что они соответствуют модулю k', дополнительному по отношению к первоначальному. Полная запись будет:

$$y = \frac{\operatorname{sn}(v;\ k')}{\operatorname{cn}(v;\ k')},$$

и, следовательно:

$$z = \operatorname{sn}(iv;\ k) = i\frac{\operatorname{sn}(v;\ k')}{\operatorname{cn}(v;\ k')}. \tag{64}$$

Определив sn от чисто мнимого аргумента, мы определяем cn и dn по формулам:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cn}(iv;\ k) &= \sqrt{1-\operatorname{sn}^2(iv;k)} = \sqrt{1+\frac{\operatorname{sn}^2(v;\ k')}{\operatorname{cn}^2(v;\ k')}} = \frac{1}{\operatorname{cn}(v;\ k')},\\ \operatorname{dn}(iv;\ k) &= \sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2(iv;\ k)} = \sqrt{1+k^2\frac{\operatorname{sn}^2(v;\ k')}{\operatorname{cn}^2(v;\ k')}} =\\ &= \frac{\sqrt{1-k'^2\operatorname{sn}^2(v;k')}}{\operatorname{cn}(v;\ k')} = \frac{\operatorname{dn}(v;\ k')}{\operatorname{cn}(v;\ k')}. \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

При $v = K'$ знаменатель дробей в правых частях формул (64), (65) обращается в нуль: $\operatorname{cn}(K',\ k') = 0$ в то время, как числители отличны от нуля:

$$\operatorname{sn}(K',\ k') = 1; \quad \operatorname{dn}(K',\ k') = k$$

(см. формулы в конце § 6; в них нужно заменить только применительно к рассматриваемому случаю k на k',

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad \text{на} \quad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}} \text{ и } k' \text{ на } k).$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{sn}(iK',\ k) = \infty,$$
$$\operatorname{cn}(iK',\ k) = \infty$$

и

$$\operatorname{dn}(iK',\ k) = \infty,$$

причем:

$$\operatorname{sn}(iK',\ k)\ \operatorname{cn}(K',\ k') = i,$$
$$\operatorname{cn}(iK',\ k)\ \operatorname{cn}(K',\ k') = 1,$$
$$\operatorname{dn}(iK',\ k)\operatorname{cn}(K',\ k') = k.$$

Если в найденных формулах (64), (65) положить $k = 0$ (и, следовательно, $k' = 1$), то якобиевы функции вырождаются в тригонометрические (и гиперболические) функции (см. § 11). Получим:

$$\sin vi = i\frac{\operatorname{th} u}{\frac{1}{\operatorname{ch} u}} = i\operatorname{sh} u,$$

$$\cos vi = \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{ch} u}} = \operatorname{ch} u,$$

$$1 = \frac{\frac{1}{\operatorname{ch} u}}{\frac{1}{\operatorname{ch} u}} = 1.$$

Последнее соотношение представляет собой тождество, первые два хорошо известны из анализа: они выводятся там из определения тригонометрических и гиперболических функций, посредством степенных рядов. Впрочем, эти формулы легко вывести и непосредственно, следуя во всем рассуждениям этого параграфа. Так, если $z = \sin u$, можно определить для u вещественного посредством обращения интеграла:

$$u = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

то, полагая z чисто мнимым: $z = yi$, будем интегрировать вдоль мнимой оси. Получим:

$$\int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = i\int_0^y \frac{dr}{\sqrt{1+r^2}} = iv = w.$$

Мы снова можем условиться считать по определению $z = yi$ синусом чисто мнимого аргумента $w = vi$:

$$z = \sin w.$$

Но:

$$v = \int_0^y \frac{dr}{\sqrt{1+r^2}} = \ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right),$$

следовательно:

$$y+\sqrt{1+y^2} = e^v \quad \text{и} \quad y = \frac{e^v-e^{-v}}{2} = \operatorname{sh} v.$$

Окончательно:

$$\sin(iv) = i\operatorname{sh} v.$$

§ 29. Функции sn, cn и dn от комплексного аргумента

Определив якобиевы функции для чисто мнимого значения аргумента, мы получаем формальную возможность, пользуясь теоремой сложения, определить их и для любого комплексного значения аргумента:

$w=u+iv$, где u и v вещественны. Именно, заменяя в (56) v на iv, получим:

$$\operatorname{sn}(u+iv)=\frac{\operatorname{sn}(u,k)\cdot\operatorname{cn}(iv,k)\cdot\operatorname{dn}(iv,k)+\operatorname{sn}(iv,k)\cdot\operatorname{cn}(u,k)\cdot\operatorname{dn}(u,k)}{1-k^2\operatorname{sn}^2(u,k)\cdot\operatorname{sn}^2(iv,k)}$$

Теперь на место $\operatorname{sn}(iv, k)$, $\operatorname{cn}(iv, k)$ и $\operatorname{dn}(iv, k)$ подставим их значения из формул (64), (65). Результат будет такой:

$$\operatorname{sn}(u+iv)=\lambda\,[\operatorname{sn}(u,k)\operatorname{dn}(v,k')+ \\ +i\operatorname{sn}(v,k')\cdot\operatorname{cn}(v,k')\cdot\operatorname{cn}(u,k)\cdot\operatorname{dn}(u,k)], \tag{66}$$

где

$$\lambda=\frac{1}{\operatorname{cn}^2(v,k')+k^2\operatorname{sn}^2(u,k)\cdot\operatorname{sn}^2(v,k')}. \tag{67}$$

Аналогичным способом для cn и dn получим:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{cn}(u+iv)&=\lambda\,[\operatorname{cn}(u,k)\operatorname{cn}(v,k')- \\ &\quad -i\operatorname{sn}(v,k')\operatorname{dn}(v,k')\operatorname{sn}(u,k)\operatorname{dn}(u,k)], \\ \operatorname{dn}(u+iv)&=\lambda\,[\operatorname{dn}(u,k)\operatorname{cn}(v,k')\operatorname{dn}(v,k')- \\ &\quad -ik^2\operatorname{sn}(v,k)\operatorname{sn}(u,k)\operatorname{cn}(u,k)].\end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Путем проверки можно убедиться, что определенные нами функции продолжают удовлетворять соотношениям (9) § 5.

Заметим, что совершенно аналогично, пользуясь фомулами:

$$\sin(iv)=i\operatorname{sh}v,$$
$$\cos(iv)=\operatorname{ch}v,$$

мы можем, формально применяя теоремы сложения тригонометрических функций:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

в случаю, когда $\alpha=u$, $\beta=iv$ (u и v вещественны), получить определение синуса и косинуса для любых комплексных значений аргумента в виде формул:

$$\sin(u+iv)=\sin u\cdot\cos iv+\cos u\cdot\sin iv=\sin u\cdot\operatorname{ch}v+i\cos u\cdot\operatorname{sh}v,$$
$$\cos(u+iv)=\cos u\cdot\cos iv-\sin u\cdot\sin iv=\cos u\cdot\operatorname{ch}v-i\sin u\cdot\operatorname{sh}v.$$

Эти формулы, как легко может убедиться читатель, находятся в полном согласии с классическими формулами Эйлера:

$$\sin(u+iv)=\frac{e^{-v+iu}-e^{v-iu}}{2i};\qquad \cos(u+iv)=\frac{e^{-v+iu}+e^{v-iu}}{2}$$

и могут быть получены из формул Эйлера, если в последних произвести замену:

$$e^{-v+iu}=e^{-v}\cdot e^{iu}=e^{-v}(\cos u+i\sin u),$$
$$e^{v-iu}=e^{v}\cdot e^{-iu}=e^{v}(\cos u-i\sin u).$$

§ 30. Теорема сложения в общем виде. Формулы «приведения»

Для якобиевых функций, определенных нами в § 29 для любого комплексного аргумента w, справедливы формулы, ранее установленные нами для функций от вещественного аргумента, и прежде всего справедливы формулы, выражающие теорему сложения. Так, например:

$$\operatorname{sn}(w_1+w_2)=\frac{\operatorname{sn}w_1\cdot\operatorname{cn}w_2\cdot\operatorname{dn}w_2+\operatorname{sn}w_2\cdot\operatorname{cn}w_1\cdot\operatorname{dn}w_1}{1-k^2\operatorname{sn}^2w_1\cdot\operatorname{sn}^2w_2}, \tag{56bis}$$

где $w_1=u_1+iv_1$ и $w_2=u_2+iv_2$ — какие-либо комплексные числа. Разумеется, это утверждение нуждается в особом доказательстве, так как теорема сложения доказывалась нами в § 25 лишь для sn от вещественного аргумента. Принципиально, проще всего было бы проверить справедливость формулы (56bis), опираясь на самое определение функции sn для комплексного аргумента. Именно, по формулам (66) и (67)

$$\operatorname{sn}(w_1+w_2)=\sin[(u_1+u_2)+i(z_1+z_2)]=$$
$$=\frac{\operatorname{sn}(u_1+u_2;k)\operatorname{dn}(v_1+v_2;k')}{\operatorname{cn}^2(v_1+v_2;k')+k^2\operatorname{sn}^2(u_1+u_2;k)\operatorname{sn}^2(v_1+v_2;k')}+$$
$$+\frac{i\operatorname{sn}(v_1+v_2;k')\operatorname{cn}(v_1+v_2;k')\operatorname{cn}(u_1+u_2;k)\operatorname{dn}(u_1+u_2;k)}{\operatorname{cn}^2(v_1+v_2;k')+k^2\operatorname{sn}^2(u_1+u_2;k)\operatorname{sn}^2(v_1+v_2;k')},$$

$$\operatorname{sn}w_1=\operatorname{sn}(u_1+iv_1)=$$
$$=\frac{\operatorname{sn}(u_1,k)\operatorname{dn}(v_1,k')+i\operatorname{sn}(v_1,k')\operatorname{cn}(v_1,k')\operatorname{cn}(u_1,k)\operatorname{dn}(u_1,k)}{\operatorname{cn}^2(v_1,k')+k^2\operatorname{sn}^2(u_1,k)\operatorname{sn}^2(v_1,k')},$$

$$\operatorname{sn}w_2=\operatorname{sn}(u_2+iv_2)=$$
$$=\frac{\operatorname{sn}(u_2,k)\operatorname{dn}(v_2,k')+i\operatorname{sn}(v_2,k')\operatorname{cn}(v_2,k')\operatorname{cn}(u_2,k)\operatorname{dn}(u_2,k)}{\operatorname{cn}^2(v_2,k')+k^2\operatorname{sn}^2(u_2,k)\operatorname{sn}^2(v_2,k')}.$$

Подставляя эти выражения в формулу (56bis) и заменяя в левой части: $\operatorname{sn}(u_1+u_2,k)$, $\operatorname{cn}(u_1+u_2,k)$, $\operatorname{dn}(u_1+u_2,k)$, $\operatorname{sn}(v_1+v_2,k')$, $\operatorname{cn}(v_1+v_2,k')$ и $\operatorname{dn}(v_1+v_2,k')$ их выражениями по формулам (56), (57) и (58), мы должны после алгебраических преобразований, при которых следует использовать формулы (9), получить в левой и правой частях одно и то же выражение. Однако такого рода проверка была бы крайне громоздкой. В главе VIII мы докажем справедливость формулы (56bis) для любых комплексных w_1 и w_2, пользуясь теорией аналитических функций. А сейчас выведем из формул (66), (67), (68) и из формулы (56bis) ряд важных следствий.

Прежде всего из формул (66), (67) получаем:

$$\operatorname{sn}(-w)=\operatorname{sn}(-u-iv)=$$
$$=\frac{\operatorname{sn}(-u,k)\operatorname{dn}(-v,k')+i\operatorname{sn}(-v,k')\operatorname{cn}(-v,k')\operatorname{cn}(-u,k)\operatorname{dn}(-u,k)}{\operatorname{cn}^2(-v,k')+k^2\operatorname{sn}^2(-v,k')\operatorname{sn}^2(-u,k)}.$$

Но, как мы видели в § 6, функция sn для вещественного аргумента является нечетной, и функции cn и dn — четными. Поэтому

$$\operatorname{sn}(-w)=$$
$$=-\frac{(\operatorname{sn} u,\ k)\operatorname{dn}(v,\ k')+i\operatorname{sn}(v,\ k')\operatorname{cn}(v,\ k')\operatorname{cn}(u,\ k)\operatorname{dn}(u,\ k)}{\operatorname{cn}^2(v,\ k')+k^2\operatorname{sn}^2(v,\ k')\operatorname{sn}^2(u,\ k)}=-\operatorname{sn} w,$$

т. е. формула

$$\operatorname{sn}(-w)=-\operatorname{sn} w \qquad (13\text{bis})$$

справедлива при любом комплексном w. Аналогично, при любом комплексном w имеем:

$$\operatorname{cn}(-w)=\operatorname{cn} w,\quad \operatorname{dn}(-w)=\operatorname{dn} w. \qquad (13\text{bis})$$

Рассмотрим теперь $\operatorname{sn}(w+K)$. Из формулы (56bis) выводим:

$$\operatorname{sn}(w+K)=\frac{\operatorname{sn} w\cdot\operatorname{cn} K\operatorname{dn} K+\operatorname{sn} K\operatorname{cn} w\operatorname{dn} w}{1-k^2\operatorname{sn}^2 w\cdot\operatorname{sn}^2 K}.$$

Но в конце § 6 мы видели, что $\operatorname{sn} K=1$, $\operatorname{cn} K=0$, $\operatorname{dn} K=k'$. Поэтому:

$$\operatorname{sn}(w+K)=\frac{\operatorname{cn} w\cdot\operatorname{dn} w}{1-k^2\operatorname{sn}^2 w}=\frac{\operatorname{cn} w\cdot\operatorname{dn} w}{\operatorname{dn}^2 w}=\frac{\operatorname{cn} w}{\operatorname{dn} w}. \qquad (20\text{bis})$$

Рассуждая аналогично, мы могли бы получить:

$$\operatorname{cn}(w+K)=-k'\frac{\operatorname{sn} w}{\operatorname{dn} w}\quad\text{и}\quad \operatorname{dn}(w+K)=\frac{k'}{\operatorname{dn} w}. \qquad (20\text{bis})$$

Эти формулы совпадают с формулами § 7, выведенными нами для вещественных значений аргумента.

Совершенно так же получим:

$$\operatorname{sn}(w+2K)=-\operatorname{sn} w,\quad \operatorname{cn}(w+2K)=-\operatorname{cn} w,\quad \operatorname{dn}(w+2K)=\operatorname{dn} w,$$
$$\operatorname{sn}(w+4K)=\operatorname{sn} w,\quad \operatorname{cn}(w+4K)=\operatorname{cn} w \qquad (10\text{bis})$$

для любого комплексного w. Отсюда следует, что функции sn и cn имеют вещественный период $4K$ и функция dn — вещественный период $2K$.

Выведем теперь группу новых формул, прибавляя к аргументу w выражения iK' и $K+iK'$. Мы убедимся, что каждая из якобиевых функций помимо вещественного периода имеет еще и по одному мнимому периоду.

Формула (56bis) неудобна для непосредственного вычисления $\operatorname{sn}(w+iK')$. В самом деле, если положить в ней $w_1=w$ и $w_2=iK'$, то в числителе и знаменателе дроби, стоящей в правой части, появятся члены: $\operatorname{sn} iK'$, $\operatorname{cn} iK'$ и $\operatorname{dn} iK'$, равные бесконечности. Чтобы избежать этого неудобства, перепишем формулу (56bis), умножив предварительно числитель и знаменатель на $\operatorname{cn}^2(-iw_2,\ k')$. Получим:

$$\operatorname{sn}(w_1+w_2)=\{\operatorname{cn}(w_1,k)\operatorname{cn}(w_2,k)\operatorname{cn}(-iw_2,k')\operatorname{dn}(w_2,k)\operatorname{cn}-iw_2,k')+$$
$$+\operatorname{sn}(w_2,k)\operatorname{cn}(-iw_2\ k')\operatorname{cn}(w_1,k)\operatorname{dn}(w_1,k)\operatorname{cn}(-iw_2,k')\}:$$
$$:\{\operatorname{cn}^2(-iw_2,k')-k^2\operatorname{sn}^2(w_1,k)[\operatorname{sn}(w_2,k)\operatorname{cn}(-iw_2,k')]^2\}.$$

Полагая теперь здесь $w_1=w$ и $w_2=iK'$ и замечая, что $\operatorname{sn}(iK'k)\operatorname{cn}(K'\,k')=i$, $\operatorname{cn}(iK',k)\operatorname{cn}(K',k')=1$, $\operatorname{dn}(iK',k)\operatorname{cn}(K',k')=k$ и $\operatorname{cn}(K',k')=0$ (см. § 28), находим:

$$\operatorname{sn}(w+iK')=\frac{\operatorname{sn}(w,k)\cdot 1\cdot k+i\operatorname{cn}(w,k)\operatorname{dn}(w,k)\cdot 0}{0^2-k^2\operatorname{sn}^2(w,k)\,i^2}=\frac{1}{k\operatorname{sn} w}. \qquad (69)$$

Совершенно таким же образом, пользуясь теоремами сложения для $\operatorname{cn} w$ и $\operatorname{dn} w$ (распространенными на комплексные значения аргумента)

$$\operatorname{cn}(w_1+w_2)=\frac{\operatorname{cn} w_1\cdot\operatorname{cn} w_2-\operatorname{sn} w_1\operatorname{sn} w_2\operatorname{dn} w_1\operatorname{dn} w_2}{1-k^2\operatorname{sn}^2 w_1\operatorname{sn}^2 w_2}, \qquad (57\text{bis})$$

$$\operatorname{dn}(w_1+w_2)=\frac{\operatorname{dn} w_1\operatorname{dn} w_2-k^2\operatorname{sn} w_1\operatorname{sn} w_2\operatorname{cn} w_1\operatorname{cn} w_2}{1-k^2\operatorname{sn}^2 w_1\operatorname{sn}^2 w_2}, \qquad (58\text{bis})$$

получим, предварительно умножив числитель и знаменатель правой части каждого из равенств на $\operatorname{cn}^2(-iw_2,k')$ и положив затем $w_1=w$ и $w_2=iK'$:

$$\operatorname{cn}(w+iK')=-i\frac{\operatorname{dn} w}{k\operatorname{sn} w},\qquad \operatorname{dn}(w+iK')=-i\frac{\operatorname{cn} w}{\operatorname{sn} w}. \qquad (70)$$

Двукратное применение формулы (69) дает:

$$\operatorname{sn}(w+2iK')=\frac{1}{k\operatorname{sn}(w+iK')}=\frac{1}{k\cdot\frac{1}{k\cdot\operatorname{sn} w}}=\operatorname{sn} w. \qquad (71)$$

Следовательно, функция $\operatorname{sn} w$ имеет мнимый период $2iK'$.

Точно так же найдем в результате двукратного применения формул (70):

$$\operatorname{cn}(w+2iK')=-\operatorname{cn} w;\ \operatorname{dn}(w+2iK')=-\operatorname{dn} w. \qquad (72)$$

В свою очередь, двукратное применение этих формул дает:

$$\operatorname{cn}(w+4iK')=\operatorname{cn} w;\ \operatorname{dn}(w+4iK')=\operatorname{dn} w, \qquad (73)$$

т. е. функции $\operatorname{cn} w$ и $\operatorname{dn} w$ имеют мнимый период $4iK'$.

Рассмотрим еще эффект прибавления выражения $K+iK'$, к аргументу якобиевых функций. Имеем, пользуясь первой из формул (20bis) и формулами (70):

$$\operatorname{sn}(w+K+iK')=\frac{\operatorname{cn}(w+iK')}{\operatorname{dn}(w+iK')}=\frac{\operatorname{dn} w}{k\operatorname{cn} w}. \qquad (74)$$

Аналогично:

$$\operatorname{cn}(w+K+iK')=-\frac{ik'}{k\operatorname{cn} w};\ \operatorname{dn}(w+K+iK')=ik'\frac{\operatorname{sn} w}{\operatorname{cn} w}. \qquad (75)$$

Наконец, двукратное применение формулы (74) дает:

$$\operatorname{sn}(w+2K+2iK')=\frac{\operatorname{dn}(w+K+iK')}{k\operatorname{cn}(w+K+iK')}=-\operatorname{sn} w. \qquad (76)$$

Точно так же:

$$\operatorname{cn}(w+2K+2iK')=\operatorname{cn} w;\ \operatorname{dn}(w+2K+2iK')=-\operatorname{dn} w. \qquad (77)$$

§ 31. Двоякопериодичность якобиевых функций

В предыдущем параграфе мы обнаружили, что якобиевы функции помимо вещественных периодов имеют еще и мнимые. Так как сумма или разность двух периодов функции является снова периодом этой функции, то каждая из якобиевых функций имеет бесчисленное множество комплексных периодов. Так, например, функция $\operatorname{sn} w$ имеет периоды:

$$\pm 4K, \pm 2iK', \pm 4K \pm 2iK', \pm 8K, \pm 4iK, 8K \pm 2iK', \ldots$$

Заметим, что каждая из элементарных периодических функций $\sin w$, $\cos w$, $\operatorname{tg} w$, $e^w, \ldots$) имеет также бесконечное множество периодов. Так, $\sin w$ имеет периоды: $\pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi \ldots$; $\operatorname{tg} w$ имеет периоды: $\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \pm 4\pi$, we^w — периоды: $\pm 2\pi i$, $\pm 4\pi i$, $\pm 6\pi i, \ldots$

Однако для каждой из этих функций может быть указан один основной период, такой, что всякий другой период той же функции можно получить, умножив основной период на некоторое целое число (положительное или отрицательное). Таким основным периодом для $\sin w$ является 2π (или -2π), для $\operatorname{tg} w$ π (или $-\pi$), для e^w $2\pi i$ (или $-2\pi i$).

Такого рода периодические функции называются одноперiодическими или просто периодическими. Если основной период одноперiодической функции $f(w)$ обозначить через ω, то любой другой период Ω будет иметь вид: $\Omega = m\omega$ (m—целое число).

В этой формуле можно придавать m также и нулевое значение, включая таким образом нуль в число периодов функции. В самом деле, нуль можно считать периодом любой функции, так как

$$f(w+0) = f(w).$$

В отличие от одноперiодических функций якобиевы функции являются двоякопериодическими.

Прежде всего, ни для какой из них, вообще (если только она не вырождается в тригонометрическую или гиперболическую функцию) нельзя найти одного основного периода ω, такого, чтобы всякий период этой функции был целым кратным от ω. В самом деле, если бы, например, для функции $\operatorname{sn} w$ был такой единственный основной период ω, то должны были бы иметь место соотношения:

$$4K = m_1 \cdot \omega \quad \text{и} \quad 2iK' = m_2 \cdot \omega,$$

где m_1 и m_2 — целые (вещественные числа).

Но тогда отношение $\frac{2iK'}{4K} = i\frac{K'}{2K}$, являющееся чисто мнимым числом, должно было бы равняться вещественному числу $\frac{m_2}{m_1}$, что невозможно.

Каждая из якобиевых функций имеет зато два основных периода ω_1 и ω_2, таких, что любой период Ω такой функции выражается через основные периоды по формуле:

$$\Omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2.$$

Не доказывая здесь этого предложения, укажем только основные периоды якобиевых функций. Так, для $\operatorname{sn} w$ за основные могут быть взяты периоды $\omega_1 = 4K$ и $\omega_2 = 2iK'$. Мы говорим: «могут быть взяты», так как выбор пары основных периодов для двоякопериодической функции может быть сделан бесчисленным множеством способов. Так, например, за основные периоды $\operatorname{sn} w$ можно принять также $\omega_1 + \omega_2 = 4K + 2iK'$ и $\omega_1 - \omega_2 = 4K - 2iK'$ или $2\omega_1 + 3\omega_2 = 8K + 6iK'$ и $3\omega_1 + 5\omega_2 = 12K + 10iK'$ и т. д.

Однако сделанный нами выбор является наиболее простым.

Для функции $\operatorname{cn} w$ мы обнаружили в § 30 следующие периоды: $4K$ [формула (10bis)], $4iK'$ [формула (73)] и $2K + 2iK'$ [формула (77)]. Очевидно, что периоды $4K$ и $4iK'$ не могут быть взяты за основные. В самом деле, период $2K + 2iK'$ нельзя представить в виде:

$$m_1 4K + m_2 4iK'$$

ни при каких m_1 и m_2 (целых), так как в последнем выражении коэфициенты при K_1 и iK' суть целые числа, кратные четырем, в то время как в выражении $2K + 2iK'$ каждый из соответствующих коэфициентов равен 2.

Можно показать, что за основные периоды функции $\operatorname{cn} w$ могут быть взяты числа $4K$ и $2K + 2iK'$. Заметим, что период $4iK'$ следующим образом выражается через эти два:

$$4iK' = -1 \cdot 4K + 2 \cdot (2K + 2iK').$$

Наконец, за основные периоды $\operatorname{dn} w$ могут быть взяты числа: $2K$ и $4iK'$.

Таким образом любой период функции $\operatorname{sn} w$ может быть записан в виде:

$$m_1 \cdot 4K + m_2 2iK'$$

любой период $\operatorname{cn} w$ в виде:

$$m_1 \cdot 4K + m_2 (2K + 2iK')$$

и любой период $\operatorname{dn} w$ в виде:

$$m_1 \cdot 2K + m_2 4iK'.$$

Здесь m_1 и m_2 обозначают целые числа (или нули).

§ 32. Параллелограм периодов. Конгруэнтные точки

Для того чтобы нагляднее представить себе поведение якобиевых функций комплексного аргумента w, воспользуемся плоскостью комплексного переменного w, где каждому значению $w = u + iv$ соответствует точка с прямоугольными декартовыми координатами u, v.

Обозначая основные периоды якобиевой функции $f(w)$ (какой из трех, пока безразлично) через ω_1 и ω_2, отметим точки с аффиксами ω_1 и ω_2. Вместе с точками с аффиксами $w = 0$ и $w = \omega_1 + \omega_2$ (которые также изображают собой периоды нашей функции) эти точки являются вершинами параллелограма, называемого основным параллелограмом периодов. В случае $\operatorname{sn} w$ параллелограмом периодов будет прямоугольник со сторонами $4K$ и $2K'$, в случае $\mathrm{dn}\, w$ — прямоугольник со сторонами $2K$ и $4K'$ и, наконец, в случае $\mathrm{cn}\, w$ — параллелограм с основанием $4K$ углом при основании $\mathrm{arctg}\, \frac{K'}{K}$ и высотой $2K'$.

Покроем теперь всю плоскость сетью параллелограмов, равных основному параллелограму периодов и одинаково с ним расположенных (так что каждый из них может быть совмещен с основным путем параллельного переноса (без поворота). При этом потребуем, чтобы параллелограмы не налегали друг на друга и не оставляли просветов в плоскости. Тогда каждая точка плоскости будет лежать внутри или на контуре некоторого параллелограма. (В последнем случае она принадлежит одновременно контурам двух или четырех параллелограмов, смотря по тому, отлична она от вершины параллелограма или нет.)

Покажем, что каков бы ни был аффикс W этой точки, всегда в основном параллелограме (исключая из него стороны, не проходящие через начало координат) найдется одна, и только одна, точка с аффиксом w, таким, что

$$W = w + \Omega,$$

где $\Omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ есть период функции $f(w)$.

Для доказательства сдвинем, как одно целое, параллелограм, внутри или на границе которого лежит точка W, так, чтобы после сдвига он совместился с основным параллелограмом. Пусть w' будет аффикс той точки, в которую попадет точка W. Очевидно, что разность между первоначальным аффиксом точки (W) и новым (w') будет одна и та же для всех точек данного параллелограма. Геометрически она представится вектором перемещения, который можно разложить на две компоненты, параллельные сторонам параллелограма. Каждая из этих компонент будет отличаться лишь целочисленным множителем от соответствующего вектора, образующего сторону основного параллелограма. Поэтому

$$W - w' = m'\omega_1 + m''\omega_2.$$

Если теперь w' не лежит на стороне основного параллелограма, не проходящей через начало, то теорема доказана ($w' = w_1$, $m' = m_1$ и $m'' = m_2$).

Если нет, если она лежит, например, на стороне, не проходящей через начало и параллельной вектору, изображающему число ω_1, то точка $w = w' - \omega_2$ удовлетворяет условиям теоремы: действительно, она лежит на стороне основного параллелограма, проходящей через начало, и, кроме того, связана с W соотношением:

$$W - w = W - w' + \omega_2 = m'\omega_1 + (m'' + 1)\,\omega_2.$$

(Здесь следует положить: $m' = m_1$ и $m'' + 1 = m_2$).

Две точки, аффиксы которых отличаются периодом, называются *конгруэнтными.* Мы можем формулировать поэтому наше предложение следующим образом: *для всякой точки комплексной плоскости существует одна, и только одна, конгруэнтная точка в основном параллелограме периодов (исключая из него стороны, не проходящие через начало координат).*

Так как значения эллиптической функции в двух конгруэнтных точках одинаковы, то достаточно изучить поведение функции внутри основного параллелограма и на его сторонах, прилегающих к началу, чтобы знать поведение функции во всей плоскости.

В каждом параллелограме нашей сети функция принимает те же значения, что и в основном параллелограме и притом в той же последовательности.

§ 33. Нули и полюсы якобиевых функций

Отыщем теперь все те точки основного параллелограма периодов, в которых якобиева функция обращается в нуль (аффиксы этих точек, а иногда и сами точки называются нулями функции), а также те точки, в которых функция обращается в ∞ (аффиксы таких точек, а иногда и сами точки называются полюсами функции). Тогда мы будем знать все возможные нули и все возможные полюсы функции: они получатся из нулей и полюсов, лежащих в основном параллелограме, путем прибавления к ним периодов.

Проведем исследование для функции $\mathrm{sn}\, w$, а для остальных сообщим только результат (рассуждать можно совершенно так же).

По формулам (66) и (67):

$$\mathrm{sn}\, w = \frac{\mathrm{sn}\,(u, k)\,\mathrm{dn}\,(v, k') + i\,\mathrm{sn}\,(v, k')\,\mathrm{cn}\,(v, k')\,\mathrm{cn}\,(u, k)\,\mathrm{dn}\,(u, k)}{\mathrm{cn}^2\,(v, k') + k^2\,\mathrm{sn}^2\,(u, k)\,\mathrm{sn}^2\,(v, k')}.$$

Для того чтобы комплексное число, каким представляется $\mathrm{sn}\, w$, обратилось в нуль, нужно, чтобы обратились в нуль одновременно его вещественные и мнимые части, т. е. нужно, чтобы выполнялись равенства:

$$\frac{\mathrm{sn}\,(u, k)\,\mathrm{dn}\,(v, k')}{\mathrm{cn}^2\,(v, k') + k^2\,\mathrm{sn}^2\,(u, k)\,\mathrm{sn}^2\,(v, k')} = 0, \tag{78}$$

$$\frac{\mathrm{sn}\,(v, k')\,\mathrm{cn}\,(v, k')\,\mathrm{cn}\,(u, k)\,\mathrm{dn}\,(u, k)}{\mathrm{cn}^2\,(v, k') + k^2\,\mathrm{sn}^2\,(u, k)\,\mathrm{sn}^2\,(v, k')} = 0. \tag{79}$$

Отыщем, при каких значениях u и v обращаются в нуль числители дробей, стоящих в левых частях этих уравнений. Если знаменатели при этом в нуль не обращаются, то соответствующие значения $w = u + iv$ и будут искомыми нулями $\mathrm{sn}\, w$. Заметим, что так как u и v числа вещественные, то мы можем опираться в нашем исследовании на хорошо известное нам из § 6 и 12 поведение якобиевых функций для вещественных значений аргумента.

Приравнивая нулю числитель дроби из уравнения (78), находим:

$$\mathrm{sn}\,(u, k) = 0$$

так как $\mathrm{dn}\,(v, k')$ не обращается в нуль ни при каком вещественном значении v).

Но $\mathrm{sn}\,(u, k)$ при u, изменяющемся от 0 до $4K$ (мы ищем сейчас нули, лежащие в основном параллелограме, почему $0 \leqslant u \leqslant 4K$), обращается в нуль только лишь при $u = 0$, $u = 2K$ и $u = 4K$.

При этих значениях u имеем:

$$\operatorname{cn} 0 = 1, \quad \operatorname{cn} 2K = -1, \quad \operatorname{cn} 4K = 1,$$
$$\operatorname{dn} 0 = 1, \quad \operatorname{dn} 2K = 1, \quad \operatorname{dn} 4K = 1$$

см. формулы в конце § 6).

Поэтому числитель дроби в уравнении (79) обратится в $\pm \operatorname{sn}(v, k')\operatorname{cn}(v, k')$, а знаменатель в $\operatorname{cn}^2(v, k')$.

Очевидно, что соответствующее значение дроби: $\pm\frac{\operatorname{sn}(v, k')}{\operatorname{cn}(v, k')}$ может равняться нулю лишь при значениях v, при которых $\operatorname{sn}(v, k')$ обращается в нуль, т. е., ограничиваясь значениями $v: 0 \leqslant v \leqslant 2K'$, при $v = 0$, $v = 2K'$.

Знаменатель $\operatorname{cn}^2(v, k') + k^2 \operatorname{sn}^2(u, k) \operatorname{sn}^2(v, k')$ обеих дробей при найденных значениях u и v равен единице, т. е. в нуль не обращается.

Таким образом получим все возможные нули $\operatorname{sn} w$, лежащие в основном параллелограме, комбинируя значения $u = 0$, $u = 2K$, $u = 4K$ со значениями $v = 0$ и $v = 2K'$ найдем:

$$w = 0 + 0 \cdot i = 0; \quad 0 + 2K'i = 2K'i; \quad 2K + 0 \cdot i = 2K; \quad 2K + 2K'i;$$
$$4K + 0 \cdot i = 4K; \quad 4K + 2K'i.$$

Из них только $w = 0$ и $w = 2K$ не лежат на сторонах основного параллелограма, не проходящих через начало координат. Прибавляя к каждому из чисел 0 и $2K$ любой период, получим все возможные нули функции $\operatorname{sn} w$:

$$w = 4K \cdot m_1 + 2iK'm_2,$$
$$w = 2K + 4K \cdot m_1 + 2iK'm_2.$$

Совершенно аналогично можно было бы отыскать все полюсы функции $\operatorname{sn} w$. Только теперь нужно было бы приравнивать нулю не числитель, а знаменатель выражения $\operatorname{sn} w$.

Полюсами $\operatorname{sn} w$, лежащими внутри основного параллелограма, являются: $w = K'i$ и $w = 2K + K'i$.

Все возможные полюсы $\operatorname{sn} w$ заключаются поэтому в формулах:

$$w = K'i + 4Km_1 + 2K'im_2,$$
$$w = 2K + K'i + 4Km_1 + 2K'im_2.$$

Нули и полюсы в основном параллелограме для каждой из трех кобиевых функций отмечены в следующей табличке:

	$\operatorname{sn} u$		$\operatorname{cn} u$		$\operatorname{dn} u$	
Нули	0	$2K$	K	$3K$	$K+K'i$	$K+3K'i$
Полюсы	$K'i$	$2K+K'i$	$2K+K'i$	$4K+K'i$	$K'i$	$3K'i$

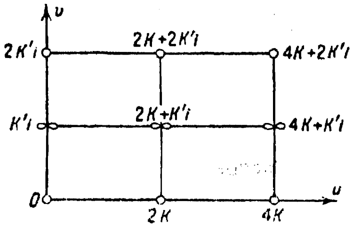
§ 34. Поведение якобиевых функций на сторонах и средних линиях параллелограма периодов

Мы ограничимся здесь рассмотрением поведения $\operatorname{sn} w$. Рассуждая аналогично, читатель может изучить поведение $\operatorname{cn} w$ и $\operatorname{dn} w$.

I. На фиг. 4 отдельно начерчен основной параллелограм периодов функции $\operatorname{sn} w$.

Аффиксы его вершин суть 0, $4K$, $4K + 2K'i$, $2K'i$.

Мы уже видели раньше, что вещественным значениям аргумента w соответствуют вещественные значения $\operatorname{sn} w$. И если аргумент будет изменяться вдоль вещественной оси от 0 до $4K$, то функция $\operatorname{sn} w$, оставаясь все время вещественной, будет при значениях w, равных 0, K, $2K$, $3K$, $4K$, иметь значения: 0, 1, 0, -1, 0.



Фиг. 4

Посмотрим теперь, что станет с функцией $\operatorname{sn} w$, когда w будет принимать чисто мнимые значения.

На основании формулы (64) имеем:

$$\operatorname{sn}(vi, k) = i\frac{\operatorname{sn}(v, k')}{\operatorname{cn}(v, k')},$$

где v — вещественное.

Отсюда заключаем, что когда w изменяется вдоль мнимой оси Ov, то функция $\operatorname{sn} w$ получает чисто мнимые значения: при w, равных 0, $K'i$, $2K'i$, ее значения будут: 0, ∞, 0.

Чтобы проследить за характером изменения функции $\operatorname{sn} u$ в точках верхней стороны основного параллелограма и его правой стороны, достаточно вспомнить, что периодами $\operatorname{sn} w$ служат $4K$ и $2K'i$. Следовательно, картина для верхней стороны будет та же, что и для нижней, а для правой — та же, что и для левой.

Если бы понадобилось исследовать значения функции $\operatorname{sn} w$ в точках средних линий параллелограма, то это нетрудно сделать, пользуясь формулой (§ 30):

$$\operatorname{sn}(K'i + u) = \frac{1}{k \operatorname{sn} u}$$

для линии, параллельной оси Ou, и формулой

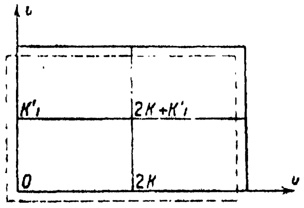
$$\operatorname{sn}(2K + iv) = -\operatorname{sn} iv$$

для линии, параллельной оси Ov. При этом в первом случае придется менять u от 0 до $4K$, а во втором v от 0 до $2K'$.

В точке пересечения средних линий будем иметь (§ 51):

$$\operatorname{sn}(2K + K'i) = \infty.$$

На фиг. 4 все те точки, в которых функция $\operatorname{sn} w$ обращается в нуль нули функции), обозначены кружками, а те, в которых функция обращается в бесконечность (полюсы), отмечены знаками ∞. В общем мы видим, что $\operatorname{sn} w$ обращается в нуль в шести точках и в бесконечность в трех. Но из всех этих точек к основному параллелограму можно отнести только два нуля (0 и $2K$) и два полюса ($K'i$ и $2K+K'i$). Прочие придется отнести к параллелограмам, смежным с основным. Особенно наглядно это можно видеть, если основной параллелограм несколько сдвинуть по способу параллельного перенесения, как показано на фиг. 5.



Фиг. 5

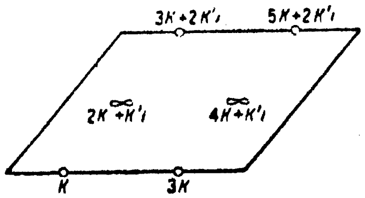
Мы доказали выше, что кроме тех нулей и полюсов, которые нами отмечены, других в основном параллелограме быть не может. Таким образом в основном, а стало быть, и во всяком параллелограме периодов функция $\operatorname{sn} w$ имеет только два нуля и два полюса.

Мы указали здесь прием, помощью которого можно изучить распределение значений функции $\operatorname{sn} w$ вдоль некоторых прямых, параллельных осям. Чтобы изучить распределение значений этой функции в прочих точках параллелограма периодов, надо образовать

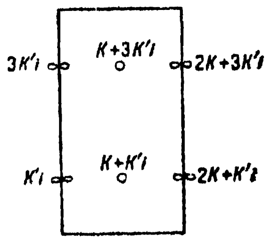
$$\operatorname{sn}(u+v\cdot i)$$

и менять u от 0 до $4K$ и v от 0 до $2K'$. Выполнять этого, однако, здесь мы не будем.

2. Не входя в подробности, мы укажем только вид параллелограмов периодов для функций $\operatorname{cn} w$ и $\operatorname{dn} w$ (фиг. 6 и 7).



Фиг. 6



Фиг. 7

§ 35. Вычисление значений функций sn *u*, cn *u* и dn *u*

Если дан аргумент u и модуль k (или модулярный угол θ), то вычисление функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$ производится весьма просто при помощи табл. 1 и обыкновенных логарифмических таблиц.

Пример 1. Вычислить функции $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$, если $u=0{,}26444$ и модулярный угол $\theta=69°$.

Прежде всего определим число K. При $\theta=69°$, согласно табл. 3:

$$K=2{,}46100.$$

Мы видим, что в нашем случае $u<K$. Обращаемся к табл. 1. В ней находим, что при $u=0{,}26444$ и $\theta=69°$ амплитуда $\varphi=15°$. Следовательно, на основании формул

$$\operatorname{sn} u=\sin\varphi \quad \text{и} \quad \operatorname{cn} u=\cos\varphi$$

будем иметь:

$$\operatorname{sn} 0{,}26444=\sin 15°=0{,}25882,$$
$$\operatorname{cn} 0{,}26444=\cos 15°=0{,}96593.$$

Далее, согласно формуле:

$$\operatorname{dn} u=\sqrt{1-\sin^2\theta\cdot\sin^2 u}$$

находим:

$$\lg \operatorname{dn} 0{,}26444=\bar{1}{,}98693,$$
$$\operatorname{dn} 0{,}26444=0{,}97035.$$

Пример 2. Вычислить $\operatorname{sn} 5{,}8423$, если модулярный угол $\theta=28°$. При $\theta=28°$, согласно табл. 3:

$$K=1{,}67006.$$

Пользуясь формулою приведения, пишем:

$$\operatorname{sn} 5{,}8423=\operatorname{sn}(5{,}8423-4K)=\operatorname{sn}(-0{,}83794)=-\operatorname{sn} 0{,}83794.$$

Табл. 1 при $\theta=28°$ дает соответствие:

$$46° \ldots\ldots\ldots 0{,}82052$$
$$47° \ldots\ldots\ldots 0{,}83908$$

Теперь из пропорции (см. § 21)

$$\frac{\varphi-46°}{47°-46°}=\frac{0{,}83794-0{,}82052}{0{,}83908-0{,}82052}$$

находим:

$$\varphi=46°56'19''; \quad \lg\sin\varphi=\bar{1}{,}86369; \quad \sin\varphi=0{,}73062;$$

следовательно:

$$\operatorname{sn} 5{,}8423=-0{,}73062.$$

Пример 3. Вычислить $\operatorname{sn}(0{,}38437 i)$ при модулярном угле $\theta=78°$. На основании формулы (64) будем иметь:

$$\operatorname{sn}(0{,}38437\, i, k)=i\,\frac{\operatorname{sn}(0{,}38437, k')}{\operatorname{cn}(0{,}38437, k')}.$$

здесь $k=\sin 78°$; $k'=\sin 12°$.

При модулярном угле $\theta=12°$ и $u=0{,}38437$, пользуясь табл. 1, находим амплитуду $\varphi=22°$.

Поэтому

$$\operatorname{sn}(0{,}38437, k')=\sin 22°,$$
$$\operatorname{cn}(0{,}38437, k')=\cos 22°;$$

следовательно:

$$\operatorname{sn}(0{,}38437\, i)=i\operatorname{tg} 22°=0{,}40403 i.$$

§ 36. Вычисление k, когда даны sn u и модуль k.

Предположим, что из уравнения

$$\operatorname{sn}(u, k) = a,$$

в котором k и a известны, требуется определить u. При решении этого вопроса надлежит отличать несколько случаев.

1. $$0 < a < 1.$$

Переписав заданное уравнение в виде:

$$\sin\varphi = a,$$

определим из него амплитуду φ. Модулярный угол определим помощью равенства $\sin\theta = k$.

Зная φ и θ при помощи табл. 1, находим соответствующее им значение аргумента u, которое обозначим через u_0. Общее решение будет иметь вид:

$$u = u_0 + 4mK + 2nK'i,$$

где m и n — произвольные целые числа.

Пример. Решить уравнение

$$\operatorname{sn}(u;\ 0{,}5) = 0{,}971.$$

Здесь $\sin\varphi = 0{,}971$; $\varphi = 76°10'$. Из уравнения $\sin\theta = 0{,}5 = k$ находим $\theta = 30°$.

Теперь воспользуемся табл. 1. При $\theta = 30°$ в ней находим, что

амплитуде 76° соответствует аргумент 1,40452;
амплитуде 77° соответствует аргумент 1,42449.

Из пропорции

$$\frac{u_0 - 1{,}40452}{1{,}42449 - 1{,}40452} = \frac{76°10' - 76°}{77° - 76°}$$

находим:

$$u_0 = 1{,}40785.$$

Обращаясь к табл. 3, находим, что при модулярном угле $\theta = 30°$:

$$K = 1{,}68575.$$

При модулярном угле $\theta = 60°$:

$$K' = 2{,}15652.$$

Теперь имеем общее решение:

$$u = 1{,}40785 + 6{,}743\,m + 4{,}31304\,ni,$$

где m и n — произвольные целые числа.

2. $$1 < a < \frac{1}{k}.$$

Будем искать u в форме $K + vi$. Наше уравнение перепишется в виде.

$$\operatorname{sn}(K + vi,\ k) = a.$$

Но, согласно формулам (20bis) и (65) будем иметь:

$$\operatorname{sn}(K + vi, k) = \frac{\operatorname{cn}(vi, k)}{\operatorname{dn}(vi, k)} = \frac{1}{\operatorname{dn}(v, k')}.$$

Следовательно:

$$\frac{1}{\operatorname{dn}(v, k')} = a$$

и отсюда

$$\operatorname{sn}(v, k') = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{ak'}.$$

В этом уравнении только v неизвестно. Так как количество $\frac{\sqrt{a^2 - 1}}{ak'}$ больше нуля и меньше единицы, то мы приходим к первому случаю.

3. $$\frac{1}{k} < a < \infty.$$

Будем искать u в форме $K + K'i + v$. Уравнение принимает вид:

$$\operatorname{sn}(K + K'i + v,\ k) = a.$$

Но пользуясь формулой (74), будем иметь:

$$\operatorname{sn}(K + K'i + v, k) = \frac{\operatorname{dn}(v, k)}{k\operatorname{cn}(v, k)}.$$

Вследствие этого наше уравнение представится так:

$$\frac{\operatorname{dn}(v, k)}{k\cdot\operatorname{cn}(v, k)} = a.$$

Отсюда уже нетрудно получить, что

$$\operatorname{sn}(v, k) = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{a^2k^2 - 1}{a^2 - 1}}.$$

Таким образом вопрос приведен к первому случаю.

4. Если a есть число отрицательное и равное $-b$, где $b > 0$, то $\operatorname{sn}(u, k) = -b$, или $\operatorname{sn}(-u, k) = b$ и приходим к рассмотренному раньше случаю.

5. Пусть, наконец, a — число чисто мнимое, т. е. $a = bi$, где b — вещественное. Будем искать аргумент u в формуле vi. Мы получим:

$$\operatorname{sn}(vi,\ k) = bi,$$

или вследствие формулы (65):

$$\frac{\operatorname{sn}(v, k')}{\operatorname{cn}(v, k')} = b,$$

тогда

$$\operatorname{sn}(v, k') = \frac{b}{\sqrt{1 + b^2}},$$

имеем первый случай.

§ 37. Вычисление u, когда даны $\operatorname{cn} u$ или $\operatorname{dn} u$ и модуль k

Пусть $\operatorname{cn}(u, k) = b$. Требуется по данным b и k найти u. Имеем:

$$\operatorname{sn}(u, k) = \sqrt{1 - b^2} = a.$$

И если u_0 есть одно решение, то общее решение:

$$u = u_0 + 4mK + 2n(K + K'i).$$

Пусть $\operatorname{dn}(u, k) = c$. Будем иметь:

$$\operatorname{sn}(u, k) = \frac{1}{k}\sqrt{1 - c^2} = a.$$

Если u_0 есть одно решение, то вообще

$$u = u_0 + 2mK + 4nK'i.$$

В формулах, выражающих общее решение, буквы m и n обозначают произвольные целые числа.

УПРАЖНЕНИЯ

Доказать, что

1. $\operatorname{sn}(u+v) + \operatorname{sn}(u-v) = \dfrac{2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}$.

2. $\operatorname{cn}(u+v) + \operatorname{cn}(u-v) = \dfrac{2 \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}$.

3. $\operatorname{dn}(u+v) + \operatorname{dn}(u-v) = \dfrac{2 \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}$.

4. $\operatorname{sn}(u+v) \cdot \operatorname{sn}(u-v) = \dfrac{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \cdot \operatorname{sn}^2 v}$.

5. $\operatorname{cn}(u+v) \cdot \operatorname{cn}(u-v) = \dfrac{\operatorname{dn}^2 u \cdot \operatorname{dn}^2 v - k'^2}{k^2(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v)}$.

6. $\operatorname{dn}(u+v) \cdot \operatorname{dn}(u-v) = \dfrac{k^2 \operatorname{cn}^2 u \operatorname{cn}^2 v - k'^2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}$.

7. $\operatorname{sn}(u+v) \cdot \operatorname{cn}(u-v) + \operatorname{sn}(u-v) \cdot \operatorname{cn}(u+v) = \dfrac{2 \operatorname{sn} u \cdot \operatorname{cn} u \cdot \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \cdot \operatorname{sn}^2 v}$.

8. $\operatorname{cn} u \cdot \operatorname{sn} v \cdot \operatorname{dn}(u+v) = \operatorname{dn} v \cdot \operatorname{sn}(u+v) - \operatorname{cn} v \cdot \operatorname{sn} u$.

9. $\operatorname{cn} u \cdot \operatorname{cn} v \cdot \operatorname{dn}(u+v) = \operatorname{dn} u \cdot \operatorname{dn} v \cdot \operatorname{cn}(u+v) + k'^2 \operatorname{sn} u \cdot \operatorname{sn} v$.

10. $\operatorname{sn} u + \operatorname{sn} v = \dfrac{2 \operatorname{sn} \frac{u+v}{2} \cdot \operatorname{cn} \frac{u-v}{2} \cdot \operatorname{dn} \frac{u-v}{2}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u+v}{2} \cdot \operatorname{sn}^2 \frac{u-v}{2}}$.

11. $\operatorname{cn} u + \operatorname{cn} v = \dfrac{2 \operatorname{cn} \frac{u+v}{2} \cdot \operatorname{cn} \frac{u-v}{2}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u+v}{2} \cdot \operatorname{sn}^2 \frac{u-v}{2}}$.

12. $\operatorname{dn} u + \operatorname{dn} v = \dfrac{2 \operatorname{dn} \frac{u+v}{2} \cdot \operatorname{dn} \frac{u-v}{2}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u+v}{2} \cdot \operatorname{sn}^2 \frac{u-v}{2}}$.

13. $\dfrac{1 - \operatorname{cn} 2u}{1 + \operatorname{cn} 2u} = \dfrac{\operatorname{sn}^2 u \cdot \operatorname{dn}^2 u}{\operatorname{cn}^2 u}$.

14. $\operatorname{sn}(u-v) \cdot \operatorname{dn}(u+v) = \dfrac{\operatorname{sn} u \cdot \operatorname{dn} u \cdot \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} v \cdot \operatorname{dn} v \cdot \operatorname{cn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \cdot \operatorname{sn}^2 v}$.

15. $\operatorname{sn} \dfrac{u}{2} = \pm \sqrt{\dfrac{1 - \operatorname{cn} u}{1 + \operatorname{dn} u}}$.

16. $\operatorname{cn} \dfrac{u}{2} = \pm \dfrac{k'}{k} \sqrt{\dfrac{1 - \operatorname{dn} u}{\operatorname{dn} u - \operatorname{cn} u}}$.

17. $\operatorname{dn} \dfrac{u}{2} = \pm k' \sqrt{\dfrac{1 - \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u - \operatorname{cn} u}}$.

18. $\operatorname{sn} \dfrac{K}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + k'}}$; $\operatorname{cn} \dfrac{K}{2} = \sqrt{\dfrac{k'}{1 + k'}}$; $\operatorname{dn} \dfrac{K}{2} = \sqrt{k'}$.

19. $\dfrac{\operatorname{sn}' u \cdot \operatorname{cn}' u}{\operatorname{dn}' u} = \left(\dfrac{\operatorname{dn} u}{k}\right)^2$.

20. $\operatorname{sn}'' u = -(1 + k^2) \operatorname{sn} u + 2k^2 \operatorname{sn}^3 u$.

21. $\operatorname{cn}'' u = (2k^2 - 1) \operatorname{cn} u - 2k^2 \operatorname{cn}^3 u$.

22. $\operatorname{dn}'' u = (2 - k^2) \operatorname{dn} u - 2 \operatorname{dn}^3 u$.

23. $\operatorname{sn}'(0) = 1$.

24. $\operatorname{sn}'''(0) = -(1 + k^2)$.

25. $\operatorname{cn}''(0) = -1$.

26. $\operatorname{sn}^{(5)}(0) = 1 + 14k^2 + k^4$.

27. $\operatorname{dn}''(0) = -k^2$.

28. $\displaystyle\int_0^{\varphi} \frac{\sin^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{k^2} [F(\varphi) - E(\varphi)]$.

29. $\displaystyle\int_0^{\varphi} \frac{\cos^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{k^2} [E(\varphi) - k'^2 F(\varphi)]$.

30. $\displaystyle\int_0^{\varphi} \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{k'^2} [\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \cdot \operatorname{tg} \varphi - E(\varphi)]$.

Обратить интегралы:

31. $\displaystyle u = \int_0^{z} \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2 - 6z^4}}$ *Ответ.* $z = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \dfrac{\operatorname{sn}(u\sqrt{5})}{\operatorname{dn}(u\sqrt{5})}$; $k = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$,

32. $u=\int\limits_{z}^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(4z-1)}}$. *Ответ.* $z=\frac{1}{\mathrm{sn}^2 u}$; $k=\frac{1}{2}$.

33. $u=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{z}^{1}\frac{dz}{\sqrt{z(1-z^2)}}$. *Ответ.* $z=\mathrm{cn}^2 u$; $k=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

34. $u=\sqrt{2}\int\limits_{1}^{z}\frac{dz}{\sqrt{(z^2-2z+2)(z^2-2z+3)}}$. *Ответ.* $z=1+\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}$, $k=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

35. $u=-\int\limits_{z}^{3}\frac{9dz}{\sqrt{(z^2+12z-18)(4z^2-6z+9)}}$. *Ответ.* $z=\frac{3\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{dn}\,u+\mathrm{sn}\,u}$; $k=\frac{1}{\sqrt{8}}$

36. Вычислить функции $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$ и $\mathrm{dn}\,u$, если $u=0,37$; $k=0,8367$.
Ответ. 0,35627; 0,93438; 0,95454.

37. Вычислить функции $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$ и $\mathrm{dn}\,u$, если $u=0,89$; $k=0,63245$.
Ответ. 0,75139; 0,65986; 0,87987.

38. Вычислить $\mathrm{sn}\,u$, если $u=2,38$; $k=0,8944$.
Ответ. 0,99849.

39. Вычислить $\mathrm{sn}\,u$, если $u=1,36i$; $k^2=0,6$.
Ответ. $2,9473i$.

40. Вычислить $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$ и $\mathrm{dn}\,u$, если $u=8,91628$; $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Ответ. 0,96818; 0,25027; 0,72892.

41. Вычислить $\mathrm{sn}\,u$, если $u=5,35814$, $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Ответ. $-0,98953$.

42. Решить уравнение $\mathrm{sn}\,(u;\ 0,4472)=0,90025$.
Ответ. $u=1,16+4mK+2nK'i$, где $K=1,65967$; $K'=2,25740$; m и n — любые целые числа.

43. Решить уравнение $\mathrm{cn}\left(u;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0,93305$.
Ответ. $u=0,4+4mK+2n(K+K'i)$, где $K=K'=1,85407$.

44. Решить уравнение $\mathrm{dn}\left(u;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0,87253$.
Ответ. $u=0,8+2mK+4nK'i$, где $K=K'=1,85407$.

45. Доказать, что

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\sin x}}=\sqrt{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}.$$

ГЛАВА II

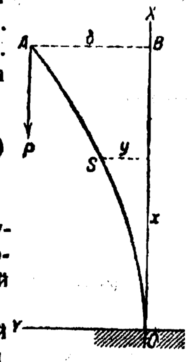
ПРИЛОЖЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ИНТЕГРАЛОВ

§ 38. Задача о продольном изгибе

Мы сейчас покажем, что одна из основных задач строительной механики, именно исследование продольного изгиба, принадлежит к области эллиптических интегралов. Постановка задачи, как известно, такова:

Брус, закрепленный одним концом неподвижно, подвергается действию сжимающей силы P, приложенной к его другому концу. Если сила P достигает некоторого значения, называемого критическим, то брус искривляется и начинается явление продольного изгиба.

На фиг. 8 линия OA представляет изогнутую ось бруса. Первоначально эта ось была прямолинейна и совпадала с осью Ox. За плоскость xy мы выберем плоскость наименьшей жесткости бруса, в которой и возможен его продольный изгиб. Расстояние от точки A до оси OX обозначим буквою δ.



Фиг. 8

Диференциальное уравнение изогнутой оси бруса будет:

$$\frac{EIy''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=M. \qquad (1)$$

Здесь буква E обозначает модуль нормальной упругости; I — момент инерции поперечного сечения, которое мы будем считать постоянным, M — изгибающий момент в каком-либо сечении S.

Если изгиб бруса незначителен, то величина первой производной y' мала и можно пренебречь ее квадратом по сравнению с единицей. В таком случае получаем общеизвестное приближенное диференциальное уравнение изогнутой оси в виде:

$$EIy''=M.$$

Мы здесь, однако, будем предполагать, что искривление бруса значительно, и будем пользоваться диференциальным уравнением изогнутой оси в форме (1).

В данном случае изгибающий момент в сечении S:

$$M=P(\delta-y).$$

Поэтому

$$\frac{EIy''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=P(\delta-y).$$

Полагая $y'=p$, мы будем иметь:

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\,\frac{dp}{dy},$$

т. е.

$$\frac{EIp\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}=P(\delta-y)\,dy. \qquad (2)$$

В начале координат, при $x=0$, ордината $y=0$; вследствие условия закрепления и производная

$$y'=p=0.$$

В уравнении (2) переменные отделены. Ради краткости положим:

$$\frac{2EI}{P}=\mu^2$$

и для участка OS будем интегрировать левую часть уравнения (2) в пределах от 0 до p, а правую в пределах от 0 до y. Получим:

$$\mu^2\left[\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}-1\right]=(\delta-y)^2-\delta^2;$$

откуда

$$p=\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{\mu^4-[\mu^2+(\delta-y)^2-\delta^2]^2}}{\mu^2+(\delta-y)^2-\delta^2},$$

$$dx=\frac{[\mu^2+(\delta-y)^2-\delta^2]\,dy}{\sqrt{[2\mu^2+(\delta-y)^2-\delta^2][\delta^2-(\delta-y)^2]}}.$$

Преобразуя это выражение, удобно будет положить

$$\delta-y=\delta\cos\varphi.$$

В таком случае

$$dx=\frac{(\mu^2-\delta^2\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{2\mu^2-\delta^2\sin^2\varphi}}.$$

Вводя обозначение

$$\frac{\delta^2}{2\mu^2}=k^2,$$

получим:

$$dx=\frac{\mu}{\sqrt{2}}\,\frac{(1-2k^2\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

или

$$dx=\frac{\delta}{k}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\cdot d\varphi-\frac{\delta}{2k}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

При интегрировании этого равенства предварительно заметим, что в начале координат, при $y=0$, получаем $\cos\varphi=1$. Примем $\varphi=0$. Теперь имеем:

$$x=\frac{\delta}{2k}\left[2\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\cdot d\varphi-\int_0\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right]. \qquad (3)$$

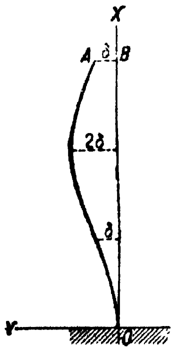
Равенство это, взятое вместе с равенством

$$y=\delta(1-\cos\varphi), \qquad (4)$$

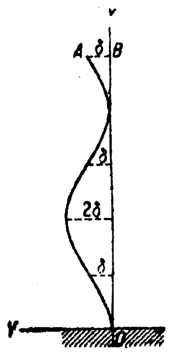
представляет параметрические уравнения изогнутой оси стержня.

Эта ось может получать разнообразные очертания. Чтобы получить их, заметим, что в точке A приложения силы ордината $y=\delta$ и $\cos\varphi=0$; поэтому $\varphi=\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ldots$, вообще $(2n+1)\frac{\pi}{2}$, где n — произвольное целое число.

Придавая в равенстве (3) верхнему пределу φ эти значения, будем получать те кривые, очертание которых может принимать изогнутая ось бруса. На фиг. 9 и 10 указаны кривые в случаях, когда $\varphi=\frac{3\pi}{2}$ и $\varphi=\frac{5\pi}{2}$. При построении промежуточных между O и A точек каждой из таких кривых приходится при вычислении их координат пользоваться таблицами эллиптических интегралов первого и второго рода (см. приведенный ниже численный пример).



Фиг. 9



Фиг. 10

Величины δ и k, с которыми нам пришлось здесь встретиться, связаны одним соотношением, которое нетрудно найти, если заметить, что, если пренебречь сжатием, то длина изогнутого бруса равна начальной его длине l. Вычисляя диференциал dl дуги изогнутой оси, после несложных выкладок найдем:

$$dl=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\frac{\delta}{2k}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Отсюда, интегрируя, имеем:

$$l=\frac{\delta}{2k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

или короче:

$$l=\frac{\delta}{2k}\cdot K. \qquad (5)$$

§ 39. Определение критической сжимающей силы

Теперь определим ту сжимающую силу, при которой начинается выпучивание бруса, т. е. продольный его изгиб.

Эту силу можно будет получить, если заметить, что в точке A при $x = OB = l_1$ (фиг. 8) верхний предел φ принимает значения $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, ... В частности при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ имеем:

$$l_1 = \frac{\delta}{2k}\left[2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\cdot d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}\right],$$

или

$$l_1 = \frac{\delta}{2k}\,[2E(k) - F(k)],$$

где через $E(k)$ и $F(k)$ обозначены полные эллиптические интегралы второго и первого рода. Вводя обозначение

$$2E(k) - F(k) = f(k),$$

находим:

$$\delta = \frac{2l_1k}{f(k)}.$$

И, следовательно, сила

$$P = \frac{2EI}{\mu^2} = \frac{4k^2EI}{\delta^2}$$

представится в виде:

$$P = \frac{EI}{l_1^2} f^2(k).$$

Критическую силу мы получим, если предположим, что прогиб δ стремится к нулю. Но вместе с прогибом δ к нулю стремится и модуль k, а длина l_1 стремится к l. Поэтому

$$\text{крит } P = P_0 = \frac{EI}{l^2} f^2(0).$$

Однако

$$f(0) = 2E(0) - F(0) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно:

$$P = \frac{\pi^2EI}{4l^2}.$$

Если пожелаем определить критическую силу, соответствующую деформации, указанной на фиг. 9, то придется в равенстве (3) положить, что верхний предел $\varphi = \frac{3\pi}{2}$. Мы получим:

$$l_1 = \frac{\delta}{2k}\left(2\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\cdot d\varphi - \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}\right).$$

Но (§ 18)

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = 3E(k),$$

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = 3F(k),$$

вследствие чего

$$l_1 = \frac{3\delta}{2k} f(k); \quad P = \frac{3^2EI}{l_1^2} f^2(k),$$

а критическое

$$P = \frac{3^2\cdot\pi\cdot EI}{4l^2}.$$

При $\varphi = \frac{5\pi}{2}$ (фиг. 10) будем иметь:

$$\text{крит } P = \frac{5^2\cdot\pi^2\cdot EI}{4l^2}$$

и т. д.

§ 40. Численный пример

Если по заданной силе P требуется определить вид искривленного бруса, то ход вычисления координат точек его оси может быть таков.

Задаемся отношением $\frac{P}{P_0}$, большим единицы, где P_0 есть критическая сила. По формуле

$$\mu^2 = \frac{2EI}{P}$$

определяем μ.

Затем из соотношения (5), которое можно переписать в виде:

$$\frac{l}{\mu}\sqrt{2} = K,$$

пользуясь табл. 3, определяем модулярный угол θ. Когда знаем θ, то уже нетрудно, пользуясь табл. 1 и 2, вычислить x и y для любых значений угла φ и построить изогнутую ось.

Пусть, например,

$$\frac{P}{P_0} = 1{,}293,$$

т. е.

$$P = \frac{1{,}293\cdot\pi^2\cdot EI}{4l^2}$$

и, следовательно:

$$\mu^2 = \frac{8l^2}{1{,}293\cdot\pi^2}.$$

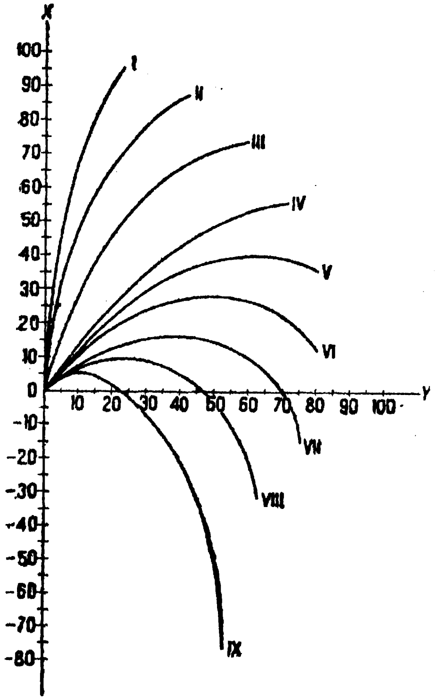
В таком случае

$$K = \frac{\pi}{2}\sqrt{1{,}293} = 1{,}6862.$$

Пользуясь табл. 3, находим модулярный угол $\theta = 40^\circ$. Теперь, согласно (3) и (4), имеем:

$$\frac{x}{l} = \frac{2}{\pi\sqrt{1,293}}\left(2\int\limits_0^{\varphi}\sqrt{1-\sin^2 40^\circ \sin^2\varphi}\,d\varphi - \int\limits_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2 40^\circ \sin^2\varphi}}\right),$$

$$\frac{y}{l} = \frac{8\cdot\sin 40^\circ}{\pi\sqrt{1,293}}\cdot\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$



Фиг. 11

Будем приписывать амплитуде φ какие-либо значения, например 30°, 60°, 90°, и вычислим соответствующие им отношения $\frac{x}{l}$ и $\frac{y}{l}$. Результаты помещаем в таблице a.

Таблица a

φ	$\frac{x}{l}$	$\frac{y}{l}$
0	0	0
30°	0,277	0,096
60°	0,469	0,360
90°	0,560	0,720

Кривая *IV* на фиг. 11 построена на основании этих результатов, следовательно, эта кривая представляет вид оси стержня, изгибаемого силою $P = 1,293\ P_0$.

Прочие кривые, начерченные на той же фигуре, изображают форму изогнутой оси бруса, которую она принимает при действии сил, указанных в таблице b.

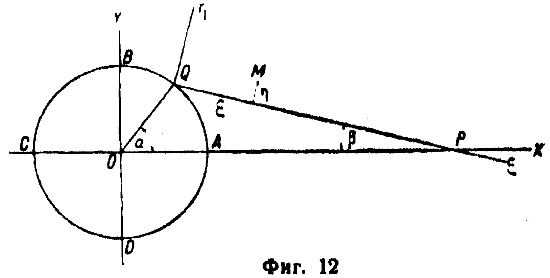
Таблица b

N	I	II	III	VI	V	VI	VII	VIII	IX
$\frac{P}{P_0}$	1,015	1,064	1,152	1,293	1,518	1,884	2,541	4,029	9,116
$\frac{x_1}{l}$	0,970	0,881	0,741	0,560	0,349	0,123	−0,107	−0,340	−0,577
$\frac{y_1}{l}$	0,220	0,422	0,593	0,720	0,792	0,803	0,750	0,625	0,421

Здесь буквами x_1 и y_1 обозначены координаты точки приложения силы P.

§ 41. Движение шатуна паровой машины

При изучении движения точек шатуна паровой машины часто пользуются тригонометрическими функциями. Но исследование можно вести также и при помощи эллиптических функций, причем вид формул несколько упрощается.



Фиг. 12

Примем центр O маховика (фиг. 12) за начало координат, прямую, вдоль которой перемещается поршень парового цилиндра, за ось OX, а перпендикуляр к ней в точке O за ось OY. Систему XOY будем считать неподвижной. Подвижной будем считать систему $\xi Q \eta$, в которой прямая $Q\xi$ есть ось шатуна; длину шатуна обозначим через l, а радиус маховика через R.

Если возьмем какую-либо точку M шатуна, то координаты ее x и y связаны с координатами ξ и η помощью соотношений:

$$x = x_0 + \xi\cos\gamma - \eta\sin\gamma,$$
$$y = y_0 + \xi\sin\gamma + \eta\cos\gamma,$$

где x_0 и y_0 — координаты точки Q, а γ — угол, отсчитанный в положительную сторону между положительными направлениями оси OX и $Q\xi$.

Для нас будет удобно вместо угла γ ввести угол β, дополняющий γ до 360°. Кроме того, заметим, что

$$x_0 = R\cos\alpha,$$
$$y_0 = R\sin\alpha,$$

где α — угол, показанный на фигуре.

Формулы преобразования координат можно написать теперь в виде:

$$x = R\cos\alpha + \xi\cos\beta + \eta\sin\beta,$$
$$y = R\sin\alpha - \xi\sin\beta + \eta\cos\beta.$$

Обращаясь к треугольнику OQP, мы видим, что

$$\sin\beta = \frac{R}{l}\sin\alpha = k\cdot\sin\alpha,$$

где $k = \frac{R}{l}$ и есть число, меньшее единицы.

Сводя вопрос к эллиптическим функциям, примем интеграл

$$u = \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

за аргумент. В таком случае:

$$\alpha = \operatorname{am} u,$$
$$\sin \alpha = \operatorname{sn} u,$$
$$\cos \alpha = \operatorname{cn} u,$$
$$\sin \beta = k \operatorname{sn} u,$$
$$\cos \beta = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u} = \operatorname{dn} u,$$

и, следовательно, формулы преобразования координат:

$$\left.\begin{aligned} x &= kl \operatorname{cn} u + \xi \operatorname{dn} u + k\eta \operatorname{sn} u, \\ y &= k(l - \xi) \operatorname{sn} u + \eta \operatorname{dn} u. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

В этих равенствах примем сначала, что ξ и η постоянны. В таком случае получим выражения координат x и y некоторой точки M шатуна в зависимости от эллиптических функций аргумента u. Если исключим величины $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$ из равенств $\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1$; $\operatorname{dn}^2 u = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u$ и из равенств (6), то получим уравнение алгебраической кривой четвертого порядка. Это та кривая, которую точка M шатуна при его движении вычерчивает в неподвижной плоскости XY. Проще всего ее можно построить, исходя из равенств (6). Нетрудно видеть, что при перемещении точки Q по окружности угол α изменяется от 0 до 2π. Следовательно, аргумент u изменяется от 0 до $4K$ (см. § 18).

Рассмотрим такой частный случай:

$$R = 1; \quad l = 3;$$
$$\xi = 1; \quad \eta = 0{,}1.$$

Ограничиваясь при вычислениях тремя десятичными знаками, будем иметь:

$$k = 0{,}333; \quad k' = 0{,}943;$$
$$\theta = 19°28'; \quad K = 1{,}617.$$

Формулы для координат точки $\xi = 1$ и $\eta = 0{,}1$ таковы:

$$x = \operatorname{cn} u + \operatorname{dn} u + \frac{1}{30} \operatorname{sn} u,$$

$$y = \frac{2}{3} \operatorname{sn} u + \frac{1}{10} \operatorname{dn} u.$$

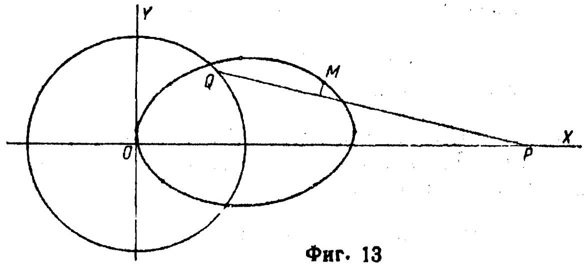
Координаты для восьми ее положений приведены в следующей таблице:

α	u	x	y
0	0	2,000	0,100
$\frac{\pi}{4}$	0,794	1,703	0,568
$\frac{\pi}{2}$	K	0,976	0,761
$\frac{3\pi}{4}$	$2K - 0{,}794$	0,289	0,568
π	$2K$	0,000	0,100
$5\frac{\pi}{4}$	$2K + 0{,}794$	0,241	$-0{,}374$
$3\frac{\pi}{2}$	$3K$	0,910	$-0{,}573$
$7\frac{\pi}{2}$	$4K - 0{,}794$	1,655	$-0{,}374$
2π	$4K$	2,000	0,100

Для нахождения максимума и минимума y составляем уравнение:

$$\frac{dy}{du} = \frac{2}{3} \operatorname{cn} u \left(\operatorname{dn} u - \frac{1}{60} \operatorname{sn} u \right) = 0$$

и его корни $u = K$ и $u = 3K$ подставляем в выражение второй производной $\frac{d^2y}{du^2}$.



Фиг. 13

При $u = 3K$ будем иметь $\frac{d^2y}{du^2} > 0$, а при $u = K$, $\frac{d^2y}{du^2} < 0$. Следовательно, при $u = K$ ордината y достигает наибольшего значения, а при $= 3K$ — наименьшего. Траектория точки $\xi = 1$, $\eta = 0{,}1$ показана на Фиг. 13.

В частном случае, когда $R=l$, то $k=1$ и $\operatorname{sn} u=\operatorname{th} u$; $\operatorname{cn} u=\operatorname{dn} u=\frac{1}{\operatorname{ch} u}$ (§ 11). Точка M шатуна в этом случае описывает эллипс (окружность, прямую линию). В этом можно убедиться, исключая параметр из равенств (6), которые примут вид:

$$x \operatorname{ch} u - k\eta \operatorname{sh} u = kl+\xi,$$
$$y \operatorname{ch} u - (l-\xi) k \operatorname{sh} u = \eta.$$

Но это видно и непосредственно, ибо в этом случае точка M оказывается неподвижно связанной с отрезком прямой длиною $2l$, который концами своими скользит по осям OX и OY, и мы имеем дело с так называемым эллипсографом. В этом нетрудно убедиться из чертежа, если продолжить отрезок PQ до пересечения с осью OY.

В равенствах (6) мы считали ξ и η постоянными. Но в них мож' считать постоянными x и y. В таком случае исключение из них аргумента u приведет нас к уравнению той кривой, которую на подвижной плоскости $\xi\eta$ вычерчивает неподвижная точка M плоскости XY.

§ 42. Центроиды шатуна

Покажем еще, каким образом могут быть выражены координаты мгновенного центра и найдены центроиды шатуна.

Диференцируя (6) по времени t, получим равенства:

$$x' = -k[l \operatorname{sn} u\cdot \operatorname{dn} u + \operatorname{cn} u\cdot(\xi k \operatorname{sn} u - \eta \operatorname{dn} u)]\, u',$$
$$y' = k[l \operatorname{cn} u\cdot \operatorname{dn} u - \operatorname{cn} u\ (\eta k \operatorname{sn} u + \xi \operatorname{dn} u)]\, u',$$

выражающие проекции скорости на оси X и Y любой точки M.

Принимая во внимание (6), их можно переписать так:

$$x' = -k[l \operatorname{sn} u\cdot \operatorname{dn} u + \operatorname{cn} u\ (kl \operatorname{sn} u - y)]\, u',$$
$$y' = k[l \operatorname{cn} u\cdot \operatorname{dn} u + \operatorname{cn} u\ (kl \operatorname{cn} u - x)]\, u'.$$

Пусть x_c, y_c, ξ_c и η_c представляют координаты мгновенного центра относительно осей XY и $\xi\eta$. Для мгновенного центра придется положить $x_c'=0$ и $y_c'=0$, вследствие чего

$$l \operatorname{sn} u\cdot \operatorname{dn} u + \operatorname{cn} u (kl \operatorname{sn} u - y_c) = 0,$$
$$l \operatorname{cn} u\cdot \operatorname{dn} u + \operatorname{cn} u (kl \operatorname{cn} u - x_c) = 0,$$

откуда координаты мгновенного центра

$$\left.\begin{aligned} x_c &= l(k \operatorname{cn} u + \operatorname{dn} u), \\ y_c &= l \operatorname{sn} u\left(k+\frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}\right), \end{aligned}\right\} \quad (7$$

т. е.

$$y_c = x_c \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}.$$

Исключение из этих равенств аргумента u приводит к уравнению:

$$(x_c^2 - l^2k'^2)^2 (x_c^2+y_c^2) = 4k^2l^2x_c^4, \quad (8)$$

в котором $k'^2 = 1-k^2$.

Мы видим отсюда, что неподвижная центроида есть алгебраическая кривая шестого порядка. В случае $l=R$ имеем $k'=0$; $k=1$. Следовательно, уравнение центроиды

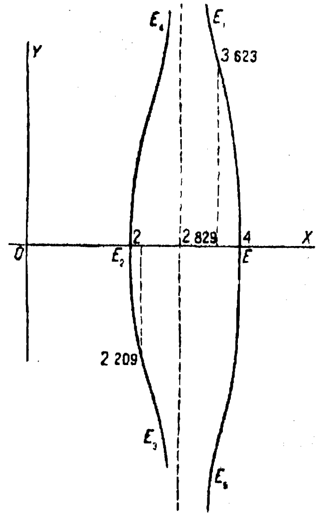
$$x_c^2+y_c^2=4l^2$$

представляет окружность радиуса $2l$.

Построить неподвижную центроиду можно, либо исходя из равенств (7), либо из уравнения (8). Так как кривая, очевидно, симметрична относительно оси OX, то параметр u достаточно изменять от 0 до $2K$.

Координаты x_c и y_c для некоторых положений мгновенного центра вычислены и помещены в прилагаемой таблице. Вычисления производились в предположении, что $R=1$, $l=3$, т. е. $k=\frac{1}{3}$.

α	u	x_c	y_c
0	0	4,000	0,000
$\frac{\pi}{4}$	0,794	3,623	3,623
$\frac{\pi}{2}$	K	2,829	∞
$\frac{3\pi}{4}$	$2K-0{,}794$	2,209	$-2{,}209$
π	$2K$	2,000	0,000



Фиг. 14

Вид кривой показан на фигуре. Часть EE_1 соответствует перемещению точки Q по дуге AB; E_2E_3 по дуге BC; E_2E_4 по дуге CD и EE_5 по дуге DA. Эти четыре дуги отмечены на фиг. 14.

Уравнение (8), содержа четную степень y, содержит только четные степени и x. Следовательно, центроида симметрична не только относительно оси OX, но и относительно оси OY. Вторая часть центроиды на фиг. 14 не показана. Она соответствует предположению, что точка P лежит левее от O.

Мы говорили до сих пор только о неподвижной центроиде. Чтобы найти уравнение подвижной центроиды, следует в равенствах (6) заменить x и y значениями (7) координат мгновенного центра и решить полученные уравнения относительно ξ_c и η_c. Результат будет таков:

$$\xi_c = l\frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}(\mathrm{cn}\,u\cdot\mathrm{dn}\,u - k\,\mathrm{sn}^2 u),$$

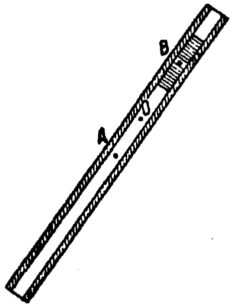
$$\eta_c = l\frac{\mathrm{dn}\,u\cdot\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}(\mathrm{dn}\,u + k\,\mathrm{cn}\,u).$$

Исключение из этих равенств параметра u приводит нас к уравнению подвижной центроиды.

§ 43. Относительное движение стержня в трубке, движущейся в горизонтальной плоскости

Поставим себе целью решить такую задачу.

Внутри гладкой трубки с прямолинейной осью помещен прямой стержень. Трубка лежит на гладкой горизонтальной плоскости. Определить закон относительного движения центра тяжести стержня, если трубке был сообщен начальный толчок парою сил.



Фиг. 15

Пусть (фиг. 15) точка A есть центр тяжести трубки, B — центр тяжести стержня, O — общий центр тяжести, M — масса трубки, m — масса стержня, расстояние $AB=\rho$.

В таком случае:

$$OA = a = \frac{m\rho}{M+m},$$

$$OB = b = \frac{M\rho}{M+m}.$$

Так как в данном случае действует только имеющая потенциал вертикальная сила тяжести, то имеет место интеграл живой силы и в горизонтальной плоскости — интеграл площадей.

Напишем интеграл живой силы. Учитывая поступательные и вращательные движения трубки и стержня, мы сможем написать, что

$$\frac{M}{2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2+\frac{M}{2}a^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\frac{M}{2}R^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\frac{m}{2}\left(\frac{db}{dt}\right)^2+$$
$$+\frac{m}{2}b^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\frac{m}{2}r^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2=\mathrm{const}.$$

Здесь R и r — радиусы инерции трубки и стержня относительно вертикальных осей, проходящих через центры их тяжести; u — угол, образованный осью трубки с какой-либо прямой, лежащей в плоскости и принятой за ось x.

Если мы заменим a и b их значениями, то после упрощений найдем:

$$\frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}\left[\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2+\rho^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2\right]+\frac{1}{2}(MR^2+mr^2)\left(\frac{du}{dt}\right)^2=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}c^2\omega^2+\frac{1}{2}(MR^2+mr^2)\omega^2. \quad (9)$$

Здесь буква c означает начальное расстояние центров тяжести A и B, а ω — начальную угловую скорость системы.

При принятых обозначениях интеграл площадей будет иметь вид:

$$M(R^2+a^2)\frac{du}{dt}+m(r^2+b^2)\frac{du}{dt}=\mathrm{const}.$$

Заменив a и b их значениями и приняв во внимание начальную угловую скорость, мы можем последнее равенство представить еще и так:

$$\left(\frac{Mm\rho^2}{M+m}+MR^2+mr^2\right)\frac{du}{dt}=\left(\frac{Mmc^2}{M+m}+MR^2+mr^2\right)\omega. \quad (10)$$

Заметив, что $\frac{d\rho}{dt}=\frac{d\rho}{du}\cdot\frac{du}{dt}$, мы из (9) получим:

$$\left\{\frac{Mm}{M+m}\left[\left(\frac{d\rho}{du}\right)^2+\rho^2\right]+MR^2+mr^2\right\}\left(\frac{du}{dt}\right)^2=\frac{Mm}{M+m}c^2\omega^2+$$
$$+(MR^2+mr^2)\omega^2.$$

Теперь сюда подставим выражение производной $\frac{du}{dt}$, найденной из (10). Это даст:

$$\frac{Mm}{M+m}\left[\left(\frac{d\rho}{du}\right)^2+\rho^2\right]+MR^2+mr^2=\frac{\left(\frac{Mm\rho^2}{M+m}+MR^2+mr^2\right)^2}{\frac{Mmc^2}{M+m}+MR^2+mr^2}.$$

Отсюда уже нетрудно получить, что

$$\left(\frac{d\rho}{du}\right)^2=(\rho^2-c^2)\frac{\frac{Mm}{M+m}\rho^2+MR^2+mr^2}{\frac{Mm}{M+m}c^2+MR^2+mr^2}. \quad (11)$$

Если далее положим, что

$$\rho=\frac{c}{\cos\varphi},\qquad \frac{MR^2+mr^2}{\frac{Mmc^2}{M+m}+MR^2+mr^2}=k^2, \quad (12)$$

то получим:

$$\left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2=1-k^2\sin^2\varphi,$$

откуда

$$u=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

т. е.

$$\varphi=\mathrm{am}\,u,\quad \cos\varphi=\mathrm{cn}\,u,$$

и, следовательно,

$$\rho\cdot\mathrm{cn}\,u=c.$$

Последнее равенство и выражает закон относительного движения центра тяжести стержня. Мы видим, что вопрос привел нас к эллиптическим функциям.

Если, например, положим $M=3$ ед. массы; $m=1$ ед. массы; $R=10$ ед. длины; $r=2$ ед. длины; $c=40$ ед. длины, то, согласно (12), $k^2=\sin^2\theta=\frac{19}{94}$ и модулярный угол $\theta=26°43'$. Зададимся каким-нибудь значением угла u, например положим, что $u=0{,}315$. Помощью табл. 1 найдем, что амплитуда $\varphi=18°$ и в таком случае

$$\rho=\frac{40}{\cos 18°}=42{,}058.$$

В частном случае, когда $c=0$, (11) дает:

$$\left(\frac{d\rho}{du}\right)^2=\rho^2\left[1+\frac{Mm\rho^2}{(M+m)(MR^2+mr^2)}\right]$$

или, полагая

$$\frac{(M+m)(MR^2+mr^2)}{Mm}=\lambda^2,$$

будем иметь:

$$\lambda^2\left(\frac{d\rho}{du}\right)^2=\rho^2(\lambda^2+\rho^2).$$

Предполагая, теперь, что длина трубки растет неопределенно, получим:

$$u=\lambda\int_{\rho}^{\infty}\frac{d\rho}{\rho\sqrt{\lambda^2+\rho^2}}.$$

Но:

$$\int\frac{d\rho}{\rho\sqrt{\lambda^2+\rho^2}}=-\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2+\rho^2}}{\rho}\right).$$

При подстановке верхнего предела $\rho=\infty$ дробь $\frac{a+\sqrt{\lambda^2+\rho^2}}{\rho}$ принимает неопределенный вид.

Применяя правило Лопиталя, мы без затруднений найдем, что дробь эта обращается в единицу. В общем будем иметь:

$$u=\ln\left(\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2+\rho^2}}{\rho}\right),$$

откуда

$$\lambda+\sqrt{\lambda^2+\rho^2}=\rho e^u$$

или

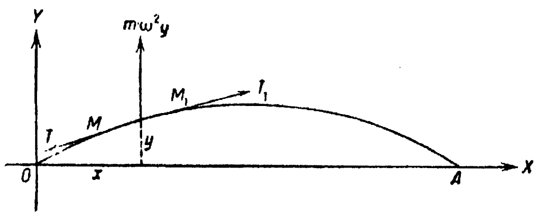
$$\rho(e^u-e^{-u})=2\lambda,$$

т. е.

$$\rho\,\mathrm{sh}\,u=\lambda.$$

§ 44. Форма вращающейся нити, прикрепленной к оси вращения двумя концами

Предположим, что около оси OX вращается нить, прикрепленная к ней обоими концами O и A, расстояние между которыми обозначим через $2a$ (фиг. 16). Исследование формы изогнутой нити производится при помощи эллиптических функций и представляет хороший образец их применения.



Фиг. 16

Обозначим буквою m массу единицы длины нити и выделим элемент нити MM_1 длиною Δs. Пусть натяжения нити в точках M и M_1 равны T и T_1. Эти натяжения направлены по касательным в точках M и M_1 и образуют с осью OX углы α и α_1. Пренебрегая весом, мы сможем сказать, что на элемент MM_1 действует еще центробежная сила $m\omega^2 y$, где ω есть угловая скорость вращения, которое мы предполагаем равномерным. Проектирование всех сил на оси OX и OY дает:

$$T_1\cos\alpha_1-T\cos\alpha=0$$

и

$$T_1\sin\alpha_1-T\sin\alpha+m\,\Delta s\,\omega^2 y=0$$

или

$$\Delta(T\cos\alpha)=0$$

и

$$\Delta(T\sin\alpha)+m\,\Delta s\,\omega^2 y=0.$$

Разделим обе части этих уравнений на Δs и перейдем к пределу в предположении, что $\Delta s\to 0$. Если при этом примем во внимание, что

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds};\quad \sin\alpha=\frac{dy}{ds};\quad s=OM,$$

то получим:

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)=0$$

$$\frac{d}{ds}\left(T\cdot\frac{dy}{ds}\right)+m\omega^2 y=0.$$

Первое из этих уравнений дает:

$$T\frac{dx}{ds}=C=\mathrm{const}.$$

Определим отсюда T и внесем его значение во второе уравнение. Мы найдем:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{dx}\right)+\frac{m\omega^2 y}{C}=0$$

или

$$\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{m\omega^2 y}{C}=0.$$

Но так как

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

то

$$\frac{ds}{dx}\cdot\frac{d^2s}{dx^2}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2};$$

вследствие этого

$$\frac{d^2s}{dx^2}+\frac{m\omega^2 y}{C}\,\frac{dy}{dx}=0.$$

Отсюда после интегрирования получим:

$$\frac{ds}{dx}+\frac{m\omega^2 y^2}{2C}=\Gamma,$$

где Γ — постоянная.

Предположим, что в точке, наиболее удаленной от оси вращения ордината $y=b$. В этой точке $\frac{dy}{ds}=0$ и $\frac{ds}{dx}=1$. Вследствие этого

$$\Gamma=1+\frac{m\omega^2 b^2}{2C}$$

и

$$\frac{ds}{dx}=1+\frac{m\omega^2}{2C}\cdot(b^2-y^2). \tag{13}$$

Далее из равенства

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\left(\frac{ds}{dx}\right)^2-1$$

будем иметь:

$$dx=\frac{dy}{\sqrt{\frac{m\omega^2}{C}(b^2-y^2)\left[1+\frac{m\omega^2}{4C}(b^2-y^2)\right]}}.$$

Теперь положим, что $y=b\cdot\sin\varphi$. В таком случае

$$dx=\frac{d\varphi}{A\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

где

$$k^2=\frac{m\omega^2 b^2}{4C+m\omega^2 b^2},$$

и

$$A=\frac{m\omega^2 b}{2kC}.$$

Вторичное интегрирование дает:

$$Ax=\int\limits_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Устанавливая пределы интегрирования, мы принимаем во внимание, что в точке O, которую мы принимаем за начало координат, $x=0$ и $y=0$, т. е. $\varphi=0$. В точке, наиболее удаленной от оси вращения, $x=x_0$; $y=b\cdot\sin\varphi=b$; т. е. $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Следовательно, в этой точке

$$Ax_0=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=K,$$

т. е.

$$A=\frac{K}{x_0}$$

и

$$\frac{Kx}{x_0}=\int\limits_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

т. е.

$$\varphi=\operatorname{am}\frac{Kx}{x_0}.$$

Уравнение изогнутой оси нити

$$y=b\operatorname{sn}\frac{Kx}{x_0}.$$

Если здесь положим $x=2x_0$, то получим

$$y=b\cdot\operatorname{sn}2K=0.$$

Но, с другой стороны, известно, что в силу способа закрепления $y=0$ при $x=2a$. Следовательно, уравнение изогнутой оси нити

$$y=b\cdot\operatorname{sn}\frac{Kx}{a}.$$

В более общем случае можно полагать $x=2nx_0$, причем $x_0=\frac{a}{n}$, где n — целое и положительное число. При этом предположении получаются новые формы вращающейся нити. (Об этом см., например, Аппель «Руководство теоретической механики», т. I, стр. 211.)

В исследуемой задаче естественно предположить, что известны: длина нити, которую мы обозначим через $2l$, расстояние $OA=2a$, линейная плотность нити, равная m, и угловая скорость ω. Покажем, каким образом можно вычислить параметры b и K в зависимости от этих данных.

Для упрощения выкладок кроме модуля k введем еще дополнительный k', определяемый равенством:

$$k'^2=1-k^2=\frac{4C}{4C+m\omega^2 b^2}.$$

Имеем:

$$\frac{k^2}{k'^2}=\frac{m\omega^2 b^2}{4C}.$$

Заменяя y на $b\sin\varphi$, мы сможем равенство (13) представить в виде:

$$\frac{ds}{dx} = \frac{2}{k'^2}(1 - k^2\sin^2\varphi) - 1.$$

Но так как

$$dx = \frac{a \cdot d\varphi}{K \cdot \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}},$$

то

$$ds = \frac{2a}{Kk'^2}\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} \cdot d\varphi - \frac{a}{K} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}};$$

и, следовательно:

$$s = \frac{2a}{K \cdot k'^2} \cdot E(\varphi, k) - \frac{a}{K}F(\varphi, k).$$

Для половины длины нити будем иметь:

$$\varphi = \frac{\pi}{2}; \quad E(\varphi, k) = E\left(\frac{\pi}{2}, k,\right); \quad F(\varphi, k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = K.$$

Поэтому

$$l = \frac{2aE}{k'^2K} - a, \tag{14}$$

или

$$\frac{2a}{l + a} = \frac{(1 - k^2)K}{E}.$$

В этом уравнении неизвестным является модуль k. Он входит в уравнение непосредственно и, кроме того, содержится в выражениях интегралов E и K. При данных l и a число k может быть найдено способом последовательных попыток, выполняемых при помощи табл. 3. Если будет найдено k, а стало быть, K и E, то параметр b определится из уравнения

$$l + a = \frac{bE}{k}.$$

Оно получается из (14), если заметить, что

$$\frac{2aE}{k'^2K} = \frac{4ECk}{k'^2m\omega^2b} = \frac{4k^2EC}{k'^2km\omega^2b} = \frac{bE}{k}.$$

Например, если $2l = 156$ *см*; $2a = 94$ *см*, то имеем

$$\frac{(1 - k^2)K}{E} = 0{,}752.$$

Пользуясь табл. 3, приблизительно находим $k = \sin 40° = 0{,}64279$; следовательно, $K = 1{,}78677$; $E = 1{,}39314$.

В таком случае:

$$b = \frac{k(l + a)}{E} = 57{,}6.$$

Уравнение изогнутой оси нити

$$y = 57{,}6 \cdot \operatorname{sn} 0{,}038x.$$

§ 45. Случай, когда точки прикрепления нити лежат не на оси вращения

Найдем уравнение той поверхности, которую описывает нить в том случае, когда точки ее прикрепления расположены не на оси вращения. Диференциальные уравнения вращения пространственной кривой будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0, \\ &\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) + m\omega^2 y = 0, \\ &\frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right) + m\omega^2 z = 0. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Первое из них дает:

$$T\frac{dx}{ds} = A. \tag{16}$$

Если третье умножим на y, а второе на z и результаты вычтем, то получим:

$$y\frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right) - z\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) = 0$$

или, как нетрудно убедиться:

$$\frac{d}{ds}\left(yT\frac{dz}{ds} - zT\frac{dy}{ds}\right) = 0,$$

откуда

$$T\left(y\frac{dz}{ds} - z\frac{dy}{ds}\right) = B = \text{const}. \tag{17}$$

Выполнив указанные в уравнениях (15) диференцирования, помножим первое из них на dx, второе на dy, третье на dz и результаты сложим. Получим:

$$dT + T\left(\frac{d^2x}{ds^2}dx + \frac{d^2y}{ds^2}dy + \frac{d^2z}{ds^2}dz\right) + m\omega^2(y\,dy + z\,dz) = 0.$$

Но вследствие перпендикулярности касательной к кривой и ее главной нормали выражение, заключенное в первых скобках, равно нулю. Следовательно:

$$dT + m\omega^2(y\,dy + z\,dz) = 0,$$

откуда

$$T + \frac{1}{2}m\omega^2(y^2 + z^2) = C, \tag{18}$$

где C — произвольная постоянная.

Пусть $y^2 + z^2 = r^2$. В таком случае:

$$y\frac{dy}{dx} + z\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(r^2). \tag{19}$$

Если мы (17) поделим на (16) и результат возвысим в квадрат, то будем иметь:

$$y^2\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 - 2yz\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} + z^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{B^2}{A^2}. \tag{20}$$

Теперь возведем (19) в квадрат и сложим с (20). Найдем:

$$r^2\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]=\frac{1}{4}\left(\frac{dr^2}{dx}\right)^2+\frac{B^2}{A^2}$$

или

$$r^2\left[\left(\frac{ds}{dx}\right)^2-1\right]=\frac{1}{4}\left(\frac{dr^2}{dx}\right)^2+\frac{B^2}{A^2}.$$

Но так как

$$\frac{ds}{dx}=\frac{T}{A}=\frac{C}{A}-\frac{m\omega^2}{2A}\cdot r^2,$$

то

$$4r^2\left[\left(\frac{C}{A}-\frac{m\omega^2}{2A}\cdot r^2\right)^2-1\right]=\left(\frac{dr^2}{dx}\right)^2+\frac{4B^2}{A^2}.$$

Отсюда

$$\left(\frac{dr^2}{dx}\right)^2=\frac{m^2\omega^4}{A^2}(r^6-\alpha r^4+\beta r^2-\gamma).$$

Разлагая многочлен в правой части на множителей, положим, что

$$\left(\frac{dr^2}{dx}\right)^2=\frac{m^2\omega^4}{A^2}(r^2-a^2)(r^2-b^2)(r^2-c^2), \tag{21}$$

где будем считать, что $a^2>b^2>c^2$. По смыслу задачи r конечно. Будем полагать $b^2>r^2>c^2$ и применим подстановку:

$$r^2=b^2\cdot\sin^2\varphi+c^2\cdot\cos^2\varphi. \tag{22}$$

В таком случае:

$$r^2-a^2=(c^2-a^2)(1-k^2\sin^2\varphi),$$

где

$$k^2=\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2};$$

$$r^2-b^2=(c^2-b^2)\cos^2\varphi;\quad r^2-c^2=(b^2-c^2)\sin^2\varphi.$$

Ввиду этого (21) принимает вид:

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2=\frac{m^2\omega^4}{4A^2}(a^2-c^2)(1-k^2\sin^2\varphi).$$

Пусть при $x=0$, $r=c$, т. е. $\varphi=0$. Интегрируя, получим:

$$\frac{4A^2(a^2-c^2)}{m^2\omega^4}\cdot x=\int\limits_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Если при $r=b$, $x=h$, то $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Следовательно:

$$\frac{4A^2(a^2-c^2)}{m^2\omega^4}h=K.$$

И таким образом:

$$\varphi=\operatorname{am}\left(\frac{Kx}{h}\right).$$

Уравнение искомой поверхности, согласно (22), будет:

$$y^2+z^2=b^2\cdot\operatorname{sn}^2\frac{Kx}{h}+c^2\cdot\operatorname{cn}^2\frac{Kx}{h}.$$

ГЛАВА III

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 46. Предварительные сведения. Бесконечно удаленная точка. Сфера Римана

Многие чрезвычайно важные свойства эллиптических функций остаются в тени или проходят совершенно незамеченными, если ограничиваться изучением этих функций лишь для вещественных значений аргумента. Напротив, теория эллиптических функций, рассматриваемых как функции комплексного аргумента, и притом как аналитические функции, приобретает чрезвычайную законченность и ясность и в этом виде принадлежит к одним из наиболее разработанных математических дисциплин. Не имея в виду давать в этой книге развернутой теории эллиптических функций на базе теории аналитических функций [1]), мы все же ознакомим читателя с ее основами. И прежде всего изложим здесь необходимые понятия и теоремы из теории аналитических функций. При этом мы будем предполагать, что читатель знаком с комплексными числами и действиями над ними, например, по «Курсу высшей математики», т. II, В. И. Смирнова.

Читатель знает, конечно, что комплексное число $x+iy$ изображается точкой плоскости с координатами (x, y) в системе декартовых прямоугольных координат [2]). Число z называется при этом *аффиксом* соответствующей ему точки. Плоскость, точками которой представляются комплексные числа, называется *комплексной числовой плоскостью, или плоскостью комплексного переменного.*

Предположим, что переменное комплексное число $x+iy$ изменяется так, что его модуль

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

неограниченно возрастает. Соответствующая точка комплексной плоскости неограниченно удаляется от начала координат. Говорят тогда, что число z стремится к бесконечности, а соответствующая ему точка — к бесконечно удаленной точке плоскости.

Читателю необходимо освоиться с мыслью, что, в то время как для вещественного переменного и на числовой прямой рассматриваются две

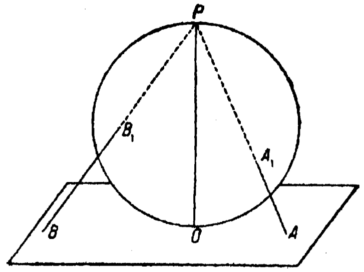
[1]) См., например, чрезвычайно изящное изложение Гурвица «Теория аналитических и эллиптических функций», ГТТИ, 1933, а также В. И. Смирнов «Курс высшей математики» т. III.

[2]) А также вектором, с проекциями x и y на координатные оси.

бесконечности $\pm\infty$ и две бесконечно удаленные точки для комплексного переменного и в комплексной плоскости рассматриваются одна бесконечность и одна бесконечно удаленная точка. Так, относительно переменных z_1, z_2 и z_3, принимающих значения: $z_1 = i$, $2i$, $3i$, $4i, \ldots$; $z_2 = -1, -2, -3, -4, \ldots$; $z_3 = i + 1$; $2i + 2$, $3i + 3$, $4i + 4, \ldots$, мы одинаковым образом говорим, что каждое из них стремится к бесконечности и что изображающие их точки стремятся к бесконечно удаленной точке плоскости.

С этой точки зрения обычная (эвклидова) плоскость, вполне пригодная для изображения конечных комплексных чисел, перестает годиться для изображения чисел, стремящихся к бесконечности, так как для обычной плоскости мы считаем, что двум непараллельным прямым плоскости соответствуют различные бесконечно удаленные точки.

Затруднения с геометрическим истолкованием бесконечно удаленной точки исчезают, однако, если изображать комплексные числа не точками плоскости, а точками поверхности сферы. Представим себе некоторую сферу, например диаметра 1, касающуюся комплексной плоскости в начале координат O (см. фиг. 17). Пусть A—некоторая точка плоскости с аффиксом z. Соединим A прямой с точкой P сферы, диаметрально противоположной O. Прямая AP пересечет поверхность сферы в точке A_1, которую и будем считать изображением комплексного числа z на сфере. Очевидно, для каждого комплексного числа z можно найти изображающую его точку сферы, причем разным числам будут отвечать разные точки сферы. Обратно, если дана какая-либо точка сферы B_1, отличная от P, мы, найдя точку B пересечения прямой PB_1 с плоскостью, найдем вместе с тем и комплексное число — аффикс точки B, изображением которого являлась точка B_1 сферы. По мере того как точка B_1 берется все более и более близкой к P, соответствующие точки B отходят все дальше и дальше от начала координат. Если поэтому точка B_1 будет по поверхности сферы стремиться к точке P, то соответствующие ей комплексные числа будут стремиться к бесконечности. Таким образом точку P можно рассматривать как образ «бесконечно большого числа» на поверхности сферы и в то же время как образ бесконечно удаленной точки плоскости.



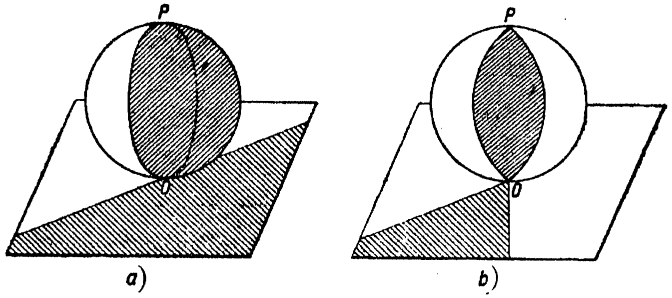
Фиг. 17

Сфера, точки которой изображают комплексные числа, называется сферой Римана, по имени знаменитого немецкого математика.

Ею следует пользоваться предпочтительно перед плоскостью всякий раз, когда речь идет о бесконечно удаленной точке.

Заметим, что прямым линиям плоскости на сфере Римана соответствуют вследствие указанного построения окружности, проходящие через точку P, и что, в частности, прямым, проходящим через начало координат, соответствуют большие круги, проходящие через точки O и P. Таким образом полуплоскости, образованной точками, лежащими по одну сторону

от прямой, проходящей через начало координат, соответствует полусфера (см. фиг. 18, *a*), а части плоскости, заключенной между двумя полупрямыми, выходящими из начала координат, на сфере соответствует сферический двуугольник с вершинами в O и P (см. фиг. 18, *b*).



Фиг. 18

Соответственно с этим в комплексной плоскости прямую следует мыслить как замкнутую линию, концы которой сходятся в бесконечно удаленой точке (представляйте себе при этом окружность на римановой сфере, проходящую через точку P), а полуплоскость и внутренность угла — как части плоскости, ограниченные замкнутой линией.

§ 47. Окрестность точки. Область

Введем в этом параграфе некоторые геометрические понятия, важные для дальнейшего. Условимся, прежде всего, для краткости называть *окрестностью* точки A плоскости (или сферы) множество всех точек, лежащих внутри кружка (любого радиуса) с центром в A. Если точка принадлежит какому-либо множеству точек (расположенных, например, вне некоторой кривой или внутри некоторой замкнутой кривой), то мы называем A *внутренней точкой* этого множества, если существует такая окрестность A, все точки которой принадлежат к рассматриваемому множеству. Так, например, любая точка полуплоскости, ограниченной некоторой прямой, является внутренней для полуплоскости, если она не лежит на ограничивающей прямой. Напротив, точки, лежащие на этой прямой, не будут внутренними для полуплоскости, так как какую бы малую окрестность мы ни взяли, часть ее (половина) будет содержать точки, не принадлежащие к рассматриваемой полуплоскости.

Теперь мы дадим определение *области*: областью называется такое множество, состоящее лишь из внутренних точек, две любые точки которого могут быть соединены непрерывной линией (например ломаной), состоящей из одних лишь точек этого множества. Поясним это определение на примерах.

а) *Полуплоскость.* Все точки, лежащие по одну и ту же сторону от некоторой прямой (но не на самой прямой!), образуют область.

b) *Внутренность окружности.* Все точки, лежащие внутри некоторой окружности (но не на самой окружности), образуют область.

c) *Внешность окружности.* Все точки, лежащие вне некоторого круга, образуют область.

d) *Плоскость с разрезом.* Все точки плоскости, не лежащие на некоторой полупрямой $O\infty$, образуют область.

e) *Круговое кольцо.* Область образуют также все точки, лежащие между двумя концентрическими окружностями (но не на самих окружностях).

f) Все точки, лежащие внутри (но не на сторонах) двух треугольников с общей вершиной C (без других общих точек), не образуют области. Хотя каждая точка этого множества и является внутренней для него, однако две точки, принадлежащие двум разным треугольникам, нельзя соединить непрерывной линией, состоящей лишь из точек множества. В самом деле, такая линия должна была бы пройти через точку C, которая не принадлежит множеству (по самому способу его задания).

Граничными точками области называются такие точки, не принадлежащие области, в любой окрестности которых находятся точки, принадлежащие области.

Все граничные точки области образуют *границу* области. Эта граница может состоять из одной или нескольких линий. Так, в примерах «a», «b», «c», «d» и «e» границами областей являются, соответственно: прямая, окружность, окружность, полупрямая, две концентрические окружности. Границей области могут являться также одна или несколько точек: так, например, все точки плоскости, за исключением бесконечно удаленной точки (под окрестностью которой можно понимать внешность любого круга с центром в начале координат), образуют область, границей которой служит сама бесконечно удаленная точка. Наконец, область может вовсе не иметь границы: такова, например, область, образованная всеми без исключения точками плоскости.

В тех случаях, когда общее число отдельных линий и отдельных точек, образующих границу области, конечно, это число называется *порядком связности* области, а сама область называется либо *односвязной*, либо *двусвязной*, *трехсвязной* и т. д. соответственно порядку связности.

Так, в примерах «a», «b», «c» и «d» области односвязны, в примере «e» область двусвязна.

Легко можно получить примеры бесконечно связных областей, рассматривая, например, область, состоящую из всех точек плоскости, кроме точек с аффиксами: $+1, +2, +3, +4, \ldots, +n, +n+1, \ldots$ Последние образуют границу области и так как это отдельные точки (не составляющие одну или несколько линий) и число их бесконечно, то и порядок связности бесконечен.

Дадим в заключение этого параграфа понятие *замкнутой области*. Замкнутой областью называется множество точек, которое получится, если ко всем внутренним точкам области присоединить также все ее граничные точки. Так, в примере «b» мы получим замкнутую область (замкнутый круг), если к точкам, лежащим внутри окружности, присоединим еще точки самой окружности.

§ 48. Пределы. Функции. Геометрическое изучение их. Непрерывные функции

Говорят, что *переменная величина $z = x + iy$ стремится к пределу $c = a + bi$*, если все точки z, начиная с некоторого момента, попадают в любую сколь угодно малую окрестность точки c.

Так как расстояние между точками z и c, равное $|z - c|$, становится при этом меньшим, чем радиус кружка, образующего окрестность точки c, то мы можем определить стремление к пределу еще следующим образом.

z стремится к пределу c, если, начиная с некоторого момента, выполняется неравенство:

$$|z - c| < \varepsilon,$$

как бы ни было мало наперед заданное положительное число ε.

Наконец, заметив, что

$$|z - c| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \geqslant \begin{cases} |x - a|, \\ |y - b|, \end{cases}$$

мы можем утверждать, что $\lim z = \lim c$ в том, и только в том случае, если $\lim |x - a| = 0$ и $\lim |y - b| = 0$. Иными словами: комплексное переменное $z = x + iy$ стремится к пределу $c = a + bi$, если вещественные числа x и y стремятся соответственно к пределам a и b. На основании последнего определения все результаты теории пределов для вещественных чисел сами собою переносятся на теорию пределов для комплексных чисел.

Если аффиксу каждой точки z из некоторой области B комплексной плоскости соответствует определенное комплексное число w, то говорят, что w есть *функция* от z (и притом однозначная), определенная в области B.

Например $w = z^2$ является функцией от z, определенной во всякой области, так как для всякого $z = x + iy$ получаем определенное значение $w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2i \cdot xy$. Также модуль $z: |z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$ является всюду определенной функцией от z.

Если положим $z = x + iy$ и $w = u + iv$, то, очевидно, u и v являются двумя вещественными функциями от двух вещественных переменных x и y каждая. (В самом деле, если заданы x и y, то тем самым задано z, а следовательно, и w, т. е. u и v.)

Таким образом изучение функций комплексного переменного в принципе можно свести к изучению двух вещественных функций от двух вещественных переменных.

Изучая функции вещественного переменного, мы привыкли пользоваться графиком, для того чтобы наглядно представить себе характер изменения функций в зависимости от изменения аргумента. Для функции комплексного переменного с той же целью используются две плоскости комплексного переменного, в одной из которых перемещают точку z [плоскость (z)], а в другой следят за соответствующими перемещениями точки $w = f(z)$.

Так, например, в случае $w = z^2$, что можно записать также в виде: $u + iv = x^2 - y^2 + 2ixy$, откуда следует, что $u = x^2 - y^2$ и $v = 2xy$, мы видим, что когда точка z перемещается по гиперболе типа: $x^2 - y^2 = a$, вещественная часть w, равная $u = x^2 - y^2$, остается постоянно равной a, т. е. точка перемещается по прямой, параллельной оси v. Точно так же, если z перемещается по гиперболе типа $xy = b$, постоянной остается мнимая часть w, равная $v = 2xy$, и точка w перемещается параллельно оси u.

В итоге два семейства гипербол: $x^2 - y^2 = a$, $xy = b$, в плоскости (z) переходят в плоскости (w) посредством функции: $w = z^2$, в два семейства прямых, параллельных координатным осям.

Можно также без труда убедиться, что, в то время как z описывает окружность с центром в начале координат и радиуса r, точка w описывает окружность также с центром в начале координат и радиуса r^2; а если z описывает полупрямую, выходящую из начала координат под углом α к оси x, то точка w описывает полупрямую, выходящую из начала координат под углом 2α к оси u.

Чтобы притти к этим заключениям, удобнее записывать комплексные числа z и w в их тригонометрической форме:

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$
$$w = R(\cos A + i\sin A) = r^2(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha).$$

Но вернемся к общим вопросам и дадим определение непрерывной функции комплексного переменного.

Пусть $w = f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z_0. Если для всякой сколь угодно малой окрестности точки $w_0 = f(z_0)$ можно указать такую окрестность точки z_0, что все соответствующие значения $w = f(z)$ будут попадать внутрь указанной окрестности $w_0 = f(z_0)$, то $f(z)$ называется непрерывной в точке z. Это определение можно заменить другим, заметив, что факт нахождения двух точек в одном и том же малом кружке эквивалентен факту малости абсолютной величины разности аффиксов этих точек. Иными словами, функция $f(z)$, определенная в некоторой окрестности точки z_0, непрерывна в этой точке, если для любого, сколь угодно малого ε $(\varepsilon > 0)$, можно указать такое δ $(\delta > 0)$, что будет:

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon,$$

если только

$$|z - z_0| < \delta,$$

или, короче, если

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Так как

$$|f(z) - f(z_0)| = |[u(x,y) + iv(x,y)] - [u(x_0,y_0) + iv(x_0,y_0)]| =$$
$$= \sqrt{[u(x,y) - u(x_0,y_0)]^2 + [v(x,y) - v(x_0,y_0)]^2} \geqslant$$
$$\geqslant \left\{ \begin{array}{l} |u(x,y) - u(x_0,y_0)| \\ |v(x,y) - v(x_0,y_0)|. \end{array} \right.$$

и

$$|z - z_0| = |x + iy - (x_0 + iy_0)| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \geqslant$$
$$\geqslant \begin{array}{l} |x - x_0| \\ |y - y_0| \end{array},$$

то из сказанного выше следует, что $f(z)$ непрерывна при $z = z_0$ тогда, и только тогда, если

$$|u(x,y) - u(x_0,y_0)| \to 0$$

и

$$|v(x,y) - v(x_0,y_0)| \to 0,$$

при $|x - x_0| \to 0$ и $|y - y_0| \to 0$, т. е. если каждая из функций вещественных переменных $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывна относительно x и y, при $x = x_0$, $y = y_0$. Из этого следует, что все свойства непрерывных функций вещественных переменных без изменения переносятся на непрерывные функции комплексного переменного.

§ 49. Производная функции комплексного переменного. Уравнения Коши-Римана

Пусть дана функция $f(z)$ от переменной $z = x + iy$, однозначная и непрерывная в некоторой области. Дадим переменной z приращение $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ и рассмотрим отношение

$$\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

в предположении, что z не меняется, а меняется только Δz. Если это отношение при $\Delta z \to 0$ имеет конечный предел, не зависящий от того способа, по которому $\Delta z \to 0$, то этот предел называют *производной* функции $f(z)$ в точке z и обозначают через

$$f'(z).$$

Заметим, что функция, имеющая производную в точке, в этой точке необходимо непрерывна.

Функцию $f(z)$, определенную в некоторой области G и имеющую в этой области (т. е. в каждой точке области) непрерывную производную $f'(z)$, мы будем называть *функцией, аналитической в области G*.

Требование, чтобы функция $f(z)$ была аналитической в области G, приводит к некоторым условиям, которым должны удовлетворять ее вещественная и мнимая части.

Выведем эти условия. Пусть $f(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$.

В таком случае:

$$f(z + \Delta z) = \varphi(x + \Delta x, y + \Delta y) + i\psi(x + \Delta x, y + \Delta y).$$

Вследствие этого:

$$\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \frac{\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \varphi(x,y)}{\Delta x + i\Delta y} + i\frac{\psi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \psi(x,y)}{\Delta x + i\Delta y}; \qquad (1)$$

так как $\lim \frac{\Delta f(z)}{\Delta z}$ не зависит от способа, по которому $\Delta z = \Delta x + i\,\Delta y$ стремится к нулю, то положим сначала, что $\Delta y = 0$. В таком случае $\Delta z = \Delta x$. Полагая, что $\Delta x \to 0$, и переходя к пределу из (1), получим:

$$f'(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Теперь выберем другой способ изменения Δz и положим, что $\Delta x = 0$. В таком случае $\Delta z = i\,\Delta y$. И если $\Delta y \to 0$, то в пределе из (1) следует, что

$$f'(z) = -i\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Сравнивая результаты, приходим к заключению, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{2}$$

Эти равенства называют *уравнениями Коши-Римана*.

Таким образом для того чтобы функция $f(z)$ была аналитической в некоторой области G, необходимо, чтобы функция $\varphi(x, y)$, составляющая ее вещественную часть, и функция $\psi(x, y)$, служащая коэфициентом при мнимой единице, имели в этой области непрерывные частные производные, удовлетворяющие уравнениям (2).

Покажем, что полученные условия не только необходимы, но и достаточны.

Пусть известно, что функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, в каждой точке (x, y) области G имеют частные проиводные, непрерывные и удовлетворяющие уравнениям (2). Мы можем написать, что

$$\Delta\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\Delta y + \varepsilon,$$

$$\Delta\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial \psi}{\partial y}\cdot\Delta y + \varepsilon_1,$$

где ε и ε_1 — бесконечно малые высшего порядка относительно $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

Следовательно:

$$\Delta f(z) = \Delta\varphi + i\,\Delta\psi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\Delta y + i\left(\frac{\Delta\psi}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\Delta\psi}{\partial y}\cdot\Delta y\right) + \varepsilon + \varepsilon_1 i$$

или, на основании (2):

$$\Delta f(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + i\frac{\partial \psi}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + \varepsilon + \varepsilon_1 i.$$

Вследствие этого

$$\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{i\,\partial \psi}{\partial x} + \frac{\varepsilon + \varepsilon_1 i}{\Delta z}. \tag{3}$$

Но модуль

$$\left|\frac{\varepsilon + \varepsilon_1 i}{\Delta z}\right| < \left|\frac{\varepsilon}{\Delta z}\right| + \left|\frac{\varepsilon_1}{\Delta z}\right| = \frac{|\varepsilon|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} + \frac{|\varepsilon_1|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}.$$

Сумма этих дробей стремится к нулю, так как числители их являются бесконечно малыми высшего порядка по отношению к знаменателям. В пределе будем иметь из (3):

$$f'(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{4}$$

независимо от того, каким образом $\Delta z \to 0$.

При этом $f'(z)$ непрерывна в области G, так как ее вещественная и мнимая части $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ непрерывны в этой области.

Равенство (4) можно переписать на основании уравнений (2) еще и так:

$$f'(z) = \frac{\partial \psi}{\partial y} - i\frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{5}$$

Вследствие существования между функциями $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ соотношения (2) эти функции не могут быть взяты произвольно. Если задана одна из них, например $\varphi(x, y)$, то $\psi(x, y)$ определяется уравнениями (2).

Положим для примера, что $\varphi(x, y) = xy$. В таком случае:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial x}dy,$$

т. е.

$$d\psi = -x\,dx + y\,dy,$$

откуда

$$\psi = \frac{1}{2}(y^2 - x^2) + C,$$

где C — постоянная интегрирования.

Формулы, выражающие производные от основных элементарных функций и правила диференцирования суммы, произведения, частного и т. д. не трудно распространить и на функции от комплексного переменного. Они имеют тот же вид, как и для случая функций вещественного переменного и выводятся аналогично.

§ 50. Интеграл от функции комплексного переменного

Пусть $f(z)$ есть однозначная и непрерывная функция аргумента z, принимающего комплексные значения в некоторой области. Предположим, что точка z, перемещаясь внутри области, описывает некоторую кривую AB. Обозначим через z_0 и z_n значения переменной z в точках A и B. Кроме этих точек возьмем еще $n - 1$ каких-нибудь точек

$$z_1, z_2, \ldots, z_{n-1},$$

расположенных на AB. Составим сумму:

$$S_n = (z_1 - z_0)f(\zeta_0) + (z_2 - z_1)f(\zeta_1) + \ldots + (z_n - z_{n-1})f(\zeta_{n-1}),$$

или

$$S_n = \sum_{n=0}^{n-1}(z_{k+1} - z_k)\,f(\zeta_k),$$

где число ζ_k есть аффикс точки, взятой каким-нибудь образом на части дуги, заключенной между точками z_k и z_{k+1}. Сумма S_n, как это нетрудно видеть, может быть переписана так:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} [(x_{k+1}-x_k)\varphi(\xi_k, \eta_k) - (y_{k+1}-y_k)\psi(\xi_k, \eta_k)] +$$
$$+ i\sum_{k=0}^{n-1} [(y_{k+1}-y_k)\varphi(\xi_k, \eta_k) + (x_{k+1}-x_k)\psi(\xi_k, \eta_k)], \qquad (6)$$

причем предполагается, что

$$z_k = x_k + iy_k; \quad \zeta_k = \xi_k + i\eta_k.$$

Будем увеличивать неограниченно число n отрезков, уменьшая самые отрезки до нуля.

Суммы, находящиеся в правой части равенства (6), имеют пределы. Эти пределы являются не чем иным, как взятыми вдоль линии AB криволинейными интегралами от функций вещественных переменных.

Отсюда заключаем, что и сумма S_n имеет предел, который не зависит от способа выбора на линии AB точек деления. Этот предел называют *интегралом функции комплексного переменного, взятым вдоль дуги AB*, и обозначают через

$$\int_{AB} f(z)\,dz.$$

Нетрудно видеть, что

$$\int_{AB} f(z)\,dz = \int_{AB} (\varphi\cdot dx - \psi\cdot dy) + i\int_{AB} (\varphi\cdot dy + \psi\cdot dx). \qquad (7)$$

Эта формула дает нам выражение интеграла от функции комплексного переменного через два криволинейных интеграла от функций вещественных переменных.

Если уравнение линии AB известно и дано в параметрическом виде

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t),$$

причем перемещению точки z от A до B соответствует изменение параметра t от α до β, то, заменяя в (7) x и y их выражениями, легко придем к результату:

$$\int_{AB} f(z)\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} F_1(t)\,dt + i\int_{\alpha}^{\beta} F_2(t)\,dt$$

и этим приведем нахождение интеграла от функции комплексного переменного к нахождению двух обыкновенных определенных интегралов от функций вещественного переменного t.

Теоремы о вынесении постоянного множителя за знак интеграла, об интегрировании суммы, об изменении знака интеграла при перемене направления интегрирования, о разбиении интервала интегрирования на частные интервалы остаются в силе и для интегралов от функций комплексного переменного. Проверить эти теоремы предлагаем читателю в виде упражнения.

Мы предполагали, что функция непрерывна в области. Можно, однако, было ограничиться предположением, что она непрерывна в точках линии AB. Относительно этой линии мы будем предполагать, что она в каждой точке имеет касательную, направление которой изменяется непрерывно при переходе от точки к точке. Такую линию называют гладкой. В более общем случае придется интегрировать по линиям кусочно-гладким, т. е. таким, которые состоят из конечного числа гладких дуг.

§ 51. Теорема Коши

Понятие об интеграле от функции комплексного переменного уже установлено. Отметим, что соображения, которые были высказаны до сих пор относительно интеграла, не требовали существования у подинтегральной функции производной. Речь шла только о функции непрерывной.

Возникает теперь такой вопрос: зависит ли значение интеграла $\int_{AB} f(z)\,dz$ от вида кривой AB, соединяющей точки A и B, или не зависит?

Ответ на этот вопрос дает знаменитая теорема Коши, опубликованная им в 1825 г. и послужившая основанием для создания теории функции комплексного переменного. Содержание теоремы таково:

1. *Если функция $f(z)$ аналитическая в замкнутой односвязной области, ограниченной контуром C, то интеграл*

$$\int_{L} f(z)\,dz,$$

взятый по любой кривой L в этой области, от вида кривой не зависит и определяется только положением начальной и конечной точек кривой. И если кривая L замкнута, то интеграл равен нулю. В частности

$$\int_{C} f(z)\,dz = 0.$$

2. *Если функция $f(z)$ аналитическая в замкнутой многосвязной области, ограниченной контуром, состоящим из наружной кривой C и внутренних $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$, то интеграл от этой функции по наружной кривой равен сумме интегралов, взятых по внутренним кривым. При этом все интегралы берутся в одном и том же направлении, например в направлении, обратном движению часовой стрелки.*

Устанавливая первую часть теоремы, прежде всего заметим, что для того чтобы интеграл не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы не зависели от пути интегрирования те криволинейные интегралы, к которым он приводится и которые находятся в правой части равенства (7).

Но условием, необходимым и достаточным для независимости криволинейного интеграла

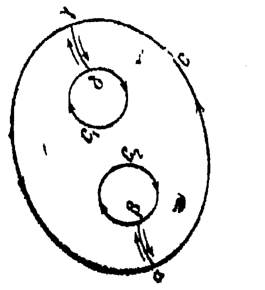
$$\int_L (M\,dx + N\,dy)$$

от пути интегрирования, служит, как известно, соотношение:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \qquad (8)$$

Применяя его к двум интегралам правой части равенства (7), находим, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y},$$



Черт. 29

т. е. находим уравнения Коши-Римана.

Отсюда заключаем, что результат интегрирования не зависит от вида кривой L в том, и только в том, случае, когда кривая L взята в области, в которой подинтегральная функция аналитическая. В этом случае значение интеграла определяется только лишь положением начальной и конечной точек L.

Равенство нулю интеграла, взятого по замкнутой кривой, вытекает из сказанного как простое следствие.

Перейдем теперь ко второй части теоремы и рассмотрим случай многосвязной области. Пусть, например, область ограничена контуром, состоящим из наружной кривой C и двух внутренних кривых C_1 и C_2 (фиг. 29), и пусть функция $f(z)$ в этой области и на ее контуре есть функция аналитическая. Произведя разрезы $\alpha\beta$ и $\gamma\delta$, мы превратим заданную многосвязную область в односвязную. Интегрируя в направлении, указанном стрелками, будем иметь по-доказанному для односвязной области:

$$I(\alpha\gamma)+I(\gamma\delta)+I(C_1)+I(\delta\gamma)+I(\gamma\alpha)+I(\alpha\beta)+I(C_2)+I(\beta\alpha)=0,$$

где буква I заменяет знак интеграла, а буквы в скобках указывают контур, по которому берется интеграл.

Но так как

$$I(\alpha\gamma)+I(\gamma\alpha)=I(C); \quad I(\gamma\delta)+I(\delta\gamma)=0; \quad I(\alpha\beta)+I(\beta\alpha)=0,$$

то выходит, что

$$I(C) = -I(C_1) - I(C_2).$$

Интегралы, находящиеся в правой части равенства, взяты по направлению движения часовой стрелки. Изменяя это направление и возвращаясь к обычному знаку интеграла, получим:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz.$$

§ 52. Интеграл и первообразная функция

Пусть функция $f(z)$ однозначная и аналитическая в некоторой односвязной области и z_0 и z—две точки этой области. Соединим эти точки внутри области гладкой линией L и рассмотрим интеграл

$$\int_L f(z)\,dz.$$

На основании теоремы Коши значение этого интеграла определяется только лишь положением начальной и конечной точек линии L и от вида этой линии не зависит. И если мы предположим, что точка z_0 постоянна, а z переменна, то мы можем сказать, что наш интеграл есть функция от z. Не завися от вида линии L, эта функция однозначна.

Обозначим ее через $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ или короче $\Phi(z)$ так, что

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz.$$

Мы покажем, что функция $\Phi(z)z_0$ в каждой точке области имеет производную $f(z)$. На основании формулы (7) пишем:

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (\varphi\cdot dx - \psi\cdot dy) + i\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (\varphi\cdot dy + \psi\cdot dx).$$

Пусть

$$\Phi(z) = P(x, y) + iQ(x, y).$$

В таком случае:

$$P(x, y) = \int_{(x_0 y_0)}^{(x,y)} (\varphi\cdot dx - \psi\cdot dy),$$

$$Q(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} (\varphi\cdot dy + \psi\cdot dx),$$

откуда

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \varphi; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\psi; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \psi; \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \varphi.$$

Очевидно, $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial Q}{\partial y}$ непрерывны в области, так как $f(z) = \varphi + i\psi$ функция аналитическая, а следовательно, непрерывная.

Из найденных соотношений выводим:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x},$$

т. е. функции P и Q удовлетворяют уравнениям Коши-Римана. Отсюда следует, что функция Φ в области аналитическая. Согласно (4) ее производная

$$\Phi'(z)=\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial Q}{\partial x},$$

т. е.

$$\Phi'(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$$

и

$$\Phi'(z)=f(z).$$

Мы видим, что функция $\Phi(z)$ служит первообразной функцией для $f(z)$.

Покажем, что всякая другая первообразная функция будет иметь вид:

$$F(z)=\Phi(z)+C,$$

где C — произвольная постоянная.

Рассмотрим разность:

$$\omega(z)=F(z)-\Phi(z).$$

Так как F и Φ первообразные функции, то

$$F'(z)=f(z) \quad \text{и} \quad \Phi'(z)=f(z).$$

Следовательно:

$$\omega'(z)=0.$$

Пусть

$$\omega(z)=u(x,y)+iv(x,y).$$

В таком случае:

$$\omega'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial v}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial v}{\partial y}=0;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

А это значит, что функции u и v от x и y не зависят и являются в области постоянными. Следовательно, $\omega(z)=C$, и мы имеем:

$$F(z)=\Phi(z)+C$$

или

$$F(z)=\int_{z_0}^{z}f(z)\,dz+C.$$

Но, полагая $z=z_0$, получим:

$$C=F(z_0),$$

т. е.

$$\int_{z_0}^{z}f(z)\,dz=F(z)-F(z_0). \tag{9}$$

Результат этот можно формулировать так:

Интеграл от аналитической функции равен приращению первообразной функции вдоль контура интегрирования.

§ 53. Формула Коши

Пусть $f(z)$ есть аналитическая функция в замкнутой односвязной области, ограниченной контуром C. Выберем какую-нибудь точку z внутри области и составим функцию

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z},$$

где ζ — переменная точка контура C. Эта функция аналитическая во всей области, кроме точки z. Примем точку за центр и опишем из нее окружность c малым радиусом ρ. В таком случае, по теореме Коши, будем иметь:

$$\int_C\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=\int_c\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}.$$

Интегрирование по обоим контурам ведется в одном и том же направлении: против часовой стрелки.

Так как функция $f(z)$ непрерывна, то можно предположить, что $f(z)=$ $=f(z)+\varepsilon$, причем при достаточно малом ρ будем иметь $|\varepsilon|<\eta$, где η — любое наперед заданное положительное число. Вследствие этого

$$\int_C\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=f(z)\int_c\frac{d\zeta}{\zeta-z}+\int_c\frac{\varepsilon\cdot d\zeta}{\zeta-z}.$$

Найдем сначала первый из полученных нами двух интегралов. Пусть $\zeta=x+yi$; $z=\alpha+\beta i$.

Параметрическое уравнение окружности с центром в точке z можно написать так:

$$x-\alpha=\rho\cos\theta,$$
$$y-\beta=\rho\sin\theta,$$
$$0\leqslant\theta\leqslant2\pi.$$

Отсюда

$$x-\alpha+i(y-\beta)=\rho(\cos\theta+i\sin\theta),$$

т. е.

$$\zeta-z=\rho e^{\theta i} \quad \text{и} \quad d\zeta=\rho ie^{\theta i}\,d\theta.$$

Следовательно:

$$\int_c\frac{d\zeta}{\zeta-z}=i\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi i.$$

Что касается второго интеграла, то его величина, с одной стороны, не зависит от ρ, так как

$$\int_c\frac{\varepsilon\,d\zeta}{\zeta-z}=\int_C\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}-2\pi if(z);$$

с другой стороны, этот интеграл может быть записан в виде:

$$\int_c\frac{\varepsilon\,d\zeta}{\zeta-z}=i\cdot\int_0^{2\pi}\varepsilon\cdot d\theta$$

и так как ε по модулю меньше η, то модуль интеграла меньше, чем $2\pi\eta$, где η сколь угодно мало при достаточно малом ρ. Отсюда следует, что

$$\int\limits_c \frac{\varepsilon\, d\zeta}{\zeta - z} = 0,$$

и мы имеем:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}. \qquad (10)$$

Эта формула, известная под именем *формулы Коши*, представляет аналитическую функцию в форме интеграла по замкнутому контуру и весьма важна по своим приложениям.

Заметим, что та же формула справедлива и для многосвязной области. Если мы через C_1 обозначим внешний контур области, а через C_2, $C_3, \ldots, C_n$ — внутренние контуры и, наконец, через c — окружность с центром в точке z, целиком лежащую внутри области, то, по теореме Коши, будем иметь:

$$\int\limits_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int\limits_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \ldots + \int\limits_{C_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \int\limits_{c} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

где интегрирование по всем контурам ведется в одном и том же направлении: против часовой стрелки.

Но по доказанному:

$$\int\limits_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 2\pi i f(z).$$

Следовательно:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left[\int\limits_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \int\limits_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \ldots - \int\limits_{C_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\right].$$

Изменяя направления интегрирования во всех интегралах, стоящих в квадратных скобках, начиная со второго, на обратные, мы сможем записать эту формулу в виде:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

где интегрирование ведется по всем контурам, образующим границу; при этом внешний контур обходится против часовой стрелки, а внутренние — по часовой стрелке. Легко видеть, что при таком направлении обхода граничных контуров область остается все время слева; это направление называется положительным.

§ 54. Производные высших порядков от аналитической функции

Докажем, что *функция $f(z)$ аналитическая в некоторой области имеет в этой области производные всех высших порядков.*

Пользуясь формулой (10), нетрудно обнаружить, что

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i\cdot\Delta z}\int\limits_C f(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta - z - \Delta z} - \frac{1}{\zeta - z}\right) d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^2} + \frac{\Delta z}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^2(\zeta - z - \Delta z)}.$$

Если $\Delta z \to 0$, то независимо от закона изменения этого приращения в пределе будем иметь:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^2}. \qquad (11)$$

Мы представили производную под видом контурного интеграла. Найденная формула не может, конечно, служить доказательством существования первой производной, ибо при ее выводе мы предполагали, что функция $f(z)$ есть функция аналитическая и тем самым имеет первую производную. Но формула эта послужит для обнаружения производных высших порядков. Пользуясь (11), применим к функции $f'(z)$ те же выкладки, которые были применены к функции $f(z)$. Мы получим:

$$f''(z) = \frac{1\cdot 2}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^3},$$

$$f'''(z) = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^4}.$$

Вообще

$$f^{n}(z) = \frac{1\cdot 2\ldots n}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}. \qquad (12)$$

Таким образом из факта существования у функции в области непрерывной производной первого порядка вытекает существование в этой области производных всех высших порядков.

§ 55. Ряды с комплексными членами

Бесконечный ряд комплексных чисел

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (13)$$

называется сходящимся, если частичная сумма его членов

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$

стремится к определенному конечному пределу S, когда n стремится к бесконечности.

Число S называют при этом суммой ряда и пишут:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = S.$$

Если положим $u_n = x_n + iy_n$, то частичная сумма S_n представится в виде:

$$S_n = \sigma_n + i\tau_n = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + i\,(y_1 + y_2 + \ldots + y_n).$$

Для того чтобы S_n стремилось к пределу S, когда n стремится к бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы σ_n и τ_n — частичные суммы рядов с вещественными членами:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots \quad \text{и} \quad y_1 + y_2 + \ldots + y_n + \ldots \qquad (14)$$

стремились к некоторым пределам σ и τ; иными словами, условия сходимости ряда (13) с комплексными членами эквивалентны условиям сходимости двух рядов (14) с вещественными членами. На основании этого замечания все общие теоремы о рядах с вещественными членами переносятся на ряды с комплексными членами. В частности:

Для того чтобы ряд (13) *сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого* ε, $\varepsilon > 0$ *можно было указать такое* $n(\varepsilon)$ *чтобы неравенство*

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon$$

имело место, при $n > n(\varepsilon)$, *для любого целого положительного* p.

Из этой теоремы заключаем, что *ряд* (13) *будет сходиться, если сходится ряд*

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots, \qquad (15)$$

составленный из модулей членов ряда (13).

Действительно, величина

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}|$$

не больше, чем

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}|$$

и если последняя может быть сделана сколь угодно малой, при достаточно большом n, то с тем большим основанием это справедливо и для первой.

Обратное, конечно, неверно, как показывает известный пример сходящегося ряда:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots,$$

для которого ряд модулей

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

расходится.

Если наряду с рядом (13) *сходится также и ряд* (15), *то ряд* (13) *называется абсолютно сходящимся.*

В дальнейшем мы будем заниматься, главным образом, рядами с переменными членами:

$$u_1(z) + u_2(z) + \ldots + u_n(z) + \ldots, \qquad (16)$$

члены которых являются аналитическими функциями от z в некоторой области плоскости.

Ряд с переменными членами называется равномерно сходящимся в некоторой замкнутой области, если для любого ε, $\varepsilon > 0$ *можно указать такое* $n(\varepsilon)$, *что неравенство*

$$|u_{n+1}(z) + u_{n+2}(z) + \ldots + u_{n+p}(z)| < \varepsilon$$

будет иметь место, при $n > n(\varepsilon)$, *для любого* p, *каково бы ни было* z *из данной замкнутой области.*

Так, например, ряд

$$(z-1) + (z^2 - z) + (z^3 - z^2) + \ldots + (z^n - z^{n-1}) + \ldots$$

равномерно сходится в замкнутом круге: $|z| \leqslant r < 1$, ибо

$$|(z^{n+1} - z^n) + (z^{n+2} - z^{n+1}) + \ldots + (z^{n+p} - z^{n+p-1})| =$$
$$= |z^{n+p} - z^n| \leqslant |z^n| + |z^{n+p}| \leqslant r^n + r^{n+p},$$

что может быть сделано сколь угодно малым при достаточно большом n.

Если члены ряда (16) *при всех значениях* z *из некоторой замкнутой области, соответственно, не больше по модулю членов сходящегося ряда*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (17)$$

с положительными членами, то ряд (16) *сходится абсолютно и равномерно.* В самом деле, для любого ε можно указать такое $n(\varepsilon)$, что неравенство

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} < \varepsilon$$

будет иметь место при $n > n(\varepsilon)$ и любом p. Но

$$|u_{n+1}(z)| + |u_{n+2}(z)| + \ldots + |u_{n+p}(z)| \leqslant a_{n+1} +$$
$$+ a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} < \varepsilon$$

и

$$|u_{n+1}(z) + u_{n+2}(z) + \ldots + u_{n+p}(z)| \leqslant |u_{n+1}(z)| +$$
$$+ |u_{n+2}(z)| + \ldots + |u_{n+p}(z)| \leqslant a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$$
$$\ldots + a_{n+p} < \varepsilon.$$

Следовательно, для рядов

$$|u_1(z)| + |u_2(z)| + \ldots + |u_n(z)| + \ldots,$$
$$u_1(z) + u_2(z) + \ldots + u_n(z) \ldots$$

выполняются условия сходимости и даже условия равномерной сходимости [так как полученные нами неравенства справедливы для любого z из той области, в которой модули членов ряда (16) меньше членов ряда (17)].

Очевидно, что сумма ряда аналитических функций (16), равномерно сходящегося в некоторой области, представляет собой функцию от z:

$$u_1(z) + u_2(z) + \ldots + u_n(z) + \ldots = S(z).$$

Можно доказать, на чем мы не будем здесь останавливаться, что эта функция является аналитической и что ее производную некоторого порядка или интеграл вдоль некоторой кривой можно представить как сумму ряда соответствующих производных или интегралов от членов ряда (16):

$$S^{(k)}(z) = u_1^{(k)}(z) + u_2^{(k)}(z) + \ldots + u_n^{(k)}(z) + \ldots,$$

$$\int_L S(z)\,dz = \int_L u_1(z)\,dz + \int_L u_2(z)\,dz + \ldots + \int_L u_n^{(k)}(z)\,dz + \ldots$$

Простейший и вместе с тем наиболее важный случай рядов (16) представляют степенные ряды:

$$B_0+B_1(z-a)+B_2(z-a)^2+\ldots, \tag{18}$$

где B_0, B_1, B_2 — постоянные числа.

Для этих рядов может быть доказана следующая теорема.

Для всякого степенного ряда возможен лишь один из следующих трех случаев: 1°. *Ряд* (18) *не сходится ни при каком* z, *отличном от* a. (Пример: $1+1!(z-a)+2!(z-a)^2+3!(z-a)^3+\ldots$) 2°. *Ряд сходится, и притом абсолютно, внутри некоторого круга с центром в точке* a *и радиусом* R *и расходится во всякой точке, лежащей вне этого круга. Круг этот называется кругом сходимости, а его радиус — радиусом сходимости. Во всякой замкнутой области, лежащей целиком внутри круга сходимости, сходимость будет равномерной.* (Пример: $1+(z-a)+(z-a)^2+(z-a)^3+\ldots$; здесь радиус сходимости равен 1.) 3°. *Ряд сходится, и притом абсолютно, во всякой точке плоскости. Сходимость будет равномерной во всякой замкнутой (конечной) области.* $\left(\text{Пример: } 1+\frac{z-a}{1}+\frac{(z-a)^2}{2!}+\frac{(z-a)^3}{3!}+\ldots\right)$

Если оставить в стороне степенные ряды типа 1°, не представляющие никакого интереса, то можно утверждать на основании этой теоремы и на основании сказанного ранее, что сумма степенного ряда представляет аналитическую функцию от z внутри круга сходимости (в случае 2°) и во всей плоскости (в случае 3°).

Сопоставляя эту теорему с теоремой о почленном диференцировании и интегрировании равномерно сходящихся рядов аналитических функций, мы получаем важное следствие: *степенной ряд можно почленно диференцировать и интегрировать внутри круга сходимости; полученные степенные ряды будут иметь тот же круг сходимости, что и первоначальный ряд* [в случае рядов типа 3° вместо «круга сходимости» следует говорить о всей (конечной) плоскости].

Заметим еще без доказательства, что со степенными рядами можно производить действия сложения, вычитания и умножения как если бы это были многочлены, расположенные по возрастающим степеням $z-a$. В результате будет получаться степенной ряд, сходящийся во всяком случае в наименьшем из кругов сходимости данных рядов.

Укажем, наконец, как производится деление рядов.

Пусть нужно разделить ряд:

$$B_0+B_1\cdot(z-a)+B_2(z-a)^2+\ldots$$

на ряд

$$b_m(z-a)^m+b_{m+1}(z-a)^{m+1}+\ldots$$

(где через b_m обозначен первый из необращающихся в нуль коэфициентов второго ряда).

Заметив, что

$$\frac{B_0+B_1(z-a)+B_2(z-a)^2+\ldots}{b_m(z-a)^m+b_{m+1}(z-a)^{m+1}+\ldots}=$$

$$=\frac{1}{(z-a)^m}\cdot\frac{B_0+B_1(z-a)+B_2(z-a)^2+\ldots}{b_m+b_{m+1}(z-a)+b_{m+2}(z-a)^2+\ldots}$$

делим ряд

$$B_0+B_1(z-a)+B_2(z-a)^2+\ldots$$

на ряд

$$b_m+b_{m+1}(z-a)+b_{m+2}(z-a)^2+\ldots$$

по тем же правилам, по которым в алгебре делят многочлены, расположенные по возрастающим степеням одной и той же буквы. В результате получится степенной ряд $a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\ldots$, который во всяком случае будет сходиться в меньшем из следующих двух кругов: круг сходимости ряда $B_0+B_1(z-a)+B_2(z-a)^2+\ldots$ и круг, окружность которого проходит через ближайшую к $z=a$ точку, в которой обращается в нуль сумма ряда $b_m+b_{m+1}(z-a)+b_{m+2}(z-a)^2+\ldots$ Окончательно будем иметь:

$$\frac{B_0+B_1(z-a)+B_2(z-a)^2+\ldots}{b_m(z-a)^m+b_{m+1}(z-a)^{m+1}+\ldots}=\frac{a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\ldots}{(z-a)^m}=$$

$$=a_0(z-a)^{-m}+a_1(z-a)^{-m+1}+a_2(z-a)^{-m+2}+\ldots$$

Полученный обобщенный степенной ряд (заключающий отрицательные степени $z-a$, если только $m\neq 0$) сходится внутри упомянуго круга, исключая (в случае, когда $m\neq 0$) его центр: $z=a$.

§ 56. Функции e^z, $\sin z$ и $\cos z$

Степенные ряды дают простейший способ определить элементарные функции анализа; e^x, $\sin x$, $\cos x$, не только для вещественных, но и для комплексных значений аргумента.

Именно, как известно, для x вещественного имеют место следующие разложения (в ряд Тейлора):

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots,$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots,$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots$$

Правые части этих равенств представляют собой степенные ряды, сходящиеся для любого x. Если мы подставим в них вместо вещественного, переменного x комплексное переменное z, то получим степенные ряды:

$$1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots=f_1(z),$$

$$z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots=f_2(z),$$

$$1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots=f_3(z),$$

сходящиеся при любом z. Следовательно, функции $f_1(z), f_2(z), f_3(z)$ будут аналитическими для любого конечного значения z.

Значения этих функций при z вещественном также вещественны и совпадают, соответственно, со значениями функций e^x, $\sin x$, $\cos x$. Поэтому первую из этих функций обозначают при любом z (не только при z вещественном) через e^z, вторую через $\sin z$ и третью через $\cos z$.

Итак, под e^{1-2i}, например, следует разуметь комплексное число, равное сумме сходящегося ряда:

$$1+\frac{(1-2i)}{1}+\frac{(1-2i)^2}{2!}+\frac{(1-2i)^3}{3!}+\ldots$$

Пользуясь этими определениями функций e^z, $\sin z$ и $\cos z$, легко найдем между ними важное соотношение, известное под названием формулы Эйлера. Именно:

$$e^{iz}=1+\frac{iz}{1}+\frac{(iz)^2}{2!}+\frac{(iz)^3}{3!}+\frac{(iz)^4}{4!}+\ldots=$$

$$=1+\frac{iz}{1}-\frac{z^2}{2!}-\frac{iz^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots=$$

$$=\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots\right)+i\left(\frac{z}{1}-\frac{z^3}{3!}+\ldots\right)=\cos z+i\sin z. \quad (19)$$

На основании этой формулы мы можем, между прочим, любое комплексное число c с модулем r и аргументом α

$$c=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$

представлять в виде:

$$c=r\cdot e^{i\alpha}. \quad (20)$$

Как можно проверить на основании правил действий над рядами, основные свойства функции e^z, $\sin z$ и $\cos z$, известные для вещественного переменного, сохраняются и для комплексного переменного; например, при любых z, не только при z вещественных, справедливы соотношения:

$$e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2},$$

$$\sin^2 z+\cos^2 z=1,$$

$$\frac{de^z}{dz}=e^z, \quad \frac{d\sin z}{dz}=\cos z, \quad \frac{d\cos z}{dz}=-\sin z$$

и т. д.

Однако выявляются и некоторые новые свойства этих функций, оставшиеся скрытыми при рассмотрении лишь вещественных значений переменного. Так, например, из того, что

$$e^{2\pi i}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1,$$

выводим:

$$e^{z+2\pi i}=e^z\cdot e^{2\pi i}=e^z,$$

т. е. функция e^z оказывается функцией периодической с мнимым периодом, равным $2\pi i$. Заметим, наконец, что для комплексных значений аргумента уже нельзя утверждать, что $|\cos z|$ и $|\sin z|$ не могут быть большими единицы. В самом деле, из формулы Эйлера

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z,$$

следует, что

$$e^{-iz}=\cos(-z)+i\cdot\sin(-z)=\cos z-i\sin z;$$

складывая и вычитая эти две формулы почленно, находим выражение $\cos z$ и $\sin z$ через показательную функцию:

$$\cos z=\frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2}, \quad \sin z=\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i}. \quad (21)$$

С помощью этих формул получаем, например:

$$\cos i=\frac{e^{-1}+e}{2}=1{,}543,$$

$$\sin i=\frac{e^{-1}-e}{2i}=1{,}175i.$$

§ 57. Ряд Тейлора

Покажем здесь, что всякая функция $f(z)$, аналитическая в некотором круге с центром в a и радиуса R, может быть представлена степенным рядом, расположенным по степеням $z-a$ и сходящимся внутри этого круга (а, быть может, и за его пределами). Для доказательства нам послужит формула Коши. Пусть z какая-либо точка внутри круга. Проведем внутри круга окружность c с центром в a так, чтобы точка z лежала внутри этой окружности; пусть $r<R$ радиус этой окружности. По формуле Коши:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_c\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}.$$

Представим $\frac{1}{\zeta-z}$ в виде:

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-a-(z-a)}=\frac{1}{(\zeta-a)}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{z-a}{\zeta-a}\right)}.$$

Выражение $\dfrac{1}{1-\dfrac{z-a}{\zeta-a}}$ может быть, в свою очередь, преобразовано следующим образом:

$$\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{\zeta-a}}=\frac{1-\left(\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right)^{n+1}+\left(\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{z-a}{\zeta-a}}=\frac{1-\left(\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{z-a}{\zeta-a}}+\frac{\left(\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{z-a}{\zeta-a}}=$$

$$=1+\frac{z-a}{\zeta-a}+\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^2+\ldots+\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n+\frac{\left(\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{z-a}{\zeta-a}}.$$

Следовательно:

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-a}+\frac{z-a}{(\zeta-a)^2}+\frac{(z-a)^2}{(\zeta-a)^3}+\ldots+\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}+\frac{\left(\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right)^{n+1}}{\zeta-z}.$$

Подставляя это выражение под знак интеграла и интегрируя почленно, получим:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-a}+(z-a)\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^2}+$$

$$+(z-a)^2\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^3}+\ldots+(z-a)^n\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}+R_n,$$

где

$$R_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(\zeta)\cdot\left(\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right)^{n+1}}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

Но, по формуле Коши:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-a}=f(a)$$

и, по формулам § 54:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^2}=f'(a),\quad \frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^3}=\frac{f''(a)}{2!},\ \ldots$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Таким образом:

$$f(z)=f(a)+f'(a)(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+$$

$$+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+R_n. \qquad (22)$$

Это — *формула Тейлора* для *функций комплексного переменного*. Чтобы получить отсюда ряд Тейлора, нужно убедиться, что остаточный

член формулы R_n стремится к нулю при $n\to\infty$. Для этого заметим, что

$$|R_n|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_c\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z|}\cdot\frac{|z-a|^{n+1}}{|\zeta-a|}\cdot|d\zeta|.$$

Обозначая max $|f(\zeta)|$ на окружности c через M, замечая, что $|\zeta-a|=r$ и $|\zeta-z|=|\zeta-a-(z-a)|\geqslant|\zeta-a|-|z-a|=r-|z-a|$, получаем:

$$|R_n|<\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{r-|z-a|}\cdot\left|\frac{z-a}{r}\right|^{n+1}\cdot 2\pi r=\frac{Mr}{r-|z-a|}\cdot\left|\frac{z-a}{r}\right|^{n+1}.$$

Последнее число, содержащее множитель $\left|\dfrac{z-a}{r}\right|^{n+1}$, может быть сделано сколь угодно малым при n достаточно большом, так как $\left|\dfrac{z-a}{r}\right|<1$. Таким образом $R_n\to 0$ при $n\to\infty$ и

$$f(z)=f(a)+f'(a)(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+\ldots \qquad (23)$$

это разложение $f(z)$ *в ряд Тейлора.*

§ 58. Ряд Лорана

Если функция $f(z)$ аналитическая в круговом кольце, ограниченном двумя окружностями с центром в a и радиусами R_1 и R_2 ($R_1<R_2$), то $f(z)$ можно разложить по степеням $(z-a)$ в ряд Лорана, являющийся обобщением ряда Тейлора в том смысле, что он вообще содержит не только положительные, но и отрицательные степени $(z-a)$.

К этому разложению можно прийти, как и в предыдущем параграфе, отправляясь от формулы Коши. Именно, пусть z какая-либо точка внутри кольца. Проведем внутри кольца две окружности C_1 и C_2 с центром в a, радиусами r_1 и r_2, ($r_1<r_2$), так чтобы точка z лежала между этими окружностями.

По формуле Коши, имеем:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z},$$

причем интегрирование должно вестись по каждой из окружностей в таком направлении, чтобы область оставалась все время слева.

Преобразуем выражение $\dfrac{1}{\zeta-z}$ двумя различными способами, имея в виду два различных интеграла, под знаки которых оно входит. Именно, имея в виду подынтегральное выражение во втором интеграле напишем:

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-a}+\frac{z-a}{(\zeta-a)^2}+\frac{(z-a)^2}{(\zeta-a)^3}+\ldots+\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}+\frac{\left(\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right)^{n+1}}{\zeta-z}.$$

Для подинтегрального выражения в первом интеграле выполним несколько иное преобразование:

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z-a-(\zeta-a)} = -\frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{\zeta-a}{z-a}} =$$

$$= -\frac{1}{z-a} - \frac{\zeta-a}{(z-a)^2} - \ldots - \frac{(\zeta-a)^m}{(z-a)^{m+1}} + \frac{\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^{m+1}}{\zeta-z}.$$

Подставляя каждое из полученных выражений под знак соответствующего интеграла и интегрируя, получим:

$$f(z) = -\frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} f(\zeta)\,d\zeta - \frac{1}{(z-a)^2}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} f(\zeta)(\zeta-a)\,d\zeta - \ldots$$

$$\ldots - \frac{1}{(z-a)^{m+1}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} f(\zeta)(\zeta-a)^m\,d\zeta + \ldots$$

$$\ldots + R'_m + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_2}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-a} + (z-a)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_2}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^2} + \ldots$$

$$\ldots + (z-a)^n\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_2}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} + R''_n,$$

где

$$R'_m = \int\limits_{C_1}\frac{f(\zeta)\cdot\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^{m+1}}{\zeta-z}\,d\zeta,$$

$$R''_n = \int\limits_{C_2}\frac{f(\zeta)\cdot\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^{n+1}}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

Введем обозначения:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} f(\zeta)\,d\zeta = B_{-1},\quad -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} f(\zeta)(\zeta-a)\,d\zeta = B_{-2}\ldots$$

$$\ldots -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} f(\zeta)(\zeta-a)^m\,d\zeta = B_{-m-1},\quad +\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_2}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-a} = B_0,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_2}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^2} = B_1,\ \ldots\ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_2}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} = B_n.$$

Заметим, что величины B_{-1}, $B_{-2}, \ldots$, B_0, B_1, $B_2, \ldots$ не зависят от радиусов r_1 и r_2 окружностей C_1 и C_2. В самом деле, изменим, например, радиус r_1, взяв вместо него другой радиус r_1', для определенности больший, чем r_1; по теореме Коши, интегралы от функций $f(z)$ $f(z)\cdot(z-a)$, $f(z)(z-a)^2, \ldots$, аналитических между C_1 и C_1', взятые по

наружному контуру C_1', должны равняться интегралам от тех же функций, взятым по внутреннему контуру C_1.

Итак:

$$f(z) = B_{-m-1}(z-a)^{-m-1} + \ldots$$

$$\ldots + B_{-2}(z-a)^{-2} + B_{-1}(z-a)^{-1} + B_0 +$$

$$+ B_1(z-a) + B_2(z-a)^2 + \ldots + B_n(z-a)^n + R'_m + R''_n. \quad (24)$$

Рассматривая остаточные члены R'_m и R''_n, можно совершенно так же как и в § 57, убедиться, что каждый из них стремится к нулю, когда соответственно $m \to \infty$ и $n \to \infty$. Окончательно получаем разложение функции в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} B_m(z-a)^m, \quad (25)$$

абсолютно и равномерно сходящееся во всякой замкнутой области, лежащей целиком внутри кольца, в котором функция аналитическая.

§ 59. Нули и полюсы. Существенно особые точки

Если в разложении функции в ряд Тейлора, по степеням $(z-a)$.

$$f(z) = B_0 + B_1(z-a) + \ldots + B_m(z-a)^m + B_{m+1}(z-a)^{m+1} + \ldots$$

коэфициент $B_0 = 0$, то $f(a) = 0$ и значение $z = a$ называется *нулем функции* $f(z)$. Если при этом коэфициент

$$B_1 = f'(a) \neq 0,$$

то $z = a$ называется *простым нулем* или *нулем первого порядка* (z); вообще, если коэфициенты B_0, $B_1, \ldots$, B_{m-1} равны нулю, а коэфициент

$$B_m = \frac{f^{(m)}(a)}{m!} \neq 0,$$

то значение $z=a$ называется m-кратным нулем или *нулем порядка m*, а *число m — порядком кратности этого нуля.*

Так, для функции

$$\sin(z-a) = \frac{z-a}{1} - \frac{(z-a)^3}{3!} + \ldots$$

$z = a$ является нулем первого порядка: для функции

$$1 - \cos(z-a) = \frac{(z-a)^2}{2!} - \frac{(z-a)^4}{4!} + \ldots$$

$z = a$ является нулем второго порядка.

Заметим, что функция $f(z)$, имеющая нуль порядка m в точке $z = a$, может быть представлена в окрестности этой точки в виде произведения:

$$f(z) = (z-a)^m\varphi(z), \quad (26)$$

где функция $\varphi(z)$, аналитическая в окрестности $z = a$, не обращается в нуль при $z = a$.

В самом деле, имеем по определению:

$$f(z)=B_m(z-a)^m+B_{m+1}(z-a)^{m+1}+\dots,$$

где $B_m \neq 0$. Отсюда

$$f(z)=(z-a)^m\cdot[B_m+B_{m+1}(z-a)+B_{m+2}(z-a)^2+\dots],$$

причем степенной ряд в квадратных скобках представляет функцию $\varphi(z)$ обладающую указанными выше свойствами.

Предположим теперь, что функция $f(z)$ аналитическая во всех точках круга C с центром в точке a, за исключением самой точки a. В таком случае говорят, что в точке $z=a$ функция $f(z)$ имеет *изолированную особую точку*. Здесь мы не можем уже пользоваться рядом Тейлора по степеням $z-a$, так как вывод последнего предполагал аналитичность функции во всех без исключения точках круга. Однако формула Лорана здесь приложима, и притом для любого кольца, ограниченного окружностью C данного круга и другой окружностью c с центром в точке a и сколь угодно малого радиуса. В самом деле, во всяком таком кольце функция $f(z)$ является функцией аналитической. Итак, имеем следующее разложение для нашей функции:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}B_n(z-a)^n,$$

причем разложение это сходится при любом z, лежащем внутри круга и отличном от его центра, так как каждая такая точка при достаточно малом радиусе окружности c лежит внутри кольца, в котором $f(z)$ аналитична и в котором, следовательно, ряд Лорана сходится.

Относительно этого ряда, a priori, возможны следующие предположения:

1°. *Все коэфициенты при отрицательных степенях* $(z-a)$ *суть нули.*

В этом случае ряд Лорана приводится к обыкновенному степенному ряду:

$$f(z)=B_0+B_1(z-a)+B_2(z-a)^2+\dots$$

При стремлении z к a, $f(z)$ будет стремиться к B_0 и если мы положим $f(a)=B_0$, то наша функция $f(z)$ во всех точках круга без исключения будет совпадать с суммой сходящегося степенного ряда и, следовательно, по § 55, будет являться аналитической функцией z во всех точках круга, в том числе и в точке a. Но это противоречит нашему предположению о том, что точка a есть особая точка. Таким образом возможность 1° отпадает.

2°. *Из коэфициентов при отрицательных степенях* $(z-a)$ *лишь конечное число отлично от нуля.* В этом случае разложение Лорана имеет вид:

$$f(z)=B_{-m}(z-a)^{-m}+B_{-m+1}(z-a)^{-m+1}+\dots$$
$$\dots+B_{-1}(z-a)^{-1}+B_0+B_1(z-a)+B_2(z-a)^2+\dots,$$

где коэфициент B_{-m} предполагается отличным от нуля. Это равенство можно еще переписать в виде:

$$f(z)=\frac{B_{-m}+B_{-m+1}(z-a)+\dots+B_{-1}(z-a)^{m-1}+B_0(z-a)^m+\dots}{(z-a)^m}, \tag{27}$$

откуда видно, что при z, стремящемся к a, $f(z)$ стремится к ∞.

Значение $z=a$ называется *полюсом* функции $f(z)$, а число m — *порядком кратности* полюса. При этом полюс называется *простым*, если $m=1$, и *кратным*, если $m>1$.

3°. Наконец, если бесконечное множество коэфициентов при отрицательных степенях $(z-a)$ отлично от нуля, то уже непосредственно ничего нельзя сказать, что будет делаться с $f(z)$, когда z стремится к a. Специальные и довольно тонкие исследования показывают, что в этом случае в любой близости к точке a существуют точки z, в которых $f(z)$ принимают любые, наперед заданные значения (за исключением, быть может, одного значения).

В этом случае значение $z=a$ называется *существенно особой точкой функции* $f(z)$.

Заметим, что в случае 2° и 3° часть ряда Лорана, состоящая из членов с отрицательными степенями $z-a$, называется главной частью ряда Лорана, так как именно она, в конечном счете, определяет поведение функции $f(z)$ в окрестности особой точки $z=a$.

§ 60. Теорема о вычетах

Коэфициент B_{-1} при $(z-a)^{-1}$ в разложении $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности особой точки $z=a$ (полюса или существенно особой точки) называется *вычетом* $f(z)$ в точке $z=a$. Этот коэфициент играет важную роль при вычислении интегралов от $f(z)$ по контурам, окружающим особые точки. Допустим сначала, что внутри такого контура C находится лишь одна особая точка $z=a$. Проводя окружность c с центром в точке a, целиком лежащую внутри C, будем иметь по теореме Коши:

$$\int_C f(z)\,dz=\int_c f(z)\,dz;$$

заменяя во втором интеграле $f(z)$ ее разложением в ряд Лорана и замечая, что возможно почленное интегрирование ряда (в силу его равномерной сходимости в круговом кольце, с центром в a, содержащем c и лежащем внутри C), получаем:

$$\int_C f(z)\,dz=B_0\int_c dz+B_1\int_c(z-a)\,dz+B_2\int_c(z-a)^2\,dz+\dots$$
$$\dots+B_{-1}\int_c(z-a)^{-1}\,dz+$$
$$+B_{-2}\int_c(z-a)^{-2}\,dz+B_{-3}\int_c(z-a)^{-3}\,dz+\dots$$

Интегралы, коэфициентами при которых являются B_0, B_1, B_2, $B_3, \ldots$, равны нулю, по теореме Коши (функции $1, (z-a), (z-a)^2, (z-a)^3 \ldots$ — аналитические всюду). К интегралам, коэфициентами при которых являются $B_{-1}, B_{-2}, B_{-3}, \ldots$, теорема Коши непосредственно неприменима, так как функции $(z-a)^{-1}, (z-a)^{-2}, (z-a)^{-3}, \ldots$ не являются аналитическими всюду внутри c, но имеют особые точки (полюсы) при $z=a$. Величины этих интегралов легко получить, выражая $z-a$ через модуль и аргумент этого числа. Именно, обозначая модуль $z-a$, равный радиусу окружности c (точка a лежит в центре c и z на самой окружности c), через r и аргумент $z-a$ через θ, находим:

$$z-a=r\cdot e^{\theta i}, \quad dz=r\cdot i\cdot e^{\theta i}\,d\theta:$$

$$\int_c (z-a)^{-1}dz=i\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi i,$$

$$\int_c (z-a)^{-2}dz=\int_0^{2\pi} ir^{-1}e^{-i\theta}d\theta=-r^{-1}\left[e^{-i\theta}\right]_0^{2\pi}=$$

$$=-r^{-1}\left(e^{-2\pi i}-1\right)=0,$$

$$\int_c (z-a)^{-3}dz=\int_0^{2\pi} i\cdot r^{-2}e^{-2i\theta}\cdot d\theta=-\frac{r^{-2}}{2}\left[e^{-2i\theta}\right]_0^{2\pi}=$$

$$=-\frac{r^{-2}}{2}\left(e^{-4\pi i}-1\right)=0$$

и т. д. Окончательно получаем:

$$\int_C f(z)\,dz=2\pi i B_{-1}. \tag{28}$$

Аналогично вычисляется интеграл, взятый по контуру, внутри которого находится не одна, а несколько особых точек: $a, a', a'', \ldots$ В этом случае мы проводим окружности $c, c', c'', \ldots$ с центрами в точках $a, a', a'', \ldots$ и настолько малые, чтобы каждая из них лежала вне других и чтобы все вместе они лежали внутри C. Тогда, по теореме Коши:

$$\int_C f(z)\,dz=\int_c f(z)\,dz+\int_{c'} f(z)\,dz+\int_{c''} f(z)\,dz+\ldots$$

Но каждый из интегралов в правой части взят по контуру, внутри которого лежит лишь одна особая точка функции $f(z)$. Следовательно, по формуле (28), он равен произведению $2\pi i$ на соответствующий вычет. Таким образом:

$$\int_C f(z)\,dz=2\pi i\left(B+B'+B''+\ldots\right), \tag{29}$$

т. е. *интеграл от аналитической функции, взятый по замкнутому контуру, равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов, относительно всех особых точек, лежащих внутри контура.* Эта формулировка заключает в себе как частный случай теорему Коши: когда отсутствуют особые точки, вычеты обращаются в нуль, а вместе с ними и интеграл по замкнутому контуру C.

§ 61. Теорема о разности между числом нулей аналитической функции и числом ее полюсов

Рассмотрим сначала случай, когда функция $f(z)$ имеет полюс и имеет, следовательно, вид:

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^{\alpha}},$$

причем функция $\varphi(z)$ при $z=a$ не обращается в нуль. Составив логарифмическую производную от функции $f(z)$, получим:

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=-\frac{\alpha}{z-a}+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}. \tag{30}$$

Предположим теперь, что точка m служит для функции $f(z)$ нулем кратности μ. Это значит, что (§ 59)

$$f(z)=(z-m)^{\mu}\cdot\psi(z),$$

где $\psi(z)$ при $z=m$ в нуль не обращается.

Беря логарифмическую производную, получаем:

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{\mu}{z-m}+\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}. \tag{31}$$

Из (30) и (31) заключаем, что нули и полюсы функции $f(z)$ являются простыми полюсами для ее логарифмической производной $\frac{f'(z)}{f(z)}$. Вычеты, соответствующие этим полюсам, равны либо кратности нуля, либо взятой со знаком минус кратности полюса функции $f(z)$.

Предположим теперь, что дана ограниченная контуром C замкнутая область и в ней функция $f(z)$. Пусть эта функция аналитическая во всех точках области кроме нескольких полюсов

$$a \quad b \quad \ldots \quad l,$$

кратности которых

$$\alpha \quad \beta \quad \ldots \quad \lambda.$$

Пусть, далее, на контуре C функция $f(z)$ в нуль не обращается, но внутри области имеет несколько нулей:

$$m, \quad n \quad \ldots \quad s,$$

кратности которых пусть будут:

$$\mu, \quad \nu \quad \ldots \quad \sigma.$$

Принимая во внимание в данной области все нули и все полюсы функции $f(z)$, применим к функции $\frac{f'(z)}{f(z)}$ теорему о вычетах. Мы получим:

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=2\pi i\left(\mu+\nu+\ldots+\sigma-\alpha-\beta-\ldots-\lambda\right), \tag{32}$$

т. е. *интеграл по замкнутому контору C от логарифмической производной функции $f(z)$ равен умноженной на $2\pi i$ разности между числом нулей функции $f(z)$ и числом ее полюсов, причем каждый нуль и каждый полюс считаются столько раз, сколько единиц заключается в его кратности.*

§ 62. Теорема о разности между суммою нулей аналитической функции и суммой ее полюсов

На основании (30) и (31) нетрудно получить, что

$$z\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}=-\frac{a\alpha}{z-a}+\left(-\alpha+z\cdot\frac{\varphi'}{\varphi}\right),$$

$$z\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}=\quad\frac{m\mu}{z-m}+\left(\mu+z\cdot\frac{\psi'}{\psi}\right).$$

Отсюда видно, что вычет функции $z\frac{f'(z)}{f(z)}$, относящийся к полюсу a, равен $-\alpha a$, а вычет, относящийся к полюсу m, равен $m\mu$. Применим к функции $z\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}$ теорему о вычетах. Мы получим:

$$\int\limits_C z\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=2\pi i\,(m\mu+n\nu+\cdots+s\sigma-a\alpha-b\beta-\cdots-l\lambda), \tag{33}$$

т. е. *интеграл по замкнутому контуру C от функции $z\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}$ равен умноженной на $2\pi i$ разности между суммою нулей и суммою полюсов функции $f(z)$, заключенных в области, ограниченной контуром. Каждый нуль и каждый полюс считаются при этом столько раз, сколько единиц находится в его кратности.*

§ 63. Целые функции. Теорема Лиувилля. Мероморфные функции

Функция, определенная и аналитическая во всех точках конечной плоскости (т. е. для всех значений z за исключением $z=\infty$), называется *целой*. Если целую функцию разложить в ряд Тейлора по степеням $z-a$ (в частности по степеням z), то этот ряд будет сходиться при любом z и таким образом будет представлять целую функцию во всей конечной плоскости. Обратно, всякий степенной ряд, сходящийся при любом z, имеет суммой целую функцию. Всякий многочлен представляет собой целую функцию. Целые функции, не являющиеся многочленами, называют *целыми трансцендентными* в отличие от многочленов, которые называются иногда *целыми рациональными функциями*. Простейшими примерами целых трансцендентных функций могут служить функции: $\sin z$, $\cos z$, e^z.

Относительно целых функций мы докажем следующую важную теорему, принадлежащую Лиувиллю.

Если целая функция $f(z)$ ограничена по модулю одним и тем же числом K для всех значений z, то она есть постоянное.

Для доказательства рассмотрим два каких-нибудь значения аргумента z и z_1. Опишем из центра z окружность C радиусом $R\geqslant 2|z_1-z|$. Для точки ζ этой окружности будем иметь:

$$\zeta=z+R\cdot e^{\theta i}\,.$$

На основании формулы Коши:

$$f(z_1)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(C)}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z_1}\quad\text{и}\quad f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(C)}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}\,.$$

Следовательно:

$$\left|f(z_1)-f(z)\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(C)}\frac{(z_1-z)\,f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_1)\,(\zeta-z)}\right|.$$

Но $|\zeta-z_1|\geqslant\frac{1}{2}R$. Вследствие этого:

$$|f(z_1)-f(z)|<\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{|z_1-z|}{\frac{R}{2}}\cdot K\cdot d\theta=\frac{2\,|z_1-z|\cdot K}{R}\,.$$

Заставляя R стремиться к ∞, мы увидим, что $f(z)-f(z_1)=0$ и, следовательно:

$$f(z_1)=f(z)=\text{const}.$$

Функция, определенная и аналитическая во всей конечной плоскости, за исключением отдельных точек, являющихся ее полюсами, называется *мероморфной функцией*. Всякая рациональная дробь является мероморфной функцией. Мероморфные функции, не являющиеся рациональными, называются трансцендентными мероморфными. В качестве примеров мероморфных функций укажем $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$.

Мы увидим ниже, что функции $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$ и $\operatorname{dn} z$ также являются мероморфными функциями.

§ 64. Эллиптические функции Якоби

В главе I мы определили якобиевы функции $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$ и $\operatorname{dn} z$ для любого комплексного значения z посредством формул:

$$\operatorname{sn} z=\operatorname{sn}(x+iy)=\frac{\operatorname{sn}(x,k)\operatorname{dn}(y,k')+i\operatorname{sn}(y,k')\operatorname{cn}(y,k')\operatorname{cn}(x,k)\operatorname{dn}(x,k)}{\operatorname{cn}^2(y,k')+k^2\operatorname{sn}^2(x,k)\operatorname{sn}^2(y,k')}$$

$$\operatorname{cn} z=\operatorname{cn}(x+iy)=\frac{\operatorname{cn}(x,k)\operatorname{cn}(y,k')-i\operatorname{sn}(y,k')\operatorname{dn}(y,k')\operatorname{sn}(x,k)\operatorname{dn}(x,k)}{\operatorname{cn}^2(y,k')+k^2\operatorname{sn}^2(x,k)\operatorname{sn}^2(y,k')}$$

$$\operatorname{dn} z=\operatorname{dn}(x+iy)=\frac{\operatorname{dn}(x,k)\operatorname{cn}(y,k')\operatorname{dn}(y,k')-ik^2\operatorname{sn}(y,k')\operatorname{sn}(x,k)\operatorname{cn}(x,k)}{\operatorname{cn}^2(y,k')+k^2\cdot\operatorname{sn}^2(x,k)\operatorname{sn}^2(y,k')}.$$

Для каждого значения $z=x+iy$ дроби, стоящие в правых частях равенств, представляют определенные комплексные числа, за исключением тех случаев, когда знаменатели обращаются в нуль. Все эти исключительные значения заключаются в формуле:

$$z = 2mK + (2m' + 1)K'i,$$

где m и m' — целые числа (или нули) (см. § 33).

Очевидно, что для всех значений z, отличных от только что указанных, $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$ и $\operatorname{dn} z$ являются непрерывными функциями. Покажем, что они не только непрерывные, но еще и аналитические. Для этого достаточно проверить, что вещественная и мнимая части для каждой из них имеют непрерывные частные производные, удовлетворяющие уравнениям Коши-Римана (2). Проведем проверку для $\operatorname{sn} z$. Имеем, пользуясь формулами § 5:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\operatorname{sn}(x,k)\operatorname{dn}(y,k')}{\operatorname{cn}^2(y,k') + k^2\cdot\operatorname{sn}^2(x,k)\operatorname{sn}^2(y,k')}\right] =$$

$$= \frac{\operatorname{cn}(x,k)\operatorname{dn}(x,k)\operatorname{dn}(y,k')[\operatorname{cn}^2(y,k') - k^2\operatorname{sn}^2(x,k)\operatorname{sn}^2(y,k')]}{[\operatorname{cn}^2(y,k') + k^2\operatorname{sn}^2(x,k)\operatorname{sn}^2(y,k')]^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\operatorname{sn}(y,k')\operatorname{cn}(y,k')\operatorname{cn}(x,k)\operatorname{dn}(x,k)}{\operatorname{cn}^2(y,k') + k^2\operatorname{sn}^2(x,k)\operatorname{sn}^2(y,k')}\right] =$$

$$= \operatorname{cn}(x,k)\cdot\operatorname{dn}(x,k)\cdot\operatorname{dn}(y,k')[\operatorname{cn}^4(y,k') + \operatorname{sn}^2(y,k')\operatorname{cn}^2(y,k') -$$

$$- k^2\operatorname{sn}^2(x,k)\operatorname{sn}^2(y,k')\cdot\operatorname{cn}^2(y,k') - k^2\operatorname{sn}^2(x,k)\cdot\operatorname{sn}^4(y,k')]:$$

$$:[\operatorname{cn}^2(y,k') + k^2\operatorname{sn}^2(x,k)\cdot\operatorname{sn}^2(y,k')]^2.$$

Но числитель последней дроби может быть переписан в виде:

$$\operatorname{cn}(x,k)\operatorname{dn}(x,k)\operatorname{dn}(y,k')\left\{\operatorname{cn}^2(y,k')[\operatorname{cn}^2(y,k') + \operatorname{sn}^2(y,k')] -\right.$$

$$\left.- k^2\operatorname{sn}^2(x,k)\operatorname{sn}^2(y,k')\cdot[\operatorname{cn}^2(y,k') + \operatorname{sn}^2(y,k')]\right\} =$$

$$= \operatorname{cn}(x,k)\operatorname{dn}(x,k)\operatorname{dn}(y,k')\cdot[\operatorname{cn}^2(y,k') - k^2\operatorname{sn}^2(x,k)\operatorname{sn}^2(y,k')\cdot$$

Отсюда видно, что частная производная по x от вещественной части $\operatorname{sn} z$ равна частной производной по y от коэфициента мнимой части $\operatorname{sn} z$: Таким образом первое уравнение Коши-Римана выполняется.

Приступая к проверке второго уравнения, получаем, прежде всего·

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\operatorname{sn}(x,k)\operatorname{dn}(y,k')}{\operatorname{cn}^2(y,k') + k^2\operatorname{sn}^2(x,k)\operatorname{sn}^2(y,k')}\right] =$$

$$= \frac{\operatorname{sn}(x,k)\operatorname{sn}(y,k')\operatorname{cn}(y,k')[2\operatorname{dn}^2(x,k)\operatorname{dn}^2(y,k') - k'^2\operatorname{cn}^2(y,k') - k^2k'^2\operatorname{sn}^2(x,k)\operatorname{sn}^2(y,k')]}{[\operatorname{cn}^2(y,k') + k^2\operatorname{sn}^2(x,k)\operatorname{sn}^2(y,k')]^2}.$$

Числитель здесь можно переписать в виде:

$$\operatorname{sn}(x,k)\operatorname{sn}(y,k')\operatorname{cn}(y,k')\left\{2\operatorname{dn}^2(x,k)\operatorname{dn}^2(y,k') - k'^2\operatorname{cn}^2(y,k) -\right.$$

$$\left.- [1 - \operatorname{dn}^2(x,k)][1 - \operatorname{dn}^2(y,k')]\right\} = \operatorname{sn}(x,k)\operatorname{sn}(y,k')\operatorname{cn}(y,k')[\operatorname{dn}^2(x,k)\operatorname{dn}^2(y,k') -$$

$$- k'^2\operatorname{cn}^2(y,k') - 1 + \operatorname{dn}^2(y,k') + \operatorname{dn}^2(x,k)] =$$

$$= \operatorname{sn}(x,k)\operatorname{sn}(y,k')\operatorname{cn}(y,k')[\operatorname{dn}^2(x,k)\operatorname{dn}^2(y,k') + k^2\operatorname{cn}^2(x,k)].$$

Подобным же образом получим:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\operatorname{sn}(y,k')\operatorname{cn}(y,k')\operatorname{cn}(x,k)\operatorname{dn}(x,k)}{\operatorname{cn}^2(y,k') + k^2\operatorname{sn}^2(x,k')\operatorname{sn}^2(y,k')}\right] =$$

$$= -\frac{\operatorname{sn}(x,k)\operatorname{sn}(y,k')\operatorname{cn}(y,k')[\operatorname{dn}^2(x,k)\operatorname{dn}^2(y,k') + k^2\operatorname{cn}^2(x,k)]}{[\operatorname{cn}^2(y,k') + k^2\operatorname{sn}^2(x,k)\operatorname{sn}^2(y,k')]^2}$$

Следовательно, частная производная по y от вещественной части $\operatorname{sn} z$ отличается лишь знаком от частной производной по x коэфициента мнимой части, и второе условие Коши-Римана также выполняется.

Из полученных нами выражений, представляющих частные производные в виде дробей, в числителях и знаменателях которых стоят всюду непрерывные функции от x и y, следует, что эти производные непрерывны во всех точках плоскости, кроме тех, в которых обращается в нуль общий знаменатель дробей:

$$[\operatorname{cn}^2(y,k') + k^2\operatorname{sn}^2(x,k)\operatorname{sn}^2(y,k')]^2,$$

т. е. за исключением точек с аффиксами:

$$z = 2mK + (2m' + 1)iK'.$$

Сопоставляя все полученное нами, заключаем, что $\operatorname{sn} z$ действительно является аналитической функцией z во всех точках конечной плоскости, за исключением точек с аффиксами:

$$z = 2mK + (2m' + 1)\,iK.$$

Аналогично можно убедиться, что и $\operatorname{cn} z$ и $\operatorname{dn} z$ являются аналитическими функциями z (при всех значениях z, кроме $z = 2mK + (2m' + 1)K'$).

Обозначая вещественную часть и коэфициент мнимой части $\operatorname{sn} z$ через $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$, соответственно, имеем, по формуле (4):

$$\frac{d\operatorname{sn} z}{dz} = \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x} =$$

$$= \{\operatorname{cn}(x,k)\operatorname{dn}(x,k)\operatorname{dn}(y,k')[\operatorname{cn}^2(y,k') - k^2\operatorname{sn}^2(x,k)\operatorname{sn}^2(y,k')] -$$

$$- i\operatorname{sn}(x,k)\operatorname{sn}(y,k')\operatorname{cn}(y,k')\cdot[\operatorname{dn}^2(x,k)\operatorname{dn}^2(y,k') + k^2\operatorname{cn}^2(x,k)]\}:$$

$$:[\operatorname{cn}^2(y,k') + k^2\operatorname{sn}^2(x,k)\operatorname{sn}^2(y,k')]^2$$

Полученное выражение равно $\operatorname{cn} z\cdot\operatorname{dn} z$, как сейчас же убеждаемся перемножая почленно равенства, определяющие $\operatorname{cn} z$ и $\operatorname{dn} z$. Итак,

$$\frac{d\operatorname{sn} z}{dz} = \operatorname{cn} z\cdot\operatorname{dn} z,$$

т. е. первая из формул (21) (глава I) справедлива при любом комплексном значении z.

Точно так же получим, что и две другие формулы (21) справедливы при любом комплексном z, т. е. имеют место формулы:

$$\frac{d\operatorname{cn} z}{dz} = -\operatorname{sn} z\cdot\operatorname{dn} z,\quad \frac{d\operatorname{dn} z}{dz} = -k^2\cdot\operatorname{sn} z\cdot\operatorname{cn} z.$$

Пользуясь соотношениями:

$$\mathrm{sn}^2 z + \mathrm{cn}^2 z = 1,$$
$$\mathrm{dn}^2 z + k^2 \,\mathrm{sn}^2 z = 1,$$

выводим отсюда, что якобиевы функции $\mathrm{sn}\, z$, $\mathrm{cn}\, z$ и $\mathrm{dn}\, z$ при любых комплексных значениях z удовлетворяют диференциальным уравнениям:

$$\frac{d\,\mathrm{sn}\, z}{dz} = \sqrt{(1-\mathrm{sn}^2 z)(1-k^2\,\mathrm{sn}^2 z)},$$
$$\frac{d\,\mathrm{cn}\, z}{dz} = -\sqrt{(1-\mathrm{cn}^2 z)(k'^2+k^2\,\mathrm{cn}^2 z)},$$
$$\frac{d\,\mathrm{dn}\, z}{dz} = -\sqrt{(1-\mathrm{dn}^2 z)(\mathrm{dn}^2 z-k'^2)}.$$

Обозначив в первом из этих уравнений $\mathrm{sn}\, z$ через t, находим, разделяя переменные и интегрируя:

$$z = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

т. е. функция $t = \mathrm{sn}\, z$ и для комплексных значений z является функцией, обратной эллиптическому интегралу первого рода.

Заметим, что величина этого интеграла вообще зависит не только от верхнего предела t, но еще и от пути интегрирования (см. ниже, § 68 и § 69). Это находится в полном согласии с тем обстоятельством, что одному и тому же значению $t = \mathrm{sin}\, z$ соответствует не одно значение z, но бесконечное множество различных значений, отличающихся между собой на периоды:

$$4mK + 2m'K'i.$$

Совершенно таким же образом, в виде функций, обратных эллиптическим интегралам первого рода, могут быть представлены $\mathrm{cn}\, z$ и $\mathrm{dn}\, z$.

§ 65. Особые точки якобиевых функций

Мы указали, что функции $\mathrm{sn}\, z$, $\mathrm{cn}\, z$ и $\mathrm{dn}\, z$ определены при всех конечных значениях z, исключая значения

$$z = 2mK + (2m'+1)K'i$$

(m и m' — любые целые числа или нули).

Очевидно, что соответствующие точки являются изолированными особыми точками.

Когда z стремится к одному из этих значений, то знаменатель каждой из трех дробей, посредством которых определены якобиевы функции, стремится к нулю, в то время как числители к нулю не стремятся. Поэтому модули $|\mathrm{sn}\, z|\cdot|\mathrm{cn}\, z|$ и $|\mathrm{dn}\, z|$ бесконечно возрастают и, следовательно, все указанные особые точки являются полюсами якобиевых функций. (В конце § 59 было отмечено без доказательства, что в любой окрестности существенно особой точки всегда найдутся точки, в которых функ-

ция принимает любое наперед заданное значение, кроме, быть может, одного исключительного значения; поэтому при произвольном стремлении точки z к особой точке a значения функции $f(z)$ не могут стремиться ни к какому определенному пределу, в частности не могут стремиться к бесконечности). Таким образом якобиевы функ ии, не имея в конечной плоскости других особых точек, кроме полюсов, суть мероморфные функции.

Покажем, что полюсы являются здесь однократными (простыми). Доказательство проведем лишь для $\mathrm{sn}\, z$ (для остальных двух функций рассуждения буквально те же). Отправным пунктом послужит формула 27) § 59, из которой следует, что когда $z \to a$, где a — полюс порядка m функции $f(z)$, то $f(z)\cdot(z-a)^m = B_{-m} + B_{-m-1}(z-a) + B_{-m+2}(z-a)^2 + \ldots$ стремится к B_{-m}, ($B_{-m} \neq 0$).

Именно, если для функции $\mathrm{sn}\, z$ мы покажем, что произведение $\mathrm{n}\, z\cdot[z - 2mK - (2m'+1)K'i]$ стремится к конечному, отличному от нуля пределу, когда $z \to 2mK + (2m'+1)K'i$, то этим самым будет доказано, что $2mK + (2m'+1)K'i$ является простым полюсом $\mathrm{sn}\, z$. Что касается предела, то он будет равняться коэфициенту B_{-1} при $\frac{1}{z-2mK-(2m+1)K'i}$ разложении $\mathrm{sn}\, z$ в ряд Лорана в окрестности полюса $2mK + (2m'+1)K'i$ т. е. будет вычетом $\mathrm{sn}\, z$ относительно точки $2mK + (2m'+1)K'i$.

Для того чтобы найти упомянутый предел, перепишем выражение $\mathrm{n}\, z\,[z - 2mK - (2m'+1)K'i]$ в виде:

$$\frac{\dfrac{1}{\dfrac{1}{\mathrm{sn}\, z} - 0}}{z - 2mK - (2m'+1)K'i}.$$

Обозначая $\frac{1}{\mathrm{sn}\, z}$ через $f(z)$ и замечая, что $\frac{1}{\mathrm{sn}\, z} \to 0$, когда $z \to 2mK + (2m'+1)K'i$, положим:

$$f[2mK + (2m'+1)K'i] = 0.$$

Тогда имеем:

$$\lim_{z\to 2mK+(2m'+1)K'i} \frac{1}{\dfrac{f(z) - f[2mK+(2m'+1)K'i]}{z-2mK-(2m'+1)K'i}} =$$
$$= \frac{1}{f'[2mK+(2m'+1)K'i]},$$

но

$$f'(z) = \left(\frac{1}{\mathrm{sn}\, z}\right)' = -\frac{\mathrm{cn}\, z\cdot \mathrm{dn}\, z}{\mathrm{sn}^2 z} = \pm\sqrt{\frac{(1-\mathrm{sn}^2 z)(1-k^2\,\mathrm{sn}^2 z)}{\mathrm{sn}^4 z}} =$$
$$= \pm\sqrt{\left(1-\frac{1}{\mathrm{sn}^2 z}\right)\left(k^2-\frac{1}{\mathrm{sn}^2 z}\right)} = \pm\sqrt{[1-f^2(z)]\,[k^2-f^2(z)]},$$

откуда

$$f'[2mK+(2m'+1)K'i]=\pm k$$

и, следовательно:

$$\lim \operatorname{sn} z\cdot[z-2mK-(2m'+1)K'i]=\pm\frac{1}{k}\neq 0,$$

что и требовалось доказать.

Проведенное доказательство оставляет, однако, открытым вопрос о том равняется ли вычет $+\frac{1}{k}$ или $-\frac{1}{k}$.

Мы вернемся к этому в следующем параграфе.

§ 66. Разложение якобиевых функций в ряды Тейлора и Лорана

Ближайшей к началу координат особой точкой каждой из трех функций: $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$ и $\operatorname{dn} z$, является точка $K'i$. Поэтому каждую из этих функций можно разложить в ряд Тейлора по степеням z, причем радиус сходимости ряда будет равен K'.

Коэфициенты членов разложения находим обычным путем, вычисляя значения последовательных производных при $z=0$.

Имеем:

$$(\operatorname{sn} z)'=\operatorname{cn} z\cdot\operatorname{dn} z,$$

$$(\operatorname{sn} z)''=(\operatorname{cn} z)'\operatorname{dn} z+\operatorname{cn} z(\operatorname{dn} z)',$$

$$(\operatorname{sn} z)'''=(\operatorname{cn} z)''\operatorname{dn} z+2(\operatorname{cn} z)'(\operatorname{dn} z)'+(\operatorname{dn} z)'',$$

$$(\operatorname{sn} z)^{\mathrm{IV}}=(\operatorname{cn} z)'''\operatorname{dn} z+3(\operatorname{cn} z)''(\operatorname{dn} z)'+3(\operatorname{cn} z)'(\operatorname{dn} z)''+(\operatorname{dn} z)''',$$

$$(\operatorname{sn} z)^{\mathrm{V}}=(\operatorname{cn} z)^{\mathrm{IV}}\operatorname{dn} z+4(\operatorname{cn} z)^{\mathrm{III}}(\operatorname{dn} z)'+6(\operatorname{cn} z)^{\mathrm{IV}}(\operatorname{dn} z)''+$$
$$+4(\operatorname{cn} z)'(\operatorname{dn} z)^{\mathrm{III}}+\operatorname{cn} z(\operatorname{dn} z)^{\mathrm{IV}},\ldots$$

$$(\operatorname{cn} z)'=-\operatorname{sn} z\operatorname{dn} z,$$

$$(\operatorname{cn} z)''=-(\operatorname{sn} z)'\operatorname{dn} z-\operatorname{sn} z\cdot(\operatorname{dn} z)',\ \ldots$$

$$(\operatorname{dn} z)'=-k^2\operatorname{sn} z\operatorname{cn} z,$$

$$(\operatorname{dn} z)''=-k^2(\operatorname{sn} z)'\operatorname{cn} z-k^2(\operatorname{sn} z)(\operatorname{cn} z)',\ \ldots$$

Таким образом производные порядка n от функций $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$, $\operatorname{dn} z$ выражаются через производные порядка $n-1$ от тех же функций.

Полагая $z=0$, получаем последовательно:

$$(\operatorname{sn} z)_0'=1,\ (\operatorname{cn} z)_0'=0,\quad (\operatorname{dn} z)'_0=0,$$

$$(\operatorname{sn} z)_0''=0,\quad (\operatorname{cn} z)_0''=-1,\quad (\operatorname{dn} z)_0''=-k^2,$$

$$(\operatorname{sn} z)_0'''=-1-k^2,\quad (\operatorname{cn} z)_0'''=0,\quad (\operatorname{dn} z)_0'''=0,$$

$$(\operatorname{sn} z)_0^{\mathrm{IV}}=0,\ (\operatorname{cn} z)^{\mathrm{IV}}=1+4k^2,\quad (\operatorname{dn} z)^{\mathrm{IV}}=4k^2+k^4,$$

$$(\operatorname{sn} z)_0^{\mathrm{V}}=1+14k^2+k^4,\quad (\operatorname{cn} z)_0^{\mathrm{V}}=0,\quad (\operatorname{dn} z)_0^{\mathrm{V}}=0,$$

$$(\operatorname{sn} z)^{\mathrm{VI}}=0,$$

Так как, кроме того, $\operatorname{sn} 0=0$, $\operatorname{cn} 0=1$ и $\operatorname{dn} 0=1$, то имеем:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sn} z&=z-\frac{1+k^2}{3!}z^3+\frac{1+14k^2+k^4}{5!}z^5-\ldots,\\ \operatorname{cn} z&=1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1+4k^2}{4!}z^4-\ldots,\\ \operatorname{dn} z&=1-\frac{k^2}{2!}z^2+\frac{4k^2+k^4}{4!}z^4-\ldots,\end{aligned}\right\}\tag{34}$$

причем каждый из рядов сходится при $|z|<K'$.

Из первого разложения тотчас же заключаем, что точка $z=0$ есть простой нуль функции $\operatorname{sn} z$. Можно легко убедиться, что и все вообще нули якобиевых функций являются простыми. Так, например, для второго нуля $\operatorname{sn} z$, лежащего в основном параллелограме периодов: $z=2K$ (см. § 33) имеем:

$$(\operatorname{sn} z)'_{z=2K}=(\operatorname{cn} z\cdot\operatorname{dn} z)'_{z=2K}=-1\neq 0,$$

откуда следует, что $2K$ — простой нуль $\operatorname{sn} z$.

Найденные разложения, вместе с формулами приведения § 30, позволяют легко получить разложение в ряд Лорана в окрестностях полюсов:

$$z=2mK+(2m'+1)K'i.$$

Так, в окрестности точки $z=K'i$ имеем для $\operatorname{sn} z$:

$$\operatorname{sn} z=\frac{1}{k\operatorname{sn}(z-iK')}=$$
$$=\frac{1}{k\left[(z-iK')-\frac{1+k^2}{3!}(z-iK')^3+\frac{1+14k^2+k^4}{5!}(z-iK')^5-\ldots\right]}$$

или, выделяя множитель $\frac{1}{k(z-iK')}$ и деля затем 1 на

$$1-\frac{1+k^2}{3!}(z-iK')^2+\frac{1+14k^2+k^4}{5!}(z-iK')^4-\ldots$$

по правилу деления рядов (см. § 55) получим:

$$\operatorname{sn} z=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{(z-iK')}+\frac{1+k^2}{3!k}(z-iK')+$$
$$+\frac{7-22k^2+7k^4}{3\cdot 5!k}(z-iK')^3+\ldots\tag{35}$$

разложение $\operatorname{sn} z$ в ряд Лорана в окрестности $z=iK'$. Мы видим отсюда, что iK' действительно является простым полюсом $\operatorname{sn} z$ с вычетом $+\frac{1}{k}$.

Аналогично можно получить разложение в ряд Лорана в окрестности другого полюса, лежащего в основном параллелограме периодов: $z=2K+iK'$. Имеем здесь по формуле (10 bis) § 30 и по только что полученной формуле:

$$\operatorname{sn} z=-\operatorname{sn}(z-2K)=-\frac{1}{k(z-2K-iK')}-$$
$$-\frac{1+k^2}{3!k}(z-2K-iK')-\frac{7-22k^2+7k^4}{3\cdot 5!k}(z-2K-iK')^3-\ldots\tag{36}$$

Здесь вычет равен $-\frac{1}{k}$.

Совершенно также можно найти разложения в ряды Лорана функций $\operatorname{cn} z$ и $\operatorname{dn} z$ в окрестностях полюсов, лежащих в основном параллелограме периодов:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{cn} z &= \frac{i}{k(z-2K-iK')} + \frac{(1-2k^2)\,i}{3!\,k}(z-2K-iK') + \\
&\quad + \frac{(7+8k^2-8k^4)\,i}{3\cdot 5!\,k}(z-2K-iK') + \ldots \\
\operatorname{cn} z &= -\frac{i}{z-4K-iK'} - \frac{(1-2k^2)\,i}{8!}(z-4K-iK') - \\
&\quad - \frac{(7+8k^2-8k^4)}{3\cdot 5!}(z-4K-iK') - \ldots \\
\operatorname{dn} z &= -\frac{i}{z-iK'} - \frac{(k^2-2)\,i}{3!}(z-iK') - \\
&\quad - \frac{(7k^4+8k^2-8)\,i}{3\cdot 5!}(z-iK')^3 - \ldots \\
\operatorname{dn} z &= \frac{i}{z-3iK'} + \frac{(k^2-2)\,i}{3!}(z-3iK') + \\
&\quad + \frac{(7k^4+8k^2-8)\,i}{8\cdot 5!}(z-iK')^3 + \ldots
\end{aligned}\right\} \quad (37)$$

Мы видим, что вычет $\operatorname{cn} z$ относительно $2K+iK'$ равен $\frac{i}{k}$, а вычет относительно $4K+iK'$ равен $-\frac{i}{k}$. Вычеты $\operatorname{dn} z$ относительно полюсов iK' и $3iK'$ равны $-i$ и $+i$, соответственно.

§ 67. Многозначные функции. Точки разветвления

Пусть $z = w^2$. z есть однозначная целая аналитическая функция от w. Полагая

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad w = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

имеем:

$$r(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho^2(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha),$$

откуда:

$$\rho^2 = r \quad \text{и} \quad 2\alpha = \theta + 2m\pi.$$

Таким образом каждому значению $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ соответствуют два различных (если $r \neq 0$) значения $w = \sqrt{z}$:

$$\left.\begin{aligned}
w &= r^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right), \\
w &= r^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{2} + i\sin\frac{\theta+2\pi}{2}\right) = -r^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)\cdot
\end{aligned}\right\} (38)$$

Иными словами, $w = \sqrt{z}$ является двузначной функцией от z, две *ветви* которой задаются формулами (38).

Легко проверить, что каждая из ветвей представляет аналитическую функцию от z с производной, равной $\frac{1}{2\sqrt{z}}$, причем под $\sqrt{z}$ нужно разуметь то значение корня, которое соответствует рассматриваемой ветви.

Точка $z = 0$, в которой обе ветви принимают одно и то же значение $w = 0$, называется *точкой разветвления* функции $w = \sqrt{z}$.

Другой точкой разветвления служит $z = \infty$, в которой каждая из ветвей обращается в ∞.

Рассмотрим еще в качестве важного примера многозначной функции $\ln z$.

Из равенства:

$$z = e^w,$$

где $z = r\cos\theta + i\sin\theta$ и $w = u + iv$, выводим:

$$r(\cos\theta + i\sin\theta) = e^u(\cos v + i\sin v),$$

откуда

$$e^u = r \quad \text{и} \quad v = \theta + 2m\pi.$$

Таким образом каждому значению $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ отвечает бесконечное множество различных значений $w = \ln z$. Все эти значения заключаются в формуле:

$$w = \ln r + i(\theta + 2m\pi),$$

где под символом $\ln r$ следует разуметь вещественное значение $\ln r$.

Таким образом w является многозначной функцией z, состоящей из бесконечного множества ветвей. Каждая из этих ветвей является аналитической функцией от z с производной, равной $\frac{1}{z}$ (таким образом производная от $\ln z$ есть однозначная функция z).

Точками разветвления функции $w = \ln z$ служат: $z = 0$ и $z = \infty$.

Важно заметить, что ветви одной и той же аналитической функции вовсе не представляют чего-то изолированного, напротив, заставляя точку z перемещаться в ее плоскости вдоль надлежащим образом выбранной непрерывной кривой, мы всегда можем перейти от одной ветви к другой.

Пусть, например, z имеет определенное значение:

$$z = z_0 = r_0(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0) \quad (r_0 \neq 0).$$

Соответствующие значения обеих ветвей $w = \sqrt{z}$ будут:

$$w_1 = \sqrt{r_0}\left(\cos\frac{\theta_0}{2} + i\sin\frac{\theta_0}{2}\right),$$

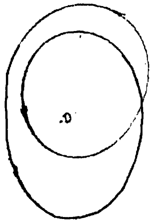
$$w_2 = \sqrt{r_0}\left(\cos\frac{\theta_0+2\pi}{2} + i\sin\frac{\theta_0+2\pi}{2}\right).$$

Заставим теперь точку z описать один раз в направлении против вращения часовой стрелки замкнутую не пересекающую себя кривую, окружающую начало координат. Аргумент z, равный θ_0 в отправной точке, будет непрерывно увеличиваться и когда вернется в точку отправления примет значение $\theta'_0 = \theta_0 + 2\pi$. Соответственно этому непрерывно менявшееся вместе с z значение первой ветви $\sqrt{z}$ перейдет в

$$w_1' = \sqrt{r_0}\left(\cos\frac{\theta_0'}{2} + i\sin\frac{\theta_0'}{2}\right) = \sqrt{r_0}\left(\cos\frac{\theta_0+2\pi}{2} + i\sin\frac{\theta_0+2\pi}{2}\right) = w_2,$$

а значение второй ветви в

$$w_2' = \sqrt{r_0}\left(\cos\frac{\theta_0'+2\pi}{2} + i\sin\frac{\theta_0'+2\pi}{2}\right) = \sqrt{r_0}\left(\cos\frac{\theta_0+4\pi}{2} + \right.$$
$$\left. + i\sin\frac{\theta_0+4\pi}{2}\right) = w_1,$$



Фиг. 20

т. е. первая ветвь перешла во вторую, а вторая — в первую.

Заметим, что основное характеристическое свойство точек разветвления многозначной функции вообще заключается в том, что при обходе вокруг них по надлежащим замкнутым кривым ветви функции переходят одна в другую. При этом нужно допускать также и самопересекающиеся кривые, обход по которым соответствует не одному, а нескольким поворотам около точки разветвления (см. фиг. 20).

Ввиду дальнейшего для нас особый интерес представит функция, определяемая равенством:

$$w = \sqrt{(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_n)}.$$

Положим:

$$z - a_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_1 e^{\theta_1 i},$$
$$z - a_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2 e^{\theta_2 i},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$z - a_n = r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n) = r_n e^{\theta_n i}.$$

Тогда:

$$w = (r_1 r_2 \dots r_n)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{(\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_n)i}{2}},$$

или

$$w = (r_1 r_2 \dots r_n)^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_n}{2} + i\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_n}{2}\right).$$

Пусть точка z описывает контур L, не содержащий внутри точек $a_1, a_2, \dots, a_n$ (фиг. 21). В таком случае угол θ_1, образованный вектором r_1 с осью OX, после полного обхода точкою z контура примет свое первоначальное значение. Сказанное о точке a_1 можно применить и к прочим точкам $a_2, a_3, \dots, a_n$. Вследствие этого функция w примет тоже свое первоначальное значение.

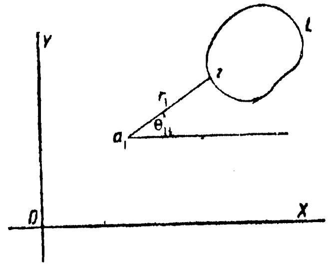
Не то будет, когда точка z описывает контур L (фиг. 22), содержащий внутри точку a_1 (но не содержащий точек $a_2, \dots, a_n$). После полного обхода точкою z контура L угол θ_1 возрастет на 2π. При этом u перейдет в:

$$= (r_1 r_2 \cdots r_n)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\cos\left(\pi + \frac{\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_n}{2}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_n}{2}\right)\right],$$

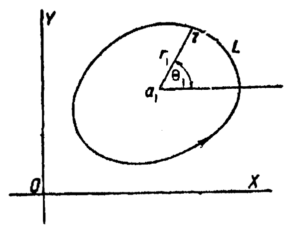
или

$$u = -(r_1 r_2 \cdots r_n)^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_n}{2} + i\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_n}{2}\right),$$

т. е. функция u при обходе точкою z контура, содержащего внутри точку a_1, изменяет знак на обратный. После второго обхода точкою z точки a_1 знак u восстановится. После третьего опять изменится на обрат-



Фиг. 21



Фиг. 22

ный и т. д. Все сказанное целиком относится ко всем прочим точкам $a_2, a_3, \dots, a_n$. Отсюда следует, что все эти точки являются точками разветвления нашей функции.

§ 68. Исследование интеграла $\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$

Имея в виду в дальнейшем изучить интеграл более сложный, пока покажем, каким образом, пользуясь приемами теории функций комплексного переменного, можно исследовать интеграл

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}, \qquad (39)$$

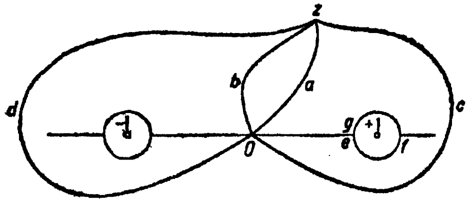
взятый от нулевой точки до некоторой точки z числовой плоскости (фиг. 23). Будем соединять эти точки различными кривыми и проследим за теми значениями, которые принимает наш интеграл при интегрировании по этим кривым.

Сначала будем интегрировать по контуру Oaz. Подинтегральная функция двузначна. Ради определенности начнем интегрировать ту ее ветвь, которая при $z = 0$ обращается в $+1$. В этом предположении обозначим интеграл буквою w так, что

$$w = I(Oaz).$$

Особыми точками (точками разветвления) подинтегральной функции служат $+1$ и -1.

Если вместо Oaz за контур возьмем некоторую кривую Obz и притом так, чтобы область $Oazb$ не содержала особой точки, то, по теореме Коши, значение интеграла не изменится, т. е. он останется равным w. Но если за контур принять кривую Ocz так, что особая точка $+1$ попадет внутрь области $Ocza$, то значение, принимаемое интегралом, придется исследовать особо.



Фиг. 23

Приложим к этому случаю прием, обыкновенно применяемый. Из точки $+1$ малым радиусом ρ опишем окружность efg. Этим мы как бы изолируем особую точку $+1$. Так как область, ограниченная контуром $OczaO$ и $OefgO$, не содержит особых точек и в ней рассматриваемая ветвь однозначна, то в силу теоремы Коши мы можем интеграл по контуру $OczaO$ заменить интегралом по контуру $OefgO$. Последний контур, состоящий из прямолинейного отрезка Oe, окружности efg и отрезка go, называют *элементарной петлей* точки $+1$. Мы будем иметь:

$$I(OczaO)=I(OefgO)=\int_0^{1-\rho}\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}+\int_L\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}-\int_{1-\rho}^{0}\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

Здесь L обозначает окружность efg. Последний интеграл взят со знаком минус потому, что после обхода точкою z особой точки $+1$ корень переменит свой знак, как это следует из сказанного в предыдущем параграфе.

Исследуя интеграл, взятый по окружности L, положим $z-1=\rho e^{\theta i}$. Мы будем иметь:

$$\int_L\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=i\rho^{\frac{1}{2}}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{\frac{\theta i}{2}}d\theta}{\sqrt{2+\rho e^{\theta i}}}.$$

Пусть $\rho\to 0$; так как интеграл в правой части последнего равенства сохраняет конечное значение, то

$$\lim\int_L\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=0.$$

Следовательно:

$$I(OczaO)=2\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\pi,$$

причем здесь z есть переменная, принимающая вещественные значения.

Мы теперь можем написать, что

$$I(Ocz)+I(zaO)=\pi,$$

откуда

$$I(Ocz)\ \pi=+I(Oaz).$$

Но после обхода особой точки подинтегральная функция переменит знак, т. е. $I(Oaz)=-w$.

Следовательно:

$$I(Ocz)=\pi-w.$$

Если контур интегрирования обойдет точку $+1$ два раза, то интеграл примет значение $2\pi+w$; если три раза, то значение интеграла будет $3\pi-w$ и т. д.

Совершенно аналогичные выводы можно сделать и относительно контура $ObzdO$, заключающего внутри точку -1. Интеграл вдоль петли этой точки равен $-\pi$. В общем мы приходим к такому выводу: *интеграл*

$$\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

рассматриваемый как функция верхнего предела, есть многозначная функция, значения которой выражаются формулой $n\pi+(-1)^n\cdot w$, где n — любое целое число.

Исследование интеграла (39) закончено. Теперь мы ясно видим, чем обусловлена многозначность выражаемой этим интегралом функции $\arcsin z$. Более глубокое понимание интересующего нас вопроса стало возможным потому, что, не ограничиваясь областью вещественных чисел, мы вели исследование в области чисел комплексных.

§ 69. Исследование интеграла $\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{M(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}}$

1. В § 68 мы исследовали интеграл

$$\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

пользуясь соображениями, свойственными теории функции комплексного переменного. Применим теперь тот же прием к исследованию интеграла

$$u=\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{M(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}},\qquad(40)$$

в котором M служит коэфициентом, a, b, c и d — постоянные комплексные числа и z — комплексное переменное.

Пусть O есть нулевая точка, а z — какая-нибудь точка числовой плоскости (фиг. 24). Выбрав вещественную ось OX и мнимую OY, отметим точки с аффиксами a, b, c и d. Будем поступать так же, как и в § 68.

Соединяя точку O с точкою z различными кривыми, проследим, какие значения будет иметь интеграл (40), взятый по этим кривым.

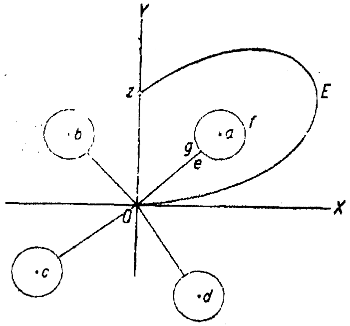
Обозначим интеграл, взятый по прямой Oz, буквою w.

Имеем:

$$I(Oz)=w.$$

Особыми точками подинтегральной функции (точками разветвления) являются точки a, b, c, d.

Соединим точку O с z кривой OEz так, чтобы особая точка a попала внутрь области, ограниченной контуром $OEzO$. Построим петлю $OefgO$ точки a. На основании теоремы Коши можем написать что



Фиг. 24

$$I(OEz)=I(OefgOz)$$

или

$$I(OEz)=A+I(Oz),$$

где $A=I(Oe)+I(efg)+I(gO)$

есть интеграл, взятый вдоль петли.

В последних двух равенствах Oz и gO представляют те части контура, по которым интегрирование производится уже после обхода особой точки a. Для интеграла вдоль петли имеем:

$$A=\int\limits_0^{a-\varepsilon}\frac{dz}{R}+\int\limits_L\frac{dz}{R}-\int\limits_{a-\varepsilon}^{0}\frac{dz}{R}.$$

Здесь $a-\varepsilon$—аффикс точки c, $|\varepsilon|=\rho$ — радиус кружка efg, L — его контур и

$$R=\sqrt{M(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}.$$

Последний интеграл взят с отрицательным знаком. Сделано это потому, что после того, как переменная обойдет особую точку, радикал R изменит свой знак (§ 67).

Исследуя сначала интеграл, взятый по окружности L, положим, что

$$z=a+\rho e^{\theta i}.$$

Мы увидим, что

$$\int\limits_L\frac{dz}{R}=i\sqrt{\rho}\int\limits_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi}\frac{e^{\frac{\theta i}{2}}}{R_1},$$

где

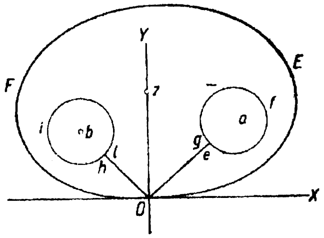
$$R_1=\sqrt{M(a-b+\rho e^{\theta i})(a-c+\rho e^{\theta i})(a-d+\rho e^{\theta i})}$$

и при $\rho=0$ в нуль не обращается. θ_0 есть начальное значение амплитуды θ при интегрировании по контуру L.

Теперь уже нетрудно видеть, что в пределе при $\rho\to 0$

$$A=2\int\limits_0^a\frac{dz}{R}.$$

Переходя к интегралу $I(Oz)$, заметим, что в начале исследования для него было введено обозначение w. Но когда переменная обойдет особую точку, то подинтегральная функция изменит знак. Она удержит этот обратный знак на пути gO и Oz. Следовательно:



Фиг. 25

$$I(Oz)=-w.$$

И мы будем иметь:

$$I(OEz)=A-w.$$

Следуя тому же приему, можно показать, что интегралы вдоль петель точек b, c и d выразятся так:

$$B=2\int\limits_0^b\frac{dz}{R};\quad C=2\int\limits_0^c\frac{dz}{R};\quad D=2\int\limits_0^d\frac{dz}{R}.$$

Значения интеграла (40) после обхода каждой из этих точек в отдельности будут:

$$B-w;\quad C-w;\quad D-w.$$

2. Рассмотрим случай, когда ограниченная контуром интегрирования область содержит внутри две особые точки (фиг. 25).

Мы можем написать, что

$$I(OEFOz)=I(OefgO)+I(OlihO)+I(Oz),$$

или

$$(OEFOz)=A-B+I(Oz).$$

Нетрудно понять состав этой формулы.

Интегрируя вдоль петли $OefgO$, мы получим в результате A. Когда переменная обойдет вокруг особой точки a, то подинтегральная функция изменит знак. Этот измененный знак она удержит вдоль пути gO и Ol. Вследствие этого интеграл вдоль петли точки b равен — B. Когда переменная обойдет вокруг точки b, то подинтегральная функция приобретет свой первоначальный знак, который она удержит вдоль пути hO и Oz. Это значит, что

$$I(OEFOz)=A-B+w.$$

Совершая обращение интеграла $w=\int\limits_0^z\frac{dz}{R}$, мы можем рассматривать w как независимую переменную, а верхний предел z как функцию от w. В таком случае выходит, что при добавлении к аргументу w величины $A-B$ функция z принимае прежнее значение. Следовательно, $A-B$

есть период функции z. Можно убедиться в том, что $A-C$, $A-D$, $B-C$, $B-D$, $C-D$, тоже ее периоды. Но так как $B-C=$ $=A-C-(A-B)$; $B-D=A-D-(A-B)$; $C-D=A-D-$ $-(A-C)$, то шесть периодов сводятся к трем: $A-B$, $A-C$ и $A-D$.

Покажем, что последний приводится к двум первым. Опишем из центра O окружность настолько большого радиуса r, чтобы все точки a, b, c и d оказались внутри нее (фиг. 26).

Нетрудно убедиться в том, что интеграл, взятый по контуру $ONPNO$, равен сумме интегралов, взятых вдоль петель точек a, b, c и d.

Но так как

$$I(ONPNO)=I(ON)+I(NPN)+I(NO),$$

то имеем:

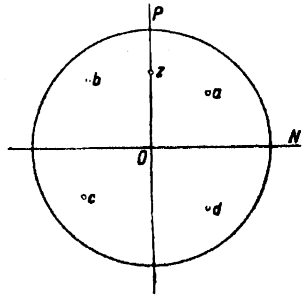
$$I(NPN)=A-B+C-D.$$

В интеграле левой части этого равенства положим $z=re^{\varphi i}$. В таком случае:

$$I(NPN)=\frac{1}{r}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{\varphi i}\cdot d\varphi}{\sqrt{M\left(e^{\varphi i}-\frac{a}{r}\right)\left(e^{\varphi i}-\frac{b}{r}\right)\left(e^{\varphi i}-\frac{c}{r}\right)\left(e^{\varphi i}-\frac{d}{r}\right)}}.$$

Полагая $r\to\infty$, получим, что

$$I(NPN)=0.$$



Фиг. 26

Следовательно:

$$A-B+C-D=0.$$

Но так как $C-D=A-D-(A-C)$, то $A-D=A-C-(A-B)$, т. е. период $A-D$ приводится к $A-B$ и $A-C$. Неприводимыми для функции z являются только два периода $A-B$ и $A-C$.

3. Найденные результаты приложим к эллиптическому интегралу

$$\int\limits_0^z\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}};\quad k^2<1,$$

все особые точки которого $a=+1$; $b=-1$; $c=\frac{1}{k}$; $d=-\frac{1}{k}$ лежат на вещественной оси.

Заменяя обозначение z на x для периодов функции x, будем иметь:

$$A-B=2\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}-2\int\limits_0^{-1}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$A-C=2\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}-2\int\limits_0^{\frac{1}{k}}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Заменим во втором интеграле первого из этих равенств x на $-x$. Получим:

$$A-B=4\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

т. е.

$$A-B=4K.$$

Что касается второго периода, то, заметив, что

$$A-C=2\int\limits_{\frac{1}{k}}^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

положим:

$$x=\frac{1}{\sqrt{1-k'^2\xi^2}},$$

где $k'^2=1-k^2$. Мы будем иметь:

$$dx=\frac{k'^2\xi\ d\xi}{(1-k'^2\xi^2)^{\frac{3}{2}}}$$

и

$$A-C=2i\int\limits_0^1\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)\ (1-k'^2\xi^2)}},$$

т. е.

$$A-C=2iK'.$$

Мы приходим к тому же результату, что и раньше: функция $x=\operatorname{sn}u$ имеет периоды $4K$ и $2iK'$.

ГЛАВА IV

ФУНКЦИИ ВЕЙЕРШТРАССА

§ 70. Эллиптические функции. Теория Вейерштрасса

В главе I мы ознакомились с эллиптическими функциями Якоби, определив их сначала лишь для вещественных значений аргумента, а затем чисто формальным приемом—на основе теоремы сложения—и для любых комплексных значений аргумента.

Мы знаем теперь из глав I и III, что якобиевы функции $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$ являются двоякопериодическими мероморфными функциями u.

Кроме них существует еще бесчисленное множество мероморфных двоякопериодических функций. К их числу принадлежат, например, производные якобиевых функций:

$$(\operatorname{sn} z)' = \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z,$$

$$(\operatorname{cn} z)' = -\operatorname{sn} z \operatorname{dn} z,$$

$$(\operatorname{dn} z)' = -k^2 \operatorname{sn} z \operatorname{cn} z$$

и вообще любые рациональные функции $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$ и $\operatorname{dn} z$.

Мероморфные двоякопериодические функции называются эллиптическими функциями. Основы общей теории эллиптических функций рассматриваемых именно как двоякопериодические мероморфные функции дал впервые К. Вейерштрасс, являющийся (наряду с Коши и Риманом создателем современной теории аналитических функций.

До Вейерштрасса эллиптические функции трактовались главным образом исходя из задачи обращения эллиптических интегралов.

Развивая по-новому теорию эллиптических функций, Вейерштрасс взял в ней в качестве основных новые функции, получившие вскоре всеобщее распространение.

Имея в виду ознакомить читателя с функциями Вейерштрасса и с их употреблением, мы последуем здесь плану изложения первых глав книги, т. е. будем снова исходить из задачи обращения эллиптического интеграла.

Что касается общей теории Вейерштрасса, то эскиз ее мы дадим в последней главе книги, отсылая читателя для подробного изучения к другим книгам и в первую очередь к уже цитированной книге Гурвица

§ 71. Эллиптический интеграл в нормальной форме Вейерштрасса. Функция $\wp u$ Вейерштрасса.

Рассмотрим эллиптический интеграл первого рода в нормальной форме Вейерштрасса:

$$u = \int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}, \tag{1}$$

где g_2 и g_3 — какие-либо комплексные числа. Обозначая через e_1, e_2 и e_3 корни многочлена $4z^3 - g_2 z - g_3$, мы можем переписать этот интеграл в виде:

$$u = \int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}.$$

Так как подинтегральное выражение имеет особые точки (точки разветвления: e_1, e_2 и e_3), то интеграл не является вообще однозначной функцией от нижнего предела z: его значение зависит от пути интегрирования, ведущего от точки z к ∞. Рассуждая подобно тому, как это делалось в §§ 68, 69 главы III, можно установить, что если u_0 есть значение u, получающееся при интегрировании от z_0 до ∞, вдоль некоторого определенного пути, то все значения u, получающиеся при интегрировании вдоль других возможных путей, заключаются в формуле:

$$u = \pm u_0 + 2m_1\Omega_1 + 2m_2\Omega_2 + 2m_3 \tag{2}$$

где Ω_1, Ω_2, Ω_3 — значения следующих интегралов:

$$\Omega_1 = \int_{e_1}^\infty \frac{dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}},$$

$$\Omega_2 = \int_{e_2}^\infty \frac{dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}},$$

$$\Omega_3 = \int_{e_3}^\infty \frac{dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}.$$

Интегрирование в каждом из них ведется вдоль пути, соединяющего соответствующую точку e_k ($k = 1, 2, 3$) с бесконечно удаленной точкой, причем путь не должен проходить через две остальные точки e_k и не должен самопересекаться.

После того, как пути выбраны, можно выбрать знак подинтегрального выражения таким образом, чтобы выполнялось соотношение:

$$\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 = 0.$$

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим контур C, изображенный на фиг. 27. Выбирая внутри области, ограниченной этим контуром, одну из ветвей функции

$$\frac{1}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}},$$

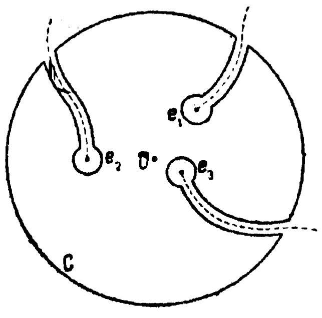
будем иметь для нее, по теореме Коши:

$$\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}} = 0.$$

Если теперь радиус R окружности стремится к ∞, причем петли, охватывающие точки e_1, e_2 и e_3, бесконечно утончаясь, стремятся слиться с путями, вдоль которых вычисляются Ω_1, Ω_2 и Ω_3, то интегралы, взятые вдоль петель, стремятся, соответственно, к $2\Omega_1$ $2\Omega_2$ и $2\Omega_3$, в то время как интегралы вдоль дуг окружности стремятся к нулю. (В самом деле, модуль подинтегрального выражения

$$\frac{1}{|\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}|} = \frac{1}{2|z|^{\frac{3}{2}}\sqrt{\left(1-\frac{e_1}{|z|}\right)\left(1-\frac{e_2}{|z|}\right)\left(1-\frac{e_3}{|z|}\right)}}$$

при возрастании $|z| = R$ до бесконечности стремится к нулю, как $\frac{1}{2R^{\frac{3}{2}}}$, в то время как длина пути интегрирования стремится к ∞, как $2\pi R$.)



Фиг. 27

Итак, путем предельного перехода получаем:

$$2\Omega_1 + 2\Omega_2 + 2\Omega_3 = 0$$

Обозначая через Ω' и Ω'' две какие-нибудь из величин Ω_1, Ω_2, Ω_3, мы можем выразить через них третью величину Ω_k:

$$\Omega_k = -\Omega' - \Omega''.$$

Подставляя это выражение в формулу (2) и группируя члены с Ω' и Ω'', получим:

$$u = \pm u_0 + 2m'\Omega' + 2m''\Omega''. \qquad ( )$$

Отметим, в частности, все значения u, соответствующие $z = \infty$. Очевидно, что при z, стремящемся к ∞, интеграл

$$\int\limits_z^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}},$$

взятый, например, вдоль прямой, проходящей через точку z и через начало координат, стремится к нулю. Полагая $u_0 = 0$, мы найдем все остальные значения u, соответствующие $z = \infty$, из формулы:

$$u = 2m'\Omega' + 2m''\Omega''.$$

u, как функция z, является многозначной (бесконечно значной) аналитической функцией с точками ветвления: e_1, e_2 и e_3.

Станем теперь рассматривать z как функцию от u, иными словами, нижний предел интегрирования как функцию величины интеграла.

Можно было бы доказать, на чем мы здесь не останавливаемся, что z является *однозначной аналитической функцией* u. Эту функцию обозначают через $\wp u$ (произносится «пэ от у» или просто «пэ у»):

$$z = \wp u.$$

Желая в обозначении функции $\wp$ указать, кроме значения аргумента, еще и значения величин g_2 и g_3, называемых инвариантами $\wp$, пишут:

$$z = \wp(u; g_2, g_3).$$

В каждой точке плоскости u за исключением точек:

$$u = 2m'\Omega' + 2m''\Omega''$$

функция $\wp u$ имеет определенное конечное значение и аналитична. Что касается точек $u = 2m'\Omega' + 2m''\Omega''$, то в них z обращается в бесконечность, поэтому эти точки суть полюсы $\wp u$. Таким образом $\wp u$, не имея в конечной плоскости других особых точек, кроме полюсов, является мероморфной функцией u.

Из формулы (3), указывающей все значения u, соответствующие одному и тому же значению z, равному $z_0 = \wp u_0$, выводим:

$$\wp(\pm u_0 + 2m'\Omega' + 2m''\Omega'') = \wp u_0.$$

Полагая здесь $m' = m'' = 0$ и удерживая перед u_0 знак $-$, получаем:

$$\wp(-u_0) = \wp u_0,$$

откуда следует, что $\wp u$ — четная функция u.

Удерживая в той же формуле знак $+$ перед u_0 и считая m' и m'' какими угодно целыми числами или нулями, получаем:

$$\wp(u_0 + 2m'\Omega' + 2m''\Omega'') = \wp u_0,$$

откуда следует, что $\wp u$ есть функция двоякопериодическая [1]).

Итак, функция $\wp u$ является мероморфной, двоякопериодической функцией. Следовательно, $\wp u$ есть эллиптическая функция.

Заметим, что производная от $\wp u$: $\wp' u$ также является эллиптической функцией.

В самом деле, она, во-первых, мероморфна (ее особыми точками в конечной плоскости являются полюса функции $\wp u$, в которых $\wp' u$ также

[1]) Для того чтобы сделать этот вывод из полученной формулы, нужно знать. во-первых, *что два периода $2\Omega'$ и $2\Omega''$ не могут быть сведены к одному, т. е, что они не являются целыми кратными одного и того же периода 2Ω, и, во-вторых, что не существует никакого третьего, независимого от $2\Omega'$ и $2\Omega''$, периода, т. е., что всякий период функции $\wp$ и может быть представлен через $2\Omega'$ и $2\Omega''$ в виде: $2m'\Omega' + 2m''\Omega''$, где m' и m'' — целые числа или нули.*

Первое из этих обстоятельств, т. е. невозможность сведения периодов $2\Omega'$ и $2\Omega''$ к одному периоду, как можно доказать, имеет место всякий раз, когда корни e_1, e_2 и e_3 различны.

Второе обстоятельство, т. е. невозможность существования третьего независимого периода, имеет место во всех случаях: действительно, можно доказать, что аналитическая функция, имеющая три независимых периода, есть тождественная постоянная.

имеет полюса с кратностями, на единицу большими, чем для $\wp\, u$), во-вторых, она является двоякопериодической функцией с теми же основными периодами $2\,\Omega'$ и $2\,\Omega''$, что и $\wp\, u$.

Действительно:

$$\wp'(u+2m'\Omega'+2m''\Omega'')=$$

$$=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\wp(u+\Delta u+2m'\Omega'+2m''\Omega'')-\wp(u+2m'\Omega'+2m''\Omega'')}{\Delta u}=$$

$$=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\wp(u+\Delta u)-\wp u}{\Delta u}=\wp' u.$$

Из соотношения

$$\wp(-u)=\wp u,$$

характеризующего $\wp u$ как четную функцию, получаем, диференцируя обе части равенства по u:

$$-\wp'(-u)=\wp' u,$$

т. е. $\wp' u$ является нечетной функцией u.

Эллиптические функции $\wp u$ и $\wp' u$ играют в теории Вейерштрасса такую же роль, как и функции $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$ в теории Якоби.

Из определения $z=\wp u$ как функции, обратной эллиптическому интегралу

$$u=\int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}},$$

легко вывести диференциальное уравнение, которому она удовлетворяет Действительно, диференцируя интеграл по нижнему пределу, получаем:

$$du=-\frac{dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}},$$

или, заменяя z через $\wp u$ и выполнив очевидные преобразования:

$$\left(\frac{d\wp u}{du}\right)^2=4\wp^3 u-g_2\wp u-g_3.$$

Это и есть искомое уравнение.

Заметим, что оно выражает алгебраическую зависимость между двумя основными функциями $\wp u$ и $\wp' u$ теории Вейерштрасса.

В ближайших параграфах мы изучим функцию $\wp(u;\, g_2, g_3)$, предполагая инварианты g_2 и g_3 вещественными. Так как в приложения функции $d\wp u$ к механике наиболее важны вещественные значения этой функции, то мы, главным образом, сосредоточим внимание на вещественных значениях и вместе с этим также, в целях приложений, на вычислениях значений функции по заданным инвариантам и значению аргумента, вычислении значений аргумента по заданным инвариантам и значению функции и т. п.

§ 72. Дискриминант $\Delta=g_2^3-27g_3^2$ и корни: e_1, e_2 и e_3

Если инварианты g_2 и g_3 вещественны, то многочлен

$$4z^3-g_2z-g_3$$

принимает вещественные значения для вещественных значений z. Желая изучить сначала $z=\wp u$ для вещественных значений u, будем придавать z такие значения, чтобы многочлен $4z^3-g_2z-g_3$ (стоящий под знаком квадратного корня) был положительным.

Различные случаи, которые здесь могут представиться, зависят от знака *дискриминанта*:

$$\Delta=g_2^3-27\;g_3^2.$$

1°. $\Delta>0$. В этом случае, как известно[1]), все три корня e_1, e_2 и e_3 многочлена вещественны и различны. Условившись обозначать через e_1 наибольший, а через e_3 наименьший из них, будем иметь:

$$e_1>e_2>e_3.$$

Представив наш многочлен в виде:

$$A\;(z-e_1)\;(z-e_2)\;(z-e_3),$$

убеждаемся, что он будет положительным, если $z>e_1$ или если $e_2>z>e_3$.

2°. $\Delta<0$. В этом случае два корня мнимые сопряженные и один вещественен.

Обозначая вещественный корень через e_2, будем иметь для мнимых корней:

$$e_1=m+ni,$$
$$e_3=m-ni,$$

Очевидно, что многочлен принимает здесь положительные значения тогда, и только тогда, если $z>e_2$.

3°. $\Delta=0$. В этом случае все корни вещественны, но среди них два (в случае, когда g_2 и g_3 не равны нулю) или три (в случае, когда g_2 и g_3 равны нулю) равны между собой. Здесь многочлен принимает вещественные значения при z, большем неравного корня (если не все три равны между собой), или при z, большем общего значения всех трех корней (если все корни равны между собой).

Во всех случаях имеем в силу известных зависимостей между корнями многочлена и его коэфициентами[2]):

$$e_1+e_2+e_3=0,$$
$$e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1=-\frac{g_2}{4},$$
$$e_1e_2e_3=\frac{g_3}{4}.$$

Если все три корня вещественны ($\Delta\geqslant 0$), то первая из этих зависимостей показывает, что либо все корни равны 0: $e_1=e_2=e_3=0$ (в слу-

---

[1]) См. для этого и для следующих двух случаев *В. И. Смирнов*, Курс высшей математики, т. II, п. 23.

[2]) См., например, *Смирнов*, Курс высшей математики, т. II, п. 22.

чае, когда $g_2=g_3=0$), или корень e_1 (наибольший) положителен, а корень e_3 (наименьший) отрицателен. Что касается знака e_2, то из третьего соотношения следует, что этот знак противоположен знаку g_3.

§ 73. Выражение вейерштрассовой функции $\wp u$ через якобиевы

Предположим здесь, что дискриминант Δ положителен. Если в интеграле

$$u=\int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}=\int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}} \tag{1'}$$

производить интегрирование вдоль положительной части вещественной оси, считая z большим e_1 и выбирая перед квадратным корнем знак $+$, то интеграл будет получать вполне определенные вещественные положительные значения. При этом возрастанию z от e_1 до ∞ будет соответствовать убывание u от значения, равного

$$\int_{e_1}^\infty \frac{dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}, \quad \text{до } 0.$$

Введем обозначения:

$$\int_{e_1}^\infty \frac{dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}=\omega_1,$$

$$\int_{e_1}^{-\infty} \frac{dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}=i\int_{-\infty}^{e_3} \frac{dz}{\sqrt{4(e_1-z)(e_2-z)(e_3-z)}}=\omega_3.$$

(Во втором интеграле интегрирование производится вдоль отрицательной части вещественной оси. Значение квадратного корня под знаком интеграла выбираем так, чтобы коэфициент при i был положительным.) Тогда, согласно § 71, все возможные значения u, соответствующие значению $z=z_0$, $e_1<z_0<\infty$, заключаются в формуле:

$$u=\pm u_0+2m_1\omega_1+2m_3\omega_3,$$

где через u_0 обозначено положительное значение u, содержащееся между 0 и ω_1. Так как ω_3 в нашем случае чисто мнимое число, а ω_1 число вещественное, то все возможные вещественные значения u, соответствующие данному z, заключаются в формуле:

$$u=\pm u_0+2m_1\omega_1.$$

Все они могут быть получены при интегрировании в комплексной плоскости от $z=z_0$ до $z=\infty$ вдоль пути, делающего один или несколько оборотов около точки $z=e_1$. Покажем, что, делая надлежащую подстановку под знаком интеграла, можно все эти значения u получить интегрированием вдоль вещественной оси. Именно, положим:

$$z=e_3+\frac{e_1-e_3}{\sin^2\varphi}. \tag{5}$$

Тогда интеграл примет вид:

$$u=\frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \tag{6}$$

где

$$k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}. \tag{7}$$

Очевидно, что $0<k^2<1$ (в силу того, что $e_1>e_2>e_3$).

Когда φ в равенстве (5) возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$, то z убывает от ∞ до e_1.

Обозначая через φ_0 значение φ, лежащее в промежутке $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и соответствующее данному значению $z=z_0$ из промежутка (e_1, ∞), получим, что все возможные значения φ, соответствующие, по формуле (5), $z=z_0$, заключаются в формуле:

$$\varphi=\pm\varphi_0+m_1\pi,$$

где m_1 — любое целое число или нуль.

Этим значениям φ соответствуют, по формуле (6), значения u:

$$u=\frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\int_0^{\pm\varphi_0+m_1\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}+\frac{2m_1}{\sqrt{e_1-e_3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

(Мы пользуемся здесь формулой (30) главы I.) Замечая, что

$$\frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=u_0$$

(u_0 — значение u, соответствующее $z=z_0$ и заключенное в промежутке $0, \omega_1$) и что

$$\frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\omega_1,$$

получаем:

$$u=\pm u_0+2m_1\omega_1$$

Отсюда заключаем что все значения интеграла (6), получаемые при интегрировании вдоль вещественной оси от 0 до любого значения φ, соответствующего, по формуле (5), данному значению $z=z_0$, $e_1<z_0<\infty$, дают все возможные вещественные значения эллиптического интеграла (1'), получаемые при интегрировании в комплексной плоскости по различным путям от z_0 до ∞.

Из (6) выводим:

$$\sin\varphi = \mu[\sqrt{e_1-e_3}\cdot u;\ k]$$

и, следовательно, на основании (5):

$$z = e_3 + \frac{e_1-e_3}{\mathrm{sn}^2[\sqrt{e_1-e_3}\cdot u;\ k]}.$$

Эта формула определяет z как функцию u, т. е. вейерштрассову функцию $\wp u$, для любого вещественного значения u. (Действительно, всякое вещественное число u можно представить в виде: $u = \pm u_0 + 2m_1\omega_1$, где m_1 — целое число или нуль и $0 \leqslant u_0 \leqslant \omega$.) Подставляя в полученную формулу значение k из формулы (7), имеем окончательно:

$$z = \wp u = e_3 + \frac{e_1-e_3}{\mathrm{sn}^2\left[\sqrt{e_1-e_3}\cdot u;\ \sqrt{\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}}\right]}. \qquad (8)$$

Мы получили таким образом, формулу, выражающую вейерштрассову функцию через якобиеву.

Заметим, что эта формула, выведенная в предположении вещественных инвариантов g_2 и g_3, положительного дискриминанта Δ и вещественных u и z, справедлива также при любых g_2, g_3, u и z. Однако, наибольшие удобства для приложений она представляет именно в рассмотренном нами случае, когда все члены ее вещественны. В случае, например, g_2 и g_3 вещественных, но дискриминанта Δ, меньшего нуля, вещественным значениям u попрежнему соответствуют вещественные значения z. Однако здесь $e_3 = m - ni$, $e_1 - e_3 = 2ni$, $\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3} = \frac{e_2 - m + ni}{2ni}$ и в правую часть формулы (8) входит sn от комплексного аргумента с комплексным модулем. Мы выведем в следующем параграфе другую формулу, выражающую $\wp u$ в случае $\Delta < 0$ через якобиевы функции с вещественным меньшим единицы модулем и от вещественного аргумента.

§ 74. Случай, когда $\Delta < 0$

В этом случае один корень трехчлена

$$4z^3 - g_2 z - g_3$$

вещественен и два мнимы. Согласно условию § 72 вещественный корень будем обозначать через e_2. Мнимые корни будут:

$$e_1 = m + ni, \quad e_3 = m - ni, \qquad (9)$$

причем за e_1 будем принимать тот из них, в котором коэфициент при i положителен.

Разлагая трехчлен на множители, имеем:

$$4z^3 - g_2 z - g_3 = 4(z - e_2)[(z-m)^2 + n^2].$$

Вследствие этого интеграл (1) принимает вид:

$$u = \int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4(z-e_2)[(z-m)^2+n^2]}}. \qquad (10)$$

Из (9) следует, что

$$2m = e_1 + e_3 = -e_2, \text{ т. е. } m = -\frac{e_2}{2}$$

и

$$m^2 + n^2 = e_1 e_3 = \frac{g_3}{4e_2}, \text{ т. е. } n^2 = \frac{g_3}{4e_2} - \frac{e_2^2}{4}.$$

Будем поступать аналогично тому, что мы делали в случае $\Delta > 0$. Произведем в интеграле (10) замену переменной:

$$z = e_2 + H\cdot\mathrm{ctg}^2\frac{\varphi}{2}, \qquad (11)$$

где $H = \sqrt{9m^2+n^2}$. Мы получим:

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}\sqrt{H\left(1+\mathrm{ctg}^4\frac{\varphi}{2}\right) + 3e_2\,\mathrm{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}},$$

или

$$u = \frac{1}{2\sqrt{H}}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^4\frac{\varphi}{2} + \cos^4\frac{\varphi}{2} + \frac{3e_2}{H}\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}}},$$

или еще

$$2u\sqrt{H} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

где $k^2 = \frac{1}{2} - \frac{3e_2}{4H}$. (Заметим, что $\left|-\frac{3e_2}{4H}\right| = \frac{3\,|m|}{2\sqrt{9m^2+n^2}} < \frac{1}{2}$ и, следовательно, $0 < k^2 = \frac{1}{2} - \frac{3e_2}{4H} < 1$.)

Теперь мы видим, что

$$\varphi = \mathrm{am}\,(2u\sqrt{H}).$$

А так как, кроме того, из (10) $z = \wp u$, то (11) дает:

$$\wp u = e_2 + H\frac{1+\mathrm{cn}\,(2u\sqrt{H})}{1-\mathrm{cn}\,(2u\sqrt{H})}. \qquad (12)$$

Формула эта, аналогичная (8), служит для вычисления функции $\wp u$ с отрицательным дискриминантом, когда даны инварианты g_2 и g_3 и дано u. Применяя ее, надо помнить, что функция cn $(2u\sqrt{H})$ вычисляется при модуле:

$$k = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{3e_2}{4H}}.$$

§ 75. Случай, когда $\Delta = 0$

Если дискриминант Δ равен нулю, то корни трехчлена

$$4z^3 - g_2 z - g_3$$

вещественны и два из них равны между собой (или, если $g_2 = g_3 = 0$, то все три корня равны нулю).

Мы рассмотрим отдельно случай, когда

$$e_1 = e_2 \quad \text{и} \quad e_2 = e_3.$$

В первом случае из соотношений

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0; \quad e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1 = -\frac{g_2}{4}; \qquad e_1e_2e_3 = \frac{g_3}{4}$$

следует, что

$$e_3 = -2e_1; \quad e_1^2 = \frac{g_2}{12}; \qquad -2e_1^3 = \frac{g_3}{4}.$$

Отсюда

$$e_1 = -\frac{3g_3}{2g_2};$$

поэтому

$$e_1 - e_3 = 3e_1 = -\frac{9g_3}{2g_2}$$

и (8) дает:

$$\wp u = \frac{3g_3}{g_2} - \frac{9g_3}{2g_2 \operatorname{sn}^2 v},$$

где

$$v = u\sqrt{-\frac{9g_3}{2g_2}}.$$

Но в этом случае

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = 1.$$

Поэтому (§ 11)

$$\operatorname{sn} v = \frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}} = \operatorname{th} v$$

и мы видим, что

$$\wp u = \frac{3g_3}{g_2} - \frac{9g_3}{2g_2}\left(\frac{e^v + e^{-v}}{e^v - e^{-v}}\right)^2 = \frac{3g_3}{g_2} - \frac{9g_3}{2g_2}(\operatorname{cth} v)^2,$$

т. е. в этом случае функция $\wp u$ выражается рационально через гиперболическую функцию.

Во втором случае, когда $e_2 = e_3$, очевидно $k = 0$; $e_2^2 = \frac{g_2}{12}$; $-2e_2^3 = \frac{g_3}{4}$; $e_2 = -\frac{3g_3}{2g_2}$; $e_1 - e_3 = -3e_2 = \frac{9g_3}{2g_2}$ и (8) дает:

$$\wp u = -\frac{3g_3}{2g_2} + \frac{9g_3}{2g_2} \cdot \frac{1}{\operatorname{sn}^2 u\sqrt{\frac{9g_3}{2g_2}}}.$$

Но при $k = 0$:

$$\operatorname{sn}\left(u\sqrt{\frac{9g_3}{2g_2}}\right) = \sin\left(u\sqrt{\frac{9g_3}{2g_2}}\right).$$

Вследствие этого

$$\wp u = -\frac{3g_3}{2g_2} + \frac{9g_3}{2g_2} \cdot \frac{1}{\sin^2\left(u\sqrt{\frac{9g_3}{2g_2}}\right)}.$$

Функция $\wp u$, как видно из последнего равенства, выражается рационально через тригонометрическую функцию.

Отметим еще случай, когда $g_2 = g_3 = 0$; здесь все три корня e_1, e_2 и e_3 равны нулю. Имеем:

$$u = \int_z^\infty \frac{dz}{2\sqrt{z^3}} = z^{-\frac{1}{2}};$$

откуда

$$z = \wp u = \frac{1}{u^2}.$$

§ 76. Формула однородности функции $\wp u$ и одно ее применение

Установим для функции $\wp u$ формулу, имеющую широкое применение и известную под названием формулы однородности. Одно из этих применений будет здесь дано.

Положим в интеграле

$$u = \int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}},$$

что $z = \frac{\xi}{\mu}$, где $\frac{1}{\mu}$ есть численный множитель. Мы получим:

$$\frac{u}{\sqrt{\mu}} = \int_\xi^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{4\xi^3 - \gamma_2\xi - \gamma_3}},$$

где $\gamma_2 = g_2\mu^2$; $\gamma_3 = g_3\mu^3$.

Теперь мы видим, что

$$\xi = \wp\left(\frac{u}{\sqrt{\mu}};\ \gamma_2,\ \gamma_3\right).$$

Но так как

$$\xi = \mu z = \mu\wp(u;\ g_2,\ g_3),$$

то выходит, что

$$\mu\wp(u;\ g_2,\ g_3) = \wp\left(\frac{u}{\sqrt{\mu}};\ g_2\mu^2,\ g_3\mu^3\right). \tag{13}$$

Это и есть искомая формула.

Покажем, каким образом при ее помощи можно выразить функцию $\wp$ от чисто мнимой переменной через $\wp$ от вещественной переменной (но с другими инвариантами). Положим в (13), что $\mu = -1$. Мы получим:

$$-\wp(u;\ g_2,\ g_3) = \wp\left(\frac{u}{i};\ g_2,\ -g_3\right).$$

Теперь положим, что $u = vi$, где v — вещественно. Будем иметь:

$$\wp(vi;\ g_2,\ g_3) = -\wp(v;\ g_2,\ -g_3) \tag{14}$$

Мы видим, что функция $\wp$ от мнимой независимой переменной приводится к функции $\wp$ от вещественной переменной, но с инвариантами g_2 и $-g_3$.

Соотношение (14) можно рассматривать как определяющее функцию $\wp(vi)$.

Отметим еще формулу однородности для $\wp'u$. Эта формула немедленно получится из равенства (13), если обе части равенства диференцировать по u. Получаем:

$$\mu\wp'(u;\ g_2, g_3) = \wp'\left(\frac{u}{\sqrt{\mu}};\ g_2\mu^2,\ g_3\mu^3\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{\mu}},$$

или

$$\mu^{\frac{3}{2}}\ \wp'(u;\ g_2,\ g_3) = \wp'\left(\frac{\mu}{\sqrt{\mu}};\ \ g_2\mu^2;\ \ g_3\mu^3\right)$$

Отсюда имеем, в частности, положив: $\mu = -1$ и $u = vi$:

$$\wp'(vi; g_2,\ g_3) = i\wp'(v; g_2,\ -g_3).$$

§ 77. Периоды функции $\wp u$ в случае, когда $\Delta > 0$

В § 73 мы видели, что в случае, когда g_2 и g_3 вещественны и $\Delta > 0$, функция $\wp u$ имеет вещественный период $2\omega_1$:

$$2\omega_1 = 2\int_{e_1}^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}} \tag{15}$$

и чисто мнимый период $2\omega_3$:

$$2\omega_3 = 2\int_{e_3}^{-\infty}\frac{dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}} = 2i\int_{-\infty}^{e_3}\frac{dz}{\sqrt{4(e_1-z)(e_2-z)(e_3-z)}} \tag{16}$$

Значения квадратного корня под знаками интегралов можно выбрать так, чтобы ω_1 и $\frac{\omega_3}{i}$ были положительными.

Укажем другие выражения для передов $2\omega_1$ и $2\omega_3$. Прежде всего, уже употреблявшаяся нами подстановка

$$z = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\sin^2\varphi}$$

приводит ω_1 к виду:

$$2\omega_1 = \frac{2}{\sqrt{e_1 - e_3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}, \tag{17}$$

где

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}.$$

Подобным же образом подстановка

$$z = e_1 - \frac{e_1 - e_3}{\sin^2\varphi}$$

приведет $2\omega_3$ к виду:

$$2\omega_3 = \frac{2i}{\sqrt{e_1 - e_3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2\sin^2\varphi}}, \tag{18}$$

где $k'^2 = \dfrac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} = 1 - k^2$.

Положим теперь в интеграле (15):

$$z = e_3 - \frac{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}{\xi - e_2}.$$

Получим:

$$2\omega_1 = 2\int_{e_3}^{e_2}\frac{d\xi}{\sqrt{4(\xi - e_1)(\xi - e_2)(\xi - e_3)}},$$

или, изменяя обозначения переменной интеграции:

$$2\omega_1 = 2\int_{e_3}^{e_2}\frac{dz}{\sqrt{4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)}}. \tag{19}$$

Делая ту же подстановку в интеграле (16), найдем:

$$2\omega_3 = 2i\int_{e_2}^{e_1}\frac{d\xi}{\sqrt{4(e_1 - \xi)(e_2 - \xi)(e_3 - \xi)}},$$

или, изменяя обозначение переменной интеграции:

$$2\omega_3 = 2i\int_{e_2}^{e_1}\frac{dz}{\sqrt{4(e_1 - z)(e_2 - z)(e_3 - z)}}. \tag{20}$$

§ 78. Периоды функции $\wp u$ в случае, когда $\Delta < 0$

В качестве основных периодов $2\omega'$ и $2\omega'''$ мы возьмем здесь величины

$$2\omega' = 2\int_{e_1}^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}, \tag{21}$$

$$2\omega''' = 2\int_{e_1}^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}. \tag{22}$$

Интегрирование будем производить в первом интеграле по пути, целиком лежащем в верхней полуплоскости, а во втором — по пути, целиком лежащем в нижней полуплоскости (это возможно, так как $e_1 = m+ni$ и $e_3 = m-ni$, причем $n>0$).

Числа $2\omega'$ и $2\omega'''$ — комплексные числа, вещественные и мнимые части которых мы представим сейчас в виде некоторых эллиптических интегралов. Для этого рассмотрим величины:

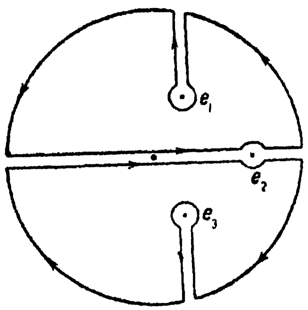
$$2\omega_2 = 2\int_{e_2}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}} = 2\int_{e_2}^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{4(z-e_2)[(z-m)^2+n^2]}}, \qquad (23)$$

$$2\omega'_2 = 2\int_{e_2}^{-\infty}\frac{dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}} = 2i\int_{-\infty}^{e_2}\frac{dz}{\sqrt{4(e_2-z)[(z-m)^2+n^2]}}. \qquad (24)$$

В обоих случаях интегрирование будем производить вдоль вещественной оси, выбирая значения квадратного корня таким образом, чтобы числа $2\omega_2$ и $\frac{2\omega_2'}{i}$ были положительными. Очевидно $2\omega_2$ и $2\omega_2'$ также являются периодами $\wp u$.

Надлежащим образом выбирая значения квадратных корней в интегралах (21,22) и пользуясь теоремой Коши, подобно тому как мы это делали в § 71, можем убедиться, что величины ω', ω''', ω_2 и ω_2' связаны следующими соотношениями:

$$\omega_2 - 2\omega' - \omega_2' = 0,$$
$$\omega_2 - 2\omega''' + \omega_2' = 0.$$



Фиг. 28

На фиг. 28 изображены два контура, применяя к каждому из которых теорему Коши и затем переходя к пределу (заставляя неограниченно расти радиус большой окружности, одновременно неограниченно уменьшая радиусы малых и сближая соответствующие прямолинейные участки контуров), можно получить указанные соотношения. (Из них выводим:

$$\left.\begin{aligned} 2\omega' &= \omega_2 - \omega_2', \\ 2\omega''' &= \omega_2 + \omega_2'. \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Таким образом периоды $2\omega'$ и $2\omega'''$ оказываются комплексными сопряженными числами (так как ω_2 — вещественное, ω_2' — чисто мнимое число).

Из равенств (25) следует, что $2\omega'$ и $2\omega'''$ не могут быть представлены как линейные комбинации с целыми коэфициентами периодов $2\omega_2$ и $2\omega_2'$. (Действительно, если бы, например существовало соотношение:

$$2\omega' = \omega_2 - \omega_2' = 2m\omega_2 + 2m'\omega_2',$$

то мы имели бы:

$$(1-2m)\omega_2 = (1+2m')\omega_2',$$

что невозможно, так как в левой части равенства стоит вещественное, а в правой чисто мнимое число.)

Напротив периоды $2\omega_2$ и $2\omega_2'$ легко могут быть выражены через основные периоды в виде линейных комбинаций с целыми коэфициентами. Именно:

$$2\omega_2 = 2\omega' + 2\omega''',$$
$$2\omega_2' = -2\omega' + 2\omega'''.$$

Укажем еще две формулы для вычисления ω_2 и ω_2'. Делая подстановку

$$z = e_2 + H\,\mathrm{ctg}^2\frac{\varphi}{2}$$

(где $H = \sqrt{9m^2+n^2}$) в интеграле (23), получаем:

$$\omega_2 = \frac{1}{2\sqrt{H}}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{H}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \qquad (26)$$

где $k^2 = \frac{1}{2} - \frac{3e_2}{4H}$.

Аналогично, подстановка

$$z = e_2 - H\,\mathrm{ctg}^2\frac{\varphi}{2}$$

в интеграле (24) дает:

$$\omega_2' = \frac{i}{2\sqrt{H}}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{i}{\sqrt{H}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}, \qquad (27)$$

где $k'^2 = \frac{1}{2} + \frac{3e_2}{4H} = 1 - k^2$.

Заметим, что, обозначив через K и K', соответственно, полные эллиптические интегралы первого рода:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

и

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}},$$

мы могли бы убедиться, что величины

$$2\omega' = \frac{K-iK'}{\sqrt{H}} \quad \text{и} \quad 2\omega''' = \frac{K+iK'}{\sqrt{H}} \qquad (28)$$

действительно являются периодами функции $\wp u$, пользуясь формулой (12), выражающей $\wp$ через sn, и известными нам свойствами функции sn (формулы § 30).

Аналогичное замечание справедливо и для случая предыдущего параграфа ($\Delta > 0$).

Только там имеем:

$$2\omega_1 = \frac{2K}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \quad 2\omega_3 = \frac{2iK'}{\sqrt{e_1 - e_3}} \tag{29}$$

и следует пользоваться формулой (8) § 73.

При этом нужно иметь в виду, что в случае $\Delta < 0$,

$$k^2 = \frac{1}{2} - \frac{3e_2}{4H},$$

а в случае $\Delta > 0$

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}.$$

§ 79. Примеры вычисления периодов

Пример 1. Вычислить периоды функции

$$\wp(u;\ 21,\ -10).$$

Прежде всего вычисляем дискриминант. В нашем случае:

$$g_2 = 21; \quad g_3 = -10.$$

Поэтому

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 = 6561 > 0.$$

Ввиду этого периоды вычисляем по формулам (29), согласно которым

$$2\omega_1 = \frac{2K}{\sqrt{e_1 - e_3}} \quad \text{и} \quad 2\omega_3 = \frac{2K'i}{\sqrt{e_1 - e_3}}.$$

Модули полных интегралов K и K' определяются помощью равенств

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}; \quad k'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}.$$

Корнями многочлена

$$4z^3 - 21z + 10$$

служат:

$$e_1 = 2; \quad e_2 = \frac{1}{2}; \quad e_3 = -\frac{5}{2}.$$

Ввиду этого

$$k^2 = \frac{2}{3}; \quad k'^2 = \frac{1}{3}; \quad \sqrt{e_1 - e_3} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Модулярный угол θ вычисляем по формуле:

$$\sin^2\theta = k^2 = \frac{2}{3}.$$

Ограничиваясь минутами, находим, что $\theta = 54°44'$ и, следовательно $\theta' = 35°16'$.

Вычисляем K. Обращаясь к табл. 3, находим, что

углу $\theta = 54°$ соответствует полный интеграл 2,01327,
углу $\theta = 55°$ соответствует полный интеграл 2,03472.

Интерполируя, составляем пропорцию:

$$\frac{K - 2{,}01327}{2{,}03472 - 2{,}01327} = \frac{44}{60};$$

откуда $K = 2{,}029$.

Ввиду этого вещественный период

$$2\omega_1 = \frac{2 \cdot 2{,}029 \cdot \sqrt{2}}{3} = 1{,}913.$$

Повторив аналогичные выкладки при $\theta' = 35°16'$, находим:

$$K' = 1{,}73398.$$

Следовательно, мнимый период

$$2\omega_3 = \frac{1{,}73398 \cdot 2\sqrt{2}}{3}\, i = 1{,}6348\, i.$$

Пример 2. Вычислить периоды функции

$$\wp\left(u;\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{4}\right).$$

Здесь

$$g_2 = \frac{1}{2}; \quad g_3 = -\frac{1}{4}; \quad \Delta = g_2^3 - 27g_3^2 = -\frac{25}{16} < 0.$$

Вычисляем периоды по формулам (28):

$$2\omega' = \frac{K - iK'}{\sqrt{H}}; \quad 2\omega''' = \frac{K + iK'}{\sqrt{H}}.$$

Корни трехчлена

$$4z^3 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}$$

таковы:

$$e_1 = \frac{1+i}{4}; \quad e_2 = -\frac{1}{2}; \quad e_3 = \frac{1-i}{4};$$

далее:

$$m = \frac{1}{4}; \quad n = \frac{1}{4}; \quad H = \sqrt{9m^2 + n^2} = \frac{1}{4}\sqrt{10};$$

$$k^2 = \frac{1}{2} - \frac{3e_2}{4H} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2\sqrt{10}} = 0{,}9743 = \sin^2\theta.$$

$$\lg\sin\theta = \bar{1}{,}99434; \quad \theta = 80°46'.$$

В табл. 3 находим, что

модулярному углу $80°36'$ соответствует полный интеграл 3,21317,
модулярному углу $80°48'$ соответствует полный интеграл 3,23400.

Интерполируя, составляем пропорцию:

$$\frac{K - 3{,}21317}{3{,}23400 - 3{,}21317} = \frac{10}{12};$$

откуда $K = 3{,}23053$.

Далее имеем: модулярный угол $\theta'=9°14'$.
Интеграл $K'=1{,}58108$. Следовательно:

$$\omega_2=\frac{K}{\sqrt{H}}=\frac{3{,}23053\cdot 2}{\sqrt[4]{10}}=3{,}6333,$$

$$\omega_2'=\frac{iK'}{\sqrt{H}}=\frac{i\cdot 1{,}58108\cdot 2}{\sqrt[4]{10}}=1{,}7782i$$

и

$$2\omega'=\omega_2+\omega_2'=3{,}6333-1{,}7782i,$$

$$2\omega'''=\omega_2-\omega_2'=3{,}6333+1{,}7782i.$$

§ 80. Вычисление значений функции $\wp u$

Покажем, как вычислять $\wp u$, когда дано u и инварианты g_2 и g_3.

Прежде всего вычисляем дискриминант Δ. Если окажется, что $\Delta>0$, то корни e_1, e_2 и e_3 вещественны, причем $e_1>e_2>e_3$. Найдя эти корни, значение функции находим, согласно формуле:

$$\wp u=e_3+\frac{e_1-e_3}{\operatorname{sn}^2(u\sqrt{e_1-e_3})}. \tag{8}$$

Модулем при вычислении функции $\operatorname{sn}(u\sqrt{e_1-e_3})$ служит число:

$$k=\sqrt{\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}}.$$

Если $\Delta<0$, то вычисления производим по формуле:

$$\wp u=e_2+H\frac{1+\operatorname{cn}(2u\sqrt{H})}{1-\operatorname{cn}(2u\sqrt{H})}. \tag{12}$$

Здесь e_2 — вещественный корень. Комплексные корни

$$e_1=m+ni \quad \text{и} \quad e_3=m-ni; \quad n>0.$$

Коэфициент $H=\sqrt{9m^2+n^2}$. Модулем при вычислении функции $\operatorname{cn}(2u\sqrt{H})$ служит:

$$k=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{3e_2}{4H}}.$$

Формулы (8) и (12) удобно применять в тех случаях, когда u есть число вещественное. Покажем, каким образом можно приспособить эти формулы для вычисления функции $\wp u$ в случае, когда u число мнимое.

Будем исходить из формулы:

$$\wp(vi; g_2, g_3)=-\wp(v; g_2, -g_3),$$

доказанной в § 76. Мы видим, что функция $\wp(vi)$ будет вычислена, если будет вычислена функция $\wp v$, причем инварианты последней функции те же, что и первой, но инвариант g_3 взят с обратным знаком.

Посмотрим, каким образом перемена знака инварианта g_3 влияет на корни трехчлена $4z^3-g_2z-g_3$. Рассматривая зависимости

$$e_1+e_2+e_3=0 \quad \text{и} \quad e_1e_2e_3=\frac{g_3}{4},$$

мы видим, что если знак g_3 изменяется на обратный, то должны при этом изменяться знаки всех трех корней. Поэтому корни e_1, e_2, e_3 перейдут в корни $-e_1$, $-e_2$, $-e_3$, причем по величине: $-e_3>-e_2,>-e_1$.

Применяя формулу (8) к функции $\wp(v; g_2, -g_3)$, мы должны будем написать:

$$\wp(v; g_2, -g_3)=-e_1+\frac{e_1-e_3}{\operatorname{sn}^2(v\sqrt{e_1-e_3}, k')}.$$

Следовательно:

$$\wp(vi)=e_1-\frac{e_1-e_3}{\operatorname{sn}^2(v\sqrt{e_1-e_3}, k')}. \tag{8'}$$

Под знаком sn здесь указан модуль k'. В самом деле в основной формуле (8) модуль k определяется помощью равенства:

$$k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}.$$

Но в силу отмеченной выше перестановки корней квадрат нового модуля выразится дробью:

$$\frac{e_1-e_2}{e_1-e_3},$$

причем

$$\frac{e_1-e_2}{e_1-e_3}=1-\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}=1-k^2=k'.$$

Таким образом новый модуль есть действительно дополнительный и, согласно принятому раньше условию, обозначен через k'.

Формула (8') удобна для вычисления значения функции $\wp$ при положительном дискриминанте и при мнимом значении независимой переменной.

Если дискриминант отрицательный, то функцию $\wp(vi)$ удобно вычислять по формуле:

$$\wp(vi)=e_2-H\frac{1+\operatorname{cn}(2u\sqrt{H}, k')}{1-\operatorname{cn}(2u\sqrt{H}, k')}, \tag{12'}$$

легко получаемой из (12). Здесь:

$$k'=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3e_2}{4H}}.$$

Пример 1. Вычислить $\wp\left(u;\ \frac{39}{4},\ \frac{35}{8}\right)$ при $u=0{,}4536$. В данном случае $g_2=\frac{39}{4}$; $g_3=\frac{35}{8}$. Дискриминант $\Delta=g_2^3-27g_3^2>0$. Корни

$$e_1=\frac{7}{4};\quad e_2=-\frac{1}{2};\quad e_3=-\frac{5}{4};\quad e_1-e_3=3.$$

Согласно (8), находим:

$$\wp\left(0{,}4536;\ \frac{39}{4},\ \frac{35}{8}\right)=-\frac{5}{4}+\frac{3}{\mathrm{sn}^2(0{,}4536\sqrt{3})}.$$

Значение sn $(0{,}4536\cdot\sqrt{3})$ или sn $(0{,}78565)$ вычисляем при модуле, квадрат которого

$$k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}=\frac{1}{4}=\sin^2\theta.$$

Модулярный угол $\theta=30^\circ$.

В табл. 1 находим, что:

амплитуде 43° соответствует аргумент 0,76714,

амплитуде 44° соответствует аргумент 0,78573.

Из пропорции

$$\frac{\varphi-43^\circ}{44^\circ-43^\circ}=\frac{0{,}78565-0{,}76714}{0{,}78573-0{,}76714}$$

имеем:

$$\varphi=43^\circ\,59'45''.$$

Теперь можем написать, что

$$\wp\left(0{,}4536;\ \frac{39}{4},\ \frac{35}{8}\right)=-\frac{5}{4}+\frac{3}{\sin^2 43^\circ\,59'45''}.$$

Вычисляя величину $a=\frac{3}{\sin^2 43^\circ\,59'45''}$, будем иметь:

$$\lg a=0{,}79364;\quad a=6{,}2179,$$

т. е.

$$\wp\left(0{,}4536;\ \frac{39}{4},\ \frac{35}{8}\right)=4{,}9679.$$

Пример 2. Вычислить $\wp\,(u;\ -24,\ -28)$ при $u=0{,}1345$. Здесь $g_2=-24$; $g_3=-28$; $\Delta<0$. Корни

$$e_1=\frac{1+3i\sqrt{3}}{2};\quad e_2=-1;\quad e_3=\frac{1-3i\sqrt{3}}{2};$$

далее:

$$m=\frac{1}{2};\quad n=\frac{3\sqrt{3}}{2};\quad H=\sqrt{9m^2+n^2}=3.$$

Согласно формуле (12):

$$\wp\,(0{,}1345;-24,-28)=-1+3\,\frac{1+\mathrm{cn}\,0{,}269\sqrt{3}}{1-\mathrm{cn}\,0{,}269\sqrt{3}}.$$

Квадрат модуля

$$k^2=\frac{1}{2}-\frac{3e_2}{4H}=\frac{3}{4};\quad \sin^2\theta=\frac{3}{4};\quad \theta=60^\circ.$$

Находим амплитуду, соответствующую модулярному углу 60° и аргументу $0{,}269\sqrt{3}$, или 0,46592. Пользуясь табл. 1 и интерполируя найдем, что $\varphi=26^\circ\,0'\,23''$ и, следовательно:

$$\wp(0{,}1345;-24,-28)=-1+3\,\frac{1+\cos 26^\circ\,0'23''}{1-\cos 26^\circ\,0'23''}=-1+3\,\mathrm{ctg}^2\,13^\circ0'11{,}5''.$$

Вычисляем: $a=3\,\mathrm{ctg}^2\,13^\circ\,0'\,11{,}5''$. Имеем: $\lg a=1{,}75018$; $a=56{,}258$; $\wp(0{,}1345;\ -24,\ -28)=55{,}258$.

Пример 3. Вычислить $\wp\,(u;\ 4{,}552,\ \ 0{,}552)$ при $u=24{,}683$. Здесь $g_2=4{,}552$; $g_3=0{,}552$; $\Delta=86{,}093>0$.

Пользуемся формулой (8).

Корнями трехчлена

$$4z^3-4{,}552z-0{,}552$$

служат:

$$e_1=1{,}1229;\quad e_2=-0{,}1229;\quad e_3=-1.$$

Поэтому

$$u\cdot\sqrt{e_1-e_3}=35{,}9631.$$

Для модуля k имеем:

$$k^2=\sin^2\theta=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}=0{,}41317,$$

отсюда $\theta=40^\circ$. Теперь имеем:

$$\wp(24{,}683)=-1+\frac{2{,}1229}{\mathrm{sn}^2\,(35{,}9631)}.$$

Чтобы вычислить sn (35,9631), выписываем, согласно табл. 3, полный интеграл K, соответствующий модулярному углу 40°. Имеем:

$$K=1{,}78677.$$

Период функции sn равен $4K$, т. е. равен 7,14708. Следовательно

$$\mathrm{sn}\,(35{,}9631)=\mathrm{sn}\,(4K\cdot5+0{,}2277)=\mathrm{sn}\,(0{,}2277).$$

В табл. 1 находим, что аргументу 0,2277 при модулярном угле 40° соответствует амплитуда $\varphi=13^\circ$. Стало быть

$$\mathrm{sn}(0{,}2277)=\sin 13^\circ.$$

Вследствие этого

$$\wp\,(24{,}683)=-1+\frac{2{,}1229}{\sin^2 13^\circ}=40{,}952.$$

Пример 4. Вычислить $\wp\left(u;\ \frac{39}{196},\ -\frac{5}{392}\right)$ при $u=1{,}0046\,i$.

Здесь инварианты $g_2=\frac{39}{196}$; $g_3=-\frac{5}{392}$. Поэтому корни

$$e_1=\frac{5}{28};\quad e_2=\frac{1}{14};\quad e_3=-\frac{1}{4}.$$

Дискриминант $\Delta>0$.

Модуль k определяется из равенства:

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{3}{4}.$$

Модулярный угол $\theta = 60°$.

При положительном дискриминанте и при мнимом значении u можно вычислять функцию $\wp$ по формуле (8′). Можно поступать и так: на основании (8) имеем:

$$\wp(1{,}0046i) = -\frac{1}{4} + \frac{3}{7\,\mathrm{sn}^2\left(1{,}0046i\sqrt{\frac{3}{7}}\right)}.$$

Но, согласно формуле (§ 28):

$$\mathrm{sn}\left(1{,}0046i\sqrt{\frac{3}{7}};\ k\right) = \mathrm{sn}\,(0{,}65766i,\ k) = i\,\frac{\mathrm{sn}\,(0{,}65766,\ k')}{\mathrm{cn}\,(0{,}65766,\ k')},$$

где $k = \sin 60°$ и $k' = \sin 30°$.

Теперь из уравнения $\sin\varphi = \mathrm{sn}\,(0{,}65766,\ k')$ вычисляем амплитуду φ Пользуясь табл. 1, составляем пропорцию:

$$\frac{\varphi - 37°}{38° - 37°} = \frac{0{,}65766 - 0{,}65655}{0{,}67487 - 0{,}65655},$$

из которой

$$\varphi = 37°3'38''.$$

Вследствие этого

$$\mathrm{sn}\left(1{,}0046\,i\sqrt{\frac{3}{7}}\right) = i\,\mathrm{tg}\,37°3'38''$$

и, стало быть:

$$\wp(1{,}0046i) = -\frac{1}{4} - \frac{3}{7\,\mathrm{tg}^2\,37°\,3'\,38''} = -1{,}0014.$$

Пример 5. Вычислить периоды функции $\wp(u;\,0,\,4)$ и ее значение при $u = 1{,}8696$.

Здесь $\Delta = -432 < 0$; корни

$$e_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2};\quad e_2 = 1;\quad e_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2};\quad H = \sqrt{3};\quad \theta = 15°;$$

$$\theta' = 75°;\quad K = 1{,}59814;\quad K' = 2{,}76806.$$

Полупериоды:

$$\omega_2 = 1{,}2143;\quad \omega_2' = 2{,}1033i.$$

При отрицательном дискриминанте и мнимом значении u вычисляем $\wp u$ по формуле (12′), согласно которой

$$\wp(1{,}8696i) = 1 - \sqrt{3}\,\frac{1+\mathrm{cn}\,3{,}739\sqrt[4]{3}}{1-\mathrm{cn}\,3{,}739\sqrt[4]{3}} = 1 - \sqrt{3}\,\frac{1+\mathrm{cn}\cdot 4{,}9209}{1-\mathrm{cn}\,4{,}9209}.$$

Вычисляем $\mathrm{cn}\,4{,}9209$. Для этого заметим, что

$$\mathrm{cn}\,4{,}9209 = \mathrm{cn}\,(2{,}76806\cdot 2 - 0{,}61522) = -\mathrm{cn}\,0{,}61522.$$

И поэтому

$$\wp(1{,}8696i) = 1 - \sqrt{3}\,\frac{1-\mathrm{cn}\,0{,}61522}{1+\mathrm{cn}\,0{,}61522}.$$

Обращаемся к табл. 1, в которой находим, что аргументу 0,60802 соответствует амплитуда 33°, аргументу 0,62865 соответствует амплитуда 34°.

Пропорция

$$\frac{\varphi - 33°}{34° - 33°} = \frac{0{,}61522 - 0{,}60802}{0{,}62865 - 0{,}60802}$$

дает:

$$\varphi = 33°20'56''.$$

Теперь имеем:

$$\wp(1{,}8696i) = 1 - \sqrt{3}\,\frac{1-\cos 33°20'56''}{1+\cos 33°20'56''} = 1 - \sqrt{3}\ \mathrm{tg}^2\,16°40'28''$$

или

$$\wp(1{,}8696i) = 0{,}84461.$$

§ 81. Формула сложения для функции $\wp u$

Устанавливая теорему сложения для функции $\wp u$, будем исходить из уравнения

$$\frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} + \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2y - g_3}} = 0,$$

в котором положим:

$$4x^3 - g_2x - g_3 = X;\quad 4y^3 - g_2y - g_3 = Y.$$

Вследствие этого будем иметь:

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0.$$

Положим далее, что $\dfrac{dx}{\sqrt{X}} = dt$ и тем самым $\dfrac{dy}{\sqrt{Y}} = -dt$. В таком случае:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = X;\quad \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = Y.$$

Продиференцируем эти равенства по t и результаты сократим на $\dfrac{dx}{dt}$ $\dfrac{dy}{dt}$. Это даст:

$$2\,\frac{d^2x}{dt^2} = 12\,x^2 - g_2;\quad 2\,\frac{d^2y}{dt^2} = 12y^2 - g_2.$$

Теперь введем обозначения:

$$x + y = p;\quad x - y = q;$$

в таком случае:

$$\frac{d^2p}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} = 6\,(x^2 + y^2) - g_2,$$

или

$$\frac{d^2p}{dt^2} = 3\,(p^2 + q^2) - g_2.$$

Вместе с тем, произведение производных

$$\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dq}{dt}=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=4(x^3-y^3)-g_2(x-y),$$

или

$$\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dq}{dt}=q(3p^2+q^2-g_2).$$

Из этих формул выводим равенство:

$$q\frac{d^2p}{dt^2}-\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dq}{dt}=2q^3,$$

умножая обе части которого на $\frac{2}{q^3}\cdot\frac{dp}{dt}$, получим:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\left(\frac{dp}{dt}\right)^2}{q^2}\right]=\frac{d(4p)}{dt}.$$

Интегрирование дает:

$$\frac{1}{q^2}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2=4p+4\alpha,$$

или

$$\frac{dp}{dt}=2q\sqrt{p+\alpha},$$

где α — произвольная постоянная. Но

$$\frac{dp}{dt}=\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=\sqrt{X}-\sqrt{Y}.$$

Следовательно:

$$\sqrt{X}-\sqrt{Y}=2(x-y)\sqrt{x+y-\alpha},$$

или

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{X}-\sqrt{Y}}{x-y}\right)^2=x+y+\alpha. \tag{30}$$

Но, с другой стороны, если обозначим

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}=u;$$

$$\int\frac{dy}{\sqrt{4y^3-g_2y-g_3}}=v,$$

то получим:

$$u+v=\beta, \tag{31}$$

где β — новая произвольная постоянная и, кроме того:

$$x=\wp u;\quad y=\wp v.$$

Теперь, подобно тому как это было сделано в § 25 при выводе формулы сложения для функции sn, найдем зависимость между постоянными α и β. Положим для этого, что $v=0$. Из (31) будем иметь:

$$\beta=u.$$

Но так как при $v=0$ функция $\wp v=\infty$, то $y=\infty$ и (30), написанное в виде:

$$\alpha+x=\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{Y}-\sqrt{X}}{y-x}\right)^2-y,$$

принимает неопределенную форму $\infty-\infty$. Эту неопределенность можно раскрыть, полагая $y=t^2$ и разлагая выражение

$$\frac{\sqrt{Y}-\sqrt{X}}{y-x}$$

в ряд. Сначала заметим, что

$$\sqrt{Y}=2t^3\sqrt{1-\frac{g_2}{4t^4}-\frac{g_3}{4t^6}}=2t^3\left(1+\frac{A}{t^4}+\ldots\right).$$

Следовательно:

$$\frac{1}{2}(\sqrt{Y}-\sqrt{X})=t^3\left(1-\frac{\sqrt{X}}{2}\cdot\frac{1}{t^3}+\frac{A}{t^4}+\ldots\right).$$

Далее:

$$\frac{1}{y-x}=\frac{1}{t^2\left(1-\frac{x}{t^2}\right)}=\frac{1}{t^2}\left(1+\frac{x}{t^2}+\frac{x^2}{t^4}+\ldots\right).$$

Перемножим два последних равенства и обе части вновь полученного равенства возведем в квадрат. Результат будет такой:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{Y}-\sqrt{X}}{y-x}\right)^2=t^2\left(1-\frac{\sqrt{X}}{2}\cdot\frac{1}{t^3}+\frac{A}{t^4}+\ldots\right)^2\left(1+\frac{x}{t^2}+\frac{x^2}{t^4}+\ldots\right)^2=$$
$$=t^2\left(1+\frac{x}{t^2}+\frac{B}{t^3}+\ldots\right)^2=t^2\left(1+\frac{2x}{t^2}+\frac{C}{t^3}+\ldots\right)=t^2+2x+\frac{C}{t}+\ldots$$

Теперь уже нетрудно видеть, что при $v=0$, т. е. при $y=t^2=\infty$, будем иметь:

$$\alpha+x=2x,$$

т. е.

$$\alpha=x=\wp u,$$

и, следовательно, связь между постоянными представится в виде:

$$\alpha=\wp(\beta).$$

Заменим в этом равенстве α и β их значениями (30) и (31). Если при этом заметим, что

$$\sqrt{X}=\wp' u \quad\text{и}\quad \sqrt{Y}=\wp' v,$$

то получим:

$$\wp(u+v)+\wp u+\wp v=\frac{1}{4}\left(\frac{\wp' u-\wp' v}{\wp u-\wp v}\right)^2. \tag{32}$$

Равенство это и выражает теорему сложения для функции $\wp$.

Замена в (32) v на $-v$ приводит нас к формуле вычитания:

$$\wp(u-v)+\wp u+\wp v=\frac{1}{4}\left(\frac{\wp'u+\wp'v}{\wp u-\wp v}\right)^2.$$

Если в формулах сложения и вычитания заменим $\wp'u$ и $\wp'v$ их выражениями через $\wp u$ и $\wp v$ по формуле (4), то увидим, что $\wp(u+v)$ и $\wp(u-v)$ выражаются через $\wp u$ и $\wp v$ алгебраически.

Вследствие этого обе приведенные формулы можно назвать алгебраическими формулами сложения и вычитания.

§ 82. Функция $\wp$ от комплексного аргумента

Пользуясь формулой однородности в § 76, мы вывели соотношение:

$$\wp(vi;\ g_2,\ g_3)=-\wp(v;\ g_2-g_3),$$

которое может служить определением функции $\wp$ от чисто мнимого аргумента. Теперь воспользуемся формулой сложения для того, чтобы дать равенство, определяющее функцию $\wp$ от комплексного аргумента.

Представив (32) в виде:

$$\wp(u+v)=\frac{(\wp'u)^2+(\wp'v)^2-2\wp'u\wp'v}{4(\wp u-\wp v)^2}-(\wp u+\wp v),$$

заметим, что

$$(\wp'u)^2=4\wp^3u-g_2\wp u-g_3;\quad (\wp'v)^2=4\wp^3v-g_2\wp v-g_3.$$

Произведя действия, получим:

$$\wp(u+v)=\frac{(4\wp u\wp v-g_2)(\wp u+\wp v)-2g_3-2\wp'u\wp'v}{4(\wp u-\wp v)^2}.$$

Теперь в полученном равенстве заменим v на vi. Если примем во внимание что,

$$\wp'(vi)=i\wp'(v;\ g_2,\ -g_3),$$

то найдем:

$$\wp(u+vi)=-\frac{(4\wp u\wp v+g_2)(\wp u-\wp v)+2g_3+2i\wp'u\wp'v}{4(\wp u+\wp v)^2},$$

где

$$\wp u=\wp(u;\ g_2,\ g_3);\quad \wp v=\wp(v;\ g_2,\ -g_3).$$

Найденное соотношение может служить для определения функции $\wp$ от комплексного аргумента через ее значения от вещественного аргумента.

§ 83. Зависимость между корнями e_1, e_2 и e_3 и полупериодами

1. $\Delta>0$. Из формул (15) и (16) § 77 заключаем, что

$$e_1=\wp\omega_1\quad\text{и}\quad e_3=\wp\omega_3.$$

Замечая, что

$$\int_{e_2}^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}=\int_{e_2}^{e_1}\frac{dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}+\int_{e_1}^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}=\omega_3+\omega_1,$$

выводим:

$$e_2=\wp(\omega_1+\omega_3).$$

Таким образом, в случае $\Delta>0$, имеем:

$$e_1=\wp\omega_1,\quad e_2=\wp(\omega_1+\omega_3),\quad e_3=\wp(\omega_3). \tag{33}$$

2. $\Delta<0$. В этом случае, формулы (21) и (22) дают:

$$e_1=\wp(\omega')\quad\text{и}\quad e_3=\wp(\omega''').$$

Кроме того, из формул (23), (24) выводим:

$$e_2=\wp(\omega_2)=\wp(\omega_2').$$

Итак, в случае $\Delta<0$, имеем:

$$e_1=\wp(\omega'),\quad e_2=\wp(\omega_2)=\wp(\omega_2'),\quad e_3=\wp(\omega'''). \tag{34}$$

§ 84. Результат прибавления пулупериода к независимой переменной функции $\wp u$

1. Основываясь на теореме сложения, выведем для функции $\wp u$ формулы, аналогичные формулам приведения для тригонометрических функций.

В предположении, что $\Delta>0$, перепишем прежде всего уравнение (4) в виде:

$$(\wp'u)^2=4(\wp u-e_1)(\wp u-e_2)(\wp u-e_3) \tag{35}$$

и в нем положим $u=\omega_1$. Если вспомним, что $\wp\omega_1=e_1$ (§ 83), то сейчас же получим:

$$\wp'\omega_1=0.$$

Теперь обратимся к формуле сложения (32).

Полагая $v=\omega_1$, из нее будем иметь:

$$\wp(u+\omega_1)=\frac{1}{4}\cdot\frac{(\wp'u)^2}{(\wp u-e_1)^2}-\wp u-e_1,$$

или, принимая во внимание (35):

$$\wp(u+\omega_1)=\frac{(\wp u-e_2)(\wp u-e_3)}{\wp u-e_1}-\wp u-e_1.$$

Вычтем из обеих частей этого равенства по e_1 и в правой части произведем действия. Это даст:

$$\wp(u+\omega_1)-e_1=\frac{e_2e_3+2e_1^2-(e_1+e_2+e_3)\wp u}{\wp u-e_1}.$$

Но так как

$$e_1+e_2+e_3=0,$$

то

$$\wp(u+\omega_1)-e_1=\frac{e_2e_3+e_1^2+e_1^2}{\wp u-e_1}=\frac{e_2e_3+e_1^2-e_1(e_2+e_3)}{\wp u-e_1},$$

или

$$\wp(u+\omega_1)-e_1=\frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{\wp u-e_1}. \qquad (36)$$

Заметив, что $\wp'(\omega_1+\omega_3)=0$ и $\wp'\omega_3=0$ и, следуя тому же приему, нетрудно найти еще две формулы:

$$\wp(u+\omega_1+\omega_3)-e_2=\frac{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}{\wp u-e_2} \qquad (37)$$

и

$$\wp(u+\omega_3)-e_3=\frac{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}{\wp u-e_3}. \qquad (38)$$

2. Если $\Delta<0$, то, согласно формулам (34):

$$\wp(\omega')=e_1, \quad \wp(\omega_2)=\wp(\omega_2')=e_2, \quad \wp(\omega''')=e_3.$$

Поэтому

$$\wp'(\omega')=\wp'(\omega_2)=\wp'(\omega_2')=\wp'(\omega''')=0.$$

Основываясь на этих равенствах и повторив выкладки, аналогичные предыдущим, получим:

$$\wp(u+\omega')-e_1=\frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{\wp u-e_1}, \qquad (36')$$

$$\wp(u+\omega_2)-e_2=\wp(u+\omega_2')-e_2=\frac{(e_2-e_3)(e_2-e_1)}{\wp u-e_2}, \qquad (37')$$

$$\wp(u+\omega''')-e_3=\frac{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}{\wp u-e_3}. \qquad (38')$$

Эти формулы отличаются от формул (36), (37), (38) только обозначениями. Действительно, периоды $2\omega'$ и $2\omega'''$ играют в случае $\Delta<0$ совершенно ту же роль, что и $2\omega_1$ и $2\omega_3$ в случае $\Delta>0$. Что касается ω_2 и ω_2', то имеем, по формулам § 78:

$$\omega_2=\omega'+\omega''' \quad \text{и} \quad \omega_2'=-\omega'+\omega'''=\omega_2-2\omega'$$

и так как $2\omega'$ есть период $\wp u$, то

$$\wp(u+\omega_2')-e_2=\wp(u+\omega_2-2\omega')-e_2=\wp(u+\omega_2)-e_2.$$

Пример. Вычислить $\wp(\omega_1+\frac{1}{3}\omega_3;\ 15,\ 11)$.

Так как инварианты $g_2=15$; $g_3=11$, то корни

$$e_1=\frac{1+2\sqrt{3}}{2}; \quad e_2=-1; \quad e_3=\frac{1-2\sqrt{3}}{2}.$$

Квадрат модуля

$$k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}=\frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2},$$

т. е.

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}}.$$

Отсюда заключаем, что модулярный угол $\theta=15^\circ$.

Полагая в (36) $u=\frac{\omega_3}{3}$, можем написать:

$$\wp\left(\omega_1+\frac{\omega_3}{3}\right)=e_1+\frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{\wp\frac{\omega_3}{3}-e_1}.$$

Но согласно (8):

$$\wp\frac{\omega_3}{3}=e_3+\frac{e_1-e_3}{\mathrm{sn}^2\left(\frac{\omega_3}{3}\sqrt{e_1-e_2}\right)}=e_3+\frac{e_1-e_3}{\mathrm{sn}^2\left(\frac{K'i}{3}\right)}.$$

Следовательно:

$$\wp\left(\omega_1+\frac{\omega_3}{3}\right)=e_1+(e_1-e_2)\frac{\mathrm{sn}^2\frac{K'i}{3}}{\mathrm{cn}^2\frac{K'i}{3}}$$

или

$$\wp\left(\omega_1+\frac{\omega_3}{3}\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{3}+\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)\frac{\mathrm{sn}^2\frac{K'i}{3}}{\mathrm{cn}^2\frac{K'i}{3}}.$$

Если выражения $\mathrm{sn}\,\frac{K'i}{3}$ и $\mathrm{cn}\,\frac{K'i}{3}$ преобразуем, согласно формулам (64) и (65) § 28, то найдем:

$$\wp\left(\omega_1+\frac{1}{3}\omega_3\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{3}-\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)\mathrm{sn}^2\left(\frac{K'}{3},\ k'\right),$$

где $k'=\sin 75^\circ$.

Здесь $K'=2{,}76806$ (согласно табл. 3). Теперь из уравнения $\sin\varphi=\mathrm{sn}\,(0{,}92269,\ k')$ находим амплитуду φ. Пользуясь табл. 1, можем составить пропорцию:

$$\frac{\varphi-47^\circ}{48^\circ-47^\circ}=\frac{0{,}92269-0{,}92124}{0{,}94610-0{,}92124};$$

отсюда $\varphi=47^\circ3'30''$.

Следовательно:

$$\wp\left(\omega_1+\frac{1}{3}\omega_3\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{3}-\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)\sin^2 47^\circ 3'\,30''.$$

Произведя вычисления, получим:

$$\wp\left(\omega_1+\frac{1}{3}\omega_3\right)=\frac{1}{2}.$$

§ 85. График функции $\wp u$ и ее первая производная

Исходя из уравнения (4), находим, что первая производная

$$\wp' u = \pm 2\sqrt{(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3)},$$

в случае, когда $\Delta > 0$, и

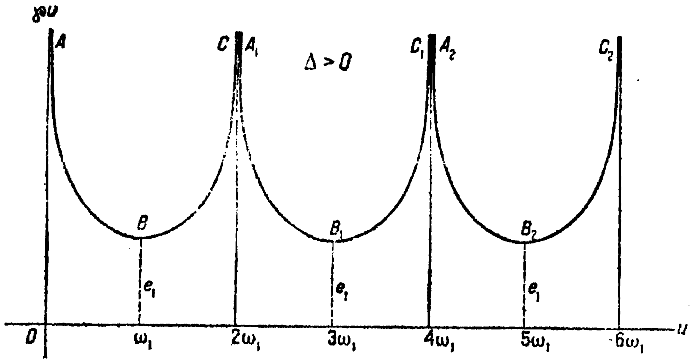
$$\wp' u = \pm 2\sqrt{(\wp u - e_2)[(\wp u - m)^2 + n^2]},$$

в случае, когда $\Delta < 0$.

На основании данного в § 71 определения функции $\wp u$ мы знаем, что

$$\wp(0) = \infty.$$

В первом случае, при $\Delta > 0$, корни вещественные и $\wp\omega_1 = e_1$. Мы видим, что, в то время как переменная u возрастает от 0 до ω_1, — функция $\wp u$ убывает от бесконечного значения до e_1. Производная $\wp' u$



Фиг. 29.

все время вещественна и ввиду убывания функции отрицательна, так что при $0 \leqslant u \leqslant \omega_1$

$$\wp' u = -2\sqrt{(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3)};$$

график функции $\wp u$ в этом промежутке имеет вид кривой AB (фиг. 29).

Для дальнейшего исследования хода функции заметим, что вследствие четности функции $\wp u$ можно написать, что

$$\wp(2\omega_1 - u) = \wp(u - 2\omega_1),$$

а вследствие ее периодичности:

$$\wp(u - 2\omega_1) = \wp u.$$

Следовательно:

$$\wp(2\omega_1 - u) = \wp u.$$

Отсюда явствует, что при изменении переменной u от ω_1 до $2\omega_1$ значения функции $\wp u$ будут те же, что и для промежутка $(0, \omega_1)$, но

только в обратном порядке. График представится кривой BC. Так как функция $\wp u$ возрастает, то при $\omega_1 < u < 2\omega_1$ будем иметь:

$$\wp' u = +2\sqrt{(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3)}.$$

При $u = \omega_1$, как известно, $\wp'\omega_1 = 0$ (§ 84) и функция $\wp u$ достигает своего минимума.

Так как периодом служит $2\omega_1$, то дальнейший ход функции $\wp u$ представится кривыми:

$$A_1B_1C_1, \quad A_2B_2C_2, \quad \ldots$$

Вследствие того, что $e_1 > 0$, все эти кривые расположены выше оси Ou.

В случае $\Delta < 0$ ход функции $\wp u$ будет тот же.

В § 83 мы имели, что $\wp\omega_2 = e_2$, $\wp'\omega_2 = 0$. Функция $\wp u$ будет иметь при $u = \omega_2$ минимальное значение, равное e_2. На фигуре индексы 1 должны быть заменены на индексы 2. Так как e_2 может быть как положительным, так и отрицательным, то кривые, представляющие изменение функции, могут не пересекать, но могут и пересекать ось Ou.

Пример 1. Вычислить значение производной

$$\wp'(u; -24, -28)$$

при $u = 0{,}1345$.

В § 80 мы уже видели, что при $g_2 = -24$ и $g_3 = -28$ дискриминант $\Delta < 0$. Кроме того:

$$e_1 = \frac{1 + 3i\sqrt{3}}{2}; \quad e_2 = -1; \quad e_3 = \frac{1 - 3i\sqrt{3}}{2};$$

$$m = \frac{1}{2}; \quad n = \frac{3\sqrt{3}}{2}; \quad H = 3.$$

Вычисление производим по формуле:

$$\wp' u = \pm 2\sqrt{(\wp u - e_2)[(\wp u - m)^2 + n^2]}.$$

При $u = 0{,}1345$, как было найдено в § 80:

$$\wp u = 55{,}258.$$

Внося значения $\wp u$, e_2, m и n в написанное равенство, находим после выполнения действий:

$$\wp' u = \pm 827{,}64.$$

Чтобы ориентироваться в выборе знака, вычисляем вещественный полупериод ω_2.

Так как модулярный угол $\theta = 60°$, то, согласно табл. 3, имеем:

$$K = 2{,}15652.$$

Следовательно:

$$\omega_2 = \frac{K}{\sqrt{H}} = \frac{2{,}15652}{\sqrt{3}} = 1{,}245.$$

Так как

$$0 < 0{,}1345 < 1{,}245,$$

то

$$\wp'(0{,}1345) = -827{,}64.$$

Пример 2. Вычислить значение производной

$$\wp'(u;\ 4{,}552,\ 0{,}552)$$

при $u = 24{,}683$.

В § 80 было найдено, что для функции $\wp(u;\ 4{,}552,\ 0{,}552)$ дискриминант $\Delta > 0$ и

$$e_1 = 1{,}1229; \quad e_2 = -0{,}1229; \quad e_3 = -1;$$

$$\wp(24{,}683) = 40{,}952.$$

Воспользовавшись первой из формул, приведенных в начале этого параграфа, находим:

$$\wp'(24{,}683) = \pm 2\sqrt{39{,}8291 \cdot 41{,}0749 \cdot 41{,}952}.$$

Чтобы решить вопрос о том, какой знак удержать перед корнем, вычислим вещественный полупериод рассматриваемой функции $\wp$. Этот полупериод:

$$\omega_1 = \frac{K}{\sqrt{e_1 - e_3}} = \frac{1{,}78677}{\sqrt{2{,}1229}} = 1{,}2263.$$

Но

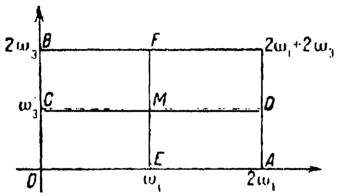
$$1{,}2263 \cdot 20 < 24{,}683 < 1{,}2263 \cdot 21.$$

Аргумент $u = 24{,}683$ заключен в интервале $(20\omega_1;\ 21\omega_1)$. В этом интервале функция $\wp u$ убывает. Следовательно, перед корнем удерживаем знак минус. Произведя действия, окончательно имеем:

$$\wp'(24{,}683) = -523{,}95.$$

§ 86. Поведение функции $\wp u$ в комплексной плоскости

Для того чтобы изучить поведение $\wp u$ в комплексной плоскости, мы можем, пользуясь ее двоякопериодичностью, ограничиться изучением ее поведения в основном параллелограме периодов. При этом мы будем предполагать, как и всюду в этой главе, что инварианты g_2 и g_3 вещественны.



Фиг. 30

1. $\Delta > 0$. В этом случае за основные периоды мы принимаем величины $2\omega_1$ и $2\omega_3$. Так как $2\omega_1$ является вещественным положительным числом, а $2\omega_3$ — числом чисто мнимым с положительным коэфициентом при i, то параллелограм периодов представляет собой прямоугольник с аффиксами вершин: 0, $2\omega_1$, $2\omega_1 + 2\omega_3$ и $2\omega_3$ (фиг. 30). Заставим аргумент u изменяться вдоль контура параллелограма. При этом, когда u, оставаясь вещественным, будет возрастать от 0 до ω_1, $\wp u$, будучи также вещественным, будет убывать от ∞ до $e_1 = \wp\omega_1$. При дальнейшем возрастании u от ω_1 до $2\omega_1$, $\wp u$ будет возрастать от e_1 до ∞. Очевидно, что производная $\wp' u$ при возрастании u от 0 до $2\omega_1$ вещественна и, обращаясь в нуль, при $u = \omega_1$, меняет знак с $-$ на $+$.

Пусть теперь u, принимая чисто мнимые значения $u = vi$ (где v вещественно), непрерывно изменяется от 0 до $2\omega_3$. Так как

$$\wp(vi;\ g_2, g_3) = -\wp(v_1;\ g_2, -g_3),$$

то мы приходим к рассмотрению функции $\wp(v;\ g_2, -g_3)$ от вещественного аргумента v, возрастающего от 0 до $\frac{2\omega_3}{i}$. Замечая, что дискриминант $g_2^3 - 27(-g_3)^2$ сохраняет прежнее значение и что корни многочлена $4z^3 - g_2 z + g_3$, суть $-e_3, -e_2, -e_1$ $(-e_3 > -e_2 > -e_1)$, мы можем утверждать, что $\wp(v;\ g_2, -g_3)$ уменьшается от ∞ до $-e_3 = \wp\left(\frac{\omega_3}{i};\ g_2, -g_3\right)$ и затем, при дальнейшем изменении u, возрастает от $-e_3$ до $+\infty$. Следовательно, $\wp(u;\ g_2, g_3)$ при u чисто мнимом, оставаясь вещественным, возрастает от $-\infty$ до $e_3 = \wp(\omega_3;\ g_2, g_3)$, а затем начинает убывать от e_3 до $-\infty$. Производная $\wp' u = \lim\limits_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta\wp}{\Delta u}$ при этом чисто мнимая (так как $\Delta\wp$ вещественное число, а Δu чисто мнимое) и обращается в нуль при $u = \omega_3$, причем при переходе через ω_3 вещественная функция $\frac{\wp' u}{i}$ меняет знак с $-$ на $+$ (так как сначала $\Delta\wp > 0$, а затем $\Delta\wp < 0$; что касается $i\Delta u = -\Delta v$, то это число все время меньше нуля).

Рассмотрим еще поведение функции $\wp u$ на средних линиях параллелограма периодов.

Пусть сначала аргумент функции $\wp$ имеет вид $\omega_3 + v$, где v вещественно и меняется от 0 до $2\omega_1$. По формуле (38), имеем

$$\wp(v + \omega_3) = e_3 + \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}{\wp v - e_3}.$$

Следовательно, $\wp(v + \omega_3)$, оставаясь вещественным, сначала возрастает (так как $\wp v$ убывает) от $\wp(\omega_3) = e_3$ до $\wp(\omega_1 + \omega_3) = e_2$, а затем убывает до $\wp(\omega_3 + 2\omega_1) = e_3$. При этом производная $\wp'(\omega_3 + v) = \lim\limits_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta\wp}{\Delta v}$ вещественна и, обращаясь в нуль при $v = \omega_1$ $[\wp'(\omega_3 + \omega_1) = 0]$, меняет знак с $+$ на $-$.

Пусть, наконец, аргумент функции $\wp$ имеет вид $\omega_1 + vi$, где v — вещественное число, изменяющееся от 0 до $\frac{2\omega_3}{i}$. По формуле (36) имеем:

$$\wp(\omega_1 + vi) = e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{\wp(vi) - e_1}.$$

Таким образом $\wp(vi + \omega_1)$, оставаясь вещественным (мы уже видели, что $\wp vi$ вещественно при вещественном v), сначала убывает (так как

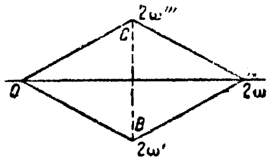
$\wp vi$ возрастает) от $\wp(\omega_1)=e_1$ до $\wp(\omega_1+\omega_3)=e_2$, а затем возрастает от e_2 до $\wp(\omega_1+2\omega_3)=e_1$. При этом производная $\wp'(vi+\omega_1)=\lim\limits_{\Delta v\to 0}\frac{\Delta\wp}{\Delta(vi)}$, оставаясь чисто мнимой, обращается в нуль при $v=\frac{\omega_3}{i}$ $[\wp'(\omega_1+\omega_3)=0]$, причем, проходя через нуль, вещественная функция $\frac{\wp'(vi+\omega_1)}{i}$ меняет знак с $+$ на $-$.

Из этого исследования вытекает, что $\wp u$ принимает вещественные значения на контуре и на средних линиях основного параллелограма периодов. При этом (если исключить из параллелограма, как это мы делали в главе I, стороны его, не проходящие через начало координат) значения $\wp u$, заключенные между $-\infty$ и e_3, принимаются лишь на стороне OB (фиг. 30), значения между e_3 и e_2 — лишь на средней линии CD, значения между e_2 и e_1 — на средней линии EF и, наконец, значения, заключенные между e_1 и $+\infty$, на стороне OA. Во всех остальных точках параллелограма $\wp u$ принимает мнимые значения. В вершинах параллелограма (из которых к основному параллелограму причисляется лишь вершина с аффиксом 0) $\wp u$ имеет полюсы, как увидим ниже, двойные. Нули $\wp u$ (функция $\wp u$ имеет два нуля в основном параллелограме), расположены на одной из средних линий, именно на линии CD, если e_2 и e_3 разных знаков, и на линии EF, если e_1 и e_2 разных знаков. Эти нули, вообще простые, сливаются в один двойной нуль в центре параллелограма, в случае, когда $e_2=0$.

2. $\Delta<0$. В этом случае за основные периоды принимаем: $2\omega_1=\omega_2-\omega_2'$ и $2\omega'''=\omega_2+\omega_2'$. Параллелограм периодов представляет здесь ромб (фиг. 31) с аффиксами вершин:

$$0,\ 2\omega'=\omega_2-\omega_2';\quad 2\omega_2=2\omega'+2\omega''';\quad 2\omega'''=\omega_2+\omega_2'.$$

Заставим u меняться вдоль диагоналей. Пусть сначала u возрастает от 0 до $2\omega_2$. Тогда, как мы видели выше, $\wp u$, будучи вещественной, будет сначала убывать от ∞ до $e_2=\wp\omega_2$, а затем возрастать от e_2 до ∞. Производная $\wp' u$ при этом будет также вещественна и, проходя через нуль, при $u=\omega_2$ меняет знак с $-$ на $+$.



Фиг. 31.

Пусть теперь точка, изображающая аргумент, описывает вторую диагональ. Мы можем представить тогда аффикс этой точки в виде: $\omega_2+v_1 i$, где вещественное число v_1 меняется от $-\frac{\omega_2'}{i}$ до $+\frac{\omega_2'}{i}$. Так как

$$\wp(\omega_2+v_1 i;\ g_2,\ g_3)=\wp(v_1 i+\omega'_2;\ g_2,\ g_3)$$

(значения аргумента: $\omega_2+v_1 i$ и $v_1 i+\omega_2'$ отличаются на величину периода $2\omega'=\omega_2-\omega_2'$) и $v_1 i+\omega_2'$, будучи чисто мнимым, меняется от 0 до $2\omega_2'$, когда v_1 меняется от $-\frac{\omega_2'}{i}$ до $+\frac{\omega_2'}{i}$, то нам достаточно проследить изменение $\wp(vi,\ g_2,\ g_3)$, когда вещественное переменное v меняется от 0 до $\frac{2\omega_2'}{i}$. Но

$$\wp(vi;\ g_2,\ g_3)=-\wp(v;\ g_2,\ -g_3)$$

и так как дискриминант $\wp(v;\ g_2,-g_3)$ равен дискриминанту $\wp(v;\ g_2,\ g_3)$ (т. е. также отрицателен), а корни многочлена $4z^3-g_2z+g_3$ отличаются знаками от корней $4z^3-g_2z-g_3$ и, следовательно, вещественный корень равен $-e_2$, то при изменении v от 0 до $\frac{2\omega_2'}{i}$, $\wp(v;\ g_2,-g_3)$ сначала убывает от $+\infty$ до $-e_2=\wp\left(\frac{\omega_2'}{i};\ g_2,-g_3\right)$, а затем возрастает до $+\infty$. Поэтому $\wp(vi;\ g_2,\ g_3)$, сначала возрастает от $-\infty$ до $e_2=\wp(\omega_2';\ g_2,g_3)=\wp(\omega_2;\ g_2,\ g_3)$, а затем убывает до $-\infty$. Производная $\wp'$ остается при этом чисто мнимой. Знак коэфициента при i в ее выражении меняется с $-$ на $+$, когда она переходит через нуль, при $v=\frac{\omega_2'}{i}$ (или, возвращаясь ко второй диагонали основного параллелограма, при $v_1=0$).

Таким образом в случае $\Delta<0$, $\wp u$ принимает вещественные значения на диагоналях основного параллелограма. При этом на диагонали OA она принимает значения от e_2 до ∞, а на диагонали BC — от $-\infty$ до e_2. Во всех остальных точках параллелограма $\wp u$ принимает мнимые значения.

В вершинах параллелограма (из них к основному параллелограму причисляется лишь точка 0) $\wp u$ имеет полюса (и притом, как можно показать, двойные). Внутри параллелограма $\wp u$ имеет два нуля, расположенные на диагонали OA, если $e_2<0$, и на диагонали BC, если $e_2>0$. Эти нули, вообще простые, сливаются в один двойной нуль в центре параллелограма в случае, когда $e_2=0$.

§ 87. Вычисление аргумента u, когда дано $\wp(u;\ g_2,\ g_3)$

Пусть дано, что $\wp(u;\ g_2,\ g_3)=a$. Требуется вычислить аргумент u. Прежде всего вычисляем дискриминант:

$$\Delta=g_2^3-27g_3^2$$

и корни:

$$e_1,\quad e_2\quad \text{и}\quad e_3.$$

Рассмотрим такие случаи.

I случай. $\Delta>0$ и $a>e_1$.

Переписав формулу (8) в виде:

$$\operatorname{sn}(u_0\sqrt{e_1-e_3})=\pm\sqrt{\frac{e_1-e_3}{\wp u_0-e_3}}=\pm\sqrt{\frac{e_1-e_3}{a-e_3}},$$

положим:

$$\varphi=\operatorname{am}(u_0\sqrt{e_1-e_3}).$$

В таком случае будем иметь:

$$\sin\varphi = \pm\sqrt{\frac{e_1 - e_3}{a - e_3}}. \tag{39}$$

Отсюда находим амплитуду φ.

Модулярный угол θ находим из равенства:

$$\sin^2\theta = k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}. \tag{40}$$

Зная φ и θ, воспользуемся табл. 1 и найдем соответствующий им аргумент, который обозначим через u_1. Будем иметь:

$$u_0 \cdot \sqrt{e_1 - e_3} = u_1, \tag{41}$$

откуда находим u_0. Общая формула, дающая все значения аргумента u, такова:

$$u = \pm u_0 + 2m\omega_1 + 2n\omega_3,$$

где m и n — произвольные целые числа. Полупериоды ω_1 и ω_3 вычисляем по формулам:

$$\omega_1 = \frac{K}{\sqrt{e_1 - e_3}}; \quad \omega_3 = \frac{K'i}{\sqrt{e_1 - e_3}},$$

как указано в § 78.

II случай. $\Delta > 0$ и $e_2 > a > e_3$.

Мы уже знаем, что все значения функции $\wp u$, заключающиеся между e_2 и e_3, получаются при изменении аргумента u вдоль средней линии параллелограма от ω_3 до $\omega_1 + \omega_3$ или от $\omega_1 + \omega_3$ до $2\omega_1 + \omega_3$. Следовательно, одно из значений аргумента u имеет вид: $v + \omega_3$, где $\omega_1 > v > 0$, так что

$$\wp u = \wp(v + \omega_3) = a.$$

Применяя формулу (38), будем иметь:

$$\wp(v + \omega_3) = e_3 + \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}{\wp v - e_3} = a,$$

откуда

$$\wp v = e_3 + \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}{a - e_3} > e_1. \tag{42}$$

Вычислив v по способу, указанному в предыдущем случае, будем знать u:

$$u = v + \omega_3.$$

III случай. $\Delta > 0$ и $a < e_3$.

Все вещественные значения $\wp u$, меньшие e_3, принимаются на стороне основного параллелограма при изменении аргумента от 0 до ω_3 или от ω_3 до $2\omega_3$. Следовательно, одно из значений аргумента u имеет вид:

$$u = vi\left(0 < v < \frac{\omega_3}{i}\right).$$

Имеем:

$$\wp u = \wp(vi) = a,$$

но на основании формулы (8′) § 80 мы знаем, что:

$$\wp(v_0 i;\ g_2,\ g_3) = -\wp(v_0;\ g_2, -g_3) = e_1 - \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2(v_0\sqrt{e_1 - e_3}, k')} = a.$$

Следовательно:

$$\operatorname{sn}^2(v_0\sqrt{e_1 - e_3}, k') = \sin^2\varphi' = \frac{e_1 - e_3}{e_1 - a} < 1,$$

откуда определяем амплитуду φ'.

Модулярный угол определяется равенством:

$$\sin^2\theta' = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}.$$

Пользуясь табл. 1, находим аргумент v_1, соответствующий модулярному углу θ' и амплитуде φ'. Далее имеем:

$$v_0\sqrt{e_1 - e_3} = v_1.$$

Отсюда, получив v_0, сможем написать и общую формулу для v и для u.

IV случай. $\Delta > 0$ и $e_1 > a > e_2$.

В этом случае одно из значений аргумента u должно иметь вид

$$u = \omega_1 + vi, \quad \left(0 < v < \frac{\omega_3}{i}\right).$$

Воспользовавшись формулой (36), приведем вопрос к предыдущему случаю.

V случай. $\Delta < 0$ и $a > e_2$.

Пользуясь формулой (12), имеем:

$$\operatorname{cn}(2u_0\sqrt{H}) = \frac{a - e_2 - H}{a - e_2 + H}.$$

Положим, что $\varphi = \operatorname{am}(2u_0\sqrt{H})$. В таком случае:

$$\cos\varphi = \frac{a - e_2 - H}{a - e_2 + H}.$$

Отсюда определяем амплитуду φ. Модулярный угол определяем из равенства:

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2} - \frac{3e_2}{4H}.$$

Зная φ и θ, в табл. 1 находим соответствующий аргумент u_1, причем

$$2u_0\sqrt{H} = u_1.$$

Отсюда получим u_0. Общая формула:

$$u = \pm u_0 + 2m\omega' + 2n\omega''',$$

где m и n — произвольные целые числа.

VI случай. $\Delta < 0$ и $a < e_2$.

В этом случае $u = \omega_2 + vi$. Имеем случай, аналогичный IV.

§ 88. Примеры

Пример 1. Вычислить аргумент u, если известно, что

$$\wp(u;\ 24{,}96, -17{,}92) = 60{,}377.$$

Здесь дискриминант $\Delta > 0$. Корни

$$e_1 = 2;\quad e_2 = 0{,}8;\quad e_3 = -2{,}8.$$

Так как $a = 60{,}377 > e_1$, то сначала вычисляем угол φ по формуле (39). Имеем:

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{4{,}8}{63{,}177}};$$

т. е. $\varphi = 16°$.

Для модулярного угла θ, согласно (40), имеем:

$$\sin^2\theta = \frac{3}{4},$$

т. е. $\theta = 60°$.

Теперь обращаемся к табл. 1. Амплитуде $\varphi = 16°$ и модулярному углу $\theta = 60°$ соответствует аргумент

$$u_1 = 0{,}282.$$

Поэтому, на основании (41), получим:

$$u_0\sqrt{4{,}8} = 0{,}282;$$

отсюда

$$u_0 = 0{,}12872.$$

Табл. 3 дает:

$$K = 2{,}15652;\quad K' = 1{,}68575.$$

Вследствие этого

$$\omega_1 = \frac{2{,}15652}{\sqrt{4{,}8}} = 0{,}9843;\quad \omega_3 = \frac{1{,}68575}{\sqrt{4{,}8}}\, i = 0{,}76945i.$$

Общая формула, выражающая искомый аргумент:

$$u = \pm 0{,}12872 + 2m\cdot 0{,}9843 + 2n\cdot 0{,}76945i,$$

где m и n — произвольные целые числа.

Пример 2. Пусть $\wp(u;\ 24{,}96, -17{,}92) = 0{,}2$.

Требуется вычислить u.

Дискриминант Δ и корни e_1, e_2 и e_3 те же, что и в первом примере.

Так как здесь $a = 0{,}2$ и $e_2 > a > e_3$, то сначала вычисляем $\wp v$ по формуле (42). Имеем:

$$\wp v = 2{,}96.$$

Мы пришли, таким образом, к случаю, когда $a = 2{,}96 > e_1$, т. е. к случаю 1. Повторяя выкладки предыдущего примера, вычисляем:

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{5}{6}};\quad \varphi = 65°\,54'20'';\quad \theta = 60°.$$

Согласно табл. 1, интерполируя, находим:

$$\frac{v_1 - 1{,}34893}{1{,}37728 - 1{,}34893} = \frac{3260}{3600};$$

$$v_1 = 1{,}37460;\quad v_0\sqrt{4{,}8} = 1{,}3746;\quad v_0 = 0{,}62743.$$

Следовательно:

$$v = \pm 0{,}62743 + 2m\omega_1 + 2n\omega_3,$$

$$u = \pm 0{,}62743 + 2m\omega_1 + (2n+1)\omega_3.$$

§ 89. Производные высших порядков функции $\wp u$

Диференцируя равенство

$$(\wp' u)^2 = 4\wp^3 u - g_2\wp u - g_3$$

по переменной u, будем иметь:

$$\wp'' u = 6\wp^2 u - \frac{1}{2} g_2,$$

$$\wp''' u = 12\wp u\cdot\wp' u,$$

$$\wp^{\mathrm{IV}}(u) = 12\wp u\cdot\wp'' u + 12(\wp' u)^2 = 12\left(10\wp^3 u - \frac{3}{2} g_2\wp u - g_3\right),$$

. . . .

Производные четного порядка являются целыми многочленами относительно $\wp u$; производные нечетного порядка — целыми многочленами относительно $\wp u$, умноженными на $\wp' u$.

Пусть 2ω есть любой из периодов функции $\wp u$.

В таком случае:

$$\wp(u + 2\omega) = \wp u.$$

Отсюда:

$$\wp'(u + 2\omega) = \wp' u,$$

$$\wp''(u + 2\omega) = \wp'' u,$$

. . . .

Мы видим, что периоды функции $\wp u$ служат периодами ее производных.

§ 90. Формулы удвоения аргумента функции $\wp u$

Формулу удвоения аргумента функции $\wp u$ можно получить, полагая в формуле сложения

$$\wp(u+v)+\wp u+\wp v=\frac{1}{4}\left(\frac{\wp' u-\wp' v}{\wp u-\wp v}\right)^2,$$

$v=u$. Так как при этом правая часть написанного равенства принимает неопределенный вид:

$$\frac{0}{0},$$

то применяем к выражению

$$\frac{\wp' u-\wp' v}{\wp u-\wp v}$$

известное правило Лопиталя. Получим:

$$\lim_{v\to u}\left(\frac{\wp' u-\wp' v}{\wp u-\wp v}\right)=\frac{\wp'' u}{\wp' u}.$$

Вследствие чего

$$\wp 2u=\frac{1}{4}\left(\frac{\wp'' u}{\wp' u}\right)^2-2\wp u. \tag{43}$$

Так как

$$(\wp' u)^2=4\wp^3 u-g_2\wp u-g_3$$

и

$$\wp'' u=6\wp^2 u-\frac{g_2}{2},$$

то формула (43) может служить для вычисления $\wp 2u$, когда известны значение функции $\wp u$ и инварианты g_2 и g_3.

Пример. Вычислить $\wp 2u$, если дано $\wp(u;-20,-40)=5$. Здесь: $g_2=-20$; $g_3=-40$; $(\wp' u)^2=640$; $\wp'' u=160$. Подставляя эти значения в (43), находим, что

$$\wp 2u=0.$$

§ 91. Разложение функции $\wp u$ в ряд Лорана

Найдем разложение аналитической функции $\wp u$ в ряд Лорана в окрестности полюса $u=0$.

Обозначая кратность полюса $u=0$ (пока нам неизвестную) через m, будем иметь:

$$\wp u=\frac{c_{-m}}{u^m}+\frac{c_{-m+1}}{u^{m-1}}+\ldots+\frac{c_{-1}}{u}+c_0+c_1u+\ldots\quad\left(c_{-m}\neq 0\right).$$

Так как $\wp u$ функция четная, т. е. так как

$$\wp(-u)=\wp u,$$

то наше разложение должно содержать лишь члены с четными степенями u и, в частности, m должно быть четным числом: $m=2k$.

Таким образом:

$$\wp u=\frac{c_{-2k}}{u^{2k}}+\frac{c_{-2k+2}}{u^{2k-2}}+\ldots+\frac{c_{-2}}{u^2}+c_0+c_2u^2+\ldots$$

Диференцируя почленно (что возможно на основании § 55 гл. III ввиду равномерной сходимости ряда Лорана в любом круговом кольце:

$$0<\rho\leqslant|u|\leqslant R<b,$$

где b — модуль ближайшего к $u=0$ неравного нулю полюса $\wp u$) получаем:

$$\wp' u=-\frac{2kc_{-2k}}{u^{2k+1}}-\frac{(2k-2)\,c_{-2k+2}}{u^{2k-1}}-\ldots$$

Из этих соотношений выводим:

$$\lim_{u\to 0}\wp u\cdot u^{2k}=c_{-2k};\quad \lim_{u\to 0}\wp' u\cdot u^{2k+1}=-2k\cdot c_{-2k}.$$

Умножая теперь обе части равенства

$$(\wp' u)^2=4\wp^3 u-g_2\wp u-g_3$$

на u^{6k} и переписывая результат в виде:

$$(\wp' u\cdot u^{2k+1})^2\cdot u^{2k-2}=4(\wp u\cdot u^{2k})^3-g_2(\wp u\cdot u^{2k})\cdot u^{4k}-g_3\cdot u^{6k},$$

заставим здесь u стремиться к нулю.

Предел правой части, равный $4c^3_{-2k}$, отличен от нуля.

Поэтому и предел левой части должен быть отличен от нуля, что возможно лишь в случае $2k-2=0$, или $k=1$.

Итак, $2k=2$ и полюс является двухкратным. Замечая теперь, что предел левой части последнего равенства есть

$$4c^2_{-2}$$

и приравнивая пределы правой и левой частей, получаем:

$$c_{-2}=1;$$

поэтому лорановское разложение $\wp u$ имеет вид:

$$\wp u=\frac{1}{u^2}+c_0+c_2u^2+c_4u^4+\ldots$$

Остается найти коэфициенты c_0, c_2, c_4, $c_6,\ldots$

Для этого заметим, что

$$\wp' u=-\frac{2}{u^3}+2c_2u+4c_4u^3+\ldots$$

Подставляя эти разложения в основное соотношение:

$$(\wp' u)^2=4\wp^3 u-g_2\wp u-g_3,$$

получаем:

$$\left(-\frac{2}{u^3}+2c_2u+4c_4u^3+\cdot\quad\right)^2=$$

$$=4\left(\frac{1}{u^2}+c_0+c_2u^2+c_4u^4+\dots\right)^3-g_2\left(\frac{1}{u^2}+c_0+c_2u^2+c_4u^4+\dots\right)-g_3,$$

или, пользуясь правилом умножения рядов:

$$\frac{4}{u^6}-\frac{8c_2}{u^2}-16c_4+\dots=\frac{4}{u^6}+\frac{12c_0}{u^4}+\frac{12c_2}{u^2}+\frac{12c_0^2}{u^2}+$$

$$+12c_4+24c_0c_2+4c_0^3+\dots-g_2\left(\frac{1}{u^2}+c_0+c_2u^2+\dots\right)-g_3.$$

Приравнивая коэфициенты при одинаковых степенях u, в обеих частях равенства получаем:

$$12c_0=0,\quad 12c_2+12c_0^2-g_2=-8c_2,$$

$$12c_4+24c_0c_2+4c_0^3-g_2c_0-g_3=-16c_4,\dots$$

откуда:

$$c_0=0;\quad c_2=\frac{g_2}{20};\quad c_4=\frac{g_3}{28};\dots$$

Коэфициенты c_6, $c_8,\dots$ проще определять, пользуясь соотношением:

$$2\wp''u=12\wp^2u-g_2,$$

в котором следует заменить $\wp u$ и $\wp''u$ их лорановскими разложениями

$$\left[\wp''u=(\wp'u)'=\frac{6}{u^4}+2c_2+12c_4u^2+\dots\right)\Big]$$

и приравнять коэфициенты при одинаковых степенях u.

Таким образом для $\wp u$ получаем окончательно:

$$\wp u\,\frac{1}{u^2}+\frac{g_2}{4\cdot5}u^2+\frac{g_3}{4\cdot7}u^4+\frac{g_2^2}{2^4\cdot3\cdot5^2}u^6+\frac{3g_2g_3}{2^4\cdot5\cdot7\cdot11}u^8+\dots \tag{44}$$

Этот ряд, абсолютно и равномерно сходящийся в круговом кольце:

$$0<\rho\leqslant|u|\leqslant R<b,$$

где b — модуль ближайшего к $u=0$, неравного нулю полюса $\wp u$, может служить для вычисления $\wp u$ для малых по модулю u.

Например для функции $\wp\,(u;\ 0,\ 4)$ имеем:

$$\wp(u;\quad 0{,}4)=\frac{1}{u^2}-\frac{u^4}{7}+\dots,$$

откуда

$$\wp\,(0{,}2024;\quad 0,4)\simeq 24{,}4103.$$

§ 92. Функции ζu и σu.

Кроме $\wp u$ Вейерштрасс ввел еще функции ζu (дзета от u) и σu (сигма от u).

Они определяются равенствами:

$$\zeta u=\frac{1}{u}-\int_0^u\left(\wp u-\frac{1}{u^2}\right)du \tag{45}$$

и

$$\sigma u=ue^{\int_0^u\left(\zeta u-\frac{1}{u}\right)du} \tag{46}$$

Заметим, что обозначение ζu введено Гальфеном (Halphen).

Обе новых функции, как увидим из дальнейшего, не могут быть отнесены к классу эллиптических функций.

Из (45) и (46) следует, что

$$\zeta'u=-\wp u \tag{47}$$

и

$$(\ln\sigma u)'=\frac{\sigma'u}{\sigma u}=\zeta u. \tag{48}$$

Воспользовавшись равенствами (44) и (45), мы можем получить разложение в ряд Лорана функции ζ:

$$\zeta u=\frac{1}{u}-\frac{g_2}{2^2\cdot5}\cdot\frac{u^3}{3}-\frac{g_3}{2^2\cdot7}\cdot\frac{u^5}{5}-\frac{g_2^2}{2^4\cdot3\cdot5^2}\cdot\frac{u^7}{7}-\frac{3g_2g_3}{2^4\cdot5\cdot7\cdot11}\cdot\frac{u^9}{9}-\dots \tag{49}$$

Условия сходимости ряда (49) те же, что и (44). Заменим в (46) ζu ее значением и выполним интегрирование. Получим:

$$\sigma u=u\cdot e^{-\frac{g_2}{2^4\cdot3\cdot5}u^4-\frac{g_3}{2^3\cdot3\cdot5\cdot7}u^6-\frac{g_2^2}{2^7\cdot3\cdot5^2\cdot7}u^8-\frac{g_2g_3}{2^5\cdot3\cdot5^2\cdot7\cdot11}u^{10}-\dots}$$

Теперь разложим показательную функцию в ряд по формуле:

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{1\cdot2}+\dots;$$

результат выполнения действий таков:

$$\sigma u=u-\frac{g_2u^5}{2^4\cdot3\cdot5}-\frac{g_3u^7}{2^3\cdot3\cdot5\cdot7}-\frac{g_2^2u^9}{2^9\cdot3^2\cdot5\cdot7}-\frac{g_2g_3u^{11}}{2^7\cdot3^2\cdot5^2\cdot7\cdot11}-\dots \tag{50}$$

Полученный ряд, как можно показать, сходится при всяких значениях u, т. е. σu является целой функцией u.

Из (49) и (50) легко видеть, что

$$\zeta(-u)=-\zeta u\quad\text{и}\quad\sigma(-u)=-\sigma u,$$

т. е. что обе рассматриваемые функции нечетны.

При малых по модулю значениях u ряды (49) и (50) удобны для вычисления значений функций ζu и σu.

Заметим, что $\zeta(0)=\infty$. Точка $u=0$ служит полюсом функции ζu. Полюсы этой функции те же, что и функции $\wp u$, с той лишь разницей, что для ζu они однократны.

Если m и n произвольные целые числа и 2ω и $2\omega'$ периоды функции $\wp u$, то общее выражение для полюсов функции ζu будет:

$$2m\omega+2n\omega'.$$

§ 93. Формула сложения для функции ζ

Напишем равенства:

$$\wp(u+v)+\wp u+\wp v=\frac{1}{4}\left(\frac{\wp' u-\wp' v}{\wp u-\wp v}\right)^2,$$

$$\wp(u-v)+\wp u+\wp v=\frac{1}{4}\left(\frac{\wp' u+\wp' v}{\wp u-\wp v}\right)^2,$$

полученные нами в § 81.

При их помощи находим:

$$\wp(u-v)-\wp(u+v)=\frac{\wp' u\cdot\wp' v}{(\wp u-\wp v)^2}.$$

Отсюда, интегрируя по переменной v, получим:

$$\zeta(u-v)+\zeta(u+v)=\frac{\wp' u}{\wp u-\wp v}+C.$$

Для определения постоянной C положим $v=0$. Так как $\wp(0)=\infty$, то

$$C=2\zeta u.$$

Следовательно:

$$\zeta(u-v)+\zeta(u+v)-2\zeta u=\frac{\wp' u}{\wp u-\wp v}. \tag{51}$$

Формуле этой можно придать более симметричный вид таким образом: переменив u и v местами, будем иметь:

$$\zeta(v-u)+\zeta(v+u)-2\zeta v=\frac{\wp' v}{\wp v-\wp u},$$

или

$$-\zeta(u-v)+\zeta(u+v)-2\zeta v=-\frac{\wp' v}{\wp u-\wp v}. \tag{52}$$

Сложение (51) и (52) приводит к равенству:

$$\zeta(u+v)-\zeta u-\zeta v=\frac{1}{2}\cdot\frac{\wp' u-\wp' v}{\wp u-\wp v}, \tag{53}$$

которое можно рассматривать как формулу сложения для функции ζ. Заметим, однако, что, зная ζu и ζv, нельзя из (53) получить $\zeta(u+v)$ при помощи алгебраических действий. Вследствие этого полученная формула сложения, в отличие от формул для $\wp(u+v)$ и $\wp(u-v)$, не может быть названа алгебраической.

§ 94. Формула сложения для функции σ

Пользуясь (48), можем (51) представить в виде:

$$\frac{d}{du}\left[\ln\{\sigma(u-v)\sigma(u+v)\}\right]=\frac{d}{du}\left[\ln\{\sigma^2 u(\wp u-\wp v)\}\right].$$

Интегрируя это равенство и затем потенцируя результат, получим:

$$\sigma(u-v)\cdot\sigma(u+v)=C\cdot\sigma^2 u\cdot(\wp u-\wp v).$$

Здесь C — постоянная. Чтобы ее определить, положим $u=0$ и заметим, что

$$\lim_{u\to 0}\left[\sigma^2 u(\wp u-\wp v)\right]=1,$$

как в этом можно убедиться, принимая во внимание данные в § 91 и 92 разложения в ряды функций σu и $\wp u$.

Ввиду того

$$C=-\sigma^2 v.$$

И, следовательно:

$$\wp u-\wp v=-\frac{\sigma(u-v)\cdot\sigma(u+v)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v}. \tag{54}$$

Это соотношение играет большую роль в теории вейерштрассовых функций и называется, хотя и не вполне правильно, формулой сложения для функции сигмы.

§ 95. Формула однородности функций σu и ζu

Интегрируя по переменной u обе части равенства:

$$\mu\wp(u;g_2,g_3)=\wp\left(\frac{u}{\sqrt{\mu}};g_2\mu^2,g_3\mu^3\right),$$

выражающего формулу однородности для функции $\wp u$ (см. § 76), мы находим:

$$\sqrt{\mu}\cdot\zeta(u;\ g_2,g_3)=\zeta\left(\frac{u}{\sqrt{\mu}};\ g_2\mu^2,g_3\mu^3\right). \tag{55}$$

Постоянная интегрирования равна здесь нулю. В этом можно убедиться, разлагая функции ζu и $\zeta\frac{u}{\sqrt{\mu}}$ в ряды, согласно (49), и полагая затем в полученном равенстве $u=0$.

Зависимость (55) представляет так называемую формулу однородности для функции ζu.

Из нее нетрудно получить формулу однородности для функции σu. Для этого следует обе ее части проинтегрировать по u. Результат будет таков:

$$\ln\sigma(u;\ g_2,g_3)=\ln\sigma\left(\frac{u}{\sqrt{\mu}};\ g_2\mu^2,g_3\mu^3\right)+\lg C,$$

где C — постоянная. Переписав полученное равенство в виде:

$$\sigma(u;\ g_2,\ g_3)=C\sigma\left(\frac{u}{\sqrt{\mu}};\ g_2\mu^2,\ g_3\mu^3\right),$$

разложим функции σu и $\sigma\frac{u}{\sqrt{\mu}}$ в ряды, согласно (50). Сократив разложения обеих частей на u и положив затем $u=0$, мы без затруднений найдем, что

$$C=\sqrt{\mu}.$$

Следовательно:

$$\sigma(u;\ g_2,\ g_3)=\sqrt{\mu}\cdot\sigma\left(\frac{u}{\sqrt{\mu}};\ g_2\mu^2,\ g_3\mu^3\right). \qquad (56)$$

§ 96. Результат прибавления периода к независимой переменной u функций ζu и σu

Пусть ω есть какой-нибудь из полупериодов функции $\wp u$. В таком случае имеем:

$$\wp(u+2\omega)=\wp u.$$

Умножая обе части этого равенства на du и интегрируя результат, мы найдем, что

$$\zeta(u+2\omega)=\zeta u+2\eta, \qquad (56)$$

где 2η — постоянная.

Эту постоянную можно определить, если положить

$$u=-\omega.$$

В таком случае:

$$\zeta\omega=\zeta(-\omega)+2\eta.$$

Но так как

$$\zeta(-\omega)=-\zeta\omega,$$

то $\eta=\zeta\omega$. И таким образом:

$$\zeta(u+2\omega)=\zeta u+2\zeta\omega. \qquad (57)$$

Найденная формула выражает результат прибавления периода 2ω к независимой переменной u функции ζu.

Переходя к функции σu, умножим обе части (56) на du и результат снова проинтегрируем. Мы получим:

$$\ln\sigma(u+2\omega)=\ln\sigma u+2\eta\cdot u+\ln\Gamma,$$

где Γ — постоянная. Переписав полученное равенство в виде:

$$\sigma(u+2\omega)=\Gamma\cdot e^{2\eta u}\cdot\sigma u,$$

положим в нем $u=-\omega$. Помня, что $\sigma(-\omega)=-\sigma\omega$, найдем:

$$\Gamma=-e^{2\eta\omega}.$$

Следовательно:

$$\sigma(u+2\omega)=-e^{2\eta(u+\omega)}\cdot\sigma u. \qquad (58)$$

Если в равенствах (56) и (58) будем считать 2ω равным последовательно $2\omega_1$ и $2\omega_3$, то будем иметь:

$$\zeta(u+2\omega_1)=\zeta u+2\eta_1;\quad \zeta(u+2\omega_3)=\zeta u+2\eta_3. \qquad (59)$$

И также:

$$\sigma(u+2\omega_1)=-e^{2\eta_1(u+\omega_1)}\cdot\sigma u;\quad \sigma(u+2\omega_3)=-e^{2\eta_3(u+\omega_3)}\cdot\sigma u, \qquad (60)$$

где

$$\eta_1=\zeta\omega_1 \text{ и } \eta_3=\zeta\omega_3. \qquad (61)$$

Можно показать, что константы η_1 и η_3 не равны нулю. Тогда из полученных формул следует, что периоды функции $\wp u$ не могут быть периодами функций ζu и σu. Так как, с другой стороны, эти функции, как следует из формул (47), (48), не могут иметь периодов, отличных от периодов $\wp u$, то они вообще не имеют периодов, а поэтому не могут быть эллиптическими функциями.

Из равенства (58) видно, что от прибавления 2ω к аргументу функция σu приобретает показательного множителя, имеющего вид:

$$e^{au+b}.$$

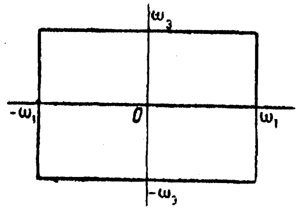
По предложению Эрмита, функции, обладающие этим свойством, называют периодическими функциями третьего рода.

Заметим, что периодическими функциями второго рода Эрмит называл такие функции, которые от прибавления 2ω к аргументу приобретают постоянного множителя. Согласно этой терминологии, эллиптические функции могут быть названы двоякопериодическими первого рода и являются частным случаем предыдущих двух видов.

§ 97. Соотношение между полупериодами и постоянными η_1 и η_3

Выведем одно соотношение между полупериодами ω_1 и ω_3 и постоянными η_1 и η_3. Этим соотношением нам в дальнейшем придется пользоваться неоднократно.

Точка $u=0$, как было уже замечено, служит полюсом функции ζu. Полюс этот простой и вычет его равен единице. Предполагая, что u принимает комплексные значения, будем функцию ζu интегрировать в положительном направлении по контуру параллелограма периодов функции $\wp u$, который выберем так, чтобы точка $u=0$ оказалась внутри него. Таким параллелограмом может служить тот, вершины которого — $\omega_1-\omega_3$; $\omega_1-\omega_3$; $\omega_1+\omega_3$; $-\omega_1+\omega_3$ (фиг. 32).



Фиг. 32.

Кроме полюса $u=0$, никаких других особых точек внутри и на контуре параллелограма не имеется.

В силу формулы (28) главы III будем иметь:

$$\int_{-\omega_1-\omega_3}^{\omega_1-\omega_3} \zeta u\,du + \int_{\omega_1-\omega_3}^{\omega_1+\omega_3} \zeta u\,du + \int_{\omega_1+\omega_3}^{-\omega_1+\omega_3} \zeta u\,du + \int_{-\omega_1+\omega_3}^{-\omega_1-\omega_3} \zeta u\,du = 2\pi i.$$

Совершая замену переменных, положим в первом интеграле, что $u = v - \omega_3$, во втором $u = v + \omega_1$, в третьем $u = v + \omega_3$ и в четвертом $u = v - \omega_1$. Будем иметь:

$$\int_{-\omega_1}^{\omega_1} [\zeta(v-\omega_3) - \zeta(v+\omega_3)]\,dv +$$

$$+ \int_{-\omega_3}^{\omega_3} [\zeta(v+\omega_1) - \zeta(v-\omega_1)]\,dv = 2\pi i.$$

Но

$$\zeta(v+\omega_1) - \zeta(v-\omega_1) = \zeta(v-\omega_1+2\omega_1) - \zeta(v-\omega_1) = 2\eta_1;$$

точно так же:

$$\zeta(v+\omega_3) - \zeta(v-\omega_3) = 2\eta_3.$$

Следовательно:

$$\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = \frac{\pi i}{2}. \tag{62}$$

Заметим, что при нашем выборе основных периодов коэфициент при i отношении $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ есть число положительное.

§ 98. Кофункции $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$ и $\sigma_3 u$. Их нули и нули функции σu

В формуле (54) сложения функции σ положим, что $v = \omega_1$. Помня, что $\wp\omega_1 = e_1$, будем иметь:

$$\wp u - e_1 = \frac{\sigma(\omega_1+u)\,\sigma(\omega_1-u)}{\sigma^2 u \cdot \sigma^2\omega_1}. \tag{63}$$

Но заменив в первом из равенств (60) u на $u - \omega_1$, в то же время получим:

$$\sigma(\omega_1+u) = e^{2\eta_1 u} \cdot \sigma(\omega_1-u).$$

Следовательно:

$$\wp u - e_1 = \frac{e^{2\eta_1 u} \cdot \sigma^2(\omega_1-u)}{\sigma^2 u \cdot \sigma^2\omega_1}.$$

Выражение $\frac{e^{\eta_1 u} \cdot \sigma(\omega_1-u)}{\sigma\omega_1}$ целесообразно рассматривать как особую функцию. Ее обозначим через $\sigma_1 u$; так что:

$$\sigma_1 u = \frac{e^{\eta_1 u} \cdot \sigma(\omega_1-u)}{\sigma\omega_1}. \tag{64}$$

Следовательно:

$$\wp u - e_1 = \frac{\sigma_1^2 u}{\sigma^2 u}. \tag{65}$$

Положим в той же формуле (54) сложения функции σ, что $v = \omega_1 + \omega_3$. Так как $\wp(\omega_1+\omega_3) = e_2$ (§ 83), то

$$\wp u - e_2 = \frac{\sigma(\omega_1+\omega_3+u)\cdot\sigma(\omega_1+\omega_3-u)}{\sigma^2 u\cdot\sigma^2(\omega_1+\omega_3)}.$$

Но первое из равенств (60) после замены в нем u на $u - \omega_1 + \omega_3$ дает:

$$\sigma(\omega_1+\omega_3+u) = -e^{2\eta_1(u+\omega_3)}\cdot\sigma(\omega_3-\omega_1+u).$$

Вместе с тем в силу второго из равенств (60):

$$\sigma(\omega_3-\omega_1+u) = \sigma(u-\omega_1-\omega_3+2\omega_3) = e^{2\eta_3(u-\omega_1)}\cdot\sigma(\omega_1+\omega_3-u),$$

т. е.

$$\sigma(\omega_1+\omega_3+u) = -e^{2u(\eta_1+\eta_3)+2(\eta_1\omega_3-\eta_3\omega_1)}\cdot\sigma(\omega_1+\omega_3-u).$$

В § 96 мы показали, что если в отношении $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ коэфициент при i положителен, то

$$\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = \frac{\pi i}{2}.$$

В нашем случае этот коэфициент равен $\frac{K'}{K}$ и положителен. Вследствие этого:

$$e^{2(\eta_1\omega_3-\eta_3\omega_1)} = e^{\pi i} = -1.$$

Поэтому

$$\sigma(\omega_1+\omega_3+u) = e^{2u(\eta_1+\eta_3)}\cdot\sigma(\omega_1+\omega_3-u)$$

и

$$\wp u - e_2 = \frac{\sigma_2^2 u}{\sigma^2 u}, \tag{66}$$

где

$$\sigma_2 u = \frac{e^{(\eta_1+\eta_3)u}\cdot\sigma(\omega_1+\omega_3-u)}{\sigma(\omega_1+\omega_3)}. \tag{67}$$

Положив, наконец, в (54) $v = \omega_3$, нетрудно показать, что

$$\wp u - e_3 = \frac{\sigma_3^2 u}{\sigma^2 u}, \tag{68}$$

где

$$\sigma_3 u = \frac{e^{\eta_3 u}\cdot\sigma(\omega_3-u)}{\sigma\omega_3}. \tag{69}$$

Оперируя с периодами ω_1 и ω_3, мы тем самым предполагали, что дискриминант $\Delta > 0$. Для $\Delta < 0$ отметим формулу:

$$\wp u - e_2 = \frac{e^{2\eta_2 u}\cdot\sigma^2(\omega_2-u)}{\sigma^2 u\cdot\sigma^2\omega_2}, \tag{70}$$

вполне аналогичную предыдущим. Этой формулой нам придется воспользоваться впоследствии.

Из формулы (50) § 92 следует, что $\sigma(0)=0$. Пользуясь (60), можно найти, что в случае $\Delta>0$ формула

$$2m\omega_1+2n\omega_3,$$

в которой m и n обозначают произвольные целые числа, выражает нули функции σu.

Исходя из формул, определяющих функции $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$ и $\sigma_3 u$, нетрудно проверить, что нулями будут:

$$\text{для } \sigma_1 u \quad (2m+1)\,\omega_1+2n\omega_3,$$

$$\text{для } \sigma_2 u \quad (2m+1)\,\omega_1+(2n+1)\,\omega_3,$$

$$\text{для } \sigma_3 u \quad 2m\omega_1+(2n+1)\,\omega_3,$$

где m и n — произвольные целые числа.

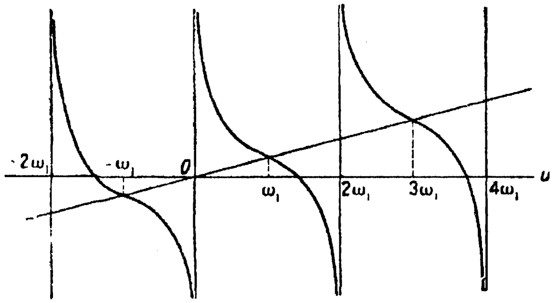
Аналогичные результаты получаются и в случае $\Delta<0$. Прибавляя к независимой переменной функции $\sigma_1 u, \sigma_2 u$ и $\sigma_3 u$ период, можно убедиться в том, что эти функции двоякопериодические третьего рода.

§ 99. График функции ζu

Если дискриминант $\Delta>0$, то при изменении u в интервале $(0,2\omega_1)$ функция $\wp u>0$ (см. § 85). Следовательно:

$$\zeta' u<0$$

и при возрастании u функция ζ убывает [см. формулы (45), (47)]. Так как $\zeta(0)=\infty$ и $\zeta(2\omega_1)=-\infty$, то в интервале $(0,2\omega_1)$ график ζu имеет вид, показанный на фиг. 33.



Фиг. 33.

На той же фигуре указан общий вид графика и для соседних интервалов.

Точки перегиба определяются из уравнения

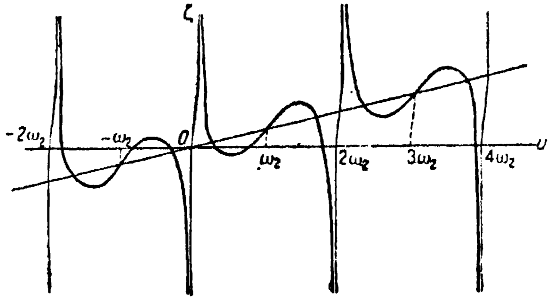
$$\zeta'' u=-\wp' u=0,$$

из которого

$$u=\omega_1,\quad 3\omega_1,\quad 5\omega_1,\ldots$$

Точки перегиба лежат на прямой, проходящей через начало координат.

Если $\Delta<0$ и $e_2>0$, то график функции ζu имеет тот же вид.



Фиг. 34.

Если $\Delta<0$ и $e_2<0$, то $\wp\omega_2<0$. Функция $\wp u$ обращается два раза в нуль. Один раз в интервале $(0,\omega_2)$, а другой раз в интервале $(\omega_2, 2\omega_2)$. В силу соотношения

$$\zeta' u=-\wp u$$

в этих местах функция ζu будет иметь экстремальные значения. Графи ее имеет вид, показанный на фиг. 34.

§ 100. Вычисление значений функции ζu

Отличим два обычных случая: во-первых, когда дискриминант полож тельный и, во-вторых, когда он отрицательный.

Случай $\Delta>0$. Будем исходить из формулы:

$$\wp u=e_3+\frac{e_1-e_3}{\operatorname{sn}^2(u\sqrt{e_1-e_3}k)},$$

в которой модуль k определяется из равенства:

$$k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}$$

(см. § 73). Ради краткости положим $e_1-e_3=\lambda$. Будем иметь:

$$\operatorname{sn}^2(u\sqrt{\lambda})=\frac{\lambda}{\wp u-e_3};$$

отсюда, интегрируя в пределах от 0 до u, получим:

$$\int_0^u\frac{\lambda\,du}{\wp u-e_3}=\int_0^u\operatorname{sn}^2(u\sqrt{\lambda})\,du=\frac{u}{k^2}-\frac{1}{k^2}\int_0^u dn^2(u\sqrt{\lambda})\,du. \quad (71)$$

Но последний интеграл можно выразить через интеграл второго рода $E(\varphi)$. Действительно, если положим $\varphi=\operatorname{am}(u\sqrt{\lambda})$, то будем иметь:

$$\sin\varphi=\operatorname{sn}(u\sqrt{\lambda}),\quad d\varphi=\sqrt{\lambda}\cdot dn(u\sqrt{\lambda})\cdot du,$$

Вследствие этого:

$$E(\varphi)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\cdot d\varphi=\sqrt{\lambda}\int_0^{u}dn^2(u\sqrt{\lambda})\,du.$$

Внесем выражение интеграла $\int_0^u dn^2(u\sqrt{\lambda})\,du$ в равенство (71). Если при этом заметим, что, согласно формуле (38):

$$\frac{\lambda}{\wp u-e_3}=\frac{\wp(u+\omega_3)-e_3}{e_2-e_3},$$

то получим:

$$E(\varphi)=u\sqrt{\lambda}-\frac{k^2\sqrt{\lambda}}{e_2-e_3}\int_0^u[\wp(u+\omega_3)-e_3]\,du=$$

$$=u\sqrt{\lambda}\left(1+\frac{k^2e_3}{e_2-e_3}\right)+\frac{k^2\sqrt{\lambda}}{e_2-e_3}[\zeta(u+\omega_3)-\eta_3].$$

Примем еще во внимание, что, согласно (53):

$$\zeta(u+\omega_3)-\zeta\omega_3=\zeta u+\frac{1}{2}\cdot\frac{\wp'u}{\wp u-e_3}.$$

В таком случае будем иметь:

$$\zeta u=\sqrt{\lambda}\cdot E(\varphi)-e_1u-\frac{1}{2}\,\frac{\wp'u}{\wp u-e_3}. \tag{72}$$

Из сказанного следует, что порядок вычисления функции ζu может быть таков:

Если известны инварианты g_2 и g_3 и аргумент u, то вычисляем корни e_1, e_2 и e_3. Затем $\lambda=e_1-e_3$ и $u\sqrt{\lambda}$. Вычисляем модуль k и модулярный угол θ. Пользуясь табл. 1, находим амплитуду φ, как показано в § 21. Зная θ и φ, при помощи табл. 2 находим $E(\varphi)$. Вычислив $\wp u$ и $\wp'u$ по способу, описанному в § 80 и 85, при помощи (72) вычислим ζu.

Пример. Вычислить $\zeta\left(\frac{1}{2};\ \frac{39}{4},\ \frac{35}{8}\right)$.

Воспользуемся формулой (72).

При $g_2=\frac{39}{4}$, $g_3=\frac{35}{8}$ имеем корни:

$$e_1=\frac{7}{4};\quad e_2=-\frac{1}{2};\quad e_3=-\frac{5}{4}.$$

Поэтому

$$\lambda=e_1-e_3=3;\quad \sin^2\theta=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}=\frac{1}{4};\quad \theta=30^\circ.$$

Амплитуду φ определяем из равенства

$$\sin\varphi=\operatorname{sn}(u\sqrt{\lambda}),$$

которое при $u=\frac{1}{2}$ и $\lambda=3$ дает:

$$\sin\varphi=\operatorname{sn}0{,}86602.$$

Обращаясь для нахождения φ к табл. 1, в ней находим, что

0,86055 соответствует амплитуда 48°,

0,87937 соответствует амплитуда 49°.

На этом основании пишем пропорцию:

$$\frac{\varphi-48^\circ}{49^\circ-48^\circ}=\frac{0{,}86602-0{,}86055}{0{,}87937-0{,}86055},$$

из которой следует, что $\varphi=48^\circ17'26''$. Теперь определяем $E(\varphi)$ при $\varphi=48^\circ17'26''$.

Согласно табл. 2, имеем:
амплитуде 48° соответствует $E=0{,}81599$,
амплитуде 49° соответствует $E=0{,}83217$.

Пропорция

$$\frac{E-0{,}81599}{0{,}83217-0{,}81599}=\frac{17'26''}{60'}=\frac{523}{1800}$$

дает:

$$E=0{,}82069.$$

Далее, согласно формуле (8), будем иметь:

$$\wp\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{4}+\frac{3}{\sin^2 48^\circ17'26''}=4{,}133.$$

Вычисляем производную $\wp'\left(\frac{1}{2}\right)$.

Для этого воспользуемся первой из формул § 85. Мы получим:

$$\wp'\left(\frac{1}{2}\right)=-2\sqrt{2{,}383\cdot4{,}633\cdot5{,}383}=-15{,}418.$$

Здесь перед корнем удержан знак минус. Это сделано потому, что аргумент $u=\frac{1}{2}$ меньше полупериода

$$\omega_1=\frac{K}{\sqrt{\lambda}}=\frac{1{,}68575}{\sqrt{3}}.$$

Внося значения λ, $E(\varphi)$, e_1, u, $\wp'u$, $\wp u$ и e_3 в равенство (72), получим:

$$\zeta\left(\frac{1}{2}\right)=1{,}9786.$$

Случай $\Delta<0$. Для вычисления значений функции ζ можно пользоваться формулой:

$$\zeta(u+\omega_2)-\eta_2=-uH+2\sqrt{H}\cdot E(\varphi,k_1)+\frac{\overline{\wp}'u}{\overline{\wp}u-e_2}, \tag{73}$$

в которой

$$H=\sqrt{9m^2+n^2};\quad e_1=m+ni;\quad e_2=-2m;$$

$$e_3=m-ni;\quad k_1^2=\frac{1}{2}+\frac{3e_2}{4H};$$

ω_2 — вещественный полупериод, соответствующий функции ζ; $\eta_2=\sqrt{H}\,(K-2E)$, а функции $\wp u$ соответствуют корни:

$$\varepsilon_1=\frac{H}{2}-\frac{e_2}{4};\quad \varepsilon_2=\frac{e_2}{2};\quad \varepsilon_3=-\frac{H}{2}-\frac{e_2}{4}.$$

(см. *Lèvy*, Précis élémentaire de la théorie des fonctions elliptiques).

Заметим, что в рассматриваемом случае вычисления будут проще, если воспользоваться приемом, указанным в главе V.

УПРАЖНЕНИЯ

Доказать, что

1. $\wp(u+v)=\wp u-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\wp' u-\wp' v}{\wp u-\wp v}\right).$

2. $\wp(u+v)=\wp u+$
$$+\frac{\left(6\wp^2 u-\frac{1}{2}g_2\right)(\wp v-\wp u)+4\wp^3 u-g_2\wp u-g_3-\wp' u\wp' v}{2(\wp u-\wp v)^2}.$$

3. $\wp(u+v)+\wp(u-v)=\dfrac{2\left(\wp u\wp v-\frac{1}{4}g_2\right)(\wp u+\wp v)-g^3}{(\wp u-\wp v)^2}.$

4. $\wp(u+v)-\wp(u-v)=-\dfrac{\wp' u\cdot\wp' v}{(\wp u-\wp v)^2}.$

5. $\wp(u+v)-\wp(u-v)=-\dfrac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\ln(\wp u-\wp v).$

6. $\wp(u+v)\cdot\wp(u-v)=\dfrac{\left(\wp u\cdot\wp v+\frac{1}{4}g_2\right)^2+g_3(\wp u+\wp v)}{(\wp u-\wp v)^2}.$

7. $\wp(u+v)+\wp(u-v)-2\wp u=\dfrac{(\wp' u)^2-\wp'' u(\wp u-\wp v)}{(\wp u-\wp v)^2}.$

8. $\wp 2u=\wp u-\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2}{\partial u^2}\ln\wp' u.$

9. $\wp 2u=\dfrac{\left(\wp^2 u+\frac{1}{4}g_2\right)^2+2g_3\wp u}{(\wp' u)^2}.$

10. $\wp' u=\dfrac{-4H^{\frac{2}{3}}\cdot\operatorname{sn}(2u\sqrt{H})\,dn(2u\sqrt{H})}{[1-\operatorname{cn}(2u\sqrt{H})]^2}$ при $\Delta<0$.

11. $\wp' u=-2(e_1-e_3)^{\frac{2}{3}}\dfrac{\operatorname{cn}(u\sqrt{e_1-e_3})\,dn(u\sqrt{e_1-e_3})}{\operatorname{sn}^3(u\sqrt{e_1-e_3})}$ при $\Delta>0$

12. $\dfrac{\sigma 2u}{\sigma^4 u}=-\wp' u$

13. $\sigma(u+v)\sigma(u-v)=\sigma^2 u\cdot\sigma_\kappa^2 v-\sigma^2 v\cdot\sigma_\kappa^2 u\quad(k=1,2,3).$

14. $\wp' u=-\dfrac{2\sigma_1 u\cdot\sigma_2 u\cdot\sigma_3 u}{\sigma^3 u}$

15. $\sigma 2u=2\sigma u\cdot\sigma_1 u\cdot\sigma_2 u\cdot\sigma_3 u.$

16. $\dfrac{\sigma' 2u}{\sigma 2u}=2\dfrac{\sigma' u}{\sigma u}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\wp'' u}{\wp' u}.$

17. $\dfrac{\wp'' u}{\wp' u}=\dfrac{\wp' u+\wp' 2u}{\wp u-\wp 2u}.$

18. $\zeta u+\zeta v-\zeta(u+v)=-\sqrt{\wp u+\wp v+\wp(u+v)}.$

19. $\zeta 2u=\dfrac{1}{2}\dfrac{\wp'' u}{\wp' u}+2\zeta u.$

20. Доказать, что функция $\varphi=\dfrac{A\wp\left(\frac{u}{2}\right)+B}{\sqrt{\wp'\left(\frac{u}{2}\right)}}$ удовлетворяет диференциальному уравнению $\dfrac{d^2\varphi}{du^2}=\dfrac{3}{4}\wp u\cdot\varphi$; A и B — постоянные.

Обратить интегралы:

21. $u=\displaystyle\int_z^\infty\frac{dz}{\sqrt{4z^3+12z^2+12z}}.$ $\quad=\wp(u;\,0,4)-1.$

22. $u=\displaystyle\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{z^4+1}}.$ *Ответ.* $z=\dfrac{1}{\sqrt{\wp(u;-4,0)}}.$

23. $u=\displaystyle\int_z^1\frac{dz}{\sqrt{6z-6z^2-2z^3-2z^4}}.$ *Ответ.* $z=\dfrac{\wp(u;0,4)-1}{\wp(u;0,4)+1}.$

24. $u=\displaystyle\int_{-1}^z\frac{dz}{\sqrt{2-3z-9z^2-5z^3-z^4}}$ *Ответ.* $z=\dfrac{1}{\wp(u;\,1,\,1)}-1.$

25. Если $\wp(u;\,0,1)=1$, то и $(2u;\,0,1)=1$.

Доказать, что:

26. Если $g_2=0$; $g_3=1$,

то, $\wp\left(\frac{2}{3}\omega_2\right)=1$;

$\wp'\left(\frac{2}{3}\omega_2\right)=-\sqrt{3}$; $\wp'\left(\frac{4}{3}\omega_2\right)=\sqrt{3}.$

27. $\wp\left(\frac{2\omega_3}{3};\ 15,\ 11\right)=-\frac{3}{2}$.

28. $\wp\left(\frac{2\omega_3}{3};\ 48,\ 44\right)=-4$.

29. $\wp\left(\omega_1+\frac{\omega_3}{3};\ 48,\ 44\right)=2$.

30. Вычислить $\wp u, \zeta u, \sigma u$ и $\wp' u$, если $u=0{,}806$ и $g_2=0;\ g_3=1$.

Ответ. 10,6805; 3,2680; 0,3060; —69,8040.

31. Вычислить $\wp u;\ \zeta u, \sigma u$ и $\wp' u$, если $u=\omega_2$ и $g_2=0;\ g_3=1$.

Ответ. 0,63; 0,5928; 1,5066; 0.

32. Если $\wp\,(u; -60, -10)=5$, то

$\wp 2u=0;\ \wp 3u=\frac{7}{5};\quad \wp 4u=\frac{45}{2}$.

33. Если $\wp\,(u, -15,\ 19)=\frac{5}{2}$, то

$\wp 2u=\frac{5}{4};\quad \wp 3u=\frac{456}{25}$.

34. Вычислить $\zeta 2u$, если $u=0{,}61198;\ g_2=0;\ g_3=1$.

Ответ. 0,7972.

35. Решить уравнение

$$\wp\,(u;\ 0,\ 1)=1{,}7211$$

Ответ. $u=\pm 0{,}725+2m\omega_2+2n\omega_2'$, где $\omega_2=1{,}53$; $\omega_2'=2{,}65i$; m и n произвольные целые числа.

ГЛАВА V

ТЭТА-ФУНКЦИИ

§ 101. Разложение функций в бесконечные произведения

Представление функций в виде произведений других функций с более простыми свойствами играет важную роль в математике. Наиболее простое решение задача получает тогда, когда функция $f\,(u)$ есть многочлен:

$$f\,(u)=a_0u^n+a_1u^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\,u+a_n.$$

Обозначая через $\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\ \alpha_n$ нули этого многочлена, имеем, как известно:

$$f(u)=a_0\ (u-\alpha_1)\ (u-\alpha_2)\ldots(u-\alpha_n)=a_0\prod_{p=1}^{n}(u-\alpha_p).$$

Также легко решается задача в случае, когда $f(u)$ есть вообще какая-либо рациональная функция. В этом случае ее всегда можно представить в виде частного двух многочленов степеней m и n; поэтому имеем:

$$f(u)=A\frac{\prod\limits_{p=1}^{m}(u-\alpha_p)}{\prod\limits_{q=}^{n}(u-\beta_q)}.$$

Следующие по сложности случаи имеем для функции целых и мероморфных, простейшими представителями которых являются соответственно многочлены и рациональные дроби.

Однако здесь мы получаем разложения в виде бесконечных произведений. Мы займемся специально разложениями эллиптических функций. Эти разложения для функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$ были предложены и изучены еще Якоби. Прежде чем перейти к изложению результатов Якоби и к их приложениям, напомним основные определения и факты, относящиеся к бесконечным произведениям.

Пусть $z_1, z_2, z_3,\ \ldots,z_n,\ \ldots$ бесконечная последовательность комплексных чисел, из которых ни одно не равно нулю. *Если существует предел:*

$$\lim_{n\to\infty} z_1\cdot z_2\cdot z_3\cdots z_n,$$

конечный и отличный от нуля, то говорят, что бесконечное произведение

$$z_1\cdot z_2\ldots z_n\cdot z_n+\ldots$$

сходится и пишут

$$\lim_{n\to\infty} z_1 z_2 \ldots z_n = \prod_{p=1}^{\infty} z_p .$$

Так, например, полагая

$$z_p = \frac{(p+1)^2-1}{(p+1)^2} = \frac{p(p+2)}{(p+1)^2},$$

имеем:

$$z_1 \cdot z_2 \ldots z_n = \frac{1\cdot 3\cdot 2\cdot 4\cdot 3\cdot 5 \ldots n(n+2)}{2^2\cdot 3^2 \ldots (n+1)^2} = \frac{n!\,(n+2)!}{2[(n+1)!]^2} = \frac{1}{2}\,\frac{n+2}{n+1} \to \frac{1}{2},$$

когда $n \to \infty$.

Поэтому мы пишем

$$\prod_{p=1}^{\infty} \frac{(p+1)^2-1}{(p+1)^2} = \frac{1}{2}.$$

Обыкновенно общий член z_p бесконечного произведения представляют в виде:

$$z_p = 1 + u_p.$$

При этих обозначениях можно высказать следующую теорему.

Для того чтобы бесконечное произведение

$$\prod_{p=1}^{\infty} (1 + u_p)$$

абсолютно сходилось, т. е. чтобы наряду с ним сходилось и произведение $\prod_{p=1}^{\infty} (1 + |u_p|)$, *необходимо и достаточно, чтобы ряд* $\sum_{p=1} u_p$ *абсолютно сходился.*

В дальнейшем мы будем рассматривать бесконечные произведения, для которых u_p являются аналитическими функциями комплексного аргумента u. В этом случае особую важность приобретает вопрос о равномерной сходимости бесконечных произведений. *Бесконечное произведение* $\prod_{p=1}^{\infty} (1 + u_p)$ *называется равномерно сходящимся в некоторой замкнутой области B, если абсолютная величина разности*

$$\prod_{p=1}^{\infty} (1 + u_p) - \prod_{p=1}^{n} (1 + u_p)$$

может быть сделана меньшей любого положительного числа ε, *каково бы ни было и из области B, лишь бы только n было больше некоторого N* (ε).

Простой критерий равномерной сходимости дает следующая теорема.

Если в бесконечном произведении $\prod_{p=1}^{\infty} (1 + u_p)$ *абсолютные величины членов* $|u_p|$ *остаются меньшими, какого бы ни было и из области B, членов* a_p *сходящегося ряда:* $\sum_{p=1}^{\infty} a_p$ (a_p — *постоянные положительные числа*), *то произведение равномерно сходится в области B.*

Укажем, наконец, следующую важную теорему.

Если бесконечное произведение $\prod_{p=1}^{\infty} (1 + u_p)$, *в котором* u_p *являются аналитическими функциями и в замкнутой области B, равномерно сходится в этой замкнутой области, то величина этого произведения является аналитической функцией от и внутри области B.*

§ 102. Тэта-функции

Пусть q обозначает число, модуль которого меньше единицы.

Рассмотрим бесконечные произведения:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1} \cdot e^{2iu}),$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n} \cdot e^{2iu}),$$

где u — комплексное переменное и q — постоянное, равное $e^{\pi i\tau}$, причем τ означает комплексное число с положительным коэфициентом при i. Полагая $\tau = \rho + \sigma i$, $\sigma > 0$, имеем:

$$q = e^{\pi i\tau} = e^{-\pi\sigma} \cdot e^{\pi i\rho},$$

откуда

$$|q| = e^{-\pi\sigma} < 1.$$

Отсюда выводим, что оба бесконечные произведения абсолютно сходятся при любом конечном u. В самом деле:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |-q^{2n-1} \cdot e^{2iu}| = \sum_{n=1}^{\infty} |e^{2iu}|\,|q|^{2n-1}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} |-q^{2n} \cdot e^{2iu}| = \sum_{n=1}^{\infty} |e^{2iu}|\,|q|^{2n}$$

представляют геометрические прогрессии со знаменателем $|q|^2$, меньшим единицы, и, следовательно, сходятся. Так как далее в каждой фиксированной конечной области плоскости переменного u функция e^{2iu} ограничена по модулю: $|e^{2iu}| < M$, то члены обоих рядов меньше соответственно членов сходящихся рядов с постоянными членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} M|q|^{2n-1} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} M|q|^{2n}.$$

Таким образом каждое из произведений сходится абсолютно и равномерно в любой конечной части плоскости и, следовательно, представляет функции u, аналитические в любой конечной части плоскости, т. е. целые функции u.

Целой функцией u будет также следующая функция, введенная Якоби:

$$\vartheta_4(u)=G\cdot\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}\cdot e^{2iu})\cdot\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}\cdot e^{-2iu}),\qquad(1)$$

где G — некоторое постоянное. (Мы употребляем здесь общепринятые в настоящее время обозначения, принадлежащие Таннери и Мольку; сам Якоби употреблял несколько иные обозначения.)

Переписывая последнюю формулу в виде:

$$\vartheta_4(u)=G\cdot\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}\cdot e^{2iu})(1-q^{2n-1}\cdot e^{-2iu})$$

и выполняя умножения под знаком произведения, получим:

$$\vartheta_4(u)=G\cdot\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n-1}\cdot\cos 2u+q^{4n-2}).\qquad(2)$$

Отметим сейчас же некоторые свойства функции $\vartheta_4(u)$. Прежде всего, заменяя u через $u+\pi$, найдем, что

$$e^{2i(u+\pi)}=e^{2iu},\quad e^{-2i(u+\pi)}=e^{-2iu}.$$

Таким образом при указанной замене величина произведения не меняется, и мы получаем:

$$\vartheta_4(u+\pi)=\vartheta_4(u).\qquad(3)$$

Аналогично, заменяя u через $u+\pi\tau$, найдем:

$$e^{2i(u+\pi\tau)}=e^{2iu}\cdot q^2,\quad e^{-2i(u+\pi\tau)}=e^{-2iu}\cdot q^{-2}$$

и, следовательно:

$$\vartheta_4(u+\pi\tau)=G\cdot\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n+1}\cdot e^{2iu})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-3}\cdot e^{-2iu})=$$

$$=G(1-q^3\cdot e^{2iu})(1-q^5\cdot e^{2iu})\dots(1-q^{-1}\cdot e^{-2iu})(1-q\cdot e^{-2iu})(1-q^3e^{-2iu})\dots=$$

$$=G\frac{1-q^{-1}\cdot e^{-2iu}}{1-q\cdot e^{2iu}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}\cdot e^{2iu})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}\cdot e^{-2iu})=$$

$$=-q^{-1}\cdot e^{-2iu}\cdot\vartheta_4(u),$$

т. е.

$$\vartheta_4(u+\pi\tau)=-q^{-1}\cdot e^{-2iu}\cdot\vartheta_4(u).\qquad(4)$$

Из формул (3) и (4) следует, что функция $\vartheta_4(u)$ может быть названа, согласно терминологии Эрмита, двоякопериодической функцией третьего рода. Заметим, что множитель $-q^{-1}\cdot e^{-2iu}$ может быть записан в виде:

$$-q^{-1}\cdot e^{-2iu}=e^{-2iu-\pi i(\tau-1)}.$$

Мы определим сейчас еще три функции, аналогичные функции $\vartheta_4(u)$ (и также введенные Якоби), и покажем, что отношения этих функций представляют эллиптические функции, а именно эллиптические функции Якоби.

Положим:

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_3(u)&=\vartheta_4\left(u+\frac{1}{2}\pi\right)\\ \vartheta_1(u)&=-iq^{\frac{1}{4}}\cdot e^{iu}\vartheta_4\left(u+\frac{1}{2}\pi\tau\right),\\ \vartheta_2(u)&=\vartheta_1\left(u+\frac{1}{2}\pi\right).\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

Очевидно, будем иметь:

$$\vartheta_3(u)=G\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}\cdot e^{2iu})\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}\cdot e^{-2iu})=$$

$$=G\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n-1}\cdot\cos 2u+q^{4n-2}),\qquad(6)$$

$$\vartheta_1(u)=-iq^{\frac{1}{4}}\cdot e^{iu}\cdot G\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}\cdot e^{2iu})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-2}\cdot e^{-2iu})=$$

$$=-iq^{\frac{1}{4}}\cdot e^{iu}\cdot G(1-q^2\cdot e^{2iu})(1-q^4\cdot e^{2iu})\dots(1-e^{-2iu})(1-q^2e^{-2iu})\dots=$$

$$=+2Gq^{\frac{1}{4}}\cdot\sin u\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}\cdot e^{2iu})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}\cdot e^{-2iu})=$$

$$=2Gq^{\frac{1}{4}}\cdot\sin u\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n}\cdot\cos 2u+q^{4n}),\qquad(7)$$

$$\vartheta_2(u)=+2Gq^{\frac{1}{4}}\cdot\cos u\cdot\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n}\cdot e^{2iu})\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n}\cdot e^{-2iu})=$$

$$=+2Gq^{\frac{1}{4}}\cdot\cos u\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n}\cdot\cos 2u+q^{4n}).\qquad(8)$$

Функции $\vartheta_1(u)$, $\vartheta_2(u)$, $\vartheta_3(u)$ и $\vartheta_4(u)$ называются тэта-функциями.

Из формул (3) и (4) и из определения функций $\vartheta_3(u)$, $\vartheta_1(u)$, $\vartheta_2(u)$ следует:

$$\vartheta_3(u+\pi)=\vartheta_4\left(u+\frac{1}{2}\pi+\pi\right)=\vartheta_4\left(u+\frac{1}{2}\pi\right)=\vartheta_3(u),$$

$$\vartheta_3(u+\pi\tau)=\vartheta_4\left(u+\frac{1}{2}\pi+\pi\tau\right)=$$

$$=-q^{-1}\cdot e^{-2i\left(u+\frac{1}{2}\pi\right)}\cdot\vartheta_4\left(u+\frac{1}{2}\pi\right)=q^{-1}\cdot e^{-2iu}\cdot\vartheta_3(u),$$

$$\vartheta_1(u+\pi) = -iq^{\frac{1}{4}}\cdot e^{i(u+\pi)}\cdot\vartheta_4\left(u+\frac{1}{2}\pi\tau+\pi\right) =$$

$$= iq^{\frac{1}{4}}\cdot e^{iu}\cdot\vartheta_4\left(u+\frac{1}{2}\pi\tau\right) = -\vartheta_1(u),$$

$$\vartheta_1(u+\pi\tau) = -iq^{\frac{1}{4}}\cdot e^{i(u+\pi\tau)}\cdot\vartheta_4\left(u+\frac{1}{2}\pi\tau+\pi\tau\right) =$$

$$= -iq^{\frac{5}{4}}\cdot e^{iu}\cdot -q^{-1}\cdot e^{-2i\left(u+\frac{1}{2}\pi\tau\right)}\cdot\vartheta_4\left(u+\frac{1}{2}\pi\tau\right) =$$

$$= iq^{-\frac{3}{4}}\cdot e^{-iu}\cdot\vartheta_4\left(u+\frac{1}{2}\pi\tau\right) = -q^{-1}\cdot e^{-2iu}\cdot\vartheta_1(u),$$

$$\vartheta_2(u+\pi) = \vartheta_1\left(u+\frac{1}{2}\pi+\pi\right) = -\vartheta_1\left(u+\frac{1}{2}\pi\right) = -\vartheta_2(u),$$

$$\vartheta_2(u+\pi\tau) = \vartheta_1\left(u+\frac{1}{2}\pi+\pi\tau\right) =$$

$$= -q^{-1}\cdot e^{-2i\left(u+\frac{1}{2}\pi\right)}\cdot\vartheta_1\left(u+\frac{1}{2}\pi\right) = q^{-1}\cdot e^{-2iu}\cdot\vartheta_2(u).$$

Выпишем для удобства обозрения формулы, определяющие тэта-функции, а также формулы, характеризующие их как двоякопериодические функции третьего рода:

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta_1(u) &= 2Gq^{\frac{1}{4}}\cdot\sin u\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n}\cdot\cos 2u+q^{4n},\\
\vartheta_2(u) &= 2Gq^{\frac{1}{4}}\cdot\cos u\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n}\cdot\cos 2u+q^{4n}),\\
\vartheta_3(u) &= G\cdot\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n-1}\cdot\cos 2u+q^{4n-2}),\\
\vartheta_4(u) &= G\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n-1}\cdot\cos 2u+q^{4n-2})
\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta_1(u+\pi) &= -\vartheta_1(u), & \vartheta_1(u+\pi\tau) &= -q^{-1}\cdot e^{-2iu}\cdot\vartheta_1(u),\\
\vartheta_2(u+\pi) &= -\vartheta_2(u), & \vartheta_2(u+\pi\tau) &= q^{-1}\cdot e^{-2iu}\cdot\vartheta_2(u),\\
\vartheta_3(u+\pi) &= \vartheta_3(u), & \vartheta_3(u+\pi\tau) &= q^{-1}\cdot e^{-2iu}\cdot\vartheta_3(u),\\
\vartheta_4(u+\pi) &= \vartheta_4(u), & \vartheta_4(u+\pi\tau) &= -q^{-1}\cdot e^{-2iu}\cdot\vartheta_4(u).
\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

Нули тэта-функций проще всего получить, пользуясь выражениями (1), (6), (7) и (8).

Так, например, для $\vartheta_1(u)$ получаем, приравнивая нулю отдельные множители каждого из двух произведений, входящих в правую часть формулы (7):

$$e^{2iu} = q^{-2n} = e^{-2n\pi i\tau},\quad e^{-2iu} = q^{-2n} = e^{-2n\pi i\tau},$$

откуда, замечая, что показательная функция обладает периодом $2\pi i$:

$$\pm 2iu = -2n\pi\tau i + 2m\pi i$$

или

$$u = \pm 2m\frac{\pi}{2} \pm 2n\frac{\pi\tau}{2}.$$

Эту формулу мы можем переписать в виде:

$$u = 2m\frac{\pi}{2} + 2n\frac{\pi\tau}{2},$$

понимая под $2m$ и $2n$ любые положительные или отрицательные четные числа. Совершенно так же получим общие выражения для нулей функций $\vartheta_2(u)$, $\vartheta_3(u)$ и $\vartheta_4(u)$. Именно, для $\vartheta_2(u)$ получим:

$$u = (2m-1)\frac{\pi}{2} + 2n\frac{\pi\tau}{2},$$

для $\vartheta_3(u)$:

$$u = (2m-1)\frac{\pi}{2} + (2n-1)\frac{\pi\tau}{2}$$

и, наконец, для $\vartheta_4(u)$:

$$u = 2m\frac{\pi}{2} + (2n-1)\frac{\pi\tau}{2}.$$

Все эти нули являются простыми.

§ 103. Выражения эллиптических функций через тэта-функции

Так как функции $\vartheta_1(u)$, $\vartheta_2(u)$, $\vartheta_3(u)$ и $\vartheta_4(u)$ — функции целые, т. е. аналитические во всей конечной плоскости, то отношения их:

$$\frac{\vartheta_1(u)}{\vartheta_4(u)},\quad \frac{\vartheta_2(u)}{\vartheta_4(u)},\quad \frac{\vartheta_3(u)}{\vartheta_4(u)},$$

являются аналитическими во всей конечной плоскости, исключая те точки, в которых знаменатель обращается в нуль. Такими точками, являющимися полюсами, и притом простыми, для рассматриваемых отношений тэта-функций, будут все нули $\vartheta_4(u)$:

$$u = 2m\frac{\pi}{2} + (2n-1)\frac{\pi\tau}{2}.$$

Функции

$$\frac{\vartheta_1(u)}{\vartheta_4(u)},\quad \frac{\vartheta_2(u)}{\vartheta_4(u)},\quad \frac{\vartheta_3(u)}{\vartheta_4(u)},$$

не имея в конечной плоскости других особых точек, кроме полюсов, мероморфны. Покажем, что они, кроме того, двоякопериодичны и, следовательно, являются эллиптическими функциями. Действительно, из формул (10) выводим, обозначая для краткости $\frac{\vartheta_1(u)}{\vartheta_4(u)}$, $\frac{\vartheta_2(u)}{\vartheta_4(u)}$ и $\frac{\vartheta_3(u)}{\vartheta_4(u)}$ через $\varphi(u)$, $\psi(u)$ и $\chi(u)$, соответственно:

$$\varphi(u+\pi) = -\varphi(u),\quad \varphi(u+\pi\tau) = \varphi(u),$$

$$\psi(u+\pi) = -\psi(u),\quad \psi(u+\pi\tau) = -\psi(u),$$

$$\chi(u+\pi) = \chi(u),\quad \chi(u+\pi\tau) = -\chi(u),$$

откуда:

$$\varphi(u+2\pi)=\varphi(u), \quad \varphi(u+\pi\tau)=\varphi(u),$$
$$\psi(u+2\pi)=\psi(u), \quad \psi(u+\pi+\pi\tau)=\psi(u),$$
$$\chi(u+\pi)=\chi(u), \quad \chi(u+2\pi\tau)=\chi(u),$$

т. е. $\varphi(u)$ имеет периоды: 2π и $\pi\tau$, $\psi(u)$ — периоды 2π и $\pi+\pi\tau$ и, наконец, $\chi(u)$ — периоды π и $2\pi\tau$.

Отметим еще нули функций $\varphi(u)$, $\psi(u)$ и $\chi(u)$.

Очевидно, что нули $\varphi(u)$, $\psi(u)$ и $\chi(u)$ совпадают, соответственно, с нулями $\vartheta_1(u)$, $\vartheta_2(u)$ и $\vartheta_3(u)$. Таким образом имеем следующие нули:

$$u=2m\frac{\pi}{2}+2n\frac{\pi}{2}\tau \quad [\text{для } \varphi(u)],$$

$$u=(2m-1)\frac{\pi}{2}+2n\frac{\pi}{2}\tau \quad [\text{для } \psi(u)],$$

$$u=(2m-1)\frac{\pi}{2}+(2n-1)\frac{\pi\tau}{2} \quad [\text{для } \chi(u)].$$

Покажем теперь, что эллиптические функции $\varphi(u)$, $\psi(u)$ и $\chi(u)$ весьма простым образом связаны с эллиптическими функциями Якоби. Рассмотрим, в самом деле, функции $\operatorname{sn}(u, k)$, $\operatorname{cn}(u, k)$ и $\operatorname{dn}(u, k)$.

Полюсы всех этих функций заключаются в формуле:

$$u=2mK+(2n-1)K'i.$$

Все эти полюсы, как мы знаем, простые.

Периодами функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ являются:

$$4K, \quad 2iK' \ (\text{для } \operatorname{sn} u),$$
$$4K, \quad 2K+2iK' \ (\text{для } \operatorname{cn} u),$$
$$2K, \quad 4iK' \ (\text{для } \operatorname{dn} u).$$

Наконец, нулями $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$ являются:

$$u=2mK+2nK'i \quad (\text{для } \operatorname{sn} u),$$
$$u=(2m-1)K+2nK'i \quad (\text{для } \operatorname{cn} u),$$
$$u=(2m-1)K+(2n-1)K'i \quad (\text{для } \operatorname{dn} u).$$

Сравним с эллиптическими функциями Якоби эллиптические функции:

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2K}u\right), \quad \psi\left(\frac{\pi}{2K}u\right) \quad \text{и} \quad \chi\left(\frac{\pi}{2K}u\right),$$

причем в тэта-функциях, через которые они выражаются, примем $\tau = i\frac{K'}{K}$, и, следовательно:

$$q=e^{\pi i\tau}=e^{-\pi\frac{K'}{K}}.$$

Очевидно, полюсы функций $\varphi\left(\frac{\pi}{2K}u\right)$, $\psi\left(\frac{\pi}{2K}u\right)$ и $\chi\left(\frac{\pi}{2K}u\right)$ заключаются в формуле:

$$\frac{\pi u}{2K}=2m\frac{\pi}{2}+(2n-1)\frac{\pi\tau}{2},$$

или

$$u=2mK+(2n-1)\tau K=2mK+(2n-1)iK'.$$

Периодами будут:

$$4K \quad \text{и} \quad 2K'i \quad \text{для } \varphi\left(\frac{\pi}{2K}u\right),$$
$$4K \quad \text{и} \quad 2K+2K'i \quad \text{для } \psi\left(\frac{\pi}{2K}u\right),$$
$$2K \quad \text{и} \quad 4K'i \quad \text{для } \chi\left(\frac{\pi}{2K}u\right).$$

Наконец, нули этих функций заключаются в формулах:

$$u=2mK+2nK'i \quad \text{для } \varphi\left(\frac{\pi}{2K}u\right),$$
$$u=(2m-1)K+2nK'i \quad \text{для } \psi\left(\frac{\pi}{2K}u\right),$$
$$u=(2m-1)K+(2n-1)K'i \quad \text{для } \chi\left(\frac{\pi}{2K}u\right).$$

Мы видим, что эллиптические функции $\operatorname{sn} u$ и $\varphi\left(\frac{\pi}{2K}u\right)$, $\operatorname{cn} u$ и $\psi\left(\frac{\pi}{2K}u\right)$ и $\operatorname{dn} u$ и $\chi\left(\frac{\pi}{2K}u\right)$ попарно имеют одни и те же периоды, полюсы и нули. Но можно доказать, на основании теоремы Лиувилля (§ 63 главы III), что две эллиптические функции с одинаковыми периодами, полюсами и нулями могут отличаться лишь постоянным множителем (мы дадим доказательство этого предложения в последней главе книги).

Таким образом, обозначая через A, B и C некоторые постоянные числа, имеем:

$$\operatorname{sn} u = A\varphi\left(\frac{\pi}{2K}u\right)=$$

$$=A\frac{\vartheta_1\left(\frac{\pi}{2K}u\right)}{\vartheta_4\left(\frac{\pi}{2K}u\right)}=2Aq^{\frac{1}{4}}\sin\frac{\pi u}{2K}\frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-2q^{2n}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4n}\right)}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-2q^{2n-1}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4n-2}\right)}, \tag{11}$$

$$\operatorname{cn} u = B\psi\left(\frac{\pi}{2K}u\right)=$$

$$=B\frac{\vartheta_2\left(\frac{\pi}{2K}u\right)}{\vartheta_4\left(\frac{\pi}{2K}u\right)}=2Bq^{\frac{1}{4}}\cdot\cos\frac{\pi u}{2K}\frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+2q^{2n}\cdot\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4n}\right)}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-2q^{2n-1}\cdot\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4n-2}\right)}, \tag{12}$$

$$\operatorname{dn} u = C\chi\left(\frac{\pi}{2K}u\right) =$$

$$= C\,\frac{\vartheta_3\left(\frac{\pi}{2K}u\right)}{\vartheta_4\left(\frac{\pi}{2K}u\right)} = C\,\frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+2q^{2n-1}\cdot\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4n-2}\right)}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-2q^{2n-1}\cdot\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4n-2}\right)}. \quad (1$$

В этих формулах остается лишь определить значения постоянных A, B и C.

Для того чтобы определить коэфициент A, положим в обеих частях равенства (11) $u = K$.

Тогда получим, замечая, что $\operatorname{sn} K = 1$:

$$1 = 2Aq^{\frac{1}{4}}\,\frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n}+q^{4n})}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n-1}+q^{4n-2})} = 2Aq^{\frac{1}{4}}\left[\frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})}\right]^2,$$

откуда

$$A = \frac{1}{2}\,q^{-\frac{1}{4}}\left[\frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})}\right]^2. \qquad (14)$$

Полагая $u = 0$ в формулах (12) и (13), получаем:

$$1 = 2Bq^{\frac{1}{4}}\,\frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n}+q^{4n})}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n-1}+q^{4n-2})}$$

и

$$1 = C\,\frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n-1}+q^{4n-2})}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n-1}+q^{4n-2})},$$

откуда

$$B = \frac{1}{2}\,q^{-\frac{1}{4}}\left[\frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})}\right]^2 \qquad (15)$$

и

$$C = \left[\frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})}\right]^2. \qquad (16)$$

В этих формулах A, B и C выражены через $q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$. Укажем для коэфициентов A, B и C еще и другие выражения через модули k и k' функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$.

Положим для этого в равенстве (11) $u = K + iK'$. Так как

$$\operatorname{sn}(K+iK') = \frac{1}{k}$$

[см. формулу (74)] и

$$\sin\frac{\pi}{2K}(K+iK') = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\,i\,\frac{K'}{K}\right) = \cos\frac{\pi\tau}{2} = \frac{e^{\frac{\pi i\tau}{2}}+e^{-\frac{\pi i\tau}{2}}}{2} = \frac{q^{\frac{1}{2}}+q^{-\frac{1}{2}}}{2},$$

$$\cos\frac{\pi}{K}(K+iK') = \cos\left(\pi+\pi i\,\frac{K'}{K}\right) = -\cos\pi\tau = -\frac{e^{\pi i\tau}+e^{-\pi i\tau}}{2} =$$

$$= -\frac{q+q^{-1}}{2},$$

то

$$\frac{1}{k} = 2Aq^{\frac{1}{4}}\,\frac{q^{\frac{1}{2}}+q^{-\frac{1}{2}}}{2}\cdot\frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n+1}+q^{2n-1}+q^{4n})}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n}+q^{2n-2}+q^{4n-2})} =$$

$$= Aq^{-\frac{1}{4}}\,\frac{(1+q)\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})(1+q^{2n+1})}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-2})(1+q^{2n})} =$$

$$= Aq^{-\frac{1}{4}}\,\frac{(1+q)(1+q)(1+q^3)(1+q^3)\ldots}{2(1+q^2)(1+q^2)(1+q^4)(1+q^4)\ldots} = \frac{Aq^{-\frac{1}{4}}}{2}\left[\frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})}\right]^2,$$

откуда

$$A=\frac{2q^{\frac{1}{4}}}{k}\left[\frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})}\right]^{2}. \tag{17}$$

Перемножая почленно равенства (14) и (17), получим:

$$A^2=\frac{1}{k},$$

откуда

$$A=\frac{1}{\sqrt{k}}. \tag{18}$$

Чтобы получить аналогичное выражение для C, положим в формуле (13) $u=K$. Получим:

$$k'=C\frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n-1}+q^{4n-2})}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n-1}+q^{4n-2})},$$

откуда

$$C=k'\left[\frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})}\right]^{2}. \tag{19}$$

Перемножая равенства (16) и (19) найдем:

$$C^2=k' \quad \text{или} \quad C=\sqrt{k'}. \tag{20}$$

Наконец, из формул (14), (15) и (16) следует, что

$$B=A\cdot C.$$

Поэтому имеем:

$$B=\sqrt{\frac{k'}{k}}. \tag{21}$$

Окончательно получаем следующие формулы для $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$:

$$\operatorname{sn} u=\frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\vartheta_1\left(\frac{\pi}{2K}u\right)}{\vartheta_4\left(\frac{\pi}{2K}u\right)}=2k^{-\frac{1}{2}}\cdot q^{\frac{1}{4}}\times$$

$$\times\sin\frac{\pi u}{2K}\,\frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-2q^{2n}\cdot\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4n}\right)}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-2q^{2n-1}\cdot\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4n-2}\right)}, \tag{22}$$

$$\operatorname{cn} u=\sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{\vartheta_2\left(\frac{\pi}{2K}u\right)}{\vartheta_4\left(\frac{\pi}{2K}u\right)}=2k'^{\frac{1}{2}}\cdot k^{-\frac{1}{2}}\times$$

$$\times q^{\frac{1}{4}}\cos\frac{\pi u}{2K}\cdot\frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+2q^{2n}\cdot\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4n}\right)}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-2q^{2n-1}\cdot\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4n-2}\right)}, \tag{23}$$

$$\operatorname{dn} u=\sqrt{k'}\,\frac{\vartheta_3\left(\frac{\pi}{2K}u\right)}{\vartheta_4\left(\frac{\pi}{2K}u\right)}=k'^{\frac{1}{2}}\frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+2q^{2n-1}\cdot\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4n-2}\right)}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-2q^{2n-1}\cdot\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4n-2}\right)}. \tag{24}$$

Эти формулы, представляющие мероморфные функции $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$ в виде отношения двух целых функций, каждая из которых представлена в виде бесконечного произведения, аналогичны формулам, представляющим рациональные дроби в виде отношения двух многочленов, каждый из которых разложен на множители.

§ 104. Ранние обозначения Якоби для тэта-функций

Для функций

$$\vartheta_1\left(\frac{\pi}{2K}u\right),\quad \vartheta_2\left(\frac{\pi}{2K}u\right),$$
$$\vartheta_3\left(\frac{\pi}{2K}u\right)\quad \text{и}\quad \vartheta_4\left(\frac{\pi}{2K}u\right).$$

Якоби в своем сочинении «Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticorum» (1829) употреблял следующие обозначения, которыми мы будем пользоваться в дальнейших параграфах:

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_4\left(\frac{\pi}{2K}u\right)&=\Theta(u),\\ \vartheta_1\left(\frac{\pi}{2K}u\right)&=H(u),\\ \vartheta_2\left(\frac{\pi}{2K}u\right)&=H_1(u),\\ \vartheta_3\left(\frac{\pi}{2K}u\right)&=\Theta_1(u).\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Таким образом для функций $\Theta(u)$, $H(u)$, $H_1(u)$ и $\Theta_1(u)$ имеем формулы:

$$\Theta(u)=G\prod_{1}^{\infty}\left(1-2q^{2n-1}\cdot\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4n-2}\right), \tag{26}$$

$$H(u)=2Gq^{\frac{1}{4}}\cdot\sin\frac{\pi u}{2K}\prod_{1}^{\infty}\left(1-2q^{2n}\cdot\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4n}\right),\tag{27}$$

$$H_1(u)=2Gq^{\frac{1}{4}}\cdot\cos\frac{\pi u}{2K}\prod_{1}^{\infty}\left(1+2q^{2n}\cdot\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4n}\right),\tag{28}$$

$$\Theta_1(u)=G\prod^{\infty}\left(1+2q^{2n-1}\cdot\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4n-2}\right).\tag{29}$$

В этих формулах G означает некоторый постоянный коэфициент, значение которого мы позднее фиксируем.

Из формул (5), (10) и (25) выводим, замечая, что $\tau=i\frac{K'}{K}$:

$$\left.\begin{aligned}\Theta(u+K)&=\Theta_1(u),\\ H(u+K)&=H_1(u),\\ H_1(u+K)&=-H(u),\\ \Theta_1(u+K)&=\Theta(u),\end{aligned}\right\}\tag{30}$$

$$\left.\begin{aligned}\Theta(u+2K)&=\Theta(u),\\ H(u+2K)&=-H(u),\\ H_1(u+2K)&=-H_1(u),\\ \Theta_1(u+2K)&=\Theta_1(u).\end{aligned}\right\}\tag{31}$$

$$\left.\begin{aligned}\Theta(u+iK')&=ie^{-\frac{\pi i}{4K}(2u+K'i)}\cdot H(u),\\ H(u+iK')&=ie^{-\frac{\pi i}{4K}(2u+K'i)}\cdot\Theta(u),\\ H_1(u+iK')&=e^{-\frac{\pi i}{4K}(2u+K'i)}\cdot\Theta_1(u),\\ \Theta_1(u+iK')&=e^{-\frac{\pi i}{4K}(2u+K'i)}\cdot H_1(u),\end{aligned}\right|\tag{32}$$

$$\left.\begin{aligned}\Theta(u+2iK')&=-e^{-\frac{\pi i}{K}(u+K'i)}\cdot\Theta(u),\\ H(u+2iK')&=-e^{-\frac{\pi i}{K}(u+K'i)}\cdot H(u),\\ H_1(u+2iK')&=e^{-\frac{\pi i}{K}(u+K'i)}\cdot H_1(u),\\ \Theta_1(u+2iK')&=e^{-\frac{\pi i}{K}(u+K'i)}\cdot\Theta_1(u).\end{aligned}\right|\tag{33}$$

Для примера покажем, как выводится соотношение:

$$\Theta_1(u+iK')=e^{-\frac{\pi i}{4K}(2u+K'i)}\cdot H_1(u).$$

Из формул (25) и (5) имеем:

$$\Theta_1(u+iK')=$$

$$=\vartheta_3\left(\frac{\pi u}{2K}+\frac{\pi iK'}{2K}\right)=\vartheta_3\left(\frac{\pi u}{2K}+\frac{\pi\tau}{2}\right)=\vartheta_4\left(\frac{\pi u}{2K}+\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi\tau\right)=$$

$$=iq^{-\frac{1}{4}}\cdot e^{-i\left(\frac{\pi u}{2K}+\frac{1}{2}\pi\right)}\cdot\vartheta_1\left(\frac{\pi u}{2K}+\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=e^{\frac{\pi i}{2}}\cdot e^{+\frac{\pi K'}{4K}}\cdot e^{-i\left(\frac{\pi u}{2K}+\frac{1}{2}\pi\right)}\cdot\vartheta_2\left(\frac{\pi u}{2K}\right)=e^{-\frac{\pi i}{4K}(2u+iK')}\cdot H_1(u).$$

Аналогично выводятся и остальные формулы. Эти формулы играют для тэта-функций ту же роль, что и формулы приведения для тригонометрических функций. Из них следует, что функция $\Theta(u)$ и $\Theta_1(u)$ имеют период $2K$, а функции $H(u)$ и $H_1(u)$ — период $4K$.

Из формул (26) — (29), определяющих функции $\Theta(u)$, $H(u)$, $H_1(u)$ и $\Theta_1(u)$, следует непосредственно, что $\Theta(u)$, $H_1(u)$ и $\Theta_1(u)$ — четные функции, а $H(u)$ — нечетная функция:

$$\left.\begin{aligned}\Theta(-u)&=\Theta(u),\\ H(-u)&=-H(u),\\ H_1(-u)&=H_1(u),\\ \Theta_1(-u)&=\Theta_1(u).\end{aligned}\right\}\tag{34}$$

Отметим еще нули рассматриваемых функций. Выражения для них тотчас же получаются из выражений § 102 для нулей функций $\vartheta_1(u)$, $\vartheta_2(u)$, $\vartheta_3(u)$ и $\vartheta_4(u)$.

Именно нулями будут:

$$\begin{aligned}u&=2mK+(2n-1)K'i\quad[\text{для }\Theta(u)],\\ u&=2mK+2nK'i\quad[\text{для }H(u)],\\ u&=(2m-1)K+2nK'i\quad[\text{для }H_1(u)],\\ u&=(2m-1)K+(2n-1)K'i\quad[\text{для }\Theta_1(u)].\end{aligned}$$

Наконец, из формул (22) — (24), следует:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sn}u&=\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{H(u)}{\Theta(u)},\\ \operatorname{cn}u&=\sqrt{\frac{k'}{k}}\cdot\frac{H_1(u)}{\Theta(u)},\\ \operatorname{dn}u&=\sqrt{k'}\cdot\frac{\Theta_1(u)}{\Theta(u)}.\end{aligned}\right\}\tag{35}$$

Так как

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1$$

и

$$k^2 \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{dn}^2 u = 1,$$

то

$$\left.\begin{aligned} H^2(u) + k' H_1^2(u) &= k\theta^2(u) \\ kH^2(u) + k'\theta_1^2(u) &= \theta^2(u). \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

и

§ 105. Разложение тэта-функций в ряды Фурье

Из курса анализа хорошо известно, сколь важное значение имеет разложение функции в ряд, расположенный по синусам и косинусам кратных дуг, т. е. в ряд Фурье. Благодаря своей крайней гибкости эта аналитическая форма способна отобразить самые разнообразные функциональные зависимости. Вполне естественно поэтому искать удобные аналитические выражения в виде ряда Фурье и для функций $\theta(u)$, $H(u)$, $H_1(u)$ и $\theta_1(u)$.

Разложив эти функции по синусам и косинусам кратных дуг, мы вместе с тем обнаружим, что каждая из двоякопериодических функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$ может быть представлена в виде отношения двух рядов Фурье.

Разлагая в ряд Фурье функцию $\theta(u)$, прежде всего заметим, что эта функция четная. Поэтому ее разложение должно иметь вид:

$$\theta(u) = A_0 + A_1 \cos\frac{\pi u}{K} + A_2 \cos\frac{2\pi u}{K} + A_3 \cos\frac{3\pi u}{K} + \ldots$$

Для определения коэфициентов A_0, A_1, A_2, $A_3, \ldots$ удобнее перейти от тригонометрических к показательным функциям, заменяя косинусы их выражениями по формуле Эйлера.

При этом

$$\begin{aligned} \theta(u) = A_0 &+ \frac{A_1}{2} e^{\frac{\pi i u}{K}} + \frac{A_2}{2} e^{\frac{2\pi i u}{K}} + \frac{A_3}{2} e^{\frac{3\pi i u}{K}} + \ldots \\ \ldots &+ \frac{A_1}{2} e^{-\frac{\pi i u}{K}} + \frac{A_2}{2} e^{-\frac{2\pi i u}{K}} + \frac{A_3}{2} e^{-\frac{3\pi i u}{K}} + \ldots \end{aligned} \tag{37}$$

Умножение обеих частей этого равенства на

$$-\frac{1}{q} e^{-\frac{\pi i u}{K}}$$

дает:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{q} e^{-\frac{\pi i u}{K}} \cdot \theta(u) = -\frac{A_0}{q} e^{-\frac{\pi i u}{K}} - \frac{A_1}{2q} - \frac{A_2}{2q} e^{\frac{\pi i u}{K}} - \frac{A_3}{2q} e^{\frac{2\pi i u}{K}} - \ldots \\ \ldots - \frac{A_1}{2q} e^{-\frac{2\pi i u}{K}} - \frac{A_2}{2q} e^{-\frac{3\pi i u}{K}} - \frac{A_3}{2q} e^{-\frac{4\pi i u}{K}} - \ldots \end{aligned} \tag{38}$$

С другой стороны, заменяя в (37) аргумент u на $u + 2K'i$, получим:

$$\begin{aligned} \theta(u + 2K'i) = A_0 + \frac{A_1 q^2}{2} e^{\frac{\pi i u}{K}} + \frac{A_2 q^4}{2} e^{\frac{2\pi i u}{K}} + \frac{A_3 q^6}{2} e^{\frac{3\pi i u}{K}} + \ldots \\ \ldots + \frac{A_1}{2q^2} e^{-\frac{\pi i u}{K}} + \frac{A_2}{2q^4} e^{-\frac{2\pi i u}{K}} + \frac{A_3}{2q^6} e^{-\frac{3\pi i u}{K}} + \ldots \end{aligned} \tag{39}$$

Но в силу первой из формул (33):

$$\theta(u + 2K'i) = -\theta(u) \cdot e^{-\frac{\pi i}{K}(u + K'i)} = -\frac{1}{q} e^{-\frac{\pi i u}{K}} \cdot \theta(u).$$

Следовательно, (38) и (39) должны быть равны между собой. А это требует, чтобы

$$\begin{aligned} -\frac{A_1}{2q} &= A_0, & & A_1 = -2qA_0, \\ -\frac{A_2}{2q} &= \frac{A_1 q^2}{2}, & \text{т. е.} \quad & A_2 = 2q^4 A_0, \\ -\frac{A_3}{2q} &= \frac{A_2 q^4}{2}, & & A_3 = -2q^9 A_0, \\ &\ldots\ldots & & \ldots\ldots \end{aligned}$$

Вследствие чего:

$$\theta(u) = A_0\left(1 - 2q\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4 \cdot \cos\frac{2\pi u}{K} - 2q^9 \cdot \cos\frac{3\pi u}{K} + \ldots\right). \tag{40}$$

Для нечетной функции $H(u)$, следуя тому же пути, получим:

$$H(u) = B_0\left(q^{\frac{1}{4}} \sin\frac{\pi u}{2K} - q^{\frac{9}{4}} \cdot \sin\frac{3\pi u}{2K} + q^{\frac{25}{4}} \cdot \sin\frac{5\pi u}{2K} - \ldots\right). \tag{41}$$

Коэфициенты A_0 и B_0 в этих разложениях остаются неопределенными.

Можно показать, что $B_0 = 2A_0$. Сделать это можно таким образом.

Перепишем (40) в виде:

$$\theta(u) = A_0\left(1 + 2\sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2} \cdot \cos\frac{n\pi u}{K}\right)$$

и выразим $\cos\frac{n\pi u}{K}$ через показательные функции. Получим:

$$\theta(u) = A_0\left[1 + \sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2} e^{\frac{n\pi i u}{K}} + \sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2} e^{-\frac{n\pi i u}{K}}\right].$$

Теперь заменим в третьем слагаемом n на $-n$. Мы найдем:

$$\theta(u) = A_0\left[1 + \sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2} e^{\frac{n\pi i u}{K}} + \sum_{-1}^{-\infty} (-1)^{-n} \cdot q^{n^2} e^{\frac{n\pi i u}{K}}\right],$$

или

$$\theta(u) = A_0 \sum_0^\infty (-1)^n q^{n^2} e^{\frac{n\pi i u}{K}} + A_0 \sum_{-1}^{-\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{\frac{n\pi i u}{K}},$$

или короче:

$$\Theta(u)=A_0\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{\frac{n\pi i u}{K}-\frac{K'}{K}\pi n^2},$$

причем во всех случаях суммирование производится по значку n.

Но показатель степени

$$\frac{n\pi i u}{K}-\frac{K'}{K}\,n^2\pi=\frac{\pi i}{K}(nu+n^2K'i).$$

Следовательно:

$$\Theta(u)=A_0\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{\frac{\pi i}{K}(nu+n^2K'i)}$$

Проделав с (41) аналогичное преобразование, можно показать, что

$$H(u)=\frac{B_0}{2i}\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{\frac{\pi i}{2K}\left[(2n+1)u+\frac{(2n+1)^2}{2}K'i\right]}$$

Замена в этом равенстве аргумента u на $u+K'i$ дает:

$$H(u+K'i)=\frac{B_0 i}{2}\,e^{-\frac{\pi i}{4K}(2u+K'i)}\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{n+1}e^{\frac{\pi i}{K}[(n+1)u+(n+1)^2K'i]},$$

т. е.

$$H(u+K'i)=\frac{B_0 i}{2A_0}\,e^{-\frac{\pi i}{4K}(2u+K'i)}\cdot\Theta(u).$$

Сравнивая это равенство со вторым равенством группы (32), заключаем, что

$$\frac{B_0}{2A_0}=1,\quad \text{т. е.}\quad B_0=2A_0.$$

Приняв $A_0=1$ (что равносильно выбору оставшегося неопределенным множителя G), будет иметь разложения:

$$\Theta(u)=1-2q\cos\frac{\pi u}{K}+2q^4\cos\frac{2\pi u}{K}-2q^9\cos\frac{3\pi u}{K}+\ldots \tag{42}$$

$$H(u)=2\left(\sqrt[4]{q}\cdot\sin\frac{\pi u}{2K}-\sqrt[4]{q^9}\sin\frac{3\pi u}{2K}+\sqrt[4]{q^{25}}\,\frac{\sin 5\pi u}{2K}-\ldots\right) \tag{43}$$

и, на основании первых двух из формул (30):

$$H_1(u)=2\left(\sqrt[4]{q}\cos\frac{\pi u}{2K}+\sqrt[4]{q^9}\cos\frac{3\pi u}{2K}+\sqrt[4]{q^{25}}\,\frac{\cos 5\pi u}{2K}+\ldots\right) \tag{44}$$

$$\Theta_1(u)=1+2q\cos\frac{\pi u}{K}+2q^4\cos\frac{2\pi u}{K}+2q^9\cos\frac{3\pi u}{K}+\ldots \tag{45}$$

Заметим, что все эти ряды абсолютно сходятся при $|q|<1$. Если $\left|\frac{u}{K}\right|$ ограничено и $|q|\leqslant q_1<1$, то ряды равномерно сходятся.

Разложения, выраженные в показательных функциях, будут таковы:

$$\left.\begin{aligned}
\Theta(u)&=\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{\frac{\pi i}{K}(nu+n^2K'i)},\\
H(u)&=\frac{1}{i}\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{\frac{\pi i}{2K}\left[(2n+1)u+\frac{(2n+1)^2}{2}K'i\right]},\\
H_1(u)&=\sum_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{\pi i}{2K}\left[(2n+1)u+\frac{(2n+1)^2}{2}K'i\right]},\\
\Theta_1(u)&=\sum_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{\pi i}{K}(nu+n^2K'i)}.
\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Замечание. Определяя функции Θ и H равенствами (26)—(29), мы в их состав вводили множитель G. Этот множитель может быть теперь после выбора A_0 определен, например, из равенства:

$$G\left(1+2q\cos\frac{\pi u}{K}+q^2\right)\left(1+2q^3\cos\frac{\pi u}{K}+q^6\right)\ldots=$$

$$=1+2q\cos\frac{\pi u}{K}+2q^4\cos\frac{2\pi u}{K}+2q^9\cos\frac{3\pi u}{K}+\ldots,$$

получаемого путем сравнения двух выражений функции $\Theta_1(u)$.

Значение G может быть получено, если положим, что $u=0$. Якоби показал, что полученное таким образом значение может быть заменено таким:

$$G=(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots \tag{47}$$

Не останавливаясь на доказательстве, мы примем (47) за известное.

§ 106. Вычисление величины q

1. Для нахождения численного значения величины q по заданному модулярному углу θ, меньшему 45°, воспользуемся равенством:

$$\operatorname{dn} u=\sqrt{k'}\,\frac{\Theta_1(u)}{\Theta(u)}=\sqrt{k'}\,\frac{\Theta(K+u)}{\Theta(u)}$$

и положим в нем $u=0$. Мы получим:

$$1=\sqrt{k'}\,\frac{\Theta(K)}{\Theta(0)}.$$

Но так как

$$\Theta(u)=1-2q\cos\frac{\pi u}{K}+2q^4\cos\frac{2\pi u}{K}-\ldots,$$

то

$$\Theta(K)=1+2q+2q^4+\ldots;\quad \Theta(0)=1-2q+2q^4-\ldots$$

Вследствие этого:

$$\sqrt{k'} = \frac{1-2q+2q^4-2q^9+\ldots}{1+2q+2q^4+2q^9+\ldots}. \tag{48}$$

Производя деление рядов и замечая, что $k' = \cos\theta$, будем иметь:

$$\sqrt{\cos\theta} = 1 - 4q + 8q^2 - 16q^3 + 32q^4 - 56q^5 + \ldots$$

Первые пять членов разложения не изменятся, если мы примем приближенно:

$$\sqrt{\cos\theta} = \frac{1-2q}{1+2q},$$

т. е.

$$q = \frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{\cos\theta}}{1+\sqrt{\cos\theta}}. \tag{49}$$

Например, если $\theta = 30°$, то, положив $\sqrt{\cos 30°} = \cos\mu$, находим:

$$\mu = 21°\,28'\,20'',$$

т. е.

$$q = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}^2\,10°\,44'\,10'',$$

или

$$q = 0{,}017974.$$

2. Если модулярный угол θ больше 45°, то вместо величины q вычисляют величину $q' = e^{-\frac{\pi K}{K'}}$, зная которую нетрудно вычислить и q. Прием этот основан на том замечании, что если в интеграле

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

мы заменим модуль k на k', или, что то же, заменим угол θ на $90° - \theta$, то K превратится в интеграл

$$K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}.$$

И если угол $\theta > 45°$, то угол $\theta' = 90° - \theta < 45°$.

Притом, очевидно, величина

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$$

преобразуется в величину

$$q' = e^{-\frac{\pi K}{K'}}.$$

Установим связь между q и q'.

Заметив, что

$$\frac{1}{q} = e^{\frac{\pi K'}{K}}; \quad \frac{1}{q'} = e^{\frac{\pi K}{K'}},$$

будем иметь:

$$\lg\frac{1}{q} = \frac{\pi K'}{K}\lg e; \quad \lg\frac{1}{q'} = \frac{\pi K}{K'}\lg e.$$

Следовательно:

$$\lg\frac{1}{q}\cdot\lg\frac{1}{q'} = \pi^2\lg^2 e,$$

т. е.

$$\lg\lg\frac{1}{q} + \lg\lg\frac{1}{q'} = 2(\lg\pi + \lg\lg e),$$

или

$$\lg\lg\frac{1}{q} + \lg\lg\frac{1}{q'} = 0{,}26986. \tag{50}$$

Так как модулярный угол $\theta' < 45°$, то величину q' можно вычислить приближенно по формуле:

$$q' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{\cos\theta'}}{1+\sqrt{\cos\theta'}}.$$

Зная q', при помощи (50) найдем q.

Пусть, например, требуется вычислить q в случае, когда $\theta = 76°$.

Имеем: $\theta' = 14°$;

$$q' = \frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{\cos 14°}}{1+\sqrt{\cos 14°}}.$$

Полагая $\sqrt{\cos 14°} = \cos\mu$, находим:

$$\mu = 9°\,55'\,30''.$$

Следовательно:

$$q' = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}^2\,4°\,57'\,45'';$$

$$\frac{1}{q'} = 2\,\mathrm{ctg}^2\,4°57'45''; \quad \lg\lg\frac{1}{q'} = 0{,}38448;$$

$$\lg\lg\frac{1}{q} = \bar{1}{,}88538; \quad \lg\frac{1}{q} = 0{,}76803;$$

$$\lg q = \bar{1}{,}23197;$$

$$q = 0{,}17059.$$

§ 107. Вычисление значений тэта-функций

Для вычисления этих функций можно пользоваться весьма быстро сходящимися рядами (42)—(45).

Пусть, например, при модуле $k = \frac{1}{2}$ требуется вычислить:

$$\Theta(1{,}2); \quad H(1{,}2); \quad H_1(1{,}2) \quad \text{и} \quad \Theta_1(1{,}2).$$

1. Ограничиваясь первыми тремя членами для функции $\Theta(u)$, будем иметь:

$$\Theta(u) = 1 - 2q\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{K}.$$

Обозначим градусную меру дуги $\frac{\pi u}{K}$ через $2x$. В таком случае:

$$\Theta = 1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x,$$

или

$$\Theta = 1 + a + b,$$

где

$$a = -2q\cos 2x, \quad b = 2q^4\cos 4x.$$

В табл. 4 находим, что при $k = \frac{1}{2}$, т. е. при модулярном угле 30°:

$$\lg q = \bar{2},25461.$$

Вычисляем:

$$a = -2q\cos 2x.$$

Заметив, что согласно табл. 3, при модулярном угле 30° интеграл $K = 1,68575$, имеем:

$$x = \frac{180^\circ u}{2K} = \left(\frac{90\cdot 1,2}{1,68575}\right)^\circ; \quad \log x = 1,80633;$$

$$x = 64^\circ,066;$$

т. е.

$$x = 64^\circ 3'58''; \quad 2x = 128^\circ 7'56''.$$

Следовательно:

$$a = 2q\cos 51^\circ 52'4'';$$

$$\lg a = \bar{2},34626;$$

$$a = 0,02220.$$

Вычисляем $b = 2q^4\cos 4x$. Имеем:

$$4x = 256^\circ 15'52''; \quad b = 2q^4\cos 256^\circ 15'52'' = -2q^4\sin 13^\circ 44'8'';$$

$$\lg(-b) = \bar{8},69503; \quad b = -0,00000005;$$

$$\Theta(1,2) = 1,02220.$$

2. Ограничиваясь двумя членами для функции $H(u)$, имеем:

$$H(u) = 2\sqrt[4]{q}\sin\frac{\pi u}{2K} - 2\sqrt[4]{q^9}\sin\frac{3\pi u}{2K},$$

или

$$H = 2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x,$$

или еще

$$H = a + b,$$

где

$$a = 2\sqrt[4]{q}\cdot\sin x; \quad b = -2\sqrt[4]{q^9}\cdot\sin 3x.$$

Вычисляем a. Имеем:

$$a = 2\sqrt[4]{q}\sin 64^\circ 3'58''; \quad \lg a = \bar{1},81859; \quad a = 0,65855.$$

Вычисляем b. Имеем:

$$b = -2\sqrt[4]{q^9}\sin 192^\circ 11'54'' = 2\sqrt[4]{q^9}\sin 12^\circ 11'54'';$$

$$\lg b = \bar{5},69880; \quad b = 0,00005;$$

$$H(1,2) = 0,65860.$$

3. Для функции $\Theta_1(u)$ берем три члена. Получим:

$$\Theta_1(u) = 1 + 2q\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{K}.$$

Воспользовавшись результатами, полученными при вычислении $\Theta(1,2)$, получим:

$$\Theta_1(1,2) = 0,97780.$$

4. Для функции $H_1(u)$ имеем:

$$H_1(u) = 2\sqrt[4]{q}\cos\frac{\pi u}{2K} + 2\sqrt[4]{q^9}\cos\frac{3\pi u}{2K},$$

или

$$H_1 = a + b,$$

где

$$a = 2\sqrt[4]{q}\cos x;$$

$$b = 2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x,$$

причем $x = \frac{\pi u}{2K}$. Проделав выкладки, аналогичные предыдущим, получаем:

$$H_1(1,2) = 0,32002.$$

§ 108. Вычисление значений функций sn u, cn u и dn u

В виде примера вычислим значения функций

$$\mathrm{sn}(1,2); \quad \mathrm{cn}(1,2); \quad \mathrm{dn}(1,2),$$

при модуле $k = \frac{1}{2}$.

Согласно формулам (35), будем иметь:

$$\mathrm{sn}(1,2) = \sqrt{2}\,\frac{H(1,2)}{\Theta(1,2)},$$

$$\mathrm{cn}(1,2) = \sqrt[4]{3}\,\frac{H_1(1,2)}{\Theta(1,2)},$$

$$\mathrm{dn}(1,2) = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\Theta_1(1,2)}{\Theta(1,2)}.$$

Воспользуемся результатами предыдущего параграфа. Мы найдем:

$$\operatorname{sn}(1,2)=\sqrt{2}\cdot\frac{0,6586}{1,0222},$$

$$\operatorname{cn}(1,2)=\sqrt[4]{3}\,\frac{0,32002}{1,0222},$$

$$\operatorname{dn}(1,2)=\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{0,9778}{1,0222}.$$

Вычисления при помощи логарифмических таблиц дадут:

$$\operatorname{sn}(1,2)=0,91115;$$

$$\operatorname{cn}(1,2)=0,41202;$$

$$\operatorname{dn}(1,2)=0,89019.$$

§ 109. Выражения значений $\theta(0)$ и $\theta(K)$ в конечном виде

Выведем здесь важные для дальнейшего выражения для $\theta(0)$ и $\theta(K)$.

Положим сначала в равенстве (26), что $u=0$. Пользуясь для G выражением (47), будем иметь:

$$\theta(0)=(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\ldots(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots$$
$$\ldots(1-q)^2(1-q^3)^2\ldots$$

Отсюда, приняв во внимание, что

$$(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots=\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\ldots},$$

получим:

$$\theta(0)=\frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\ldots},$$

т. е.

$$\theta(0)=\prod_1^\infty\left(\frac{1-q^n}{1+q^n}\right). \qquad (51)$$

Теперь воспользуемся равенством (12) и в нем положим, что $u=0$ и кроме того, что $u=K$. Будем иметь:

$$1=2Bq^{\frac{1}{4}}\prod_1^\infty\left(\frac{1+q^{2n}}{1-q^{2n-1}}\right)^2 \qquad (52)$$

и

$$\left[\frac{\operatorname{cn}u}{\cos\frac{\pi u}{2K}}\right]_{u\to K}=2Bq^{\frac{1}{4}}\prod_1^\infty\left(\frac{1-q^{2n}}{1+q^{2n-1}}\right)^2.$$

Так как левая часть последнего равенства имеет вид $\frac{0}{0}$, то отношение функций заменяем отношением производных. Результат будет такой:

$$\left[\frac{\operatorname{cn}u}{\cos\frac{\pi u}{2K}}\right]_{u\to K}=\left[\frac{-\operatorname{sn}u\cdot\operatorname{dn}u}{-\frac{\pi}{2K}\sin\frac{\pi u}{2K}}\right]_{u\to K}=\frac{2Kk'}{\pi}.$$

Следовательно:

$$\frac{2Kk'}{\pi}=2Bq^{\frac{1}{4}}\prod_1^\infty\left(\frac{1-q^{2n}}{1+q^{2n-1}}\right)^2. \qquad (53)$$

Отсюда при помощи (52) находим:

$$\frac{2Kk'}{\pi}=\prod_1^\infty\left[\frac{(1-q^{2n})(1-q^{2n-1})}{(1+q^{2n-1})(1+q^{2n})}\right]^2$$

или

$$\frac{2Kk'}{\pi}=\prod_1^\infty\left(\frac{1-q^n}{1+q^n}\right)^2.$$

Приняв во внимание (51), приходим к заключению, что

$$\theta(0)=\sqrt{\frac{2Kk'}{\pi}}. \qquad (54)$$

Так как в § 106 мы нашли, что

$$1=\sqrt{k'}\cdot\frac{\theta(K)}{\theta(0)},$$

то

$$\theta(K)=\sqrt{\frac{2K}{\pi}}. \qquad (55)$$

§ 110. Вычисление полного интеграла K

Вычисление полного интеграла K можно производить по формуле:

$$K=\frac{\pi}{2}\theta^2(K)=\frac{\pi}{2}(1+2q+2q^4+2q^9+\ldots)^2,$$

легко получаемой из (55). На практике часто в скобках удерживают только два члена так, что

$$K=\frac{\pi}{2}(1+2q)^2. \qquad (56)$$

Можно получить и другую весьма удобную для вычислений формулу Для этого надо сложить (54) и (55). Выполнив нетрудные преобразования, найдем:

$$K=\frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{1+\sqrt{k'}}\right)^2(1+2q^4+2q^{16}+\ldots)^2.$$

При модулярном угле $\theta = 45^\circ$ будем иметь $\lg q = 2{,}636$ (см. табл. 4). Стало быть:

$$\lg 2q^{16} = \overline{22}{,}477.$$

Отсюда видно, что во вторых скобках последней формулы достаточно удержать два члена, причем

$$K = \frac{2\pi}{(1+\sqrt{k'})^2}(1+2q^4)^2. \tag{57}$$

Пример. Вычислим полный интеграл K, модулярный угол которого $\theta = 22^\circ$.

Воспользуемся формулой (56).

Сначала вычислим $2q$. Пользуясь табл. 4, при модулярном угле 22° находим:

$$\lg 2q = 0{,}30103 + \overline{3}{,}97540 = \overline{2}{,}27643;$$

$$1 + 2q = 1{,}01890; \quad \lg K = \lg\frac{\pi}{2} + 2\lg 1{,}01890 = 0{,}21238;$$

$$K = 1{,}63073.$$

§ 111. Вычисление эллиптических интегралов первого рода, когда даны амплитуда φ и модуль k

При вычислении интеграла

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

будем исходить из равенства:

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{k'}\cdot\frac{\theta_1(u)}{\theta(u)},$$

левая часть которого вычисляется по формуле:

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi},$$

при данном модуле k и амплитуде φ известна.

После замены функций $\Theta_1(u)$ и $\Theta(u)$ их значениями получим:

$$\frac{\operatorname{dn} u}{\sqrt{k'}} = \frac{1 + 2q\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{K} + 2q^9\cos\frac{3\pi u}{K} + \ldots}{1 - 2q\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{K} - 2q^9\cos\frac{3\pi u}{K} + \ldots},$$

или

$$\operatorname{ctg}\lambda = \frac{1 + 2q\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{K} + 2q^9\cos\frac{3\pi u}{K} + \ldots}{1 - 2q\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{K} - 2q^9\cos\frac{3\pi u}{K} + \ldots},$$

где положено, что

$$\frac{\operatorname{dn} u}{\sqrt{k'}} = \operatorname{ctg}\lambda.$$

Составив производную пропорцию, будем иметь:

$$\frac{\operatorname{ctg}\lambda - 1}{\operatorname{ctg}\lambda + 1} = \operatorname{tg}(45^\circ - \lambda) = 2q\,\frac{\cos\frac{\pi u}{K} + q^8\cos\frac{3\pi u}{K} + \ldots}{1 + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{K} + 2q^{16}\cos\frac{4\pi u}{K} + \ldots}.$$

В виде первого приближения, весьма часто удовлетворяющего практическим требованиям, можно положить, что

$$\operatorname{tg}(45^\circ - \lambda) = 2q\cos\frac{\pi u}{K}.$$

Отсюда вычисляем u, если предварительно вычислены λ, q и K.

Если требуется второе приближение, то при помощи найденного значения u вычисляем первые откинутые члены:

$$q^8\cos\frac{3\pi u}{K} \quad \text{и} \quad 2q^4\cos\frac{2\pi u}{K},$$

и из уравнения

$$\operatorname{tg}(45^\circ - \lambda) = \frac{2q\left(\cos\frac{\pi u}{K} + q^8\cos\frac{3\pi u}{K}\right)}{1 + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{K}}$$

находим $\cos\frac{\pi u}{K}$ и, стало быть, u.

Пример. Вычислить интеграл

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

при $\varphi = 20^\circ$ и $k = \sin 42^\circ$.

Вычисляем $\operatorname{dn} u = \sqrt{1-\sin^2 42^\circ\cdot\sin^2 20^\circ}$, полагая $\sin 42^\circ\cdot\sin 20^\circ = \cos\psi$; в таком случае:

$$\psi = 76^\circ 46' 13''; \quad \operatorname{dn} u = \sin 76^\circ 46' 13''.$$

Далее имеем:

$$\operatorname{ctg}\lambda = \frac{\operatorname{dn} u}{\sqrt{k'}} = \frac{\sin 76^\circ 46' 13''}{\sqrt{\cos 42^\circ}};$$

$$\lg\operatorname{ctg}\lambda = 0{,}05279;$$

$$\lambda = 41^\circ 31' 35''.$$

Уравнение для вычисления первого приближения u принимает вид:

$$\operatorname{tg} 3^\circ 28' 25'' = 2q\cos\frac{\pi u}{K}.$$

Отсюда, пользуясь табл. 4, находим, что при $\theta = 42^\circ$

$$\lg\cos\frac{\pi u}{K} = \overline{1}{,}91349.$$

Теперь имеем:

$$\frac{180^\circ u}{K}=34^\circ 58'33''.$$

Но так как, согласно *табл.* 3, $K=1{,}81216$, то

$$u=0{,}35213.$$

§ 112. Обратная задача

Покажем, каким образом может быть решена обратная задача, т. е. как по данному значению интеграла u и модулю k определить верхний предел φ.

Пусть дано, например, что

$$\int\limits_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2 36^\circ \sin^2\varphi}}=1{,}23116$$

и требуется вычислить φ.

Будем исходить из формулы:

$$\operatorname{dn} u=\sqrt{k'}\cdot\frac{\Theta_1(u)}{\Theta(u)}.$$

Так как

$$\operatorname{dn} u=\sqrt{1-\sin^2 36^\circ\cdot\sin^2\varphi}$$

и

$$k'=\cos 36^\circ,$$

то вопрос приводится к решению уравнения:

$$1-\sin^2 36^\circ\cdot\sin^2\varphi=\cos 36^\circ\cdot\frac{\Theta_1^2(1{,}23116)}{\Theta^2(1{,}23116)}.$$

Если в выражениях (45) и (42) для функции Θ_1 и Θ удержим первые два члена, то будем иметь:

$$\frac{\Theta_1}{\Theta}=\frac{1+2q\cos\frac{\pi u}{K}}{1-2q\cos\frac{\pi u}{K}}.$$

Так как

$$K=1{,}74150,$$

то после нетрудных вычислений получим, что

$$\frac{\Theta_1}{\Theta}=\frac{1+2q\cos 127^\circ 14'49''}{1-2q\cos 127^\circ 14'49''}=\frac{1-2q\cos 51^\circ 45'11''}{1+2q\cos 51^\circ 45'11''}.$$

Полагая $a=2q\cos 51^\circ 45'11''$, находим:

$$\lg a=\bar{2}{,}50568 \quad \text{и} \quad a=0{,}03204.$$

Вследствие этого

$$\frac{\Theta_1}{\Theta}=\frac{0{,}96796}{1{,}03204},$$

и, следовательно:

$$1-\sin^2 36^\circ\cdot\sin^2\varphi=\cos 36^\circ\left(\frac{0{,}96796}{1{,}03204}\right)^2;$$

отсюда

$$\lg(1-\sin^2 36^\circ\sin^2\varphi)=\bar{1}{,}85228;$$

$$\sin^2 36^\circ\sin^2\varphi=0{,}28833;$$

$$\varphi=66^\circ.$$

§ 113. О некоторых свойствах тэта-функций

1. В § 104 мы видели, что функция $\Theta(u)$ удовлетворяет уравнениям:

$$\Theta(u+2K)=\Theta(u)$$

и

$$\Theta(u+2K'i)=-\Theta(u)e^{-\frac{\pi i}{K}(u+K'i)}$$

Таким же уравнениям удовлетворяют и прочие функции H, H_1 и Θ_1 с разницей только, быть может, в знаке.

Но если обе части этих уравнений мы возведем в квадрат, то разница в знаке исчезнет, и мы увидим, что квадраты всех четырех функций удовлетворяют системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(u+2K)=\varphi(u),\\&\varphi(u+2K'i)=\varphi(u)e^{-\frac{2\pi i}{K}(u+K'i)}.\end{aligned}\right\}\tag{58}$$

Будем искать общий вид целых функций, удовлетворяющих системе (58).

Из первого уравнения системы видно, что искомая функция допускает период $2K$. Но целая функция, имеющая такой период, может быть представлена в виде ряда:

$$\varphi(u)=\sum_{-\infty}^{\infty}A_n e^{\frac{n\pi i u}{K}},$$

каждый член которого имеет период $2K$.

Введем вместо A_n другие коэфициенты B_n посредством соотношений:

$$A_n=B_n e^{-\frac{\pi K' n^2}{2K}}.$$

Тогда получим:

$$\varphi(u)=\sum_{-\infty}^{\infty}B_n e^{\frac{\pi i n u}{K}-\frac{\pi K' n^2}{2K}}.$$

Заменяя здесь u на $u+2K'i$, будем иметь:

$$\varphi(u+2K'i)=\sum_{-\infty}^{\infty}B_n e^{\frac{\pi i n u}{K}-\frac{2\pi K' n}{K}-\frac{\pi K' n^2}{2K}}$$

и, следовательно, в силу второго из соотношений (58):

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} B_n e^{\frac{\pi i n u}{K} - \frac{2\pi K' n}{K} - \frac{\pi K' n^2}{2K} + \frac{2\pi i u}{K} - \frac{2\pi K'}{K}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} B_n e^{\frac{\pi i n u}{K} - \frac{\pi K' n^2}{2K}}$$

Это равенство можно переписать в виде:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} B_n e^{\frac{\pi i u}{K}(n+2) - \frac{\pi K'}{2K}(n+2)^2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} B_n e^{\frac{\pi i u}{K} n - \frac{\pi K'}{2K} n^2}.$$

Замечая, что коэфициенты при одной и той же степени e в левой и правой частях равенства отличаются лишь индексами, а именно, индекс коэфициента в левой части на две единицы меньше индекса соответствующего коэфициента в правой, получим:

$$B_{n-2} = B_n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm \ldots)$$

(так как наше равенство являлось тождеством и, следовательно, коэфициенты при одних и тех же показательных функциях должны быть равны между собой).

Задавая по произволу два коэфициента, например B_0 и B_1, мы будем получать всевозможные решения функциональных уравнений (58).

Так, полагая $B_0 = 1$, $B_1 = 0$, получим решение $\varphi_0(u)$, для которого все коэфициенты с четными индексами равны единице, а с нечетными — нулю:

$$\varphi_0(u) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{\frac{2\pi i m u}{K} - \frac{4\pi K' m^2}{2K}}.$$

Аналогично, полагая $B_0 = 0$ и $B_1 = 1$, получим функцию $\varphi_1(u)$, для которой все коэфициенты с четными индексами равны нулю, а все коэфициенты с нечетными индексами равны единице. Очевидно

$$\varphi_1(u) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} e^{\frac{\pi i (2m-1) u}{K} - \frac{\pi K (2m-1)^2}{2K}}.$$

Общее решение задачи получим, задав B_0 и B_1 какие-либо произвольные значения. Тогда все коэфициенты с четными индексами будут равны B_0, с нечетными — B_1, и, следовательно:

$$\varphi(u) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_0 e^{\frac{\pi i 2 m u}{K} - \frac{\pi K' (2m)^2}{2K}} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_1 e^{\frac{\pi i (2m-1) u}{K} - \frac{\pi K' (2m-1)^2}{2K}} =$$

$$= B_0 \varphi_0(u) + B_1 \varphi_1(u).$$

В частности, для функций $\Theta^2(u)$ и $H^2(u)$, являющихся решениями уравнений (58), получаем:

$$\left.\begin{aligned} \Theta^2(u) &= B_0' \varphi_0(u) + B_1' \varphi_1(u), \\ H^2(u) &= B_0'' \varphi_0(u) + B_1'' \varphi_1(u). \end{aligned}\right\} \quad (59)$$

Решая эти уравнения относительно $\varphi_0(u)$ и $\varphi_1(u)$, найдем:

$$\varphi_0(u) = \frac{B_1'' \Theta^2(u) - B_1' H^2(u)}{B_0' B_1'' - B_1' B_0''} = b_0' \Theta^2(u) + b_1' H^2(u),$$

$$\varphi_1(u) = \frac{-B_0'' \Theta^2(u) + B_0' H^2(u)}{B_0' B_1'' - B_1' B_0''} = b_0'' \Theta^2(u) + b_1'' H^2(u).$$

Заметим, что наши выкладки вполне законны, так как выражение $B_0' B_1'' - B_1' B_0''$ не может равняться нулю. Действительно, допустив противное, мы имели бы:

$$\frac{B_0''}{B_0'} = \frac{B_1''}{B_1'}$$

и на основании (59):

$$\frac{H^2(u)}{\Theta^2(u)} \equiv \text{const.},$$

что невозможно, так как

$$\frac{H^2(u)}{\Theta^2(u)} = k \operatorname{sn}^2 u.$$

Подставляя выражения $\varphi_0(u)$ и $\varphi_1(u)$ через $\Theta^2(u)$ и $H^2(u)$ в формулу, дающую общее решение задачи, получаем:

$$\varphi(u) = \beta_0 \Theta^2(u) + \beta_1 H^2(u), \tag{60}$$

где β_0 и β_1 — постоянные.

Таким образом всякая целая функция $\varphi(u)$, удовлетворяющая соотношениям (58), должна выражаться указанным образом через $\Theta^2(u)$ и $H^2(u)$.

2. Если в системе уравнений

$$H(u + 2K) = -H(u),$$

$$H(u + 2K'i) = -H(u) e^{-\frac{\pi i}{K}(u + K'i)}$$

мы заменим u на $u + a$, а также и на $u - a$ и перемножим надлежащим образом результаты, то увидим, что произведение

$$H(u+a) \cdot H(u-a)$$

удовлетворяет системе (58). Следовательно, должно быть:

$$H(u+a) \cdot H(u-a) = \beta_0 H^2(u) + \beta_1 \Theta^2(u).$$

Имея в виду определить постоянные β_0 и β_1, положим здесь сначала, что $u = 0$ и затем $u = a$. Будем иметь:

$$-H^2(a) = \beta_1 \Theta^2(0)$$

$$0 = \beta_0 H^2(a) + \beta_1 \Theta^2(a).$$

Отсюда

$$\beta_0 = \frac{\Theta^2(a)}{\Theta^2(0)}; \quad \beta_1 = -\frac{H^2(a)}{\Theta^2(0)}.$$

Следовательно:

$$H(u+a)\cdot H(u-a) = \frac{H^2(u)\cdot\Theta^2(a) - \Theta^2(u)\cdot H^2(a)}{\Theta^2(0)}. \tag{61}$$

Заменяя здесь u на $u+K'i$ и воспользовавшись формулами (32), мы найдем, что

$$\Theta(u+a)\cdot\Theta(u-a) = \frac{\Theta^2(u)\cdot\Theta^2(a) - H^2(u)\cdot H^2(a)}{\Theta^2(0)}. \tag{62}$$

§ 114. Выражение нормального эллиптического интеграла второго рода через тэта-функцию

Если в эллиптическом интеграле второго рода

$$\int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

сделаем подстановку:

$$\varphi = \operatorname{am} u,$$
$$\sin\varphi = \operatorname{sn} u,$$
$$d\varphi = \operatorname{dn} u\, du,$$

то будем иметь:

$$\int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = \int_0^u \operatorname{dn}^2 u\cdot du =$$
$$= \int_0^u (1-k^2\operatorname{sn}^2 u)\, du = u - k^2\int_0^u \operatorname{sn}^2 u\cdot du.$$

Выразим интеграл $\int_0^u \operatorname{sn}^2 u\, du$ через функцию Θ. Логарифмируя равенства

$$\Theta(u+2K) = \Theta(u) \quad \text{и} \quad \Theta(u+K'i) = -\Theta(u)\, e^{-\frac{\pi i}{K}(u+K'i)}$$

и взяв затем от логарифмов производные, получим:

$$\frac{\Theta'(u+2K)}{\Theta(u+2K)} = \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}$$

и

$$\frac{\Theta'(u+2K'i)}{\Theta(u+2K'i)} = \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} - \frac{\pi i}{K}.$$

Взяв производную вторично, будем иметь:

$$\frac{d}{du}\frac{\Theta'(u+2K)}{\Theta(u+2K)} = \frac{d}{du}\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} \tag{63}$$

и

$$\frac{d}{du}\frac{\Theta'(u+2K'i)}{\Theta(u+2K'i)} = \frac{d}{du}\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} \tag{64}$$

Отсюда, между прочим, заключаем, что функция $\frac{d}{du}\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}$ имеет два периода: $2K$ и $2K'i$.

Рассмотрим теперь функцию

$$\varphi(u) = \Theta^2(u)\cdot\frac{d}{du}\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} = \Theta''(u)\cdot\Theta(u) - [\Theta'(u)]^2.$$

Напишем, что $\Theta^2(u)$ удовлетворяет уравнениям системы (58). Если мы затем первое уравнение этой системы почленно перемножим с (63), а второе с (64), то увидим, что функция

$$\Theta^2(u)\frac{d}{du}\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}$$

также удовлетворяет уравнениям (58). Следовательно:

$$\Theta''(u)\Theta(u) - [\Theta'(u)]^2 = \beta_0 H^2(u) + \beta_1\Theta^2(u).$$

Чтобы найти β_0 и β_1, положим сначала, что $u=0$ и затем $u=K'i$. Будем иметь:

$$\Theta''(0)\cdot\Theta(0) = \beta_1\Theta^2(0)$$

и

$$-[\Theta'(K'i)]^2 = \beta_0 H^2(K'i).$$

Отсюда

$$\beta_1 = \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)};$$
$$\beta_0 = -\left[\frac{\Theta'(K'i)}{H(K'i)}\right]^2.$$

Выражение для коэфициента β_0 можно упростить, воспользовавшись формулой (§ 104):

$$\Theta(u+K'i) = iH(u)\, e^{-\frac{\pi i}{4K}(2u+K'i)}$$

Диференцируя ее, получим:

$$\Theta'(u+K'i) = i\left[H'(u) - \frac{\pi i}{2K}H(u)\right] e^{-\frac{\pi i}{4K}(2u+K'i)}.$$

Затем положим $u=0$. Это даст:

$$\Theta'(K'i) = iH'(0)\, e^{\frac{\pi K'}{4K}}.$$

И так как, кроме того, согласно второй формуле группы (32)

$$H(K'i) = i\Theta(0)\, e^{\frac{\pi K'}{4K}},$$

то

$$\frac{\Theta'(K'i)}{H(K'i)} = \frac{H'(0)}{\Theta(0)}$$

и потому

$$\beta_0 = -\left[\frac{H'(0)}{\Theta(0)}\right]^2.$$

Но так как

$$H(u) = \sqrt{k}\cdot\Theta(u)\operatorname{sn} u,$$

то

$$H'(u) = \sqrt{k}\,\Theta'(u)\operatorname{sn} u + \sqrt{k}\cdot\Theta(u)\operatorname{cn} u\cdot\operatorname{dn} u;$$

полагая здесь $u=0$, выводим:

$$k = \left[\frac{H'(0)}{\Theta(0)}\right]^2.$$

Следовательно

$$\beta_0 = -k.$$

В общем имеем:

$$\varphi(u) = -kH^2(u) + \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}\Theta^2(u)$$

и

$$\varphi(u) = \Theta^2(u)\frac{d}{du}\cdot\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)},$$

т. е.

$$\left[\frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{H(u)}{\Theta(u)}\right]^2 = \frac{1}{k^2}\,\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} - \frac{1}{k^2}\,\frac{d}{du}\cdot\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)},$$

или

$$\operatorname{sn}^2 u\,du = \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}\cdot\frac{du}{k^2} - \frac{1}{k^2}\,d\,\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}.$$

Интегрирование дает:

$$\int_0^u \operatorname{sn}^2 u\,du = \frac{u}{k^2}\,\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} - \frac{1}{k^2}\,\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}.$$

Следовательно:

$$\int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = u - u\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} + \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}. \qquad (65)$$

§ 115. Вычисление эллиптических интегралов второго рода

Решая этот вопрос, будем пользоваться формулой (65), которую сначала преобразуем к виду, удобному для вычислений.

Мы имели:

$$\Theta(u) = 1 - 2q\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{K} - 2q^9\cos\frac{3\pi u}{K} + \ldots$$

Следовательно производная

$$\Theta'(u) = \frac{2\pi}{K}\left(q\sin\frac{\pi u}{K} - 2q^4\sin\frac{2\pi u}{K} + 3q^9\sin\frac{3\pi u}{K} - \ldots\right)$$

и

$$\Theta''(u) = \frac{2\pi^2}{K^2}\left(q\cos\frac{\pi u}{K} - 4q^4\cos\frac{2\pi u}{K} + 9q^9\cos\frac{3\pi u}{K} - \ldots\right).$$

Отсюда

$$\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} = \frac{2\pi^2}{K^2}\cdot\frac{q-4q^4+9q^9-\ldots}{1-2q+2q^4-2q^9+\ldots}. \qquad (66)$$

В § 104 мы имели:

$$\Theta(u) = G\left(1-2q\cos\frac{\pi u}{K}+q^2\right)\left(1-2q^3\cos\frac{\pi u}{K}+q^6\right)\ldots$$

Взяв логарифмические производные от обеих частей равенства, получим:

$$\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} = \frac{2\pi}{K}\left(\frac{q\sin\frac{\pi u}{K}}{1-2q\cos\frac{\pi u}{K}+q^2} + \frac{q^3\sin\frac{\pi u}{K}}{1-2q^3\cos\frac{\pi u}{K}+q^6} + \ldots\right).$$

Но известно, что

$$\frac{q\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2} = q\sin\alpha + q^2\sin 2\alpha + q^3\sin 3\alpha + \ldots$$[1].

Вследствие этого

$$\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} = \frac{2\pi}{K}\left[(q+q^3+\ldots)\sin\frac{\pi u}{K} + (q^2+q^6+\ldots)\sin\frac{2\pi u}{K} + (q^3+q^9+\ldots)\sin\frac{3\pi u}{K} + \ldots\right],$$

или, суммируя заключенные в малых скобках прогрессии:

$$\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} = \frac{2\pi}{K}\left[\frac{q\sin\frac{\pi u}{K}}{1-q^2} + \frac{q^2\sin\frac{2\pi u}{K}}{1-q^4} + \frac{q^3\sin\frac{3\pi u}{K}}{1-q^6} + \ldots\right].$$

Сначала рассмотрим частный случай, когда верхний предел интеграла

$$\int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

равен $\frac{\pi}{2}$. Если $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то $u = K$ и $\frac{\Theta'(K)}{\Theta(K)} = 0$.

[1] Проще всего получить эту формулу, заменяя $\cos\alpha$ через $\frac{1}{2}(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})$ и $\sin\alpha$ через $\frac{1}{2i}(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha})$. Тогда найдем:

$$\frac{q\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^3} = \frac{1}{2i}\,\frac{(1-qe^{-i\alpha})-(1-qe^{i\alpha})}{(1-qe^{i\alpha})(1-qe^{-i\alpha})} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-qe^{i\alpha}} - \frac{1}{1-qe^{-i\alpha}}\right),$$

ткуда при $|q|<1$:

$$\frac{q\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2} = \frac{1}{2i}\left[(1+qe^{i\alpha}+q^2e^{2i\alpha}+q^3e^{3i\alpha}+\ldots) - (1+qe^{-i\alpha}+q^2e^{-2i\alpha}+q^3e^{-3i\alpha}+\ldots)\right] = q\sin\alpha + q^2\sin 2\alpha + q^3\sin 3\alpha + \ldots$$

Обозначая, как и раньше, полный эллиптический интеграл второго рода буквой E, имеем на основании (65):

$$E = K - K\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)},$$

или, учитывая (66):

$$E = K - \frac{2\pi^2}{K}\cdot\frac{q - 4q^4 + 9q^9 - \ldots}{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \ldots}. \tag{67}$$

Этой формулой удобно пользоваться для вычисления полного интеграла E.

Возвращаясь к общему случаю, заметим, прежде всего, что

$$1 - \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} = \frac{E}{K}.$$

Вследствие чего из (65) получим:

$$\int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \frac{Eu}{K} + \frac{2\pi}{K}\left[\frac{q\sin\frac{\pi u}{K}}{1-q^2} + \frac{q^2\sin\frac{2\pi u}{K}}{1-q^4} + \frac{q^3\sin\frac{3\pi u}{K}}{1-q^6} + \ldots\right]. \tag{68}$$

Пример 1. Вычислить полный эллиптический интеграл E, если модуль $k = \sin 22°$.

Воспользуемся формулой (67). При $\theta = 22°$ находим $q = 0{,}00945$; $\lg 4q^4 = \overline{8}{,}50356$, т. е. $4q^4 = 0{,}00000003$. Можно поэтому принять, что

$$E = K - \frac{2\pi^2}{K}\cdot\frac{q}{1-2q}.$$

Путем приведенного в § 110 вычисления или по таблицам находим $K = 1{,}63073$.

Если теперь в нашей формуле заменим K и q их значениями и произведем действия, то получим:

$$E = 1{,}51415.$$

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\; d\varphi,$$

если верхний предел $\varphi = 37°$, а модуль $k = \sin 22°$.

Будем вычислять интеграл по формуле:

$$\int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = \frac{Eu}{K} + \frac{2\pi q}{K}\left(\frac{\sin\frac{\pi u}{K}}{1-q^2} + q\sin\frac{2u}{q}\right),$$

которую получим из (68), удерживая в скобках только два члена и откидывая в знаменателе второго члена q^4. Пользуясь этой формулой,

надо предварительно определить K, E q и u. Эти величины можно либо вычислить по вышеуказанным приемам, либо отыскать их в таблицах. Будем иметь:

$$K = 1{,}63073;\quad E = 1{,}51415;\quad q = 0{,}00945;\quad u = 0{,}65171.$$

Теперь вычисляем:

$$a = \frac{Eu}{K} = \frac{1{,}51415\cdot 0{,}65171}{1{,}63073},$$

$$\lg a = \overline{1}{,}78185,$$

$$a = 0{,}60513;$$

$$b = \frac{2\pi q\sin\frac{\pi u}{K}}{K(1+q)(1-q)} = \frac{2\pi q\sin 71°56'12''}{1{,}63073\cdot 1{,}00945\cdot 0{,}99055},$$

$$\lg b = \overline{2}{,}53929,$$

$$b = 0{,}03462;$$

$$c = \frac{2\pi q^2}{K}\sin\frac{2\pi u}{K} = \frac{2\pi q^2}{1{,}63073}\sin 36°7'36'',$$

$$\lg c = \overline{4}{,}30714,$$

$$c = 0{,}00020.$$

Следовательно:

$$\int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = a + b + c = 0{,}63995.$$

§ 116. Выражение нормального эллиптического интеграла третьего рода через тэта-функцию

Рассмотрим эллиптический интеграл

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + n\sin^2\varphi)\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}$$

третьего рода (§ 3).

Производя под знаком интеграла подстановку:

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}},$$

мы сейчас же получим, что

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + n\sin^2\varphi)\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^u \frac{du}{1 + n\,\mathrm{sn}^2 u}.$$

Выразим последний интеграл через функцию Θ. Воспользуемся для этого формулой:

$$\Theta(u+a)\,\Theta(u-a)=\frac{\Theta^2(u)\,\Theta^2(a)-H^2(u)\,H^2(a)}{\Theta^2(0)},$$

установленной в § 113. Принимая во внимание, что

$$\operatorname{sn} u=\frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{H(u)}{\Theta(u)},$$

мы можем написать, что

$$\Theta(u+a)\cdot\Theta(u-a)=\frac{\Theta^2(u)\,\Theta^2(a)}{\Theta^2(0)}\left(1-k^2\cdot\operatorname{sn}^2 a\cdot\operatorname{sn}^2 u\right),$$

или

$$1-k^2\cdot\operatorname{sn}^2 a\cdot\operatorname{sn}^2 u=\frac{\Theta(u+a)\cdot\Theta(u-a)}{\Theta^2(u)\cdot\Theta^2(a)}\cdot\Theta^2(0).$$

Если от обеих частей этого равенства мы возьмем логарифмические производные по параметру a, то получим:

$$\frac{k^2\cdot\operatorname{sn} a\cdot\operatorname{cn} a\cdot\operatorname{dn} a\cdot\operatorname{sn}^2 u}{1-k^2\cdot\operatorname{sn}^2 a\cdot\operatorname{sn}^2 u}=\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}+\frac{1}{2}\,\frac{\Theta'(u-a)}{\Theta(u-a)}-\frac{1}{2}\,\frac{\Theta'(u+a)}{\Theta(u-a)}.$$

Но

$$\frac{k^2\cdot\operatorname{sn} a\,\operatorname{sn}^2 u}{1-k^2\cdot\operatorname{sn}^2 a\cdot\operatorname{sn}^2 u}=\frac{1}{\operatorname{sn} a}\cdot\frac{1}{1-k^2\cdot\operatorname{sn}^2 a\cdot\operatorname{sn}^2 u}-\frac{1}{\operatorname{sn} a}.$$

Вследствие этого:

$$\frac{\operatorname{cn} a\cdot\operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a}\cdot\frac{1}{1-k^2\cdot\operatorname{sn}^2 a\cdot\operatorname{sn}^2 u}-\frac{\operatorname{cn} a\cdot\operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a}=\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}+\frac{1}{2}\,\frac{\Theta'(u-a)}{\Theta(u-a)}-$$
$$-\frac{1}{2}\,\frac{\Theta'(u+a)}{\Theta(u+a)}.$$

Полагая, что $k^2\cdot\operatorname{sn} a=-n$, умножим обе части полученного равенства на du и проинтегрируем результат в пределах от 0 до u. Будем иметь:

$$\int\limits_0^u\frac{du}{1+n\operatorname{sn}^2 u}=u+\frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{cn} a\cdot\operatorname{dn} a}\left[\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}\cdot u+\frac{1}{2}\ln\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}\right]. \qquad (69)$$

Таким образом эллиптический интеграл третьего рода удалось выразить помощью удобных для вычисления функций Θ.

§ 117. Соотношения между функциями σu, $\wp u$ и $\wp u$ и функциями H и Θ Якоби

1. Будем предполагать пока, что дискриминант $\Delta>0$ и рассмотрим целую функцию

$$f(u)=e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\cdot\sigma(u),$$

где ω_1 есть полупериод функции $\wp u$, а η_1 — соответствующая ему постоянная функции $\zeta(u)$.

Заменяя аргумент u на $u+2\omega_1$ и потом на $u+2\omega_3$, последовательно найдем:

$$\left.\begin{aligned}f(u+2\omega_1)&=-f(u),\\ f(u+2\omega_3)&=-f(u)\,e^{2\frac{(u+\omega_3)(\eta_3\omega_1-\eta_1\omega_3)}{\omega_1}}\end{aligned}\right\}, \qquad (70)$$

если только вспомним, что

$$\sigma(u+2\omega_1)=-e^{2\eta_1(u+\omega_1)}\cdot\sigma u$$

и

$$\sigma(u+2\omega_3)=-e^{2\eta_3(u+\omega_3)}\cdot\sigma(u).$$

Но в силу отмеченного в § 97 соотношения

$$\eta_1\omega_3-\eta_3\omega_1=\frac{i\pi}{2}, \qquad (71)$$

второе из равенств (70) может быть переписано в виде:

$$f(u+2\omega_3)=-f(u)\,e^{-\frac{\pi i}{\omega_1}(u+\omega_3)}.$$

Имея в виду воспользоваться далее результатами § 113, перепишем полученные соотношения в виде:

$$f^2(u+2\omega_1)=f^2(u),$$
$$f^2(u+2\omega_3)=f^2(u)\,e^{-\frac{2\pi i}{\omega_1}(u+\omega_3)}$$

или, вспоминая, что

$$2\omega_1=\frac{2K}{\sqrt{e_1-e_3}} \quad \text{и} \quad 2\omega_3=\frac{2iK'}{\sqrt{e_1-e_3}}$$

и обозначая $f^2\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)$ через $F(u)$, получим:

$$F(u+2K)=f^2\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}+2\omega_1\right)=f^2\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)=F(u),$$

$$F(u+2K'i)=f^2\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}+2\omega_3\right)=f^2\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)e^{-\frac{2\pi i}{\omega_1}\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}+\omega_3\right)}=$$
$$=F(u)\,e^{-\frac{2\pi i}{K}\left(u+iK'\right)}.$$

Отсюда на основании § 113 выводим:

$$F(u)=\beta_0\Theta^2(u)+\beta_1H^2(u).$$

Полагая в обеих частях $u=0$ и замечая, что $F(0)=f^2(0)=0$ (так как $\sigma(0)=0$), $\Theta^2(0)=1$ и $H^2(u)=0$, будем иметь:

$$\beta_0=0,$$

откуда

$$F(u)=\beta\,H^2(u),$$

или

$$f^2\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)=\beta_1 H^2(u),$$

или, наконец:

$$f(u)=AH(u\sqrt{\lambda}),$$

где A — постоянное и через λ обозначена разность e_1-e_3.

Теперь мы видим, что

$$\sigma u=A\cdot e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\cdot H(u\sqrt{\lambda}).$$

Коэфициент A мы определим, если разделим обе части последнего равенства на u и затем предположим, что u стремится к нулю. Если при этом примем во внимание, что

$$\lim_{u\to 0}\left(\frac{\sigma u}{u}\right)=1$$

[о чем можно судить, например, на основании формулы (50) § 92] и что

$$\lim\left[\frac{H(u\sqrt{\lambda})}{u}\right]=\sqrt{\lambda}\cdot H'(0),$$

то получим:

$$A=\frac{1}{\sqrt{\lambda}H'(0)};$$

и поэтому

$$\sigma u=\frac{e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}}{\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{H(u\sqrt{\lambda})}{H'(0)}. \tag{72}$$

2. Установив соотношение между функциями σu и H, нетрудно найти связь между функцией ζu и H. Для этого стоит лишь взять логарифмическую производную от обеих частей равенства (72). Будем иметь:

$$\zeta(u)=\frac{\eta_1 u}{\omega_1}+\sqrt{\lambda}\cdot\frac{H'(u\cdot\sqrt{\lambda})}{H(u\cdot\sqrt{\lambda})}. \tag{73}$$

3. Найдем связь между функцией $\sigma_1(u)$ и функцией H_1.

В § 98 мы определили функцию $\sigma_1(u)$ помощью равенства:

$$\sigma_1 u=\frac{e^{\eta_1 u}\cdot\sigma(\omega_1-u)}{\sigma\,\omega_1}. \tag{74}$$

Если в формуле (72) заменим u на ω_1-u и вспомним, что $H(K-u\sqrt{\lambda})=H_1(u\sqrt{\lambda})$, то после нетрудных преобразований получим:

$$\sigma(\omega_1-u)=e^{\eta_1\left(\frac{\omega_1}{2}-u+\frac{u^2}{2\omega_1}\right)}\cdot\frac{H_1(u\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}\cdot H'(0)}.$$

Кроме того:

$$\sigma\,\omega_1=e^{\frac{\eta_1\omega_1}{2}}\cdot\frac{H(K)}{\sqrt{\lambda}H'(0)},$$

в чем можно убедиться, полагая в (72) $u=\omega_1$. Следовательно:

$$\sigma_1 u=e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\cdot\frac{H_1(u\sqrt{\lambda})}{H(K)},$$

или

$$\sigma_1 u=e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\cdot\frac{H_1(u\sqrt{\lambda})}{H_1(0)} \tag{75}$$

Можно показать также, что

$$\sigma_2 u=e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\cdot\frac{\Theta_1(u\sqrt{\lambda})}{\Theta_1(0)}$$

и

$$\sigma_3 u=e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\cdot\frac{\Theta(u\sqrt{\lambda})}{\Theta(0)}. \tag{76}$$

4. Переходя к выводу зависимостей между функцией $\wp u$ и функциями Якоби, будем исходить из формулы

$$\wp u-e_1=\frac{\sigma_1^2 u}{\sigma^2 u},$$

доказанной в § 98. Внося сюда найденные выше значения $\sigma_1 u$ и σu, получим:

$$\wp u-e_1=\left[\frac{H_1(u\sqrt{\lambda})\cdot H'(0)}{H_1(0)\cdot H(u\sqrt{\lambda})}\right]^2\cdot\lambda. \tag{77}$$

Можно показать также, что

$$\left.\begin{aligned}\wp u-e_2&=\left[\frac{\Theta_1(u\sqrt{\lambda})H'(0)}{\Theta_1(0)H(u\sqrt{\lambda})}\right]^2\lambda,\\ \wp u-e_3&=\left[\frac{\Theta(u\sqrt{\lambda})H'(0)}{\Theta(0)H(u\sqrt{\lambda})}\right]^2\lambda.\end{aligned}\right\} \tag{78}$$

5. Мы установили зависимость между функциями σu и ζu и тэта-функциями H и Θ. При этом предполагалось, что $\Delta>0$ и что

$$q=e^{\frac{\pi i\omega_3}{\omega_1}}.$$

Если $\Delta<0$, то, как было замечено в § 78, основными периодами функции $\wp u$ служат:

$$2\omega'=\omega_2-\omega_2' \quad \text{и} \quad 2\omega'''=\omega_2+\omega_2'.$$

Они заменяют периоды $2\omega_1$ и $2\omega_3$.

О способах вычисления функций σu, ζu и $\wp u$ при помощи тэта-функций в случае, когда дискриминант отрицателен, будет сказано ниже.

§ 118. Вычисление постоянных η_1 и η_3

Покажем, каким образом при помощи функции H можно вычислить постоянные η_1 и η_3, соответствующие функции ζu. Воспользуемся формулой:

$$\sigma u = \frac{e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}}{\sqrt{\lambda}} \cdot \frac{H(u\sqrt{\lambda})}{H'(0)}.$$

Так как

$$e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} = 1 + \frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1} + \ldots$$

и

$$H(u\sqrt{\lambda}) = u\sqrt{\lambda}\, H'(0) + \frac{u^3 \lambda \sqrt{\lambda}}{6} H'''(0) + \ldots,$$

то

$$\sigma u = u + \frac{u^3}{6} \cdot \left[\frac{\lambda H'''(0)}{H'(0)} + \frac{3\eta_1}{\omega_1}\right] + Au^5 + \ldots$$

Сравнивая полученное разложение с разложением (50) § 92, находим что

$$\lambda \cdot \frac{H'''(0)}{H'(0)} + \frac{3\eta_1}{\omega_1} = 0.$$

Отсюда

$$\eta_1 = -\frac{\omega_1 \lambda}{3} \cdot \frac{H'''(0)}{H'(0)}. \tag{79}$$

Вычислив, согласно этой формуле, η_1, будем знать и

$$\eta_3 = \frac{1}{\omega_1}\left(\eta_1 \omega_3 - \frac{\pi i}{2}\right). \tag{80}$$

Например, если требуется вычислить постоянные η_1 и η_3 функции $\zeta\left(u; \frac{39}{4}, \frac{35}{8}\right)$, то, удержав в разложении (43) для функции H два первых члена, будем иметь:

$$H'(u\sqrt{\lambda}) = \frac{\pi}{K}\left(\sqrt[4]{q} \cos\frac{\pi u\sqrt{\lambda}}{2K} - 3\sqrt[4]{q^9} \cos\frac{3\pi u\sqrt{\lambda}}{2K}\right),$$

$$H'''(u\sqrt{\lambda}) = -\frac{\pi^3}{4K^3}\left(\sqrt[4]{q} \cos\frac{\pi u\sqrt{\lambda}}{2K} - 27\sqrt[4]{q^9} \cos\frac{3\pi u\sqrt{\lambda}}{2K}\right).$$

Кроме того, $\omega_1 = \frac{K}{\sqrt{\lambda}}$. Ввиду этого:

$$\eta_1 = \frac{\pi^2 \sqrt{\lambda}\,(1 - 27q^2)}{12K(1 - 3q^2)} = \frac{\pi^2 \sqrt{3} \cdot 0,99127}{12K \cdot 0,99903},$$

где при $\theta = 30^\circ$ интеграл $K = 1,68575$. Произведя действия, получим $\eta_1 = 0,8384$. Принимая во внимание это значение η_1 и помня, что $\omega_3 = \frac{K'i}{\sqrt{\lambda}}$, где $K' = 2,15652$, согласно (80), получим:

$$\eta_3 = -0,5413i.$$

§ 119. Примеры вычисления значений вейерштрассовых функций в случае, когда дискриминант $\Delta > 0$

Пример 1. Вычислить функцию $\sigma\left(1; \frac{39}{4}, \frac{35}{8}\right)$.

При инвариантах $g_2 = \frac{39}{4}$ и $g_3 = \frac{35}{8}$ имеем:

$$e_1 = \frac{7}{4};\quad e_2 = -\frac{1}{2};\quad e_3 = -\frac{5}{4};\quad \lambda = e_1 - e_3 = 3;$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2};\quad \theta = 30^\circ.$$

Пользуясь формулой

$$\sigma u = e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \cdot \frac{H(u\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda} \cdot H'(0)},$$

вычисляем предварительно $\eta_1 = 0,8384$. При помощи табл. 3 находим $K = 1,68575$, и, следовательно:

$$\omega_1 = \frac{K}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1,68575}{\sqrt{3}}.$$

Согласно приему, указанному в § 107, вычисляем $H(u\sqrt{\lambda}) = H(1,73205) = 0,73185$ и $H'(0) = 0,68167$.
Теперь имеем:

$$\sigma(1) = \frac{e^{0,43072} \cdot 0,73185}{\sqrt{3} \cdot 0,68167},$$

$$\lg \sigma(1) = \bar{1},97935;$$

$$\sigma(1) = 0,95356.$$

Если воспользоваться рядом (50) § 92 и удержать в нем пять первых членов, то при их помощи получим:

$$\sigma(1) = 0,95356.$$

Пример 2. Вычислить $\zeta\left(\frac{1}{2}; \frac{39}{4}, \frac{35}{8}\right)$.

Воспользуемся формулой:

$$\zeta u = \frac{\eta_1 u}{\omega_1} + \sqrt{\lambda}\, \frac{H'(u\sqrt{\lambda})}{H(u\sqrt{\lambda})},$$

в которой $H'(u\sqrt{\lambda})$ означает производную функции H, взятую по переменной $u\sqrt{\lambda}$. При отмеченных в предыдущем примере значениях e_1, e_2, e_3 и ω_1 будем иметь:

$$\eta_1 = 0,8384 \text{ (см. § 118).}$$

Ввиду этого при $u = \frac{1}{2}$ получим, что

$$\frac{\eta_1 u}{\omega_1} = 0,43072.$$

Ограничиваясь двумя первыми членами, согласно (43), будем иметь:

$$H(u\sqrt{\lambda})=2\left(q^{\frac{1}{4}}\sin\frac{\pi u\sqrt{\lambda}}{2K}-q^{\frac{9}{4}}\sin\frac{3\pi u\sqrt{\lambda}}{2K}\right)$$

и

$$H'(u\sqrt{\lambda})=\frac{\pi}{K}\left(q^{\frac{1}{4}}\cos\frac{\pi u\sqrt{\lambda}}{2K}-3q^{\frac{9}{4}}\cos\frac{3\pi u\sqrt{\lambda}}{2K}\right).$$

Следовательно:

$$\sqrt{\lambda}\frac{H'(u\sqrt{\lambda})}{H(u\sqrt{\lambda})}=\frac{\pi\sqrt{\lambda}}{2K}\cdot\frac{\cos\frac{\pi u\sqrt{\lambda}}{2K}-3q^2\cos\frac{3\pi u\sqrt{\lambda}}{2K}}{\sin\frac{\pi u\sqrt{\lambda}}{2K}-q^2\sin\frac{3\pi u\sqrt{\lambda}}{2K}}.$$

Но при $\lambda=3$; $u=\frac{1}{2}$; $K=1{,}68575$ будем иметь:

$$\frac{\pi u\sqrt{\lambda}}{2K}=0{,}80698.$$

Этому числу как отвлеченной мере угла соответствует 46° 14′ 10″. Следовательно:

$$\sqrt{\lambda}\frac{H'(u\sqrt{\lambda})}{H(u\sqrt{\lambda})}=\frac{\pi\sqrt{3}}{3{,}3715}\cdot\frac{\cos 46^\circ14'10''+3q^2\cos 41^\circ17'30''}{\sin 46^\circ14'10''-q^2\sin 41^\circ17'30''}.$$

Но так как

$$\cos 46^\circ14'10''=0{,}69169;\qquad \sin 46^\circ14'10''=0{,}7222;$$

$$3q^2\cos 41^\circ17'30''=0{,}00073;\quad q^2\sin 41^\circ17'30''=0{,}0002,$$

то

$$\sqrt{\lambda}\frac{H'(u\sqrt{\lambda})}{H(u\sqrt{\lambda})}=1{,}5478;$$

стало быть:

$$\zeta\left(\frac{1}{2}\right)=0{,}43072+1{,}5478=1{,}97852.$$

Пример 3. Вычислить $\wp\left(0{,}4536;\ \frac{39}{4},\ \frac{35}{8}\right)$.

Пример этот решен в § 80. Вычисление по формуле (77) может служить проверкой полученного раньше результата. Так как

$$e_1=\frac{7}{4};\quad e_2=-\frac{1}{2};\quad e_3=-\frac{5}{4};\quad \lambda=3,$$

то, согласно (77), будем иметь:

$$\wp u=\frac{7}{4}+\left[\frac{H_1(0{,}78565)\cdot H'(0)}{H_1(0)\cdot H(0{,}78565)}\right]^2\cdot 3.$$

Вычисляя значения $H_1(0{,}78565)$; $H(0)$; $H'(0)$ и $H(0{,}78565)$ по способу, указанному в § 107, находим:

$$H_1(0{,}78565)=0{,}54452;\quad H_1=0{,}73252;$$

$$H'(0)=0{,}68167;\quad H(0{,}78565)=0{,}48929.$$

Следовательно:

$$\wp(0{,}4536)=\frac{7}{4}+3\cdot\left[\frac{0{,}54452\cdot 0{,}68167}{0{,}48929\cdot 0{,}73252}\right]^2.$$

Полагая

$$A=\left[\frac{0{,}54452\cdot 0{,}68167}{0{,}48929\cdot 0{,}73252}\right]^2,$$

находим:

$$\lg A=0{,}03040;\quad A=1{,}0725.$$

Поэтому

$$\wp(0{,}4536)=1{,}75+1{,}0725\cdot 3=4{,}9675.$$

§ 120. Вычисление значений функции $\wp u$ в случае, когда дискриминант $\Delta<0$

1. Общий ход решения задачи будет таков: мы преобразуем многочлен $4z^3-g_2z-g_3$ с отрицательным дискриминантом в новый $4\zeta^3-\gamma_2\zeta-\gamma_3$, дискриминант которого положителен, и тем сведем вопрос к уже разобранному случаю.

При $\Delta<0$ будем иметь:

$$4z^3-g_2z-g_3=4(z-e_2)[(z-m)^2+n^2],$$

причем $e_1=m+ni$; $e_2=-2m$; $e_3=m-ni$. Введем новую переменную ζ при помощи равенства

$$\zeta=\frac{4z^3-g_2z-g_3}{4(z-e_2)^2}-2e_2=\frac{(z-m)^2+n^2}{z-e_2}-2e_2. \tag{81}$$

Так как

$$m=\frac{e_1+e_3}{2}=-\frac{e_2}{2},$$

то

$$\zeta=\frac{z^2-e_2z+H^2}{z-e_2}, \tag{82}$$

где

$$H^2=\frac{9}{4}e_2^2+n^2=9m^2+n^2.$$

Теперь рассмотрим разность:

$$\zeta-\varepsilon=\frac{z^2-(\varepsilon+e_2)z+H^2+\varepsilon e_2}{z-e_2},$$

и выберем ε так, чтобы числитель правой части этого равенства стал точным квадратом. Требуемых значений ε будет два. Действительно, числитель

$$z^2-(\varepsilon+e_2)z+H^2+\varepsilon e_2$$

будет точным квадратом при условии, что

$$(\varepsilon+e_2)^2=4(H^2+\varepsilon e_2).$$

Отсюда $\varepsilon=e_2\pm 2H$. Положим $\varepsilon_1=e_2+2H$; $\varepsilon_3=e_2-2H$ и возьмем:

$$\varepsilon_2=-(\varepsilon_1+\varepsilon_3)=-2e_2.$$

Пусть при $\varepsilon=\varepsilon_1$:

$$z^2-z(\varepsilon_1+e_2)+H^2+\varepsilon_1 e_2=(z-z_1)^2,$$

где

$$z_1=\frac{\varepsilon_1+e_2}{2}=e_2+H,$$

а при $\varepsilon=\varepsilon_3$:

$$z^2-z(\varepsilon_3+e_2)+H^2+\varepsilon_3 e_2=(z-z_3)^2,$$

где

$$z_3=\frac{\varepsilon_3+e_2}{2}=e_2-H.$$

В таком случае:

$$\zeta-\varepsilon_1=\frac{(z-z_1)^2}{z-e_2}; \quad \zeta-\varepsilon_3=\frac{(z-z_3)^2}{z-e_2}. \tag{83}$$

Диференцируя первое из этих равенств, будем иметь:

$$d\zeta=\frac{(z-z_1)(z-2e_2+z_1)}{(z-e_2)^2}\,dz,$$

или, в силу того, что $z_1+z_3=2e_2$:

$$d\zeta=\frac{(z-z_1)(z-z_3)}{(z-e_2)^2}\,dz,$$

или еще, принимая во внимание (83):

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta-\varepsilon_1)(\zeta-\varepsilon_3)}}=\frac{dz}{z-e_2}.$$

Но так как в силу (81)

$$\zeta-\varepsilon_2=\frac{(z-m)^2+n^2}{z-e_2},$$

то

$$\frac{dz}{\sqrt{(z-e_2)[(z-m)^2+n^2]}}=\frac{d\zeta}{\sqrt{4(\zeta-\varepsilon_1)(\zeta-\varepsilon_2)(\zeta-\varepsilon_3)}},$$

причем числа ε_1, ε_2 и ε_3 вещественны и таковы, что

$$\varepsilon_1>\varepsilon_2>\varepsilon_3.$$

Мы теперь видим, что

$$\int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}=\int_\zeta^\infty \frac{d\zeta}{\sqrt{4\zeta^3-\gamma_2\zeta-\gamma_3}},$$

причем инварианты

$$\gamma_2=-4(\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_1\varepsilon_3+\varepsilon_2\varepsilon_3)=12e_2^2+16H^2;$$
$$\gamma_3=4\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3=32e_2H^2-8e_2^3,$$

а дискриминант

$$\Delta=\gamma_2^3-27\gamma_3^2=256H^2(4H^2-9e_2^2)^2$$

есть величина положительная.

Если положим

$$u=\int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}},$$

то

$$u=\int_\zeta^\infty \frac{d\zeta}{\sqrt{4\zeta^3-\gamma_2\zeta-\gamma_3}},$$

отсюда

$$z=\wp u \quad \text{и} \quad \zeta=\bar{\wp} u;$$

и на основании (82):

$$\bar{\wp} u=\wp u+\frac{H^2}{\wp u-e_2}. \tag{84}$$

Здесь $\bar{\wp} u$ есть функция, соответствующая положительному дискриминанту. Если периоды этой функции обозначим через $2\omega_1$ и $2\omega_3$, то будем иметь:

$$2\omega_1=\frac{2K}{\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_3}}=\frac{K}{\sqrt{H}}=\omega_2,$$

$$2\omega_3=\frac{2K'i}{\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_3}}=\frac{K'i}{\sqrt{H}}=\omega_2',$$

где ω_2 и ω_2' — вещественный и мнимый полупериоды функции $\wp u$. Мы видим, что периодами функции $\bar{\wp} u$ служат полупериоды функции $\wp u$.

2. Если требуется вычислить $\wp u$, то сначала вычисляем $\bar{\wp} u$, пользуясь, например, формулой:

$$\bar{\wp}=u\varepsilon_1+\left[\frac{H_1(u\sqrt{\lambda})\cdot H'(0)}{H_1(0)\cdot H(u\sqrt{\lambda})}\right]^2\cdot\lambda,$$

или одной из аналогичных ей формул (78).

Заметим, что входящие в состав этих формул функции H, H_1, Θ и Θ_1 соответствуют периодам $2\omega_1=\omega_2$ и $2\omega_3=\omega_2'$. Следовательно, для них

$$q=e^{\frac{\pi i\omega_3}{\omega_1}}=e^{\frac{\pi i\omega_2'}{\omega_2}}=e^{-\frac{\pi K'}{K}},$$

при модулярном угле θ, определяемом из равенства:

$$\sin^2\theta=\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_3}{\varepsilon_1-\varepsilon_3}=\frac{1}{2}-\frac{3e_2}{4H}.$$

Узнав $\bar{\wp} u$, обращаемся к уравнению (84), из которого определяем $\wp u$. Так как оно квадратное, то для $\wp u$ дает два значения. Из них надо еще выбрать то, которое соответствует данному значению аргумента. О способе выбора можно судить из прилагаемого примера.

Пример. Вычислить $\wp(u;\ 0,\ 1)$ при $u=0{,}51$. Инварианты $g_2=0$, $g_3=1$. Дискриминант $\Delta<0$. Корни

$$e_1=\frac{(-1+i\sqrt{3})\,\alpha}{2};\quad e_2=\alpha;\quad e_3=\frac{(-1-i\sqrt{3})\,\alpha}{2},$$

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}=0{,}62996.$$

Коэфициенты

$$m=-\frac{\alpha}{2};\quad n=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно, корни, соответствующие функции $\bar{\wp}\,(u)$, будут

$$\varepsilon_1=\alpha(1+2\sqrt{3});\quad \varepsilon_2=-2\alpha;\quad \varepsilon_3=\alpha(1-2\sqrt{3}).$$

Квадрат модуля

$$k^2=\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_3}{\varepsilon_1-\varepsilon_3}=\frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2}=\sin^2 15^\circ.$$

Модулярный угол $\theta=15^\circ$.

Разность корней

$$\varepsilon_1-\varepsilon_3=\lambda=4\alpha\sqrt{3}=2\sqrt[6]{108};$$

$$u\sqrt{\lambda}=1{,}0654.$$

Теперь имеем:

$$\bar{\wp}u=\alpha(1+2\sqrt{3})+\left[\frac{H_1(1{,}0654)\cdot H'(0)}{H_1(0)\cdot H(1{,}0654)}\right]^2 2\cdot\sqrt[6]{108}.$$

Ограничиваясь в разложениях функций H и H_1 первыми членами, получим:

$$H_1(1{,}0654)=2q^{\frac{1}{4}}\cdot\cos\frac{\pi u\sqrt{\lambda}}{2K}=2q^{\frac{1}{4}}\cdot\cos 59^\circ\,59'\,55'',$$

причем $K=1{,}59814$.

$$H'(0)=\frac{\pi}{K}q^{\frac{1}{4}};\quad H_1(0)=2q^{\frac{1}{4}};\quad H(1{,}0654)=2q^{\frac{1}{4}}\sin 59^\circ\,59'\,55'';$$

$$\alpha(1+2\sqrt{3})=2{,}812.$$

Выполнив действия, получим $\bar{\wp}u=4{,}2175$. Теперь из квадратного уравнения

$$4{,}2175=\wp u+\frac{3\alpha^2}{\wp u-\alpha},$$

в котором α известно, вычисляем $\wp u$. Находим:

$$\wp u=2{,}4237\pm 1{,}4237.$$

Из двух значений предстоит выбрать то, которое соответствует аргументу $u=0{,}51$.

Мы нашли, что $\bar{\wp}(0{,}51)=4{,}2175$. Так как периодом функции $\bar{\wp}u$ служит

$$\omega_2=\frac{K}{\sqrt{H}}=1{,}53,$$

то будем еще иметь:

$$\bar{\wp}(0{,}51)=\bar{\wp}(\omega_2-0{,}51)=\bar{\wp}(1{,}02).$$

Следовательно, из двух значений $\wp u=3{,}8474$ и $\wp u=1$ первое соответствует $u=0{,}51$, а второе $u=1{,}02$, что наглядно можно видеть из фиг. 35.

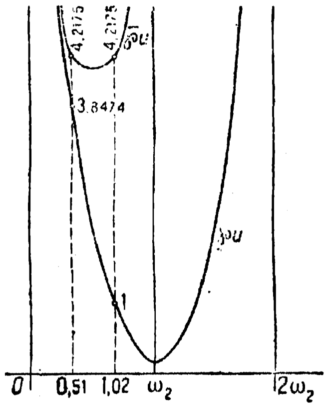
Окончательно:

$$\wp(0{,}51;\ 0,\ 1)=3{,}8474.$$

§ 121. Вычисление значений функций ζu и σu при $\Delta<0$. Вычисление постоянных η_2 и η_2'

1. Будем исходить из формулы (84). Предварительно заметим, что при $e_1=m+ni$; $e_2=-2m$; $e_3=m-ni$ и $H=9m^2+n^2$ формула (37') § 84 дает:

$$\wp(u+\omega_2)-e_2=\frac{H^2}{\wp u-e_2}.$$



Фиг. 35

Ввиду этого

$$\bar{\wp}u=\wp u+\wp(u+\omega_2)-e_2$$

или

$$\bar{\wp}u=\wp u+\wp(u-\omega_2)-e_2.$$

Будем интегрировать обе части этого равенства.

Выбирая надлежащим образом произвольную постоянную, мы получим:

$$\bar{\zeta}u=\zeta u+\zeta(u-\omega_2)+e_2u+\eta_2.\quad (85)$$

Здесь $\eta_2=\zeta\omega_2$, а функция $\bar{\zeta}u$ соответствует функции $\bar{\wp}u$, т. е. периодам $2\omega_1=\omega_2$ и $2\omega_3=\omega_2'$.

Если теперь в формуле

$$\zeta(u+v)=\zeta u+\zeta v+\frac{1}{2}\,\frac{\wp'u-\wp'v}{\wp u-\wp v}$$

положим $v=-\omega_2$ и результат сложим с (85), то получим уравнение:

$$\bar{\zeta}u=2\zeta u+e_2u+\frac{1}{2}\,\frac{\wp'u}{\wp u-e_2}$$

или

$$\bar{\zeta}u=2\zeta u+e_2u+\sqrt{\frac{(\wp u-m)^2+n^2}{\wp u-e_2}},$$

из которого находим ζu, определив предварительно $\bar{\zeta}u$ по указанному в § 119 приему для случая $\Delta>0$.

2. Для нахождения σu будем интегрировать обе части равенства (85). Выбрав надлежащим образом произвольную постоянную, получим:

$$\ln \bar{\sigma} u = \ln \sigma u + \ln \sigma (u - \omega_2) + \frac{e_2 u^2}{2} + \eta_2 u - \ln \sigma (-\omega_2),$$

или

$$\bar{\sigma} u = -\frac{\sigma u \cdot \sigma (u - \omega_2)}{\sigma (\omega_2)} e^{\frac{e_2 u^2}{2} + \eta_2 u}.$$

Но так как, согласно замеченному в § 98 [формула (70)]:

$$\frac{\sigma (u - \omega_2)}{\sigma \omega_2} e^{\eta_2 u} = \pm \sigma u \cdot \sqrt{\wp u - e_2},$$

то

$$\bar{\sigma} u = \pm \sigma^2 u \cdot \sqrt{\wp u - e_2} \cdot e^{\frac{e_2 u^2}{2}}. \tag{86}$$

В этом равенстве все величины, кроме σu, могут быть вычислены по раньше указанным приемам. Следовательно, оно может служить уравнением для нахождения σu. Знак перед корнем выбирается согласно знаку аргумента u.

3. Положим в (85), что $u = \omega_1 = \frac{\omega_2}{2}$. Мы получим:

$$\bar{\eta}_1 = \frac{e_2 \omega_2}{2} + \eta_2, \tag{87}$$

где $\bar{\eta}_1 = \bar{\zeta}\omega_1$. Эту постоянную мы умеем вычислить по способу, указанному в § 118. Так как способы вычисления e_2 и ω_2 известны тоже, то полученное уравнение дает возможность найти η_2.

Теперь покажем, еще каким образом можно вычислить постоянную η_2'.

В § 78 мы видели, что в случае отрицательного дискриминанта основными периодами функции $\wp u$ служат

$$2\omega' = \omega_2 - \omega_2' \quad \text{и} \quad 2\omega''' = \omega_2 + \omega_2'.$$

Обращаясь к формуле (56) § 96, последовательно будем в ней полагать, что $\omega = \omega'$ и $\omega = \omega'''$. Мы придем к равенствам:

$$\begin{aligned} \zeta (u + 2\omega') &= \zeta u + 2\eta', \\ \zeta (u + 2\omega''') &= \zeta u + 2\eta''', \end{aligned} \tag{88}$$

в которых $\eta' = \zeta \omega'$ и $\eta''' = \zeta \omega'''$.

Положим в первой из формул (88), что $u = \omega''' - \omega'$, а во второй, что $u = \omega' - \omega'''$. Сложив результаты, мы сейчас же найдем, что

$$\zeta (\omega' + \omega''') = \eta' + \eta'''.$$

Но

$$\eta_2 + \zeta \omega_2 = \zeta (\omega' + \omega''').$$

Следовательно:

$$\eta_2 = \eta''' + \eta'.$$

Можно показать также, что

$$\eta_2' = \eta''' - \eta'.$$

Исходя из соотношения

$$\eta' \omega''' - \eta''' \omega' = \frac{\pi i}{2}$$

и принимая во внимание, что

$$\eta' = \frac{\eta_2 - \eta_2'}{2}; \quad \eta''' = \frac{\eta_2 + \eta_2'}{2}; \quad \omega' = \frac{\omega_2 - \omega_2'}{2}; \quad \omega''' = \frac{\omega_2 + \omega_2'}{2},$$

можно найти равенство

$$\eta_2 \omega_2' - \eta_2' \omega_2 = \pi i, \tag{89}$$

из которого, вычислив предварительно все прочие величины, найдем η_2'.

П р и м е р 1. Вычислить постоянные η_2 и η_2' для функции $\zeta (u; 0, 1)$.

Сначала вычисляем η_1 по формуле (см. § 118):

$$\bar{\eta}_1 = -\frac{\lambda \omega_1}{3} \cdot \frac{H''' (0)}{H' (0)}.$$

В примере, разобранном в § 120, было отмечено, что при инвариантах $g_2 = 0$ и $g_3 = 1$ модулярный угол $\theta = 15°$ и $\lambda = 2\sqrt[6]{108}$. При модулярном угле в 15° в разложении функции H в ряд можно ограничиться только первым его членом. При этом условии:

$$H' (u\sqrt{\lambda}) = \frac{\pi}{K} q^{\frac{1}{4}} \cos \frac{\pi u \sqrt{\lambda}}{2K},$$

$$H''' (u\sqrt{\lambda}) = -\frac{\pi^3}{4K^3} q^{\frac{1}{4}} \cos \frac{\pi u \sqrt{\lambda}}{2K}.$$

Поэтому

$$H'(0) = \frac{\pi q^{\frac{1}{4}}}{K}; \quad H''' (0) = -\frac{\pi^3 q^{\frac{1}{4}}}{4K^3}.$$

Теперь имеем:

$$\bar{\eta}_1 = \frac{\pi^2 \lambda \omega_1}{12K^2} = \frac{\pi^2 \sqrt{\lambda}}{12K},$$

т. е.

$$\bar{\eta}_1 = \frac{\pi^2 \cdot \sqrt{2}\sqrt[12]{108}}{12 \cdot 1{,}59814} = 1{,}0751.$$

Так как

$$\omega_2 = 1{,}53 \quad \text{и} \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = 0{,}62996,$$

то, согласно (87):

$$\eta_2 = 0{,}5932.$$

Помня, что

$$\omega_2' = \frac{K' i}{\sqrt{H}} = \frac{2{,}76806 i \sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{3}},$$

найдем η_2' из формулы (89). Мы получим:

$$\eta_2' = -1{,}02614 i.$$

Пример 2. Вычислить $\sigma\,(u;\ 0,\ 1)$ при $u=1{,}02$.

Вычисляем сначала $\bar{\sigma}\,(1{,}02)$. Воспользуемся формулой (72):

$$\bar{\sigma}\,u=e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\cdot\frac{H(u\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}\cdot H'(0)}.$$

В предыдущем примере мы нашли, что $\bar{\eta}_1=1{,}0751$. Кроме того,

$$u=1{,}02;\quad \lambda=2\sqrt[6]{108};\quad 2\omega_1=\omega_2=1{,}53.$$

Следовательно:

$$\bar{\sigma}(1{,}02)=e^{\frac{1{,}0751\cdot 1{,}02^2}{1{,}53}}\cdot\frac{H(2{,}1308)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt[12]{108}\cdot H'(0)};$$

но

$$H(2{,}1308)=2q^{\frac{1}{4}}\sin 119^\circ 59'28''=2q^{\frac{1}{4}}\sin 60^\circ 0'32'';$$

$$H''(0)=\frac{\pi q^{\frac{1}{4}}}{K},$$

где $K=1{,}59814$.

Вследствие этого:

$$\bar{\sigma}\,(1{,}02)=\frac{e^{0{,}73107}\cdot\sqrt{2}\cdot 1{,}59814\cdot\sin 60^\circ 0'32''}{\pi\sqrt[12]{108}}=0{,}8762.$$

В примере, рассмотренном в § 120, мы видели, что

$$\wp(1{,}02;\ 0,\ 1)=1;\quad e_2=0{,}62993.$$

Ввиду этого уравнение (86) дает:

$$0{,}8762=\sigma^2 u\sqrt{0{,}37004}\cdot e^{\frac{0{,}62996\cdot 1{,}02^2}{2}}.$$

Произведя действия, получим, что при $u=1{,}02$

$$\sigma\,(u;\ 0,\ 1)=1{,}0187.$$

§ 122. Решение уравнения $\wp u=a$.

Случай $\Delta>0$. 1. Допустим сначала, что $a>e_1$. Воспользовавшись формулами (78), нетрудно получить, что

$$\sqrt{\frac{\wp u-e_3}{\wp u-e_2}}=\frac{\Theta(u\sqrt{\lambda})\,\Theta_1(0)}{\Theta_1(u\sqrt{\lambda})\,\Theta(0)};$$

отсюда

$$\frac{\Theta(u\sqrt{\lambda})}{\Theta_1(u\sqrt{\lambda})}=\frac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)}\sqrt{\frac{a-e_3}{a-e_2}}.$$

Удерживая в разложениях (42) и (45) для функций Θ и Θ_1 по два первых члена и откидывая прочие, вследствие их малости, получим:

$$\frac{1-2q\cos\frac{\pi u\sqrt{\lambda}}{K}}{1+2q\cos\frac{\pi u\sqrt{\lambda}}{K}}=A,$$

где

$$A=\frac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)}\sqrt{\frac{a-e_3}{a-e_2}}=\frac{1-2q}{1+2q}\sqrt{\frac{a-e_3}{a-e_2}}.$$

Далее будем иметь:

$$\cos\frac{\pi u\sqrt{\lambda}}{K}=\frac{1-A}{2q(1+A)}.$$

Отсюда найдем u. Если обозначим то значение u, которое заключено между 0 и ω_1 через u_0, то вообще

$$u=\pm u_0+2m\omega_1+2n\omega_3,$$

где m и n — произвольные целые числа.

Пусть, например, требуется решить уравнение:

$$\wp\left(u;\ \frac{39}{4},\ \frac{35}{8}\right)=4{,}133.$$

При инвариантах $g_2=\frac{39}{4}$ и $g_3=\frac{35}{8}$, как мы это уже видели неоднократно,

$$e_1=\frac{7}{4};\quad e_2=-\frac{1}{2};\quad e_3=-\frac{5}{4};\quad \lambda=3;\quad \Delta>0;$$

$$\theta=30^\circ;\quad K=1{,}68575;$$

полупериод

$$\omega_1=\frac{1{,}68575}{\sqrt{3}}.$$

Согласно табл. 4:

$$\lg q=\bar{2}{,}25461;\quad q=0{,}01797.$$

$$A=\frac{0{,}96406}{1{,}03594}\sqrt{\frac{4{,}133+1{,}25}{4{,}133+0{,}5}}=1{,}0031;$$

$$\cos\frac{\pi u_0\sqrt{\lambda}}{K}=-\frac{0{,}0031}{4{,}0062q};$$

$$\lg\cos\pi\left(1-\frac{u_0\sqrt{\lambda}}{K}\right)=\bar{2}{,}63402;\quad 180^\circ\left(1-\frac{u_0\sqrt{\lambda}}{K}\right)=87^\circ 27'57'';$$

$$u_0=0{,}5003.$$

$$u=\pm 0{,}5003+\frac{2m\cdot 1{,}68575+2n\cdot 2{,}15652i}{\sqrt{3}}.$$

2. В случае, когда a заключено между e_2 и e_3, одно из значений аргумента u, как известно, содержится между $\omega_1+\omega_3$ и ω_3 (см. § 86). Можем поэтому положить

$$u=\omega_3+v,$$

где

$$0\leqslant v\leqslant \omega_1.$$

Применяя формулу (38) § 84, мы найдем, что

$$\wp v = e_3 + \frac{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}{\wp(\omega_3+v)-e_3},$$

или

$$\wp v = e_3+\frac{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}{a-e_3}=b.$$

Из уравнения $\wp v=b$ находим v согласно приему, указанному в предыдущем случае. Зная v, будем знать и $u=\omega_3+v$.

3. Пусть $a<e_3$. Одно из значений аргумента u в этом случае содержится между нулем и ω_3, являясь чисто мнимым. Положим, что $u=vi$, где v — вещественное. Будем иметь:

$$\wp(vi;g_2,g_3)=a.$$

Но так как

$$\wp(vi;g_2,g_3)=-\wp(v;g_2,-g_3),$$

(см. § 76), то

$$\wp(v;g_2,-g_3)=-a,$$

где число $-a>-e_3$, т. е. больше наибольшего из трех корней $-e_3$, $-e_2$, $-e_1$, соответствующих функции $\wp(v;g_2,-g_3)$. Таким образом мы опять приходим к первому случаю.

Пусть, например, требуется решить уравнение

$$\wp\left(u;\frac{39}{196},-\frac{5}{392}\right)=-1.$$

Инварианты:

$$g_2=\frac{39}{196};\quad g_3=-\frac{5}{392}.$$

Корни:

$$e_1=\frac{5}{28};\quad e_2=\frac{1}{14};\quad e_3=-\frac{1}{4}.$$

Полагая $u=vi$, имеем:

$$\wp\left(vi;\frac{39}{196},-\frac{5}{392}\right)=-1,$$

и, следовательно:

$$\wp\left(v;\frac{39}{196},\frac{5}{392}\right)=1.$$

Корни, соответствующие последней функции $\wp(v)$, будут:

$$\varepsilon_1=-e_3=\frac{1}{4};\quad \varepsilon_2=-e_2=-\frac{1}{14};\quad \varepsilon_3=-e_1=-\frac{5}{28}.$$

Квадрат модуля:

$$k^2=\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_3}{\varepsilon_1-\varepsilon_3}=\frac{1}{4};$$

модулярный угол $\theta=30°$.

Величина

$$A=\frac{1-2q}{1+2q}\sqrt{\frac{a-\varepsilon_3}{a-\varepsilon_2}}=\frac{0,96406}{1,03594}\sqrt{1,1}=0,976.$$

Следовательно:

$$\cos\frac{\pi v\sqrt{\frac{3}{7}}}{K}=\frac{0,024}{3,952q},$$

$$\lg\cos\frac{\pi v\sqrt{\frac{3}{7}}}{K}=\bar{1},52932,$$

$$\frac{180°\cdot v\sqrt{\frac{3}{7}}}{K}=70°13'33'',$$

$$v=1,0046;$$

стало быть:

$$u_0=1,0046i,$$

$$u=\pm 1,0046i+2m\omega_1+2n\omega_3.$$

4. Если $e_2<a<e_1$, то одно из значений аргумента u заключается между ω_1 и $\omega_1+\omega_3$. Можно положить $u=\omega_1+vi$. Дальнейший ход решения указан в пунктах втором и третьем этого параграфа.

Случай $\Delta<0$. Воспользовавшись формулой

$$\bar{\wp} u=\wp u+\frac{H^2}{\wp u-e_2},$$

в силу равенства $\wp u=a$, будем иметь:

$$\bar{\wp} u=b,$$

где $b=a+\frac{H^2}{a-e_2}$ и где $\bar{\wp} u$ есть вейерштрассова функция с положительным дискриминантом. Таким образом задачу мы привели к ранее разобранному случаю.

УПРАЖНЕНИЯ

Доказать что,

1. $H_1^2(0)\cdot H_1(u+v)H_1(u-v)=\Theta_1^2(u)\Theta_1^2(v)-\Theta^2(u)\cdot\Theta^2(v)$.
2. $H_1^2(0)\Theta(u+v)\cdot\Theta(u-v)=H^2(u)\Theta_1^2(v)+H_1^2(u)\Theta^2(v)$.
3. $H_1(0)\Theta_1(u)\cdot\Theta_1(v)H_1(u-v)-\Theta_1(0)H_1(u)\cdot H_1(v)\Theta_1(u-v)=$
$=\Theta(0)H(u)\cdot H(v)\Theta(u-v)$.
4. $H_1(0)H_1(u)\Theta(u)\Theta(v)+H(0)H(u)\Theta_1(u)\cdot\Theta_1(v)=$
$=\Theta(0)H_1(0)H_1(u-v)\Theta(u+v)$.

Пользуясь тэта-функциями, показать, что

5. $\operatorname{sn}\left(0,34;\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)=0,329.$

6. $\operatorname{sn}\left(1,16;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0,873.$

7. $\operatorname{cn}\left(0,44;\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right)=0,906.$

8. $\operatorname{cn}\left(1,4;\ \sqrt{\frac{3}{5}}\right)=0,35.$

9. $\operatorname{dn}\left(0,65;\ \sqrt{\frac{3}{5}}\right)=0,891.$

10. $\wp\left(\frac{4}{9}\omega_2;\ 0,\ 1\right)=2,17.$

11. $\zeta\left(\frac{4}{9}\omega_2;\ 0,\ 1\right)=1,47.$

12. $\sigma\left(\frac{4}{4}\omega_2;\ 0,\ 1\right)=0,68.$

ГЛАВА VI

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ В ОБЩЕМ ВИДЕ

§ 123. Общий вид эллиптического интеграла. Его преобразование

1. Интегралы вида:

$$\int f(x,\ \sqrt{R})\,dx, \tag{1}$$

где

$$R=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,$$

или

$$R=ax^3+bx^2+cx+d,$$

а f означает рациональную функцию как от x, так и от $\sqrt{R}$, называют эллиптическими [1]). Раньше встреченные нами виды представляли частные случаи интеграла (1).

Заметим, что в случае, когда R есть целый многочлен степени выше четвертой, то интегралы вида (1) называют ультраэллиптическими. Последние в свою очередь являются частным видом так называемых абелевых интегралов. Под этим именем известны интегралы вида:

$$\int f(x, y)\,dx,$$

где f есть рациональная относительно x и y функция, а y есть корень неприводимого уравнения n-й степени:

$$y^n+P_1y^{n-1}+P_2y^{n-2}+\ldots+P_n=0,$$

коэфициенты которого целые и рациональные функции от x.

Функция $f(x,\sqrt{R})$, рациональная относительно x и $\sqrt{R}$, в самом общем случае может иметь вид дроби, в состав числителя и знаменателя которой входят целые и положительные степени $\sqrt{R}$ с коэфициентами — целыми многочленами относительно x; так что

$$f(x,\sqrt{R})=\frac{A_0+A_1\sqrt{R}+A_2(\sqrt{R})^2+\ldots}{B_0+B_1\sqrt{R}+B_2(\sqrt{R})^2+\ldots}.$$

---

[1]) При этом предполагают, что многочлен $R(x)$ не имеет кратных корней. В случае когда $R(x)$ имеет кратный корень, например, двойной корень $x=\alpha$, мы можем представить $R(x)$ в виде:

$$R(x)=(x-\alpha)^2R_1(x),$$

где $R_1(x)$ — многочлен второй или первой степени. Тогда

$$\sqrt{R(x)}=(x-\alpha)\sqrt{R_1(x)}$$

и наш интеграл выражается в конечном виде через элементарные функции.

Здесь буквами $A_0, A_1, A_2, \ldots, B_0, B_1, B_2, \ldots,$ обозначены целые относительно x многочлены.

Принимая во внимание, что все четные степени $\sqrt{R}$ суть тоже целые многочлены относительно x, мы можем последнее равенство переписать в виде:

$$f(x, \sqrt{R}) = \frac{C + D\sqrt{R}}{E + F\sqrt{R}},$$

где буквами C, D, E и F обозначены целые относительно x многочлены.

Умножая числителя и знаменателя полученной дроби на $E - F \cdot \sqrt{R}$, находим:

$$f(x, \sqrt{R}) = \frac{EC - DFR + (DE - CF)\sqrt{R}}{E^2 - F^2R} = \frac{H}{K} + \frac{I}{K}\sqrt{R},$$

где

$$H = EC - DFR; \quad I = DE - CF; \quad K = E^2 - F^2R.$$

Но так как

$$\frac{I}{K} \cdot \sqrt{R} = \frac{IR}{K\sqrt{R}} = \frac{M}{\sqrt{R}},$$

то

$$f(x, \sqrt{R}) = L + \frac{M}{\sqrt{R}},$$

где $L = \frac{H}{K}$ и $M = \frac{IR}{K}$, и как L, так и M представляют рациональные относительно x функции. Теперь мы видим, что

$$\int f(x, \sqrt{R})\,dx = \int L \cdot dx + \int \frac{M\,dx}{\sqrt{R}}.$$

Первый из интегралов, полученных нами в правой части этого равенства, есть интеграл от рациональной функции, и способы его нахождения известны из курса интегрального исчисления. Вопрос поэтому приводится к нахождению второго интеграла, который мы напишем в виде:

$$\int \frac{\varphi(x) \cdot dx}{\sqrt{R}}, \tag{2}$$

подразумевая под $\varphi(x)$ рациональную функцию x.

2. Теперь диференциал

$$\frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{R}}$$

преобразуем так, чтобы вместо многочлена

$$R = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \tag{3}$$

под знаком корня получить многочлен

$$A(t^2 + \lambda)(t^2 + \mu),$$

в котором отсутствуют нечетные степени переменной.

Заметим, что многочлен четвертой степени (3) можно разложить на два множителя второй степени, так что

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x^2 + 2mx + n)(x^2 + 2px + q). \tag{4}$$

Если коэфициенты a, b, c и d вещественны, что мы предполагаем, то мы можем потребовать, чтобы коэфициенты m, n, p и q тоже были вещественны; их нахождение, вообще говоря, требует решения уравнения третьей степени [1]).

Если $m = p$, то многочлен (3) можно привести к требуемой форме, полагая, что

$$x + m = t.$$

Если $m \gtrless p$, то применим подстановку

$$x = \frac{\alpha t + \beta}{t + 1},$$

уже примененную нами в § 9.

Трехчлен

$$x^2 + 2mx + n$$

после замены переменной примет вид:

$$\frac{(\alpha^2 + 2m\alpha + n)t^2 + 2(\alpha\beta + m\alpha + m\beta + n)t + \beta^2 + 2m\beta + n}{(t+1)^2}$$

Аналогичный вид примет и трехчлен

$$x^2 + 2px + q.$$

Коэфициенты α и β выберем так, чтобы в выражениях обоих трехчленов исчезли в вычислителях первые степени переменной t. Для этого придется α и β подчинить таким двум условиям:

$$\alpha\beta + m(\alpha + \beta) + n = 0,$$
$$\alpha\beta + p(\alpha + \beta) + q = 0.$$

Откуда

$$\alpha + \beta = \frac{n - q}{p - m},$$

$$\alpha\beta = \frac{mq - np}{p - m};$$

причем, согласно предположению, $p \gtrless m$.

Мы теперь видим, что α и β являются корнями квадратного уравнения

$$(p - m)\gamma^2 - (n - q)\gamma + mq - np = 0, \tag{5}$$

[1]) Заметим, что в случае, когда по крайней мере два корня многочлена мнимы, разложение указанного типа можно произвести лишь одним способом. Если же все четыре корня вещественны, то можно получить три разных разложения вида (4). Обозначая в этом случае через x_1, x_2, x_3 и x_4 корни в порядке их величины, мы будем полагать для определенности, что

$$x^2 + 2mx + n = (x - x_1)(x - x_2)$$

и

$$x^2 + 2px + q = (x - x_3)(x - x_4).$$

дискриминант которого

$$\Delta = (n-q)^2 - 4(p-m)(mq-np). \tag{6}$$

Докажем, что коэфициенты α и β вещественны. Для этого достаточно доказать, что $\Delta > 0$.

Обозначим через x_1 и x_2 корни трехчлена $x^2+2px+n$, а через x_3 и x_4 — корни трехчлена $x^2+2px+q$. Будем иметь:

$$2m = -(x_1+x_2);\quad n = x_1 \cdot x_2;\quad 2p = -(x_3+x_4);\quad q = x_3 x_4.$$

Внося значения m, n, p и q в (6), находим:

$$\Delta = (x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_2-x_3)(x_2-x_4).$$

Если все четыре корня мнимы, то x_1 сопряжен с x_2, а x_3 сопряжен с x_4. Нетрудно проверить, что в этом случае $\Delta > 0$.

Также нетрудно проверить, что $\Delta > 0$ в случае, когда x_1 и x_2 вещественны, а x_3 и x_4 сопряженные мнимые (или наоборот).

В обоих этих случаях коэфициенты α и β вещественны.

Если все четыре корня многочлена (3) вещественны, то наибольший возьмем за x_1, следующий по величине — за x_2 и т. д. В таком случае опять $\Delta > 0$. И если коэфициенты m, n, p и q, взятые из (4), подставим в уравнение (5), то это последнее опять даст вещественные корни α и β.

Ввиду выбора коэфициентов α и β и на основании (4) будем иметь:

$$R = \frac{A(t^2+\lambda)(t^2+\mu)}{(t+1)^4};$$

A, λ и μ вполне определены.

И так как, кроме того:

$$dx = \frac{(\beta-\alpha)\,dt}{(t+1)^2},$$

то в общем будем иметь:

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{R}} = \int \frac{\psi(t)\,dt}{\sqrt{A(t^2+\lambda)(t^2+\mu)}},$$

где

$$\psi(t) = (\beta-\alpha)\cdot\varphi\left(\frac{\alpha t+\beta}{t+1}\right).$$

Очевидно, $\psi(t)$ есть рациональная функция от аргумента t. Таким образом интеграл (2) приведен к нужному виду.

В случае, когда в интеграле (2) под знаком корня находится многочлен третьей степени вида:

$$ax^3+bx^2+cx+d,$$

то к тому же виду можно притти с помощью подстановки

$$x = t^2+\alpha,$$

где α есть вещественный корень многочлена.

§ 124. Приведение эллиптических интегралов к нормальной форме

Функцию $\psi(t)$, рациональную относительно t, можно представить в виде:

$$\psi(t) = F(t^2) + tF_1(t^2),$$

где $F(t^2)$ и $F_1(t^2)$ — функции, рациональные относительно t^2. Вследствие этого:

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{R}} = \int \frac{F(t^2)\,dt}{\sqrt{A(t^2+\lambda)(t^2+\mu)}} + \int \frac{F_1(t^2)\,t\cdot dt}{\sqrt{A(t^2+\lambda)(t^2+\mu)}}.$$

Последний интеграл подстановкой

$$t^2 = z$$

приводится к виду:

$$\frac{1}{2}\int \frac{F_1(z)\,dz}{\sqrt{A(z+\lambda)(z+\mu)}}$$

и выражается посредством элементарных функций. Интеграл

$$\int \frac{F(t^2)\,dt}{\sqrt{A(t^2+\lambda)(t^2+\mu)}} \tag{7}$$

приводится, вообще говоря, к нормальным эллиптическим интегралам первого, второго и третьего рода.

Приведение к этой форме мы начнем с преобразования диференциала

$$\frac{dt}{\sqrt{A(t^2+\lambda)(t^2+\mu)}},$$

который, учитывая различные возможные комбинации знаков A, λ и μ, можно написать в виде:

$$\frac{dt}{f\sqrt{\pm(1\pm g^2t^2)(1\pm h^2t^2)}},$$

где f, g и h — действительные числа.

Полагая, что $h > g$, $\frac{g^2}{h^2} = c^2 < 1$ и вводя вместо переменной t новую ξ, связанную с t зависимостью

$$ht = \xi,$$

мы видим, что наш диференциал можно еще представить так:

$$\frac{d\xi}{f\cdot h\sqrt{\pm(1\pm\xi^2)(1\pm c^2\xi^2)}}.$$

Комбинируя знаки, мы приходим к восьми формам. Исключая комбинацию: $-$, $+$, $+$, которой соответствует мнимое значение квадратного корня, при любом вещественном ξ, все эти формы помощью соответствующих вещественных подстановок можно привести к одной

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

где $0 \leqslant k \leqslant 1$. Отметим все формы и соответствующие им подстановки:

$$\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-c^2\xi^2)}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}; \quad \xi = \sin\varphi; \quad k^2 = c^2.$$

$$\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1+c^2\xi^2)}} = \frac{-\sqrt{1-k^2}\cdot d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}; \quad \xi = \cos\varphi; \quad k^2 = \frac{c^2}{1+c^2}.$$

$$\frac{d\xi}{\sqrt{(1+\xi^2)(1+c^2\xi^2)}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}; \quad \xi = \operatorname{tg}\varphi; \quad k^2 = 1-c^2.$$

$$\frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2-1)(1+c^2\xi^2)}} = \frac{k\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}; \quad \xi = \sec\varphi; \quad k^2 = \frac{1}{1+c^2}.$$

$$\frac{d\xi}{\sqrt{(1+\xi^2)(1-c^2\xi^2)}} = \frac{-k\cdot d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}; \quad \xi = \frac{\cos\varphi}{c}; \quad k^2 = \frac{1}{1+c^2}.$$

$$\frac{d\xi}{\sqrt{(1+\xi^2)(c^2\xi^2-1)}} = \frac{\sqrt{1-k^2}\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}; \quad \xi = \frac{\sec\varphi}{c}; \quad k^2 = \frac{c^2}{1+c^2}.$$

$$\frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2-1)(1-c^2\xi^2)}} = \frac{-d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}; \quad \xi = \sin^2\varphi + \frac{1}{c^2}\cos^2\varphi,$$

$$k^2 = 1-c^2.$$

Теперь мы видим, что интеграл (7), к которому нам удалось свести интеграл (2), принимает вид:

$$\int \frac{\Phi(\sin^2\varphi)\cdot d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \tag{8}$$

где Φ — рациональная функция относительно $\sin^2\varphi$. Такая функция должна быть суммой слагаемых вида:

$$B\cdot(p+\sin^2\varphi)^n,$$

где B и p — постоянные, а n — числа целые, положительные, отрицательные или нуль.

Поэтому

$$\int \frac{\Phi(\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \sum \int \frac{B(p+\sin^2\varphi)^n\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Если положим, что

$$\int \frac{(p+\sin^2\varphi)^n\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = I_n,$$

то для интеграла этого вида можно установить формулу приведения:

$$(p+\sin^2\varphi)^n\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = 2nM\cdot I_{n-1} + (2n+1)NI_n -$$
$$-(2n+2)PI_{n+1} + (2n+3)k^2 I_{n+2}, \tag{9}$$

в которой

$$M = p(p+1)(k^2p+1),$$
$$N = 1+2p+2k^2p+3k^2p^2,$$
$$P = 1+3k^2p$$

и которую можно проверить диференцированием.

Если в формуле (9) положим $n=0$, то увидим, что интеграл I_2 выражается через I_1, I_0 и I_{-1}. Придавая указателю n другие положительные или отрицательные значения, мы увидим, что и прочие интегралы вида I_n могут быть выражены, через I_1 I_0, и I_{-1}. Но три последние приводятся к нормальному виду Лежандра. Действительно:

$$I_0 = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

представляет интеграл первого рода.

$$I_{-1} = \int \frac{d\varphi}{(p+\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{p}\int \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1+k\sin^2\varphi}}$$

$\left(\text{где } n = \frac{1}{p}\right)$ приводится к интегралу третьего рода.

$$I_1 = \int \frac{(p+\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1+pk^2}{k^2}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - \frac{1}{k^2}\int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\cdot d\varphi.$$

приводится к интегралам первого и второго рода.

Сопоставляя все вышесказанное, мы можем теперь утверждать, что *всякий эллиптический интеграл*

$$\int f(x, \sqrt{R})\,dx,$$

где

$$R = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

или

$$R = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

может быть выражен через элементарные функции и через нормальные эллиптические интегралы Лежандра.

Пример. Надо заметить, что вышеизложенный способ приведения эллиптических интегралов к нормальному виду на практике приводит часто к весьма сложным выкладкам. Надо стараться поэтому по мере возможности пользоваться соображениями частного характера, упрощающими действия. Пусть, например, требуется привести к нормальной форме интеграл

$$I = \int \frac{dx}{(x-3)^3\sqrt{x^4-14x^3+71x^2-154x+120}}.$$

(*Fabry*, Problèmes d'Analyse mathématique, стр. 65).

Приводя к нормальной форме Лежандра, мы должны находящийся под знаком корня многочлен преобразовать в такой, корни которого по величине попарно равны, а по знаку противоположны. Заметив, что

$$x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120 = (x-5)(x-4)(x-3)(x-2),$$

положим:

$$x = \frac{y+7}{2}$$

Мы будем иметь:

$$x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120 = \frac{9}{16}(1-y^2)\left(1-\frac{y^2}{9}\right).$$

Поэтому

$$I=\frac{16}{3}\int\frac{dy}{(1+y)^3\sqrt{(1-y^2)\left(1-\frac{y^2}{9}\right)}}.$$

Если

$$R=(1-y^2)\left(1-\frac{y^2}{9}\right),$$

то, диференцируя выражение $\frac{\sqrt{R}}{(1+y)^n}$, нетрудно проверить, что

$$\frac{\sqrt{R}}{(1+y)^n}=\frac{1}{9}\int\frac{2y^3-10y-n(1+y)(9-y^2)}{(1+y)^n\sqrt{R}}\,dy=$$

$$=\frac{1}{9}\int\left[\frac{4(2-4n)}{(1+y)^n}+\frac{4(n-1)}{(1+y)^{n-1}}+\frac{2(2n-3)}{(1+y)^{n-2}}+\frac{2-n}{(1+y)^{n-3}}\right]\frac{dy}{\sqrt{R}}.$$

Придавая показателю n последовательно значения 3, 2 и 1, получим

$$\frac{1}{9}\int\left[\frac{-40}{(1+y)^3}+\frac{8}{(1+y)^2}+\frac{6}{1+y}-1\right]\frac{dy}{\sqrt{R}}=\frac{\sqrt{R}}{(1+y)^3},$$

$$\frac{1}{9}\int\left[\frac{-24}{(1+y)^2}+\frac{4}{1+y}+2\right]\frac{dy}{\sqrt{R}}=\frac{\sqrt{R}}{(1+y)^2},$$

$$\frac{1}{9}\int\left[\frac{-8}{1+y}-1+y^2\right]\frac{dy}{\sqrt{R}}=\frac{\sqrt{R}}{1+y}.$$

Умножим эти равенства соответственно на 12, 4 и 11 и результаты сложим. Мы найдем:

$$\frac{1}{9}\int\left[\frac{-480}{(1+y)^3}+11y^2-15\right]\frac{dy}{\sqrt{R}}=\frac{(11y^2+26y+27)\sqrt{R}}{(1+y)^3}.$$

Следовательно:

$$I=\frac{16}{3}\int\frac{dy}{(1+y)^3\sqrt{R}}=$$

$$=\frac{1}{10}\left[-\frac{(11y^2+26y+27)\sqrt{R}}{(1+y)^3}+\frac{11}{9}\int\frac{y^2\,dy}{\sqrt{R}}-\frac{5}{3}\int\frac{dy}{\sqrt{R}}\right].$$

Таким образом предложенный интеграл выражен через интегралы Лежандра первого и второго рода.

§ 125. Интегрирование посредством эллиптических функций Якоби

В предыдущем параграфе мы видели, что всякий эллиптический интеграл в общем случае может быть приведен к форме:

$$\int\frac{\Phi(\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\tag{8}$$

где Φ есть рациональная функция относительно $\sin^2\varphi$.

Если мы сделаем замену переменного, введя u вместо φ, посредством соотношения:

$$u=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

то $\varphi=\operatorname{am}u$ и $\sin\varphi=\operatorname{sn}u$.

Тогда (8) принимает вид:

$$\int\Phi(\operatorname{sn}^2u)\,du.\tag{10}$$

Но $\Phi(\operatorname{sn}^2u)$ как рациональная функция от sn^2u может быть представлена в виде:

$$\Phi(\operatorname{sn}^2u)=A_0+A_1\operatorname{sn}^2u+A_2\operatorname{sn}^4u+\ldots+A_m\operatorname{sn}^{2m}u+$$

$$+\frac{B_1}{\operatorname{sn}^2u}+\frac{B_2}{\operatorname{sn}^4u}+\ldots+\frac{B_n}{\operatorname{sn}^{2n}u}+$$

$$+\sum\left(\frac{C_1}{\operatorname{sn}^2u-a}+\frac{C_2}{(\operatorname{sn}^2u-a)^2}+\ldots+\frac{C_p}{(\operatorname{sn}^2u-a)^p}\right).$$

Поэтому интеграл (10) приводится к интегралам вида:

$$\int\operatorname{sn}^2u\,du,\quad\int\operatorname{sn}^4u\,du,\ldots,\quad\int\operatorname{sn}^{2m}u\,du,$$

$$\int\frac{du}{\operatorname{sn}^2u},\quad\int\frac{du}{\operatorname{sn}^4u},\ldots,\quad\int\frac{du}{\operatorname{sn}^{2n}u},\tag{11}$$

$$\int\frac{du}{\operatorname{sn}^2u-a},\quad\int\frac{du}{(\operatorname{sn}^2u-a)^2},\ldots,\quad\int\frac{du}{(\operatorname{sn}^2u-a)^p}.\tag{12}$$

Для интегралов вида (11) можно указать формулу приведения, при помощи которой все они приводятся к первому $\int\operatorname{sn}^2u\,du$, для вычисления которого мы имеем равенство:

$$\int_0^u\operatorname{sn}^2u\,du=\frac{u}{k^2}\frac{\theta''(0)}{\theta(0)}-\frac{1}{k^2}\frac{\theta'(u)}{\theta(u)}$$

(см. § 114).

Эту формулу приведения можно вывести таким образом: составим производную:

$$\frac{d}{du}\left(\operatorname{sn}^{2n-3}u\cdot\operatorname{cn}u\cdot\operatorname{dn}u\right)=(2n-3)\left(1-\operatorname{sn}^2u\right)\left(1-k^2\operatorname{sn}^2u\right)\operatorname{sn}^{2n-4}u-$$

$$-\operatorname{sn}^{2n-2}u\,(1-k^2\operatorname{sn}^2u)-k^2\operatorname{sn}^{2n-2}u\,(1-\operatorname{sn}^2u)=$$

$$=(2n-1)k^2\operatorname{sn}^{2n}u-(2n-2)(1+k^2)\operatorname{sn}^{2n-2}u+(2n-3)\operatorname{sn}^{2n-4}u.$$

Интегрируя обе части этого равенства, получим:

$$(2n-1)k^2\int\operatorname{sn}\;u\cdot du-(2n-2)(1+k^2)\int\operatorname{sn}^{2n-2}u\,du+$$

$$+(2n-3)\int\operatorname{sn}^{2n-4}u\cdot du=\operatorname{sn}^{2n-3}u\cdot\operatorname{cn}u\cdot\operatorname{dn}u.$$

Придавая числу n положительные и отрицательные целые значения, мы все интегралы вида (11) выразим через первый из них.

Интегралы вида (12) можно получить путем диференцирования по параметру a обеих частей равенства (69) § 116. Надо при это иметь в виду, что в левой части этого равенства

$$n = -k^2 \operatorname{sn}^2 a\,.$$

§ 126. Интегрирование посредством функций Вейерштрасса

1. Будем интеграл (2) писать здесь в виде:

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{A_0x^4 + 4A_1x^3 + 6A_2x^2 + 4A_3x + A_4}} \tag{13}$$

и кратко обозначать его буквой I.

Полагая

$$x = y - \frac{A_1}{A_0},$$

мы получим:

$$I = \frac{1}{\sqrt{A_0}} \int \frac{F(y)\,dy}{\sqrt{y^4 + 6a_2y^2 + 4a_3y + a_4}}, \tag{14}$$

где

$$a_2 = \frac{A_0A_2 - A_1^2}{A_0^2},$$

$$a_3 = \frac{A_3A_0^2 - 3A_0A_1A_2 + 2A_1^3}{A_0^3},$$

$$a_4 = \frac{A_4A_0^3 - 4A_0^2A_1A_3 + 6A_0A_2A_1^2 - 3A_1^4}{A_0^4}.$$

Положим:

$$\sqrt{y^4 + 6a_2y^2 + 4a_3y + a_4} = y^2 + a_2 - 2z.$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат, будем иметь:

$$4a_2y^2 + 4zy^2 + 4a_3y - 4z^2 + 4a_2z + a_4 - a_2^2 = 0. \tag{15}$$

Диференцируем это равенство и результат запишем в виде пропорции:

$$\frac{dy}{y^2 + a_2 - 2z} = -\frac{dz}{2a_2y + 2yz + a_3},$$

или

$$\frac{dy}{\sqrt{y^4 + 6a_2y^2 + 4a_3y + a_4}} = -\frac{dz}{2a_2y + 2yz + a_3}. \tag{16}$$

Но, решая уравнение (15) относительно y, в то же время получим:

$$y = \frac{-a_3 \pm \sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}}{2(z + a_2)}, \tag{17}$$

где

$$g_2 = a_4 + 3a_2^2; \quad g_3 = a_2a_4 - a_3^2 - a_2^3;$$

или еще:

$$g_2 = \frac{1}{A_0^2}(A_0A_4 - 4A_1A_3 + 3A_2^2),$$

$$g_3 = \frac{1}{A_0^3}(A_0A_2A_4 + 2A_1A_2A_3 - A_2^3 - A_0A_3^2 - A_1^2A_4).$$

Теперь положим $z = \wp(u; g_2, g_3) = \wp u$.

Переписав (17) в виде:

$$(2zy + 2a_2y + a_3)^2 = 4z^3 - g_2z - g_3,$$

будем иметь:

$$(2zy + 2a_2y + a_3)^2 = (\wp' u)^2.$$

А на основании (16):

$$\frac{dy}{\sqrt{y^4 + 6a_2y^2 + 4a_3y + a_4}} = -du.$$

Кроме того, из (17) находим:

$$y = \frac{\wp' u - a_3}{2(\wp u + a_2)}. \tag{18}$$

Обращаясь теперь к интегралу (14), заключаем, что ввиду (18) функция $F(y)$, будучи рациональной относительно y, будет рациональной также относительно $\wp u$ и $\wp' u$. Это значит, что

$$I = \frac{1}{\sqrt{A_0}} \int f(\wp u, \wp' u)\,du, \tag{19}$$

где f есть знак рациональной функции.

Таким образом интеграл (13) приведен к (19), в котором подинтегральная функция рациональна относительно $\wp u$ и $\wp' u$.

2. *Случай, когда R есть многочлен третьей степени.*

Если R — многочлен третьей степени, то интеграл (2) будем писать в виде:

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{A_0x^3 + 3A_1x + 3A_2 + A_3}}$$

и обозначать буквой I_1.

Полагая

$$x = mz + n$$

и выбрав

$$n = -\frac{A_1}{A_0} \quad \text{и} \quad A_0m^3 = 4,$$

мы приведем наш интеграл к виду:

$$I_1 = \int \frac{f(z)\,dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}},$$

где $f(z)$ есть рациональная относительно z функция.

Полагая далее $z = \wp u$, получим:

$$I_1 = \int f(\wp u)\,du.$$

§ 127. Интегрирование функций, рациональных относительно $\wp u$

В двух предыдущих параграфах нам удалось показать, что всякий эллиптический интеграл приводится к виду:

$$\int f(\wp u)\, du,$$

или к виду:

$$\int f(\wp u,\ \wp' u) \cdot du,$$

где f есть знак рациональной функции.

Рассмотрим сначала первый из этих интегралов. Разлагая функцию f на элементы, будем иметь:

$$f(\wp u) = C_0 + C_1 \wp u + C_2 \wp^2 u + \ldots$$

$$\ldots + \frac{A_1}{\wp u - \alpha} + \frac{A_2}{(\wp u - \alpha)^2} + \ldots + \frac{B_1}{\wp u - \beta} + \frac{B_2}{(\wp u - \beta)^2} + \ldots,$$

где $C_0,\ C_1,\ C_2, \ldots,\ A_1,\ A_2, \ldots,\ B_1,\ B_2, \ldots,\ \alpha,\ \beta, \ldots$ — постоянные.

Умножив обе части этого равенства на du и интегрируя результат, мы увидим, что интересующий нас интеграл представляет сумму интегралов вида:

$$\int \wp^n u\, du \text{ и } \int \frac{du}{(\wp u - \alpha)^n}. \tag{20}$$

Придется поэтому рассмотреть эти виды.

Для первого при $n = 1$ имеем:

$$\int \wp u\, du = -\zeta u$$

(произвольную постоянную не выписываем).

Для $n = 2$ воспользуемся формулой (§ 89):

$$\wp'' u = 6 \wp^2 u - \frac{g_2}{2}, \tag{21}$$

на основании которой

$$\int \wp^2 u \cdot du = \int \left(\frac{1}{6} \wp'' u + \frac{g_2}{12}\right) du = \frac{1}{6} \wp' u + \frac{g_2 u}{12}.$$

Пусть $n = 3$. Чтобы найти

$$\int \wp^3 u \cdot du,$$

постараемся выразить $\wp^3 u$ линейно через $\wp u$ и через производные от этой функции.

Переписав (21) в виде:

$$4 \wp^2 u = \frac{2}{3} \wp'' u + \frac{1}{3} g_2,$$

продиференцируем это равенство два раза.

Пропуская в записи букву u, получим:

$$4 \wp \wp' = \frac{1}{3} \wp''',$$

$$4 (\wp')^2 + 4 \wp \cdot \wp'' = \frac{1}{3} \wp^{(IV)}.$$

Кроме того:

$$(\wp')^2 = 4 \wp^3 - g_2 \wp - g_3,$$

и еще на основании (21):

$$\wp'' \wp = 2 \wp^3 - \frac{g_2 \wp}{2}.$$

Если теперь из трех последних равенств исключим $(\wp')^2$ и $\wp''$, то результат будет такой:

$$\wp^3 = \frac{1}{120} \wp^{(IV)} + \frac{3}{20} g_2 \wp + \frac{1}{10} g_3.$$

Следовательно:

$$\int \wp^3 u \cdot du = \frac{\wp''' u}{120} - \frac{3}{20} g_2 \zeta u + \frac{1}{10} g_3 \cdot u.$$

Можно показать, что при $n = 4$:

$$\int \wp^4 u \cdot du = \frac{\wp^{(V)} u}{5040} + \frac{1}{30} g_2 \wp' u - \frac{1}{7} g_3 \zeta u + \frac{5}{336} g_2^2 u$$

и т. д.

Обращаясь ко второму из интегралов (20), положим, прежде всего, что $\alpha = \wp v$, причем аргумент v при известном α определяется по приемам § 87 и 122. Таким образом имеем интеграл:

$$\int \frac{du}{(\wp u - \wp v)^n}.$$

Здесь надо отличать два случая.

1. Аргумент v не равен полупериоду функции $\wp u$. Начнем с предположения, что $n = 1$.

Согласно формуле (52) главы IV:

$$\frac{1}{\wp u - \wp v} = -\frac{1}{\wp' v} \left[\zeta(u + v) - \zeta(u - v) - 2 \zeta v\right].$$

Отсюда

$$\int \frac{du}{\wp u - \wp v} = \frac{1}{\wp' v} \ln \frac{\sigma(u - v)}{\sigma(u + v)} + 2 \frac{u \zeta v}{\wp' v}.$$

Диференцируя обе части этого равенства по параметру v, мы получим выражение для интеграла

$$\int \frac{du}{(\wp u - \wp v)^2}.$$

Дальнейшее диференцирование по параметру последовательно получаемых выражений нам даст интегралы:

$$\int \frac{du}{(\wp u-\wp v)^3},$$

$$\int \frac{du}{(\wp u-\wp v)^4}$$

и т. д.

2. Аргумент v есть полупериод. Пусть, например, $v=\omega_1$. В таком случае, согласно формуле (36) главы IV:

$$\frac{1}{\wp u-\wp \omega_1}=\frac{\wp(u+\omega_1)-e_1}{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}.$$

Возведя обе части этого равенства в n-ю степень, помножив результат на du и интегрируя, мы увидим, что наш интеграл представит сумму интегралов вида

$$\int \wp^m(u+\omega_1)\,du,$$

помноженных на постоянные коэфициенты, т. е. получим интегралы уже изученного типа.

§ 128. Случай функции, рациональной относительно $\wp u$ и $\wp' u$

Если функция $f(\wp u, \wp' u)$ рациональна относительно $\wp u$ и, $\wp' u$ то тем самым она рациональна относительно $\wp u$ и

$$\sqrt{4\wp^3 u-g_2\wp u-g_3}.$$

Следовательно, на основании сказанного в § 123 имеем:

$$f(\wp, \wp')=L+\frac{M}{\wp'}=L+N\wp',$$

где L и $N=\frac{M}{\wp'^2}$ — функции, рациональные относительно $\wp u$. Теперь мы можем написать, что

$$\int f(\wp, \wp')\,du=\int L\,du+\int N\,d\wp.$$

Последний интеграл правой части этого равенства есть интеграл от рациональной функции. Первый имеет вид, рассмотренный в предыдущем параграфе.

Пример. Рассмотрим в качестве примера интеграл

$$I=\int\frac{du}{\wp' v-\wp' u}.$$

Инвариант g_2 функции $\wp$ будем предполагать равным нулю. Совершая несложные преобразования, последовательно получим:

$$\frac{1}{\wp' v-\wp'}=\frac{\wp' v+\wp' u}{(\wp' v)^2-(\wp' u)^2}=\frac{\wp' v+\wp' u}{4\wp^3 v-g_3-(4\wp^3 u-g_3)}=\frac{\wp' v+\wp' u}{4(\wp^3 v-\wp^3 u)}.$$

ГЛАВА VII

ДАЛЬНЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ ПРИЛОЖЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ К ЗАДАЧАМ МЕХАНИКИ

§ 129. Приложение функции Вейерштрасса к изучению колебаний маятника

1. Рассматривая колебания маятника в § 1, мы получили равенство

$$l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=2g\,(\cos\theta-\cos\alpha).$$

Умножая на l, мы придадим ему вид:

$$\left(l\,\frac{d\theta}{dt}\right)^2=2gl(\cos\theta-\cos\alpha).$$

Но $l\,\frac{d\theta}{dt}=v$, где v есть скорость центра качания в некотором его положении P (фиг. 1). Ордината точки P есть $y=l\cos\theta$; абсциссу этой точки обозначим буквой x; $l\cos\alpha=a$ есть ордината точки P_1. При принятых обозначениях полученное нами равенство примет вид:

$$v^2=2g(y-a)$$

и выразит закон изменения скорости центра качания. Но

$$v^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

$$x^2+y^2=l^2,$$

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=0.$$

Поэтому

$$v^2=\frac{l^2}{x^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\frac{l^2}{l^2-y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2.$$

Следовательно:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\frac{2g}{l^2}(y-a)(l^2-y^2),$$

или

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{\sqrt{2g}}{l}\sqrt{(y-a)(l^2-y^2)},$$

где перед знаком корня удержан знак минус потому, что ордината y есть убывающая функция от t.

3. $\int \operatorname{dn} u\, du = i \ln (\operatorname{cn} u - i \operatorname{sn} u)$.

4. $\int \frac{du}{\operatorname{sn} u} = \ln \frac{\operatorname{dn} u - \operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}$.

5. $\int \frac{du}{\operatorname{cn} u} = \frac{1}{k'} \ln \frac{\operatorname{dn} u + k' \operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}$.

6. $\int \frac{du}{\operatorname{dn} u} = \frac{1}{ik'} \ln \frac{\operatorname{cn} u + ik' \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}$.

7. $\int \frac{\operatorname{sn} u\, du}{\operatorname{cn} u} = \frac{1}{k'} \ln \frac{\operatorname{dn} u + k'}{\operatorname{cn} u}$.

8. $\int \frac{\operatorname{sn} u\, du}{\operatorname{dn} u} = \frac{i}{kk'} \ln \frac{ik' - k \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}$.

9. $\int \frac{\operatorname{cn} u\, du}{\operatorname{dn} u} = -\frac{1}{k} \ln \frac{1 - k \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}$.

10. $\int \frac{\operatorname{cn} u\, du}{\operatorname{sn} u} = \ln \frac{1 - \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}$.

11. $\int \frac{\operatorname{sn} u\, du}{\operatorname{cn}^2 u} = \frac{1}{k'^2} \cdot \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}$.

12. $\int \frac{\operatorname{cn} u\, du}{\operatorname{sn}^2 u} = -\frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}$.

13. $\int \frac{\operatorname{sn} u \cdot \operatorname{cn} u \cdot du}{\operatorname{dn} u} = -\frac{1}{k^2} \ln \operatorname{dn} u$.

14. $\int \frac{\operatorname{cn} u \cdot \operatorname{dn} u \cdot du}{\operatorname{sn} u} = \ln \operatorname{sn} u$.

15. $\int \frac{\operatorname{dn} u \cdot du}{\operatorname{cn}^2 u} = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}$.

16. $\int\limits_0^1 \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1 - x^4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{2}\, E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0{,}599$.

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3 + 1}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)^2 \sin^2 \varphi}}$.

18. $\int \frac{\alpha \wp u + \beta}{\gamma \wp u + \delta} du = \frac{\alpha u}{\gamma} - \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma^2 \wp' v} [\ln \sigma (u + v) - \ln \sigma (u - v) - 2u \zeta v]$,

где $\wp v = -\frac{\delta}{\gamma}$.

19. $\int \frac{\wp' u + \wp' v}{\wp u - \wp v} dv = 2 [\ln \sigma (v - u) - \ln \sigma v + v \zeta u]$.

20. $\int\limits_z^\infty \frac{(1 - z^2) dz}{z (1 + z^2) \sqrt{4z^3 + 4z}} = 2 \zeta u + \frac{\wp' u (2 \wp^2 u + 1)}{\wp u (\wp^2 u + 1)}$,

где $u = \int\limits_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3 + 4z}}$.

ГЛАВА VII

ДАЛЬНЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ ПРИЛОЖЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ К ЗАДАЧАМ МЕХАНИКИ

§ 129. Приложение функции Вейерштрасса к изучению колебаний маятника

1. Рассматривая колебания маятника в § 1, мы получили равенство

$$l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2g\, (\cos \theta - \cos \alpha).$$

Умножая на l, мы придадим ему вид:

$$\left(l\, \frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2gl (\cos \theta - \cos \alpha).$$

Но $l\, \frac{d\theta}{dt} = v$, где v есть скорость центра качания в некотором его положении P (фиг. 1). Ордината точки P есть $y = l \cos \theta$; абсциссу этой точки обозначим буквой x; $l \cos \alpha = a$ есть ордината точки P_1. При принятых обозначениях полученное нами равенство примет вид:

$$v^2 = 2g (y - a)$$

и выразит закон изменения скорости центра качания. Но

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

$$x^2 + y^2 = l^2,$$

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = 0.$$

Поэтому

$$v^2 = \frac{l^2}{x^2} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{l^2}{l^2 - y^2} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2.$$

Следовательно:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l^2} (y - a) (l^2 - y^2),$$

или

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\sqrt{2g}}{l} \sqrt{(y - a) (l^2 - y^2)},$$

где перед знаком корня удержан знак минус потому, что ордината y есть убывающая функция от t.

Выполнив несложное преобразование и проинтегрировав результат, мы получим:

$$\frac{it}{l}\cdot\sqrt{\frac{g}{2}} = -\int_l^y \frac{dy}{\sqrt{4(y-l)(y-a)(y+l)}},$$

или

$$\frac{it}{l}\sqrt{\frac{g}{2}} = \int_y^\infty \frac{dy}{\sqrt{4(y-l)(y-a)(y+l)}} -$$

$$-\int_l^\infty \frac{dy}{\sqrt{4(y-l)(y-a)(y+l)}}.$$

Но в данном случае:

$$e_1 = l, \quad e_2 = a, \quad e_3 = -l.$$

Поэтому

$$\int_l^\infty \frac{dy}{\sqrt{4(y-l)(y-a)(y+l)}} = \omega_1;$$

и мы будем иметь:

$$\frac{it}{l}\sqrt{\frac{g}{2}} + \omega_1 = \int_y^\infty \frac{dy}{\sqrt{4(y-l)(y-a)(y+l)}},$$

т. е.

$$y = \wp\left(\frac{it}{l}\sqrt{\frac{g}{2}} + \omega_1\right).$$

Преобразуя это выражение при помощи формулы

$$\wp(u+\omega_1) = e_1 + \frac{(e_2-e_1)(e_3-e_1)}{\wp u - e_1}$$

(см. § 84), мы получим:

$$y = l + \frac{2l(l-a)}{\wp\left(\frac{it}{l}\sqrt{\frac{g}{2}}\right) - l}.$$

Таким образом ордината y, а, следовательно, и абсцисса $x=\sqrt{l^2-y^2}$ выражены через функцию $\wp$ Вейерштрасса, взятую от мнимого аргумента. Формула для вычисления функции $\wp$ в случае мнимого аргумента приведена в § 80.

2. В выражении ординаты y можно заменить функцию $\wp$ через функцию sn Якоби. Так как в нашем случае корни e_1, e_2 и e_3 вещественны и дискриминант $\Delta > 0$, то преобразование для мнимого аргумента следует производить по формуле (8′) § 80. Пользуясь этой формулой, будем иметь:

$$\wp\left(\frac{it}{l}\sqrt{\frac{g}{2}}\right) = l - \frac{2l}{\operatorname{sn}^2\left(t\sqrt{\frac{l}{g}},\, k'\right)},$$

причем квадрат модуля

$$k'^2 = \frac{e_1-e_2}{e_1-e_3} = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно:

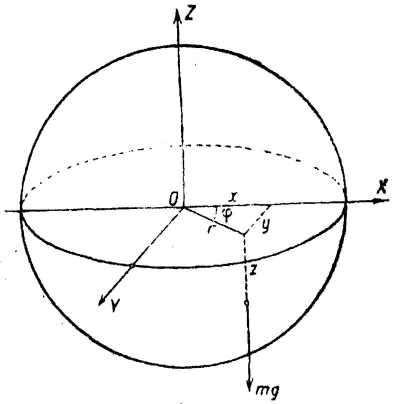
$$y = l + \frac{4l^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\wp\left(\frac{it}{l}\sqrt{\frac{g}{2}}\right) - l} = l\left[1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{sn}^2\left(t\sqrt{\frac{l}{g}}\right)\right],$$

т. е. мы приходим к тому же выражению ординаты, которое уже имели в § 10.

§ 130. Сферический маятник

1. Поставим себе целью исследовать движение тяжелой материальной точки по внутренней поверхности совершенно гладкой сферы.

Отнесем точку к координатной системе, начало которой совпадает с центром O сферы. Оси X и Y расположим в горизонтальной плоскости, а ось Z направим вертикально вверх (фиг. 36). Вопрос будем решать, применяя полярные координаты в пространстве.



Фиг. 36

Так как движение происходит по совершенно гладкой поверхности под действием силы тяжести, имеющей потенциал, то имеет место интеграл живой силы:

$$\frac{mv^2}{2} = U + \frac{mh}{2}. \tag{1}$$

Здесь m — масса точки, v — ее скорость, $U = -mgz$ — потенциал силы тяжести; h — произвольная постоянная.

Так как равнодействующая силы тяжести и реакции поверхности все время пересекает ось Z, то в плоскости XY имеет место интеграл площадей, т. е.

$$r^2\varphi' = C, \tag{2}$$

где C — произвольная постоянная, а r и φ имеют указанные на фигуре значения; φ' — производная, взятая по времени t.

В полярной системе в пространстве положение точки определяется величинами r, z и φ.

Для их нахождения кроме (1) и (2) служит еще уравнение

$$r^2 + z^2 = l^2, \tag{3}$$

где l есть радиус сферы (длина сферического маятника).

Для отыскания зависимости между координатой z и временем t, а также между углом φ и z, преобразуем уравнения (1), (2) и (3). Прежде всего вспомним, что в полярной системе квадрат скорости

$$v^2 = r'^2 + r^2\varphi'^2 + z'^2.$$

Заменим здесь производную φ' ее выражением, взятым из (2), и выражения v^2 и U подставим в (1). Результат будет такой:

$$r'^2 + \frac{C^2}{r^2} + z'^2 = h - 2gz. \tag{4}$$

Но, диференцируя по времени, из (3) имеем:

$$rr' + zz' = 0,$$

т. е.

$$r' = -\frac{zz'}{\sqrt{l^2 - z^2}}.$$

Подстановка в (4) дает:

$$l^2 z'^2 = (h - 2gz)(l^2 - z^2) - C^2,$$

или

$$l^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = f(z), \tag{5}$$

где

$$f(z) = (h - 2gz)(l^2 - z^2) - C^2. \tag{6}$$

Из (5) следует, что

$$dt = \pm\frac{l \cdot dz}{\sqrt{f(z)}},$$

т. е.

$$t = \pm l\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{\sqrt{f(z)}}. \tag{7}$$

Здесь z_0 — начальное значение координаты z, а из двух знаков берется $+$ или $-$, смотря потому, возрастает ли z, исходя от z_0, или убывает.

Нетрудно убедиться также и в том, что

$$d\varphi = \pm\frac{Cl \cdot dz}{(l^2 - z^2)\sqrt{f(z)}},$$

откуда

$$\varphi - \varphi_0 = \pm Cl\int_{0}^{z}\frac{dz}{(l^2 - z^2)\sqrt{f(z)}} \tag{8}$$

Здесь φ_0 есть начальное значение угла φ.

§ 131. Исследование вида траектории

Прежде чем дать способ вычисления z и φ в зависимости от времени t, мы исследуем вид траектории, описываемой точкой. Сначала покажем, что все корни многочлена (6) вещественны. Действительно, делая z последовательно равным ∞, l, z_0, $-l$, мы увидим, что $f(z)$ принимает значения:

$$\infty \quad -C^2 \quad + \quad -C^2.$$

Здесь отмечено, что $f(z_0) > 0$. Это потому, что, как это видно из (5):

$$f(z) = l^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2,$$

т. е. есть величина положительная. Мы теперь видим, что фукция $f(z)$ при изменении z от $+\infty$ до $-l$ меняет знак три раза. Следовательно, она имеет три вещественных корня:

$$a, \quad b, \quad c,$$

причем

$$\infty > a > l > b > z_0 > c > -l.$$

Мы видим, что начальное значение z_0 заключается между b и c. Поэтому в начальный момент движущаяся точка находится на поверхности шарового пояса, определяемого плоскостями $z = b$ и $z = c$.

При своем движении точка будет все время оставаться на поверхности этого пояса. Действительно, если бы точка вышла за его пределы, то координата z прошла бы через корень функции $f(z)$. Но в таком случае функция $f(z)$ должна была бы переменить знак. А так как $f(z_0) > 0$, то, следовательно, $f(z)$ должна бы стать отрицательной, и производная

$$\frac{dz}{dt} = \pm\frac{1}{l}\sqrt{f(z)},$$

выражающая проекцию скорости точки на ось Z, обратилась бы в мнимую величину. Отсюда и следует, что точка за пределы шарового пояса выйти не может.

Представляя $f(z)$ в виде:

$$f(z) = 2g\left(z^3 - \frac{h}{2g}z^2 - l^2 z + \frac{hl^2 - C^2}{2g}\right),$$

будем иметь в силу известных связей между корнями и коэфициентами

$$a + b + c = \frac{h}{2g},$$

$$ab + bc + ca = -l^2,$$

$$abc = \frac{C^2 - hl^2}{2g},$$

Из второй зависимости находим:

$$a(b + c) = -(l^2 + bc).$$

Но так как величины b и c заключаются между l и $-l$, то $l^2+bc>0$ и, следовательно:

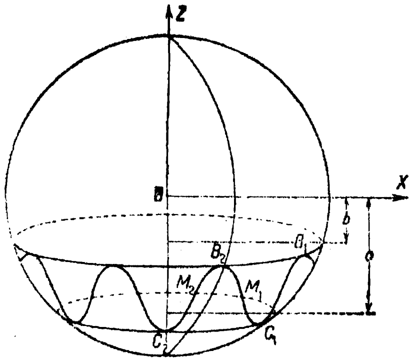
$$a(b+c)<0.$$

Но $a>0$; значит, $b+c<0$; а так как $b>c$, то $c<0$ и плоскость $z=c$ расположена ниже центра сферы.

Переписав равенство (2) в виде:

$$\varphi'=\frac{C}{r^2}$$

и допустив, что в силу начальных условий C, например, положительно, мы увидим, что при движении точки угол φ все время возрастает. В те моменты, когда z становится равным b, точка занимает положения B_1, B_2, ... (фиг. 37). В моменты, когда $z=c$, точка находится в положениях C_1, C_2, . . ., причем и в тех и в других положениях проекция ее скорости на ось OZ, т. е. $\frac{dz}{dt}$, равна нулю, и траектория точки касается окружностей в плоскостях $z=b$ и $z=c$.



Фиг. 37

Если мы проведем меридиан через одну из точек касания, например, через точку B_2, то нетрудно показать, что положения M_1 и M_2 движущейся точки, соответствующие $z=z_1$, относительно взятого меридиана симметричны. Пусть φ_1, φ_2 и φ_3 значения угла φ для точек M_1, B_2 и M_2. В таком случае на основании (8) будем иметь:

$$\varphi_2-\varphi_1=Cl\int\limits_{z_1}^{b}\frac{dz}{(l^2-z^2)\sqrt{f(z)}},$$

$$\varphi_3-\varphi_2=-Cl\int\limits_{b}^{z_1}\frac{dz}{(l^2-z^2)\sqrt{f(z)}}.$$

Отсюда

$$\varphi_2-\varphi_1=\varphi_3-\varphi_2,$$

и, следовательно, точки M_1 и M_2 расположены симметрично относительно меридиана B_2.

Исходя из (7), нетрудно обнаружить также, что время прохождения точкой пути M_1B_2 равно времени, которое она затратит на прохождение пути B_2M_2.

§ 132. Вычисление координаты z и угла φ

1. Координату z мы будем вычислять, исходя из (5). Прежде всего преобразуем это уравнение, вводя вместо z новую переменную ζ согласно равенству:

$$z=\frac{2l^2}{g}\zeta+\frac{a+b+c}{3}.$$

В таком случае:

$$f(z)=2g(z-a)(z-b)(z-c)=\frac{16l^6}{g^2}(\zeta-e_1)(\zeta-e_2)(\zeta-e_3),$$

где

$$e_1=\frac{g}{6l^2}(2a-b-c);\quad e_2=\frac{g}{6l^2}(2b-a-c);\quad e_3=\frac{g}{6l^2}(2c-a-b),$$

причем, очевидно:

$$e_1+e_2+e_3=0 \text{ и } e_1>e_2>e_3.$$

И так как

$$\frac{dz}{dt}=\frac{2l^2}{g}\cdot\frac{d\zeta}{dt},$$

то уравнение (5) приобретает вид:

$$\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2=4(\zeta-e_1)(\zeta-e_2)(\zeta-e_3),$$

или

$$\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2=4\zeta^3-g_2\zeta-g_3, \tag{9}$$

где инварианты

$$g_2=-4(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1);\quad g_3=4e_1e_2e_3.$$

Одновременно с (9) рассмотрим уравнение:

$$(\wp' u)^2=4\wp^3u-g_2\wp u-g_3, \tag{10}$$

где u есть функция от t. Сопоставляя оба уравнения, приходим к заключению, что

$$\zeta=\wp u,$$

при условии, что

$$(\wp' u)^2=\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2,$$

или

$$(\wp' u)^2=(\wp' u)^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2,$$

т. е. при

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2=1,$$

откуда

$$u=\pm t+\Gamma,$$

где Γ — произвольная постоянная.

Так как $\wp u$ есть четная функция, то из двух знаков можно удержать только $+$), т. е. принять

$$u = t + \Gamma;$$

и, следовательно:

$$\zeta = \wp\,(t+\Gamma),$$

а

$$z = \frac{2l^2}{g}\,\wp(t+\Gamma) + \frac{a+b+c}{3}.$$

Величину Γ можно определить на основании начальных условий. Если, например, мы условимся отсчитывать время от того момента, когда движущаяся точка была на уровне $z = c$, то при $t = 0$ будем иметь:

$$\wp(\Gamma) = \frac{g(2c-a-b)}{6l^2} = e_3,$$

откуда

$$\Gamma = \omega_3$$

см. § 83), где ω_3 — полупериод функции $\wp$. Теперь мы видим, что

$$z = \frac{2l^2}{g}\,\wp(t+\omega_3) + \frac{a+b+c}{3}; \tag{11}$$

но $a+b+c = \frac{h}{2g}$. Преобразовав $\wp(t+\omega_3)$, согласно формуле (38) § 84, получим:

$$z = \frac{2l^2}{g}\left\{e_3 + \frac{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}{\wp t - e_3}\right\} + \frac{h}{6g}. \tag{12}$$

Согласно этой формуле, удобно вычислять значения z при заданных t. Способы вычисления функции $\wp\, t$ приведены в § 80 и 119, 120. Можно пользоваться и рядом (44) § 91.

Заметим, что вещественный полупериод ω_1 выразит время, нужное для того, чтобы из положения на уровне $z = c$ точка перешла в соседнее положение на уровне $z = b$. В этом нетрудно убедиться, исходя из (9)

2. При выводе формулы для вычисления угла φ будем исходить и уравнения (2), которому придадим вид:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{l^2 - z^2},$$

или

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{C}{2l}\left(\frac{1}{l-z} + \frac{1}{l+z}\right).$$

Но из (11) имеем:

$$z - c = \frac{2l^2}{g}(\wp u - e_3).$$

Пусть значениям z, равным l и $-l$, соответствуют значения u, равные u_1 и u_2. В таком случае:

$$l - c = \frac{2l^2}{g}(\wp u_1 - e_3),\quad l + c = -\frac{2l^2}{g}(\wp u_2 - e_3).$$

Заметим, что вследствие четности функции $\wp\, u$ знаки u_1 и u_2 из последних двух равенств еще не определяются. Далее имеем:

$$l - z = l - c - (z - c) = -\frac{2l^2}{g}(\wp u - \wp u_1),$$

$$l + z = l + c + z - c = \frac{2l^2}{g}(\wp u - \wp u_2).$$

Вследствие этого:

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{Cg}{4l^3}\left(\frac{1}{\wp u - \wp u_2} - \frac{1}{\wp u - \wp u_1}\right).$$

Умножая обе части этого равенства на $2i$, получим:

$$2i\frac{d\varphi}{du} = \frac{1}{2l^3}\left(\frac{Cgi}{\wp u - \wp u_2} - \frac{Cgi}{\wp u - \wp u_1}\right).$$

Но при $z = l$ и $z = -l$:

$$f(l) = -C^2 \text{ и } f(-l) = -C^2,$$

что следует из (10).

А так как

$$\frac{dz}{du} = \frac{2l^2}{g}\,\wp' u$$

и в то же время на основании (5)

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = \frac{1}{l^2} f(z),$$

то

$$(\wp' u)^2 = \frac{g^2}{4l^6} f(z).$$

Полагая в последнем равенстве $z = l$ и $z = -l$, будем иметь:

$$(\wp' u_1)^2 = -\frac{C^2 g^2}{4l^6}$$

и

$$(\wp' u_2)^2 = -\frac{C^2 g^2}{4l^6}.$$

Извлекая квадратный корень и выбирая надлежащим образом [illegible] u_1 и u_2, получим:

$$\wp' u_1 = \frac{Cgi}{2l^3},$$

$$\wp' u_2 = \frac{Cgi}{2l^3},$$

т. е. $\wp' u_1$ и $\wp' u_2$ имеют мнимые значения. Это объясняется тем, что взятые для z значения, именно l и $-l$, лежат вне уровней, между которыми колеблется маятник.

Теперь можем написать, что

$$2i\frac{d\varphi}{du} = \frac{\wp' u_2}{\wp u - \wp u_2} - \frac{\wp' u_1}{\wp u - \wp u_1}.$$

Применим к последним двум дробям формулу

$$\frac{\wp' v}{\wp u - \wp v} = -\zeta(u+v) + \zeta(u-v) + 2\zeta v,$$

найденную в § 93; получим:

$$2i\frac{d\varphi}{du} = \zeta(u+u_1) - \zeta(u-u_1) - 2\zeta u_1 -$$

$$-\zeta(u+u_2) + \zeta(u-u_2) + 2\zeta u_2.$$

Отсюда, выполняя интегрирования находим:

$$e^{2\varphi i} = A\frac{\sigma(u+u_1)\,\sigma(u-u_2)}{\sigma(u+u_2)\,\sigma(u-u_1)}\cdot e^{u(\zeta u_2 - \zeta u_1)}, \tag{13}$$

причем произвольная постоянная A может быть определена на основании начальных условий. Согласно полученной формуле, можно вычислять угол φ при данном t. Вычисление функций σ и ζ можно произвести, пользуясь, например, рядами (49) и (50) § 92, или по способу, указанному в главе VI.

§ 133. Вращение волчка. Предварительные сведения из механики

Представляя большой теоретический интерес, волчок, благодаря тем применениям, которые он нашел себе в настоящее время в технике, имеет вместе с тем и немалое практическое значение. Гироскопический компас, однорельсовый вагон, предохраняющий от качки судовой волчок Шлика, волчок в самодвижущихся аппаратах (торпедах) — вот примеры его технических применений.

Основанием для теории движения волчка служит теория движения тела вращения, подвешенного в одной из точек своей оси. Этот вопрос мы здесь вкратце и рассмотрим и покажем, каким образом к его изучению прилагаются эллиптические функции. Более подробные сведения читатель может найти в книге *Klein* und *Sommerfeld*, Theorie des Kreisels.

Начнем с напоминания некоторых положений кинематики и динамики.

1. Если твердое тело вращается около неподвижной точки, то его положение в пространстве, как известно, определяется при помощи трех углов, называемых углами Эйлера. Напомним сейчас, каким образом они могут быть построены.

Представим себе в пространстве неподвижную систему координатных осей X_1, Y_1, Z_1, началом которой O служит неподвижная точка тела. Вместе с тем вообразим и другую систему XYZ, имеющую то же начало, но неизменно связанную с твердым телом (фиг. 38).

Пусть OX_2 есть линия пересечения плоскостей XY и X_1Y_1. Отметим углы:

$$X_1OX_2,\ X_2OX,\ Z_1OZ,$$

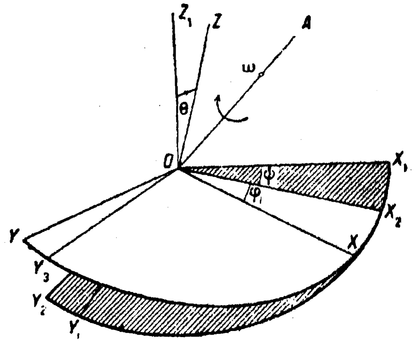
которые будем обозначать:

$$\psi,\ \varphi,\ \theta$$

и называть углами Эйлера.

Можно показать, что всякое положение тела (XYZ) может быть получено из положения $(X_1Y_1Z_1)$ путем вращений, совершаемых около осей OZ_1, OZ и OX_2 на углы ψ, φ и θ.

Действительно, если тело занимало сначала положение $(X_1Y_1Z_1)$, то после поворота около оси OZ_1 на угол ψ оно придет в положение $(X_2Y_2Z_1)$. После второго поворота около оси OX_2 на угол θ тело перейдет в положение (X_2Y_3Z). Угол Y_2OY_3 равен θ и служит линейным для двугранного угла между плоскостями XY и X_1Y_1. Прямая OY_3 лежит в плоскости XY. Наконец, третий поворот около оси OZ на угол φ приведет тело в положение (XYZ).



Фиг. 38

Отсюда следует, что положение тела будет вполне определено, если будут известны углы ψ, φ и θ как функции от времени.

2. При вращении тела вокруг неподвижной точки во всякий момент времени t существует проходящая через точку O мгновенная ось OA, вокруг которой тело вращается с мгновенной угловой скоростью ω. Эту угловую скорость условились откладывать вдоль оси OA в виде вектора, содержащего столько единиц длины, сколько единиц угловой скорости содержится в ω. Вектор этот откладывают в такую сторону, чтобы наблюдателю, расположенному вдоль него, вращение казалось происходящим по направлению движения часовой стрелки.

О системе XYZ мы пока говорили, как о выбранной произвольно. Но известно, что твердое тело в каждой точке имеет три главных оси инерции. Эти именно оси, построенные для точки O, мы в дальнейшем и будем считать за оси XYZ. Пусть p, q, r обозначают проекции вектора ω на эти подвижные оси.

Основанием для изучения вращения тела вокруг неподвижной точки служат известные данные Эйлером диференциальные уравнения:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C-B)\,qr &= M_x, \\ B\frac{dq}{dt} + (A-C)\,rp &= M_y, \\ C\frac{dr}{dt} + (B-A)\,pq &= M_z. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Здесь A, B и C обозначают моменты инерции тела относительно осей X, Y и Z; M_x, M_y и M_z — суммы моментов относительно тех же осей внешних сил, действующих на тело; t — время.

Заметим еще, что проекции p, q и r угловой скорости ω связаны с эйлеровыми углами такими доказываемыми в кинематике соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} p &= \psi' \sin\theta \cdot \sin\varphi + \theta' \cos\varphi, \\ q &= \psi' \sin\theta \cdot \cos\varphi - \theta' \sin\varphi, \\ r &= \psi' \cos\theta + \varphi'. \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Здесь ψ', φ' и θ' — производные, взятые по времени t.

§ 134. Диференциальные уравнения движения тела вращения, подвешенного в одной из точек своей оси, и их первые интегралы

Представим себе, что имеющее ось симметрии твердое тело вращается вокруг неподвижной точки O, расположенной на этой оси. Эту точку мы примем за начало неподвижной координатной системы $X_1Y_1Z_1$, плоскость X_1Y_1 которой совместим с горизонтальной. Ось Z_1 будем считать направленной снизу вверх.

Кроме того, выберем связанную с телом подвижную координатную систему XYZ. Осью Z этой системы будет служить ось симметрии тела, которая, как известно, служит для расположенных на ней точек одной из главных осей инерции. Оси X и Y перпендикулярны к оси Z и проходят через точку O. Центр тяжести тела обозначим буквой G и положим:

$$OG = k.$$

Имея в виду воспользоваться уравнениями (14), составим предварительно выражения для моментов внешних сил, т. е. силы тяжести и реакции опоры.

Что касается до моментов реакции, то они, очевидно, относительно всех трех осей равны нулю.

Если примем во внимание, что координаты центра тяжести

$$x = 0; \quad y = 0; \quad z = k,$$

то моменты силы тяжести будут:

$$M_x = Mgk \cdot \cos(\widehat{YZ_1}),$$

$$M_y = -Mgk \cdot \cos(\widehat{XZ_1}),$$

$$M_z = 0,$$

где M — масса тела, а g — ускорение силы тяжести.

Если воспользуемся известными из аналитической геометрии формулами:

$$\cos(\widehat{XZ_1}) = \sin\theta \cdot \sin\varphi,$$

$$\cos(\widehat{YZ_1}) = \sin\theta \cdot \cos\varphi,$$

и примем еще во внимание, что вследствие симметрии тела моменты инерции A и B равны между собой, то уравнения (14) представятся в виде:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C - A)qr &= Mgk \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi, \\ B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp &= -Mgk \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi, \\ C\frac{dr}{dt} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Последнее уравнение дает интеграл:

$$r = r_0, \qquad (17)$$

где r_0 есть проекция на ось Z угловой скорости ω в момент $t = 0$.

Другой интеграл получится, если помножим первое из уравнений (16) на p, а второе на q и результаты сложим.

Мы найдем

$$Ap\frac{dp}{dt} + Aq\frac{dq}{dt} = Mgk \sin\theta\,(p\cos\varphi - q\sin\varphi). \qquad (18)$$

Но при помощи соотношений (15) нетрудно показать, что

$$\sin\theta\,(p\cos\varphi - q\sin\varphi) = \sin\theta \cdot \theta' = -\frac{d\cos\theta}{dt}.$$

Вследствие этого (18) дает интеграл:

$$A(p^2 + q^2) = -2Mgk \cdot \cos\theta + 2h, \qquad (19)$$

где h — произвольная постоянная.

Найдем еще третий интеграл системы (16). Помножим первое из ее уравнений на $\sin\theta \cdot \sin\varphi$, второе на $\sin\theta \cdot \cos\varphi$ и результаты опять сложим. Мы придем к равенству:

$$A\left(\sin\varphi\frac{dp}{dt} + \cos\varphi\frac{dq}{dt}\right)\sin\theta = (A - C)(q \cdot \sin\varphi - p \cdot \cos\varphi)\,r_0 \sin\theta,$$

или

$$A\left(\sin\varphi\frac{dp}{dt} + \cos\varphi\frac{dq}{dt}\right)\sin\theta = (A - C)\,r_0\frac{d\cos\theta}{dt}.$$

Если, продолжая преобразование, мы прибавим к обеим частям этого равенства по выражению

$$Ap\frac{d(\sin\theta \cdot \sin\varphi)}{dt} + Aq\frac{d(\sin\theta \cdot \cos\varphi)}{dt},$$

то оно после небольших упрощений примет вид:

$$\frac{d}{dt}(Ap\sin\theta\sin\varphi + Aq\sin\theta\cos\varphi + Cr_0\cos\theta) =$$

$$= A\left(p\frac{d(\sin\theta \cdot \sin\varphi)}{dt} + q\frac{d(\sin\theta \cdot \cos\varphi)}{dt} + r_0\frac{d\cos\theta}{dt}\right). \qquad (20)$$

Теперь обратим внимание на выражение, стоящее в последних скобках. Произведя все указанные в нем диференцирования и заменив p, q и r их значениями (15), мы без особых затруднений найдем, что

$$p\frac{d\sin\theta\cdot\sin\varphi}{dt}+q\,\frac{d\sin\theta\cdot\cos\varphi}{dt}+r_0\frac{d\cos\theta}{dt}=0.$$

Вследствие чего (20) дает интеграл:

$$Ap\,\sin\theta\cdot\sin\varphi+Aq\sin\theta\cdot\cos\varphi+Cr_0\cos\theta=D, \tag{21}$$

где D — произвольная постоянная. Величины r_0, h и D можно определить, если будут заданы начальные условия движения.

Заметим, что равенства (19) и (21) можно было бы написать и на основании других соображений. Дело в том, что первое из них выражает интеграл живой силы, а второе может быть рассматриваемо как интеграл площадей.

Равенства (17), (19) и (21) представляют так называемые первые интегралы системы (16). Пользуясь соотношениями (15), можно их представить в виде:

$$\left.\begin{aligned}&\cos\theta\,\frac{d\psi}{dt}+\frac{d\varphi}{dt}=r_0,\\ &\sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\alpha-m\,\cos\theta,\\ &\sin^2\theta\,\frac{d\psi}{dt}+n\cos\theta=\beta,\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

где

$$\alpha=\frac{2h}{A};\quad m=\frac{2Mgk}{A};\quad \beta=\frac{D}{A};\quad n=\frac{Cr_0}{A}.$$

§ 135. Вычисление эйлеровых углов θ, ψ и φ

1. Если из двух последних уравнений (22) исключим $\frac{d\psi}{dt}$, то получим:

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=(\alpha-mz)(1-z^2)-(\beta-nz)^2=f(z), \tag{23}$$

где $z=\cos\theta$.

Пусть z_0 есть начальное значение z. В таком случае:

$$f(z_0)\geqslant 0,$$

как это видно из (23). Меняя аргумент z от ∞ до -1, мы увидим, что:

$$f(\infty)>0;\quad f(1)<0;\quad f(z_0)>0;\quad f(-1)<0.$$

Следовательно, функция $f(z)$ имеет три вещественных корня:

$$a,\ b\ \text{ и }\ c,$$

причем

$$\infty>a>1>b>z_0>c>-1.$$

Дальше придется проделать выкладки, тождественные с теми, которые были выполнены для сферического маятника. Вводя вместо z новую переменную ζ, согласно равенству

$$z=\frac{4}{m}\zeta+\frac{a+b+c}{3},$$

мы придем к заключению, что

$$\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2=4\zeta^3-g_2\zeta-g_3,$$

причем корни:

$$e_1=\frac{m}{12}(2a-b-c);\qquad e_2=\frac{m}{12}(2b-a-c);\quad e_3=\frac{m}{12}(2c-a-b).$$

И далее найдем:

$$z=\cos\theta=\frac{4}{m}\wp(t+\Gamma)+\frac{a+b+c}{3}.$$

Если условимся считать время с того момента, когда $z=c$, то найдем, что произвольная постоянная $\Gamma=\omega_3$. Следовательно:

$$z=\cos\theta=\frac{4}{m}\wp(t+\omega_3)+\frac{a+b+c}{3}. \tag{24}$$

Таким образом $\cos\theta$ выражен в зависимости от времени t. Вещественный полупериод ω_1 выразит время, в течение которого z изменяется от c до b.

Угол θ, на который может отклониться ось симметрии тела от оси OZ_1, заключен в пределах:

$$\theta_1=\arccos c\quad\text{и}\quad\theta_2=\arccos b.$$

2. Для угла ψ последнее из уравнений (22) дает:

$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{\beta-nz}{1-z^2},$$

или

$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{1}{2}\left(\frac{\beta-n}{1-z}+\frac{\beta+n}{1+z}\right),$$

где $z=\cos\theta$. И здесь придется повторить выкладки, проделанные при вычислении угла φ в случае сферического маятника. Результаты таковы.

Из (24) имеем:

$$z-c=\frac{4}{m}(\wp u-e_3),$$

где $u=t+\omega_3$.

Пусть значениям 1 и -1 аргумента z соответствуют значения u_1 и u_2 переменной u. В таком случае:

$$1-c=\frac{4}{m}\ (\wp u_1-e_3);\quad 1+c=-\frac{4}{m}(\wp u_2-e_2).$$

Вследствие четности функции $\wp u$ знаки u_1 и u_2 из последних равенств еще не определяются. Два значения u_1 или два значения u_2, отличающиеся на кратные периоды, рассматриваются как эквивалентные.

Далее имеем:

$$1-z=-\frac{4}{m}(\wp u-\wp u_1);\quad 1+z=\frac{4}{m}(\wp u-\wp u_2); \tag{25}$$

и вследствие этого:

$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{m}{8}\left(\frac{\beta+n}{\wp u-\wp u_2}-\frac{\beta-n}{\wp u-\wp u_1}\right).$$

Умножая обе части этого равенства на $2i$, получим:

$$2i\frac{d\psi}{dt}=\frac{mi}{4}\left(\frac{\beta+n}{\wp u-\wp u_2}-\frac{\beta-n}{\wp u-\wp u_1}\right).$$

Но при $z=1$ и $z=-1$ для функции $f(z)$ имеем:

$$f(1)=-(\beta-n)^2 \quad\text{и}\quad f(-1)=-(\beta+n)^2,$$

как это видно из (23).

Выбирая надлежащим образом знаки u_1 и u_2, мы, как и в случае сферического маятника, придем к заключению, что

$$\frac{mi}{4}(\beta+n)=\wp' u_2;\quad \frac{mi}{4}(\beta-n)=\wp' u_1.$$

Вследствие этого:

$$2i\frac{d\psi}{dt}=\frac{\wp' u_2}{\wp u-\wp u_2}-\frac{\wp' u_1}{\wp u-\wp u_1}$$

и

$$e^{2i\psi}=E\frac{\sigma(u+u_1)\,\sigma(u-u_2)}{\sigma(u+u_2)\,\sigma(u-u_1)}\,e^{2u(\zeta u_2-\zeta u_1)},$$

где E — произвольная постоянная.

3. Переходя к определению угла φ, будем исходить из первого уравнения системы (22), которое дает:

$$\frac{d\varphi}{dt}=r_0-z\frac{d\psi}{dt}=r_0-z\cdot\frac{\beta-nz}{1-z^2},$$

или

$$\frac{d\varphi}{dt}=r_0-n+\frac{1}{2i}\left(\frac{\wp' u_2}{\wp u-\wp u_2}+\frac{\wp' u_1}{\wp u-\wp u_1}\right),$$

откуда

$$2i\frac{d\varphi}{dt}=2i(r_0-n)+\zeta(u-u_2)-\zeta(u+u_2)+2\zeta u_2+$$
$$+\zeta(u-u_1)-\zeta(u+u_1)+2\zeta u_1.$$

Выполнив интегрирование, будем иметь:

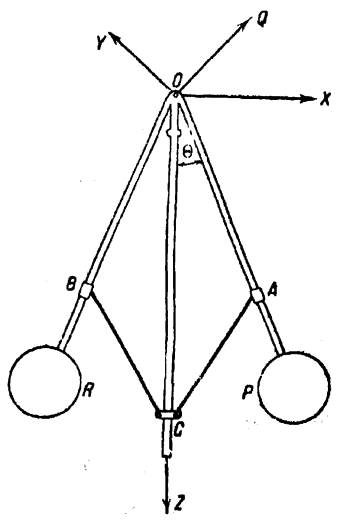
$$e^{2i\varphi-2i(r_0-n)u}=L\frac{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)}{\sigma(u+u_1)\,\sigma(u+u_2)}\,e^{2u(\zeta u_2-\zeta u_1)},$$

где произвольная постоянная L может быть найдена с помощью начальных условий.

Примечание. О вычислении u_1 и u_2 в зависимости от α, β и r_0 см. *Lacour*, Sur le mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe, «Nouv. Annales de mathématiques». Troisième série, 1889.

§ 136. Движение регулятора Уатта

Вертикальный вал OC (фиг. 39), вращаясь, приводит в движение четыре стержня, попарно равные и соединенные в O, A и B шарнирами. Муфта C скользит по вертикальному валу, регулируя посредством системы рычагов впуск пара в паровой цилиндр. Стержни OA и OB снабжены на концах массивными шарами P и R.



Фиг. 39

Рассматривая стержень OA отдельно, отнесем его к подвижной координатной системе XYZ, плоскость XZ которой при движении регулятора постоянно совпадает с плоскостью OAC. Ось OX горизонтальна, OZ вертикальна.

Движение стержня OA состоит из его вращения вокруг оси OZ с угловой скоростью ω, принимаемой нами за постоянную, и из вращения вокруг оси OY с угловой скоростью $\frac{d\theta}{dt}$, где θ есть угол AOC.

Заметим, что двумя главными осями инерции стержня в точке O служат его геометрическая ось OP и ось OY. Пусть OQ будет третьей главной осью в той же точке O. Обозначим моменты инерции стержня относительно осей OP и OY буквами K и I. В таком случае момент инерции относительно оси OQ будет тоже I.

Проекции угловой скорости на оси OY, OQ и OP будут:

$$p=-\frac{d\theta}{dt};\quad q=-\omega\sin\theta;\quad r=\omega\cos\theta.$$

Для определения угла θ в функции от времени воспользуемся одним из диференциальных уравнений Эйлера вращения твердого тела вокруг неподвижной точки. Оно будет иметь вид (§ 133):

$$I\frac{dp}{dt}+(K-I)qr=M_y, \tag{26}$$

где M_y — сумма моментов внешних сил относительно оси OY. Если h обозначает расстояние от неподвижной точки O до центра тяжести стержня, M есть его масса, а g — ускорение силы тяжести, то

$$M_y=Mgh\sin\theta.$$

Ввиду этого уравнение (26) можно переписать в виде:

$$I\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2}+(K-I)\,\omega^2\sin\theta\cos\theta=-Mgh\sin\theta\,. \tag{27}$$

Если $K=I$, то получаем рассмотренное в § 1 диференциальное уравнение колебаний маятника.

Будем интегрировать уравнение (27), предполагая, что угол θ изменяется в границах от α до β. Пусть $\alpha>\beta$. Умножая обе части уравнения (27) на

$$2\frac{d\theta}{dt}\cdot dt=2d\theta\,,$$

после выполнения квадратур мы получим:

$$I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=(I-K)\,\omega^2\sin^2\theta+2\,Mgh\cos\theta-C,$$

где C — постоянная интегрирования. Так как при $\theta=\alpha$ угловая скорость $\frac{d\theta}{dt}=0$, то

$$C=(I-K)\,\omega^2\sin^2\alpha+2\,Mgh\cos\alpha.$$

Вследствие этого:

$$I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=(I-K)\,\omega^2(\sin^2\theta-\sin^2\alpha)+2\,Mgh(\cos\theta-\cos\alpha).$$

Но так как и при $\theta=\beta$ угловая скорость $\frac{d\theta}{dt}=0$, то

$$C=(I-K)\,\omega^2\sin^2\beta+2\,Mgh\cos\beta.$$

Сравнивая оба значения C, находим:

$$2Mgh=(I-K)\,\omega^2(\cos\alpha+\cos\beta).$$

Ввиду этого первый интеграл уравнения (27) можно представить в виде:

$$I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=(I-K)\,\omega^2(\cos\theta-\cos\alpha)(\cos\beta-\cos\theta).$$

Второй интеграл удобно найти, полагая, что:

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=x;\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=a;\quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=b.$$

Так как при этом

$$\cos\theta=\frac{1-x^2}{1+x^2}\,;\quad \cos\alpha=\frac{1-a^2}{1+a^2}\,;\quad \cos\beta=\frac{1-b^2}{1+b^2}\,;$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{2}{1+x^2}\cdot\frac{dx}{dt}\,,$$

то будем иметь:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{I-K}{I}\,\omega^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\,(a^2-x^2)(x^2-b^2).$$

Отсюда, полагая

$$\sqrt{\frac{I-K}{I}}\,\omega\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}=n,$$

получим второй интеграл диференциального уравнения (27) в виде:

$$nt=\int\limits_a^x\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}}\,.$$

Рассматривая полученный интеграл, мы замечаем, что он представляет седьмой указанный в § 124 случай. Полагая

$$x^2=b^2\sin^2\varphi+a^2\cos^2\varphi, \tag{28}$$

мы приходим к равенству:

$$nt=-\int\limits_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,, \tag{29}$$

в котором

$$k^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}\,.$$

Но из (28) и (29) следует, что

$$x=a\,\mathrm{dn}(nt,k),$$

т. е. что

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{dn}(nt,k), \tag{30}$$

где

$$k=\frac{\sqrt{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}\,.$$

Для каждого момента времени t мы можем согласно (30) вычислить θ.

§ 137. Притяжение точки однородным эллипсоидом

Заметим, что если однородный эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

притягивает по закону Ньютона внешнюю материальную точку $P(x,y,z)$, то потенциал силы притяжения

$$V=\pi abc\rho\int\limits_\lambda^\infty\left(1-\frac{x^2}{a^2+\lambda}-\frac{y^2}{b^2+\lambda}-\frac{z^2}{c^2+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}, \tag{31}$$

где ρ — плотность эллипсоида, а λ — переменная, зависящая от положения точки P. Если эта точка лежит на эллипсоиде, то $\lambda=0$; если она удаляется в бесконечность, то $\lambda = \infty$. (См. *Апиель*, «Руководство теоретической механики», перевод Безрукова, т. III, стр. 113).

Пусть $a < b < c$. Положим, что

$$\frac{1}{3}(b^2+c^2-2a^2)=e_1;\quad \frac{1}{3}(c^2+a^2-2b^2)=e_2;$$

$$\frac{1}{3}(a^2+b^2-2c^2)=e_3.$$

Очевидно

$$e_1 > e_2 > e_3 \quad \text{и} \quad e_1+e_2+e_3=0.$$

Произведем замену переменного интеграции в интеграле (31) посредством:

$$u=\int\limits_t^\infty \frac{dt}{\sqrt{4(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)}}$$

или

$$u=\int\limits_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}, \tag{32}$$

где

$$\lambda = t - \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

Дискриминант

$$\Delta=(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2(e_1-e_2)^2=(b^2-c^2)^2(c^2-a^2)^2(a^2-b^2)^2>0.$$

Заметив, что $t=\wp u$, имеем:

$$a^2+\lambda=\wp u-e_1;\quad b^2+\lambda=\wp u-e_2;\quad c^2+\lambda=\wp u-e_3.$$

Следовательно:

$$V=\pi abc\rho\int\limits_0^u\left(1-\frac{x^2}{\wp u-e_1}-\frac{y^2}{\wp u-e_2}-\frac{z^2}{\wp u-e_3}\right)du.$$

Указанные здесь квадратуры легко выполняются при помощи формул (36), (37) и (38) § 84. Например:

$$\int\limits_0^u\frac{du}{\wp u-e_1}=\frac{\zeta(u+\omega_1)-\zeta\omega_1-e_1u}{(e_3-e_1)(e_1-e_2)}.$$

§ 138. Прямолинейное движение точки под влиянием отталкивающего центра

Пусть точка массы m в начальный момент $t=0$ занимает на гладкой прямой OX положение M_0 (фиг. 40). На покоящуюся в этом положении точку из центра C, удаленного от OX на расстоянии a, действует постоянная по величине отталкивающая сила P.

Требуется определить вызванное действием силы движение точки по прямой.

Полагая, что $P=k^2m$, будем иметь диференциальное уравнение движения:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{k^2x}{r}.$$

Откуда

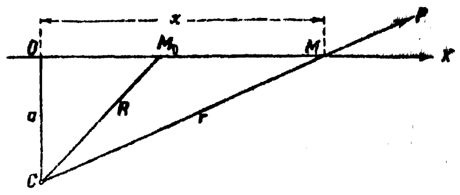
$$\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot dt=\frac{k^2x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}},$$

или

$$\frac{dx}{dt}\,d\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{k^2x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}},$$

или еще:

$$d\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{d\,(x^2+a^2)}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$



Фиг. 40

Отсюда после интегрирования:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=2k^2\sqrt{x^2+a^2}+C.$$

Но так как в момент $t=0$ скорость $\frac{dx}{dt}=0$ и $x^2+a^2=R^2$, то

$$C=-2Rk^2$$

и

$$\frac{dx}{dt}=k\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{x^2+a^2}-R}.$$

Но

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}=\frac{r}{x}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{r}{\sqrt{r^2-a^2}}\cdot\frac{dr}{dt}.$$

Вследствие этого:

$$k\sqrt{2}\,dt=\frac{r\,dr}{\sqrt{(r^2-a^2)(r-R)}}$$

и

$$\frac{kt}{\sqrt{2}}=\int\limits_R^r\frac{r\,dr}{4(r^2-a^2)(r-R)},$$

где

$$R \leqslant r < \infty.$$

Приводя интеграл к нормальной форме Вейерштрасса, положим, что

$$r=z+\frac{R}{3}.$$

В таком случае:

$$4(r^2-a^2)(r-R)=4z^3-g_2z-g_3=4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3),$$

где

$$g_2 = 4\left(\frac{R^2}{3} + a^2\right); \quad g_3 = \frac{8R}{3}\left(\frac{R^2}{9} - a^2\right);$$

$$e_1 = \frac{2R}{3}; \quad e_2 = a - \frac{R}{3}; \quad e_3 = -a - \frac{R}{3}.$$

Поэтому

$$\frac{kt}{\sqrt{2}} = \int_{e_1}^{z} \frac{\left(z + \frac{R}{3}\right) dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}$$

или еще:

$$\sqrt{2}\cdot kt = \int_{e_1}^{z} \frac{(2z + e_1)\, dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}.$$

Полагая $z = \wp u$, будем иметь:

$$\sqrt{2}\, kt = \int_{u}^{\omega} (2\wp u + e_1)\, du = 2\zeta u - 2\eta_1 + e_1(\omega_1 - u),$$

где $\eta_1 = \zeta\omega_1$.

Таким образом

$$\sqrt{2}\, kt = 2(\zeta u - \eta_1) + \frac{2R}{3}(\omega_1 - u);$$

равенство это выражает время t в функции от аргумента u. Далее имеем:

$$x = \sqrt{(r-a)(r+a)} = \sqrt{\left(\wp u + \frac{R}{3} - a\right)\left(\wp u + \frac{R}{3} + a\right)}$$

или

$$x = \sqrt{(\wp u - e_2)(\wp u - e_3)} = \frac{\sigma_2 u\, \sigma_3 u}{\sigma u}.$$

Мы получили выражение абсциссы x в функции от того же аргумента u

§ 139. Движение точки по гладкой прямой вследствие действия постоянной притягивающей силы

Предположим, что материальная точка массы m движется по гладкой прямой OX вследствие действия постоянной силы, притягивающей точку к центру C, удаленному от OX на расстояние a (фиг. 41). Пусть буквы K, П и E обозначают кинетическую, потенциальную и полную энергию точки. В таком случае:

$$K + \Pi = E.$$

Здесь

$$K = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2,$$

$$\Pi = -\int P\, dr = k^2 m r + A,$$

где $P = -k^2 m$ есть величина притягивающей силы и A — постоянная интегрирования.

Следовательно, имеем:

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + k^2 m r + A = E.$$

Но

$$x = \sqrt{r^2 - a^2},$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - a^2}}\cdot\frac{dr}{dt}.$$

Поэтому

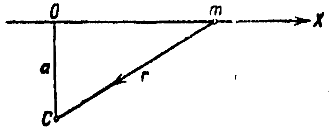
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{r^2}{r^2 - a^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + k^2 r = B,$$

причем

$$B = \frac{E - A}{m}.$$

Если в начальный момент точка m была удалена от центра C на расстояние R, то

$$B = k^2 R.$$



Фиг. 41

Вследствие чего:

$$r^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 2k^2(r^2 - a^2)(R - r)$$

Откуда

$$dt = \frac{r\, dr}{k\sqrt{2}\cdot\sqrt{(r^2 - a^2)(R - r)}} \text{ и}$$

$$\frac{kt}{\sqrt{2}} = \int_{a}^{z} \frac{r\, dr}{\sqrt{4(r^2 - a^2)(R - r)}}. \qquad (33)$$

Вместо r введем аргумент z, полагая, что

$$z = \frac{2a(R - a)}{R(r - a)} + \frac{1}{3} - \frac{a}{R}$$

и что

$$e_1 = \frac{1}{3} + \frac{a}{R}; \quad e_2 = \frac{1}{3} - \frac{a}{R}; \quad e_3 = -\frac{2}{3}.$$

Будем в таком случае иметь:

$$r = \frac{a\left(z + \frac{5}{3} - \frac{a}{R}\right)}{z - e_2}; \quad r - a = \frac{2a(R - a)}{R(z - e_2)};$$

$$r + a = \frac{2a\left(z + \frac{2}{3}\right)}{z - e_2}; \quad R - r = \frac{(R - a)\left(z - \frac{1}{3} - \frac{a}{R}\right)}{z - e_2}$$

$$dr = -\frac{2a(R - a)\, dz}{R(z - e_2)^2}.$$

Теперь введем новое переменное:

$$u=\int\limits_{z}^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}},$$

причем

$$z=\wp u.$$

Если, кроме того, положим, что

$$-\frac{5}{3}+\frac{a}{R}=\wp v,$$

то из (33) получим:

$$\sqrt{\frac{R}{2}}\cdot\frac{kt}{a}=\int\limits_0^u\frac{\wp u-\wp v}{\wp u-e_2}\,du=u+\frac{2(R-a)}{R}\int\limits_0^u\frac{du}{\wp u-e_2}. \qquad (34)$$

Если теперь в формуле

$$\wp(u+\omega_1+\omega_3)-e_2=\frac{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}{\wp u-e_2}$$

(см. § 84) заменим корни e_1, e_2 и e_3 их значениями, то будем иметь:

$$\wp(u+\omega_1+\omega_3)-\frac{1}{3}+\frac{a}{R}=-\frac{2a(R-a)}{R^2(\wp u-e_2)}.$$

Поэтому

$$\frac{2(R-a)}{R}\int\limits_0^u\frac{du}{\wp u-e_2}-\frac{R}{a}\int\limits_0^u\wp(u+\omega_1+\omega_3)\,du+\frac{Re_2u}{a}=$$

$$=\frac{R}{a}\left[\zeta(u+\omega_1+\omega_3)-\zeta(\omega_1+\omega_3)+e_2u\right].$$

Далее (2) дает:

$$\frac{kt}{\sqrt{2R}}=\frac{1}{3}u+\zeta(u+\omega_1+\omega_3)-\zeta(\omega_1+\omega_3).$$

Но согласно формуле

$$\zeta(u+v)-\zeta u-\zeta v=\frac{1}{2}\,\frac{\wp' u-\wp' v}{\wp u-\wp v}$$

будем иметь:

$$\zeta(u+\omega_1+\omega_3)-\zeta(\omega_1+\omega_3)=\zeta u+\frac{1}{2}\,\frac{\wp' u}{\wp u-e_2},$$

если только вспомним, что

$$\wp'(\omega_1+\omega_3)=0 \quad \text{и} \quad \wp(\omega_1+\omega_3)=e_2.$$

Ввиду этого:

$$\frac{kt}{\sqrt{2R}}=\frac{1}{3}u+\zeta u+\frac{1}{2}\,\frac{\wp' u}{\wp u-e_2}. \qquad (35)$$

Уравнение движения определится равенством:

$$x=\sqrt{r^2-a^2}=2a\sqrt{\frac{R-a}{R}}\cdot\frac{\sqrt{\wp u-e_3}}{\wp u-e_2},$$

а скорость:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}=k\sqrt{2(R-r)}=k\sqrt{2(R-a)}\sqrt{\frac{\wp u-e_1}{\wp u-e_2}}.$$

При $\wp u-e_1=0$, т. е. при $u=\omega_1$, скорость обращается в нуль, и точка меняет направление движения. Обозначим время, необходимое для перехода от начального положения до поворотного пункта, через $\frac{T}{4}$. В таком случае, полагая в (35), что $u=\omega_1$ и $t=\frac{T}{4}$, получим:

$$T=\frac{4\sqrt{2R}}{k}\left(\frac{\omega_1}{3}+\eta_1\right).$$

§ 140. Движение тяжелой точки по параболе с вертикальной осью

Представим себе, что тяжелая материальная точка массы m движется по параболе, уравнение которой

$$x^2=2py \quad \text{(фиг. 42)}.$$

Время условимся отсчитывать от того момента $t=0$, когда точка была в начале координат O.

В некотором положении M кинетическая энергия точки равна:

$$\frac{1}{2}\,m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

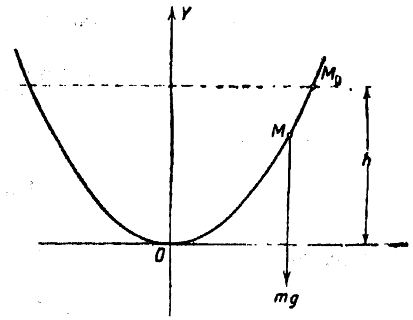
или

$$\frac{m(p+2y)}{4y}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

а потенциальная энергия равна:

$$mgy+A;$$

здесь $s=\overset{\frown}{OM}$ и A — постоянная.



Фиг. 42

Если полную энергию обозначим буквой E, то уравнение движения представится в виде:

$$m\,\frac{p+2y}{4y}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+mgy+A=E,$$

или

$$\frac{p+2y}{4y}\cdot\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+gy=B,$$

где $B=\frac{E-A}{m}$. Допустим, что скорость точки была равна нулю в положении M_0 на уровне h. В таком случае $B=gh$; и мы будем иметь:

$$\frac{p+2y}{4y}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=g(h-y).$$

Отсюда

$$t=\frac{1}{\sqrt{g}}\int_0^y \frac{(p+2y)\,dy}{\sqrt{4y(h-y)(p+2y)}}. \qquad (36)$$

Введем новое переменное u, определяемое равенством:

$$u=\int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}},$$

где

$$e_1=\frac{2(h+p)}{3p};\quad e_2=\frac{2h-p}{3p};\quad e_3=-\frac{4h+p}{3p}.$$

В таком случае $z=\wp u$. И если положим, что

$$y=\frac{h}{z-e_2},$$

то будем иметь

$$p+2y=\frac{p(z-e_3)}{z-e_2},$$

$$h-y=\frac{h(z-e_1)}{z-e_2}.$$

И на основании (36) получим:

$$\sqrt{\frac{g}{p}}\cdot t=\int_z^\infty\frac{z-e_3}{z-e_2}\,\frac{dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}$$

или

$$\sqrt{\frac{g}{p}}\cdot t=\int_0^u\frac{\wp u-e_3}{\wp u-e_2}\cdot du=u+\frac{2h}{p}\int_0^u\frac{du}{\wp u-e_2}. \qquad (37)$$

Но на основании формулы (37) § 84:

$$\frac{1}{\wp u-e_2}=\frac{\wp(u+\omega_1+\omega_3)-e_2}{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}$$

Вследствие этого:

$$\int_0^u\frac{du}{\wp u-e_2}=\int_0^u\frac{\wp(u+\omega_1+\omega_3)-e_2}{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}\,du=$$

$$=\frac{1}{(e_2-e_3)(e_2-e_1)}\int_0^u\wp(u+\omega_1+\omega_3)\,du-\frac{e_2}{(e_2-e_3)(e_2-e_1)}\int_0^u du=$$

$$=\frac{2h-p}{6h}\,u+\frac{p}{2h}\,[\zeta(u+\omega_1+\omega_3)-\zeta(\omega_1+\omega_3)].$$

Но в силу формулы сложения функций ζ и, принимая во внимание первую из формул § 85, получим:

$$\zeta(u+\omega_1+\omega_3)-\zeta(\omega_1+\omega_3)=\zeta u+\frac{1}{2}\,\frac{\wp' u}{\wp u-\wp(\omega_1+\omega_3)}=$$

$$=\zeta u-\sqrt{\frac{(\wp u-e_1)(\wp u-e_3)}{\wp u-e_2}}.$$

Теперь (37) можем переписать в виде:

$$\sqrt{\frac{g}{p}}\cdot t=\frac{2(p+h)}{3p}\cdot u+\zeta u-\sqrt{\frac{(\wp u-e_1)(\wp u-e_3)}{\wp u-e_2}}.$$

Исходя из соотношения

$$v=\frac{ds}{dt}=\sqrt{\frac{p+2y}{2y}}\cdot\frac{dy}{dt},$$

найдем, что скорость

$$v=\sqrt{2gh}\sqrt{\frac{\wp u-e_1}{\wp u-e_2}}.$$

Период колебаний

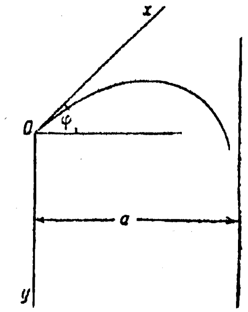
$$T=\sqrt{\frac{p}{g}}\left[\eta_1+\frac{2(p+h)\,\omega_1}{3p}\right].$$

§ 141. Движение точки в среде, сопротивление которой пропорционально кубу скорости

Вопрос о движении точки в среде, сопротивление которой пропорционально кубу скорости, впервые был решен Гринхиллем (Greenhill) при помощи эллиптических функций.

Мы предположим, что точка выходит из некоторого положения с весьма большой начальной скоростью. Сила сопротивления среды направлена по касательной к траектории точки. В исходной точке, которую мы примем за начало координат (фиг 43), касательная к траектории образует с горизонтальной плоскостью угол φ. Эту касательную примем за ось OX. За ось OY примем вертикальную прямую, направленную сверху вниз. Таким образом точка будет отнесена к косоугольной системе, координатный угол которой равен

$$\frac{\pi}{2}+\varphi.$$



Фиг. 43

Сопротивление среды выразится через

$$cm\left(\frac{ds}{dt}\right)^3,$$

где s — дуга, отсчитанная от начала координат, t — время ее прохождения точкой, m — масса точки и c — постоянный коэфициент. Диференциальные уравнения движения точки будут иметь вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -c\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \cdot \frac{dx}{dt}, \tag{38}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -c\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{dy}{dt} + g, \tag{39}$$

где g — ускорение силы тяжести. Исключая члены, содержащие скорость $\frac{ds}{dt}$, получим:

$$\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dy}{dt} = g \cdot \frac{dx}{dt}.$$

В дальнейшем удобно будет ввести аргумент $p = \frac{dy}{dx}$, выражающий угловой коэфициент касательной к траектории точки. Представив p в виде:

$$p = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)},$$

нетрудно будет, образовав производную $\frac{dp}{dt}$, показать, что

$$\frac{dp}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} = g. \tag{40}$$

Теперь заметим, что квадрат скорости

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - \frac{2dx}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} \cdot \sin\varphi,$$

ввиду соотношения $\frac{dy}{dt} = p \cdot \frac{dx}{dt}$, можно переписать в виде:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 (1 + p^2 - 2p\sin\varphi).$$

Вследствие этого уравнение (38) дает:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -c\left(\frac{dx}{dt}\right)^3 (1 + p^2 - 2p\sin\varphi),$$

или, если принять во внимание (40):

$$g\left(\frac{dx}{dt}\right)^{-4} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -c(1 + p^2 - 2p\sin\varphi)\frac{dp}{dt}.$$

Интегрируя обе части этого равенства в пределах от 0 до t и принимая во внимание, что при $t = 0$ аргумент $p = 0$, имеем:

$$\frac{g}{c}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^{-3} - \left(\frac{dx}{dt}\right)_0^{-3}\right] = p^3 - 3p^2\sin\varphi + 3p.$$

Но по условию начальная скорость весьма большая. Ввиду этого член $\frac{g}{c}\left(\frac{dx}{dt}\right)_0^{-3}$ должен быть весьма мал. Пренебрегая им и вводя обозначения $\frac{g}{c} = w$, $p^3 - 3p^2\sin\varphi + 3p = P$, мы получим:

$$\frac{dx}{dt} = w \cdot P^{-\frac{1}{3}}.$$

Но

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dp} \cdot \frac{dx}{dp} = \frac{dx}{dp} \cdot \frac{g}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}.$$

Следовательно:

$$wP^{-\frac{1}{3}} = \frac{dx}{dp} \cdot \frac{gP^{\frac{1}{3}}}{w}.$$

Отсюда

$$\frac{gx}{w^2} = \int_0^p P^{-\frac{2}{3}} \cdot dp. \tag{41}$$

Исходя из равенств $dy = p\,dx$ и $dt = \frac{P^{\frac{1}{3}}dx}{w}$, нетрудно еще получить, что

$$\frac{gy}{w^2} = \int_0^p P^{-\frac{2}{3}} \cdot p\,dp \tag{42}$$

и

$$\frac{gt}{w} = \int_0^p P^{-\frac{1}{3}} \cdot dp. \tag{43}$$

Совместно взятые равенства (41) и (42) выражают параметрические уравнения траектории. Постараемся установить непосредственную связь между координатами x и y движущейся точки. Полагая, что

$$\frac{P^{\frac{1}{3}}}{3p} = z,$$

найдем:

$$4z^3 - g_3 = \frac{(4 - 27g_3)p^2 - 12p\sin\varphi + 12}{27p^2}.$$

Число g_3 выберем так, чтобы числитель полученной дроби был точным квадратом, т. е. чтобы

$$36\sin^2\varphi = 12(4 - 27g_3),$$

откуда

$$g_3 = \frac{4 - 3\sin^2\varphi}{27}.$$

В таком случае:

$$\sqrt{4z^3 - g_3} = \frac{2 - p\sin\varphi}{3p}. \tag{44}$$

А после диференцирования:

$$\frac{6z^2\,dz}{\sqrt{4z^3 - g_3}} = -\frac{2}{3}\frac{dp}{p^2}.$$

Следовательно:

$$\frac{dz}{\sqrt{4z^3-g_3}}=-P^{-\frac{2}{3}}\cdot dp$$

и поэтому

$$\frac{gx}{w^2}=u=\int\limits_z^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{4z^3-g_3}}, \tag{45}$$

или

$$z=\wp\left(\frac{gx}{w^2};\ 0,\ g_3\right),$$

или короче:

$$z=\wp u.$$

Мы видим, что интеграл (41) приводится к нормальной форме Вейерштрасса.

Переходя к интегралу (42), прежде всего заметим, что

$$\wp' u=-\sqrt{4z^3-g_3}.$$

Следовательно, на основании (44):

$$p=\frac{2}{\sin\varphi-3\wp' u}. \tag{46}$$

Пусть при $x=a$

$$\wp'\left(\frac{ga}{w^2}\right)=\frac{1}{3}\sin\varphi.$$

В таком случае при $x=a$ $p=\infty$. Прямая $x=a$, параллельная оси OY, служит асимптотою траектории.

Перепишем выражение (46) в виде:

$$p=\frac{2}{3\left[\wp'\left(\frac{ga}{w^2}\right)-\wp'\left(\frac{gx}{w^2}\right)\right]}$$

и заметим, что

$$\frac{g\,dx}{w^2}=P^{-\frac{2}{3}}\cdot dp.$$

Вследствие этого (42) принимает вид:

$$y=\frac{2}{3}\int\limits_0^x\frac{dx}{\wp'\left(\frac{ga}{w^2}\right)-\wp'\left(\frac{gx}{w^2}\right)}. \tag{47}$$

Но в § 128 было найдено, что

$$\int\frac{du}{\wp' v-\wp' u}=$$

$$=-\frac{3}{2}\left[\ln\sigma(v-u)+\alpha\ln\sigma(\alpha v-u)+\alpha^2\ln\sigma(\alpha^2 v-u)+3u\zeta v\right]+C, \tag{48}$$

где $\alpha=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Полагая в (47), что $\frac{ga}{w^2}=v$ и $\frac{gx}{w^2}=u$, и пользуясь (48), мы получим:

$$\frac{gy}{w^2}=-\left[\ln\frac{\sigma(v-u)}{\sigma v}+\alpha\ln\frac{\sigma(\alpha v-u)}{\sigma(\alpha v)}+\alpha^2\ln\frac{\sigma(\alpha^2 v-u)}{\sigma(\alpha^2 v)}+3u\zeta v\right]. \tag{49}$$

Таково уравнение траектории.

§ 142. Исчисление времени. Разложение выражений для y и t в ряды

Сопоставляя (41) и (45), находим $P^{-\frac{2}{3}}\cdot dp=du$. Так как $P^{-\frac{1}{3}}=3zp$ и $z=\wp u$, то

$$P^{-\frac{1}{3}}\cdot dp=3\wp u\cdot p\,du=\frac{2\wp u\,du}{\wp' v-\wp' u}.$$

Следовательно, на основании (43):

$$\frac{gt}{w}=2\int\limits_0^u\frac{\wp u\,du}{\wp' v-\wp' u};$$

но в § 128 мы видели, что

$$\frac{1}{\wp' v-\wp' u}=\frac{3}{4}(\wp' v+\wp' u)\left[\frac{1}{\wp v-\wp u}+\frac{\alpha}{\wp\alpha v-\wp u}+\frac{\alpha^2}{\wp\alpha^2 v-\wp u}\right].$$

Ввиду этого:

$$\frac{2\wp u}{\wp' v-\wp' u}=\frac{3}{2}(\wp' v+\wp u)\left[\frac{\wp u}{\wp v-\wp u}+\frac{\alpha\wp u}{\wp\alpha v-\wp u}+\frac{\alpha^2\wp u}{\wp\alpha^2 v-\wp u}\right].$$

Но так как $1+\alpha+\alpha^2=0$, то мы можем прибавить этот трехчлен к выражению в прямых скобках. Пользуясь затем формулами (22) § 128, мы получим:

$$\frac{2\wp u}{\wp' v-\wp' u}=\frac{3}{2}(\wp' v+\wp' u)\left[\frac{\wp v}{\wp v-\wp u}+\frac{\alpha^2\wp v}{\wp\alpha v-\wp u}+\frac{\alpha\wp v}{\wp\alpha^2 v-\wp u}\right]. \tag{50}$$

Выше было замечено, что

$$\wp' v=\frac{\sin\varphi}{3};$$

$$g_3=\frac{4-3\sin^2\varphi}{27}.$$

Следовательно:

$$\wp v=\frac{1}{3}.$$

Учитывая последнее равенство, будем интегрировать (50). Так как при $t=0$ и $u=0$, то мы получим:

$$\frac{gt}{w}=-\ln\frac{\sigma(v-u)}{\sigma v}-\alpha^2\ln\frac{\sigma(\alpha v-u)}{\sigma(\alpha v)}-\alpha\ln\frac{\sigma(\alpha^2 v-u)}{\sigma(\alpha^2 v)} \tag{51}$$

(см. § 128). Теперь приведем формулы (49) и (51) к виду, удобному для вычисления y и t. С этой целью разложим в ряды выражения, находящиеся в правых частях рассматриваемых равенств. Здесь удобно будет рассматривать функцию

$$\psi(u, v) = \frac{\sigma(v-u)}{\sigma v} \cdot e^{u\zeta v}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{gy}{w^2} = -\ln\psi(u, v) - \alpha\ln\psi(u, \alpha, v) - \alpha^2\ln\psi(u, \alpha^2, v)$$

и

$$\frac{gt}{w} = -\ln\psi(u, v) - \alpha^2\ln\psi(u, \alpha, v) - \alpha\ln\psi(u, \alpha^2, v).$$

Но, беря логарифмические производные, мы найдем:

$$\frac{1}{\psi} \cdot \frac{d\psi}{du} = -\zeta(v-u) + \zeta v,$$

или, разлагая $\zeta(v-u)$ по формуле Тейлора:

$$\frac{1}{\psi}\frac{d\psi}{du} = -u\wp v + \frac{u^2}{2}\wp' v - \frac{u^3}{6}\wp'' v + \ldots$$

Отсюда путем интегрирования

$$\ln\psi(u, v) = -\frac{u^2}{2}\wp v + \frac{u^3}{6}\wp' v - \frac{u^4}{24}\wp'' v + \ldots$$

Точно так же:

$$\ln\psi(u, \alpha v) = -\frac{u^2}{2}\alpha\wp v + \frac{u^3}{6}\wp' v - \frac{u^4}{24}\alpha^2\wp'' v + \ldots,$$

$$\ln\psi(u, \alpha^2 v) = -\frac{u^2}{2}\alpha^2\wp v + \frac{u^3}{6}\wp' v - \frac{u^4}{24}\alpha\wp'' v + \ldots$$

Вследствие этого

$$\left.\begin{aligned} \frac{gy}{w^2} &= 3\left[\frac{u^4}{4!}\wp'' v - \frac{u^7}{7!}\wp^{(5)} v + \frac{u^{10}}{10!}\wp^{(8)} v - \ldots\right], \\ \frac{gt}{w} &= 3\left[\frac{u^2}{2!}\wp v - \frac{u^5}{5!}\wp''' v + \frac{u^8}{8!}\wp^{(6)} v - \ldots\right], \end{aligned}\right\} \qquad (52)$$

где g_2, g_3 и u имеют вышеотмеченные значения и

$$\wp v = \frac{1}{3}; \quad \wp' v = \frac{1}{3}\sin\varphi; \quad \wp'' v = \frac{2}{3}; \quad \wp''' v = \frac{4}{3}\sin\varphi.$$

Равенства (52) содержат искомые разложения в ряды О сходимости рядов (52) см. заметку de Sparre в «Bulletin de la société mathématque de France».

ГЛАВА VIII

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

§ 143. Общее определение эллиптической функции

В предыдущих главах мы ознакомились с функциями $\mathrm{sn}\, u$, $\mathrm{cn}\, u$ и $\mathrm{dn}\, u$ Якоби и с функцией $\wp u$ Вейерштрасса и рассмотрели некоторые их свойства, часто напоминающие свойства рассматриваемых в тригонометрии круговых функций. Все четыре функции были нами названы эллиптическими; но все они представляют только простейшие частные случаи эллиптических функций в общем случае.

Мы сейчас имеем в виду изложить вкратце свойства, характеризующие общую эллиптическую функцию, и дать для нее аналитическое выражение.

Эллиптической функцией, как мы уже говорили, называется такая однозначная аналитическая функция, не имеющая других особенных точек в конечной части плоскости, кроме полюсов, которая имеет два основных периода.

Имея особенными точками полюсы, эллиптическая функция является мероморфной.

Основные периоды эллиптической функции $f(u)$ будем обозначать через 2ω и $2\omega'$. Следовательно:

$$f(u+2\omega) = f(u) \quad \text{и} \quad f(u+2\omega') = f(u),$$

и вообще

$$f(u+2m\omega+2n\omega') = f(u),$$

где m и n — произвольные целые числа.

Мы примем, что отношение $\frac{\omega'}{\omega}$ периодов есть число комплексное. Можно доказать, что если бы это отношение было вещественным, то функция $f(u)$ была бы либо периодической, либо привелась бы к числу постоянному.

Мы видели, что свойство двоякой периодичности функций $\mathrm{sn}\, u$, $\mathrm{cn}\, u$, $\mathrm{dn}\, u$ и $\wp u$ можно истолковать весьма наглядно при помощи сети параллелограмов, покрывающих плоскость комплексного переменного. Таким же способом можно истолковать свойство двоякой периодичности эллиптической функции в общем случае. Сеть можно построить так, чтобы нулевая точка оказалась вершиной. Один из параллелограмов с вершиной в нулевой точке берут за основной.

Такой параллелограм представлен на фиг. 44 Изучив эллиптическую функцию в области, ограниченной его контуром, мы тем самым изучим ее во всей числовой плоскости. Это обстоятельство, как это нетрудно понять, является прямым следствием двоякой периодичности эллиптической функции.

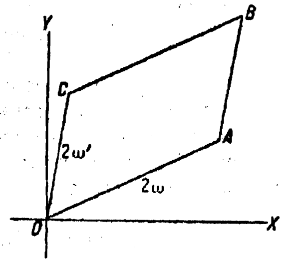
§ 144. Теоремы о числе полюсов эллиптической функции

1. *Эллиптическая функция, не имеющая полюсов, есть постоянное.*

Действительно, эллиптическая функция $f(u)$, не имеющая полюсов, должна быть функцией целой. Обозначая через M максимум ее модуля в основном параллелограме периодов, имеем для любой точки u плоскости:

$$|f(u)| \leqslant M,$$

так как значение $f(u)$ в силу двоякой периодичности принимается внутри или на границе основного параллелограма периодов. Вспоминая теорему Лиувилля, заключаем, что целая функция $f(u)$, ограниченная во всех точках конечной плоскости, тождественно равна постоянному числу.



Фиг. 44

Отсюда следует, что *эллиптическая функция имеет по меньшей мере один полюс.*

Можно доказать, с другой стороны, что в параллелограме периодов число полюсов эллиптической функции конечно.

2. *Если на контуре параллелограма периодов не лежат полюсы эллиптической функции $f(u)$, то интеграл от этой функции, взятый по контуру параллелограма, равен нулю.*

Представим себе какой-нибудь параллелограм периодов, например тот, который изображен на фиг. 44. Если бы на его контур попали полюсы, то мы могли бы параллелограм сдвинуть по способу параллельного перенесения так, чтобы полюсов на контуре не было. Это возможно потому, что число полюсов конечно.

Интегрируя по контуру $OABCO$ будем иметь:

$$I(OABCO) = \int_0^{2\omega} f(u)\,du + \int_{2\omega}^{2\omega+2\omega'} f(u)\,du + \int_{2\omega+2\omega'}^{2\omega'} f(u)\,du + \int_{2\omega'}^{0} f(u)\,du.$$

Положим в первом интеграле правой части этого равенства $u = v$; во втором $u = v + 2\omega$; в третьем $u = v + 2\omega'$ и в четвертом $u = v$. Мы сейчас же увидим, что первый интеграл даст нуль в сумме с третьим, а второй с четвертым. Вследствие этого:

$$I(OABCO) = 0.$$

При доказательстве теоремы надо, конечно, помнить, что

$$f(v + 2\omega) = f(v)$$

и

$$f(v + 2\omega') = f(v).$$

3. *Порядок эллиптической функции не может быть меньше двух.* Порядком эллиптической функции называют число ее полюсов в параллелограме периодов Каждый полюс при этом считается столько раз, сколько единиц заключается в его кратности.

Действительно, если мы рассмотрим интеграл $\int_C f(u)\,du$, где C есть контур параллелограма периодов, то, согласно доказанной теореме, этот интеграл равен нулю. Но, согласно теореме § 60, этот же интеграл равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов функции $f(u)$, относящихся к ее полюсам. Таким образом выходит, что сумма вычетов равна нулю. Эта сумма не может, очевидно, равняться нулю в случае одного лишь простого полюса.

Отсюда следует, что эллиптическая функция первого порядка невозможна.

Простейшими эллиптическими функциями являются функции второго порядка. К их числу относятся: $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$ и $\mathrm{dn}\,u$, имеющие по два простых полюса, $\wp u$, имеющая один двукратный полюс.

Примером эллиптической функции третьего порядка может служить функция $\wp' u$, имеющая в точке $u = 0$ один трехкратный полюс.

4. *Внутри параллелограма периодов эллиптическая функция имеет столько же нулей, сколько и полюсов* (с учетом кратности нулей и полюсов).

Если эллиптическая функция $f(u)$ имеет периоды 2ω и $2\omega'$, то они служат периодами также и для функций, $f'(u)$ и $\frac{f'(u)}{f(u)}$. Но, согласно теореме, доказанной в § 61:

$$\int_C \frac{f'(u)}{f(u)}\,du = 2\pi i\,(M - N),$$

где M — число нулей, а N — число полюсов внутри параллелограма периодов, причем каждый нуль и каждый полюс сосчитаны соответственно их кратности; C — контур параллелограма периодов.

Вместе с тем вследствие двоякой периодичности функции $\frac{f'(u)}{f(u)}$ мы можем к ней применить теорему вторую. Мы получим, что

$$M = N,$$

т. е. число нулей равно числу полюсов.

5. Укажем еще на одно следствие, вытекающее из доказанной теоремы. Оно заключается в следующем:

Эллиптическая функция порядка n принимает в параллелограме периодов всякое значение α n раз.

Пусть $f(u)$ есть эллиптическая функция n-го порядка.

Рассмотрим функцию $F(u)=f(u)-a$. Периоды и полюсы функции $f(u)$ будут служить периодами и полюсами (той же кратности) для $F(u)$, т. е. $F(u)$ есть эллиптическая функция n-го порядка. Следовательно, она имеет в параллелограме периодов n полюсов и n нулей. Другими словами, уравнение

$$f(u)-a=0$$

имеет n корней, т. е. функция $f(u)$ принимает значение a при n значениях переменной u.

В частности эллиптическая функция второго порядка принимает в параллелограме периодов два раза не только нулевое и бесконечное значение, но и всякое другое.

§ 145. Теорема о разности между суммой нулей и суммой полюсов эллиптической функции

Разность между суммой нулей и суммой полюсов, находящихся внутри параллелограма периодов эллиптической функции $f(u)$, равна периоду этой функции.

На основании формулы (33), доказанной в § 62, мы можем написать, что

$$\int_C u\,\frac{f'(u)}{f(u)}\,du=2\pi i\Delta,$$

где Δ — разность между суммой нулей и суммой полюсов, находящихся внутри параллелограма периодов функции $f(u)$; C — контур этого параллелограма.

Но, с другой стороны, полагая, что C есть контур $OABCO$ (фиг. 44), будем иметь:

$$\int_C u\,\frac{f'(u)}{f(u)}\,du=\int_0^{2\omega} u\,\frac{f'(u)}{f(u)}\,du+\int_{2\omega}^{2\omega+2\omega'} u\,\frac{f'(u)}{f(u)}\,du+$$
$$+\int_{2\omega+2\omega'}^{2\omega'} u\,\frac{f'(u)}{f(u)}\,du+\int_{2\omega'}^{0} u\,\frac{f'(u)}{f(u)}\,du.$$

Положим во втором интеграле правой части равенства $u=v+2\omega$. Мы получим:

$$\int_{2\omega}^{2\omega+2\omega'} u\,\frac{f'(u)}{f(u)}\,du=\int_0^{2\omega'}(v+2\omega)\,\frac{f'(v+2\omega)}{f(v+2\omega)}\,du=$$
$$=\int_0^{2\omega'}(v+2\omega)\frac{f'(v)}{f(v)}\,dv=\int_0^{2\omega'} v\,\frac{f'(v)}{f(v)}\,dv+2\omega\int_0^{2\omega'}\frac{f'(v)}{f(v)}\,dv.$$

Применим аналогичное преобразование к интегралу третьему, полагая

в нем $u=v+2\omega'$. Если затем в интегралах первом и четвертом заменим u на v, то, произведя простые выкладки, получим:

$$\int_C u\,\frac{f'(u)}{f(u)}\,du=2\omega\int_0^{2\omega'}\frac{f'(v)}{f(v)}\,dv-2\omega'\int_0^{2\omega}\frac{f'(v)}{f(v)}\,dv;$$

но

$$\int_0^{2\omega'}\frac{f'(v)}{f(v)}\,dv=\Big[\ln f(v)\Big]_0^{2\omega'}=\ln 1$$

потому, что $f(2\omega')=f(0)$.

А так как $\ln 1=2m\pi i$, то

$$\int_0^{2\omega'}\frac{f'(v)}{f(v)}\,dv=2m\pi i,$$

где m — целое число.

Точно так же:

$$\int_0^{2\omega}\frac{f'(v)}{f(v)}\,dv=2n\pi i,$$

где n — целое число.

Вследствие этого:

$$\int_C u\,\frac{f'(u)}{f(u)}\,du=4\pi i\,(m\omega-n\omega').$$

Сравнивая это значение интеграла с тем, которое было получено в самом начале этого параграфа, находим, что

$$\Delta=2m\omega-2n\omega'.$$

Так как выражение, находящееся в правой части полученного равенства, есть период, то теорема наша доказана.

§ 146. Соотношения между двумя эллиптическими функциями

1. *Если две эллиптические функции f_1 и f_2 имеют одни и те же периоды и в параллелограме периодов одни и те же полюсы с одинаковыми к ним относящимися главными частями* (§ 59), *то*

$$f_1-f_2=\text{const}.$$

Написав для обеих функций разложения в ряд Лорана, мы увидим, что в разности f_1-f_2 главные части, относящиеся к одинаковым полюсам, сократятся, и мы получим эллиптическую функцию, не имеющую полюсов. Такая функция, согласно теореме первой § 145, есть число постоянное. Следовательно:

$$f_1-f_2=\text{const}.$$

2. *Если две эллиптические функции f_1 и f_2 имеют одни и те же периоды и в параллелограме периодов одни и те же полюсы одинаковой кратности и одни и те же нули одинаковой кратности, то*

$$\frac{f_1}{f_2}=\text{const}.$$

Это потому, что отношение $\frac{f_1}{f_2}$ есть эллиптическая функция, не имеющая ни нулей, ни полюсов, т. е. есть число постоянное.

§ 147. Теорема сложения для функций sn u, cn u и dn u

В виде приложения теорем предыдущих параграфов выведем теоремы сложения для якобиевых эллиптических функций.

Напомним, прежде всего, что каждая из функций sn, cn и dn имеет по два полюса и, следовательно, по два нуля в основном параллелограме периодов. Периоды, полюсы и нули этих функций сведены в следующей табличке.

	Периоды	Полюсы	Нули
sn u	$4K$; $2iK'$	$2mK+(2n+1)\,iK'$	$2mK+2niK'$
cn u	$4K$; $2K+2iK'$	$2mK+(2n+1)\,iK'$	$(2m+1)\,K+2niK'$
dn u	$2K$; $4iK'$	$2mK+(2n+1)\,iK'$	$(2m+1)\,K+(2n+1)\,iK'$

Обозначая через α произвольное комплексное число (отличное от $2mK+(2n+1)\,iK'$), рассмотрим две функции от u:

$$f(u)=\operatorname{sn} u\cdot\operatorname{sn}(u-\alpha),$$

$$\varphi(u)=\operatorname{cn} u\cdot\operatorname{cn}(u-\alpha)-\operatorname{cn}\alpha.$$

Пользуясь известными свойствами sn u и cn u (см. § 30), легко убедимся, что функции $f(u)$ и $\varphi(u)$ имеют периоды $2K$ и $2iK'$.

Полюсами функций $f(u)$ и $\varphi(u)$ являются полюсы функций sn u, sn $(u-\alpha)$, cn u, cn $(u-\alpha)$. Следовательно, эти полюсы простые, и все содержатся в формулах:

$$u=2mK+(2n+1)\,iK',$$

$$u=\alpha+2mK+(2n+1)\,iK'.$$

Очевидно, что полюсы функций $f(u)$ и $\varphi(u)$ совпадают.

Так как основной параллелограм периодов функций $f(u)$ и $\varphi(u)$ с вершинами в точках: O, $2K$, $2K+2iK'$, $2iK'$ содержит по одной, и только по одной, точке, конгруэнтной с $2mK+(2n+1)\,iK$, и $\alpha+2mK+(2n+1)\,iK'$ (см § 32; как обычно, к основному параллелограму не причисляются его стороны, не проходящие через начало координат), то в основном параллелограме каждая из функций $f(u)$ и $\varphi(u)$ имеет по два, и только по два, простых полюса. Но тогда, являясь функциями второго порядка, $f(u)$ и $\varphi(u)$ должны иметь в основном параллелограме периодов по два, и только по два, нуля. Этими нулями как для функции $f(u)$, так и для функции $\varphi(u)$ будут:

$$u=0 \quad \text{и} \quad u=\alpha.$$

Справедливость этого утверждения проверяется непосредственно подстановкой значений $u=0$ и $u=\alpha$ в выражения функций $f(u)$ и $\varphi(u)$.

Из изложенного следует, что эллиптические функции $f(u)$ и $\varphi(u)$ имеют одни и те же периоды, полюсы и нули. Поэтому, по § 146:

$$f(u)=C\varphi(u),$$

где C — const.

Подставляя вместо $f(u)$ и $\varphi(u)$ их выражения, получаем:

$$\operatorname{sn} u-\operatorname{sn}(u-\alpha)=C\,[\operatorname{cn} u\cdot\operatorname{cn}(u-\alpha)-\operatorname{cn}\alpha].$$

Полагая здесь $u=K$ и замечая, что

$$\operatorname{sn} K=1,\quad \operatorname{sn}(K-\alpha)=\operatorname{sn}(\alpha+K)=\frac{\operatorname{cn}\alpha}{\operatorname{dn}\alpha},\quad \operatorname{cn} K=0,$$

находим:

$$C=-\frac{1}{\operatorname{dn}\alpha},$$

и, следовательно:

$$\operatorname{cn}\alpha=\operatorname{cn} u\cdot\operatorname{cn}(u-\alpha)+\operatorname{sn}\operatorname{sn}(u-\alpha)\operatorname{dn}\alpha. \tag{1}$$

Изменяя в этой формуле обозначения, положим $\alpha=-v$. Тогда получим:

$$\operatorname{cn} u\cdot\operatorname{cn}(u+v)+\operatorname{sn} u\operatorname{sn}(u+v)\operatorname{dn} v=\operatorname{cn} v \tag{2}$$

и, заменяя u через v и v через u:

$$\operatorname{cn} v\cdot\operatorname{cn}(u+v)+\operatorname{sn} v\cdot\operatorname{sn}(u+v)\operatorname{dn} u=\operatorname{cn} u. \tag{3}$$

Полученные формулы можно рассматривать как два уравнения первой степени относительно $\operatorname{cn}(u+v)$ и $\operatorname{sn}(u+v)$.

Решая их иестными приемами, получим:

$$\operatorname{sn}(u+v)=\frac{\operatorname{cn}^2 u-\operatorname{cn}^2 v}{\operatorname{sn} v\operatorname{cn} u\operatorname{dn} u-\operatorname{sn} u\cdot\operatorname{cn} v\operatorname{dn} v}, \tag{4}$$

$$\operatorname{cn}(u+v)=\frac{\operatorname{sn} v\cdot\operatorname{cn} v\operatorname{dn} u-\operatorname{sn} u\cdot\operatorname{cn} u\operatorname{dn} v}{\operatorname{sn} v\operatorname{cn} u\operatorname{dn} u-\operatorname{sn} u\operatorname{cn} v\operatorname{dn} v}. \tag{5}$$

Мы получили формулы сложения для функций cn и sn. Преобразуем эти формулы к знакомому нам виду (формулы § 25 и 26).

Для этого помножим числитель и знаменатель выражения для $\operatorname{sn}(u+v)$ на $\operatorname{sn} v\operatorname{cn} u\cdot\operatorname{dn} u+\operatorname{sn} u\operatorname{cn} v\operatorname{dn} v$. Получим:

$$\operatorname{sn}(u+v)=\frac{(\operatorname{cn}^2 u-\operatorname{cn}^2 v)(\operatorname{sn} v\operatorname{cn} u\operatorname{dn} u+\operatorname{sn} u\operatorname{cn} v\cdot\operatorname{dn} v)}{\operatorname{sn}^2 v\operatorname{cn}^2 u\operatorname{dn}^2 u-\operatorname{sn}^2 u\operatorname{cn}^2 v\operatorname{dn}^2 v}.$$

Но, как легко проверить, пользуясь соотношениями (9) § 5:

$$\operatorname{sn}^2 v\operatorname{cn}^2 u\operatorname{dn}^2 u-\operatorname{sn}^2 u\operatorname{cn}^2 v\operatorname{dn}^2 v=(\operatorname{cn}^2 v-\operatorname{cn}^2 u)(1+k^2\operatorname{sn}^2 u\cdot\operatorname{sn}^2 v).$$

Следовательно:

$$\operatorname{sn}(u+v)=\frac{\operatorname{sn} v\operatorname{cn} u\operatorname{dn} u+\operatorname{sn} u\operatorname{cn} v\operatorname{dn} v}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\cdot\operatorname{sn}^2 v}.$$

Аналогично найдем:

$$\operatorname{cn}(u+v)=\frac{\operatorname{cn} u\cdot\operatorname{cn} v-\operatorname{sn} u\cdot\operatorname{sn} v\cdot\operatorname{dn} u\cdot\operatorname{dn} v}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{sn}^2 v}.$$

Чтобы получить формулу сложения для dn, положим в уравнении (1 $\alpha = u + v$. Решая полученное уравнение относительно $\operatorname{dn}(u+v)$ и заменив $\operatorname{cn}(u+v)$ только что найденным выражением, получим:

$$\operatorname{dn}(u+v) = \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{sn} u \cdot \operatorname{sn} v \cdot \operatorname{cn} u \cdot \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}.$$

Выведенные формулы справедливы при любых комплексных u и v.

§ 148. Выражение функции $\wp u$ при помощи ее периодов

В § 91 было показано, что точка $u = 0$ служит двукратным полюсом функции $\wp u$. Любой ее полюс может быть выражен формулой

$$u = 2m\omega + 2n\omega',$$

где m и n — произвольные целые числа.

Главная часть функции $\wp u$, относящаяся к полюсу $2m\omega + 2n\omega'$, будет:

$$\frac{1}{(u - 2m\omega - 2n\omega')^2}.$$

Заметив это, рассмотрим функцию:

$$Pu = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(u - 2m\omega - 2n\omega')^2} - \frac{1}{(2m\omega + 2n\omega')^2}\right],$$

где сумма Σ' распространяется на все значения целых чисел m и n от $-\infty$ до $+\infty$ за исключением $m = n = 0$.

Можно доказать, что двойной ряд

$$\sum{}' \left[\frac{1}{(u - 2m\omega - 2n\omega')^2} - \frac{1}{(2m\omega + 2n\omega')^2}\right]$$

сходится абсолютно и равномерно во всякой замкнутой области, не заключающей точек $2m\omega + 2n\omega'$ ни внутри, ни на границе. Так как в такой области все функции $\frac{1}{(u - 2m\omega - 2n\omega')^2} - \frac{1}{(2m\omega + 2n\omega')^2}$ являются аналитическими, то по теореме, указанной в § 55, функция Pu аналитична всюду в конечной плоскости, кроме точек $2m\omega + 2n\omega'$. В последних точках она имеет двукратные полюсы. Итак, Pu является мероморфной функцией с теми же полюсами, что и функция $\wp u$. При этом главные части обеих функций в окрестности каждого полюса совпадают.

Сейчас покажем, что и периоды Pu и $\wp u$ совпадают. Для этого образуем разность:

$$P(u + 2\omega) - Pu = \frac{1}{(u + 2\omega)^2} - \frac{1}{u^2} +$$

$$+ \sum{}' \left[\frac{1}{(u + 2\omega - 2m\omega - 2n\omega')^2} - \frac{1}{(u - 2m\omega - 2n\omega')^2}\right] =$$

$$= \sum \left[\frac{1}{\{u - 2(m-1)\omega - 2n\omega'\}^2} - \frac{1}{(u - 2m\omega - 2n\omega')^2}\right].$$

Здесь сумма Σ распространяется на все значения целых чисел m и n, включая и значение $m = n = 0$.

Но эта сумма состоит из попарно равных по величине и обратных по знаку слагаемых и поэтому обращается в нуль. Следовательно:

$$P(u + 2\omega) = Pu.$$

Точно так же:

$$P(u + 2\omega') = Pu.$$

Из сказанного заключаем, что Pu есть эллиптическая функция. Периоды ее, полюсы и соответствующие главные части те же, что и у функции $\wp u$. На основании теоремы, доказанной в § 146, можем утверждать, что разность

$$\wp u - Pu = A,$$

где A — постоянная.

Представив полученное равенство в виде:

$$A = \left(\wp u - \frac{1}{u^2}\right) - \left(Pu - \frac{1}{u^2}\right),$$

положим в нем, что $u = 0$. Нетрудно видеть, что обе заключенные в скобки разности обращаются в нуль. Следовательно, $A = 0$, т. е.

$$\wp u = Pu,$$

и тем самым:

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(u - 2m\omega - 2n\omega)^2} - \frac{1}{(2m\omega + 2n\omega')^2}\right]. \qquad (6)$$

Формула (6) показывает, каким образом функция $\wp u$ может быть построена при помощи своих периодов. Эта формула имеет важное значение при изучении функций Вейерштрасса.

§ 149. Выражения функций ζu и σu при помощи периодов

Полагая $2m\omega + 2n\omega' = w$, будем иметь:

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(u + w)^2} - \frac{1}{w^2}\right], \qquad (7)$$

где сумма Σ' распространяется на все значения целых чисел m и n от $-\infty$ до $+\infty$, исключая $m = n = 0$.

Согласно данному в § 92 определению

$$\zeta u = \frac{1}{u} - \int_0^u \left(\wp u - \frac{1}{u^2}\right) du.$$

Вследствие этого:

$$\zeta u = \frac{1}{u} - \int_0^u \sum{}' \left[\frac{1}{(u + w)^2} - \frac{1}{w^2}\right] du,$$

т. е.

$$\zeta u = \frac{1}{u} + \sum{}' \left(\frac{1}{u - w} + \frac{u}{w^2}\right)_0^u$$

или

$$\zeta u = \frac{1}{u} + \sum{}' \left(\frac{1}{u - w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}\right). \qquad (8)$$

В том же § 92 функция σu была определена равенством:

$$\sigma u = u e^{\int\limits_0^u \left(\zeta u - \frac{1}{u}\right)}$$

или

$$\ln\left(\frac{\sigma u}{u}\right) = \int\limits_0^u \left(\zeta u - \frac{1}{u}\right) du.$$

Отсюда

$$\ln\left(\frac{\sigma u}{u}\right) = \int\limits_0^u \sum{}' \left(\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}\right) du =$$

$$= \sum{}' \left[\ln(u-w) + \frac{u}{w} + \frac{u^2}{2w^2}\right]_0^u = \sum{}' \left[\ln\left(1 - \frac{u}{w}\right) + \ln e^{\frac{u}{w} + \frac{u^2}{2w^2}}\right] =$$

$$= \sum{}' \ln\left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{u^2}{2w^2}} = \ln \prod{}' \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{u^2}{2w^2}},$$

где Π' обозначает произведение множителей:

$$\left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{u^2}{2w^2}},$$

распространенное на все значения целых чисел m и n от $-\infty$ до $+\infty$ за исключением $m = n = 0$.

Потенцируя, получим:

$$\sigma u = u \prod{}' \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{u^2}{2w^2}}. \qquad (9)$$

Формулы (8) и (9) показывают, каким образом можно построить функции ζu и σu при помощи периодов 2ω и $2\omega'$.

§ 150. Новое определение функций $\wp u$, ζu и σu

При изучении функций Вейерштрасса мы за исходную точку приняли эллиптический интеграл

$$u = \int\limits_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}},$$

в котором полагали, что коэфициенты (инварианты) g_2 и g_3 числа вещественные. Совершив обращение этого интеграла, мы пришли к представлению о функции $\wp u$. Затем определили функции ζu и σu помощью равенств:

$$\left.\begin{aligned} \zeta u &= \frac{1}{u} - \int\limits_0^u \left(\wp u - \frac{1}{u^2}\right) du, \\ \sigma u &= u e_0^{\int^u \left(\zeta u - \frac{1}{u}\right)} \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

(см. § 92). Но теорию вейерштрассовых функций можно развить, исходя из совершенно других соображений.

Взяв два произвольные комплексные числа, отношение которых есть тоже число комплексное, можно их принять за периоды функций $\wp u$ и самую функцию определить при помощи равенства (6), принимая его таким образом за исходную точку при построении теории функций Вейерштрасса. И когда функция $\wp u$ уже определена, то функции ζu и σu можно определить при помощи равенств (8) и (9), как было показано в предыдущем параграфе.

Все те свойства функций $\wp u$, ζu и σu, которые нами были рассмотрены в главе IV, можно обнаружить, пользуясь, как основными, формулами (6), (8) и (9). В виде примера мы покажем, каким образом можно доказать, что функция $\wp u$ удовлетворяет диференциальному уравнению

$$(\wp' u)^2 = 4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3.$$

Вместе с тем мы выведем интересное и важное соотношение между инвариантами g_2 и g_3 и периодами 2ω и $2\omega'$.

Примем за основание формулу

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right], \qquad (7)$$

где $w = 2m\omega + 2n\omega'$; m и n — произвольные целые числа. Прежде всего, заметим, что

$$\wp u = \wp(-u),$$

т. е. $\wp u$ — функция четная.

В этом можно убедиться, заменяя в (7) u на $-u$. А так как сумма Σ' распространена на все значения целых чисел m и n от $-\infty$ до $+\infty$ (кроме $m = n = 0$), то можно также заменить w на $-w$.

Заметим еще, что

$$\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} = \frac{2u}{w^3} + \frac{3u^2}{w^4} + \frac{4u^3}{w^5} + \ldots$$

Составив сумму Σ' слагаемых этого вида, мы получим:

$$\sum{}' \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right] = c_2 u^2 + c_3 u^4 + \ldots,$$

где

$$c_2 = 3\sum{}' \frac{1}{w^4}; \quad c_3 = 5\sum{}' \frac{1}{w^6}; \ldots$$

Члены, содержащие нечетные степени u, сократятся, ибо функция $\wp u$ четная.

Теперь имеем:

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + c_2 u^2 + c_3 u^4 + \ldots$$

Далее последовательно получим:

$$\wp' u = -\frac{2}{u^3} + 2c_2 u + 4c_3 u^3 + \ldots,$$

$$(\wp' u)^2 = \frac{4}{u^6} - \frac{8c_2}{u^2} - 16c_3 + \ldots,$$

$$\wp^3 u = \frac{1}{u^6} + \frac{3c_2}{u^2} + 3c_3 + \ldots$$

и

$$(\wp' u)^2 - 4\wp^3 u = -\frac{20c_2}{u^2} - 28c_3 + \ldots$$

Но так как

$$\frac{1}{u^2} = \wp u - c_2 u^2 - c_3 u^4 - \ldots,$$

то

$$(\wp' u)^2 - 4\wp^3 u + 20c_2 \wp u + 28c_3 = (c_2 u^2 + c_3 u^4 + \ldots) 20c_2 + \ldots$$

В левой части равенства имеем эллиптическую функцию. Следовательно, и правая есть эллиптическая функция. Но она, очевидно, не имеет полюсов и вследствие этого есть постоянное число. Полагая $u = 0$, мы найдем, что это постоянное равно нулю. И мы видим, что функция $\wp u$ удовлетворяет диференциальному уравнению

$$(\wp' u)^2 = 4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3,$$

где

$$g_2 = 20c_2 = 60 \sum' \frac{1}{w^4}; \quad g_3 = 28c_3 = 140 \sum' \frac{1}{w^6}.$$

§ 151. Аналитическое выражение эллиптической функции в общем случае

В нескольких предыдущих параграфах мы определили эллиптическую функцию и рассмотрели некоторые ее свойства. Теперь поставим себе целью дать аналитическое выражение эллиптической функции в общем случае. Такое выражение можно составить, пользуясь функциями Вейерштрасса.

Пусть требуется составить эллиптическую функцию, имеющую в параллелограме периодов однократные полюсы $a, b, \ldots, l$, и периоды 2ω и $2\omega_1$.

Обозначим вычеты этой функции, относящиеся к этим полюсам, буквами:

$$A, B, \ldots, L.$$

На основании теоремы (3) § 144 мы можем написать, что

$$A + B + \ldots + L = 0.$$

Рассмотрим функцию:

$$f(u) = A\zeta(u-a) + B\zeta(u-b) + \ldots + L\zeta(u-l) + \Gamma, \tag{11}$$

в которой все функции ζ могут быть определены при помощи формулы (8), Γ — постоянная. Функция $f(u)$, очевидно, имеет заданные полюсы. Кроме того, она имеет и заданные периоды. Действительно, помня, что

$$\zeta(v + 2\omega) = \zeta v + 2\eta,$$

мы будем иметь:

$$f(u + 2\omega) = f(u) + 2\eta(A + B + \ldots + L),$$

т. е.

$$f(u + 2\omega) = f(u).$$

Точно так же:

$$f(u + 2\omega') = f(u).$$

Мы видим, что функция $f(u)$ есть эллиптическая, имеющая заданные периоды и полюсы. Заметим, что всякая другая эллиптическая функция, имеющая те же периоды и те же полюсы с одинаковыми относящимися к ним главными частями, будет отличаться от $f(u)$ только постоянным слагаемым, в чем можно убедиться, вспомнив теорему, доказанную в § 146.

Отсюда следует, что формула (11) дает общее решение вопроса.

Если в более сложном случае полюсы

$$a, b, \ldots, l$$

имеют кратности

$$\alpha, \beta, \ldots, \lambda,$$

то составим функцию:

$$\begin{aligned} f(u) = {} & A\zeta(u-a) + A_1 \wp(u-a) - A_2 \wp'(u-a) + \\ & + \ldots + (-1)^{(\alpha-2)} \frac{A_\alpha}{1 \cdot 2 \ldots (\alpha-2)} \wp^{(\alpha-2)}(u-a) + \\ & + B\zeta(u-b) + B_1 \wp(u-b) - B_2 \wp'(u-b) + \\ & + \ldots + (-1)^{(\beta-2)} \frac{B_\beta}{1 \cdot 2 \ldots (\beta-2)} \wp^{(\beta-2)}(u-b) + \\ & + \ldots + L\zeta(u-l) + L_1 \wp(u-l) - L_2 \wp'(u-l) + \\ & + \ldots + (-1)^{(\lambda-2)} \frac{L_\lambda}{1 \cdot 2 \ldots (\lambda-2)} \wp^{(\lambda-2)}(u-l) + \Gamma, \end{aligned} \tag{12}$$

где сумма вычетов

$$A + B + \ldots + L = 0.$$

Нетрудно убедиться, рассуждая попрежнему, что функция $f(u)$ имеет периоды 2ω и $2\omega'$ и что всякая другая функция с теми же полюсами и периодами может отличаться от $f(u)$ только постоянным слагаемым. Таким образом (11) представляет общее решение вопроса.

Заметим, что (11) и (12) представляют аналогию известного из алгебры разложения рациональной функции на элементарные дроби.

Имея в виду дать пример пользования общей формулой (12), покажем каким образом из нее можно получить известную уже нам формулу сложения функций $\wp$. Рассмотрим функцию:

$$\varphi(u) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}\right)^2.$$

Заметив, что

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \ldots,$$

$$\wp' u = -\frac{2}{u^3} + \ldots,$$

мы получим

$$\varphi(u) = \frac{1}{u^2} + \ldots$$

Отсюда заключаем, что функция $\varphi(u)$ имеет двукратный полюс $u = 0$. Соответствующая ему главная часть есть $\frac{1}{u^2}$. Заметим еще, что

$$\wp u = \wp(-v + u + v) = \wp v - (u + v)\wp' v + \ldots,$$

т. е.

$$\wp u - \wp v = -(u + v)\wp' v + \ldots$$

Точно так же:

$$\wp' u = -\wp' v + (u + v)\wp'' v + \ldots,$$

т. е.

$$\wp' u - \wp' v = -2\wp' v + (u + v)\wp'' v - \ldots$$

Следовательно:

$$\varphi(u) = \frac{1}{(u + v)^2} + \ldots$$

Мы видим, что $\varphi(u)$ имеет еще один двукратный полюс $u = -v$. Соответствующая ему главная часть равна $\frac{1}{(u+v)^2}$. Применяя к функции $\varphi(u)$ общую формулу (12), полагаем $a = 0$; $b = -v$; $A_1 = 1$; $B_1 = 1$; а все прочие коэфициенты равны нулю. Мы будем иметь:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}\right)^2 = \wp(u + v) + \wp u + \Gamma.$$

Чтобы определить постоянную Γ, представим левую часть равенства в виде:

$$\frac{1}{4u^2}(-2 - u^3\wp' v - \ldots)^2 \cdot (1 - u^2\wp v + \ldots)^{-2} =$$

$$= \frac{1}{4u^2}\left(-2 - u^3\wp' v - \ldots\right)^2 (1 + 2u^2\wp v + \ldots) = \frac{1}{u^2} + 2\wp v + \alpha,$$

где $\alpha = 0$, когда $u = 0$. Теперь можем написать, что

$$\wp(u + v) + \wp u + \Gamma = \frac{1}{u^2} + 2\wp v + \alpha.$$

Но $\wp u = \frac{1}{u^2} + \beta$, где $\beta = 0$, когда $u = 0$. Сокращая равные члены и полагая затем $u = 0$, находим $\Gamma = \wp v$. Следовательно:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}\right)^2 = \wp(u + v) + \wp u + \wp v.$$

§ 152. Второй способ аналитического выражения эллиптической функции

Кроме разложения на элементарные дроби рациональная дробная функция может быть, как известно, представлена еще в другом виде. Этот второй вид получится, если числителя и знаменателя дроби разложим на линейные множители.

Приведем здесь еще одно выражение эллиптической функции, аналогичное этому второму способу представления рациональной дробной функции.

Рассмотрим эллиптическую функцию с основными периодами 2ω и $2\omega'$, полюсы которой в параллелограме периодов пусть будут

$$a, b, \ldots, l,$$

а нули

$$m, n, \ldots, s,$$

причем число k полюсов равно числу нулей.

Согласно теореме § 145, разность между суммой нулей и суммой полюсов есть период эллиптической функции, т. е.

$$m + n + \ldots + s = a + b + \ldots + l + 2\Omega,$$

где 2Ω есть период, представляющий линейную комбинацию основных периодов.

Нетрудно видеть, что искомым аналитическим выражением эллиптической функции может служить формула:

$$f(u) = \Gamma \cdot \frac{\sigma(u - m)\,\sigma(u - n)\ldots\sigma(u - s + 2\Omega)}{\sigma(u - a)\,\sigma(u - b)\ldots\sigma(a - l)}, \tag{13}$$

в которой Γ — постоянный множитель. Что функция $f(u)$ имеет периоды 2ω и $2\omega'$, это можно проверить, пользуясь доказанной в § 96 формулой:

$$\sigma(u + 2\omega) = -e^{2\eta(u + \omega)}\sigma u.$$

Действительно, заменяя в (13) u на $u + 2\omega$, мы получим:

$$f(u + 2\omega) = f(u)\,\frac{e^{2\eta(ku + k\omega - m - n - \ldots - s + 2\Omega)}}{e^{2\eta(ku + k\omega - a - b - \ldots - l)}} = f(u).$$

Точно так же:

$$f(u + 2\omega') = f(u).$$

Прямой подстановкой нетрудно проверить также, что нулями и полюсами функции $f(u)$ служат заданные числа.

Всякая другая эллиптическая функция, имеющая те же периоды, нули и полюсы, на основании теоремы § 146 может отличаться от функции $f(u)$ только постоянным множителем. Следовательно, данное решение есть общее.

Сводка наиболее важных формул

Эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода:

$$F(\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

$$E(\varphi)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\cdot d\varphi,$$

$$\prod(\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}};$$

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\qquad K'=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}},\qquad k^2+k'^2=1,$$

$$E=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\cdot d\varphi,$$

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{\varphi_n}{2^n}\cos\theta_n\sqrt{\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2\ldots\cos\theta_{n-1}}{\cos\theta}},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{\pi}{2}\cos\theta_n\sqrt{\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2\ldots\cos\theta_{n-1}}{\cos\theta}}.$$

Здесь:

$$\sin\theta=k;\ \sin\theta_1=\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2};\ \ldots\ \ \sin\theta_n=\mathrm{tg}^2\frac{\theta_{n-1}}{2};$$

$$\mathrm{tg}(\varphi_1-\varphi)=\cos\theta\cdot\mathrm{tg}\,\varphi\ \ldots\ \mathrm{tg}(\varphi_n-\varphi_{n-1})=\cos\theta_{n-1}\,\mathrm{tg}\,\varphi_{n-1}.$$

Интерполяционные формулы:

$$F-F_0=(F_1-F_0)\frac{\theta-\theta_0}{1^\circ}+(F_2-F_0)\frac{\varphi-\varphi_0}{1^\circ},$$

$$E-E_0=(E_1-E_0)\frac{\theta-\theta_0}{5^\circ}+(E_2-E_0)\frac{\varphi-\varphi_0}{1^\circ}.$$

Эллиптические функции Якоби:

$$u=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}};\qquad \varphi=\mathrm{am}\ u;$$

$$\sin\varphi=\mathrm{sn}\,u;\quad \cos\varphi=\mathrm{cn}\,u;\ \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}=\mathrm{dn}\,u.$$

$$\mathrm{sn}^2u+\mathrm{cn}^2u=1;\quad \mathrm{dn}^2u+k^2\,\mathrm{sn}^2u=1.$$

Если $k=0$, то $\mathrm{sn}\,u=\sin u$; $\mathrm{cn}\,u=\cos u$; $\mathrm{dn}\,u=1$.

Если $k=1$, то $\mathrm{sn}\,u=\mathrm{th}\,u$; $\mathrm{cn}\,u=\mathrm{dn}\,u=\dfrac{1}{\mathrm{ch}\,u}$;

$$\mathrm{sn}(u\pm v)=\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v\pm\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2u\,\mathrm{sn}^2v};$$

$$\mathrm{cn}(u\pm v)=\frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\mp\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2u\,\mathrm{sn}^2v};$$

$$\mathrm{dn}(u\pm v)=\frac{\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v\mp k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2u\,\mathrm{sn}^2v};$$

$$\mathrm{sn}(ui,\,k)=i\,\frac{\mathrm{sn}(u,\,k')}{\mathrm{cn}(u,\,k')};$$

$$\mathrm{cn}(ui,\,k)=\frac{1}{\mathrm{cn}(u,\,k')};$$

$$\mathrm{dn}(ui,\,k)=\frac{\mathrm{dn}(u,\,k')}{\mathrm{cn}(u,\,k')}.$$

$$\mathrm{sn}(-u)=-\mathrm{sn}(u);\qquad \mathrm{cn}(-u)=\mathrm{cn}\,u;\qquad \mathrm{dn}(-u)=\mathrm{dn}\,u;$$

$$\mathrm{sn}(2K+u)=-\mathrm{sn}\,u;\quad \mathrm{cn}(2K+u)=-\mathrm{cn}\,u;\quad \mathrm{dn}(2K+u)=\mathrm{dn}\,u;$$

$$\mathrm{sn}(2K-u)=\mathrm{sn}\,u;\quad \mathrm{cn}(2K-u)=-\mathrm{cn}\,u;\quad \mathrm{dn}(2K-u)=\mathrm{dn}\,u;$$

$$\mathrm{sn}(K-u)=\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u};\quad \mathrm{cn}(K-u)=\frac{k'\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u};\quad \mathrm{dn}(K-u)=\frac{k'}{\mathrm{dn}\,u};$$

$$\mathrm{sn}(K+u)=\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u};\quad \mathrm{cn}(K+u)=-\frac{k'\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u};\quad \mathrm{dn}(K+u)=\frac{k'}{\mathrm{dn}\,u};$$

$$\mathrm{sn}(K'i+u)=\frac{1}{k\,\mathrm{sn}\,u};\quad \mathrm{cn}(K'i+u)=-\frac{i\,\mathrm{dn}\,u}{k\,\mathrm{sn}\,u};\quad \mathrm{dn}(K'i+u)=-\frac{i\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u};$$

$$\mathrm{sn}(2K'i+u)=\mathrm{sn}\,u;\quad \mathrm{cn}(2K'i+u)=-\mathrm{cn}\,u;\quad \mathrm{dn}(2K'i+u)=-\mathrm{dn}\,u.$$

Основными периодами для функции

$\mathrm{sn}\,u$ служат $4K$ и $2K'$,

$\mathrm{cn}\,u$ » $4K$ и $2K+2K'i$,

$\mathrm{dn}\,u$ » $2K$ и $4K'i$

Некоторые частные значения эллиптических функций

u	0	K	$2K$	$K'i$	$2K'i$	$K+K'i$
$\mathrm{sn}\,u$	0	1	0	∞	0	$\frac{1}{k}$
$\mathrm{cn}\,u$	1	0	-1	∞	-1	$-\frac{ik'}{k}$
$\mathrm{dn}\,u$	1	k	1	∞	-1	0

Нулями для функции

$$\operatorname{sn} u \quad \text{служат} \quad u = 2mK + 2nK'i,$$

$$\operatorname{cn} u \quad \text{»} \quad u = (2m-1)K + 2nK'i,$$

$$\operatorname{dn} u \quad \text{»} \quad u = (2m-1)K + (2n-1)K'i.$$

Полюсы для всех трех функций выражаются формулой:

$$u = 2mK + (2n-1)K'i.$$

Здесь m и n — произвольные целые числа.

$$\frac{d \operatorname{sn} u}{du} = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u; \quad \frac{d \operatorname{cn} u}{du} = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u; \quad \frac{d \operatorname{dn} u}{du} = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u.$$

Функция $\wp u$ Вейерштрасса

Нормальный эллиптический интеграл Вейерштрасса

$$u = \int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z_2 - g_3}}; \quad z = \wp u; \quad \wp(0) = \infty.$$

Дискриминант

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2.$$

Корни многочлена $4z^3 - g_2 z - g_3$ обозначаются через e_1, e_2, e_3.

Если $\Delta > 0$, то корни вещественные и $e_1 > e_2 > e_3$.

Если $\Delta < 0$, то $e_1 = m + ni$; $e_2 = -2m$; $e_3 = m - ni$, причем $n > 0$.

Если $\Delta > 0$, то

$$\wp u = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2 (u \sqrt{e_1 - e_3})},$$

причем $\operatorname{sn}(u \sqrt{e_1 - e_3})$ вычисляют при модуле

$$k = \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}}.$$

Если $\Delta < 0$, то

$$\wp u = e_2 + H \frac{1 + \operatorname{cn}(2u\sqrt{H})}{1 - \operatorname{cn}(2u\sqrt{H})},$$

где

$$H = \sqrt{9m^2 + n^2}.$$

Функцию

$$\operatorname{cn}(2u\sqrt{H})$$

вычисляют при модуле

$$k = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{3e_2}{H}}.$$

Свойства функции $\wp u$:

$$\wp(-u) = \wp u;$$

$$\mu \wp(u; g_2, g_3) = \wp\left(\frac{u}{\sqrt{\mu}}; g_2 \mu^2, g_3 \mu^3\right);$$

$$\wp(ui; g_2, g_3) = -\wp(u; g_2, -g_3);$$

$$\wp(u+v) + \wp u + \wp v = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}\right)^2.$$

Основными полупериодами для функции $\wp u$ служат:
при $\Delta > 0$:

$$\omega_1 = \frac{K}{\sqrt{e_1 - e_3}}; \quad \omega_3 = \frac{K'i}{\sqrt{e_1 - e_3}};$$

при $\Delta < 0$:

$$\omega' = \frac{K - K'i}{2\sqrt{H}}; \quad \omega''' = \frac{K + K'i}{2\sqrt{H}}.$$

$$e_1 = \wp \omega_1; \; e_2 = \wp(\omega_1 + \omega_3); \; e_3 = \wp \omega_3 \; (\text{при } \Delta > 0);$$

$$e_1 = \wp \omega'; \; e_2 = \wp \omega_2 = \wp \omega_2'; \; e_3 = \wp \omega''' \; (\text{при } \Delta < 0);$$

$$\omega_2 = \omega' + \omega'''; \quad \omega_2' = -\omega' + \omega'''.$$

$$\wp(u + \omega_1) = e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{\wp u - e_1};$$

$$\wp(u + \omega_1 + \omega_3) = e_2 + \frac{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}{\wp u - e_2}$$

$$\wp(u + \omega_3) = e_3 + \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}{\wp u - e_3}.$$

Аналогичные формулы имеют место и для полупериодов ω_2, ω_2', ω', ω'''
Производные

$$\wp' u = \pm \sqrt{4(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3)} \quad \text{при } \Delta > 0;$$

$$\wp' u = \pm \sqrt{4(\wp u - e_2)[(\wp u - m)^2 + n^2]}; \quad \text{при } \Delta < 0:$$

$$\wp'' u = 6 \wp^2 u - \frac{g_2}{2}; \quad \wp''' u = 12 \wp u \, \wp' u.$$

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2 u^2}{4 \cdot 5} + \frac{g_3 u^4}{4 \cdot 7} + \frac{g_2^2 u^6}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2} + \frac{3 g_2 g_3 u^8}{2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} + \ldots$$

Функции ζu и σu Вейерштрасса:

$$\zeta u = \frac{1}{u} - \int_0^u \left(\wp u - \frac{1}{u^2}\right) du; \quad \sigma u = u e^{\int_0^u \left(\zeta u - \frac{1}{u}\right) du};$$

$$u=\frac{1}{u}-\frac{g_2}{4\cdot 5}\cdot\frac{u^3}{3}-\frac{g_3}{4\cdot 7}\cdot\frac{u^5}{5}-\frac{g_2^2}{2^4\cdot 3\cdot 5^2}\cdot\frac{u^7}{7}-\frac{3g_2g_3}{2^4\cdot 5\cdot 7\cdot 11}\cdot\frac{u^9}{9}-\ldots$$

$$\sigma u=u-\frac{g_2u^5}{2^4\cdot 3\cdot 5}-\frac{g_3u^7}{2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7}-\frac{g_2^2u^9}{2^9\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7}-\ldots$$

$$\zeta(-u)=-\zeta u;\quad \sigma(-u)=-\sigma u;$$

$$\zeta(u+v)-\zeta u-\zeta v=\frac{1}{2}\,\frac{\wp' u-\wp' v}{\wp u-\wp v};$$

$$\wp u-\wp v=-\frac{\sigma(u-v)\,\sigma(u+v)}{\sigma^2 u\cdot\sigma^2 v};$$

$$\zeta(u+2\omega_1)=\zeta u+2\eta_1;\quad \zeta(u+2\omega_3)=\zeta u+2\eta_3;$$

$$\eta_1=\zeta\,\omega_1;\quad \eta_3=\zeta\omega_3;$$

$$\eta_1\omega_3-\eta_3\omega_1=\frac{\pi i}{2};$$

$$\wp u-e_k=\frac{\sigma_k^2 u}{\sigma^2 u};\quad k=1,\ 2,\ 3.$$

Функции $\Theta(u)$ и $H(u)$ Якоби:

$$\Theta(u)=1-2q\cos\frac{\pi u}{K}+2q^4\cos\frac{2\pi u}{K}-2q^9\cos\frac{3\pi u}{K}+\ldots;$$

$$H(u)=2\left(\sqrt[4]{q}\sin\frac{\pi u}{2K}-\sqrt[4]{q^9}\sin\frac{3\pi u}{2K}+\sqrt[4]{q^{25}}\sin\frac{5\pi u}{2K}-\ldots\right);$$

$$H_1(u)=2\left(\sqrt[4]{q}\cos\frac{\pi u}{2K}-\sqrt[4]{q^9}\sin\frac{3\pi u}{2K}+\sqrt[4]{q^{25}}\cos\frac{5\pi u}{2K}+\ldots\right);$$

$$\Theta_1(u)=1+2q\cos\frac{\pi u}{K}+2q^4\cos\frac{2\pi u}{K}+2q^9\cos\frac{3\pi u}{K}+\ldots$$

$$q=e^{-\frac{\pi K'}{K}}.$$

Нули и периоды функций Якоби:

	Нули	*Периоды*
$\Theta(u)$	$2mK+(2n+1)K'i$	$2K$
$H(u)$	$2mK+2nK'i$	$4K$
$H_1(u)$	$(2m+1)K+2nK'i$	$4K$
$\Theta_1(u)$	$(2m+1)K+(2n+1)K'$	$2K$

$$\operatorname{sn}u=\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{H(u)}{\Theta(u)};\quad \operatorname{cn}u=\sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{H_1(u)}{\Theta(u)};\quad \operatorname{dn}u=\sqrt{k'}\,\frac{\Theta_1(u)}{\Theta(u)}.$$

$$k=\frac{H^2(K)}{\Theta^2(K)};\quad k'=\frac{\Theta^2(0)}{\Theta_1^2(0)}.$$

$$K=\frac{\pi}{2}(1+2q+2q^4+2q^9+\ldots)^2.$$

$$E(\varphi)=u-u\,\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}+\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}.$$

$$\Pi=\int_0^u\frac{du}{1+n\operatorname{sn}^2 u}=$$

$$=u+\frac{\operatorname{sn}a}{\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a}\left[\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}u+\frac{1}{2}\ln\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}\right],\ (n=-k^2\operatorname{sn}^2 a).$$

$$\sigma u=\frac{e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}}{\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{H(u\sqrt{\lambda})}{H'(0)};$$

$$\zeta u=\frac{\eta_1 u}{\omega_1}+\sqrt{\lambda}\,\frac{H'(u\sqrt{\lambda})}{H(u\sqrt{\lambda})};$$

$$\wp u=e_1+\left[\frac{H_1(u\sqrt{\lambda})\,H'(0)}{H_1(0)\cdot H(u\sqrt{\lambda})}\right]^2\cdot\lambda;$$

$$\wp u=e_2+\left[\frac{\Theta_1(u\sqrt{\lambda})\,H'(0)}{\Theta_1(0)\,H(u\sqrt{\lambda})}\right]^2\cdot\lambda;$$

$$\wp u=e_3+\left[\frac{\Theta(u\sqrt{\lambda})\,H'(0)}{\Theta(0)\,H(u\sqrt{\lambda})}\right]^2\cdot\lambda;$$

$$\lambda=e_1-e_3$$

$$\eta_1=-\frac{\omega_1\lambda}{3}\cdot\frac{H'''(0)}{H'(0)};\quad \eta_3=\frac{1}{\omega_1}\left(\eta_1\omega_3-\frac{\pi i}{2}\right);$$

$$\bar{\wp}u=\wp u+\frac{H^2}{\wp u\cdot e_2};\quad \bar{\zeta}u=2\zeta u+e_2u+\sqrt{\frac{(\wp u-m)^2+n^2}{\wp u-e_3}};$$

$$\bar{\sigma}u=\pm\sigma^2 u\sqrt{\wp u-e_2}\cdot e^{\frac{e_2u^2}{2}}.$$

$$\eta_2\omega_2'-\eta_2'\omega_2=\pi i;\quad \eta_1=\frac{e_2\omega_2}{2}+\eta_2.$$

ПРИЛОЖЕНИЯ

φ	F (0°)	F (1°)	F (2°)	F (3°)	F (4°)	F (5°)
0°	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745
2	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491
3	0,05236	0,05236	0,05236	0,05236	0,05236	0,05236
4	0,06981	0,06981	0,06981	0,06981	0,06981	0,06981
5	0,08727	0,08727	0,08727	0,03727	0,08727	0,08727
6	0,10472	0,10472	0,10472	0,10472	0,10472	0,10472
7	0,12217	0,12217	0,12217	0,12217	0,12217	0,12218
8	0,13963	0,13963	0,13963	0,13963	0,13963	0,13963
9	0,15708	0,15708	0,15708	0,15708	0,15708	0,15708
10	0,17453	0,17453	0,17453	0,17454	0,17454	0,17454
11	0,19199	0,19199	0,19199	0,19199	0,19199	0,19200
12	0,20944	0,20944	0,20944	0,20944	0,20945	0,20945
13	0,22689	0,22689	0,22690	0,22690	0,22690	0,22691
14	0,24435	0,24435	0,24435	0,24435	0,24436	0,24436
15	0,26180	0,26180	0,26180	0,26181	0,26181	0,26182
16	0,27925	0,27925	0,27926	0,27926	0,27927	0,27928
17	0,29671	0,29671	0,29671	0,29672	0,29673	0,29674
18	0,31416	0,31416	0,31417	0,31417	0,31418	0,31420
19	0,33161	0,33161	0,33162	0,33163	0,33164	0,33166
20	0,34907	0,34907	0,34907	0,34908	0,34910	0,34912
21	0,36652	0,36652	0,36653	0,36654	0,36656	0,36658
22	0,38397	0,38398	0,38398	0,38400	0,38402	0,38404
23	0,40143	0,40143	0,40144	0,40145	0,40148	0,40151
24	0,41888	0,41888	0,41889	0,41891	0,41894	0,41897
25	0,43633	0,43634	0,43635	0,43637	0,43640	0,43643
26	0,45379	0,45379	0,45380	0,45383	0,45386	0,45390
27	0,47124	0,47124	0,47126	0,47128	0,47132	0,47137
28	0,48869	0,48870	0,48871	0,48874	0,48878	0,48883
29	0,50614	0,50615	0,50617	0,50620	0,50625	0,50630
30	0,52360	0,52361	0,52363	0,52366	0,52371	0,52377
31	0,54105	0,54106	0,54108	0,54112	0,54117	0,54124
32	0,55851	0,55851	0,55854	0,55858	0,55864	0,55871
33	0,57596	0,57597	0,57599	0,57604	0,57610	0,57619
34	0,59341	0,59342	0,59345	0,59350	0,59357	0,59366
35	0,61087	0,61088	0,61091	0,61096	0,61104	0,61113
36	0,62832	0,62833	0,62837	0,62842	0,62850	0,62861
37	0,64577	0,64578	0,64582	0,64588	0,64597	0,64609
38	0,66323	0,66324	0,66328	0,66335	0,66344	0,66356
39	0,68068	0,68069	0,68074	0,68081	0,68091	0,68104
40	0,69813	0,69815	0,69819	0,69827	0,69838	0,69852
41	0,71558	0,71560	0,71565	0,71574	0,71585	0,71600
42	0,73304	0,73306	0,73311	0,73320	0,73333	0,73349
43	0,75049	0,75051	0,75057	0,75066	0,75080	0,75097
44	0,76794	0,76797	0,76803	0,76813	0,76827	0,76846
45	0,78540	0,78542	0,78549	0,78559	0,78575	0,78594

φ	F (0°)	F (1°)	F (2°)	F (3°)	F (4°)	F (5°)
45°	0,78540	0,78542	0,78549	0,78560	0,78575	0,78594
46	0,80285	0,80287	0,80294	0,80306	0,80322	0,80343
47	0,82030	0,82033	0,82040	0,82053	0,82070	0,82092
48	0,83776	0,83778	0,83786	0,83799	0,83817	0,83841
49	0,85521	0,85524	0,85532	0,85546	0,85565	0,85590
50	0,87266	0,87269	0,87278	0,87293	0,87313	0,87339
51	0,89012	0,89015	0,89024	0,89039	0,89061	0,89088
52	0,90757	0,90760	0,90770	0,90786	0,90809	0,90838
53	0,92502	0,92505	0,92516	0,92533	0,92557	0,92587
54	0,94248	0,94251	0,94262	0,94280	0,94305	0,94336
55	0,95993	0,95996	0,96008	0,96027	0,96053	0,96086
56	0,97738	0,97742	0,97754	0,97774	0,97801	0,97836
57	0,99484	0,99488	0,99500	0,99521	0,99549	0,99586
58	1,01229	1,01233	1,01246	1,01268	1,01298	1,01336
59	1,02974	1,02979	1,02992	1,03015	1,03046	1,03086
60	1,04719	1,04724	1,04738	1,04762	1,04795	1,04837
61	1,06465	1,06470	1,06485	1,06509	1,06543	1,06587
62	1,08210	1,08215	1,08231	1,08256	1,08292	1,08338
63	1,09955	1,09961	1,09977	1,10003	1,10040	1,10088
64	1,11701	1,11707	1,11723	1,11751	1,11789	1,11839
65	1,13446	1,13452	1,13469	1,13498	1,13538	1,13590
66	1,15192	1,15198	1,15216	1,15245	1,15287	1,15240
67	1,16937	1,16943	1,16962	1,16993	1,17036	1,17091
68	1,18682	1,18689	1,18708	1,18740	1,18785	1,18842
69	1,20428	1,20434	1,20454	1,20487	1,20534	1,20593
70	1,22173	1,22180	1,22200	1,22235	1,22283	1,22345
71	1,23918	1,23925	1,23947	1,23982	1,24032	1,24096
72	1,25664	1,25671	1,25793	1,25730	1,25781	1,25847
73	1,27409	1,27417	1,27439	1,27477	1,27530	1,28593
74	1,29154	1,29162	1,29186	1,29225	1,29280	1,29350
75	1,30900	1,30908	1,30932	1,30972	1,31029	1,31102
76	1,32645	1,32653	1,32678	1,32720	1,32778	1,32853
77	1,34390	1,34399	1,34425	1,34467	1,34528	1,34605
78	1,36136	1,36145	1,36171	1,36215	1,36277	1,36356
79	1,37881	1,37890	1,37917	1,37963	1,38026	1,38108
80	1,39626	1,39636	1,39564	1,39710	1,39776	1,39860
81	1,41372	1,41381	1,41410	1,41458	1,41505	1,41612
82	1,43117	1,43127	1,43156	1,43206	1,43275	1,43364
83	1,44862	1,44872	1,44903	1,44953	1,45024	1,45115
84	1,46608	1,46618	1,46649	1,46701	1,46774	1,46867
85	1,48353	1,48364	1,48396	1,48449	1,48523	1,48619
86	1,50098	1,50109	1,50142	1,50196	1,50273	1,50371
87	1,51844	1,51855	1,51888	1,51944	1,52022	1,52123
88	1,53589	1,53600	1,53635	1,53692	1,53772	1,53875
89	1,55334	1,55346	1,55381	1,55439	1,55522	1,55627
90	1,57080	1,57091	1,57127	1,57187	1,57271	1,57379

φ	F (6°)	F (7°)	F (8°)	F (9°)	F (10°)	F (11°)
0°	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745
2	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491
3	0,05236	0,05236	0,05236	0,05236	0,05236	0,05236
4	0,06981	0,06981	0,06981	0,06981	0,06981	0,06982
5	0,08727	0,08727	0,08727	0,08727	0,08727	0,08727
6	0,10472	0,10472	0,10472	0,10472	0,10473	0,10473
7	0,12218	0,12218	0,12218	0,12218	0,12218	0,12218
8	0,13963	0,13963	0,13964	0,13964	0,13964	0,13964
9	0,15709	0,15709	0,15709	0,15710	0,15710	0,15710
10	0,17454	0,17454	0,17455	0,17455	0,17456	0,17457
11	0,19200	0,19200	0,19201	0,19201	0,19202	0,19202
12	0,20946	0,20946	0,20947	0,20948	0,20949	0,20949
13	0,22691	0,22692	0,22693	0,22694	0,22695	0,22696
14	0,24437	0,24438	0,24439	0,24440	0,24442	0,24443
15	0,26183	0,26184	0,26186	0,26187	0,26189	0,26191
16	0,27929	0,27931	0,27932	0,27934	0,27936	0,27938
17	0,29675	0,29677	0,29679	0,29681	0,29684	0,29686
18	0,31421	0,31423	0,31426	0,31428	0,31431	0,31434
19	0,33168	0,33170	0,33173	0,33176	0,33179	0,33183
20	0,34914	0,34917	0,34920	0,34924	0,34927	0,34932
21	0,36661	0,36664	0,36667	0,36671	0,36676	0,36681
22	0,38407	0,38411	0,38415	0,38420	0,38425	0,38431
23	0,40154	0,40158	0,40163	0,40168	0,40174	0,40181
24	0,41901	0,41905	0,41911	0,41917	0,41924	0,41931
25	0,43618	0,43653	0,43659	0,43666	0,43674	0,43682
26	0,45395	0,45401	0,45408	0,45415	0,45424	0,45453
27	0,47142	0,47149	0,47156	0,47165	0,47174	0,47185
28	0,48890	0,48897	0,48905	0,48915	0,48925	0,48937
29	0,50637	0,50645	0,50654	0,50665	0,50677	0,50690
30	0,52385	0,52394	0,52404	0,52415	0,52428	0,52443
31	0,54132	0,54142	0,54154	0,54166	0,54181	0,54196
32	0,55880	0,55891	0,55903	0,55917	0,55933	0,55950
33	0,57628	0,57640	0,57654	0,57669	0,57686	0,57705
34	0,59377	0,59390	0,59404	0,59421	0,59439	0,59460
35	0,61125	0,61139	0,61155	0,61173	0,61193	0,01216
36	0,62874	0,62889	0,62906	0,62926	0,62948	0,62972
37	0,64622	0,64639	0,64657	0,64679	0,64702	0,64728
38	0,66371	0,66389	0,66409	0,66432	0,66457	0,66486
39	0,68120	0,68139	0,68161	0,68186	0,68213	0,68243
40	0,69869	0,69890	0,69913	0,69940	0,69969	0,70002
41	0,71619	0,71641	0,71666	0,71694	0,71726	0,71761
42	0,73368	0,73392	0,73418	0,73449	0,73483	0,73520
43	0,75118	0,75143	0,75172	0,75204	0,75241	0,75280
44	0,76868	0,76894	0,76925	0,76960	0,76998	0,77041
45	0,78618	0,78646	0,78679	0,78715	0,78756	0,78802

φ	F (6°)	F (7°)	F (8°)	F (9°)	F (10°)	F (11°)
45°	0,78618	0,78646	0,78679	0,78715	0,78756	0,78802
46	0,80368	0,80398	0,80433	0,80472	0,80515	0,80564
47	0,82119	0,82150	0,82187	0,82228	0,82275	0,82326
48	0,83869	0,83903	0,83942	0,83985	0,84035	0,84089
49	0,85620	0,85655	0,85696	0,85743	0,85795	0,85852
50	0,87371	0,87408	0,87452	0,87501	0,87556	0,87616
51	0,89122	0,89161	0,89207	0,89259	0,89317	0,89381
52	0,90873	0,90915	0,90963	0,91017	0,91078	0,91146
53	0,92624	0,92668	0,92719	0,92776	0,92841	0,92911
54	0,94376	0,94422	0,94475	0,94536	0,94603	0,94678
55	0,96127	0,96176	0,96232	0,96295	0,96366	0,96444
56	0,97879	0,97930	0,97989	0,98055	0,98130	0,98212
57	0,99631	0,99684	0,99746	0,99816	0,99894	0,99980
58	1,01383	1,01439	1,01504	1,01576	1,01658	1,01749
59	1,03136	1,03194	1,03261	1,03337	1,03423	1,03517
60	1,04888	1,04949	1,05019	1,05099	1,05188	1,05286
61	1,06641	1,06704	1,06778	1,06861	1,06954	1,07056
62	1,08394	1,08460	1,08536	1,08623	1,08720	1,08827
63	1,10146	1,10215	1,10295	1,10385	1,10486	1,10598
64	1,11899	1,11971	1,12054	1,12148	1,12253	1,12369
65	1,13653	1,13727	1,13813	1,13911	1,14020	1,14141
66	1,15406	1,15483	1,15573	1,15674	1,15787	1,15913
67	1,17159	1,17240	1,17332	1,17438	1,17555	1,17686
68	1,18913	1,18996	1,19092	1,19201	1,19324	1,19459
69	1,20666	1,20753	1,20852	1,20966	1,21092	1,21232
70	1,22420	1,22510	1,22613	1,22730	1,22861	1,23006
71	1,24174	1,24267	1,24373	1,24495	1,24630	1,24780
72	1,25928	1,26024	1,26134	1,26259	1,26400	1,26555
73	1,27682	1,27781	1,27895	1,28025	1,28169	1,28330
74	1,29436	1,29538	1,29656	1,29790	1,29939	1,30105
75	1,31190	1,31296	1,31417	1,31555	1,31710	1,31881
76	1,32945	1,33053	1,33179	1,33321	1,33480	1,33657
77	1,34699	1,34811	1,34940	1,35087	1,35251	1,35433
78	1,36454	1,36569	1,36702	1,36853	1,37022	1,37209
79	1,38208	1,38327	1,38464	1,38619	1,38793	1,38986
80	1,39963	1,40085	1,40226	1,40385	1,40565	1,40763
81	1,41718	1,41843	1,41988	1,42152	1,42336	1,42540
82	1,43472	1,43601	1,43750	1,43919	1,44108	1,44317
83	1,45227	1,45359	1,45512	1,45686	1,45879	1,46095
84	1,46982	1,47117	1,47274	1,47452	1,47651	1,47872
85	1,48737	1,48876	1,49036	1,49219	1,49423	1,49650
86	1,50492	1,50634	1,50799	1,50986	1,51195	1,51428
87	1,52247	1,52393	1,52561	1,52753	1,52968	1,53206
88	1,54001	1,54151	1,54324	1,54520	1,54740	1,54983
89	1,55756	1,55909	1,56086	1,56287	1,56512	1,56761
90	1,57511	1,57668	1,57849	1,58054	1,58284	1,58539

φ	$F(12°)$	$F(13°)$	$F(14°)$	$F(15°)$	$F(16°)$	$F(17°)$
0°	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745
2	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491
3	0,05236	0,05236	0,05236	0,05236	0,05236	0,05236
4	0,06982	0,06982	0,06982	0,06982	0,06982	0,06982
5	0,08727	0,08727	0,08727	0,08727	0,08727	0,08728
6	0,10473	0,10473	0,10473	0,10473	0,10473	0,10474
7	0,12219	0,12219	0,12219	0,12219	0,12220	0,12220
8	0,13965	0,13965	0,13965	0,13966	0,13966	0,13966
9	0,15711	0,15711	0,15712	0,15712	0,15713	0,15713
10	0,17457	0,17458	0,17458	0,17459	0,17460	0,17460
11	0,19204	0,19205	0,19205	0,19206	0,19208	0,19209
12	0,20951	0,20952	0,20953	0,20954	0,20955	0,20957
13	0,22698	0,22699	0,22701	0,22702	0,22704	0,22706
14	0,24445	0,24447	0,24449	0,24451	0,24452	0,24455
15	0,26193	0,26195	0,26197	0,26200	0,26202	0,26205
16	0,27941	0,27943	0,27946	0,27949	0,27952	0,27956
17	0,29689	0,29692	0,29696	0,29699	0,29703	0,29707
18	0,31438	0,31442	0,31446	0,31450	0,31455	0,31459
19	0,33187	0,33191	0,33196	0,33201	0,33207	0,33212
20	0,34937	0,34942	0,34947	0,34953	0,34959	0,34966
21	0,36687	0,36692	0,36699	0,36706	0,36713	0,36721
22	0,38437	0,38444	0,38451	0,38459	0,38467	0,38476
23	0,40188	0,40196	0,40204	0,40213	0,40222	0,40232
24	0,41939	0,41948	0,41957	0,41968	0,41978	0,41990
25	0,43691	0,43701	0,43712	0,43723	0,43735	0,43748
26	0,45443	0,45455	0,45466	0,45479	0,45493	0,45507
27	0,47196	0,47209	0,47222	0,47236	0,47252	0,47268
28	0,48950	0,48964	0,48978	0,48994	0,49011	0,49029
29	0,50704	0,50719	0,50735	0,50753	0,50772	0,50792
30	0,52458	0,52475	0,52493	0,52513	0,52533	0,52555
31	0,54213	0,54232	0,54252	0,54273	0,54296	0,54320
32	0,55969	0,55989	0,56011	0,56035	0,56060	0,56086
33	0,57725	0,57748	0,57772	0,57797	0,57825	0,57854
34	0,59482	0,59507	0,59533	0,59561	0,59591	0,59622
35	0,61240	0,61266	0,61295	0,61325	0,61358	0,61392
36	0,62998	0,63027	0,63058	0,63090	0,63126	0,63163
37	0,64757	0,64788	0,64821	0,64857	0,64895	0,64935
38	0,66516	0,66550	0,66586	0,66624	0,66665	0,66709
39	0,68277	0,68313	0,68331	0,68393	0,68437	0,68484
40	0,70037	0,70076	0,70118	0,70162	0,70210	0,70260
41	0,71799	0,71840	0,71885	0,71933	0,71984	0,72038
42	0,73561	0,73605	0,73653	0,73704	0,73759	0,73817
43	0,75324	0,75371	0,75422	0,75477	0,75535	0,75597
44	0,77087	0,77138	0,77192	0,77251	0,77313	0,77379
45	0,78851	0,78905	0,78963	0,79025	0,79092	0,79162

φ	$F(12°)$	$F(13°)$	$F(14°)$	$F(15°)$	$F(16°)$	$F(17°)$
45°	0,78851	0,78905	0,78963	0,79025	0,79092	0,79162
46	0,80616	0,80673	0,80735	0,80801	0,80872	0,80947
47	0,82382	0,82442	0,82508	0,82578	0,82653	0,82733
48	0,84148	0,84212	0,84282	0,84356	0,84436	0,84520
49	0,85915	0,85983	0,86056	0,86135	0,86219	0,86309
50	0,87682	0,87754	0,87832	0,87915	0,88004	0,88099
51	0,89451	0,89527	0,89609	0,89697	0,89791	0,89890
52	0,91220	0,91300	0,91386	0,91479	0,91578	0,91683
53	0,92989	0,93073	0,93165	0,93262	0,93367	0,93478
54	0,94759	0,94848	0,94944	0,95047	0,95156	0,95273
55	0,96530	0,96623	0,96724	0,96832	0,96947	0,97070
56	0,98302	0,98400	0,98506	0,98618	0,98740	0,98869
57	1,00074	1,00176	1,00287	1,00406	1,00533	1,00668
58	1,01847	1,01954	1,02070	1,02194	1,02327	1,02469
59	1,03620	1,03732	1,03854	1,03984	1,04123	1,04271
60	1,05394	1,05511	1,05638	1,05774	1,05920	1,06075
61	1,07169	1,07291	1,07425	1,07566	1,07718	1,07880
62	1,08943	1,09072	1,09210	1,09358	1,09517	1,09686
63	1,10720	1,10853	1,10997	1,11151	1,11317	1,11493
64	1,12496	1,12635	1,12784	1,12945	1,13117	1,13301
65	1,14273	1,14417	1,14573	1,14740	1,14919	1,15111
66	1,16050	1,16200	1,16302	1,16536	1,16722	1,16921
67	1,17828	1,17984	1,18152	1,18333	1,18526	1,18733
68	1,19607	1,19768	1,19943	1,20103	1,20331	1,20545
69	1,21386	1,21553	1,21734	1,21928	1,22137	1,22359
70	1,23165	1,23338	1,23526	1,23727	1,23943	1,24174
71	1,24945	1,25124	1,25318	1,25527	1,25751	1,25990
72	1,26725	1,26911	1,27112	1,27328	1,27559	1,27806
73	1,28506	1,28698	1,28905	1,29129	1,29368	1,29623
74	1,30287	1,30485	1,30700	1,30930	1,31178	1,31442
75	1,32069	1,32273	1,32494	1,32733	1,32988	1,33261
76	1,33850	1,34061	1,34290	1,34535	1,34799	1,35080
77	1,35632	1,35850	1,36085	1,36339	1,36611	1,36901
78	1,37415	1,37639	1,37881	1,38143	1,38423	1,38722
79	1,39198	1,39428	1,39678	1,39947	1,40236	1,40544
80	1,40981	1,41218	1,41475	1,41752	1,42049	1,42366
81	1,42764	1,43008	1,43272	1,43557	1,43862	1,44189
82	1,44547	1,44798	1,45070	1,45362	1,45676	1,46012
83	1,46331	1,46588	1,46867	1,47168	1,47491	1,47836
84	1,48115	1,48379	1,48665	1,48974	1,49305	1,49660
85	1,49899	1,50170	1,50464	1,50781	1,51120	1,51484
86	1,51683	1,51961	1,52262	1,52587	1,52936	1,53308
87	1,53467	1,53752	1,54061	1,54394	1,54751	1,55133
88	1,55251	1,55543	1,55859	1,56200	1,56567	1,56958
89	1,57035	1,57334	1,57658	1,58007	1,58382	1,58783
90	1,58820	1,59125	1,59457	1,59814	1,60198	1,60608

φ	F(18°)	F(19°)	F(20°)	F(21°)	F(22°)	F(23°)
0°	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745
2	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491
3	0,05236	0,05236	0,05236	0,05236	0,05236	0,05236
4	0,06982	0,06982	0,06982	0,06982	0,06982	0,06982
5	0,08728	0,08728	0,08728	0,08728	0,08728	0,08728
6	0,10474	0,10474	0,10474	0,10474	0,10475	0,10475
7	0,12220	0,12221	0,12221	0,12221	0,12222	0,12222
8	0,13967	0,13967	0,13968	0,13968	0,13969	0,13970
9	0,15714	0,15715	0,15715	0,15716	0,15717	0,15718
10	0,17462	0,17463	0,17464	0,17465	0,17466	0,17467
11	0,19210	0,19211	0,19212	0,19214	0,19215	0,19217
12	0,20958	0,20960	0,20962	0,20963	0,20965	0,20967
13	0,22708	0,22710	0,22712	0,22714	0,22716	0,22719
14	0,24458	0,24460	0,24463	0,24466	0,24468	0,24471
15	0,26208	0,26211	0,26215	0,26218	0,26222	0,26225
16	0,27960	0,27963	0,27967	0,27971	0,27976	0,27980
17	0,29712	0,29716	0,29721	0,29726	0,29731	0,29736
18	0,31465	0,31470	0,31475	0,31481	0,31478	0,31494
19	0,33218	0,33225	0,33231	0,33238	0,33245	0,33253
20	0,34973	0,34980	0,34988	0,34996	0,35004	0,35013
21	0,36729	0,36737	0,36746	0,36755	0,36765	0,36775
22	0,38485	0,38495	0,38505	0,38516	0,38527	0,38538
23	0,40243	0,40254	0,40265	0,40278	0,40291	0,40304
24	0,42002	0,42014	0,42027	0,42041	0,42056	0,42071
25	0,43761	0,43775	0,43791	0,43806	0,43822	0,43839
26	0,45522	0,45538	0,45555	0,45573	0,45591	0,45610
27	0,47285	0,47303	0,47321	0,47341	0,47361	0,47382
28	0,49048	0,49068	0,49089	0,49110	0,49133	0,49157
29	0,50813	0,50835	0,50858	0,50882	0,50907	0,50933
30	0,52579	0,52603	0,52628	0,52655	0,52683	0,52712
31	0,54344	0,54372	0,54401	0,54430	0,54461	0,54493
32	0,56114	0,56144	0,56175	0,56207	0,56240	0,56275
33	0,57884	0,57916	0,57950	0,57985	0,58022	0,58060
34	0,59655	0,59691	0,59727	0,59766	0,59806	0,59848
35	0,61428	0,61466	0,61506	0,61548	0,61592	0,61638
36	0,63202	0,63244	0,63287	0,63333	0,63380	0,63430
37	0,64978	0,65023	0,65070	0,65119	0,65171	0,65224
38	0,66755	0,66803	0,66854	0,66908	0,66963	0,67021
39	0,68533	0,68586	0,68641	0,68698	0,68758	0,68820
40	0,70314	0,70370	0,70429	0,70490	0,70555	0,70622
41	0,72095	0,72155	0,72219	0,72285	0,72354	0,72427
42	0,73878	0,73942	0,74010	0,74082	0,74156	0,74234
43	0,75663	0,75732	0,75805	0,75881	0,75960	0,76043
44	0,77449	0,77523	0,77600	0,77682	0,77767	0,77855
45	0,79237	0,79315	0,79398	0,79485	0,79575	0,79670

φ	F(18°)	F(19°)	F(20°)	F(21°)	F(22°)	F(23°)
45°	0,79237	0,79315	0,79398	0,79485	0,79575	0,79670
46	0,81026	0,81110	0,81198	0,81290	0,81387	0,81487
47	0,82817	0,82906	0,82999	0,83098	0,83200	0,83307
48	0,84610	0,84704	0,84803	0,84907	0,85016	0,85130
49	0,86403	0,86504	0,86609	0,86719	0,86834	0,86955
50	0,88199	0,88305	0,88416	0,88533	0,88655	0,88783
51	0,89996	0,90108	0,90226	0,90349	0,90478	0,90613
52	0,91795	0,91913	0,92037	0,92167	0,92304	0,92447
53	0,93595	0,93720	0,93850	0,93988	0,94132	0,94282
54	0,95397	0,95528	0,95666	0,95811	0,95962	0,96121
55	0,97200	0,97338	0,97483	0,97635	0,97795	0,97962
56	0,99005	0,99150	0,99302	0,99462	0,99630	0,99805
57	1,00812	1,00963	1,01123	1,01291	1,01467	1,01651
58	1,02619	1,02778	1,02946	1,03122	1,03307	1,03500
59	1,04429	1,04595	1,04770	1,04955	1,05148	1,05351
60	1,06239	1,06413	1,06597	1,06790	1,06992	1,07204
61	1,08051	1,08233	1,08425	1,08627	1,08839	1,09060
62	1,09865	1,10055	1,10255	1,10466	1,10687	1,10919
63	1,11680	1,11878	1,12087	1,12807	1,12537	1,12779
64	1,13496	1,13702	1,13920	1,14149	1,14390	1,14642
65	1,15318	1,15528	1,15755	1,15994	1,16245	1,16507
66	1,17132	1,17356	1,17592	1,17840	1,18101	1,18375
67	1,18952	1,19184	1,19430	1,19688	1,19959	1,20244
68	1,20773	1,21014	1,21269	1,21538	1,21820	1,22116
69	1,22595	1,22846	1,23110	1,23389	1,23682	1,23989
70	1,24419	1,24678	1,24953	1,25242	1,25546	1,25865
71	1,26243	1,26512	1,26796	1,27096	1,27411	1,27742
72	1,28069	1,28347	1,28641	1,28952	1,29278	1,29621
73	1,29895	1,30185	1,30488	1,30809	1,31147	1,31502
74	1,31723	1,32020	1,32335	1,32667	1,33017	1,33384
75	1,33551	1,33859	1,34184	1,34527	1,34889	1,35268
76	1,35380	1,35698	1,36034	1,36388	1,36761	1,37154
77	1,37210	1,37538	1,37884	1,38250	1,38636	1,39041
78	1,39040	1,39378	1,39726	1,40113	1,40511	1,40929
79	1,40872	1,41220	1,41588	1,41977	1,42387	1,42818
80	1,42704	1,43062	1,43442	1,43842	1,44264	1,44708
81	1,44536	1,44905	1,45296	1,45708	1,46143	1,46600
82	1,46369	1,46749	1,47150	1,47574	1,48022	1,48492
83	1,48203	1,48593	1,49005	1,49442	1,49901	1,50385
84	1,50037	1,50437	1,50861	1,51309	1,51782	1,52279
85	1,51871	1,52282	1,52717	1,53178	1,53663	1,54174
86	1,55705	1,54127	1,54574	1,55046	1,55544	1,56069
87	1,55440	1,55973	1,56431	1,56915	1,57426	1,57964
88	1,57375	1,57818	1,58288	1,58584	1,59308	1,59860
89	1,59210	1,59664	1,60145	1,60654	1,61191	1,61756
90	1,61045	1,61510	1,62003	1,62523	1,63073	1,63632

φ	F (24°)	F (25°)	F (26°)	F (27°)	F (28°)	F (29°)
0°	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745
2	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491
3	0,05236	0,05236	0,05236	0,05236	0,05237	0,05237
4	0,06982	0,06982	0,06982	0,06982	0,06983	0,06983
5	0,08728	0,08729	0,08729	0,08729	0,08729	0,08729
6	0,10475	0,10475	0,10476	0,10476	0,10476	0,10476
7	0,12222	0,12223	0,12223	0,12224	0,12224	0,12224
8	0,13970	0,13971	0,13971	0,13972	0,13973	0,13973
9	0,15719	0,15719	0,15720	0,15721	0,15722	0,15723
10	0,17468	0,17469	0,17470	0,17471	0,17473	0,17474
11	0,19218	0,19220	0,19221	0,19223	0,19225	0,19226
12	0,20969	0,20971	0,20973	0,20975	0,20978	0,20980
13	0,22721	0,22724	0,22726	0,22729	0,22732	0,22735
14	0,24475	0,24478	0,24481	0,24484	0,24488	0,24491
15	0,26229	0,26233	0,26236	0,26241	0,26245	0,26250
16	0,27985	0,27989	0,27994	0,27999	0,28005	0,28010
17	0,29742	0,29748	0,29753	0,29759	0,29766	0,29772
18	0,31500	0,31507	0,31514	0,31521	0,31529	0,31536
19	0,33260	0,33268	0,33277	0,33285	0,33294	0,33303
20	0,35022	0,35031	0,35041	0,35051	0,35061	0,35071
21	0,36785	0,36796	0,36807	0,36819	0,36830	0,36842
22	0,38550	0,38563	0,38575	0,38589	0,38602	0,38616
23	0,40317	0,40331	0,40346	0,40361	0,40376	0,40392
24	0,42086	0,42102	0,42119	0,42136	0,42153	0,42171
25	0,43857	0,43875	0,43893	0,43913	0,43932	0,43953
26	0,45629	0,45650	0,45671	0,45692	0,45714	0,45737
27	0,47404	0,47427	0,47450	0,47475	0,47499	0,47525
28	0,49181	0,49207	0,49233	0,49260	0,49287	0,49316
29	0,50960	0,50988	0,51017	0,51047	0,51078	0,51110
30	0,52742	0,52773	0,52805	0,52838	0,52872	0,52907
31	0,54526	0,54560	0,54595	0,54632	0,54669	0,54708
32	0,56312	0,56349	0,56388	0,56428	0,56469	0,56512
33	0,58100	0,58141	0,58184	0,58228	0,58273	0,58320
34	0,59891	0,59936	0,59983	0,60031	0,60080	0,60131
35	0,61685	0,61734	0,61785	0,61837	0,61891	0,61946
36	0,63481	0,63534	0,63589	0,63646	0,63705	0,63765
37	0,65280	0,65337	0,65397	0,65459	0,65522	0,65588
38	0,67081	0,67144	0,67208	0,67275	0,67344	0,67414
39	0,68885	0,68953	0,69022	0,69094	0,69169	0,69245
40	0,70692	0,70765	0,70840	0,70917	0,70997	0,71080
41	0,72502	0,72580	0,72660	0,72744	0,72830	0,72919
42	0,74314	0,74398	0,74484	0,74574	0,74666	0,74762
43	0,76129	0,76219	0,76312	0,76408	0,76506	0,76609
44	0,77947	0,78043	0,78142	0,78245	0,78351	0,78460
45	0,79768	0,79871	0,79976	0,80086	0,80199	0,80316

φ	F (24°)	F (25°)	F (26°)	F (27°)	F (28°)	F (29°)
45°	0,79768	0,79871	0,79976	0,80086	0,80199	0,80316
46	0,81592	0,81701	0,81814	0,81931	0,82052	0,82176
47	0,83419	0,83535	0,83655	0,83779	0,83908	0,84041
48	0,85248	0,85371	0,85499	0,85631	0,85768	0,85910
49	0,87080	0,87211	0,87347	0,87487	0,87633	0,87783
50	0,88916	0,89054	0,89198	0,89347	0,89501	0,89660
51	0,90754	0,90901	0,91053	0,91210	0,91374	0,91542
52	0,92595	0,92751	0,92911	0,93078	0,93250	0,93429
53	0,94439	0,94603	0,94772	0,94948	0,95131	0,95319
54	0,96286	0,96458	0,96637	0,96823	0,97016	0,97215
55	0,98136	0,98317	0,98506	0,98701	0,98904	0,99114
56	0,99988	1,00179	1,00377	1,00583	1,00797	1,01018
57	1,01844	1,02044	1,02253	1,02469	1,02694	1,02926
58	1,03702	1,03912	1,04131	1,04358	1,04594	1,04839
59	1,05562	1,05785	1,06013	1,06251	1,06499	1,06756
60	1,07426	1,07657	1,07898	1,08148	1,08407	1,08676
61	1,09292	1,09534	1,09786	1,10048	1,10320	1,10602
62	1,11161	1,11114	1,11677	1,11951	1,12236	1,12531
63	1,13032	1,13296	1,13572	1,13858	1,14155	1,14464
64	1,14906	1,15182	1,15469	1,15768	1,16079	1,16401
65	1,16783	1,17070	1,17369	1,17681	1,18005	1,18342
66	1,18661	1,18961	1,19273	1,19598	1,19936	1,20287
67	1,20542	1,20854	1,21179	1,21517	1,21870	1,22235
68	1,22426	1,22750	1,23088	1,23440	1,23807	1,24188
69	1,24311	1,24648	1,24999	1,25366	1,25747	1,26143
70	1,26199	1,26548	1,26913	1,27294	1,27690	1,28102
71	1,28089	1,28451	1,28830	1,29225	1,29636	1,30064
72	1,29980	1,30356	1,30749	1,31159	1,31585	1,32030
73	1,31874	1,32263	1,32670	1,33095	1,33537	1,33998
74	1,33769	1,34172	1,34594	1,35034	1,35492	1,35969
75	1,35667	1,36083	1,36519	1,36974	1,37449	1,37943
76	1,37565	1,37996	1,38447	1,38918	1,39408	1,39920
77	1,39466	1,39911	1,40376	1,40863	1,41370	1,41899
78	1,41367	1,41827	1,42307	1,42810	1,43334	1,43880
79	1,43270	1,43744	1,44240	1,44758	1,45299	1,45864
80	1,45174	1,45663	1,46174	1,46709	1,47267	1,47849
81	1,47080	1,47583	1,48110	1,48661	1,49236	1,49836
82	1,48986	1,49504	1,50047	1,50614	1,51207	1,51825
83	1,50893	1,51426	1,51985	1,52569	1,53179	1,53815
84	1,52802	1,53350	1,53924	1,54524	1,55152	1,55807
85	1,54710	1,55273	1,55863	1,56841	1,57126	1,57800
86	1,56620	1,57198	1,57804	1,58438	1,59101	1,59793
87	1,58529	1,59123	1,59745	1,60396	1,61077	1,61788
88	1,60440	1,61048	1,61686	1,62354	1,63053	1,63783
89	1,62350	1,62974	1,63628	1,64313	1,65029	1,65778
90	1,64260	1,64900	1,65370	1,66272	1,67006	1,67773

φ	F (30°)	F (31°)	F (32°)	F (33°)	F (34°)	F (35°)
0°	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745
2	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491
3	0,05237	0,05237	0,05237	0,05237	0,05237	0,05237
4	0,06983	0,06983	0,06983	0,06983	0,06983	0,06983
5	0,08729	0,08730	0,08730	0,08730	0,08730	0,08730
6	0,10477	0,10477	0,10477	0,10478	0,10478	0,10478
7	0,12225	0,12225	0,12226	0,12226	0,12227	0,12227
8	0,13974	0,13975	0,13975	0,13976	0,13977	0,13978
9	0,15724	0,15725	0,15726	0,15727	0,15728	0,15729
10	0,17475	0,17477	0,17478	0,17480	0,17481	0,17482
11	0,19228	0,19230	0,19232	0,19234	0,19235	0,19237
12	0,20982	0,20984	0,20987	0,20989	0,20992	0,20994
13	0,22738	0,22741	0,22744	0,22747	0,22750	0,22753
14	0,24495	0,24499	0,24503	0,24506	0,24510	0,24514
15	0,26254	0,26259	0,26263	0,26268	0,26273	0,26278
16	0,28015	0,28021	0,28027	0,28032	0,28038	0,28044
17	0,29779	0,29785	0,29792	0,29799	0,29806	0,29813
18	0,31544	0,31552	0,31560	0,31568	0,31577	0,31585
19	0,33312	0,33321	0,33331	0,33340	0,33350	0,33360
20	0,35082	0,35093	0,35104	0,35115	0,35127	0,35138
21	0,36854	0,36867	0,36880	0,36893	0,36906	0,36920
22	0,38630	0,38644	0,38659	0,38674	0,38690	0,38705
23	0,40408	0,40425	0,40442	0,40459	0,40476	0,40494
24	0,42189	0,42208	0,42227	0,42247	0,42267	0,42287
25	0,43973	0,43995	0,44016	0,44038	0,44061	0,44084
26	0,45761	0,45784	0,45809	0,45834	0,45859	0,45885
27	0,47551	0,47578	0,47605	0,47633	0,47661	0,47690
28	0,49345	0,49375	0,49405	0,49436	0,49468	0,49500
29	0,51142	0,51175	0,51209	0,51244	0,51279	0,51315
30	0,52943	0,52980	0,53017	0,53056	0,53095	0,53134
31	0,54747	0,54788	0,54829	0,54872	0,54915	0,54959
32	0,56555	0,56600	0,56646	0,56692	0,56740	0,56788
33	0,58367	0,58416	0,58466	0,58517	0,58570	0,58623
34	0,60183	0,60237	0,60291	0,60347	0,60405	0,60463
35	0,62003	0,62061	0,62121	0,62182	0,62245	0,62308
36	0,63827	0,63890	0,63955	0,64022	0,64090	0,64159
37	0,65655	0,65724	0,65795	0,65867	0,65941	0,66016
38	0,67487	0,67562	0,67638	0,67717	0,67797	0,67879
39	0,69324	0,69405	0,69487	0,69572	0,69659	0,69747
40	0,71165	0,71252	0,71341	0,71433	0,71526	0,71622
41	0,73010	0,73104	0,73200	0,73299	0,73399	0,73502
42	0,74860	0,74961	0,75064	0,75169	0,75278	0,75389
43	0,76714	0,76822	0,76933	0,77047	0,77163	0,77282
44	0,78573	0,78689	0,78808	0,78930	0,79054	0,79182
45	0,80437	0,80560	0,80688	0,80818	0,80952	0,81088

φ	F (30°)	F (31°)	F (32°)	F (33°)	F (34°)	F (35°)
45°	0,80437	0,80560	0,80688	0,80818	0,80952	0,81088
46	0,82305	0,82437	0,82573	0,82712	0,82855	0,83001
47	0,84178	0,84319	0,84463	0,84612	0,84764	0,84920
48	0,86055	0,86205	0,86359	0,86518	0,86680	0,86846
49	0,87937	0,88097	0,88261	0,88429	0,88602	0,88779
50	0,89825	0,89994	0,90168	0,90347	0,90530	0,90719
51	0,91716	0,91896	0,92080	0,92270	0,92465	0,92665
52	0,93613	0,93803	0,93998	0,94200	0,94406	0,94618
53	0,95514	0,95715	0,95922	0,96135	0,96354	0,96578
54	0,97420	0,97632	0,97851	0,98076	0,98308	0,98545
55	0,99331	0,99555	0,99786	1,00023	1,00268	1,00519
56	1,01247	1,01483	1,01726	1,01976	1,02234	1,02499
57	1,03167	1,03415	1,03671	1,03936	1,04207	1,04487
58	1,05092	1,05353	1,05622	1,05900	1,06187	1,06481
59	1,07021	1,07296	1,07579	1,07871	1,08172	1,08482
60	1,08955	1,09243	1,09541	1,09848	1,10164	1,10490
61	1,10894	1,11196	1,11508	1,11830	1,12162	1,12504
62	1,12837	1,13153	1,13480	1,13818	1,14166	1,14525
63	1,14784	1,15115	1,15453	1,15811	1,16176	1,16552
64	1,16735	1,17082	1,17440	1,17810	1,18192	1,18586
65	1,18691	1,19053	1,19427	1,19814	1,20213	1,20626
66	1,20651	1,21029	1,21419	1,21823	1,22241	1,22672
67	1,22615	1,23009	1,23416	1,23838	1,24274	1,24724
68	1,24583	1,24993	1,25418	1,25858	1,26312	1,26782
69	1,26555	1,26982	1,27404	1,27882	1,28356	1,28846
70	1,28530	1,28974	1,29435	1,29911	1,30405	1,30915
71	1,30509	1,30971	1,31449	1,31945	1,32459	1,32990
72	1,32491	1,32971	1,33468	1,33984	1,34517	1,35070
73	1,34477	1,34974	1,35491	1,36026	1,36581	1,37155
74	1,36466	1,36982	1,37517	1,38073	1,38648	1,39244
75	1,38457	1,38992	1,39547	1,40123	1,40720	1,41339
76	1,40452	1,41005	1,41580	1,42177	1,42796	1,43437
77	1,42449	1,43022	1,43617	1,44235	1,44876	1,45540
78	1,44449	1,45041	1,45656	1,46295	1,46959	1,47647
79	1,46451	1,47063	1,47699	1,48359	1,49045	1,49757
80	1,48455	1,49087	1,49743	1,50426	1,51135	1,51870
81	1,50462	1,51118	1,51791	1,52495	1,53227	1,53987
82	1,52470	1,53141	1,53840	1,54567	1,55322	1,56106
83	1,54479	1,55171	1,55891	1,56640	1,57419	1,58228
84	1,56490	1,57203	1,57944	1,58716	1,59518	1,60352
85	1,58503	1,59235	1,59998	1,60793	1,61619	1,62478
86	1,60516	1,61269	1,62054	1,62871	1,63721	1,64605
87	1,62530	1,63304	1,64111	1,64950	1,65825	1,66733
88	1,64545	1,65339	1,66168	1,67031	1,67929	1,68864
89	1,66560	1,67375	1,68226	1,69111	1,70034	1,70994
90	1,68575	1,69411	1,70284	1,71192	1,72139	1,73125

φ	F (36°)	F (37°)	F (38°)	F (39°)	F (40°)	F (41°)
0°	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745
2	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491
3	0,05237	0,05237	0,05237	0,05237	0,05237	0,05237
4	0,06983	0,06983	0,06983	0,06984	0,06984	0,06984
5	0,08730	0,08731	0,08731	0,08731	0,08731	0,08731
6	0,10479	0,10479	0,10479	0,10480	0,10480	0,10480
7	0,12228	0,12228	0,12229	0,12229	0,12230	0,12230
8	0,13978	0,13979	0,13980	0,13980	0,13981	0,13982
9	0,15730	0,15731	0,15732	0,15734	0,15735	0,15736
10	0,17484	0,17485	0,17487	0,17488	0,17490	0,17491
11	0,19239	0,19241	0,19243	0,19245	0,19247	0,19249
12	0,20997	0,20993	0,21002	0,21005	0,21007	0,21010
13	0,22756	0,22760	0,22763	0,22766	0,22770	0,22773
14	0,24518	0,24522	0,24527	0,24531	0,24535	0,24539
15	0,26283	0,26288	0,26298	0,26298	0,26303	0,26309
16	0,28050	0,28056	0,28063	0,28069	0,28075	0,28081
17	0,29820	0,29828	0,29835	0,29843	0,298 0	0,29858
18	0,31594	0,31602	0,31611	0,31620	0,31629	0,31638
19	0,33370	0,33380	0,33391	0,33401	0,33412	0,33423
20	0,85150	0,35162	0,35174	0,35186	0,35198	0,35211
21	0,36934	0,36948	0,36952	0,36976	0,3 990	0,37005
22	0,38721	0,38737	0,38753	0,38770	0,38786	0,38803
23	0,40512	0,40530	0,40549	0,40568	0,40587	0,40606
24	0,42307	0,42328	0,42349	0,42371	0,42392	0,42414
25	0,44107	0,44131	0,44155	0,44179	0,44203	0,44228
26	0,45911	0,45938	0,45965	0,45992	0,460 0	0,46047
27	0,47720	0,47750	0,47780	0,47810	0,47841	0,47873
28	0,49533	0,49567	0,49600	0,49635	0,496 9	0,49704
29	0,51352	0,51389	0,51426	0,51464	0,51503	0,51542
30	0,53175	0,53216	0,53258	0,53300	0,53343	0,53386
31	0,55004	0,55049	0,55095	0,55142	0,55189	0,55237
32	0,56837	0,56888	0,56938	0,56989	0,57042	0,57095
33	0,58877	0,58732	0,58783	0,58844	0,58902	0,58960
34	0,60522	0,60582	0,60644	0,60706	0,60769	0,60832
35	0,62873	0,62439	0,62506	0,62574	0,62643	0,62712
36	0,64230	0,64302	0,64375	0,64449	0,64524	0,64600
37	0,66093	0,66171	0,66250	0,66331	0,66413	0,66496
38	0,67962	0,68047	0,68133	0,68220	0,68309	0,68399
39	0,69837	0,69929	0,70023	0,70117	0,70214	0,70311
40	0,71719	0,71818	0,71919	0,72022	0,72126	0,72232
41	0,73607	0,73714	0,73824	0,73934	0,74047	0,74161
42	0,75502	0,75618	0,75735	0,75855	0,75976	0,76093
43	0,77404	0,77528	0,77654	0,77783	0,77914	0,78046
44	0,79313	0,79446	0,79581	0,79719	0,79860	0,80002
45	0,81228	0,81371	0,81516	0,81664	0,81815	0,81968

φ	F (36°)	F (37°)	F (38°)	F (39°)	F (40°)	F (41°)
45°	0,81228	0,81371	0,81516	0,81664	0,81815	0,81968
46	0,83150	0,83303	0,83459	0,83617	0,83779	0,83943
47	0,85080	0,85243	0,85409	0,85579	0,85752	0,85927
48	0,87017	0,87191	0,87368	0,87549	0,87734	0,87921
49	0,88960	0,89146	0,89335	0,89528	0,89725	0,89925
50	0,90911	0,91109	0,91310	0,91516	0,91725	0,91939
51	0,92870	0,93079	0,93294	0,93512	0,93735	0,93963
52	0,94835	0,95058	0,95285	0,95518	0,95755	0,95997
53	0,96808	0,97044	0,97286	0,97532	0,97784	0,98041
54	0,98789	0,99038	0,99294	0,99555	0,99822	1,00095
55	1,00776	1,01041	1,01311	1,01588	1,01871	1,02159
56	1,02771	1,03051	1,03336	1,03629	1,03928	1,04234
57	1,04774	1,05068	1,05370	1,05679	1,05996	1,06319
58	1,06783	1,07093	1,07412	1,07739	1,08073	1,08415
59	1,08800	1,09127	1,09463	1,09807	1,10159	1,10520
60	1,10824	1,11169	1,11522	1,11884	1,12256	1,12636
61	1,12856	1,13218	1,13589	1,13970	1,14361	1,14476
62	1,14894	1,15274	1,15664	1,16065	1,16476	1,16898
63	1,16939	1,17338	1,17748	1,18169	1,18601	1,19044
64	1,18992	1,19409	1,19839	1,20281	1,20735	1,21200
65	1,21051	1,21488	1,21939	1,22402	1,22877	1,23366
66	1,23116	1,23574	1,24046	1,24531	1,25029	1,25542
67	1,25189	1,25667	1,26160	1,26668	1,27190	1,27727
68	1,27267	1,27767	1,28282	1,28813	1,29359	1,29921
69	1,29351	1,29873	1,30411	1,30966	1,31537	1,32124
70	1,31442	1,31986	1,32547	1,33127	1,33723	1,34337
71	1,33539	1,34106	1,34691	1,35295	1,35917	1,36558
72	1,35641	1,36231	1,36841	1,37470	1,38118	1,38787
73	1,37749	1,38363	1,38997	1,39652	1,40328	1,41024
74	1,39861	1,40500	1,41159	1,41840	1,42544	1,43270
75	1,41929	1,42642	1,43327	1,44035	1,44767	1,45522
76	1,44102	1,44789	1,45501	1,46236	1,46997	1,47782
77	1,46229	1,46942	1,47680	1,48443	1,49232	1,50048
78	1,48360	1,49099	1,49864	1,50655	1,51474	1,52321
79	1,50495	1,51260	1,52052	1,52872	1,53721	1,54600
80	1,52634	1,53425	1,54245	1,55094	1,55973	1,56884
81	1,54776	1,55593	1,56441	1,57320	1,58230	1,59173
82	1,56921	1,57765	1,58642	1,59550	1,60401	1,61466
83	1,59068	1,59940	1,60845	1,61783	1,62756	1,63764
84	1,61218	1,62118	1,63051	1,64020	1,65024	1,66066
85	1,63370	1,64297	1,65260	1,66259	1,67295	1,68370
86	1,65524	1,66479	1,67471	1,68500	1,69569	1,70677
87	1,67679	1,68662	1,69683	1,70743	1,71844	1,72987
88	1,69836	1,70846	1,71896	1,72988	1,74121	1,75298
89	1,71993	1,73031	1,74111	1,75233	1,76399	1,77610
90	1,74150	1,75217	1,76326	1,77479	1,78677	1,79922

φ	F(42°)	F(43°)	F(44°)	F(45°)	F(46°)	F(47°)
0°	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745
2	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491
3	0,05237	0,05237	0,05237	0,05237	0,05237	0,05237
4	0,06984	0,06984	0,06984	0,06984	0,06984	0,06984
5	0,08732	0,08732	0,08732	0,08732	0,08732	0,08733
6	0,10481	0,10481	0,10481	0,10482	0,10482	0,10482
7	0,12231	0,12231	0,12232	0,12233	0,12233	0,12234
8	0,13983	0,13984	0,13985	0,13985	0,13986	0,13987
9	0,15737	0,15738	0,15739	0,15740	0,15741	0,15743
10	0,17493	0,17495	0,17496	0,17498	0,17499	0,17501
11	0,19251	0,19253	0,19256	0,19258	0,19260	0,19262
12	0,21013	0,21015	0,21018	0,21021	0,21023	0,21026
13	0,22776	0,22780	0,22783	0,22787	0,22790	0,22794
14	0,24543	0,24548	0,24552	0,24556	0,24561	0,24565
15	0,26314	0,26319	0,26324	0,26330	0,26335	0,26340
16	0,28088	0,28094	0,28101	0,28107	0,28114	0,28120
17	0,29866	0,29873	0,29881	0,29889	0,29896	0,29904
18	0,31647	0,31656	0,81666	0,31675	0,31684	0,31693
19	0,33433	0,33444	0,33455	0,33466	0,33477	0,33488
20	0,35224	0,35237	0,35249	0,35262	0,35275	0,35288
21	0,37019	0,37034	0,37049	0,37063	0,37078	0,37093
22	0,38820	0,38836	0,38853	0,38871	0,38888	0,38905
23	0,40625	0,40644	0,40664	0,40683	0,40703	0,40723
24	0,42436	0,42458	0,42480	0,42503	0,42525	0,42547
25	0,44253	0,44278	0,44303	0,44328	0,44354	0,44379
26	0,46075	0,46104	0,46132	0,46161	0,46189	0,46218
27	0,47904	0,47936	0,47968	0,48000	0,48032	0,48064
28	0,49739	0,49775	0,49810	0,49846	0,49882	0,49919
29	0,51581	0,51621	0,51660	0,51700	0,51741	0,51781
30	0,53430	0,53474	0,53518	0,53562	0,53607	0,53652
31	0,55285	0,55334	0,55383	0,55432	0,55482	0,55531
32	0,57148	0,57202	0,57256	0,57310	0,57365	0,57420
33	0,59018	0,59078	0,59137	0,59197	0,59258	0,59318
34	0,60897	0,60962	0,61027	0,61093	0,61159	0,61226
35	0,62783	0,62854	0,62925	0,62998	0,63070	0,63143
36	0,64677	0,64754	0,64853	0,64912	0,64991	0,65071
37	0,66579	0,66664	0,66749	0,66836	0,66922	0,67010
38	0,68490	0,68583	0,68675	0,68769	0,68864	0,68959
39	0,70410	0,70510	0,70611	0,70713	0,70816	0,70919
40	0,72339	0,72447	0,72557	0,72667	0,72779	0,72891
41	0,74277	0,74394	0,74512	0,74632	0,74753	0,74874
42	0,76224	0,76351	0,76478	0,76608	0,76738	0,76869
43	0,78181	0,78317	0,78455	0,78594	0,78735	0,78877
44	0,80147	0,80294	0,80442	0,80592	0,80744	0,80897
45	0,82123	0,82281	0,82440	0,82602	0,82765	0,82930

φ	F(42°)	F(43°)	F(44°)	F(45°)	F(46°)	F(47°)
45°	0,82123	0,82281	0,82440	0,82602	0,82765	0,82930
46	0,84109	0,84279	0,84450	0,84623	0,84798	0,84975
47	0,86106	0,86287	0,86470	0,86656	0,86844	0,87034
48	0,88112	0,88306	0,88502	0,88701	0,88903	0,89107
49	0,90129	0,90336	0,90546	0,90759	0,90975	0,91193
50	0,92156	0,92377	0,92602	0,92829	0,93060	0,93293
51	0,94194	0,94430	0,94669	0,94912	0,95159	0,95407
52	0,96243	0,96494	0,96748	0,97007	0,97270	0,97536
53	0,98303	0,98569	0,98840	0,99115	0,99395	0,99678
54	1,00373	1,00656	1,00944	1,01237	1,01534	1,01836
55	1,02454	1,02754	1,03060	1,03371	1,03687	1,04008
56	1,04546	1,04865	1,05189	1,05519	1,05855	1,06196
57	1,06649	1,06986	1,07330	1,07680	1,08036	1,08398
58	1,08764	1,09120	1,09484	1,09854	1,10232	1,10615
59	1,10889	1,11265	1,11650	1,12042	1,12441	1,12848
60	1,13025	1,13422	1,13329	1,14243	1,14665	1,15096
61	1,15172	1,15591	1,16020	1,16457	1,16904	1,17359
62	1,17330	1,17772	1,18223	1,18685	1,19156	1,19637
63	1,19498	1,09963	1,20439	1,20296	1,21423	1,21930
64	1,21678	1,22167	1,22668	1,23180	1,23704	1,24239
65	1,23867	1,24381	1,24908	1,25447	1,25998	1,26562
66	1,26068	1,26607	1,27160	1,27727	1,28307	1,28901
67	1,28278	1,28844	1,29425	1,30020	1,30629	1,31254
68	1,30408	1,31092	1,31700	1,32325	1,32965	1,33621
69	1,32729	1,33350	1,33988	1,34642	1,35314	1,36003
70	1,34969	1,35618	1,36286	1,36972	1,37676	1,38399
71	1,37218	1,37897	1,38595	1,39313	1,40051	1,40808
72	1,39476	1,40185	1,40915	1,41666	1,42438	1,43331
73	1,41743	1,42483	1,43245	1,44030	1,44837	1,45666
74	1,44[illegible]	1,44790	1,45585	1,46404	1,47247	1,48115
75	1,46[illegible]	1,47105	1,47934	1,48788	1,49668	1,50575
76	1,48598	1,49429	1,50293	1,51183	1,52100	1,53046
77	1,50891	1,51761	1,52659	1,53586	1,54543	1,55529
78	1,53196	1,54100	1,55034	1,55999	1,56994	1,58022
79	1,55508	1,56447	1,57417	1,58419	1,59455	1,60524
80	1,57825	1,58799	1,58906	1,60848	1,61924	1,63036
81	1,60148	1,61158	1,62203	1,63283	1,64400	1,65556
82	1,62476	1,63522	1,646[illegible]	1,65725	1,66884	1,68083
83	1,64809	1,65891	1,677[illegible]2	1,68172	1,69374	1,70618
84	1,67145	1,68264	1,69424	1,70625	1,71869	1,73158
85	1,69485	1,70641	1,71839	1,73081	1,74369	1,75704
86	1,71828	1,73021	1,74259	1,75542	1,76873	1,78254
87	1,74173	1,75404	1,76681	1,78006	1,79381	1,80807
88	1,76520	1,77788	1,79105	1,80472	1,81891	1,83364
89	1,78868	1,80174	1,81530	1,82939	1,84402	1,85922
90	1,81216	1,82560	1,83957	1,85407	1,86915	1,88481

φ	F (48°)	F (49°)	F (50°)	F (51°)	F (52°)	F (53°)
0°	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745
2	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491
3	0,05237	0,05237	0,05237	0,05237	0,05237	0,05238
4	0,06984	0,06985	0,06985	0,06985	0,06985	0,06985
5	0,08733	0,08733	0,08733	0,08733	0,08734	0,08734
6	0,10483	0,10483	0,10483	0,10484	0,10484	0,10484
7	0,12234	0,12235	0,12235	0,12236	0,12236	0,12237
8	0,13988	0,13989	0,13989	0,13990	0,13991	0,13992
9	0,15744	0,15745	0,15746	0,15747	0,15748	0,15749
10	0,17502	0,17504	0,17505	0,17507	0,17508	0,17510
11	0,19264	0,19266	0,19268	0,19270	0,19272	0,19274
12	0,21029	0,21031	0,21034	0,21037	0,21039	0,21042
13	0,22797	0,22800	0,22804	0,22807	0,22811	0,22814
14	0,24569	0,24574	0,24578	0,24582	0,24586	0,24590
15	0,26346	0,26351	0,26356	0,26361	0,26367	0,26372
16	0,28126	0,28133	0,28139	0,28146	0,28152	0,28158
17	0,29912	0,29920	0,29927	0,29935	0,29943	0,29950
18	0,31703	0,31712	0,31721	0,31730	0,31739	0,31748
19	0,33499	0,33510	0,33520	0,33531	0,33542	0,33553
20	0,35300	0,35313	0,35326	0,35338	0,35351	0,35363
21	0,37108	0,37123	0,37157	0,37152	0,37169	0,37181
22	0,38921	0,38939	0,38956	0,38973	0,38990	0,39007
23	0,40743	0,40762	0,40782	0,40801	0,40820	0,40840
24	0,42570	0,42593	0,42614	0,42637	0,42659	0,42681
25	0,44404	0,41430	0,44455	0,44480	0,44506	0,44531
26	0,46247	0,46275	0,46304	0,46333	0,46361	0,46389
27	0,48097	0,48129	0,48161	0,48193	0,48225	0,48257
28	0,49955	0,49991	0,50027	0,50063	0,50099	0,50135
29	0,51821	0,51822	0,51902	0,51943	0,51983	0,52023
30	0,53697	0,53742	0,53787	0,53832	0,53876	0,53921
31	0,55581	0,55631	0,55681	0,55731	0,55781	0,55830
32	0,57475	0,57530	0,57586	0,57641	0,57656	0,57751
33	0,59379	0,59440	0,59501	0,59562	0,59622	0,59683
34	0,61293	0,61360	0,61427	0,61494	0,61561	0,61628
35	0,63217	0,63290	0,63364	0,63438	0,63511	0,63585
36	0,65152	0,65232	0,65313	0,65393	0,65474	0,65555
37	0,67097	0,67185	0,67273	0,67362	0,67450	0,67538
38	0,69054	0,69150	0,69246	0,69343	0,69439	0,69535
39	0,71023	0,71127	0,71232	0,71337	0,71442	0,71547
40	0,73004	0,73117	0,73231	0,73345	0,73459	0,73573
41	0,74998	0,75119	0,75243	0,75365	0,75491	0,75614
42	0,77002	0,77135	0,77269	0,77403	0,77537	0,77671
43	0,79020	0,79164	0,79308	0,79453	0,79599	0,79744
44	0,81051	0,81206	0,81362	0,81519	0,81676	0,81834
45	0,83096	0,83263	0,83431	0,83600	0,83770	0,83940

φ	F (48°)	F (49°)	F (50°)	F (51°)	F (52°)	F (53°)
45°	0,83096	0,83263	0,83431	0,83600	0,83770	0,83940
46	0,85154	0,85334	0,85515	0,85697	0,85880	0,86064
47	0,87226	0,87420	0,87614	0,87810	0,88007	0,88205
48	0,89313	0,89520	0,89729	0,89940	0,90152	0,90364
49	0,91418	0,91636	0,91860	0,92086	0,92314	0,92542
50	0,93529	0,93767	0,94008	0,94250	0,94494	0,94739
51	0,95659	0,95914	0,96171	0,96431	0,96692	0,96955
52	0,97805	0,98077	0,98352	0,98630	0,98909	0,99191
53	0,99956	1,00256	1,00550	1,00846	1,01146	1,01447
54	1,02142	1,02452	1,02765	1,03082	1,03411	1,03723
55	1,04334	1,04664	1,04998	1,05336	1,05676	1,06020
56	1,06542	1,06893	1,07248	1,07608	1,07972	1,08339
57	1,08766	1,09139	1,09517	1,09900	1,10287	1,10678
58	1,11005	1,11402	1,11803	1,12211	1,12623	1,13040
59	1,13261	1,13682	1,14108	1,14541	1,14979	1,15423
60	1,15534	1,15979	1,16432	1,16891	1,17357	1,17828
61	1,17822	1,18294	1,18773	1,19261	1,19755	1,20256
62	1,20127	1,20626	1,21134	1,21650	1,22174	1,22706
63	1,22448	1,22975	1,23513	1,24059	1,24615	1,25179
64	1,24785	1,25342	1,25910	1,26488	1,27077	1,27675
65	1,27138	1,27726	1,28326	1,28937	1,29559	1,30193
66	1,29507	1,30127	1,30760	1,31405	1,32063	1,32784
67	1,31893	1,32545	1,33212	1,33894	1,34588	1,35297
68	1,34293	1,34980	1,35683	1,36401	1,37134	1,37883
69	1,36709	1,37431	1,38171	1,38928	1,39701	1,40491
70	1,39140	1,39899	1,40677	1,41473	1,42288	1,43212
71	1,41585	1,42383	1,43200	1,44037	1,44895	1,45772
72	1,44045	1,44882	1,45739	1,46619	1,47521	1,48445
73	1,46519	1,47396	1,48296	1,49219	1,50167	1,51139
74	1,49007	1,49924	1,50867	1,51836	1,52831	1,53852
75	1,51507	1,52467	1,53455	1,54470	1,55513	1,56586
76	1,54020	1,55024	1,56056	1,57119	1,58213	1,59338
77	1,56545	1,57593	1,58672	1,59784	1,60929	1,62108
78	1,59081	1,60174	1,61302	1,62468	1,63661	1,64895
79	1,61628	1,62767	1,63943	1,65156	1,66408	1,67699
80	1,64184	1,65371	1,66597	1,67862	1,69169	1,70518
81	1,66750	1,67985	1,69261	1,70579	1,71942	1,73351
82	1,69324	1,70607	1,71935	1,73308	1,74728	1,76196
83	1,71905	1,73238	1,74618	1,76046	1,77524	1,79054
84	1,74493	1,75876	1,77309	1,78792	1,80329	1,81922
85	1,77087	1,78520	1,80006	1,81546	1,83143	1,84799
86	1,79685	1,81170	1,82710	1,84307	1,85964	1,87683
87	1,82288	1,83824	1,85418	1,87072	1,88790	1,90574
88	1,84803	1,86481	1,88129	1,89841	1,91620	1,93469
89	1,87500	1,89140	1,90843	1,92613	1,94454	1,96367
90	1,90108	1,91800	1,93558	1,95386	1,97288	1,99267

φ	F (54°)	F (55°)	F (56°)	F (57°)	F (58°)	F (59°)
0°	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745
2	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491
3	0,05238	0,05238	0,05238	0,05238	0,05238	0,05238
4	0,06985	0,06985	0,06985	0,06985	0,06985	0,06985
5	0,08734	0,08734	0,08734	0,08734	0,08735	0,08735
6	0,10485	0,10485	0,10485	0,10485	0,10486	0,10486
7	0,12237	0,12238	0,12238	0,12239	0,12239	0,12240
8	0,13992	0,13993	0,13994	0,13995	0,13995	0,13996
9	0,15750	0,15751	0,15752	0,15754	0,15755	0,15756
10	0,17511	0,17513	0,17514	0,17516	0,17517	0,17519
11	0,19276	0,19278	0,19280	0,19282	0,19284	0,19286
12	0,21045	0,21047	0,21050	0,21052	0,21055	0,21057
13	0,22817	0,22821	0,22824	0,22827	0,22830	0,22833
14	0,24595	0,24599	0,24603	0,24607	0,24611	0,24615
15	0,26377	0,26382	0,26387	0,26392	0,26397	0,26402
16	0,28165	0,28171	0,28177	0,28183	0,28189	0,28195
17	0,29958	0,29965	0,29973	0,29980	0,29987	0,29994
18	0,31757	0,31766	0,31775	0,31784	0,31792	0,31801
19	0,33563	0,33574	0,33584	0,33594	0,33604	0,33614
20	0,35376	0,35388	0,35400	0,35412	0,35424	0,35436
21	0,37196	0,37210	0,37224	0,37238	0,37252	0,37265
22	0,39023	0,39040	0,39056	0,39072	0,39088	0,39104
23	0,40859	0,40878	0,40897	0,40915	0,40933	0,40951
24	0,42703	0,42724	0,42746	0,42767	0,42788	0,42809
25	0,44555	0,44580	0,44605	0,44629	0,44652	0,44676
26	0,46417	0,46445	0,46473	0,46500	0,46527	0,46554
27	0,48289	0,48320	0,48352	0,48382	0,48413	0,48443
28	0,50170	0,50206	0,50241	0,50275	0,50310	0,50343
29	0,52062	0,52102	0,52141	0,52180	0,52218	0,52256
30	0,53965	0,54009	0,54053	0,54096	0,54139	0,54181
31	0,55880	0,55928	0,55977	0,56025	0,56073	0,56120
32	0,57805	0,57860	0,57913	0,57967	0,58020	0,58072
33	0,59743	0,59803	0,59863	0,59922	0,59980	0,60038
34	0,61694	0,61760	0,61826	0,61891	0,61955	0,62019
35	0,63658	0,63730	0,63803	0,63874	0,63945	0,64016
36	0,65635	0,65715	0,65794	0,65873	0,65951	0,66028
37	0,67626	0,67713	0,67800	0,67887	0,67972	0,68057
38	0,69631	0,69727	0,69822	0,69916	0,70010	0,70103
39	0,71651	0,71756	0,71860	0,71963	0,72065	0,72167
40	0,73687	0,73801	0,73914	0,74026	0,74138	0,74249
41	0,75738	0,75862	0,75985	0,76107	0,76229	0,76350
42	0,77806	0,77940	0,78074	0,78207	0,78339	0,78470
43	0,79890	0,80035	0,80180	0,80325	0,80468	0,80611
44	0,81991	0,82149	0,82306	0,82462	0,82618	0,82773
45	0,84110	0,84281	0,84450	0,84620	0,84788	0,84956

φ	F (54°)	F (55°)	F (56°)	F (57°)	F (58°)	F (59°)
45°	0,84110	0,84281	0,84450	0,84620	0,84788	0,84956
46	0,86247	0,86431	0,86615	0,86798	0,86980	0,87162
47	0,88409	0,88601	0,88799	0,88997	0,89194	0,89390
48	0,90577	0,90791	0,91004	0,91218	0,91430	0,91642
49	0,92771	0,93001	0,93231	0,93461	0,93690	0,93919
50	0,94985	0,95232	0,95479	0,95727	0,95974	0,96220
51	0,97219	0,97784	0,97750	0,98016	0,98282	0,98547
52	0,99474	0,99759	1,00044	1,00329	1,00615	1,00900
53	1,01750	1,02055	1,02361	1,02667	1,02974	1,03281
54	1,04048	1,04374	1,04702	1,05031	1,05360	1,05689
55	1,06367	1,06716	1,07067	1,07419	1,07773	1,08126
56	1,08709	1,09082	1,09457	1,09834	1,10213	1,10592
57	1,11074	1,11472	1,11872	1,12276	1,12681	1,13088
58	1,13461	1,13886	1,14314	1,14745	1,15179	1,15614
59	1,15872	1,16325	1,16782	1,17242	1,17705	1,18171
60	1,18306	1,18788	1,19276	1,19767	1,20262	1,20760
61	1,20764	1,21277	1,21797	1,22321	1,22849	1,23381
62	1,23246	1,23702	1,24345	1,24903	1,25466	1,26034
63	1,25752	1,26332	1,26920	1,27515	1,28115	1,28721
64	1,28282	1,28898	1,29523	1,30156	1,30796	1,31442
65	1,30837	1,31491	1,32154	1,32827	1,33508	1,34196
66	1,33415	1,34109	1,34813	1,35528	1,36252	1,36986
67	1,36018	1,36753	1,37500	1,38259	1,39029	1,39809
68	1,38646	1,39423	1,40214	1,41019	1,41837	1,42668
69	1,41297	1,42119	1,42957	1,43810	1,44678	1,45561
70	1,43972	1,44840	1,45727	1,46631	1,47551	1,48488
71	1,46670	1,47587	1,48524	1,49481	1,50456	1,51451
72	1,49391	1,50359	1,51349	1,52360	1,53393	1,54447
73	1,52134	1,53055	1,54199	1,55268	1,56361	1,57478
74	1,54900	1,55974	1,57076	1,58204	1,59359	1,60541
75	1,57687	1,58817	1,59977	1,61167	1,62387	1,63638
76	1,60494	1,61682	1,62903	1,64157	1,65445	1,66766
77	1,63321	1,64569	1,65853	1,67173	1,68530	1,69924
78	1,66167	1,67476	1,68825	1,70213	1,71642	1,73112
79	1,69030	1,70403	1,71818	1,73276	1,74780	1,76329
80	1,71910	1,73347	1,74831	1,76362	1,77941	1,79571
81	1,74806	1,76309	1,77863	1,79468	1,81123	1,82839
82	1,77715	1,79286	1,80911	1,82592	1,84331	1,86130
83	1,80638	1,82278	1,83976	1,85734	1,87555	1,89441
84	1,83572	1,85281	1,87054	1,88891	1,90795	1,92771
85	1,86515	1,88296	1,90144	1,92061	1,94051	1,96117
86	1,89468	1,91320	1,93244	1,95242	1,97317	1,99477
87	1,92425	1,94351	1,96352	1,98433	2,00597	2,02849
88	1,95390	1,97388	1,99467	2,01630	2,03882	2,06228
89	1,98358	2,00429	2,02585	2,04832	2,07173	2,09614
90	2,01327	2,03472	2,05706	2,08036	2,10466	2,13002

φ	F (60°)	F (61°)	F (62°)	F (63°)	F (64°)	F (65°)
0°	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745
2	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491
3	0,05238	0,05238	0,05238	0,05238	0,05238	0,05238
4	0,06986	0,06986	0,06986	0,06986	0,06986	0,06986
5	0,08735	0,08735	0,08735	0,08735	0,08736	0,08736
6	0,10486	0,10487	0,10487	0,10487	0,10487	0,10488
7	0,12240	0,12241	0,12241	0,12241	0,12242	0,12242
8	0,13997	0,13997	0,13998	0,13999	0,13999	0,14000
9	0,15757	0,15758	0,15759	0,15759	0,15760	0,15761
10	0,17520	0,17521	0,17523	0,17524	0,17525	0,17526
11	0,19288	0,19289	0,19291	0,19293	0,19294	0,19296
12	0,21059	0,21062	0,21064	0,21066	0,21069	0,21071
13	0,22836	0,22839	0,22842	0,22845	0,22848	0,22851
14	0,24618	0,24622	0,24626	0,24629	0,24633	0,24636
15	0,26406	0,26411	0,26416	0,26420	0,26424	0,26428
16	0,28200	0,28206	0,28212	0,28217	0,28222	0,28227
17	0,30001	0,30008	0,30015	0,30021	0,30027	0,30034
18	0,31809	0,31817	0,31825	0,31833	0,31840	0,31848
19	0,33624	0,33634	0,33643	0,33652	0,33661	0,33670
20	0,35447	0,35458	0,35469	0,35480	0,35491	0,35501
21	0,37279	0,37292	0,37305	0,37317	0,37330	0,37342
22	0,39119	0,39135	0,39149	0,39164	0,39178	0,39192
23	0,40969	0,40987	0,41004	0,41021	0,41037	0,41053
24	0,42829	0,42849	0,42869	0,42888	0,42906	0,42925
25	0,44699	0,44722	0,44744	0,44766	0,44787	0,44808
26	0,46580	0,46606	0,46631	0,46656	0,46680	0,46704
27	0,48472	0,48502	0,48530	0,48558	0,48585	0,48512
28	0,50377	0,50409	0,50441	0,50473	0,50504	9,50534
29	0,52293	0,52330	0,52366	0,52401	0,52436	0,52470
30	0,54223	0,542[illegible]4	0,54304	0,54344	0,54382	0,54420
31	0,56166	0,56[illegible]12	0,56256	0,56300	0,56344	0,56386
32	0,58123	0,58174	0,58224	0,58273	0,58320	0,58367
33	0,60095	0,60151	0,60206	0,60261	0,60314	0,60365
34	0,62[illegible]82	0,62144	0,62205	0,62265	0,62324	0,62381
35	0,64085	0,64153	0,64221	0,64287	0,64352	0,64416
36	0,66104	0,66179	0,66254	0,66326	0,66398	0,66468
37	0,68141	0,68223	0,68305	0,68384	0,68463	0,68540
38	0,70195	0,70285	0,70374	0,70462	0,70548	0,70633
39	0,72267	0,72366	0,72464	0,72560	0,72654	0,72746
40	0,74358	0,74466	0,74573	0,74679	0,74781	0,74882
41	0,76469	0,76387	0,76703	0,76818	0,76931	0,77041
42	0,78600	0,78729	0,78856	0,78981	0,79104	0,79224
43	0,80752	0,80892	0,81030	0,81166	0,81300	0,81482
44	0,82926	0,83078	0,83228	0,83376	0,83522	0,83666
45	0,85122	0,85287	0,85450	0,85611	0,85769	0,85925
45°	0,85122	0,85287	0,85450	0,85611	0,85769	0,85925
46	0,87342	0,87520	0,87697	0,87871	0,88043	0,88213
47	0,89585	0,89778	0,89970	0,90159	0,90345	0,90529
48	0,91853	0,92062	0,92269	0,92474	0,92676	0,92875
49	0,94146	0,94372	0,94696	0,94817	0,95036	0,95252
50	0,96465	0,96709	0,96951	0,97190	0,97427	0,97660
51	0,98811	0,99074	0,99335	0,99594	0,99849	1,00102
52	1,01185	1,01468	1,01750	1,02029	1,02305	1,02578
53	1,03587	1,03892	1,04195	1,04496	1,04794	1,05089
54	1,06018	1,06346	1,06673	1,06997	1,07319	1,07637
55	1,08479	1,08832	1,09183	1,09533	1,09880	1,10223
56	1,10971	1,11350	1,11728	1,12104	1,12458	1,12848
57	1,13494	1,13901	1,14307	1,14712	1,15114	1,15513
58	1,16050	1,16486	1,16922	1,17357	1,17790	1,18220
59	1,18638	1,19106	1,19574	1,20041	1,20507	1,20970
60	1,21254	1,21761	1,22263	1,22765	1,23266	1,23764
61	1,23916	1,24453	1,24991	1,25529	1,26067	1,26604
62	1,26606	1,27181	1,27758	1,28336	1,28913	1,29490
63	1,29332	1,29947	1,30565	1,31184	1,31805	1,32425
64	1,32094	1,32751	1,33412	1,34077	1,34742	1,35409
65	1,34898	1,35595	1,36302	1,37018	1,37727	1,38443
66	1,37728	1,38477	1,39233	1,39995	1,40761	1,41529
67	1,40600	1,41400	1,42208	1,43022	1,43843	1,44668
68	1,43510	1,44362	1,45225	1,46096	1,46975	1,47860
69	1,46457	1,47365	1,48286	1,49217	1,50158	1,51107
70	1,49441	1,50409	1,51391	1,52386	1,53392	1,54410
71	1,52463	1,53343	1,54539	1,55601	1,56678	1,57768
72	1,55522	1,56617	1,57732	1,58865	1,60015	1,61182
73	1,58617	1,59781	1,60968	1,62175	1,63404	1,64653
74	1,61750	1,62985	1,64247	1,65533	1,66845	1,68180
75	1,64918	1,66228	1,67568	1,68938	1,70336	1,71763
76	1,68120	1,69509	1,70932	1,72388	1,73878	1,75401
77	1,71356	1,72827	1,74336	1,75833	1,77469	1,79094
78	1,74625	1,76180	1,77779	1,79422	1,81109	1,82840
79	1,77924	1,79568	1,81260	1,83002	1,84694	1,86637
80	1,81253	1,82988	1,84777	1,86621	1,88523	1,90484
81	1,84609	1,86438	1,88327	1,90279	1,92295	1,94377
82	1,87991	1,89916	1,91909	1,93971	1,96105	1,98313
83	1,91395	1,93420	1,95519	1,97695	1,99951	2,02290
84	1,94821	1,96947	1,99155	2,01447	2,03829	2,06303
85	1,98264	2,00495	2,02814	2,05225	2,07735	2,10348
86	2,01723	2,04059	2,06491	2,09025	2,11666	2,14421
87	2,05194	2,07637	2,10184	2,12842	2,15616	2,18515
88	2,08674	2,11226	2,13890	2,16672	2,19582	2,22627
89	2,12161	2,14822	2,17602	2,20511	2,23557	2,26750
90	2,15652	2,18421	2,21319	2,24855	2,27538	2,30879

φ	F (66°)	F (67°)	F (68°)	F (69°)	F (70°)	F (71°)
0°	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745
2	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491
3	0,05238	0,05238	0,05238	0,05238	0,05238	0,05238
4	0,06986	0,06986	0,06986	0,06986	0,06986	0,06986
5	0,08736	0,08736	0,08736	0,08736	0,08736	0,08737
6	0,10488	0,10488	0,10488	0,10489	0,10489	0,10489
7	0,12243	0,12243	0,12244	0,12244	0,12244	0,12245
8	0,14001	0,14001	0,14002	0,14002	0,14003	0,14003
9	0,15762	0,15763	0,15764	0,15765	0,15765	0,15766
10	0,17528	0,17529	0,17530	0,17531	0,17532	0,17533
11	0,19298	0,19299	0,19301	0,19302	0,19304	0,19305
12	0,21073	0,21075	0,21077	0,21079	0,21080	0,21082
13	0,22853	0,22856	0,22858	0,22861	0,22863	0,22865
14	0,24640	0,24643	0,24646	0,24649	0,24652	0,24655
15	0,26433	0,26437	0,26440	0,26444	0,26448	0,26451
16	0,28232	0,28237	0,28242	0,28246	0,28251	0,28255
17	0,30040	0,30045	0,30051	0,30057	0,30062	0,30068
18	0,31855	0,31862	0,31869	0,31875	0,31881	0,31887
19	0,33678	0,33687	0,33695	0,33702	0,33710	0,33717
20	0,35511	0,35521	0,35530	0,35539	0,35548	0,35556
21	0,37353	0,37365	0,37376	0,37386	0,37396	0,37406
22	0,39206	0,39219	0,39231	0,39244	0,39255	0,39267
23	0,41068	0,41083	0,41098	0,41112	0,41126	0,41139
24	0,42943	0,42960	0,42977	0,42993	0,43008	0,43023
25	0,44828	0,44848	0,44867	0,44886	0,44904	0,44921
26	0,46727	0,46749	0,46771	0,46792	0,46812	0,46831
27	0,48638	0,48663	0,48688	0,48712	0,48735	0,48756
28	0,50563	0,50592	0,50619	0,50646	0,50672	0,50697
29	0,52502	0,52534	0,52565	0,52595	0,52624	0,52652
30	0,54457	0,54492	0,54527	0,54561	0,54593	0,54624
31	0,56427	0,56467	0,56505	0,56543	0,56579	0,56614
32	0,58413	0,58457	0,58500	0,58542	0,58582	0,58621
33	0,60416	0,60465	0,60513	0,60560	0,60604	0,60648
34	0,62437	0,62492	0,62545	0,62596	0,62646	0,62694
35	0,64477	0,64537	0,64596	0,64653	0,64707	0,64760
36	0,66536	0,66602	0,66667	0,66730	0,66790	0,66849
37	0,68615	0,68688	0,68759	0,68828	0,68895	0,68960
38	0,70715	0,70795	0,70874	0,70950	0,71023	0,71094
39	0,72837	0,72925	0,73011	0,73094	0,73175	0,73253
40	0,74982	0,75078	0,75172	0,75264	0,75352	0,75438
41	0,77150	0,77255	0,77358	0,77458	0,77555	0,77649
42	0,79342	0,79458	0,79570	0,79680	0,79786	0,79888
43	0,81561	0,81687	0,81809	0,81929	0,82045	0,82157
44	0,83805	0,83943	0,84077	0,84207	0,84333	0,84456
45	0,86078	0,86227	0,86373	0,86515	0,86653	0,86786

φ	F (66°)	F (67°)	F (68°)	F (69°)	F (70°)	F (71°)
45°	0,86078	0,86227	0,86373	0,86515	0,86653	0,86786
46	0,88379	0,88541	0,88700	0,88855	0,89005	0,89150
47	0,90709	0,90886	0,91058	0,91227	0,91390	0,91549
48	0,93070	0,93262	0,93450	0,93633	0,93811	0,93983
49	0,95464	0,95672	0,95875	0,96074	0,96267	0,96455
50	0,97890	0,98116	0,98336	0,98552	0,98763	0,98968
51	1,00351	1,00595	1,00835	1,01069	1,01297	1,01518
52	1,02847	1,03112	1,03371	1,03625	1,03872	1,04113
53	1,05380	1,05666	1,05947	1,06223	1,06491	1,06753
54	1,07952	1,08261	1,08565	1,08864	1,09155	1,09438
55	1,10563	1,10897	1,11226	1,11549	1,11865	1,12173
56	1,13214	1,13576	1,13932	1,14282	1,14624	1,14957
57	1,15909	1,16299	1,16684	1,17062	1,17433	1,17795
58	1,18647	1,19068	1,19484	1,19894	1,20295	1,20688
59	1,21430	1,21885	1,22334	1,22777	1,23212	1,23638
60	1,24260	1,24751	1,25236	1,25715	1,26186	1,26647
61	1,27138	1,27667	1,28192	1,28709	1,29219	1,29720
62	1,30065	1,30636	1,31202	1,31762	1,32314	1,32857
63	1,33044	1,33659	1,34270	1,34876	1,35473	1,36062
64	1,36075	1,36738	1,37398	1,38052	1,38699	1,39337
65	1,39159	1,39874	1,40586	1,41293	1,41994	1,42685
66	1,42299	1,43069	1,43838	1,44602	1,45360	1,46110
67	1,45496	1,46325	1,47154	1,47980	1,48800	1,49614
68	1,48750	1,49643	1,50536	1,51429	1,52317	1,53200
69	1,52063	1,53024	1,53987	1,54951	1,55913	1,56871
70	1,55436	1,56469	1,57508	1,58549	1,59591	1,60629
71	1,58869	1,59981	1,61100	1,62224	1,63352	1,64478
72	1,62364	1,63558	1,64764	1,65978	1,67198	1,68421
73	1,65920	1,67203	1,68502	1,69812	1,71132	1,72459
74	1,69537	1,70916	1,72313	1,73727	1,75155	1,76594
75	1,73217	1,74696	1,76199	1,77724	1,79269	1,80829
76	1,76957	1,78543	1,80159	1,81803	1,83473	1,85165
77	1,80757	1,82457	1,84193	1,85965	1,87768	1,89602
78	1,84616	1,86436	1,88300	1,90207	1,92154	1,94141
79	1,88532	1,90479	1,92478	1,94529	1,96630	1,98780
80	1,92504	1,94584	1,96725	1,98928	2,01193	2,03518
81	1,96527	1,98747	2,01038	2,03402	2,05840	2,08352
82	2,00599	2,02965	2,05413	2,07947	2,10568	2,13278
83	2,04717	2,07234	2,09847	2,12558	2,15371	2,18291
84	2,08875	2,11550	2,14333	2,17229	2,20244	2,23383
85	2,13070	2,15907	2,18866	2,21954	2,25178	2,28547
86	2,17296	2,20299	2,23439	2,26725	2,30166	2,33774
87	2,21547	2,24720	2,28046	2,31534	2,35198	2,39052
88	2,25817	2,29163	2,32678	2,36373	2,40265	2,44370
89	2,30105	2,33621	2,37327	2,41231	2,45354	2,49715
90	2,34390	2,38087	2,41984	2,46100	2,50455	2,55073

φ	F (72°)	F (73°)	F (74°)	F (75°)	F (76°)	F (77°)
0°	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745
2	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491
3	0,05238	0,05238	0,05238	0,05238	0,05238	0,05238
4	0,06986	0,06987	0,06987	0,06987	0,06987	0,06987
5	0,08737	0,08737	0,08737	0,08737	0,08737	0,08737
6	0,10489	0,10490	0,10490	0,10490	0,10490	0,10490
7	0,12245	0,12245	0,12245	0,12246	0,12246	0,12246
8	0,14004	0,14004	0,14005	0,14005	0,14006	0,14006
9	0,15767	0,15767	0,15768	0,15769	0,15769	0,15770
10	0,17534	0,17535	0,17536	0,17537	0,17537	0,17538
11	0,19306	0,19307	0,19308	0,19310	0,19311	0,19312
12	0,21084	0,21085	0,21087	0,21088	0,21090	0,21091
13	0,22867	0,22869	0,22871	0,22873	0,22875	0,22876
14	0,24657	0,24660	0,24662	0,24664	0,24667	0,24669
15	0,26454	0,26457	0,26460	0,26463	0,26466	0,26468
16	0,28259	0,28263	0,28266	0,28270	0,28273	0,28276
17	0,30072	0,30076	0,30081	0,30085	0,30089	0,30092
18	0,31893	0,31899	0,31904	0,31909	0,31913	0,31918
19	0,33724	0,33730	0,33737	0,33742	0,33748	0,33753
20	0,35564	0,35572	0,35579	0,35586	0,35593	0,35599
21	0,37415	0,37424	0,37433	0,37441	0,37449	0,37456
22	0,39278	0,39288	0,39298	0,39307	0,39316	0,39324
23	0,41151	0,41163	0,41175	0,41186	0,41196	0,41205
24	0,43038	0,43051	0,43064	0,43077	0,43088	0,43099
25	0,44937	0,44953	0,44968	0,44982	0,44995	0,45007
26	0,46850	0,46868	0,46885	0,46901	0,46916	0,46930
27	0,48778	0,48798	0,48817	0,48835	0,48852	0,48868
28	0,50720	0,50743	0,50765	0,50785	0,50804	0,50823
29	0,52679	0,52704	0,52729	0,52752	0,52774	0,52794
30	0,54654	0,54683	0,54710	0,54736	0,54760	0,54783
31	0,56647	0,56679	0,56710	0,56739	0,56766	0,56791
32	0,58658	0,58694	0,58728	0,58760	0,58791	0,58819
33	0,60689	0,60729	0,60766	0,60802	0,60836	0,60868
34	0,62740	0,62784	0,62825	0,62865	0,62903	0,62938
35	0,64811	0,64860	0,64906	0,64950	0,64992	0,65031
36	0,66905	0,66959	0,67010	0,67058	0,67104	0,67148
37	0,69021	0,69081	0,69137	0,69191	0,69242	0,69289
38	0,71162	0,71227	0,71290	0,71349	0,71405	0,71457
39	0,73328	0,73400	0,73468	0,73533	0,73595	0,73653
40	0,75520	0,75599	0,75674	0,75745	0,75813	0,75877
41	0,77739	0,77825	0,77908	0,77987	0,78061	0,78131
42	0,79987	0,80082	0,80172	0,80258	0,80340	0,80416
43	0,82265	0,82368	0,82467	0,82562	0,82651	0,82735
44	0,84574	0,84687	0,84795	0,84898	0,84996	0,85088
45	0,86915	0,87039	0,87157	0,87270	0,87377	0,87478

φ	F (72°)	F (73°)	F (74°)	F (75°)	F (76°)	F (77°)
45°	0,86915	0,87039	0,87157	0,87270	0,87377	0,87478
46	0,89291	0,89426	0,89555	0,89678	0,89795	0,89905
47	0,91702	0,91849	0,91990	0,92124	0,92252	0,92372
48	0,94150	0,94310	0,94464	0,94610	0,94750	0,94881
49	0,96636	0,96811	0,96979	0,97139	0,97291	0,97434
50	0,99164	0,99354	0,99536	0,99711	0,99876	1,00033
51	1,01733	1,01940	1,02139	1,02329	1,02509	1,02680
52	1,04346	1,04571	1,04788	1,04995	1,05192	1,05378
53	1,07006	1,07251	1,07486	1,07711	1,07926	1,08129
54	1,09714	1,09980	1,10236	1,10481	1,10715	1,10937
55	1,12472	1,12761	1,13039	1,13307	1,13562	1,13803
56	1,15282	1,15596	1,15899	1,16190	1,16468	1,16732
57	1,18147	1,18489	1,18819	1,19136	1,19438	1,19726
58	1,21070	1,21441	1,21800	1,22145	1,22475	1,22789
59	1,24053	1,24456	1,24847	1,25223	1,25583	1,25925
60	1,27098	1,27537	1,27961	1,28371	1,28764	1,29138
61	1,30209	1,30686	1,31148	1,31594	1,32023	1,32432
62	1,33388	1,33906	1,34410	1,34896	1,35564	1,35811
63	1,36638	1,37202	1,37750	1,38281	1,38792	1,39281
64	1,39963	1,40576	1,41174	1,41753	1,42311	1,42847
65	1,43366	1,44033	1,44684	1,45316	1,45927	1,46514
66	1,46849	1,47576	1,48285	1,48976	1,49645	1,50288
67	1,50417	1,51208	1,51982	1,52738	1,53470	1,54176
68	1,54073	1,54934	1,55780	1,56606	1,57409	1,58184
69	1,57820	1,58758	1,59682	1,60586	1,61467	1,62320
70	1,61662	1,62684	1,63693	1,64684	1,65651	1,66590
71	1,65601	1,66716	1,67819	1,68905	1,69969	1,71004
72	1,69642	1,70859	1,72065	1,73256	1,74427	1,75569
73	1,73788	1,75115	1,76435	1,77743	1,79032	1,80295
74	1,78040	1,79488	1,80934	1,82371	1,83791	1,85189
75	1,82402	1,83983	1,85566	1,87145	1,88713	1,90261
76	1,86876	1,88602	1,90336	1,92073	1,93804	1,95521
77	1,91463	1,93346	1,95246	1,97157	1,99071	2,00977
78	1,96164	1,98218	2,00300	2,02403	2,04519	2,06638
79	2,00978	2,03229	2,05499	2,07814	2,10154	2,12510
80	2,05904	2,08346	2,10843	2,13390	2,15978	2,18600
81	2,10939	2,13599	2,16331	2,19131	2,21994	2,24912
82	2,16080	2,18973	2,21959	2,25035	2,28200	2,31446
83	2,21320	2,24463	2,27722	2,31097	2,32591	2,38200
84	2,26654	2,30061	2,33611	2,37309	2,41159	2,43166
85	2,82070	2,35757	2,39616	2,43658	2,47893	2,52331
86	2,37560	2,41538	2,45722	2,50129	2,54774	2,59676
87	2,43110	2,47391	2,51915	2,56703	2,61780	2,67175
88	2,48708	2,53300	2,58174	2,63357	2,68885	2,74798
89	2,54337	2,59247	2,64479	2,70068	2,76059	2,82505
90	2,59982	2,65214	2,70807	2,76806	2,83267	2,90256

φ	F (78°)	F (79°)	F (80°)	F (81°)	F (82°)	F (83°)
0°	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745
2	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491
3	0,05238	0,05238	0,05238	0,05238	0,05238	0,05238
4	0,06987	0,06987	0,06987	0,06987	0,06987	0,06987
5	0,08737	0,08737	0,08737	0,08737	0,08738	0,08738
6	0,10490	0,10490	0,10491	0,10491	0,10491	0,10491
7	0,12246	0,12247	0,12247	0,12247	0,12247	0,12247
8	0,14006	0,14007	0,14007	0,14007	0,14007	0,14008
9	0,15770	0,15771	0,15771	0,15771	0,15772	0,15772
10	0,17539	0,17539	0,17540	0,17540	0,17541	0,17541
11	0,19312	0,19313	0,19314	0,19315	0,19315	0,19316
12	0,21092	0,21093	0,21094	0,21095	0,21096	0,21096
13	0,22878	0,22879	0,22880	0,22882	0,22883	0,22884
14	0,24670	0,24672	0,24674	0,24675	0,24677	0,24678
15	0,26471	0,26473	0,26475	0,26477	0,26478	0,26480
16	0,28279	0,28282	0,28284	0,28286	0,28288	0,28290
17	0,30096	0,30099	0,30102	0,30104	0,30107	0,30109
18	0,31922	0,31926	0,31929	0,31932	0,31935	0,31938
19	0,33758	0,33762	0,33766	0,33770	0,33774	0,33777
20	0,35604	0,35610	0,35615	0,35619	0,35623	0,35626
21	0,37462	0,37468	0,37474	0,37479	0,37484	0,37488
22	0,39332	0,39339	0,39346	0,39351	0,39357	0,39362
23	0,41214	0,41222	0,41230	0,41237	0,41243	0,41248
24	0,43110	0,43119	0,43128	0,43135	0,43143	0,43149
25	0,45019	0,45030	0,45040	0,45049	0,45057	0,45064
26	0,46943	0,46956	0,46967	0,46977	0,46986	0,46994
27	0,48883	0,48897	0,48910	0,48921	0,48932	0,48941
28	0,50839	0,50855	0,50870	0,50883	0,50894	0,50905
29	0,52813	0,52831	0,52847	0,52862	0,52875	0,52887
30	0,54805	0,54824	0,54843	0,54859	0,54874	0,54887
31	0,56815	0,56837	0,56858	0,56876	0,56693	0,56908
32	0,58846	0,58871	0,58893	0,58914	0,58932	0,58949
33	0,60897	0,60925	0,60950	0,60973	0,60994	0,61012
34	0,62971	0,63001	0,63029	0,63055	0,63078	0,63098
35	0,65067	0,65101	0,65132	0,65161	0,65186	0,65209
36	0,67188	0,67226	0,67260	0,67291	0,67320	0,67345
37	0,69331	0,69375	0,69414	0,69448	0,69479	0,69507
38	0,71307	0,71552	0,71594	0,71633	0,71667	0,71698
39	0,73707	0,73757	0,73804	0,73846	0,73884	0,73917
40	0,75936	0,75992	0,76043	0,76089	0,76131	0,76168
41	0,78196	0,78257	0,78313	0,78364	0,78410	0,78451
42	0,80488	0,80555	0,80617	0,80673	0,80723	0,80768
43	0,82814	0,82887	0,82954	0,83016	0,83071	0,83121
44	0,85174	0,85255	0,85329	0,85396	0,85457	0,85511
45	0,87572	0,87660	0,87741	0,87815	0,87881	0,87941

φ	F (78°)	F (79°)	F (80°)	F (81°)	F (82°)	F (83°)
45°	0,87573	0,87660	0,87741	0,87815	0,87881	0,87941
46	0,90008	0,90104	0,90193	0,90274	0,90347	0,90412
47	0,92485	0,92590	0,92687	0,92776	0,92856	0,92927
48	0,95005	0,95119	0,95226	0,95322	0,95410	0,95488
49	0,97569	0,97694	0,97810	0,97916	0,98012	0,98097
50	1,00180	1,00317	1,00444	1,00560	1,00665	1,00758
51	1,02841	1,02991	1,03129	1,03256	1,03370	1,03472
52	1,05553	1,05717	1,05868	1,06007	1,06132	1,06244
53	1,08321	1,08499	1,08665	1,08816	1,08953	1,09076
54	1,11146	1,11341	1,11521	1,11687	1,11837	1,11971
55	1,14031	1,14244	1,14442	1,14623	1,14787	1,14934
56	1,16981	1,17214	1,17730	1,17628	1,17808	1,17968
57	1,19998	1,20252	1,20488	1,20705	1,20902	1,21078
58	1,23086	1,23364	1,23623	1,23860	1,24076	1,24269
59	1,26250	1,26554	1,26837	1,27097	1,27334	1,27545
60	1,29492	1,29825	1,30135	1,30421	1,30680	1,30913
61	1,32819	1,33184	1,33524	1,33837	1,34123	1,34378
62	1,36236	1,36635	1,37008	1,37352	1,37666	1,37947
63	1,39746	1,40184	1,40594	1,40973	1,41318	1,41628
64	1,43357	1,43838	1,44288	1,44705	1,45086	1,45428
65	1,47073	1,47602	1,48098	1,48558	1,48978	1,49356
66	1,50903	1,51485	1,52031	1,52539	1,53004	1,53423
67	1,54852	1,55493	1,56096	1,56658	1,57173	1,57638
68	1,58928	1,59636	1,60308	1,60925	1,61497	1,62014
69	1,63140	1,63922	1,64661	1,65351	1,65987	1,64564
70	1,67496	1,68362	1,69181	1,69949	1,70658	1,71303
71	1,72005	1,72965	1,73877	1,74733	1,75525	1,76248
72	1,76678	1,77744	1,78759	1,79716	1,80605	1,81417
73	1,81523	1,82710	1,83844	1,84916	1,85916	1,86832
74	1,86554	1,87876	1,89146	1,90351	1,91478	1,92526
75	1,91780	1,93258	1,94682	1,96040	1,97317	1,98496
76	1,97213	1,98867	2,00470	2,02006	2,03456	2,04803
77	2,02865	2,04721	2,06529	2,08271	2,09926	2,11471
78	2,08748	2,10833	2,12878	2,14860	2,16757	2,18540
79	2,14871	2,17219	2,17538	2,21802	2,23984	2,26052
80	2,21244	2,23893	2,26527	2,29121	2,31644	2,34056
81	2,27875	2,30866	2,33866	2,36848	2,39776	2,42507
82	2,34767	2,38147	2,41569	2,45005	2,48419	2,51760
83	2,41920	2,45741	2,49648	2,53616	2,57609	2,61575
84	2,49379	2,53645	2,58105	2,62693	2,67376	2,72106
85	2,56980	2,61848	2,66935	2,72237	2,77737	2,83396
86	2,64854	2,70328	2,76116	2,82233	2,88685	2,95463
87	2,72921	2,79053	2,85612	2,92641	3,00184	3,08284
88	2,81142	2,87976	2,95366	3,03393	3,12156	3,21772
89	2,89472	2,97038	3,05303	3,14396	3,24478	3,35769
90	2,97857	3,06173	3,15339	3,25530	3,36987	3,50042

φ	F(84°)	F(85°)	F(86°)	F(87°)	F(88°)	F(89°)
0°	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745
2	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491
3	0,05238	0,05238	0,05238	0,05238	0,05238	0,05238
4	0,06987	0,06987	0,06987	0,06987	0,06987	0,06987
5	0,08738	0,08738	0,08738	0,08738	0,08738	0,08738
6	0,10491	0,10491	0,10491	0,10491	0,10491	0,10491
7	0,12247	0,12248	0,12248	0,12248	0,12248	0,12248
8	0,14008	0,14008	0,14008	0,14008	0,14008	0,14008
9	0,15772	0,15772	0,15773	0,15773	0,15773	0,15773
10	0,17542	0,17542	0,17542	0,17542	0,17542	0,17543
11	0,19316	0,19317	0,19317	0,19317	0,19318	0,19318
12	0,21097	0,21098	0,21098	0,21098	0,21099	0,21099
13	0,22884	0,22885	0,22886	0,22886	0,22886	0,22886
14	0,24679	0,24680	0,24680	0,24681	0,24681	0,24681
15	0,26481	0,26482	0,26483	0,26483	0,26484	0,26484
16	0,28291	0,28293	0,28294	0,28294	0,28295	0,28295
17	0,30111	0,30112	0,30114	0,30115	0,30115	0,30116
18	0,31937	0,31942	0,31943	0,31944	0,31945	0,31946
19	0,33779	0,33781	0,33783	0,33784	0,33785	0,33786
20	0,35629	0,35632	0,35634	0,35636	0,35637	0,35638
21	0,37491	0,37494	0,37497	0,37499	0,37500	0,37501
22	0,39366	0,39369	0,39372	0,39374	0,39376	0,39377
23	0,41253	0,41257	0,41260	0,41263	0,41265	0,41266
24	0,43154	0,43159	0,43163	0,43166	0,43168	0,43169
25	0,45070	0,45075	0,45080	0,45083	0,45086	0,45087
26	0,47002	0,47008	0,47012	0,47016	0,47019	0,47021
27	0,48949	0,48956	0,48962	0,48966	0,48969	0,48971
28	0,50914	0,50922	0,50928	0,50933	0,50936	0,50939
29	0,52897	0,52905	0,52913	0,52918	0,52922	0,52924
30	0,54899	0,54908	0,54916	0,54923	0,54927	0,54930
31	0,56920	0,56931	0,56940	0,56947	0,56952	0,56955
32	0,58963	0,58975	0,58985	0,58993	0,58999	0,59002
33	0,61028	0,61042	0,61053	0,61062	0,61068	0,61072
34	0,63116	0,63131	0,63144	0,63153	0,63160	0,63164
35	0,65229	0,65245	0,65259	0,65270	0,65278	0,65282
36	0,67367	0,67385	0,67400	0,67412	0,67421	0,67426
37	0,69531	0,69552	0,69569	0,69582	0,69591	0,69597
38	0,71724	0,71747	0,71766	0,71780	0,71790	0,71797
39	0,73947	0,73972	0,73992	0,74008	0,74020	0,74027
40	0,76200	0,76228	0,76251	0,76268	0,76281	0,76288
41	0,78487	0,78517	0,78542	0,78561	0,78575	0,78584
42	0,80807	0,80841	0,80868	0,80889	0,80904	0,80914
43	0,83164	0,83200	0,83230	0,83254	0,83271	0,83281
44	0,85558	0,85598	0,85631	0,85657	0,85675	0,85687
45	0,87992	0,88037	0,88073	0,88101	0,88121	0,88133

φ	F(84°)	F(85°)	F(86°)	F(87°)	F(88°)	F(89°)
45°	0,87992	0,88037	0,88073	0,88101	0,88121	0,88133
46	0,90469	0,90517	0,90557	0,90588	0,90610	0,90623
47	0,92989	0,93042	0,93085	0,93119	0,93144	0,93158
48	0,95556	0,95614	0,95661	0,95699	0,95725	0,95741
49	0,98172	0,98235	0,98287	0,98238	0,98357	0,98375
50	1,00839	1,00909	1,00966	1,01011	1,01043	1,01062
51	1,03562	1,03638	1,03700	1,03749	1,03784	1,03805
52	1,06342	1,06425	1,06493	1,06547	1,06585	1,06608
53	1,09183	1,09274	1,09349	1,09407	1,09450	1,09475
54	1,12088	1,12188	1,12270	1,12335	1,12381	1,12408
55	1,15062	1,15171	1,15262	1,15332	1,15383	1,15413
56	1,18109	1,18229	1,18328	1,18405	1,18460	1,18494
57	1,21232	1,21364	1,21472	1,21557	1,21618	1,21655
58	1,24438	1,24582	1,24702	1,24795	1,24862	1,24903
59	1,27731	1,27890	1,28021	1,28124	1,28197	1,28242
60	1,31117	1,31292	1,31436	1,31549	1,31631	1,31679
61	1,34603	1,34795	1,34954	1,35079	1,35168	1,35222
62	1,38195	1,38407	1,38582	1,38720	1,38819	1,38879
63	1,41901	1,42135	1,42329	1,42481	1,42591	1,42657
64	1,45730	1,45989	1,46203	1,46372	1,46493	1,46566
65	1,49690	1,49977	1,50215	1,50402	1,50537	1,50618
66	1,53793	1,54112	1,54326	1,54584	1,54734	1,54824
67	1,58049	1,58404	1,58698	1,58930	1,59098	1,59199
68	1,62472	1,62868	1,63197	1,63456	1,63643	1,63756
69	1,67076	1,67518	1,67887	1,68177	1,68387	1,68514
70	1,71876	1,72372	1,72787	1,73114	1,73350	1,73494
71	1,76892	1,77450	1,77918	1,78287	1,78555	1,78717
72	1,82143	1,82774	1,83303	1,83723	1,84027	1,84211
73	1,87653	1,88370	1,88972	1,89450	1,89797	1,90008
74	1,93449	1,94267	1,94955	1,95503	1,95902	1,96144
75	1,99562	2,00499	2,01290	2,01923	2,02384	2,02665
76	2,06027	2,07106	2,08023	2,08758	2,09295	2,09622
77	2,12883	2,14136	2,15205	2,16065	2,16697	2,17082
78	2,20179	2,21644	2,22900	2,23917	2,24666	2,25126
79	2,27869	2,29694	2,31185	2,32400	2,33300	2,33858
80	2,36[illegible]14	2,38365	2,40153	2,41622	2,42718	2,43395
81	2,452[illegible]	2,47748	2,49920	2,51722	2,53079	2,53922
82	2,54960	2,57954	2,60627	2,62876	2,64589	2,65664
83	2,65442	2,69109	2,72452	2,75314	2,77530	2,78938
84	2,76806	2,81362	2,85612	2,89341	2,92295	2,94206
85	2,89147	2,94869	3,00371	3,05363	3,09449	3,12170
86	3,02528	3,09782	3,17204	3,23915	3,29837	3,33964
87	3,16963	3,26198	3,35887	3,45645	3,54748	3,61613
88	3,32376	3,44116	3,57110	3,71311	3,86108	3,99110
89	3,48564	3,63279	3,80508	4,01091	4,26139	4,55347
90	3,65186	3,83174	4,05276	4,33865	4,74272	5,43491

φ	F(90°)	φ	F(90°)	φ	F(90°)
0°	0,00000	31°	0,56956	61°	1,35240
1	0,01745	32	0,59003	62	1,38899
2	0,03491	33	0,61073	63	1,42679
3	0,05238	34	0,63166	64	1,46591
4	0,06987	35	0,65284	65	1,50645
5	0,08738				
6	0,10491	36	0,67428	66	1,54855
7	0,12248	37	0,69599	67	1,59232
8	0,14008	38	0,71799	68	1,63794
9	0,15773	39	0,74029	69	1,68557
10	0,17543	40	0,76291	70	1,73542
11	0,19318	41	0,78586	71	1,78771
12	0,21099	42	0,80917	72	1,84273
13	0,22886	43	0,83284	73	1,90079
14	0,24681	44	0,85690	74	1,96226
15	0,26484	45	0,88137	75	2,02759
16	0,28295	46	0,90628	76	2,09732
17	0,30116	47	0,93163	77	2,17212
18	0,31946	48	0,95747	78	2,25280
19	0,33786	49	0,98381	79	2,34040
20	0,35638	50	1,01068	80	2,43625
21	0,37501	51	1,03812	81	2,54209
22	0,39377	52	1,06616	82	2,66031
23	0,41266	53	1,09483	83	2,79422
24	0,43169	54	1,12418	84	2,94870
25	0,45088	55	1,15423	85	3,13130
26	0,47021	56	1,18505	86	3,35467
27	0,48972	57	1,21667	87	3,64253
28	0,50939	58	1,24916	88	4,04813
29	0,52925	59	1,28257	89	4,74135
30	0,54931	60	1,31696	90	∞

φ	E (0°)	E (5°)	E (10°)	E (15°)	E (20°)	E (25°)
0°	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745
2	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491
3	0,05236	0,05236	0,05236	0,05236	0,05236	0,05236
4	0,06981	0,06981	0,06981	0,06981	0,06981	0,06980
5	0,08727	0,08727	0,08726	0,08726	0,08725	0,08725
6	0,10472	0,10472	0,10471	0,10471	0,10470	0,10469
7	0,12217	0,12217	0,12216	0,12215	0,12214	0,12212
8	0,13963	0,13962	0,13961	0,13960	0,13957	0,13955
9	0,15708	0,15707	0,15706	0,15704	0,15700	0,15696
10	0,17453	0,17458	0,17451	0,17447	0,17443	0,17438
11	0,19199	0,19198	0,19195	0,19191	0,19185	0,19178
12	0,20944	0,20943	0,20939	0,20934	0,20926	0,20917
13	0,22689	0,22688	0,22683	0,22676	0,22667	0,22655
14	0,24435	0,24433	0,24427	0,24419	0,24406	0,24392
15	0,26180	0,26178	0,26171	0,26160	0,26145	0,26127
16	0,27925	0,27923	0,27914	0,27901	0,27883	0,27861
17	0,29671	0,29667	0,29658	0,29642	0,29620	0,29594
18	0,31416	0,31412	0,31401	0,31382	0,31357	0,31325
19	0,33161	0,33157	0,33143	0,33121	0,33092	0,33055
20	0,34907	0,34901	0,34886	0,34860	0,34825	0,34783
21	0,36652	0,36646	0,36628	0,36598	0,36558	0,36509
22	0,38397	0,38390	0,38370	0,38336	0,38290	0,38233
23	0,40143	0,40135	0,40111	0,40073	0,40020	0,39955
24	0,41888	0,41879	0,41852	0,41809	0,41749	0,41676
25	0,43633	0,43623	0,43593	0,43544	0,43477	0,43394
26	0,45379	0,45367	0,45333	0,45278	0,45203	0,45110
27	0,47124	0,47111	0,47074	0,47012	0,46928	0,46824
28	0,48869	0,48855	0,48813	0,48745	0,48651	0,48536
29	0,50615	0,50599	0,50553	0,50477	0,50373	0,50245
30	0,52360	0,52343	0,52292	0,52208	0,52094	0,51953
31	0,54105	0,54086	0,54030	0,53938	0,53813	0,53657
32	0,55851	0,55830	0,55768	0,55667	0,55530	0,55360
33	0,57596	0,57573	0,57506	0,57396	0,57245	0,57059
34	0,59341	0,59317	0,59243	0,59123	0,58959	0,58756
35	0,61087	0,61060	0,60980	0,60850	0,60672	0,60451
36	0,62832	0,62803	0,62716	0,62575	0,62382	0,62143
37	0,64577	0,64546	0,64452	0,64300	0,64091	0,63832
38	0,66323	0,66289	0,66188	0,66023	0,65798	0,65519
39	0,68068	0,68031	0,67923	0,67746	0,67503	0,67203
40	0,69813	0,69774	0,69658	0,69467	0,69207	0,68884
41	0,71558	0,71517	0,71392	0,71188	0,70909	0,70562
42	0,73304	0,73259	0,73126	0,72907	0,72609	0,72238
43	0,75049	0,75001	0,74859	0,74626	0,74307	0,73910
44	0,76794	0,76744	0,76592	0,76343	0,76003	0,75580
45	0,78540	0,78486	0,78324	0,78059	0,77697	0,77247

φ	E (0°)	E (5°)	E (10°)	E (15°)	E (20°)	E (25°)
45°	0,78540	0,78486	0,78324	0,78059	0,77697	0,77247
46	0,80285	0,80228	0,80056	0,79775	0,79390	0,78911
47	0,82030	0,81969	0,81787	0,81489	0,81081	0,80573
48	0,83776	0,83711	0,83518	0,83202	0,82770	0,82231
49	0,85521	0,85453	0,85249	0,84914	0,84457	0,83887
50	0,87266	0,87194	0,86979	0,86606	0,86142	0,85539
51	0,89012	0,88936	0,88709	0,88336	0,878[illegible]6	0,87189
52	0,90757	0,90677	0,90438	0,90045	0,89507	0,88836
53	0,92502	0,92418	0,92166	0,91753	0,91187	0,89481
54	0,94248	0,94159	0,93895	0,93450	0,92865	0,91122
55	0,95993	0,95900	0,95622	0,95166	0,94541	0,92761
56	0,97738	0,97641	0,97350	0,96872	0,96216	0,95397
57	0,99484	0,99381	0,99077	0,98576	0,97889	0,97030
58	1,01229	1,01122	1,00803	1,00279	0,99560	0,98661
59	1,02974	1,02863	1,02529	1,01981	1,01229	1,00289
60	1,04720	1,04603	1,04255	1,03[illegible]83	1,02897	1,01915
61	1,06465	1,06343	1,05980	1,05383	1,04563	1,03538
62	1,08210	1,08084	1,07705	1,07083	1,06228	1,05158
63	1,09956	1,09824	1,09430	1,08781	1,07891	1,06776
64	1,11701	1,11564	1,11154	1,10479	1,09553	1,08392
65	1,13446	1,13304	1,12878	1,12176	1,11213	1,10005
66	1,15192	1,15043	1,14601	1,13873	1,12871	1,11616
67	1,16937	1,16783	1,16324	1,15568	1,14529	1,13225
68	1,18682	1,18523	1,18047	1,17263	1,16185	1,14832
69	1,20428	1,20262	1,19769	1,18957	1,17839	1,16437
70	1,22173	1,22002	1,21491	1,20650	1,19493	1,18040
71	1,23918	1,23741	1,23213	1,22343	1,21145	1,19640
72	1,25664	1,25481	1,24935	1,24034	1,22796	1,21239
73	1,27409	1,27220	1,26656	1,25726	1,24446	1,22837
74	1,29154	1,28959	1,28377	1,27417	1,26094	1,24432
75	1,30900	1,30698	1,30097	1,29107	1,27742	1,26026
76	1,32645	1,32437	1,31818	1,30796	1,29389	1,27619
77	1,34390	1,34176	1,33538	1,32486	1,31035	1,29210
78	1,36136	1,35915	1,35258	1,34174	1,32680	1,30800
79	1,37881	1,37654	1,36978	1,35862	1,34325	1,32389
80	1,39626	1,39393	1,38698	1,37550	1,35968	1,33976
81	1,41372	1,41132	1,40417	1,39238	1,37611	1,35563
82	1,43117	1,42871	1,42137	1,40925	1,39254	1,37148
83	1,44862	1,41610	1,43856	1,42612	1,40896	1,38733
84	1,46608	1,46349	1,45576	1,44299	1,42537	1,40317
85	1,48353	1,48[illegible]87	1,47294	1,45985	1,44178	1,41900
86	1,50098	1,49826	1,49013	1,47671	1,45819	1,43483
87	1,51844	1,51565	1,50732	1,49357	1,47459	1,45066
88	1,53589	1,53304	1,52451	1,51043	1,49100	1,46648
89	1,55334	1,55042	1,54170	1,52729	1,50740	1,48230
90	1,57080	1,56781	1,55889	1,54415	1,52380	1,49811

φ	E (30°)	E (35°)	E (40°)	E (45°)	E (50°)	E (55°)
0°	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745
2	0,03490	0,03490	0,03490	0,03490	0,03490	0,03490
3	0,05235	0,05235	0,05235	0,05235	0,05235	0,05234
4	0,06980	0,06979	0,06979	0,06978	0,06978	0,06978
5	0,08724	0,08723	0,08722	0,08721	0,08720	0,08719
6	0,10467	0,10463	0,10464	0,10462	0,10461	0,10459
7	0,12210	0,12207	0,12205	0,12202	0,12199	0,12197
8	0,13951	0,13948	0,13944	0,13940	0,13936	0,13932
9	0,15692	0,15687	0,15681	0,15676	0,15670	0,15665
10	0,17431	0,17427	0,17417	0,17409	0,17401	0,17394
11	0,19169	0,19160	0,19150	0,19140	0,19130	0,19120
12	0,20906	0,20894	0,20881	0,20868	0,20855	0,20842
13	0,22641	0,22626	0,22609	0,22593	0,22576	0,22559
14	0,24374	0,24355	0,24335	0,24324	0,24293	0,24272
15	0,26106	0,26083	0,26058	0,26032	0,26006	0,25981
16	0,27836	0,27807	0,27777	0,27746	0,27714	0,27684
17	0,29563	0,29529	0,29493	0,29455	0,29418	0,29381
18	0,31289	0,31248	0,31205	0,31161	0,31116	0,31073
19	0,33012	0,32965	0,32914	0,32862	0,32809	0,32758
20	0,34733	0,34678	0,34619	0,34558	0,34496	0,34437
21	0,36451	0,36387	0,36319	0,36249	0,36178	0,36109
22	0,38167	0,38094	0,38015	0,37934	0,37853	0,37773
23	0,39880	0,39796	0,39707	0,39614	0,39521	0,39431
24	0,41590	0,41496	0,41394	0,41289	0,41183	0,41080
25	0,43298	0,43191	0,43076	0,42958	0,42838	0,42722
26	0,45002	0,44882	0,44753	0,44620	0,44486	0,44355
27	0,46703	0,46569	0,46425	0,46276	0,46126	0,45980
28	0,48402	0,48252	0,48092	0,47926	0,47759	0,47595
29	0,50097	0,49931	0,49753	0,49569	0,49383	0,49202
30	0,51788	0,51605	0,51409	0,51205	0,51000	0,50799
31	0,53476	0,53275	0,53059	0,52834	0,52608	0,52386
32	0,55161	0,54940	0,54703	0,54456	0,54207	0,53964
33	0,56842	0,56600	0,56341	0,56070	0,55798	0,55531
34	0,58520	0,58256	0,57972	0,57677	0,57379	0,57087
35	0,60194	0,59907	0,59598	0,59276	0,58952	0,58634
36	0,61864	0,61552	0,61217	0,60868	0,60515	0,60169
37	0,63530	0,63193	0,62830	0,62451	0,62068	0,62693
38	0,65193	0,64828	0,64436	0,64027	0,63612	0,63206
39	0,66851	0,66459	0,66035	0,65594	0,65146	0,64707
40	0,68506	0,68084	0,67628	0,67153	0,66671	0,66197
41	0,70157	0,69703	0,69214	0,68703	0,68185	0,67675
42	0,71804	0,71318	0,70793	0,70245	0,69688	0,69140
43	0,73446	0,72927	0,72365	0,71778	0,71182	0,70594
44	0,75085	0,74530	0,73931	0,73303	0,72665	0,72036
45	0,76720	0,76128	0,75489	0,74819	0,74137	0,73465

φ	E (30°)	E (35°)	E (40°)	E (45°)	E (50°)	E (55°)
45°	0,76720	0,76128	0,75489	0,74819	0,74137	0,73465
46	0,78350	0,77721	0,77040	0,76326	0,75599	0,74881
47	0,79977	0,79308	0,78584	0,77824	0,77050	0,76285
48	0,81599	0,80890	0,80121	0,79313	0,78490	0,77676
49	0,83217	0,82466	0,81651	0,80794	0,79920	0,79054
50	0,84832	0,84036	0,83173	0,82265	0,81338	0,80419
51	0,86442	0,85601	0,84689	0,83728	0,82746	0,81772
52	0,88048	0,87161	0,86197	0,85182	0,84143	0,83111
53	0,89650	0,88715	0,87698	0,86627	0,85529	0,84438
54	0,91248	0,90064	0,89193	0,88063	0,86904	0,85752
55	0,92843	0,91807	0,90680	0,89490	0,88269	0,87052
56	0,94433	0,93345	0,92160	0,90908	0,89622	0,88340
57	0,96019	0,94878	0,93634	0,92318	0,90965	0,89614
58	0,97602	0,96405	0,95100	0,93719	0,92297	0,90876
59	0,99180	0,97928	0,96560	0,95111	0,93619	0,92125
60	1,00756	0,99445	0,98013	0,96495	0,94930	0,93362
61	1,02327	1,00957	0,99460	0,97871	0,96231	0,94586
62	1,03895	1,02465	1,00900	0,99238	0,97521	0,95797
63	1,05459	1,03967	1,02334	1,00598	0,98802	0,96996
64	1,07020	1,05465	1,03762	1,01949	1,00072	0,98183
65	1,08577	1,06958	1,05183	1,03293	1,01333	0,99358
66	1,10132	1,08447	1,06599	1,04629	1,02585	1,00522
67	1,11683	1,09932	1,08009	1,05957	1,03827	1,02674
68	1,13231	1,11412	1,09413	1,07279	1,05060	1,02815
69	1,14776	1,12888	1,10812	1,08593	1,06284	1,03945
70	1,16318	1,14360	1,12205	1,09901	1,07500	1,05064
71	1,17857	1,15828	1,13594	1,11202	1,08707	1,06173
72	1,19394	1,17293	1,14977	1,12497	1,09907	1,07272
73	1,20928	1,18754	1,16256	1,13786	1,11098	1,08362
74	1,22459	1,20211	1,17731	1,15068	1,12283	1,09442
75	1,23989	1,21666	1,19101	1,16346	1,13460	1,10513
76	1,25516	1,23117	1,20467	1,17618	1,14631	1,11577
77	1,27041	1,24565	1,21830	1,18885	1,15795	1,12632
78	1,28565	1,26012	1,23189	1,20148	1,16954	1,13680
79	1,30086	1,27456	1,24544	1,21407	1,18107	1,14721
80	1,31606	1,28897	1,25897	1,22661	1,19255	1,15755
81	1,33124	1,30336	1,27246	1,23912	1,20399	1,16784
82	1,34641	1,31773	1,28594	1,25159	1,21538	1,17807
83	1,36157	1,33209	1,29939	1,26404	1,22673	1,18825
84	1,37672	1,34643	1,31282	1,27646	1,23805	1,19839
85	1,39186	1,36076	1,32623	1,28886	1,24934	1,20850
86	1,40699	1,37508	1,33963	1,30124	1,26061	1,21857
87	1,42211	1,38939	1,35302	1,31360	1,27186	1,22862
88	1,43723	1,40369	1,36640	1,32596	1,28310	1,23865
89	1,45235	1,41799	1,37977	1,33830	1,29432	1,24867
90	1,46746	1,43229	1,39314	1,35064	1,30554	1,25868

φ	E (60°)	E (65°)	E (70°)	E (75°)	E (80°)	E (85°)
0°	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745
2	0,03490	0,03490	0,03490	0,03490	0,03490	0,03490
3	0,05234	0,05234	0,05234	0,05234	0,05234	0,05234
4	0,06977	0,06977	0,06976	0,06976	0,06976	0,06976
5	0,08718	0,08718	0,08717	0,08716	0,08716	0,08716
6	0,10458	0,10456	0,10455	0,10454	0,10453	0,10453
7	0,12195	0,12192	0,12190	0,12189	0,12188	0,12187
8	0,13929	0,13925	0,13923	0,13920	0,13919	0,13918
9	0,15660	0,15655	0,15651	0,15648	0,15645	0,15644
10	0,17387	0,17381	0,17375	0,17371	0,17367	0,17365
11	0,19110	0,19102	0,19095	0,19089	0,19084	0,19082
12	0,20830	0,20819	0,20809	0,20801	0,20796	0,20792
13	0,22544	0,22530	0,22518	0,22508	0,22501	0,22497
14	0,24253	0,24236	0,24221	0,24209	0,24200	0,24194
15	0,25957	0,25936	0,25917	0,25902	0,25891	0,25884
16	0,27655	0,27629	0,27606	0,27588	0,27575	0,27567
17	0,29347	0,29315	0,29288	0,29267	0,29250	0,29241
18	0,31032	0,30995	0,30963	0,30937	0,30917	0,30906
19	0,32710	0,32666	0,32629	0,32598	0,32575	0,32561
20	0,34381	0,34330	0,34286	0,34250	0,34224	0,34207
21	0,36044	0,35985	0,35934	0,35892	0,35862	0,35843
22	0,37699	0,37631	0,37572	0,37525	0,37490	0,37468
23	0,39345	0,39268	0,39201	0,39146	0,39106	0,39081
24	0,40983	0,40895	0,40819	0,40757	0,40711	0,40683
25	0,42612	0,42513	0,42426	0,42356	0,42304	0,42273
26	0,44232	0,44120	0,44023	0,43944	0,43885	0,43849
27	0,45842	0,45716	0,45607	0,45518	0,45453	0,45413
28	0,47441	0,47301	0,47180	0,47081	0,47007	0,46962
29	0,49031	0,48875	0,48740	0,48629	0,48548	0,48498
30	0,50609	0,50437	0,50287	0,50165	0,50074	0,50019
31	0,52177	0,51986	0,51821	0,51686	0,51586	0,51525
32	0,53733	0,53524	0,53341	0,53193	0,53082	0,53015
33	0,55278	0,55048	0,54848	0,54684	0,54563	0,54489
34	0,56811	0,56559	0,56340	0,56161	0,56028	0,55947
35	0,58332	0,58057	0,57818	0,57622	0,57477	0,57388
36	0,59841	0,59541	0,59280	0,59067	0,58909	0,58811
37	0,61337	0,61011	0,60727	0,60495	0,60323	0,60217
38	0,62820	0,62467	0,61159	0,61907	0,61720	0,61605
39	0,64290	0,63908	0,63574	0,63302	0,63099	0,62974
40	0,65746	0,65334	0,64974	0,64679	0,64459	0,64324
41	0,67189	0,66745	0,66356	0,66038	0,65801	0,65655
42	0,68619	0,68140	0,67722	0,67379	0,67124	0,66966
43	0,70034	0,69520	0,69070	0,68701	0,68426	0,68257
44	0,71435	0,70884	0,70401	0,70005	0,69710	0,69527
45	0,72822	0,72232	0,71715	0,71289	0,70972	0,70777

φ	E (60°)	E (65°)	E (70°)	E (75°)	E (80°)	E (85°)
45°	0,72822	0,72232	0,71715	0,71289	0,70972	0,70777
46	0,74195	0,73564	0,73010	0,72554	0,72215	0,72005
47	0,75553	0,74879	0,74287	0,73800	0,73436	0,73211
48	0,76896	0,76177	0,75546	0,75025	0,74636	0,74396
49	0,78225	0,77459	0,76786	0,76230	0,75815	0,75558
50	0,79538	0,78724	0,78007	0,77414	0,76971	0,76697
51	0,80836	0,79971	0,79208	0,78578	0,78106	0,77814
52	0,82120	0,81202	0,80391	0,79720	0,79218	0,78907
53	0,83388	0,82415	0,81554	0,80842	0,80307	0,79976
54	0,84641	0,83610	0,82698	0,81941	0,81374	0,81021
55	0,85879	0,84788	0,83822	0,83020	0,82417	0,82042
56	0,87101	0,85949	0,84926	0,84076	0,83436	0,83039
57	0,88308	0,87092	0,86011	0,85110	0,84432	0,84010
58	0,89500	0,88217	0,87075	0,86122	0,85404	0,84957
59	0,90677	0,89325	0,88119	0,87112	0,86352	0,85878
60	0,91839	0,90415	0,89144	0,88080	0,87276	0,86773
61	0,92986	0,91488	0,90148	0,89025	0,88175	0,87643
62	0,94118	0,92543	0,91132	0,89948	0,89049	0,88486
63	0,95236	0,93581	0,92096	0,90848	0,89898	0,89303
64	0,96339	0,94602	0,93041	0,91725	0,90273	0,90094
65	0,97427	0,95606	0,93965	0,92580	0,91523	0,90858
66	0,98502	0,96593	0,94870	0,93412	0,92297	0,91595
67	0,99562	0,97564	0,95756	0,94222	0,93047	0,92305
68	1,00609	0,98518	0,96622	0,95010	0,93771	0,92987
69	1,01613	0,99456	0,97469	0,95775	0,94470	0,93642
70	1,02664	1,00379	0,98298	0,96519	0,95144	0,94270
71	1,03672	1,01286	0,99108	0,97240	0,95798	0,94870
72	1,04668	1,02178	0,99900	0,97940	0,96417	0,95442
73	1,05651	1,03056	1,00674	0,98619	0,97016	0,95987
74	1,06624	1,03919	1,01431	0,99278	0,97590	0,96508
75	1,07586	1,04769	1,02172	0,99916	0,98141	0,96992
76	1,08537	1,05607	1,02896	1,00534	0,98667	0,97453
77	1,09478	1,06432	1,03605	1,01133	0,99170	0,97887
78	1,10410	1,07245	1,04300	1,01714	0,99650	0,98293
79	1,11333	1,08047	1,04981	1,02277	1,00107	0,98671
80	1,12249	1,08839	1,05648	1,02823	1,00543	0,99023
81	1,13156	1,09621	1,06304	1,03354	1,01958	0,99348
82	1,14057	1,10395	1,06948	1,03870	1,01354	0,99646
83	1,14952	1,11161	1,07582	1,04372	1,01731	0,99920
84	1,15841	1,11920	1,08207	1,04864	1,02091	1,00168
85	1,16726	1,12673	1,08825	1,05343	1,02436	1,00394
86	1,17606	1,13421	1,09435	1,05813	1,02768	1,00598
87	1,18484	1,14165	1,10041	1,06277	1,03089	1,00784
88	1,19359	1,14906	1,10642	1,06735	1,03401	1,00954
89	1,20233	1,15645	1,11241	1,07188	1,03708	1,01113
90	1,21106	1,16383	1,11838	1,07641	1,04011	1,01266

φ	E (90°)	φ	E (90°)	φ	E (90°)
0°	0,00000	31	0,51504	61°	0,87462
1	0,01745	32	0,52992	62	0,88295
2	0,03490	33	0,54464	63	0,89101
3	0,05234	34	0,55919	64	0,89879
4	0,06976	35	0,57358	65	0,90631
5	0,08716				
6	0,10453	36	0,58779	66	0,91355
7	0,12187	37	0,60182	67	0,92050
8	0,13917	38	0,61566	68	0,92718
9	0,15643	39	0,62932	69	0,93358
10	0,17365	40	0,64279	70	0,93969
11	0,19081	41	0,65606	71	0,94552
12	0,20791	42	0,66913	72	0,95106
13	0,22495	43	0,68200	73	0,95630
14	0,24192	44	0,69466	74	0,96126
15	0,25882	45	0,70711	75	0,96593
16	0,27564	46	0,71934	76	0,97030
17	0,29237	47	0,73135	77	0,97437
18	0,30902	48	0,74314	78	0,97815
19	0,32557	49	0,75471	79	0,98163
20	0,34202	50	0,76604	80	0,98481
21	0,35837	51	0,77715	81	0,98769
22	0,37461	52	0,78801	82	0,99027
23	0,39073	53	0,79864	83	0,99255
24	0,40674	54	0,80902	84	0,99452
25	0,[illegible]262	55	0,81915	85	0,99619
26	0,43837	56	0,82904	86	0,99256
27	0,45399	57	0,83867	87	0,99863
28	0,46947	58	0,84805	88	0,99939
29	0,48481	59	0,85717	89	0,99985
30	0,50000	60	0,86603	90	1,00000

Таблица 3. **Полные эллиптические интегралы первого и второго рода**

θ	K	E	θ	K	E
0°	1,57080	1,57080	35°	1,73125	1,43229
1°	1,57092	1,57068	36°	1,74150	1,42476
2°	1,57127	1,57032	37°	1,75217	1,41707
3°	1,57187	1,56972	38°	1,76326	1,40924
4°	1,57271	1,56888	39°	1,77479	1,40126
5°	1,57379	1,56781	40°	1,78677	1,39314
6°	1,57511	1,56650	41°	1,79922	1,38489
7°	1,57668	1,56495	42°	1,81216	1,37650
8°	1,57849	1,56296	43°	1,82560	1,36800
9°	1,58054	1,56114	44°	1,83957	1,35938
10°	1,58284	1,55889	45°	1,85407	1,35064
11°	1,58539	1,55640	46°	1,86915	1,34181
12°	1,58820	1,55368	47°	1,88481	1,33287
13°	1,59125	1,55073	48°	1,90108	1,32384
14°	1,59457	1,54755	49°	1,91800	1,31473
15°	1,59814	1,54415	50°	1,93558	1,30554
16°	1,60198	1,54052	51°	1,95386	1,29628
17°	1,60608	1,53667	52°	1,97288	1,28695
18°	1,61045	1,53260	53°	1,99267	1,27757
19°	1,61510	1,52831	54°	2,01327	1,26815
20°	1,62003	1,52380	55°	2,03472	1,25868
21°	1,62523	1,51908	56°	2,05706	1,24918
22°	1,63073	1,51415	57°	2,08036	1,23966
23°	1,63632	1,50901	58°	2,10466	1,23013
24°	1,64260	1,50366	59°	2,13002	1,22059
25°	1,64900	1,49811	60°	2,15652	1,21106
26°	1,65570	1,49237	61°	2,18421	1,20154
27°	1,66272	1,48643	62°	2,21319	1,19205
28°	1,67006	1,48029	63°	2,24355	1,18259
29°	1,67773	1,47397	64°	2,27538	1,17318
30°	1,68575	1,46746	65°	2,30879	1,16383
31°	1,69411	1,46077	66°	2,34390	1,15455
32°	1,70284	1,45391	67°	2,38087	1,14535
33°	1,71192	1,44687	68°	2,41984	1,13624
34°	1,72139	1,43966	69°	2,46100	1,12725

θ	K	E	θ	K	E
70° 0′	2,50455	1,11838	84° 0′	3,65186	1,01724
70°30′	2,52729	1,11399	84°12′	3,68525	1,01628
71° 0′	2,55073	1,10964	84°24′	3,71984	1,01534
71°30′	2,57490	1,10533	84°36′	3,75572	1,01443
72° 0′	2,59982	1,10106	84°48′	3,79298	1,01354
72°30′	2,62555	1,09683	85° 0′	3,83174	1,01266
73° 0′	2,65214	1,09265	85°12′	3,87211	1,01181
73°30′	2,67962	1,08851	85°24′	3,91423	1,01099
74° 0′	2,70807	1,08443	85°36′	3,95827	1,01018
74°30′	2,73752	1,08039	85°48′	4,00437	1,00940
75° 0′	2,76806	1,07641	86° 0′	4,05276	1,00865
75°30′	2,79975	1,07248	86°12′	4,10366	1,00792
76° 0′	2,83267	1,06861	86°24′	4,15736	1,00721
76°30′	2,86691	1,06480	86°36′	4,21416	1,00653
77° 0′	2,90256	1,06106	86°48′	4,27444	1,00588
77°30′	2,93974	1,05738	87° 0′	4,33865	1,00526
78° 0′	2,97857	1,05378	87°12′	4,40733	1,00466
78°30′	3,01918	1,05024	87°24′	4,48115	1,00410
79° 0′	3,06173	1,04679	87°36′	4,56190	1,00356
79°30′	3,10640	1,04341	87°48′	4,64765	1,00306
80° 0′	3,15339	1,04011	88° 0′	4,74272	1,00258
80°12′	3,17288	1,03882	88°12′	4,84785	1,00215
80°24′	3,19280	1,03754	88°24′	4,96542	1,00174
80°36′	3,21317	1,03628	88°36′	5,09876	1,00137
80°48′	3,23400	1,03503	88°48′	5,25274	1,00104
81° 0′	3,25530	1,03379	89° 0′	5,43491	1,00075
81°12′	3,27711	1,03257	89° 6′	5,54020	1,00062
81°24′	3,29945	1,03126	89°12′	5,65792	1,00050
81°36′	3,32234	1,03017	89°18′	5,79140	1,00049
81°48′	3,34580	1,02900	89°24′	5,94550	1,00030
82° 0′	3,36987	1,02784	89°30′	6,12778	1,00021
82°12′	3,39457	1,02670	89°36′	6,35038	1,00014
82°24′	3,41994	1,02558	89°42′	6,63854	1,00008
82°36′	3,44601	1,02447	89°48′	7,64398	1,00004
82°48′	3,47282	1,02338	89°54′	7,73711	1,00001
83° 0′	3,50042	1,02231	90°	∞	1,00000
83°12′	3,52884	1,02126	—	—	—
83°24′	3,55814	1,02023	—	—	—
83°36′	3,58837	1,01921	—	—	—
83°48′	3,61959	1,01821	—	—	—

Таблица 4. Логарифмы q

(Характеристики всех логарифмов увеличены на 10)

θ	0′	5′	10′	15′	20′	25′
0°	— ∞	3,12127	3,72333	4,07552	4,32539	4,51922
1	5,27966	5,34918	5,41356	5,47349	5,52955	5,58221
2	5,88178	5,91725	5,95132	5,98411	6,01571	6,04620
3	6,23408	6,25789	6,28106	6,30363	6,32564	6,34710
4	6,48411	6,50203	6,51960	6,53681	6,55369	6,57025
5	6,67813	6,69250	6,70664	6,72056	6,73426	6,74775
6	6,83673	6,84874	6,86058	6,87226	6,88379	6,89516
7	6,97091	6,98122	6,99140	7,00147	7,01143	7,02127
8	7,08723	7,09626	7,10520	7,11405	7,12281	7,13148
9	7,18991	7,19795	7,20592	7,21381	7,22164	7,22939
10	7,28185	7,28910	7,29628	7,30341	7,31048	7,31750
11	7,36510	7,37170	7,37825	7,38475	7,39120	7,39760
12	7,44119	7,44725	7,45326	7,45924	7,46517	7,47107
13	7,51128	7,51688	7,52244	7,52797	7,53346	7,53893
14	7,57625	7,58146	7,58664	7,59178	7,59690	7,60199
15	7,63683	7,64170	7,64654	7,65136	7,65615	7,66091
16	7,69359	7,69816	7,70271	7,70724	7,71174	7,71622
17	7,74699	7,75130	7,75560	7,75987	7,76402	7,76835
18	7,79743	7,80151	7,80558	7,80962	7,81365	7,81766
19	7,84524	7,84911	7,85297	7,85681	7,86064	7,86445
20	7,89068	7,89437	7,89804	7,90170	7,90535	7,90898
21	7,93400	7,93752	7,94103	7,94452	7,94801	7,95147
22	7,97540	7,97877	7,98213	7,98547	7,98880	7,99212
23	8,01505	8,01828	8,02150	8,02471	8,02791	8,03109
24	8,05311	8,05621	8,05931	8,06239	8,06547	8,06853
25	8,08971	8 09270	8,09568	8,09865	8,10161	8,10456
26	8,12498	8,12786	8,13073	8,13360	8,13645	8,13930
27	8,15901	8,16179	8,16457	8,16734	8,17010	8,17285
28	8,19190	8,19459	8,19728	8,19996	8,20263	8,20529
29	8,22374	8,22635	8,22895	8,23155	8,23414	8,23672
30	8,25461	8,25714	8,25966	8,26218	8,26469	8,26719
31	8,28456	8,28702	8,28947	8,29191	8,29435	8,29679
32	8,31367	8,31606	8,31844	8,32082	8,32319	8,32556
33	8,34199	8,34431	8,34664	8,34895	8,35126	8,35357
34	8,36957	8,37184	8,37410	8,37636	8,37861	8,38086
35	8,39646	8,39867	8,40088	8,40308	8,40528	8,40747
36	8,42271	8,42487	8,42702	8,42917	8,43132	8,43346
37	8,44835	8,45046	8,45256	8,45467	8,45677	8,45886
38	8,47342	8,47548	8,47754	8,47960	8,48166	8,48371
39	8,49796	8,49998	8,50200	8,50401	8,50602	8,50803
40	8,52199	8,52397	8,52595	8,52792	8,52990	8,53186
41	8,54555	8,54750	8,54944	8,55137	8,55331	8,55524
42	8,56867	8,57058	8,57249	8,57439	8,57620	8,57818
43	8,59138	8,59325	8,59512	8,59699	8,59885	8,60072
44	8,61368	8,61553	8,61737	8,61920	8,62104	8,61287

θ	30′	35′	40′	45′	50′	55′
0°	4,67758	4,81148	4,92746	5,02977	5,12129	5,20408
1	5,68187	5,67883	5,72339	5,76578	5,80619	5,84481
2	6,07565	6,10414	6,13173	6,15847	6,18441	6,20960
3	6,36804	6,38849	6,40847	6,42801	6,44711	6,46581
4	6,58651	6,60246	6,61813	6,63352	6,64864	6,66351
5	6,76103	6,77411	6,78700	6,79970	6,81222	6,82456
6	6,90639	6,91748	6,92843	6,93925	6,94993	6,96049
7	7,03100	7,04063	7,05015	7,05957	7,06888	7,07811
8	7,14007	7,14858	7,15700	7,16534	7,17361	7,18180
9	7,23708	7,24470	7,25226	7,25975	7,26718	7,27454
10	7,32446	7,33136	7,33821	7,34501	7,35176	7,35846
11	7,40396	7,41028	7,41655	7,42277	7,42896	7,43510
12	7,47693	7,48274	7,48852	7,49427	7,49997	7,50564
13	7,54436	7,54975	7,55511	7,56045	7,56575	7,57101
14	7,60705	7,61208	7,61709	7,62206	7,62701	7,63194
15	7,66566	7,67037	7,67506	7,67973	7,68437	7,68899
16	7,72068	7,72512	7,72954	7,73393	7,73831	7,74266
17	7,77256	7,77675	7,78093	7,78508	7,78922	7,79333
18	7,82165	7,82562	7,82958	7,83352	7,83744	7,84185
19	7,86824	7,87202	7,87578	7,87953	7,88326	7,88698
20	7,91259	7,91620	7,91979	7,92336	7,92692	7,93047
21	7,95493	7,95837	7,96180	7,96522	7,96863	7,97202
22	7,99543	7,99873	8,00202	8,00529	8,00856	8,01181
23	8,03427	8,03744	8,04059	8,04374	8,04687	8,05000
24	8,07159	8,07463	8,07767	8,08069	8,08371	8,08672
25	8,10751	8,11044	8,11336	8,11628	8,11919	8,12209
26	8,14214	8,14497	8,14780	8,15061	8,15342	8,15622
27	8,17559	8,17833	8,18106	8,18378	8,18650	8,18920
28	8,20795	8,21060	8,21324	8,21588	8,21851	8,22113
29	8,23929	8,24186	8,24442	8,24698	8,24953	8,25207
30	8,26969	8,27219	8,27467	8,27715	8,27963	8,28210
31	8,29922	8,30164	8,30406	8,30647	8,30887	8,31127
32	8,32792	8,33028	8,33263	8,33498	8,33732	8,33966
33	8,35587	8,35816	8,36046	8,46274	8,36502	8,36730
34	8,38310	8,38534	8,38757	8,38980	8,39203	8,39425
35	8,40966	8,41185	8,41403	8,41620	8,41838	8,42054
36	8,43560	8,43774	8,43987	8,44199	8,44411	8,44623
37	8,46095	8,46304	8,46512	8,46720	8,46928	8,47135
38	8,48575	8,48779	8,48983	8,49187	8,49390	8,49595
39	8,51003	8,51204	8,51403	8,51603	8,51802	8,52001
40	8,53383	8,53579	8,53775	8,53971	8,54166	8,54361
41	8,55717	8,55909	8,56101	8,56293	8,56485	8,56676
42	8,58007	8,58197	8,58385	8,58574	8,58762	8,58950
43	8,60258	8,60443	8,60629	8,60814	8,60999	8,61184
44	8,62470	8,62653	8,62835	8,63017	8,63199	8,63381

θ	0′	5′	10′	15′	20′	25′
45°	8,63562	8,63744	8,63925	8,64105	8,64286	8,64466
46	8,65722	8,65900	8,66078	8,66256	8,66434	8,66611
47	8,67848	8,68024	8,68200	8,68375	8,68550	8,68725
48	8,69944	8,70118	8,70291	8,70646	8,70636	8,70809
49	8,72012	8,72183	8,72353	8,72524	8,72695	8,72865
50	8,74052	8,74221	8,74390	8,74558	8,74726	8,74895
51	8,76067	8,76234	8,76401	8,76567	8,76733	8,76900
52	8,78059	8,78224	8,78389	8,78554	8,78718	8,78883
53	8,80030	8,80193	8,80356	8,80519	8,80682	8,80845
54	8,81980	8,82142	8,82303	8,82464	8,82626	8,82787
55	8,83911	8,84072	8,84232	8,84392	8,84552	8,84711
56	8,85826	8,85985	8,86144	8,86302	8,86461	8,86619
57	8,87726	8,87883	8,88041	8,88198	8,88356	8,88518
58	8,89611	8,89768	8,89924	8,90080	8,90237	8,90393
59	8,91484	8,91640	8,91795	8,91951	8,92106	8,92261
60	8,93347	8,93501	8,93656	8,93811	8,93965	8,94120
61	8,95200	8,95354	8,95508	8,95662	8,95816	8,95970
62	8,97045	8,97199	8,97352	8,97506	8,97659	8,97812
63	8,98885	8,9903[illegible]	8,99191	8,99344	8,99497	8,99650
64	9,00720	9,40873	9,01026	9,01178	9,01331	9,01484
65	9,02553	9,02704	9,02858	9,03011	9,03163	9,03316
66	9,04385	9,04537	9,04690	9,04843	9,04996	9,05148
67	9,06218	9,06371	9,06524	9,06677	9,06830	9,06983
68	9,08055	9,08208	9,08361	9,08515	9,08668	9,08822
69	9,09897	9,10051	9,10205	9,10359	9,10513	9,10667
70	9,11748	9,11902	9,12057	9,12212	9,12367	9,12522
71	9,13609	9,13765	9,13920	9,14076	9,14232	9,14388
72	9,15484	9,15641	9,15798	9,15955	9,16113	9,16270
73	9,17376	9,17535	9,17693	9,17852	9,18011	9,18170
74	9,19289	9,19450	9,19610	9,19771	9,19932	9,20094
75	9,21228	9,21391	9,21554	9,21717	9,21880	9,22044
76	9,23197	9,23362	9,23528	9,23694	9,23861	9,24027
77	9,25202	9,25371	9,25540	9,25709	9,25879	9,26050
78	9,27250	9,27423	9,27597	9,27770	9,27944	9,28119
79	9,29351	9,29529	9,29707	9.29886	9,30065	9,30244
80	9,31515	9,31699	9,31883	9,32067	9,32253	9,32438
81	9,33756	9,33946	9,34138	9,34330	9,34523	9,34716
82	9,36091	9,36291	9,36491	9,36692	9,36894	9,37097
83	9,38545	9,38756	9,38968	9,39181	9,39395	9,39610
84	9,41152	9,41377	9,41604	9,41833	9,42063	9,42294
85	9,43962	9,44207	9,44455	9,44704	9,44956	9,45210
86	9,47054	9,47328	9,47605	9,47886	9,48169	9,48456
87	9,50569	9,50889	9,51213	9,51542	9,51877	9,52218
88	9,54798	9,55200	9,55613	9,56036	9,56472	9,56921
89	9,60564	9,61185	9,61844	9,62547	9,63302	9,64122

θ	30′	35′	40′	45′	50′	55′
45°	8,64646	8,64826	8,65006	8,65185	8,65364	8,65543
46	8,66789	8,66966	8,67143	8,67320	8,67496	8,67672
47	8,68900	8,69074	8,69249	8,69423	8,69597	8,69771
48	8,70981	8,71154	8,71326	8,71497	8,71669	8,71840
49	8,73035	8,73205	8,73375	8,73544	8,73714	8,73883
50	8,75063	8,75231	8,75398	8,75566	8,75733	8,75900
51	8,77066	8,77232	8,77398	8,77563	8,77729	8,77894
52	8,79047	8,79211	8,79375	8,79539	8,79703	8,79866
53	8,81007	8,81170	8,81332	8,81494	8,81656	8,81818
54	8,82948	8,83109	8,83270	8,83430	8,83591	8,83751
55	8,84871	8,85030	8,85190	8,85349	8,85508	8,85667
56	8,86778	8,86936	8,87094	8,87252	8,87410	8,87568
57	8,88670	8,88827	8,88984	8,89141	8,89298	8,89454
58	8,90549	8,90705	8,90861	8,91017	8,91173	8,91329
59	8,92417	8,92572	8,92727	8,92882	8,93037	8,93192
60	8,94274	8,94429	8,94583	8,94737	8,94891	8,95046
61	8,96123	8,96277	8,96431	8,96584	8,96738	8,96892
62	8,97966	8,98119	8,98272	8,98425	8,98579	8,98732
63	8,99803	8,99956	9,10109	9,10261	9,10414	9,10567
64	9,01637	9,01789	9,01942	9,02095	9,02247	9,02400
65	9,03469	9,03621	9,03774	9,03927	9,04079	9,04232
66	9,05301	9,05454	9,05607	9,05760	9,05912	9,06065
67	9,07136	9,07289	9,07442	9,07595	9,07748	9,07902
68	9,08975	9,09129	9,09282	9,09436	9,09590	9,09743
69	9,10821	9,10975	9,11130	9,11284	9,11439	9,11953
70	9,12677	9,12832	9,12987	9,13142	9,13298	9,13453
71	9,14544	9,14701	9,14857	9,15014	9,15170	9,15327
72	9,16428	9,16585	9,16743	9,16901	9,17059	9,17218
73	9,18330	9,18489	9,18649	9,18809	9,18969	9,19129
74	9,20255	9,20417	9,20578	9,20740	9,20903	9,21065
75	9,22208	9,22372	9,22537	9,22701	9,22866	9,23031
76	9,24191	9,24361	9,24529	9,24697	9,24865	9,25033
77	9,26220	9,26391	9,26562	9,26734	9,26906	9,27078
78	9,28294	9,28469	9,28645	9,28821	9,28997	9,29174
79	9,30424	9,30605	9,30786	9,30968	9,31150	9,31332
80	9,32625	9,32812	9,32999	9,33187	9,33376	9,33566
81	9,34910	9,35105	9,35301	9,35497	9,35694	9,35892
82	9,37301	9,37506	9,37712	9,37919	9,38127	9,38335
83	9,39827	9,40044	9,40263	9,40488	9,40705	9,40928
84	9,42527	9,42762	9,42998	9,43237	9,43476	9,43718
85	9,45466	9,45724	9,45985	9,46248	9,46514	9,46783
86	9,48746	9,49040	9,49338	9,49639	9,49945	9,50255
87	9,52565	9,52918	9,53278	9,53646	9,54021	9,54405
88	9,57384	9,57863	9,58359	9,58875	9,59412	9,59974
89	9,65025	9,66035	9,67196	9,68579	9,70342	9,72938