

Чарльз Сейфе
Ноль: биография опасной идеи

Чарльз Сейфе

НОЛЬ:

БИОГРАФИЯ
ОПАСНОЙ
ИДЕИ

Настоящий интеллектуальный детектив! —
The Washington Post

Аннотация

Эта книга – история цифры 0, одного из самых необычных изобретений человечества. Споры вокруг этого невинного с виду круглого значка потрясли самые основы науки и религии, не раз приводили к войнам. Легендарные мыслители, от Пифагора до Эйнштейна, пытались разгадать тайну ноля. Древние календари и последние достижения астрофизики, вавилонские глиняные таблички и поиски «теории всего» – обо всем этом в книге «Ноль: биография опасной идеи». Это книга для каждого, кого интересует история математики и культуры, передовые идеи современной науки.

Чарльз Сейфе Ноль: биография опасной идеи

Charles Seife

Zero: The Biography of a Dangerous Idea

Перевод с английского Александры Александровой

Печатается с разрешения автора, издательства Viking, a division of Penguin Group (USA) Inc. и литературного агентства Andrew Nurnberg.

© Charles Seife, 2000

© Перевод. А. Александрова, 2013

© Издание на русском языке AST Publishers, 2014

Глава 0 Утрата силы

Ноль поразил американский корабль «Йорктаун», словно торпеда. 21 сентября 1997 года, патрулируя побережье Виргинии, невероятно дорогой ракетный крейсер внезапно содрогнулся и остановился. «Йорктаун» был мертв. Военные корабли строятся так, чтобы выдержать взрыв мощной мины. Хотя «Йорктаун» был хорошо защищен от самого разнообразного оружия, никто не подумал защитить его от ноля. Это была трагическая ошибка.

На компьютеры «Йорктауна» только что поставили новую программу, управляющую двигателями. К несчастью, никто не заметил бомбы, скрывавшейся в программном коде, – ноля, который инженеры должны были удалить. Ноль остался скрытым до тех пор, пока программа не извлекла его из памяти и не задохнулась.

Когда компьютерная система «Йорктауна» попыталась поделить на ноль, двигатели мощностью восемьдесят тысяч лошадиных сил стали бесполезны. Потребовалось почти три часа, чтобы подключить аварийную систему управления, и «Йорктаун» еле дотащился до порта. Инженеры потратили два дня, избавляясь от ноля, ремонтируя двигатели и возвращая «Йорктаун» в боеспособное состояние.

Никакое другое число не может нанести такой урон. Отказ компьютеров, такой, который поразил «Йорктаун», – всего лишь бледная тень могущества ноля. Культуры вооружались против ноля, философы сдавались под его влиянием, потому что ноль отличен от всех других чисел. Он позволяет бросить взгляд на невыразимое и бесконечное. Поэтому-то его боялись,

ненавидели, ставили вне закона.

Здесь рассказывается история ноля – его рождения в древности, роста и процветания на Востоке, борьбы за признание в Европе, при шествии на Запад и вечной угрозы современной физике. Это история людей, которые сражались за смысл этого таинственного числа, – ученых и мистиков, исследователей и церковников, каждый из которых пытался понять ноль. Это история попыток западного мира безуспешно (а иногда и насильственно) заслониться от восточной идеи ноля. И это история парадоксов, созданных невинным с виду числом, потрясающим самые блестящие умы даже нашего столетия и угрожающих повредить саму систему научной мысли.

Ноль могуществен, потому что он – близнец бесконечности. Они равны и противоположны, как инь и ян. Они одинаково парадоксальны и одинаково смущают. Самые главные вопросы в науке и в религии касаются небытия и вечности, пустоты и беспредельности, ноля и бесконечности. Споры насчет ноля были сражениями, потрясавшими основы философии, естественных наук, математики и религии. За каждым решением кроются ноль и бесконечность.

Ноль был причиной битвы между Востоком и Западом. Ноль был в центре борьбы между религией и наукой. Ноль стал языком природы и самым важным инструментом математики. И еще он – самая загадочная проблема физики: темная сердцевина черной дыры и яркая вспышка Большого взрыва появились из тщетных попыток нанести нолю поражение.

На протяжении всей своей истории, несмотря на отрицание и изгнание, ноль всегда побеждал тех, кто ему противостоял. Человечеству никогда не удавалось заставить ноль покориться его философам. Вместо этого ноль формировал взгляды человека на Вселенную и на Бога.

Глава 1

Ничего не получится

Происхождение понятия «ноль»

Тогда не было ни сущего, ни не сущего. Не было ни воздушного пространства, ни неба над ним. Что в движении было? Где?

Ригведа¹

История ноля – история очень древняя. Ее корни уходят к началу математики, за тысячи лет до появления первой цивилизации, задолго до того, как люди научились читать и писать. Однако каким бы естественным ни казалось нам понятие ноля сегодня, для древнего человека он был чуждой – и пугающей – идеей. Это была концепция, возникшая в Плодородном полумесяце (примерно территория современного Ирака) за несколько столетий до рождения Христа; ноль не только олицетворял первобытную бездну, он также обладал опасными математическими свойствами. Ноль обладал властью разрушить систему логики.

Начала математической мысли могут быть найдены в желании сосчитать овец, в потребности вести учет собственности и течения времени. Ни одна из этих задач не требовала использования ноля; цивилизация прекрасно функционировала за столетия до его открытия. Понятие ноля было настолько непривлекательно для некоторых культур, что они предпочитали

¹ Перевод Т. Я. Елизаренковой (здесь и далее – прим. науч. ред., если не оговорено иное).

жить без него.

Жизнь без ноля

Проблема с нулем заключается в том, что мы не нуждаемся в нем в повседневной жизни. Никто не отправляется на рынок, чтобы купить ноль рыб. В определенной мере это наиболее цивилизованная из основ, и ее использование было навязано нам только потребностями разработанных моделей мышления.

Альфред Норт Уайтхед

Современному человеку трудно представить себе жизнь без ноля, как трудно представить жизнь без чисел 7 или 31. Тем не менее было время, когда ноля не существовало – как не существовало и этих чисел. Дело было еще в доисторические времена, так что палеонтологам пришлось собирать по кусочкам историю рождения математики, изучая осколки камней и кости. По этим фрагментам они узнали, что математики каменного века были более неприхотливы, чем современные. Вместо грифельной доски они использовали... волков.

Ключ к математике каменного века был найден при раскопках в Чехословакии в конце 1930-х годов археологом Карлом Абсаломом. Он нашел волчью кость с серией насечек; кости было тридцать тысяч лет. Никто не знает, использовал ли ее первобытный человек, чтобы сосчитать, сколько он убил оленей, сколько рисунков сделал или сколько дней не мылся, однако совершенно ясно, что древние люди что-то подсчитывали.

Волчья кость была в каменном веке эквивалентом суперкомпьютера. Предки нашего первобытного математика не могли сосчитать даже до двух, а уж ноль им точно не требовался. На самых начальных этапах люди могли различать только «один» и «много». Первобытный человек владел одним копьем или несколькими; он съедал одну убитую ящерицу или многих. Не было никакой возможности показать другие количества между «один» и «много». С течением времени примитивные языки развились достаточно, чтобы различать «один», «два» и «много», а потом и «один», «два», «три» и «много», но названий для больших чисел еще не было. Некоторые языки все еще имеют такое ограничение. Индейцы сириано в Боливии и бразильские индейцы яномамо не имеют названий для чисел больше трех, вместо этого они говорят «несколько» или «много».

Сама природа чисел такова, что их можно складывать друг с другом, получая новые, так что система не остановилась на трех. Через некоторое время умные члены племени начали нанизывать числа-слова в ряд, чтобы получить большие числа. Современные языки народностей бакайри и бороро в Бразилии демонстрируют этот процесс в действии. Их система чисел выглядит так: «один», «два», «два и один», «два и два», «два и два и один» и так далее. Эти люди считают двойками. Математики называют такую систему бинарной.

Немногие народы считают двойками, как бакайри и бороро. Старая волчья кость несет на себе более типичную древнюю систему счета. Кость имеет пятьдесят пять маленьких насечек, объединенных в группы по пять; после первых двадцати пяти отметок имеется еще одна насечка. Очень похоже на то, что наш первобытный человек считал пятерками, а потом сгруппировал пятерки по пять. В этом есть здравый смысл. Гораздо быстрее подсчитывать значки, объединенные в группы, чем пересчитывать их по одному. Современные математики сказали бы, что резчик по волчьей кости использовал основанную на цифре 5, или пятеричную, систему счета.

Но почему именно на цифре 5? В конце концов это произвольное решение. Если бы

первобытный человек объединил значки в группы по четыре и считал более крупными единицами, равными 16, или в группы по шесть и равными 36, его система счета работала бы также хорошо. Группировка не влияет на число насечек на кости, она отражается только на том, как резчик их объединил. Окончательный ответ был бы получен один и тот же, как бы ни считать значки. Однако наш первобытный человек предпочел считать группами по пять, а не по четыре, и такое предпочтение разделяли люди по всему миру. Природа случайно дала человеку по пять пальцев на каждой руке, и из-за этой случайности пятерка оказалась излюбленной основой системы счета во многих культурах. Древние греки, например, использовали термин «пятерение» для описания процесса подсчета.

Даже в южноамериканских двоичных системах счета лингвисты усматривают начала пятеричной системы. Другое название на языке бороро для числа «два и два и один» – «это моя рука целиком». Ясно, что древние люди предпочитали считать, используя части своего тела, и «пять» (одна рука), «десять» (две руки) и «двадцать» (обе руки и обе ноги) были для этого излюбленными объектами. Английские слова *eleven* и *twelve* произошли, вероятно, от *one over (ten)* и *two over (ten)*, «один сверх (десяти)» и «два сверх (десяти)», как, по-видимому, и русские «одиннадцать» и «двенадцать» произошли от «один над десятью» и «два над десятью». Английские «тринадцать», «четырнадцать», «пятнадцать» и так далее, скорее всего, сокращения фраз «три и десять», «четыре и десять», «пять и десять». Исходя из этого, лингвисты заключают, что «десять» являлось базовой единицей в германских языках, от которых произошел английский, поэтому люди использовали основанную на десятке числовую систему. С другой стороны, по-французски «восемьдесят» – это *quatre-vingts*, то есть «четыре двадцатки», а «девяносто» – *quatre-vingt-dix* («четыре двадцатки и десять»). Может показаться, что люди, жившие там, где теперь расположена Франция, использовали как основу число 20 – это была двадцатеричная система. Такие числа, как 7 и 31, принадлежат ко всем системам – и пятеричной, и десятеричной, и двадцатеричной. Однако ни одна из них не имела названия для нуля. Такого понятия просто не существовало.

Ведь нет нужды пасти ноль овец или пересчитывать ноль цыплят. Вместо того чтобы сказать: «У нас ноль бананов», торговец скажет: «У нас нет бананов». Не требуется цифры для обозначения отсутствия чего-нибудь, так что никому и не приходило в голову придумывать для нее обозначение. Поэтому люди так долго и обходились без нуля. Он просто не был нужен, а потому не возникал.

На самом деле знание о числах вообще было большим достижением в доисторические времена. Простая способность считать рассматривалась как столь же мистический и сверхъестественный талант, как наложение заклятий или знание имен богов. В египетской «Книге мертвых» говорится, что когда душу умершего расспрашивает Акен, перевозчик, переправляющий души умерших через реку в потусторонний мир, он отказывается брать в свою лодку того, «кто не знает числа своих пальцев». Душа должна пересчитать пальцы, чтобы удовлетворить перевозчика. (А вот греческий перевозчик в царство мертвых хотел получить плату, поэтому под язык мертвому человеку клали монету.)

Хотя умение считать в древнем мире было редкостью, числа и основные правила счета всегда возникали раньше письменности. Когда у ранних цивилизаций появлялась потребность делать на глиняных табличках оттиски тростинкой, высекать знаки на камне или наносить их чернилами на пергамент или папирус, система чисел бывала уже хорошо развитой. Трансформация устной системы счета в письменную была делом простым: людям нужно было только изобрести метод кодирования, чтобы писцы могли сохранять числа в более долговечной форме. (Некоторые общества даже придумали, как это делать, до того, как научились писать. Неграмотные инки, например, использовали «кипу» – связки разноцветных веревочек с

узлами, чтобы сохранять результаты подсчетов.)

Первые писцы записывали числа так, как это соответствовало их системе счета, и делали это как можно более точно. Со времен первобытных людей общество развилось; вместо того, чтобы снова и снова наносить группы насечек на кость, писцы изобрели символы для каждого типа групп. При пятеричной системе писец мог одним значком обозначить единицу, другим значком – группу из пяти единиц, третьим – число 25 (пять групп по пять) и так далее.

Именно так поступили египтяне. Более пяти тысяч лет назад, еще до эры пирамид, древние жители Египта придумали систему изображений для своей десятичной системы, где каждая цифра изображалась рисунком. Одна вертикальная черточка означала единицу, изображение пяточной кости – десять, изогнутый силок – сто, и так далее. Чтобы записать число по такой схеме, писцу нужно было только изобразить группы этих символов. Вместо того чтобы наносить 123 насечки для изображения числа 123, достаточно было изобразить шесть символов: один силок, две пятки и три вертикальных черточки. Таков был типичный способ математических записей в античности. Как и большинство других цивилизаций, Египет не обладал нолем и не нуждался в нем.

Однако древние египтяне были весьма искусными математиками. Они умело вели астрономические наблюдения и следили за временем, а это означало, что им была нужна развитая математика – из-за переменчивой природы календаря.

Создание надежного календаря было проблемой для большинства древних цивилизаций, потому что они обычно начинали с календаря лунного: длительность месяца определялась как промежуток между двумя полнолуниями. Это был естественный выбор: убывание и рост луны на небе трудно не заметить, и это дает удобный способ отмечать периодически повторяющиеся циклы. Однако длительность лунного месяца – между двадцатью девятью и тридцатью днями. Как бы вы их ни располагали, двенадцать лунных месяцев дают 354 дня – примерно на одиннадцать меньше, чем длится солнечный год. Тринадцать лунных месяцев дают девятнадцать лишних дней. Поскольку именно солнечный, а не лунный год определяет время сева и жатвы, сезоны смещаются, если пользоваться неуточненным лунным годом.

Корректировка лунного календаря – дело сложное. Некоторые современные страны, такие как Израиль и Саудовская Аравия, все еще пользуются модифицированным лунным календарем, но шесть тысяч лет назад египтяне пришли к лучшему решению. Они нашли более простой способ и создали календарь, верно указывавший сезоны на протяжении многих лет. Вместо того чтобы следить за течением времени, наблюдая за луной, они использовали солнце, как это делает большинство современных народов.

Египетский календарь состоял из двенадцати месяцев, как и лунный, но каждый месяц длился тридцать дней. (Поскольку они пользовались десятичной системой, неделя у египтян – декада – длилась десять дней.) В конце года календарь включал пять дополнительных дней, что в сумме давало 365 дней в году. Это предок нашего собственного календаря; египетскую систему восприняли греки, а потом Рим, где она была усовершенствована введением високосных годов. Так возник стандартный календарь западного мира. Однако, поскольку у египтян, греков и римлян не было ноля, не имеет ноля и западный календарь – недостаток, который через тысячелетия создал много проблем.

Придуманная египтянами новинка – солнечный календарь – была прорывом в знании, но они оставили и более важный след в истории: изобрели геометрию. Даже не имея ноля, египтяне скоро стали мастерами в математике. Им пришлось ими стать из-за грозной реки: Нил каждый год выходил из берегов и затоплял дельту. Это было благом – разлив приносил на поля богатый аллювиальный ил, делая долину Нила самой богатой земледельческой областью древнего мира. Однако река уничтожала межи, стирая все границы между полями, и крестьяне

не знали, какие участки им возделывать. (Египтяне очень серьезно относились к правам собственности: согласно Книге мертвых, умерший должен был поклясться богам, что не обманывал соседа, захватив его землю, иначе за прегрешение сердце виновного скармливалось страшному чудовищу, именуемому Пожирающим. Захват чужой земли считался в Египте не менее тяжким преступлением, чем нарушение клятвы, убийство или мастурбация в храме.)

Древние фараоны назначали землемеров для оценки ущерба и восстановления разметки полей – так и родилась геометрия. Землемеры, или натягиватели веревок (называвшиеся так по своим измерительным приспособлениям: веревкам с узлами, благодаря которым можно было определить прямой угол), со временем научились определять площадь участков земли, разделяя их на прямоугольники и треугольники. Египтяне также научились измерять объемы объектов – таких, как пирамиды. Египетские математики были знамениты по всему Средиземноморью; вероятно, древнегреческие геометры – Фалес и Пифагор – учились в Египте. Однако несмотря на блестящие достижения, ноль в Египте так и не появился.

Причина была отчасти в том, что египтяне интересовались только практической стороной дела. Они так и не пошли дальше измерения объемов и подсчета дней и часов. Математика не использовалась для чего-либо отвлеченного, если не считать астрологии. В результате даже лучшие египетские математики не могли использовать принципы геометрии там, где это не было связано с реальным миром: они не превратили свою математическую систему в абстрактную систему логики. Они также не соотносили математику с философией. Греки отличались от египтян тем, что пользовались абстракциями и философскими категориями; они довели математику до ее верхней точки в древности. Однако не греки открыли ноль. Ноль пришел с Востока, а не с Запада.

Рождение ноля

В истории культуры открытие ноля всегда будет примером одного из самых замечательных достижений человечества.

Тобиас Данциг. «Числа – язык науки»²

Греки понимали математику лучше египтян. Овладев египетским искусством геометрии, они быстро превосходили своих учителей.

Сначала греческая система чисел была очень сходна с египетской. Греки тоже использовали как основу число 10, и в том, как две культуры записывали числа, разница была невелика: вместо рисунков, как египтяне, греки для обозначения чисел использовали буквы. Буква «Н» («эта») обозначала *hekaton* – «сто»; «М» («мю») – *myriory* – «десять тысяч» («мириада» – самый большой разряд в греческой системе). У греков был также символ для числа 5, что указывало на смешение пятеричной и десятичной систем, в целом же греческая и египетская системы записи чисел были почти одинаковы – на некоторое время. Потом греки переросли этот примитивный способ записи чисел и создали более изощренную систему.

² Данциг Т. Числа – язык науки / Пер. Ю. Каратассо. М.: Техносфера, 2008

Современные	1	2	3	4	10	20	30	100	200	123
Египетские	⋮	⋮⋮	⋮⋮⋮	⋮⋮⋮⋮	∩	∩∩	∩∩∩	Ⓔ	ⒺⒺ	Ⓔ∩∩⋮
Греческие (старый стиль)	Ι	ΙΙ	ΙΙΙ	ΙΙΙΙ	Δ	ΔΔ	ΔΔΔ	Η	ΗΗ	ΗΔΔΙΙΙ
Греческие (новый стиль)	α	β	γ	δ	ι	κ	λ	ρ	σ	ρκγ
Римские	I	II	III	IV	X	XX	XXX	C	CC	CXXXIII
Еврейские	א	ב	ג	ד	י	כ	ל	ק	ר	קכג
Майянские	.	..	...		=	⦿	≡	⦿	≡	⦿.

Рис. 1 . Изображение чисел в различных культурах:

Вместо того чтобы использовать две черточки для обозначения цифры 2 или три «Н» для обозначения 300, как это делалось бы в «египетском» стиле, новая греческая система, появившаяся около 500 года до н. э., использовала отдельные значки для изображения 2, 3, 300 и многих других чисел (рис. 1). Таким образом, греки избавлялись от повторения цифр. Например, запись числа 87 в египетской системе требовала бы пятнадцать символов: восемь пядок и семь вертикальных черточек. В новой греческой системе требовалось всего два символа: Ϟ для 80 и ζ для 7. (Римская система, сменившая греческую, была шагом назад; запись римскими цифрами – LXXXVII – потребовала бы семи символов с несколькими повторениями.)

Хотя греческая система была изощренней египетской, она не обеспечивала самого прогрессивного способа записи чисел в древнем мире. Эта честь принадлежит другому восточному изобретению: вавилонскому способу счета. Благодаря этой системе на Востоке, в Плодородном полумесяце, появился ноль.

На первый взгляд, вавилонская система представляется извращенной. Во-первых, она шестидесятерична – имеет в основе число 60. Такой выбор кажется странным, особенно если учесть, что большинство человеческих обществ выбирали в этом качестве числа 5, 10 или 20. Во-вторых, вавилоняне использовали только два значка для изображения чисел: клинышек, обозначавший единицу, и двойной клинышек, обозначавший десять. Группы этих значков, объединенных в семейства, содержащие 59 или меньше значков, были базовыми символами системы чисел, так же, как греческая система использовала буквы, а египетская – рисунки. Однако действительно странной особенностью вавилонской системы было то, что вместо использования разных символов для каждого числа, как в египетской и греческой системах, каждый символ мог изображать множество разных чисел. Единственный клинышек, например, мог изображать 1, 60, 3600 и сколько угодно других чисел.

Каким бы странным это ни казалось на современный взгляд, для древних людей это было вполне осмысленно: таков был эквивалент компьютерного кода бронзового века. Вавилоняне, как и представители многих других культур, изобрели приспособления, помогавшие им в счете. Наиболее знаменит из них абак. Известный как «соробан» в Японии, «цзе-суан-пан» в Китае, «счеты» в России, «кулба» в Турции, «хороб» в Армении и под множеством других названий в разных культурах, абак использует перемещающиеся камешки для обозначения количества. (Слова «калькулировать», «калькулюс» и «кальций» происходят от латинского слова *calculus* – камешек.)

Сложение чисел на абаке столь же просто, как перемещение камешков вверх и вниз. Камешки в разных колонках имеют разную цену и, манипулируя ими, умелый пользователь

может быстро складывать большие числа. Когда подсчет закончен, все, что нужно сделать пользователю, — это посмотреть на окончательное расположение камешков и перевести увиденное в число — довольно простая операция.

Вавилонская система походила на абак, символически изображенный на глиняной табличке. Каждая группа символов соответствовала определенному числу камешков, двигавшихся на абак, и как каждая колонка абак, каждая группа имела собственное, отличное от других значение, в зависимости от положения. В этом смысле вавилонская система не отличалась от той, которой мы пользуемся сегодня. Каждая единица в числе 111 имеет особое значение: справа налево — это 1, 10 и 100 соответственно. Подобным же образом символ  в трех разных положениях в числе 



означал «один», «шестьдесят» или «три тысячи шестьсот». Все было, как на абак, за исключением единственной проблемы. Как вавилонянин записал бы число 60? Цифру 1 написать было легко: 

; к несчастью, 60 тоже записывалось как 

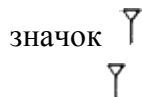
— с тем единственным отличием, что значок должен стоять на втором месте, а не на первом. На абак легко определить, какое число представлено. Один камешек в первой колонке легко отличить от одного камешка во второй колонке. Этого нельзя сказать о записи чисел.

Вавилоняне не имели способа определить, в какой колонке стоит написанный символ;  мог представлять и 1, и 60, и 3600. С числами, в которые входило несколько значков, дело обстояло еще хуже: это могло быть 61, 3601, 3660 и больше.

Решением этой проблемы был ноль. Около 300 года до н. э. вавилоняне начали

использовать два наклонных клинышка 

для обозначения пустого места: пустой колонки абак. Символ-заполнитель позволял с легкостью определить, к какому разряду принадлежит значащий символ. До появления ноля



мог означать 61 или 3601; благодаря использованию ноля он означал 61; 3601

обозначался как 



(рис. 2). Ноль родился из потребности дать каждой последовательности вавилонских цифр единственное постоянное значение.

Хотя ноль был полезен, это был всего лишь символ-заполнитель. Он обозначал только пустое место в колонке абак — той колонке, где все камешки на дне. Он только обеспечивал, что все цифры стоят на правильном месте; собственной числовой ценности он не имел. В конце концов, 000 002,148 означает в точности то же, что 2,148. Ноль в ряду цифр получает значение, зависящее от какой-то другой цифры слева от него. Сам по себе ноль ничего не значит. Ноль был цифрой, а не числом. Он не имел величины.

с нолем							
𐎶	𐎵	𐎶𐎶	𐎵𐎶	𐎶𐎶	𐎵𐎶	𐎶𐎶	𐎵𐎶
1	10	61	601	3,601	36,001	216,001	2,160,001
𐎶	𐎵	𐎶𐎶	𐎵𐎶	𐎶𐎶𐎶	𐎵𐎶𐎶	𐎶𐎶𐎶𐎶	𐎵𐎶𐎶𐎶
без ноля							

Рис. 2. Вавилонские цифры

Величина числа определяется его положением на числовой оси по сравнению с другими числами. Например, число 2 идет до числа 3 и после числа 1; ничто другое значения не имеет. Однако ноль сначала не занимал места на числовой оси, это был просто символ, не имевший места в иерархии чисел. Даже сегодня мы иногда воспринимаем ноль как «нечисло», несмотря на то, что все мы знаем, что он обладает собственной числовой значимостью; мы используем цифру 0 как символ-заполнитель, не связывая его с числом ноль. Ноль следует за цифрой 9, а не перед 1, где следовало бы. Не имеет значения, где находится символ-заполнитель, он может располагаться где угодно на числовой оси. Однако сегодня всем известно, что на самом деле ноль не может находиться где угодно, потому что имеет определенное собственное численное значение. Это число, которое отделяет положительные числа от отрицательных. Он является четным целым числом, предшествующим единице. Ноль должен находиться на своем законном месте – перед плюс единицей и после минус единицы. Никакое другое его положение не имеет смысла. Тем не менее ноль располагается в конце ряда на компьютерной клавиатуре и внизу экрана телефона, потому что мы всегда начинаем считать с единицы.

Единица представляется наиболее подходящей для начала счета, но это заставляет нас помещать ноль на неестественное для него место. Для других культур, как, например, майя, живших в Мексике и в Центральной Америке, начало счета с единицы вовсе не казалось рациональным. На самом деле майя имели систему чисел и календарь более логичные, чем наши. Как и у вавилонян, в их системе величина числа зависела от места, на котором стоит обозначающая его цифра. Единственным существенным отличием служило то, что вместо 60 в качестве основы майя использовали 20, с остатками более ранней десятичной системы. Как и вавилонянам, им требовался ноль, чтобы определять, что какая цифра значит. Для пущего интереса майя пользовались цифрами двух типов: простой основывался на точках и черточках, более сложный – на глифах, гротескных лицах. Нетрудно воочию убедиться, насколько странно сейчас выглядят цифры майя (рис. 3).

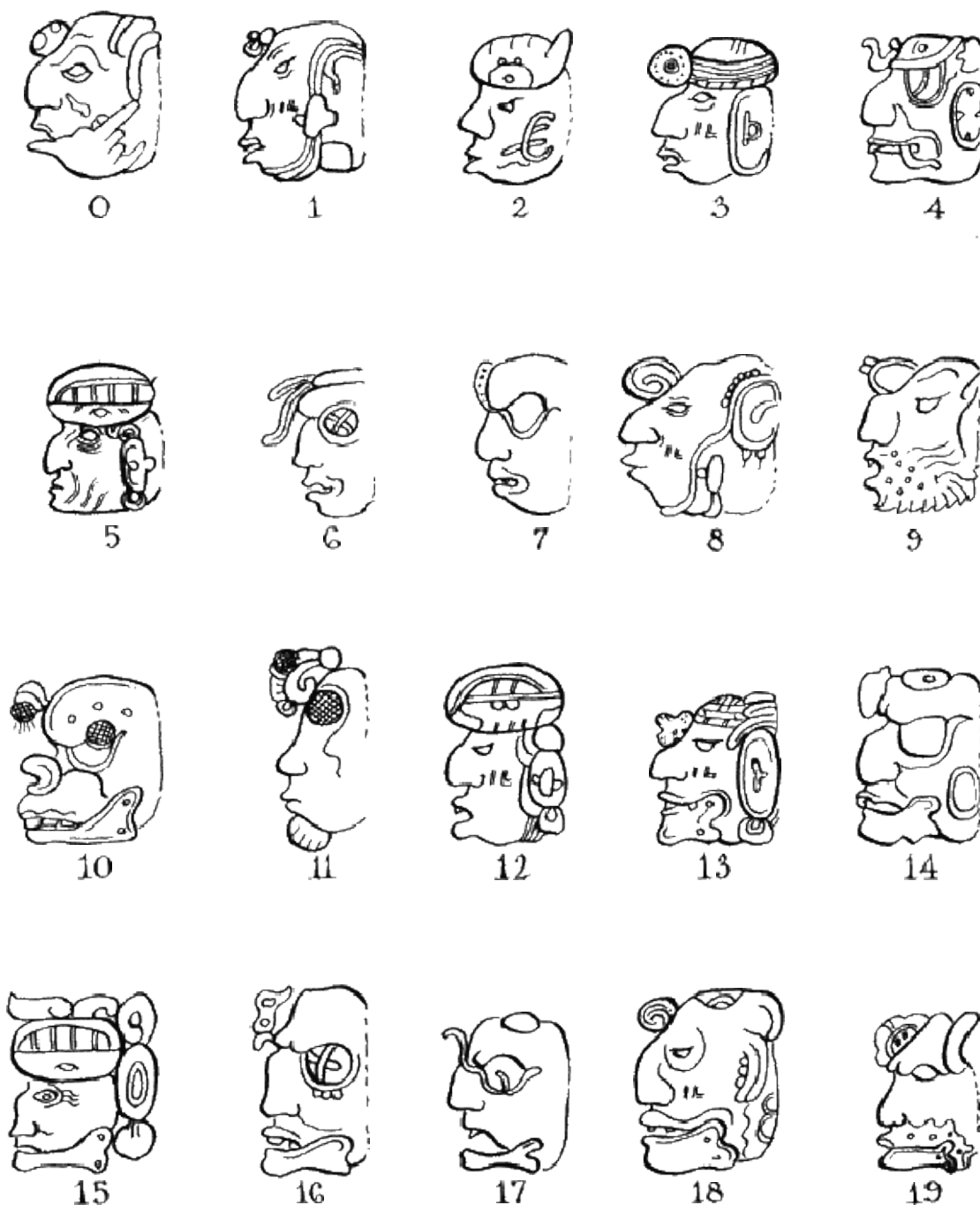


Рис. 3: Цифры майя

Как и египтяне, майя создали превосходный солнечный календарь. Поскольку их система счета основывалась на числе 20, майя, естественно, разделили год на 18 месяцев, по 20 дней каждый, что в сумме давало 360 дней. Особый период из пяти дней в конце года, называвшийся «уайеб», доводил общее количество до 365. В отличие от египтян, впрочем, майя включали в свою систему счета ноль, так что делали очевидную вещь: начинали отсчет дней с нуля. Первый день месяца – Зип, например, обычно именовался «установка» или «посадка» Зип. Следующим днем было 1 Зип, за ним следовало 2 Зип и так далее, пока не доходило до 19 Зип.

Потом наступала «посадка» Зоц – 0 Зоц; дальше следовало 1 Зоц и так далее. Каждый месяц имел 20 дней, имевших номера от 0 до 19, а не от 1 до 20, как мы делаем сегодня. (Майяский календарь был удивительно сложен. Помимо солнечного календаря, существовал ритуальный, состоявший из двадцати недель, по тринадцать дней каждая. В соединении с солнечным годом он давал календарный круг, в котором каждый день 52-летнего цикла имел

собственное название.)

Майская система была более осмысленной, чем западная. Поскольку западный календарь был создан во времена, когда ноль не существовало, мы не имеем ни нулевого дня, ни нулевого года. Это, казалось бы, незначительное упущение привело к огромным трудностям: вызвало разногласия по поводу начала тысячелетия. Майя никогда не стали бы спорить о том, является ли первым годом XXI века 2000 или 2001 год. Однако наш календарь создавали не майя, это были египтяне, а позже римляне. По этой причине мы оказались с неудобным, лишенным нуля календарем.

Отсутствие нуля у египтян повредило и календарю, и будущему западной математики. На самом деле египетская цивилизация повредила математике не в единственном отношении. Будущие трудности оказались связаны не только с отсутствием нуля. У египтян был чрезвычайно громоздкий способ обращаться с дробями. Они не думали о $3/4$ как об отношении трех к четырем, как мы делаем сегодня; они рассматривали $3/4$ как сумму $1/2$ и $1/4$. За единственным исключением – $2/3$ – все египетские дроби записывались как суммы чисел, имеющих вид $1/n$ (где n – натуральное число), – так называемые дробные единицы. Длинные цепочки этих дробных единиц делали чрезвычайно трудными манипуляции с дробями в египетской (и греческой) системе счисления.

Наличие нуля делает эту громоздкую систему устаревшей. В вавилонской системе, имевшей ноль, записывать дроби было легко. Как мы можем заменить $1/2$ выражением 0,5, а $3/4$ – 0,75, вавилоняне использовали выражения 0,30 для $1/2$ и 0,45 для $3/4$ (на самом деле вавилонская шестидесятеричная система даже лучше подходила для записи дробей, чем наша современная десятиричная).

К несчастью, греки и римляне настолько ненавидели ноль, что держались за запись по египетскому образцу и не переходили на вавилонскую систему, несмотря на то, что пользоваться последней легче. Для сложных вычислений, какие, например, нужны для астрономических таблиц, греческая система была такой громоздкой, что математики преобразовывали дробные единицы в вавилонскую шестидесятеричную систему, выполняли вычисления, а затем переводили ответ обратно на греческий лад. Они могли бы избавить себя от многих трудоемких действий (мы все знаем, как надоедает переводить дроби из одного вида в другой). Однако греки так презирали ноль, что отказывались использовать его в своих записях, несмотря на то, что видели, насколько он полезен. Причина этого крылась в том, что ноль был опасен.

Устрашающие свойства пустоты

*В начале времен, когда жил Имир,
не было в мире ни песка, ни моря,
земли еще не было и небосвода,
бездна зияла, трава не росла.*

Старшая Эдда³

Трудно представить себе, что можно бояться числа. Однако ноль был неразрывно связан с бездной – с пустотой. Людей преследовал изначальный страх перед бездной и хаосом, а также и перед нулем.

³ Старшая Эдда / Пер. А. Корзуна. М.: Худ. лит., 1975.

Древние народы верили, что до возникновения Вселенной существовали только пустота и хаос. Древние греки утверждали, что сначала матерью всего была тьма, а из тьмы возник хаос. Тьма и хаос породили остальную Вселенную. Еврейские предания о сотворении мира говорят, что земля была в состоянии хаоса и пустоты, пока Бог не пролил свет и не придал ему его свойства. На иврите это выражается так: *tohu v'bohu*. Роберт Грейвз связывает *tohu* с Техомотом, доисторическим семитским драконом, свидетелем рождения Вселенной, тело которого стало небом и землей. *Bohu* связывалось с Бегемотом, знаменитым чудовищем из еврейских легенд. Согласно древнеиндийской традиции, Создатель сбивал масло из хаоса и превратил его в землю, а северный миф рассказывает о том, как открытая бездна покрылась льдом, а из хаоса, порожденного смешением огня и льда, возник первобытный великан. Пустота и беспорядок были изначальным естественным состоянием космоса, и всегда существовал грызущий страх перед тем, что в конце времен беспорядок и бездна воцарятся снова. Ноль олицетворял собой эту бездну.

Однако страх перед нолем коренился глубже, чем страх бездны. Для древних математические свойства ноля были непостижимы, столь же окутаны тайной, как и рождение Вселенной. Причина этого крылась в том, что ноль отличается от всех остальных чисел. В отличие от других цифр в вавилонской системе, нолю никогда не позволялось стоять в одиночку – и не без основания. Оказавшись сам по себе, ноль ведет себя странно, по крайней мере не так, как остальные числа.

Если прибавить число к самому себе, оно изменится. Один плюс один – уже не один, а два. Два и два дают четыре. А вот ноль плюс ноль есть ноль. Это нарушает основной принцип счисления, называемый аксиомой Архимеда и говорящий, что если прибавлять число к самому себе достаточное количество раз, результат превзойдет по величине любое другое число. (Аксиома Архимеда была сформулирована в терминах площадей; число рассматривалось как разница между двумя неравными площадями.) Ноль же отказывается увеличиваться. Он также отказывается увеличивать любое другое число. Сложите два и ноль, и вы получите два; дело выглядит так, словно вы и не складывали ничего. То же самое происходит и при вычитании. Отнимите ноль от двух, и вы получите два. Ноль не имеет реальности. Однако это лишенное реальности число угрожает нарушить простейшие математические операции, такие как умножение и деление.

В области чисел умножение означает растяжение – в буквальном смысле слова. Представьте себе, что числовая ось – это резиновая лента с делениями на ней (рис. 4). Умножение на два может рассматриваться как растяжение резиновой ленты вдвое: то деление, которое приходилось на отметку «один», теперь переместилось на «два»; приходившееся на «три» – на «шесть». Аналогично умножение на одну вторую сходно с некоторым сжатием резиновой ленты: деление на «два» перемещается на «один», деление на «три» – на «полтора».

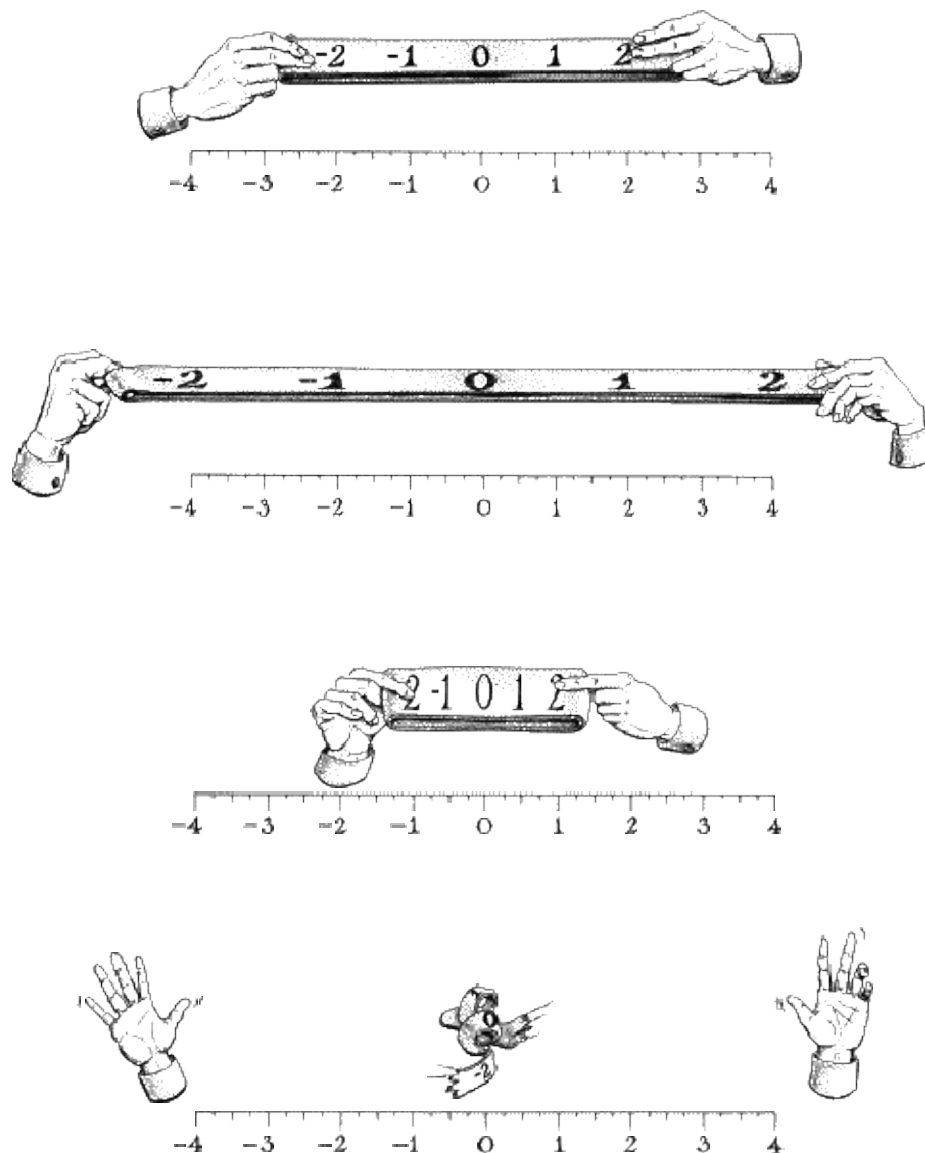


Рис. 4. Резиновая лента для умножения

Но что происходит при умножении на ноль? Сколько бы раз ни взять ноль, все равно будет ноль, и все деления соберутся на ноле. Резиновая лента порвалась. Вся числовая ось нарушилась.

К несчастью, нет способа обойти этот неприятный факт. Любое число ноль раз – ноль; это свойство нашей системы счисления. Чтобы в повседневно используемых числах был смысл, они должны обладать тем, что именуется свойством дистрибутивности, что лучше всего видно на примере. Представьте себе, что в магазине игрушек мячи продаются по две штуки, а кубики – по три. Соседний магазин игрушек торгует наборами из двух мячей и трех кубиков. Каждая упаковка из двух мячей и каждая упаковка из трех кубиков – такой же один предмет, как и упаковка с набором мячей и кубиков из соседнего магазина. Если быть последовательным, то покупка семи упаковок мячей и семи упаковок кубиков в первом магазине должна быть тем же самым, что и покупка семи наборов во втором. Это и есть свойство дистрибутивности. Используя математическую запись, мы выразили бы это так: $7 \times 2 + 7 \times 3 = 7 \times (2 + 3)$. Все получается правильно.

Если же применить это свойство к нулю, получается нечто странное. Мы знаем, что $0 + 0 = 0$. Возьмем в качестве примера число 2. $2 + 0 = 2 + (0 + 0)$; согласно свойству дистрибутивности, мы также знаем, что $2 \times (0 + 0)$ – то же самое, что $2 \times 0 + 2 \times 0$. Однако это

означает, что $2 \times 0 = 2 \times 0 + 2 \times 0$. Чем бы ни было 2×0 , когда вы прибавляете это число к самому себе, оно остается тем же самым, очень похожим на ноль. На самом деле это он и есть. Если вычтете 2×0 из обеих частей равенства, мы увидим, что $0 = 2 \times 0$. Таким образом, что бы вы ни делали, умножение числа на ноль дает ноль. Это злобное число сжимает числовую ось в точку. Однако сколь бы досадным ни было это свойство, истинная сила ноля делается очевидной при делении, а не умножении.

Если умножение растягивает числовую ось, то деление сжимает ее. Умножьте какое-нибудь число на два, и вы растянете резиновую ленту – числовую ось – вдвое; разделите результат на два, и резиновая лента сожмется вдвое, произведя действие, обратное умножению. Производя деление, вы уничтожаете следствие умножения: метка на резиновой ленте, переместившаяся на новое место, возвращается в прежнее положение.

Мы видели, что произошло при умножении числа на ноль: числовая ось была уничтожена. Деление на ноль должно было быть противоположностью умножению на ноль – оно должно было бы восстановить числовую ось. К несчастью, этого не происходит.

В предыдущем примере мы видели, что 2×0 есть 0. Таким образом, чтобы совершить действие, обратное умножению, мы должны предположить, что $(2 \times 0) / 0$ вернет нас к 2. Точно так же $(3 \times 0) / 0$ должно вернуть нас к 3, $(4 \times 0) / 0$ – к 4... Однако каждое из чисел 2×0 , 3×0 , 4×0 , как мы видели, равно 0, так что $(2 \times 0) / 0 = 0 / 0$, $(3 \times 0) / 0 = 0 / 0$, $(4 \times 0) / 0 = 0 / 0$. Увы, это означает, что $0 / 0 = 2$, а также $0 / 0 = 3$, $0 / 0 = 4$... Это же бессмыслица!

Странные вещи происходят и в том случае, если мы посмотрим на $1 / 0$ с другой точки зрения. Умножение на ноль должно произвести действие, обратное делению на ноль, так что $1 / 0 \times 0$ должно быть равно 1. Однако мы видели, что любое число, умноженное на ноль, дает ноль. Нет такого числа, которое, умноженное на ноль, давало бы 1, по крайней мере, среди чисел, с которыми мы встречались.

Хуже всего то, что если вы необдуманно разделите на ноль, вы можете разрушить все основы логики и математики. Достаточно всего один раз – один-единственный – разделить на ноль, и это позволит вам математически доказать все что угодно. Вы сможете доказать, что $1 + 1 = 42$, а из этого вывести, что Эдгар Гувер был инопланетянином, Уильям Шекспир – узбеком, и даже что небо – в горошек. (Приложение А поможет вам доказать, что Уинстон Черчилль был морковкой.)

Умножение на ноль уничтожает числовую ось. Однако деление на ноль разрушает всю систему математики.

Это простое число обладает большим могуществом. Оно стало самым важным математическим инструментом. Однако благодаря своим странным математическим и философским свойствам ноль пришел в столкновение с фундаментальной западной философией.

Глава 2

Из ничего ничто и выйдет

Запад отвергает ноль

Ничто не возникает из ничего.

Лукреций. «О природе вещей»⁴

Ноль вступил в противоречие с одним из центральных принципов западной философии, утверждением, корни которого уходят в нумерологию Пифагора и парадоксы Зенона. На этом основании покоилась вся греческая философия: пустоты не существует.

Греческая вселенная, созданная Пифагором, Аристотелем и Птолемеем, выжила и после падения греческой цивилизации. В этой вселенной не существует такой вещи, как ничто. Ноля не существует. По этой причине Запад почти два тысячелетия не мог принять ноль. Последствия этого были печальны. Отсутствие ноля препятствовало росту математики, душило новое в науке и попутно вызвало путаницу с календарем. Прежде чем принять ноль, философы Запада должны были разрушить свою вселенную.

Происхождение греческой философии чисел

В начале была пропорция, и пропорция была у Бога, и пропорция была Богом.

Иоанн, 1:1⁵

Египтяне, которые изобрели геометрию, не особенно задумывались о математике. Для них это был всего лишь инструмент измерения хода времени и земельных участков. Отношение греков было совсем иным. Для них числа и философия были нераздельны, и к обоим они относились очень серьезно. Греки заходили слишком далеко, когда дело касалось чисел. В прямом смысле слова.

...Гиппас из Метапонта стоял на палубе, готовясь к смерти. Вокруг него стояли последователи культа, тайного братства, которое он предал. Гиппас раскрыл секрет, который был смертельно опасен для греческого мышления, секрет, который грозил подорвать всю философию братства. За это сам великий Пифагор приговорил его к смерти через утопление. Для защиты своей философии – нумерологии – братство готово было убивать. Однако как ни смертелен был секрет, раскрытый Гиппасом, он был незначителен по сравнению с опасностями, которые таил ноль!

Возглавлял культ Пифагор, древний радикалист. Согласно большинству источников, он родился в VI веке до н. э. на Самосе, греческом острове у побережья современной Турции, знаменитом своим храмом Геры и великолепным вином. Даже по стандартам суеверных древних греков взгляды Пифагора были эксцентричны. Он был твердо убежден, что он – реинкарнация Эуфорба, троянского героя. Это помогало Пифагору верить в то, что все души – включая души животных – возрождаются после смерти в других телах. По этой причине он придерживался вегетарианства. Бобы, впрочем, находились под запретом, поскольку они вызывают скопление газов и по виду напоминают гениталии.

Пифагор мог бы быть древним последователем нью-эйдж; он был красноречивым оратором, признанным ученым и харизматичным учителем. Говорят, он написал конституцию для живущих в Италии греков. Ученики стекались к нему, и он скоро приобрел множество последователей, которые хотели учиться у мастера.

⁴ Лукреций Кар. О природе вещей / Пер. Ф. Петровского. М.: Худ. лит., 1983.

⁵ Греческое слово, обозначающее пропорцию – *logos*, – имеет также значение «слово». Приведенный перевод даже более точен, чем традиционный (прим. авт.).

Пифагорейцы жили согласно учению своего вождя. Среди прочего они верили, что заниматься любовью лучше всего зимой, а не летом; что все болезни вызываются несварением; что следует есть сырую пищу и пить только воду; что не следует носить одежду из шерсти. Однако в центре их философии находился самый важный принцип: все есть число.

Греки унаследовали числа от геометров-египтян. В результате в греческой математике не было существенного различия между фигурами и числами; для греческих философов-математиков они были примерно одним и тем же. Даже сегодня у нас имеются, благодаря их значимости, квадраты целых чисел и треугольные числа (*рис. 5*). В те дни доказать математическую теорему часто было все равно, что нарисовать прекрасную картину; инструментами древнегреческих математиков были не карандаш и бумага, это были линейка и циркуль. Для Пифагора связь между фигурами и числами была глубокой и таинственной. Каждое число-форма имело скрытое значение, а самые красивые из них были священны.

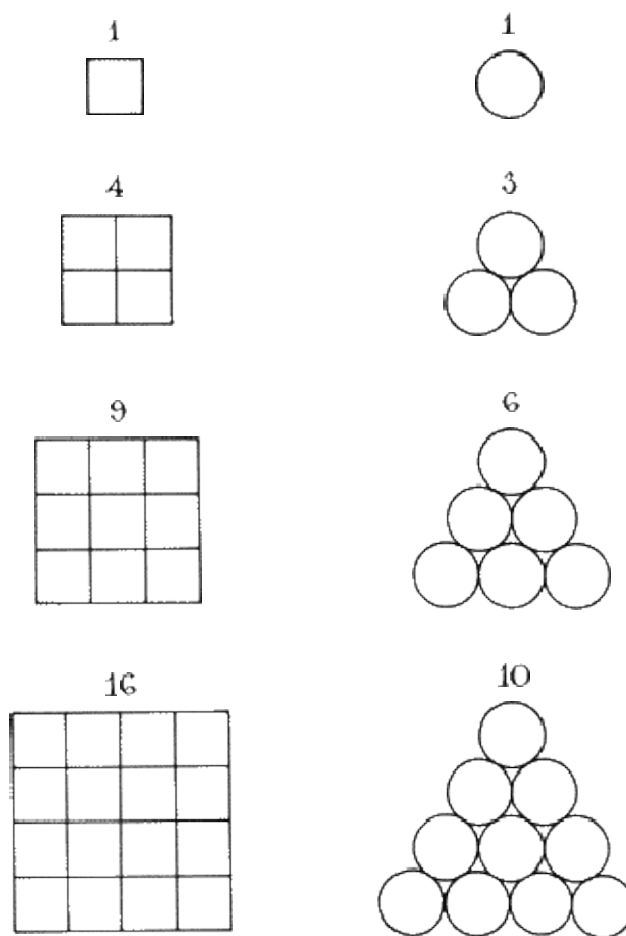


Рис. 5. Квадраты чисел и треугольные числа

Мистическим символом пифагорейского культа была, естественно, «число-форма»: пентаграмма, пятилучевая звезда. Эта простая фигура – взгляд в бесконечность. В сердцевине линий звезды лежит пятиугольник. Соединение углов пятиугольника прямыми создает маленькую повернутую вверх ногами пятилучевую звезду, в своих пропорциях точно такую же, как исходная. Эта звезда в свою очередь содержит еще меньший пятиугольник, а тот – еще меньшую звезду с ее крохотным пятиугольником и так далее (*рис. 6*). Как это ни любопытно, для пифагорейцев самой важной особенностью пентаграммы было не это самоповторение, но нечто скрытое среди прямых, составляющих звезду: золотое сечение, суть пифагорейского взгляда на Вселенную.

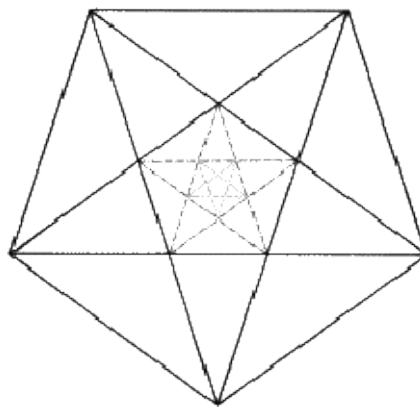


Рис. 6. Пентаграмма

Важность золотого сечения связана с открытием Пифагора, о котором теперь редко вспоминают.

В современной школе дети узнают о Пифагоре по его знаменитой теореме: квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. Однако на самом деле это было давно известно. Такое открытие было сделано более чем за тысячу лет до Пифагора. В Древней Греции Пифагор был знаменит другим открытием: музыкальной гаммой.

основного. Незначительное перемещение подставки может разделить струну так, что на одну часть придется три пятых длины струны, а на другую – две пятых; в этом случае, как заметил Пифагор, отрезки струны издадут две ноты, образующие вверх и вниз от основного тона чистую квинту, которая, как считалось, выражает самое мощное и запоминающееся музыкальное переживание. Другие соотношения дают другие тона, которые могут успокаивать или беспокоить. (Диссонирующий интервал тритон, состоящий из трех целых тонов, например, был прозван «дьяволом в музыке» и отвергался средневековыми музыкантами.) Станным было то, что когда Пифагор помещал подставку так, что струна разделялась не в простой пропорции, извлекаемые ноты плохо сочетались. Звуки обычно оказывались диссонирующими, а иногда и хуже. Часто тон шатался, как пьяный, по гамме.

Для Пифагора исполнение музыки было математическим действием. Как квадраты и треугольники, струна являлась для него «число-формой», так что деление струны на части оказывалось тем же, что и нахождение отношения двух чисел. Гармония монохорда была гармонией математики – и гармонией Вселенной.

Пифагор пришел к заключению, что пропорция управляет не только музыкой, но и всеми другими видами красоты. Для пифагорейцев отношения и пропорции контролировали музыкальную красоту, физическую красоту, красоту математическую. Понять природу было так же просто, как понять математические законы пропорций. Такая философия – взаимозависимость музыки, математики и природы – вела к созданию самой ранней пифагорейской модели расположения планет. Пифагор утверждал, что Земля находится в центре Вселенной, а Солнце, Луна, планеты и звезды вращаются вокруг Земли, находясь внутри сфер (рис. 8). Пропорции сфер были прекрасны и упорядочены, и когда сферы двигались, они издавали музыку. Самые дальние планеты, Юпитер и Сатурн, двигались быстрее всего и производили самые высокие звуки. Самые ближние, такие как Луна, издавали более низкие ноты.



Рис. 8. Пифагорейская Вселенная

Все вместе движущиеся небесные тела создавали «музыку сфер»; небеса представляли собой прекрасный математический оркестр. Именно это Пифагор и имел в виду, говоря: «Все есть число».

Поскольку пропорции были ключом к пониманию природы, пифагорейцы и более поздние греческие математики тратили много сил на изучение их свойств. В конце концов они разделили пропорции на десять различных классов, назвав их гармоническим средним. Одно из этих средних давало самое «красивое» число на свете: золотое сечение.

Достижение этого восхитительного среднего было делом особого деления струны: нужно было разделить ее на две части так, чтобы отношение меньшей части к большей было таким же, как отношение большей части к целому (см. Приложение В). Выраженное словесно, такое отношение не кажется чем-то особенным, однако числа, связанные с золотым сечением, представлялись самыми красивыми объектами. Даже сегодня художники и архитекторы интуитивно ощущают, что такое соотношение длины и ширины наиболее эстетически привлекательно, а потому золотое сечение определяет пропорции многих произведений искусства. Некоторые историки и математики утверждают, что Парфенон, величественный афинский храм, был построен так, что золотое сечение осуществлено во всех его частях и деталях. Даже природа, кажется, учитывает золотое сечение в своих созданиях. Сравните соотношение размеров любых двух соседних камер раковины наутилуса или отношение направленных по часовой стрелке и против нее углублений на ананасе, и вы увидите, что эти пропорции близки к золотому сечению (рис. 9).

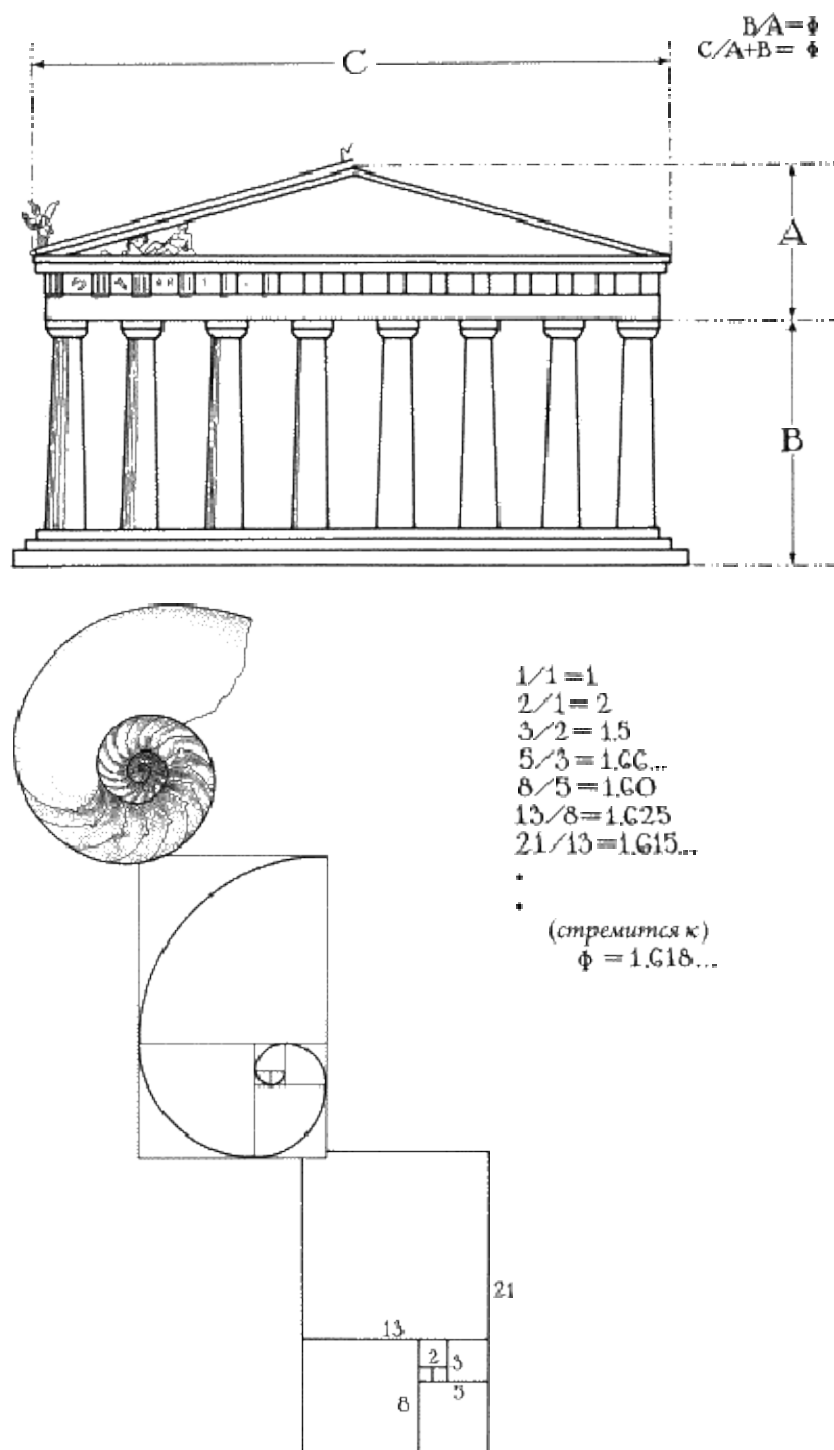


Рис. 9. Парфенон, раковина наutilus и золотое сечение

Пентаграмма стала священным символом для братства пифагорейцев, потому что элементы звезды разделяются именно так: пентаграмма полна примеров золотого сечения, а для пифагорейцев золотое сечение было царем чисел. Тот факт, что золотое сечение было излюбленным соотношением и художников, и природы, считался доказательством правильности утверждения пифагорейцев о том, что музыка, красота, архитектура, природа и само строение космоса связаны между собой и нераздельны. На взгляд пифагорейцев, пропорции правили миром, а то, что было истиной для пифагорейцев, скоро стало истиной для всего Запада. Сверхъестественная связь между эстетикой, пропорциями и вселенной надолго сделалась центральным принципом западной цивилизации. Еще во времена Шекспира ученые

говорили о революции разных пропорций сфер и обсуждали небесную музыку, звучащую по всему космосу.

В системе Пифагора ноль не было места. Эквивалентность чисел и фигур делала древних греков повелителями геометрии, однако она была связана с серьезным недостатком. Она мешала тому, чтобы рассматривать ноль как число. Какая фигура, в конце концов, могла быть нолем?

Легко визуально представить себе квадрат шириной и высотой в две единицы, но что за квадрат с нулевой шириной и высотой? Трудно представить себе квадрат, не имеющий ни ширины, ни высоты, не имеющий никакой материальности. Это означало, что умножение на ноль бессмысленно. Умножение двух чисел эквивалентно нахождению площади прямоугольника, но какой может быть площадь прямоугольника с нулевой высотой или шириной?

Сегодня великие нерешенные проблемы математики формулируются в теоретических формулах, которые математики не в силах доказать. В древней Греции, однако, «число-формы» побуждали мыслить иначе. Знаменитые нерешенные вопросы имели геометрическую форму: имея только линейку и циркуль, можно ли было построить квадрат, площадью равный заданному кругу? Можно ли было с помощью этих инструментов разделить угол на три части?⁶ Геометрические построения и фигуры были одним и тем же. Ноль был числом, которое не имело никакого геометрического смысла, так что, чтобы включить его в свою математику, грекам пришлось бы полностью изменить способ вычислений. Они предпочли этого не делать.

Даже если бы ноль был числом в греческом смысле, составление пропорции с участием ноля противоречило бы законам природы. Пропорция больше не выражала бы отношение между двумя объектами. Частное от деления ноля на что угодно – на любое число – всегда равно нолю; другое число полностью поглощается нолем. А частное от деления чего угодно на ноль – числа на ноль – может разрушить логику. Ноль пробил бы дыру в аккуратном пифагорейском порядке Вселенной; по этой причине его нельзя было терпеть.

Пифагорейцы попытались дать отпор другой тревожащей математической концепции – понятию иррационального. Это был первый вызов их взглядам, и братство попыталось держать все в тайне. Когда секрет просочился наружу, последователи культа прибегли к насилию.

Понятие иррациональности таилось внутри греческой математики, как бомба с часовым механизмом. Благодаря двойственности «число-формы» греческое исчисление было равносильно измерению прямой. Таким образом, отношение двух чисел было не более чем сравнением двух отрезков разной длины. Однако для любого измерения требуется стандарт, общая мера для сравнения с величиной отрезков. Например, представьте себе отрезок прямой длиной ровно в фут. Сделайте отметку, скажем, на расстоянии пяти с половиной дюймов от одного конца, которая разделит фут на две неравные части. Греки вычислили бы пропорцию с помощью деления отрезка на маленькие кусочки, используя, например, стандартную мерку в полдюйма. Одна часть отрезка содержала бы одиннадцать таких мер, а другая – тринадцать. Отношение двух отрезков, таким образом, было бы 11:13.

Для того чтобы все вещи во Вселенной управлялись пропорциями, как надеялись пифагорейцы, любое имеющее смысл явление должно было быть связано с безупречной, точной пропорцией. Она в буквальном смысле слова должна была быть рациональной. Точнее,

⁶ Ранние вавилоняне явно не осознавали трудности трисекции угла. В эпосе о Гильгамеше говорится, что Гильгамеш был на две трети богом и на одну треть человеком. Это так же невозможно, как деление угла на три равные части с помощью линейки и циркуля – если только не считать, что богам удалось совершить бесконечное количество половых актов со смертными до рождения Гильгамеша (*прим. авт.*).

пропорции должны были иметь вид a / b , где a и b были бы безупречными, точными натуральными числами, такими как 1, 2 или 47. (Математики предупреждают, что b не должно быть нулем, потому что это было бы равнозначно делению на ноль, что, как мы знаем, катастрофично.)

Нет необходимости говорить: Вселенная вовсе не так упорядочена. Некоторые числа не могут быть выражены в виде простого отношения a / b . Эти иррациональные числа были неизбежным следствием греческой математики.

Квадрат – одна из простейших геометрических фигур, и пифагорейцы должным образом ценили его. (Квадрат имеет четыре стороны, что соответствует четырем элементам; он символизирует совершенство чисел.) Однако в простоте квадрата прячется иррациональность. Она появляется, если вы проведете диагональ – из одного угла в противоположный. В качестве конкретного примера представьте себе квадрат со стороной в один фут. Проведите диагональ. Одержимые рациональностью люди, такие как греки, смотрели на сторону и диагональ квадрата и спрашивали себя: каково отношение этих двух отрезков?

Первым шагом было бы создать общую мерку, может быть, маленькую линейку в полдюйма длиной. Следующим шагом было бы использование этой мерки, чтобы разделить оба отрезка на одинаковые части. Пользуясь полдюймовой меркой, мы можем разделить сторону квадрата длиной в один фут на двадцать четыре части, каждая длиной в полдюйма. Но что получится, когда мы измерим диагональ? Используя ту же мерку, мы обнаружим... что диагональ состоит из почти тридцати четырех таких частей, но совсем точно не делится. Тридцать четвертый кусочек чуть-чуть не уместается, линейка торчит из угла квадрата. Мы можем усовершенствовать процесс, взять линейку длиной в одну шестую дюйма и разделить отрезки на большее число частей. Тогда сторона квадрата окажется состоящей из семидесяти двух частей, но диагональ будет содержать больше сто одной, но меньше сто двух частей. Измерение снова окажется несовершенным. Что случится, если мы разобьем отрезки на действительно маленькие части – в миллионную долю дюйма каждая? На сторону квадрата придется двенадцать миллионов кусочков, но диагональ будет содержать их чуть меньше, чем 16 970 563. Снова наша линейка не уляжется на оба отрезка в точности. Какую бы мерку мы ни выбрали, измерение так и не получится точным.

На самом деле сколь бы маленькую мерку мы ни использовали, невозможно найти такую, которая измерила бы сторону и диагональ квадрата в совершенстве: диагональ несоизмерима со стороной квадрата. Тем не менее без общей меры невозможно выразить длины двух отрезков так, чтобы они образовали пропорцию. Это значит, что для квадрата со стороной в единицу длины нельзя найти такие натуральные числа a и b , чтобы диагональ квадрата могла быть выражена как a / b . Другими словами, диагональ квадрата выражается числом иррациональным; сегодня мы понимаем, что это число – корень квадратный из двух.

Для пифагорейской доктрины это было бедой. Как природа могла управляться отношениями и пропорциями, когда нечто столь простое, как квадрат, было способно опровергнуть их язык? В такую идею пифагорейцам было трудно поверить, но она была неопровержима, будучи следствием математических законов, которые были им так дороги. Одно из первых математических доказательств в истории касалось несоизмеримости – иррациональности диагонали квадрата.

Иррациональность представляла опасность для Пифагора, поскольку угрожала основам его вселенной пропорций. Дело еще ухудшалось тем, что пифагорейцы скоро обнаружили: золотое сечение, величайший для них символ красоты и рациональности, также является иррациональным числом. Чтобы не дать этим ужасным числам разрушить доктрину Пифагора, иррациональные числа было решено засекретить. Все члены братства хранили молчание,

никому не позволялось делать записи, и несоизмеримость квадратного корня из двух сделалась глубочайшим, ужаснейшим секретом ордена пифагорейцев.

Однако иррациональные числа, в отличие от ноля, не могли игнорироваться греками. Иррациональные числа снова и снова возникали при всевозможных геометрических построениях. Было трудно хранить иррациональность в секрете от людей, настолько одержимых геометрией и пропорциями. Нельзя было избежать того, что в один прекрасный день кто-то не выдал бы секрет. Этим кем-то оказался Гиппас из Метапонта, математик и член пифагорейского братства. Тайна иррациональных чисел оказалась для него несчастьем.

Легенды весьма неопределенны и сообщают противоречивые сведения о предательстве Гиппаса и наказании за него. Математики по сей день рассказывают о несчастном, который раскрыл миру существование иррациональных чисел. Некоторые утверждают, что Гиппаса выбросили за борт в качестве заслуженного наказания за то, что он своими грубыми фактами разрушил прекрасную теорию. Одни древние авторы сообщают о его гибели в море за нечестивость, другие считают, что пифагорейцы изгнали Гиппаса из братства и соорудили его гробницу, исключив тем самым из мира живых. Однако какова бы ни была истинная судьба Гиппаса, не приходится сомневаться, что он был отвергнут своими братьями. Раскрытый секрет потряс самые основы пифагорейской доктрины, однако, объявив иррациональность аномалией, пифагорейцы смогли предотвратить искажение их взгляда на Вселенную. В конце концов греки неохотно включили иррациональные числа в область чисел. Пифагора убила не иррациональность, а бобы.

Легенды о кончине Пифагора являются столь же туманными, как и легенда об убийстве Гиппаса. Тем не менее все они утверждают, что смерть Пифагора была странной; некоторые источники говорят, что он уморил себя голодом, но самая распространенная версия – что причиной его смерти были бобы. Однажды его дом загорелся – его подожгли враги, рассвирепев, что их сочли недостойными видеть Пифагора. Члены братства разбежались, спасая свои жизни. Пифагорейцев убивали одного за другим, братство перестало существовать. Сам Пифагор бежал и мог спастись, если бы не оказался рядом с бобовым полем. Там он остановился, заявив, что скорее позволит себя убить, чем пересечет это поле. Его преследователи только обрадовались этому. Они перерезали Пифагору горло.

Хотя братство рассеялось, а его вождь погиб, пифагорейское учение продолжало жить. Оно скоро стало основой самой влиятельной философии в истории Запада – учения Аристотеля, владевшего умами на протяжении двух тысячелетий. Ноль противоречил этой доктрине и, в отличие от иррациональных чисел, его можно было игнорировать. Качества греческих «число-форм» делали это легкой задачей; в конце концов, ноль не был фигурой, а потому не мог быть числом.

Однако не вычислительная система греков и не недостаток знаний препятствовали принятию ноля. Греки узнали о нем благодаря своему интересу к ночному небу: как и большинство древних народов, они наблюдали за звездами. Первыми мастерами астрономии были вавилоняне; они узнали, как предсказывать затмения. Фалес, первый греческий астроном, научился этому у вавилонян или, возможно, у египтян. О нем говорили, что в 585 году до н. э. он предсказал солнечное затмение.

Вместе с вавилонской астрономией пришли и вавилонские числа. Для целей астрономии греки использовали шестидесятеричную систему и даже стали делить час на шестьдесят минут, а минуту – на шестьдесят секунд. Около 500 года до н. э. ноль – символ-заполнитель – начал появляться в вавилонских записях; его использование, естественно, распространилось и среди греческих астрономов. Во времена расцвета древней астрономии в греческих астрономических таблицах регулярно использовался ноль; его символом был строчный омикрон «ο», который

выглядит очень похоже на наш современный ноль, хотя это, возможно, совпадение. (Использование омикрона могло быть следствием того, что это первая буква греческого слова «ничто» – *ouden*). Греки не любили ноль и использовали его как можно реже. Выполнив вычисления по вавилонской системе, греческие астрономы обычно переводили числа обратно в громоздкую греческую форму – без ноля. Ноль никогда не использовался в числе древних цифр на Западе, так что маловероятно, что омикрон – прародитель нашего ноля. Греки видели пользу ноля для вычислений, но все равно отвергали его.

Это вызывалось не невежеством и не ограничениями греческой системы «число-форм», а философией. Ноль вступал в противоречие с фундаментальными философскими воззрениями Запада, поскольку ноль содержит две идеи, отравляющие западную доктрину. Действительно, эти концепции со временем разрушили аристотелевскую философию после ее долгого царствования. Опасные идеи были представлениями о пустоте и о бесконечности.

Бесконечность, пустота и Запад

*Тебя кусает под одежкой
Блоха, и в свой черед она
Укушена мельчайшей блошкой.
На меньшей меньшая сидит,
И все идет ad infinitum.*

Джонатан Свифт. «О поэзии: рапсодия»⁷

Бесконечность и пустота обладали могуществом, которое пугало греков. Бесконечность грозила сделать всякое движение невозможным, а пустота – разбить Вселенную вдребезги. Отвергая ноль, греческие философы придали своему взгляду на Вселенную жизнеспособность на протяжении двух тысячелетий.

Доктрина Пифагора сделалась краеугольным камнем западной философии: Вселенная управлялась отношениями и формами; планеты двигались по небесным сферам и в своем вращении создавали музыку сфер. Но что лежало за их пределами? Существовали ли все бóльшие и бóльшие сферы? Была ли самая внешняя из сфер концом Вселенной? Аристотель и более поздние философы настаивали на том, что не может существовать бесконечного числа сложенных друг в друга сфер. Приняв такую философию, Запад отверг возможность существования бесконечности или бесконечного, потому что бесконечность – благодаря Зенону Элейскому, человеку, которого его современники считали совершенно невыносимым, – начинала подгрызать корни западного мышления.

Зенон родился около 490 года до н. э., в начале Греко-персидских войн – великого конфликта между Востоком и Западом. Греки победили персов, однако греческая философия так и не смогла победить Зенона, потому что Зенон придумал парадокс, логическую загадку, которая для греческих философов представлялась неразрешимой. Для греков это был аргумент, вызывающий сильнейшее беспокойство: Зенон доказал невозможное.

Согласно Зенону, никакое движение во Вселенной невозможно⁸. Конечно, это глупое утверждение: любой человек может опровергнуть его, пройдясь по комнате. Хотя всем было

⁷ Английская классическая эпиграмма / Пер. С. Маршака и В. Васильева. М.: Худ. лит., 1987.

⁸ Строго говоря, автор здесь ошибается: речь идет не о невозможности движения, а о его *иллюзорности*. Благодаря Платону эта позиция прослеживается до Парменида, Зенон лишь красиво иллюстрирует идею.

ясно, что утверждение Зенона неверно, никто не мог найти ошибки в его рассуждениях. Парадоксы – логические загадки – Зенона ставили в тупик как греческих философов, так и тех, кто пришел после них; они озадачивали математиков почти две тысячи лет.

В своей самой знаменитой загадке – «Ахиллесе» – Зенон доказывает, что быстроногий Ахиллес никогда не догонит неуклюжую черепаху, если она имела преимущество на старте. Чтобы представить это более конкретно, придадим проблеме числовые значения. Предположим, что Ахиллес пробегает один фут в секунду, в то время как черепаха движется со скоростью в два раза меньшей. Предположим также, что черепаха изначально опережала Ахиллеса на один фут.

Ахиллес бежит вперед и за одну секунду достигает того места, где была черепаха. Однако за то время, что он добирается до этой точки, черепаха, которая тоже движется, проходит полфута. Неважно, Ахиллес ведь бежит быстрее, и за полсекунды он покрывает эти полфута. Однако опять же и черепаха за это время продвинулась вперед – на этот раз на четверть фута. Мгновенно – за четверть секунды – Ахиллес преодолевает и это расстояние. Но черепаха за четверть секунды проковыляла еще одну восьмую фута. Ахиллес бежит и бежит, но черепаха каждый раз перемещается вперед; как бы Ахиллес ни приблизился к черепахе, к тому времени, когда он достигает точки, где она только что была, черепаха проходит еще какое-то расстояние. Восьмую часть фута, шестнадцатую часть фута, тридцать вторую часть фута... все меньшее и меньшее расстояние, но все равно Ахиллес никак не может ее догнать. Черепаха всегда его опережает (*рис. 10*).

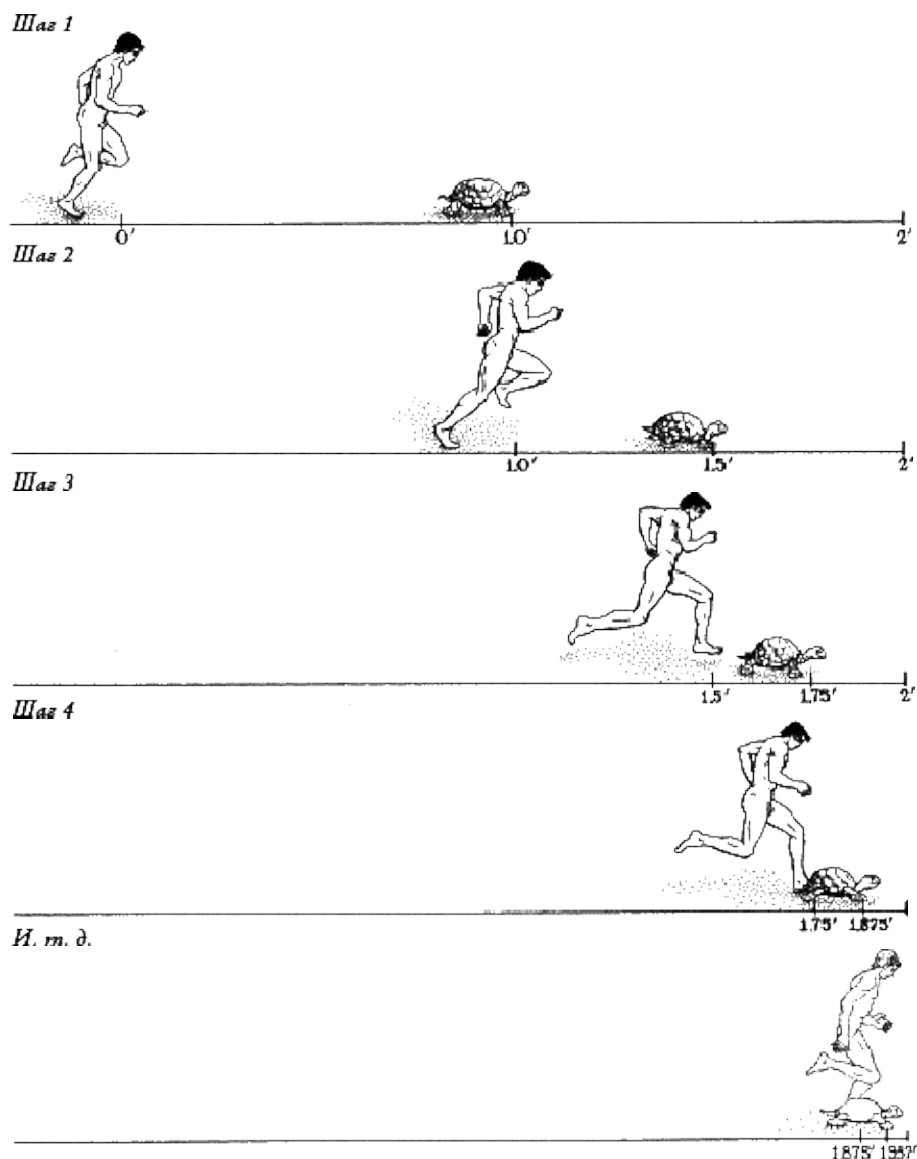


Рис. 10. Ахиллес и черепаха

Всем известно, что в реальном мире Ахиллес быстро пробежал бы мимо черепахи, однако рассуждения Зенона как будто доказывали, что он никогда ее не догонит. Философы – современники Зенона – не могли разрешить этот парадокс. Даже зная, что вывод неверен, они никак не могли найти ошибки в математическом доказательстве Зенона. Главным оружием философов была логика, но логическая дедукция представлялась бесполезной против доводов Зенона. Каждый шаг выглядел безупречным, но если все шаги правильны, как вывод может быть неверным?

Проблема поставила греков в тупик, однако они обнаружили источник неприятностей: это была бесконечность. В сердцевине парадокса Зенона кроется именно она: Зенон взял непрерывное движение и разделил его на бесконечное число крошечных шагов. Поскольку число шагов было бесконечным, греки сочли, что гонка будет длиться вечно, несмотря на то, что шаги становились все меньше и меньше. Гонка никогда не закончится в конечный отрезок времени – или так они думали. Древние не имели инструментария для того, чтобы справиться с бесконечностью, однако современные математики научились управлять с ней. Подходить к бесконечности нужно очень осторожно, но все же с ней можно совладать – с помощью ноля. Вооружившись математическими знаниями, полученными за две тысячи четыреста лет, нам

нетрудно вернуться и найти ахиллесову пяту Зенона.

У греков не было ноля, но у нас он есть, и в нем заключается ключ к разрешению загадки Зенона. Иногда возможно объединить бесконечные элементы и получить конечный результат, но для этого слагаемые элементы должны стремиться к нолю⁹. Так и обстоит дело с Ахиллесом и черепахой. Когда вы складываете расстояния, которые пробегает Ахиллес, вы начинаете с числа 1, потом прибавляете $1/2$, потом $1/4$, потом $1/8$ и так далее; элементы становятся все меньше и меньше, все больше приближаясь к нолю; каждый элемент есть шаг в путешествии, пунктом назначения которого является ноль. Впрочем, поскольку у греков не было ноля, они не могли понять, что это путешествие когда-нибудь кончится. Для них числа 1 , $1/2$, $1/4$, $1/8$, $1/16$ и так далее не вели к чему-то: пункт назначения не существовал. Вместо этого греки видели просто элементы, становившиеся все меньше и меньше, выходявшие за пределы области чисел.

Современные математики знают, что эти элементы имеют предел: последовательность чисел 1 , $1/2$, $1/4$, $1/8$, $1/16$ и так далее приближается к нолю как к своему пределу, и путешествие имеет пункт назначения. Как только это признано, легко поинтересоваться, как далеко отстоит пункт назначения и сколько времени потребуется, чтобы до него добраться. Не так уж трудно сложить расстояния, которые пробегает Ахиллес: $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \dots + 1/2^n + \dots$. Шаги, которые делает Ахиллес, становятся все меньше и меньше, все ближе и ближе к нолю, а сумма этих шагов оказывается все ближе и ближе к двум. Откуда мы это знаем? Что ж, начнем с двух и будем вычитать по одному элементу суммы. Начнем с $2 - 1$, что дает, конечно, 1 . Затем вычтем $1/2$; останется $1/2$. Затем вычтем следующий элемент – $1/4$; останется $1/4$... Мы вернулись к знакомой последовательности. Мы уже знаем, что ее предел – ноль; таким образом, по мере того, как мы вычитаем один за другим элементы из двух, не остается ничего. Предел суммы $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \dots$ равен 2 (рис. 11). Ахиллес пробежит 2 фута, чтобы догнать черепаху, хоть и сделает для этого бесконечное число шагов. Более того, посмотрим, сколько времени потребуется Ахиллесу, чтобы догнать черепаху: $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \dots = 2$ секунды. Ахиллес не только совершает бесконечное число шагов, чтобы пробежать конечное расстояние, но и тратит на это всего 2 секунды.

Греки не могли проделать этот ловкий математический трюк. У них не было понятия предела, потому что они не верили в ноль. Элементы бесконечной последовательности не имели предела, или пункта назначения; считалось, что они делаются меньше и меньше без какого-то определенного конца. В результате греки не могли справиться с бесконечностью. Они размышляли над концепцией пустоты, но отвергали ноль как число; они заигрывали с понятием бесконечности, но отказывались признать существование чисел, которые бесконечно малы или бесконечно велики. Это было величайшим недочетом греческой математики, и это было единственным, что помешало им открыть дифференциальное и интегральное исчисление.

⁹ Это необходимое, но не достаточное условие. Если элементы стремятся к нолю слишком медленно, то их сумма не сходится к конечному числу.



Рис. 11. $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \dots = 2$

Бесконечность, ноль и концепция предела связаны друг с другом. Греческие философы были не в силах распутать этот узел, поэтому не имели способа разрешить загадку Зенона. Однако парадокс Зенона был настолько важен, что греки снова и снова пытались объяснить содержащуюся в нем бесконечность. Они были обречены на неудачу, не имея нужных концепций.

Зенон сам не знал разрешения своего парадокса, да и не искал его. Парадокс полностью удовлетворял его философии. Зенон был членом элеатской школы, основатель которой, Парменид, утверждал, что подлинная Вселенная неизменна и неподвижна. Парадоксы Зенона служили подтверждением доводов Парменида. Показывая, что изменение и движение внутренне противоречивы, он рассчитывал убедить людей в том, что позади каждой изменяющейся вещи стоит нечто целостное и неизменное. Зенон и в самом деле верил в невозможность движения, и его парадокс был главной опорой этой теории.

Существовали и другие направления мысли. Атомисты, например, верили в то, что Вселенная состоит из маленьких частиц, именуемых атомами, неделимых и вечных. Движение, согласно взглядам атомистов, было движением этих маленьких частиц. Конечно, чтобы атомы могли двигаться, должно было существовать пустое пространство, куда они могли бы переместиться. В конце концов, крошечные атомы должны были как-то двигаться: не будь такой вещи, как вакуум, атомы оказались бы неизменно спрессованы друг с другом. Все замерло бы в одном положении навсегда, неспособное сдвинуться с места. Таким образом, атомистическая теория требовала, чтобы Вселенная была полна пустоты – бесконечной пустоты. Атомисты признавали концепцию бесконечного вакуума – бесконечность и ноль оказывались связаны воедино. Это было шокирующее заключение, однако неделимые частицы материи, провозглашенные атомистической теорией, позволяли обойти парадоксы Зенона. Поскольку атомы неделимы, существует точка, дальше которой деление невозможно. Уменьшение шагов, предполагавшееся Зеноном, не могло продолжаться до бесконечности. Через какое-то время Ахиллес стал бы делать шаги, которые уже не могли уменьшиться; в конце концов они достигли бы величины атома, преодолеть часть которой черепаха не может. Ахиллес наконец догнал бы неуловимую черепаху.

С атомистической теорией конкурировало другое философское учение. Вместо использования таких странных концепций, как бесконечный вакуум, оно изображало Вселенную в виде уютной ограниченности. Никакой бесконечности, никакой пустоты – только прекрасные сферы, окружающие Землю, которая, естественно, находится в центре Вселенной. Такова была система Аристотеля, впоследствии усовершенствованная александрийским астрономом Птолемеем. Она сделалась доминирующей философией западного мира. Отвергнув ноль и бесконечность, Аристотель объяснил парадоксы Зенона.

Он просто заявил, что математики «не нуждаются в бесконечности и не используют ее». Хотя «потенциальная» бесконечность могла бы существовать в уме – как концепция деления отрезка прямой на бесконечное число кусочков – никто в действительности не способен это сделать, так что на самом деле бесконечности не существует. Ахиллес без труда пробегает мимо черепахи, потому что бесконечные элементы – просто плод воображения Зенона, а не явление реального мира. Аристотель просто пожелал, чтобы бесконечности не существовало, заявив, что она – создание человеческого ума.

Из этой концепции следовало поразительное открытие. Согласно с представлением о пифагорейской вселенной, аристотелевский космос (и его позднейшее усовершенствование Птолемеем) состоял из хрустальных сфер, в которых двигались планеты. Однако, поскольку бесконечность была отвергнута, таких сфер не могло быть бесконечное число; обязательно должна была существовать последняя. Эта самая дальняя сфера представляла собой синий шар, испещренный крошечными сияющими точками – звездами. Не могло быть ничего «за пределами» внешней сферы; Вселенная резко заканчивалась с этим последним слоем. Она удобно покоилась внутри сферы неподвижных звезд; космос был конечен в своей протяженности и полностью заполнен материей. Не существовало ничего бесконечного, не существовало пустоты; не существовало бесконечности, не существовало ноля.

Эти рассуждения имели и другое следствие; как раз по этой причине аристотелевская философия продержалась так много лет. Теория Аристотеля доказывала существование Бога.

Небесные сферы медленно вращались на своих местах, рождая заполняющую космос музыку. Однако что-то должно было быть причиной этого движения. Неподвижная Земля не может быть источником движущей силы, так что ближайшая к ней сфера должна приводиться в движение следующей сферой; эта сфера, в свою очередь, – своим более крупным соседом и так далее. Однако бесконечности ведь не существует; число сфер конечно, конечно и число вещей, которые движут друг друга. Должна существовать первопричина движения, что-то должно двигать сферу неподвижных звезд. Это – первичная сила – Бог. Когда христианство распространилось на Западе, оно оказалось тесно связанным с аристотелевским взглядом на Вселенную и с доказательством существования Бога. Атомизм влек за собой атеизм. В некотором смысле сомнение в доктрине Аристотеля приравнивалось к сомнению в существовании Бога.

Система Аристотеля пользовалась огромным успехом. Его самый знаменитый ученик, Александр Македонский, успел распространить ее на восток до Индии до своей безвременной смерти в 323 году до н. э. Система Аристотеля пережила империю Александра, она просуществовала до времен королевы Елизаветы I, до XVI века. Вместе со столь долгим признанием учения Аристотеля имело место и отрицание бесконечности и пустоты, поскольку одно требовало другого: из признания пустоты следовало признание бесконечности. В конце концов, существуют всего две логические возможности объяснения пустоты, и обе предполагают существование бесконечности. Во-первых, пустоты могло бы быть сколь угодно много – значит, бесконечность существует. Во-вторых, пустоты могло бы быть ограниченное количество, однако поскольку пустота – просто отсутствие материи, должно было существовать бесконечное количество материи, чтобы обеспечить лишь ограниченное количество пустоты, – следовательно, бесконечность существует. В обоих случаях существование пустоты предполагает существование бесконечности. Пустота и ноль разрушают аккуратные рассуждения Аристотеля и его опровержение Зенона, его доказательство существования Бога. Поэтому, признав аргументы Аристотеля, греки были вынуждены отвергнуть ноль, пустоту и бесконечность.

Однако существовала проблема. Не так легко отвергнуть и бесконечность, и ноль.

Оглянемся во времени. На протяжении всей истории происходили события, но если не существует бесконечности, не может быть и бесконечного числа событий. Таким образом, должно было иметь место первое событие: творение. Однако что существовало до творения? Пустота? Для Аристотеля это было неприемлемо. Напротив, если не было первого события, Вселенная должна была существовать всегда – и всегда существовать в будущем. Приходилось признать или бесконечность, или ноль: без них Вселенная лишается смысла.

Аристотель так ненавидел идею пустоты, что предпочел признать существование вечной и бесконечной Вселенной существованию той, в которой имел бы место вакуум. Он говорил, что вечность была «потенциальной» бесконечностью, как бесконечное деление Зенона. (Это было натяжкой, но многие ученые согласились с таким аргументом, некоторые даже приняли историю творения как еще одно доказательство существования Бога. Средневековые философы и теологи были обречены сражаться с этой загадкой на протяжении нескольких столетий.)

Каким бы неверным ни был взгляд Аристотеля на физику, он был настолько влиятелен, что более тысячелетия затмевал все ему противоречащие, в том числе и более реалистические. Наука так и не могла бы двинуться вперед, пока мир не избавился от аристотелевой физики вместе с аристотелевым отрицанием бесконечностей Зенона.

Несмотря на всю свою ученость, Зенон впутался в крупные неприятности. Около 435 года до н. э. он вступил в заговор против тирана Элеи, Нearchа, и провозил оружие для его свержения. К несчастью для Зенона, Нearch узнал о заговоре, и Зенон был схвачен. Рассчитывая узнать, кто были его сообщники, Нearch подверг Зенона пыткам. Скоро Зенон стал умолять палачей прекратить пытки и пообещал назвать своих сотоварищей. Когда Нearch приблизился, Зенон настоял на том, чтобы тиран подошел совсем вплотную, потому что лучше было сохранить имена заговорщиков в секрете. Нearch наклонился к Зенону. Неожиданно тот вцепился зубами в ухо Нearchа. Нearch закричал, но Зенон не отпускал. Палачи смогли заставить его разжать зубы, только зарезав его. Так погиб повелитель бесконечного.

Со временем другой древний грек превзошел Зенона в вопросе бесконечного. Это был Архимед, эксцентричный математик из Сиракуз. Он был единственным мыслителем своего времени, бросившим взгляд в бесконечность.

Сиракузы были богатейшим городом острова Сицилия, а Архимед был их самым знаменитым жителем. О его юности мало что известно, по-видимому, он родился около 287 года до н. э. на Самосе, родине Пифагора. Перебравшись в Сиракузы, Архимед решал многие инженерные проблемы для их правителя, тирана Гиерона. Однажды тиран попросил Архимеда определить, изготовлена ли его корона из чистого золота или из сплава золота с серебром. Эта задача была не по силам всем ученым того времени. Однажды, погрузившись в ванну, Архимед заметил, что вода переливается через край. Он неожиданно подумал о том, что сможет измерить плотность короны и тем самым определить чистоту золота, погрузив ее в сосуд с водой и измерив объем вытесненной жидкости. Взволнованный своим прозрением, Архимед выскочил из ванны и побежал по улице Сиракуз, восклицая: «Эврика! Эврика!» и забыв о том, что совершенно гол.

Таланты Архимеда были полезны и войскам Сиракуз. В III веке до н. э. греческая гегемония прекратила существование. Империя Александра Македонского распалась на враждующие государства, и на Западе играла мышцами новая сила: Рим. И Рим имел виды на Сиракузы. Как говорит легенда, Архимед вооружил войско Сиракуз удивительным оружием для защиты города: катапультами, метавшими камни, мощными кранами, которые захватывали римские корабли, поднимали вверх и опрокидывали в воду, и зеркалами, отражавшими солнечный свет и таким образом на расстоянии поджигавшими римские суда. Римские солдаты так боялись этих боевых машин, что, увидев над стеной веревку или кусок дерева, обращались

в бегство, думая, что это Архимед нацеливает свое оружие.

Архимед увидел бесконечность благодаря полировке своих зеркал. Греки уже не одно столетие интересовались коническими сечениями. Если рассечь конус плоскостью, можно получить окружности, эллипсы, параболы и гиперболы, в зависимости от того, под каким углом к оси конуса проведена плоскость. Параболическое зеркало обладает одной особенностью: оно собирает в точку солнечные лучи (или лучи от любого удаленного источника света) и фокусирует всю переносимую ими энергию на очень малой площади. Зеркало, которое смогло бы поджечь корабль, должно было быть параболическим. Архимед изучал свойства параболы и именно при этом впервые соприкоснулся с бесконечностью.

Чтобы понять особенности параболы, Архимед должен был научиться измерять ее. Например, никто не знал, как определить площадь части плоскости, ограниченной параболой и пересекающей ее прямой. Площади треугольников и кругов вычислять было легко; слегка менее правильные кривые, вроде параболы, были за пределами возможностей математиков того времени. Однако Архимед нашел способ измерить площадь параболы, используя бесконечное приближение. Первым шагом было вписать в параболу треугольник. В два маленьких незанятых пространства Архимед вписывал по треугольнику. После этого оставалось четыре еще меньших зазора, которые в свою очередь заполнялись вписанными треугольниками, и так далее (рис. 12). Это похоже на Ахиллеса и черепаху: бесконечная серия шагов, каждый из которых делается все меньше и меньше. Площади маленьких треугольников быстро приближались к нулю.

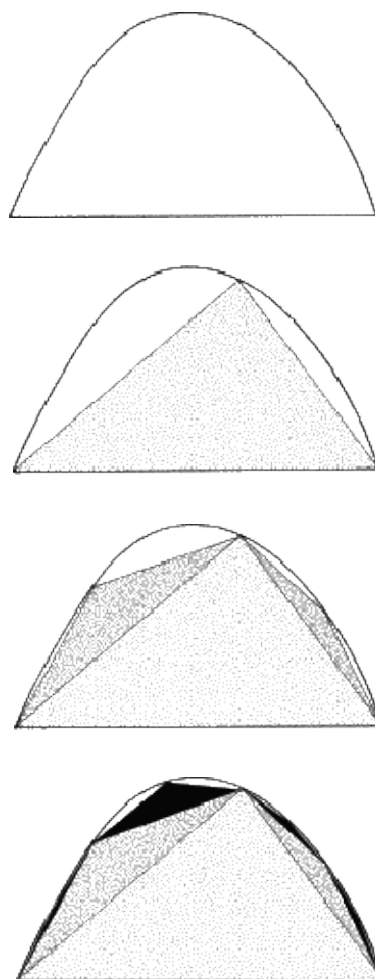


Рис. 12. Парабола Архимеда

После долгих и сложных вычислений Архимед сложил площади бесконечного числа треугольников и так нашел площадь параболы. Однако любой его современник отверг бы такое рассуждение: Архимед использовал такой инструмент, как бесконечность, который был категорически запрещен его коллегами-математиками. Чтобы их удовлетворить, Архимед предложил также доказательство, основанное на принятых тогда понятиях, использовавшее так называемую аксиому Архимеда, хотя сам Архимед приписывал заслугу ее открытия более ранним математикам. Как вы, возможно, помните, эта аксиома гласит, что любое число, снова и снова прибавляемое к самому себе, превзойдет любое другое число. Ноль, ясное дело, сюда не был включен.

Доказательство Архимеда с использованием треугольников было очень близко к идее предела и бесконечно малых, без их действительного открытия. В своих более поздних работах Архимед вычислил объемы тел вращения параболы и окружности вокруг прямой, что, как знает любой изучающий математику, есть одно из первых домашних заданий при изучении курса дифференциального и интегрального исчисления. Однако аксиома Архимеда отвергала ноль, который является мостом между областями конечных и бесконечных величин, мостом, абсолютно необходимым для дифференциального и интегрального исчисления и высшей математики.

Даже блестящий мыслитель Архимед иногда вместе со своими современниками пренебрегал нолем. Он верил в аристотелевскую вселенную, заключенную в гигантскую сферу. В шутку он решил вычислить, сколько песчинок заполнило бы (сферическую) Вселенную. В своем труде «Псаммит» («Исчисление песчинок») Архимед впервые подсчитал, сколько песчинок уляжется на семечке ромашки, сколько семечек ромашки уляжется на пальце... Перейдя от ширины пальца к стадию (стандартной греческой единице измерения расстояний), а затем к величине Вселенной, Архимед нашел, что Вселенную, заключенную во внешнюю сферу неподвижных звезд, заполнят 1051 песчинок. (1051 – это действительно очень, очень большое число. Если, например, взять 1051 молекул воды, то при условии, что каждый человек – мужчина, женщина и ребенок – будет выпивать по тонне воды в секунду, потребуется более 150 тысяч лет, чтобы такое количество воды было выпито.) Это число было настолько велико, что греческая система нумерации не могла с ним справиться. Архимеду пришлось изобрести новый способ записывать действительно огромные числа.

В греческой системе самым большим числом была мириада, и пересчитывая мириады, греки могли прийти до мириады мириад (100 000 000) и немного больше. Однако Архимед пошел дальше, «нажав кнопку перезагрузки». Он просто начал с мириады мириад, выбрав 100 000 000 в качестве единицы, и начал отсчет заново, назвав эти новые числа «числами второго порядка». (Архимед не считал 100 000 001 равным единице, а 100 000 000 – равным ноллю, как поступил бы современный математик. Архимеду не приходило в голову, что начало с нуля было бы более осмысленным.) Числа второго порядка шли от мириады мириад до мириады мириад мириад мириад мириад (1 000 000 000 000 000 000 000 000). Так продолжалось, пока Архимед не добрался до мириады в степени мириады, что он назвал числами первого периода. Это был очень громоздкий способ справиться с проблемой, однако так достигалось решение и даже давало гораздо большие возможности, чем Архимеду требовалось для его мысленного эксперимента.

Однако как бы ни велики были придуманные Архимедом числа, они были конечными – и их было достаточно, чтобы переполнить Вселенную песком. Бесконечность не была нужна в греческой Вселенной. Возможно, имея больше времени, Архимед начал бы видеть соблазн бесконечного и нуля. Однако ученый встретил свою судьбу, когда пересчитывал песчинки. Римляне были слишком сильны для Сиракуз. Воспользовавшись малым числом защитников

сторожевой башни и легкой возможностью влезть на стену, римляне сумели проникнуть в город. Как только жители Сиракуз обнаружили, что римские солдаты уже внутри стен, они так перепугались, что и не думали о сопротивлении. Римляне хлынули в город, но Архимед был глух к царившей вокруг панике. Он сидел на земле и чертил окружности на песке, стараясь доказать теорему. Римский солдат увидел перед собой оборванного 75-летнего старика и потребовал, чтобы тот шел за ним. Архимед отказался, потому что доказательство было еще не закончено. Обозленный солдат зарезал его. Так погиб величайший мыслитель древнего мира, бессмысленно убитый римлянином.

Убийство Архимеда оказалось одним из величайших вкладов римлян в математику. Римская эра длилась около семи столетий. Все это время заметного развития математики не происходило. История шла вперед: христианство распространилось по Европе, Римская империя пала, Александрийская библиотека была сожжена, и начались Темные века. Прошло еще семь столетий, прежде чем Запад вновь приблизился к открытию ноля. Тем временем два монаха разработали календарь без ноля, чем обрекли нас на вечную путаницу.

Свидания вслепую

Это глупая ребяческая дискуссия, только показывающая недостаток мозгов у тех, кто придерживается мнения, противоположного высказанному нами.

The Times, 26 декабря 1799 года

Эта «глупая ребяческая дискуссия» – о том, начинается ли новый век с года 00 или с года 01, – снова и снова возникает каждую сотню лет. Если бы только средневековые монахи знали о ноле, наш календарь не был бы так нелогичен.

Монахов нельзя винить за их невежество. Ведь в Средние века на Западе изучали математику только христианские монахи, они были единственными, кто чему-то учился. Математика была нужна монахам для двух вещей: молитв и денег. Чтобы считать деньги, они должны были знать... ну, как считать. Для этого они использовали абак или счетную доску – приспособление, похожее на абак, где камешки или иные предметы можно было передвигать. Такое занятие не требовало особых знаний, но по средневековым стандартам представлялось искусством. Чтобы молиться, монахам нужно было знать дату и время суток. В результате отсчет времени был жизненно важен для церковных ритуалов. Монахи должны были день за днем произносить разные молитвы в разные часы суток. (Английское слово *noon* – «полдень» – происходит от латинского *nones* : службы в средневековых церквях в середине дня.) Как мог ночной сторож знать, когда поднимать своих братьев с удобных соломенных подстилок, чтобы они начали дневное богослужение? И если у вас не было точного календаря, вы не могли знать, когда праздновать Пасху. Это была большая проблема.

Вычисление даты Пасхи было нелегким делом благодаря противоречиям календарей. Средоточием власти Церкви был Рим, и христиане пользовались римским солнечным календарем, в котором год состоял из 365 с небольшим дней. Однако Иисус использовал иудейский лунный календарь с 354 днями в году. Главные события в жизни Иисуса соотносились с лунным календарем, в то время как повседневная жизнь Средневековья управлялась календарем солнечным. Два календаря смещались друг относительно друга, делая очень трудным предсказание даты, на которую придется праздник. Пасха была именно таким плавающим праздником, и каждые несколько поколений монахам приходилось рассчитывать, на какие даты придется Пасха в ближайшие сотни лет.

Дионисий Малый был одним из таких монахов. В VI веке папа Иоанн I попросил его расширить таблицу дат Пасхи. Переводя и рассчитывая таблицу заново, Дионисий провел некоторые исследования; при этом он решил, что может вычислить, когда родился Иисус. Собрав кое-какие математические сведения, он нашел, что текущий год – 525-й со времени рождения Спасителя. Дионисий счел, что год рождения Иисуса впредь должен быть 1 *anno Domini* – первым годом Господа нашего. (Фактически Дионисий говорил, что рождение Иисуса приходится на 25 декабря предыдущего года, однако он начал свой календарь с первого января, чтобы он соответствовал римскому календарю.)

Следующий год стал вторым годом нашей эры, следующий – третьим и так далее. Так родился новый календарь в дополнение к двум самым распространенным системам датировки¹⁰. Однако имелась проблема... даже две.

Во-первых, Дионисий неверно определил дату рождения Иисуса. Все источники согласны в том, что Мария и Иосиф бежали, спасаясь от гнева царя Ирода, поскольку Ирод получил пророчество о рождении Мессии. Однако Ирод умер в третьем году до нашей эры, за несколько лет до предполагаемого рождения Христа. Дионисий явно ошибался; сегодня большинство ученых считает, что рождение Иисуса приходится на четвертый год до нашей эры. Дионисий ошибся на несколько лет.

Но эта ошибка не так уж существенна. При выборе первого года календаря не важно, какой именно год выбран при условии, что все этому соответствует. Ошибка в четыре года не имеет значения, если все соглашаются делать ту же ошибку, как на самом деле и происходит. Однако с календарем Дионисия возникла более серьезная проблема: проблема ноля.

Нулевого года не было. На первый взгляд, это не имело большого значения; большинство календарей того времени начинались с первого года, а не с нулевого. У Дионисия даже не было выбора – он не знал о ноле. Он родился после упадка Римской империи. Даже во времена ее расцвета римляне не были знатоками математики. В 525 году, в начале Темных веков, на Западе держались за громоздкие римские цифры, а в той системе счисления ноля не было. Для Дионисия первый год Господа нашего, естественно, был годом I. Следующий год был годом II, и Дионисий пришел к такому выводу в году DXXV.

При большинстве обстоятельств это не привело бы к беде, поскольку календарь Дионисия не был принят немедленно. В 525 году у интеллектуалов при римском дворе случились большие неприятности. Умер Иоанн I, и в результате последовавшей за этим борьбы за власть все философы и математики, вроде Дионисия, были изгнаны со службы. Им еще везло, если удавалось сохранить жизнь. (Повезло не всем. Аниций Боэций был влиятельным государственным деятелем и одним из лучших средневековых математиков Запада, что делает его достойным упоминания. Примерно в то же время, когда Дионисий лишился должности, Боэций утратил влияние и попал в тюрьму. Боэция помнят не за его математические работы, а за «Утешение философией» – трактат, содержащий философские рассуждения в стиле Аристотеля. Вскоре после этого Боэций был казнен.) В любом случае введение нового календаря было надолго отложено.

Отсутствие нулевого года начало создавать проблемы двумя столетиями позднее. В 721 году, примерно тогда, когда пасхальная таблица Дионисия должна была закончиться, Беда Достопочтенный, монах из Северной Англии, которому предстояло стать знаменитым, ее снова

¹⁰ Одна система датировки начинала отсчет от основания Рима, другая – от воцарения императора Диоклетиана. Для христианского монаха рождение Спасителя было более важным событием, чем основание города, который несколько раз захватывали вандалы и готы, или начало правления императора, имевшего нехорошую привычку кормить экзотических животных своего зверинца христианами (прим. авт.).

продолжил. Возможно, при этом он познакомился с работой Дионисия. Когда Беда взялся за написание «Церковной истории народа англов», он использовал новый календарь.

Книга имела огромный успех, однако обладала одним серьезным недостатком. Беда начал свою историю с шестидесятого года до нашей эры – шестьдесятю годами раньше даты, взятой за основу Дионисием. Беда не хотел отказываться от новой системы летоисчисления, поэтому он просто продолжил календарь назад. Для Беды, тоже не знавшего о ноле, год до наступления первого года нашей эры был первым годом до нашей эры. Нулевого года не было. В конце концов, для Беды ноль не существовал.

На первый взгляд, такой стиль нумерации не кажется особенно плохим, однако он гарантировал неприятности. Посмотрите на годы новой эры как на положительные числа, а на годы до новой эры – как на отрицательные. Датировка Беды выглядела так: –3, –2, –1, 1, 2, 3... –Ноль, законное место которого между –1 и 1, отсутствовал. Это всех запутало. В 1996 году в газете «Вашингтон пост» появилась статья о календаре, сообщавшая, «как следует думать» о противоречии, связанном с наступлением нового тысячелетия; в ней, между прочим, упоминалось о том, что раз Иисус родился в четвертом году до нашей эры, 1996 год является 2000 годом с Его рождения. Это было вполне логично: $1996 - (-4) = 2000$. Однако такой подсчет неверен: на самом деле прошло всего 1999 лет.

Представьте, что ребенок родился первого января четвертого года до нашей эры. В третьем году до нашей эры ему исполнился 1 год; во втором – 2 года; в первом году до нашей эры – 3 года; в первом году нашей эры ему сравнялось 4 года; во втором году нашей эры – 5 лет. Сколько лет 1 января второго года нашей эры прошло с того момента, когда он родился? Очевидно, 5 лет. Однако это не то, что вы получите, если произведете вычитание: $2 - (-4) = 6$. Вы получаете неправильный ответ, потому что отсутствует нулевой год.

По справедливости ребенку должно было бы сравняться 4 года 1 января нулевого года нашей эры, 5 – в первом году нашей эры, 6 – во втором году нашей эры. Тогда все числа расположились бы правильно, и вычисление возраста ребенка достиглось бы просто – вычитанием. Однако на самом деле все не так. Вы должны для получения правильного ответа вычесть дополнительный год. Таким образом, Иисусу в 1996 году было бы не 2000 лет, а только 1999. Все это весьма запутано и становится все хуже и хуже.

Представьте себе, что ребенок родился в первую секунду первого дня первого года: 1 января первого года нашей эры. Во втором году нашей эры ему будет 1 год, в третьем – 2 и так далее. В 99 году ему будет 98 лет, а в 100 году – 99. Теперь представьте себе, что ребенку дали имя Столетие; тогда Столетию в 100 году будет всего 99 лет, а свой сотый день рождения он сможет отпраздновать только 1 января 101 года. Таким образом, второе столетие начинается в 101 году. Аналогично третье столетие начинается в 201 году, а двадцатое – в 1901. Это значит, что двадцать первое столетие – третье тысячелетие – начинается в 2001 году. Не то чтобы вы могли это заметить...

Места в отелях и ресторанах по всему миру были заказаны задолго до 31 декабря 1999 года, а не 31 декабря 2000-го. Все праздновали наступление нового тысячелетия в неправильный день. Даже королевская Гринвичская обсерватория, официальная хранительница времени в мире и арбитр во всем, что касается хронологии, ожидала наплыва празднующих. Пока атомные часы тикали в обсерватории на холме, толпы у подножия ожидали начала великолепной церемонии – открытия грандиозного «Купола тысячелетия» и выставки *Millenium Experience*, которое организаторы – как вы догадались – назначили на 31 декабря 1999 года. Выставка должна была закрыться 31 декабря 2000 года, как раз когда астрономы на вершине холма открывали бы бутылки шампанского, празднуя наступление нового тысячелетия. Если, конечно, предположить, что астрономы вообще обращают внимание на даты...

Астрономы не могут играть со временем так же легко, как любой другой человек. В конце концов, они наблюдают за небесными часами, которые не отстают и не уходят вперед, которые нельзя переводить каждый раз, когда людям вздумается изменить календарь. Поэтому астрономы решили вообще игнорировать человеческие календари. Они не измеряют время, отсчитывая годы от рождения Христа. Они отсчитывают дни, начиная с 1 января 4713 го да до н. э. – произвольно установленной даты, выбранной ученым Жозефом Скалигером в 1583 году. Его «юлианская дата» (названная так в честь отца ученого, а не Юлия Цезаря) сделалась стандартной отправной точкой при описании астрономических явлений, поскольку так удавалось избежать всех неясностей, связанных с постоянно меняющимися календарями. (С тех пор система была несколько модифицирована. Модифицированная юлианская дата является просто юлианской датой, уменьшенной на 2 400 000 дней и 12 часов; она принимает за нулевой час полночь 17 ноября 1858 года, тоже более или менее произвольно.) Возможно, астрономы откажутся праздновать 51 542-ю модифицированную юлианскую дату, евреи проигнорируют 23 тевет 5760 года (*anno Mundi* – года от создания мира), мусульмане забудут о 23 рамадан 1420 (*anno Hejirae* – года *хиджры*, переселения пророка Мухаммеда из Мекки в Медину)... А впрочем, может быть, и нет. Все они будут знать, что это 31 декабря 1999-го (*anno Domini* – года Господа нашего), а 2000 год – совсем особенный.

Трудно сказать, почему, но мы, люди, обожаем красивые круглые числа со множеством нулей. Многие из нас помнят, как в детстве ехали в автомобиле, когда на спидометре должна была появиться отметка в 20 тысяч миль. Все в автомобиле молча следят, как цифра 19 999 медленно ползет... и вот со щелчком появляются 20 тысяч! Все дети начинают радостно вопить.

Вечером 31 декабря 1999 года щелкнул великий спидометр в небесах.

Нулевой номер

Вацлав Серпинский, великий польский математик, был обеспокоен тем, что потерял один предмет из своего багажа. «Нет, дорогой, – сказала ему жена, – все шесть предметов на месте». – «Не может быть, – возразил Серпинский, – я пересчитал их несколько раз: ноль, один, два, три, четыре, пять».

Джон Конвей, Ричард Гай. «Книга чисел»¹¹

Предположение, что Дионисий Малый и Беда Достопочтенный сделали ошибку, забыв включить в свой календарь ноль, может показаться странным. В конце концов, дети считают «один, два, три», а не «ноль, один, два». За исключением мая, никто больше не имел нулевого года и не начинал месяца с нулевого дня. Это кажется неестественным. С другой стороны, когда вы считаете в обратном порядке... «Десять. Девять. Восемь. Семь. Шесть. Пять. Четыре. Три. Два. Один. Старт!».

Космический шаттл всегда дожидается ноля, прежде чем взмыть в воздух. Важные события происходят в нулевой час, а не в первый. Когда вы приближаетесь к месту, где взорвалась бомба, вы приближаетесь к нулевой отметке (*groundzero*).

Если вы внимательно присмотритесь, то увидите, что люди и в самом деле начинают считать с ноля. Секундомер начинает отсчет с 0:00.00 и доходит до 0:01.00 только через секунду. Спидометр автомобиля, только что изготовленного на заводе, установлен на 00000,

¹¹ Conway J.H., Guy R.K. The book of numbers. Springer, 1996.

хотя к тому моменту, когда продавец пригонит его в магазин, он покажет на несколько миль больше. У военных день официально начинается в 00:00 часов. Однако считая вслух, вы всегда начнете с «один», если только вы не математик и не программист¹². Это имеет отношение к порядку.

Когда вы имеете дело с пересчитыванием чисел – 1, 2, 3 и т. д., их легко расположить по порядку: число 1 идет первым, 2 – вторым, 3 – третьим. Нам не нужно беспокоиться о том, чтобы не перепутать количественный смысл числа – то есть *кардинал*, мощность соответствующего ему множества (например, множества пяти единиц) – с его порядковым номером, *ординалом*, поскольку по сути это одно и то же. Так обстояли дела многие годы, и все были довольны. Но когда появился ноль, аккуратные взаимоотношения между мощностью и порядковым номером оказались разрушены. Числа расположились так: 0, 1, 2, 3; 0 оказался на первом месте, 1 – на втором, 2 – на третьем. Кардинал и ординал перестали быть взаимозаменяемыми. В этом и кроется корень проблемы с календарем.

Первый час дня начинается в 0 секунд после полуночи; второй час – в 1 час ночи, третий час – в 2 часа ночи. Хотя мы считаем порядковыми числительными (первый, второй, третий), время мы отмечаем количественными числительными (0, 1, 2). Все мы усвоили такой способ мышления, осознаем мы это или нет. Когда заканчивается двенадцатый месяц жизни младенца, мы все говорим, что ему исполнился год: он закончил первые 12 месяцев своей жизни. Если малышу исполняется год, когда он уже год прожил, не было бы логично говорить, что до этого ему 0 лет? Конечно, вместо этого мы говорим, что ребенку шесть недель или девять месяцев от роду, – умный способ обойти тот факт, что малышу 0 лет.

Дионисий не знал о ноле, поэтому начал свой календарь с года 1, как до него начинали свои календари древние. В те времена люди думали в старом стиле – эквивалентности мощности и порядкового номера. Это было прекрасно... для них. Раз ноль никогда не приходил им в голову, и проблемы не было.

Зияющая бездна

И все-таки это не было полное «ничто»: было нечто бесформенное, лишённое всякого вида... Здравый разум убеждал меня совлечь начисто всякий остаток формы, если мысленно хочу представить бесформенное, но я не мог.

Св. Августин. «Исповедь»¹³

Трудно винить монахов в их невежестве. Мир Дионисия Малого, Боэция и Беды был поистине темен. Рим пал, и западная цивилизация казалась всего лишь тенью былого римского величия. Будущее представлялось ужаснее, чем прошлое. Неудивительно, что в своих поисках мудрости ученые обращались за идеями не к современникам, а к древним мыслителям, таким как Аристотель и неоплатоники. Заимствуя философию и науку у древних, средневековые

¹² Когда программист разрабатывает программу, которая должна снова и снова что-то делать, он наверняка велит компьютеру считать, скажем, от нуля до девяти, чтобы сделать десять шагов. Забывчивый программист может заставить компьютер считать от одного до девяти, так что тот сделает всего девять шагов вместо десяти. Весьма вероятно, что именно такой баг привел к неудаче лотереи в Аризоне в 1998 году. Среди выпадавших чисел ни разу не появилась «девятка». «Ее не включили в программу», – виновато признал ведущий (*прим. авт.*).

¹³ Августин А. Исповедь, 12, III (3) – VI (6). Пер. М.Е. Сергиенко.

ученые наследовали и их предрассудки: страх перед бесконечностью и перед пустотой.

Средневековые мыслители клеймили пустоту как зло и зло как пустоту. Сатана в буквальном смысле был ничем. Бозций аргументировал это так: Бог всемогущ; нет ничего, чего Бог не мог бы совершить. Однако Бог как наивысшее благо не может творить зла. Следовательно, зло – это ничто. Для средневекового ума в этом содержался неоспоримый смысл.

Под покрывалом средневековой философии, впрочем, скрывался конфликт. Аристотелевская система была греческой, но иудео-христианская история сотворения мира была семитской, а семиты не так боялись пустоты. Сам акт творения был обращен на хаотическую бездну, и теологи, такие как святой Августин, живший в IV веке, пытались преодолеть это противоречие, называя состояние до творения «чем-то ничем», не имеющим формы, но тем не менее не достигающим «полного ничто». Страх перед бездной был так велик, что христианские ученые пытались трактовать Библию так, чтобы она соответствовала Аристотелю, а не наоборот.

К счастью, не все цивилизации так боялись ноля.

Глава 3 Ничто не позволено

Ноль отправляется на Восток

Поистине, бесконечное – счастье. Нет счастья в малом, лишь бесконечное – счастье.

Чхандогья-Упанишада¹⁴

Если Запад боялся пустоты, Восток ее приветствовал. В Европе ноль был вне закона, но в Индии и позднее в арабских странах он процветал.

Когда мы в последний раз видели ноль, он был просто символом-заполнителем – пустым местом в вавилонской системе нумерации. Ноль был полезен, но не являлся числом в полном смысле слова: он не имел величины. Значение ноля обретал только от цифр слева от него; обозначавший ноль знак буквально ничего не значил сам по себе. В Индии все изменилось.

В IV веке до н. э. Александр Великий со своим персидским войском прошел от Вавилона до Индии. Именно благодаря этому нашествию индийские математики впервые узнали о вавилонской системе счисления и о ноле. Когда в 323 году до н. э. Александр умер, его перессорившиеся полководцы разорвали его империю на части. Во II веке до н. э. к власти пришел Рим, поглотивший Грецию, однако власть Рима не простиралась так далеко на восток, как власть Александра.

В результате далекой Индии не коснулось распространение христианства, на ней не отразилось падение Рима в IV–V веках, там не укоренилась философия Аристотеля. Хотя Александр, ученик Аристотеля, несомненно, привез в Индию идеи своего учителя, они там не прижились. В отличие от Греции Индия никогда не испытывала страха перед бесконечностью и пустотой. Напротив, она их приветствовала.

¹⁴ Чхандогья-Упанишада, 7, 24, 1 / Пер. А.Я.Сыркина // Литература Древнего Востока. М.: Изд-во Моск. университета, 1984.

Пустота занимала важное место в индуистской религии. Индуизм возник как многобожие и включал мифы о воинственных богах и битвах, во многом сходные с греческими мифами. Однако за столетия – столетия до прихода Александра – индуистские боги начали сливаться. Хотя индуизм сохранил свои ритуалы и почитание всего пантеона, по сути он сделался монотеистическим и интроспективным. Все боги сделались аспектами одного всеобъемлющего божества – Брахмы. Примерно в то же время, когда греческая культура расцветала на Западе, индуизм становился менее сходным с западными мифами; отдельные боги делались менее отличимыми, а религия становилась все более и более мистической. Мистицизм был выраженно восточным.

Как многие восточные религии, индуизм пропитался символизмом двойственности. (Конечно, эта идея периодически возникала в западном мире, где сразу же клеймилась как еретическая. Одним таким примером может служить манихейская ересь, которая рассматривала мир как находящийся под влиянием равных и противоположных сил – добра и зла.) Как инь и ян на Дальнем Востоке и зороастрийский дуализм на Ближнем Востоке, индуизм видел творение и уничтожение переплетенными между собой. Бог Шива был одновременно создателем и разрушителем мира и изображался с барабаном творения в одной руке и огнем разрушения в другой (*рис. 13*). Однако Шива одновременно олицетворял ничто. Один из аспектов этого божества, Нишкала Шива, буквально именовался «Шива без частей». Он был первозданной бездной, окончательным ничто – олицетворением безжизненности. Однако из бездны родилась Вселенная, как и бесконечность. В отличие от западной вселенной индуистский космос имел бесконечную протяженность; за пределами нашей Вселенной существовали бесчисленные другие вселенные.



Рис. 13. Танцующий Шива

В то же время, впрочем, космос никогда не лишался своей изначальной пустоты. Ничто было тем, из чего возник мир, и снова достичь ничто было окончательной целью человечества. В одной из легенд Смерть говорит ученику о душе: «В сердцах всех людей скрыт Атман, Дух, Самость. Он меньше мельчайшего атома и больше величайших пространств».

Этот Атман, присутствующий во всем, есть часть сущности Вселенной, и он бессмертен. Когда человек умирает, Атман освобождается из тела и скоро входит в другое существо; душа переселяется, и происходит реинкарнация. Целью индуиста является полное освобождение Атмана из цикла перерождений, прекращение блужданий от смерти к смерти. Путь к достижению окончательного освобождения – достижение безжизненности и пренебрежение иллюзией реальности. «Тело, обитель духа, находится под властью удовольствий и страданий, – говорит бог. – Если человек подчиняется своему телу, этот человек никогда не освободится». Однако стоит вам отделить себя от капризов плоти и погрузиться в безмолвие и пустоту своей души, и вы будете освобождены. Ваш Атман вылетит из сетей человеческих желаний и присоединится к коллективному сознанию – бесконечной душе, пронизывающей Вселенную, одновременно пребывающей всюду и нигде. Это – бесконечность и ничто.

Таким образом, Индия, общество, где активно исследовалась пустота и бесконечность, приняла ноль.

Реинкарнация ноля

В древние годы богов сущее родилось из не сущего.

Ригведа¹⁵

Индийские математики сделали больше, чем просто приняли ноль. Они преобразовали его, изменив его роль: символа-заполнителя – на число. Эта реинкарнация и дала ноллю его силу. Корни индийской математики скрыты временем. Индийский текст, написанный в год падения Рима – 476-й, – демонстрирует влияние греческой, египетской и вавилонской математики, которую принес Александр, вторгшийся в индийские земли. Как и у египтян, у индийцев были мерные веревки для разметки полей и закладки храмов. Индийцы имели изощренную систему астрономии; как и греки, они пытались рассчитать расстояние до Солнца. Для этого требуется тригонометрия; индийская версия была, возможно, создана на основании греческой. Примерно в V веке индийские математики изменили свой стиль нумерации. Они перешли от системы, сходной с греческой, к системе, похожей на вавилонскую. Важным отличием новой индийской системы чисел от вавилонской было то, что она была десятичной, а не шестидесятеричной. Наши цифры возникли из символов, которыми пользовались индийцы; они по праву должны были бы называться индийскими, а не арабскими (*рис. 14*).

¹⁵ X, 72, 3 // Ригведа: / Пер. Т.Я. Елизаренковой.

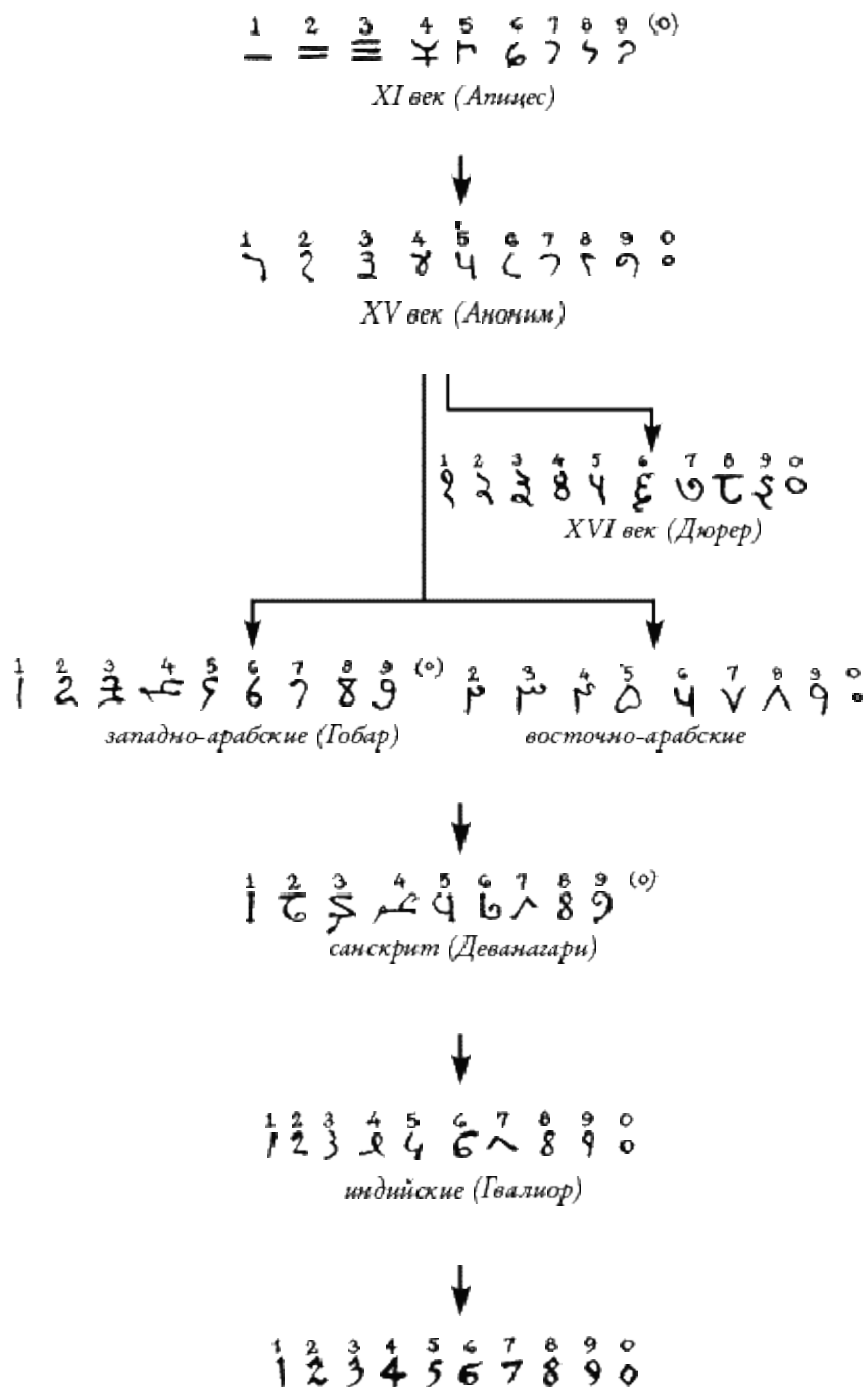


Рис. 14. Эволюция цифр:

Никто не знает, когда индийцы приняли вавилонскую позиционную систему счисления. Самое раннее упоминание об индийских цифрах можно найти у сирийского епископа, который писал в 662 году о том, что индийцы производят вычисления «посредством девяти знаков». Девяти, а не десяти. Очевидно, ноль не входил в их число. Однако утверждать с уверенностью трудно. Можно предположить, что индийские цифры были в ходу до того, как о них написал епископ. Имеются свидетельства, что к этому времени ноль стал появляться в каких-то вариантах, хоть епископ об этом и не слышал. Как бы то ни было, символ для ноля – символ-заместитель в десятичной системе – к IX веку определенно был в употреблении. К тому времени индийские математики совершили огромный скачок. Они немного позаимствовали из греческой геометрии; у них не было особого интереса к плоским фигурам, которые так обожали греки. Они не беспокоились о том, рациональна или нет диагональ квадрата; не изучали они и конические сечения, как это делал Архимед. Однако они узнали, как

играть с числами.

Индийская система счисления позволяла использовать причудливые приемы при сложении, вычитании, умножении и делении без использования абак. Благодаря позиционной системе они могли складывать и вычитать большие числа примерно так же, как мы делаем сегодня.

При наличии тренировки человек мог, пользуясь индийскими цифрами, умножать быстрее, чем считающий на абак. Соревнования между абакистами, считающими на абак, и алгористами, как называли пользующихся индийскими цифрами, были средневековым эквивалентом матча между Каспаровым и «ДипБлю» (рис. 15). Как и «ДипБлю», алгористы в конце концов выигрывали. Хотя индийская система счисления была полезна в повседневных делах, позволяя складывать и умножать, ее истинное влияние было гораздо более глубоким.



Рис. 15. Алгорист против считающего на абак

Числа наконец отделились от геометрии, они стали использоваться для большего, чем просто измерение объектов. В отличие от греков индийцы не видели квадратов в квадратных числах или площади треугольника, перемножая две величины. Вместо этого они видели

взаимодействие чисел – чисел, лишенных их геометрического значения. Это было рождением того, что теперь мы знаем как алгебру. Хотя такой склад ума не позволил индийцам много внести в геометрию, он имел другое, неожиданное следствие. Он освободил индийцев от недостатков греческой системы мышления – и, в частности, отвержения нуля.

Поскольку числа лишились своего геометрического значения, математики могли больше не беспокоиться насчет того, что какие-то математические операции не имели геометрического смысла. Вы не можете скосить три акра травы с поля в два акра, но ничто не мешает вам вычесть три из двух. Сегодня мы знаем, что $2 - 3 = -1$ (отрицательная величина). Впрочем, для древних это вовсе не было очевидно. Много раз, решая уравнения, они получали отрицательный результат и заключали, что их решение не имеет смысла. В конце концов, если вы мыслите в терминах геометрии, что такое отрицательная площадь? Для греков это была просто бессмыслица.

Для индийцев же отрицательные числа смысл имели. Действительно, именно в Индии (и в Китае) впервые появились отрицательные числа. Брахмагупта, индийский математик VII века, приводя правила деления, включал в рассмотрение и отрицательные числа. «Положительное число, деленное на положительное, или отрицательное, деленное на отрицательное, дают положительный результат, – писал он. – Положительное, деленное на отрицательное, есть отрицательное. Отрицательное, деленное на положительное, есть отрицательное». Это те же правила, которые мы признаем сегодня: при делении одного числа на другое результат положителен, если числа имеют одинаковый знак, и отрицателен, если разный.

Как $2 - 3$ считалось числом, так и $2 - 2$ было числом для индийцев. Это был ноль. Не просто символ-заместитель, обозначавший пустое место на абаксе, а число. Ноль имел собственное значение и фиксированное место на числовой оси. Поскольку ноль был равен $2 - 2$, то он должен был находиться между $(2 - 1)$ и отрицательным числом $(2 - 3)$. Ничто другое не имело смысла. Ноль больше не мог располагаться справа от девяти, как это имеет место на компьютерной клавиатуре; ноль занимал свое собственное место на числовой оси. Числовая ось больше не могла существовать без нуля, как не могла существовать система счисления без числа 2. Ноль наконец-то явился.

Впрочем, даже индийцы думали, что ноль – в силу всех обычных причин – весьма странное число. В конце концов, ноль, умноженный на что угодно, – это ноль; он все всасывает в себя. А уж когда вы делите на ноль, начинается полная фантазмагория. Брахмагупта пытался выяснить, что такое $0 / 0$ и $1 / 0$, но ему это не удалось. «Ноль, деленный на ноль, – ничто, – писал он. – Положительное или отрицательное число, деленное на ноль, есть дробь с нулем в знаменателе». Другими словами, он думал, что $0 / 0$ есть 0 (он, как мы увидим, ошибался), а $1 / 0$... ну, этого мы не знаем, потому что высказывание Брахмагупты смысла не имеет. В основном он махал руками и надеялся, что проблема сама собой исчезнет.

Ошибка Брахмагупты продержалась не так уж долго. Со временем индийцы поняли, что $1 / 0$ бесконечно велико. «Эта дробь, у которой знаменатель – ноль, называется бесконечным количеством, – пишет Бхаскара, индийский математик XII века, говоря о том, что происходит, когда какое-то число прибавляется к $1 / 0$. – Не происходит изменения, как бы много ни было прибавлено или убавлено, как ничего не меняется в бесконечном и неизменном Боге».

Бог был найден в бесконечности и в ноле.

Арабские цифры

Не забывает ли человек, что Мы создали его из пустоты?

Коран

К VII веку с падением Рима Запад пришел в упадок, но Восток процветал. Достижения Индии затмила другая восточная цивилизация. Когда звезда Запада стала закатываться за горизонт, начала восходить другая звезда – ислам. Ислам позаимствовал ноль в Индии, Запад со временем позаимствовал его у ислама. Восхождение ноля к славе должно было начаться на Востоке.

Однажды вечером в 610 году Мохаммед, тридцатилетний уроженец Мекки, впал в транс на горе Хира. Согласно легенде, ангел Джабраил повелел ему: «Повторяй!» Мохаммед так и сделал, и его божественное откровение заглоло пожар. Через десять лет после смерти Мохаммеда, в 632 году, его последователи захватили Египет, Сирию, Месопотамию и Персию. Иерусалим, священный город иудеев и христиан, пал. К 700 году ислам распространился от Инда на востоке до Алжира на западе. В 711 году мусульмане захватили Испанию и приблизились к границам Франции. На востоке они в 751 году разбили китайцев. Их империя простиралась дальше, чем мог даже вообразить Александр Македонский. По пути в Китай мусульмане завоевали Индию. Там арабы и узнали об индийских цифрах.

Мусульмане быстро впитывали мудрость завоеванных ими народов. Ученые начали переводить тексты на арабский язык, и в IX столетии халиф аль-Мамун основал в Багдаде огромную библиотеку: Дом мудрости. Ей предстояло стать центром учености восточного мира, и одним из первых в ней начал работать математик Мохаммед ибн-Муса аль-Хорезми.

Аль-Хорезми написал несколько важнейших книг, в частности «Алджабр вал мугабала», где описывал способы решения элементарных уравнений; название «Алджабр» (переводящееся примерно как «завершение») дало нам термин «алгебра». Аль-Хорезми также написал книгу «Об индийском счете», что позволило новому способу написания чисел быстро распространиться по арабскому миру вместе с алгоритмами и приемами быстрого умножения и деления. Слово «алгоритм» было латинской формой имени аль-Хорезми. Хотя арабы позаимствовали цифры в Индии, остальной мир назвал новую систему арабскими цифрами.

Слово «зеро» имеет индийские и арабские корни. Приняв индийско-арабские цифры, арабы также приняли и ноль. Индийское название ноля было «сунья» – «пустое»; арабы переделали это слово в «сифр». Когда некоторые западные ученые описывали новое число своим коллегам, они превратили «сифр» в нечто, звучащее как бы по-латыни: «зефирус», откуда и пошло «зеро». Другие западные математики так сильно не исказили слово «сифр» и стали называть ноль «цифра». Ноль был так важен для новой системы счисления, что люди начали называть цифрой любой знак для записи числа; отсюда, в частности, произошло французское *chiffre*, в равной степени применимое к любой из арабских цифр.

Впрочем, когда аль-Хорезми писал «Об индийском счете», Запад все еще был очень далек от принятия ноля. Даже мусульманский мир со своими восточными традициями был пропитан учением Аристотеля благодаря завоеваниям Александра Великого. Впрочем, индийские математики совершенно ясно утверждали: ноль – олицетворение пустоты. Таким образом, мусульманам, чтобы принять ноль, нужно было отвергнуть Аристотеля. Именно это они и сделали.

В XII веке еврейский ученый из Кордовы, Моисей Маймонид, описывал Калам – рассуждения исламских теологов – с ужасом. Он отмечал, что вместо принятия аристотелевского доказательства существования Бога мусульманские ученые обратились к атомистам, старым соперникам Аристотеля, чья доктрина, хоть и не пользовавшаяся признанием, сумела пережить разрушительное действие времени. Атомисты, как мы помним, утверждали, что материя состоит из отдельных частиц, называемых атомами, и чтобы эти частицы могли двигаться, между ними должен был существовать вакуум, иначе атомы

столкнулись бы и не могли уступать друг другу дорогу.

Мусульмане ухватились за идеи атомистов. В конце концов теперь, когда стал использоваться ноль, идея пустоты снова сделалась респектабельной. Аристотель пустоту ненавидел, атомисты настаивали на ее существовании. Библия говорила о создании мира из пустоты, в то время как греческая доктрина отвергала такую возможность. Христиане, преклонявшиеся перед греческой философией, ставили Аристотеля выше Библии; мусульмане же сделали противоположный выбор.

Я то, что я есть: ничто

Ничто – создание, и создание – ничто... Наш ограниченный ум не может охватить или понять этого, потому что знание – бесконечность.

Азриэль из Жероны

Ноль был эмблемой нового учения: отвержения Аристотеля и принятия пустоты и бесконечности. По мере распространения ислама и ноль распространился по мусульманскому миру, повсюду противореча доктрине Аристотеля. Исламские ученые спорили друг с другом, и в XI веке философ Абу Хамид аль-Газали заявил, что следование учению Аристотеля должно караться смертью. Вскоре после этого споры прекратились.

Неудивительно, что ноль вызывал такие расхождения. Мусульмане со своим семитским восточным происхождением верили в то, что Бог создал Вселенную из пустоты. Эту доктрину не могли принять те, кто разделял ненависть Аристотеля к пустоте и бесконечности. По мере того как ноль распространялся по арабским землям, мусульмане признавали его и отвергали Аристотеля. Потом пришла очередь евреев.

На протяжении тысячелетий центр духовной жизни евреев находился на Среднем Востоке, однако в X веке для них открылись перспективы в Испании. У халифа Абд аль-Рахмана III был министр-еврей, который пригласил еврейских мыслителей из Вавилона. Скоро в мусульманской Испании возникла большая еврейская община.

В начале Средневековья евреи как в Испании, так и в Вавилоне были убежденными сторонниками Аристотеля. Как и их противники-христиане, они отказывались признавать бесконечность или пустоту. Однако аристотелевская философия конфликтовала как с исламской системой счисления, так и с еврейской теологией. Это и заставило Маймонида, раввина, жившего в XII веке, написать книгу, в которой он попытался примирить семитскую восточную Библию с западной греческой философией, распространенной в Европе.

У Аристотеля Маймонид позаимствовал доказательство существования Бога через отрицание бесконечности. Добросовестно воспроизводя греческие аргументы, Маймонид утверждал, что каждая из полых сфер, вращающихся вокруг Земли, должна чем-то приводиться в движение, например, внешней по отношению к ней сферой. Однако, поскольку бесконечного числа сфер быть не может (ведь бесконечность невозможна), что-то должно было двигать самую внешнюю сферу. Это была первичная движущая сила – Бог.

Рассуждения Маймонида были «доказательством» существования Бога, а это невероятно ценно для любой теологии. Однако в то же время Библия и семитская традиция в целом были полны идей, утверждающих существование бесконечности и пустоты, идей, уже принятых мусульманами. Как и святой Августин восемью веками ранее, Маймонид попытался приспособить семитскую Библию к греческой доктрине, провозглашавшей необоснованный страх перед пустотой. Однако в отличие от ранних христиан, которые позволяли себе

интерпретировать некоторые части Ветхого Завета как метафоры, Маймонид не желал полностью подчинять свою религию греческой философии. Еврейская традиция требовала от него признания библейского описания творения мира из пустоты. Это в свою очередь вело к отрицанию Аристотеля.

Маймонид заявил, что в рассуждениях Аристотеля о том, что Вселенная существовала всегда, есть прорехи. В конце концов, это положение противоречило Писанию. Это, конечно, означало, что с Аристотелем следует распрощаться. Маймонид утверждал, что акт творения возник из ничего – *creatio ex nihilo*, несмотря на аристотелевский запрет на вакуум. Одним ударом пустота была превращена из святотатства в нечто святое.

Для евреев годы после смерти Маймонида стали эрой ничего. В XIII веке распространилась новая доктрина: каббализм, или еврейский мистицизм. Центральным положением каббалистического мышления стала *гематрия* – поиск в тексте Библии закодированных посланий. Как и греки, евреи использовали буквы своего алфавита для обозначения чисел, так что каждое слово обретало численное значение. Этим можно было пользоваться для интерпретации скрытого смысла слов. Например, участники войны в Заливе могли заметить, что имя Саддам имело следующее значение: «самех» (60) + «алеф» (1) + «далед» (4) + «алеф» (1) + «мем» (600) = 666. Это число, которое христиане соотносят со Зверем, который появится во время Апокалипсиса. (Для каббалистов не составляет разницы, один или два далед в имени Саддам, они часто меняют написание слов, чтобы получить правильную сумму.) Каббалисты считали, что слова и фразы, имеющие одинаковое численное значение, мистически связаны друг с другом. Например, в книге Бытия (глава 49, стих 10) говорится: «Не отойдет скипетр от Иуды... доколе не придет Примиритель». Фраза на иврите «доколе не придет Примиритель» имеет значение 358, в точности то же, что и слово «Машиах» – Мессия. Таким образом, стих предсказывает приход Мессии. Каббалисты считали определенные числа священными или полными скверны, и искали в Библии эти числа и скрытые послания, обнаруживаемые при рассмотрении различных сочетаний. Недавно изданный бестселлер «Код Библии» претендовал на то, чтобы таким способом обнаружить пророчества.

Каббала была гораздо большим, чем манипуляции с числами. Это была настолько мистическая традиция, что некоторые ученые видят в ней поразительное сходство с индуизмом. Например, каббалисты ухватились за идею двойственности природы Бога. Еврейский термин «ейн соф», означающий «бесконечный», представлял созидательный аспект Бога, ту часть Божества, которая создала Вселенную и пронизывает каждый уголок космоса. Однако в то же время Бог имел и другое имя: «айин», или «ничто». Бесконечность и пустота шли рука об руку и обе были частью Божественного Создателя. Более того, термин «айин» является анаграммой (и имеет то же числовое значение), что и слово «аний», означающее на иврите «я». Ничего не могло быть яснее – Бог закодированно говорил: «Я – ничто и одновременно – бесконечность».

Пока евреи противопоставляли свои прозападные взгляды своей восточной Библии, христиане сражались с мусульманами (во время правления Карла Великого в IX веке и крестовых походов XI, XII и XIII столетий), рыцари – члены монашеских орденов, ученые и купцы начали приносить на Запад исламские идеи. Монахи обнаружили, что астролябия, арабское изобретение, – удобный инструмент для того, чтобы определять время в темное время суток и благодаря этому соблюдать распорядок молитв. На астролябиях часто бывали обозначения арабскими цифрами.

Арабские цифры не привились даже несмотря на то, что живший в X веке папа Сильвестр II, был их большим поклонником. Он, вероятно, узнал о новинке во время поездки в Испанию и привез ее с собой, когда вернулся в Италию. Однако система, с которой он познакомился, не

включала ноль, а если бы включала, то оказалась бы еще менее популярной. Аристотель все еще крепко держал в руках Церковь, и самые выдающиеся ее мыслители по-прежнему отвергали бесконечно большие, бесконечно малые величины и пустоту. Даже после завершения крестовых походов в XIII веке Фома Аквинский утверждал, что Бог так же не мог создать нечто бесконечное, как не мог создать ученую лошадь. Однако это означало, что Бог не всемогущ, что было запретной мыслью в христианской теологии.

В 1277 году епископ Парижа Этьен Тампье созвал ассамблею для обсуждения учения Аристотеля, или, скорее, нападок на него. Тампье отказался от многих аристотелевских доктрин, противоречивших всемогуществу Бога, таких, например, как «Бог не может двигать небеса по прямой, потому что при этом позади остался бы вакуум».

(Вращающиеся сферы не создавали проблемы, потому что они все время занимают одно и то же пространство. Только когда сферы двигаются по прямой, необходимо иметь пространство, куда могли бы перемещаться небеса, и приходится признать существование пространства позади движущейся сферы.) Бог мог бы создать вакуум, если захотел бы. Неожиданно пустота была разрешена, потому что всемогущее божество не обязано следовать правилам, предписанным Аристотелем, если ему этого не хочется.

Заявления Тампье не были смертельным ударом по философии Аристотеля, но они определенно показали, что фундамент крошится. Церковь продолжала цепляться за Аристотеля еще несколько столетий, но явно начиналось падение аристотелевской философии и восхождение пустоты. Это было подходящим временем для того, чтобы ноль объявился на Западе. Первые приложения алгебры аль-Хорезми прокладывали себе дорогу через Испанию, Англию и остальную Европу. Ноль тоже продвигался, одновременно с отказом Церкви от аристотелевских шор.

Триумф ноля

...Глубокая и важная идея, представляющаяся нам теперь столь простой, что мы не обращаем внимания на ее истинные достоинства. Но сама ее простота и великая легкость, с которой она применяется во всех вычислениях, ставит нашу арифметику в первый ряд полезных изобретений.

Пьер-Симон Лаплас

Христианство изначально отвергало ноль, но торговля вскоре потребовала его использования. Человеком, вновь представившим ноль Западу, был Леонардо Пизанский.

Сын итальянского купца, он совершал путешествия в Северную Африку. Там молодой человек – более известный как Фибоначчи – обучался математике у мусульман и сам скоро стал умелым математиком.

Фибоначчи лучше всего запомнился занятной маленькой проблемой, которую он приводит в своей «Книге абака» (*Liber Abaci*) опубликованной в 1202 году.

Представьте себе, что у крестьянина есть пара крольчат. Им требуется два месяца для достижения зрелости, и с этого момента кролики будут производить потомство – другую пару кроликов – в начале каждого месяца. Потом эта пара достигнет зрелости и произведет новую пару, новая пара достигнет зрелости и произведет потомство и так далее. Сколько пар кроликов будет у крестьянина в каждом данном месяце?

Ну, в первый месяц имелаась одна пара, и поскольку она еще не достигла зрелости, размножаться кролики не могли. Во второй месяц крестьянин все еще имел одну пару.

Однако в начале третьего месяца первая пара дала потомство. Теперь стало две пары.

В начале четвертого месяца первая пара снова дала потомство, но вторая пара еще не достигла зрелости. Результат – три пары. В следующем месяце дали потомство первая и вторая пары, поскольку вторая пара достигла зрелости, но третья пара еще слишком молода. Результат – пять пар.

Численность кроликов по месяцам выглядит так: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55... Число кроликов, имеющих в данный месяц, есть сумма численности за каждый из двух предшествующих месяцев. Математики сразу поняли, какую важность имеет полученная последовательность. Если взять любой ее член и разделить на предыдущий, получится следующее: $8 / 5 = 1,6$; $13 / 8 = 1,625$; $21 / 13 = 1,61538...$ Эти отношения приближаются к особенно интересному числу – золотому сечению, которое равно 1,61803...

Пифагор отмечал, что природа, по-видимому, управляется золотым сечением. Фибоначчи открыл последовательность, которая за это отвечает. Размер камер раковины наутилуса и отношение числа идущих по часовой стрелке углублений на ананасе к числу идущих против часовой стрелки соответствуют этой последовательности.

Хотя основой славы Фибоначчи послужила именно эта последовательность, *Liber Abaci* имела гораздо более важную цель, чем рассмотрение разведения кроликов. Фибоначчи научился математике у мусульман, так что он знал об арабских цифрах, включая ноль. Эту новую систему Фибоначчи описал в своей книге, наконец-то представив ноль Европе. Книга показывала, как полезны арабские цифры при выполнении сложных вычислений, и итальянские купцы и банкиры быстро ухватились за новую систему, включая ноль.

До появления арабских цифр при денежных расчетах приходилось пользоваться абаком или счетной доской. Немцы называли счетную доску *рехенбанк*, поэтому мы называем финансовые учреждения банками. В те времена банковские методы были примитивными – использовались не только счетные доски, но и счетные палочки для учета долгов: денежная сумма записывалась по концам палочки, а потом палочка разламывалась пополам (*рис. 16*). Займодавец сохранял более длинную часть – основной капитал; в конце концов, он был его владельцем¹⁶.

¹⁶ Счетные палочки создавали множество неудобств. Английское казначейство использовало разновидность счетных палочек для ведения счетов до 1826 года. Чарльз Диккенс так сообщал об исходе этой давно устаревшей практики: «В 1834 году кто-то обнаружил, что их скопилось изрядное количество, и тогда встал вопрос: куда девать эти старые, наполовину сгнившие, источенные червями куски дерева?.. Бирки хранились в Вестминстере, и всякому из нас, частных лиц, естественно, пришло бы в голову, что нет ничего легче, как распорядиться, чтобы кто-нибудь из многочисленных бедняков, проживающих по соседству, унес их себе на дрова. Но нет: от этих бирок никогда не было пользы, и ведомственные рутинеры не могли допустить, чтобы от них хоть когда-нибудь проистекла польза, а посему был отдан приказ – тайно и конфиденциально бирки сжечь. Случилось так, что их стали жечь в одной из печей в палате лордов. От печи, битком набитой этими палками, загорелась панель, от панели загорелась вся палата лордов, от палаты лордов загорелась палата общин; обе палаты сгорели дотла; призвали архитекторов и велели им выстроить две новых палаты; и расходы на эту постройку уже перевалили за второй миллион фунтов стерлингов» (Собр. соч. Чарльза Диккенса. Статьи и речи. М.: Худ. лит., 1957–1960. Пер. М. Лорие).

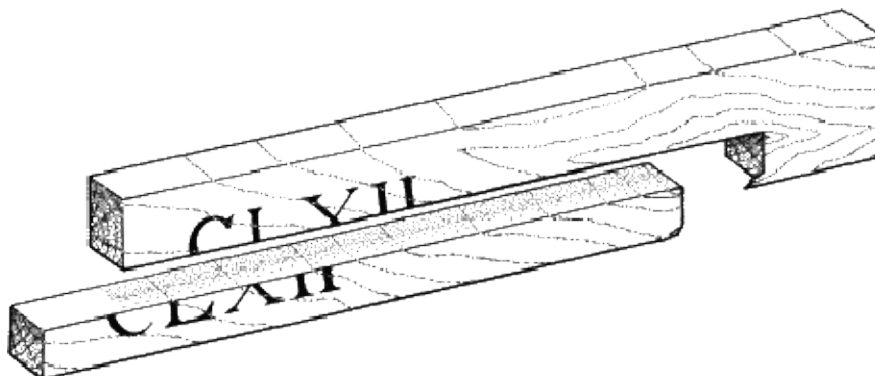


Рис. 16. Счетная палочка

Итальянские купцы обожали арабские цифры. Они позволяли банкирам избавиться от счетных досок. Впрочем, если деловые люди видели пользу арабских цифр, то местные правительства их ненавидели. В 1299 году во Флоренции арабские цифры были запрещены. Предлогом было то, что эти цифры легко менять и подделывать. (Например, ноль можно было обратить в шестерку простым росчерком пера.) Однако от преимуществ ноля и других арабских цифр было не так легко отделаться; итальянские купцы продолжали использовать их и даже пользовались для передачи закодированных сообщений. Так от слова «цифра» произошло слово «шифр» – секретный код.

В конце концов правительствам пришлось уступить под давлением коммерции. Арабская система была разрешена в Италии и скоро распространилась по всей Европе. Появился ноль, как и пустота. Аристотелевские стены рушились благодаря влиянию мусульман и индийцев, и к 1400 году даже самые непреклонные сторонники философии Аристотеля начали испытывать сомнения. Впрочем, битва против Аристотеля была далека от завершения. Томас Брадвардин, которому предстояло стать архиепископом Кентерберийским, попытался опровергнуть атомизм, древнюю Немезиду Аристотеля, используя геометрию, в которой бесконечно делимые прямые атомизм опровергали автоматически. Если Аристотелю предстояло пасть, доказательство существования Бога – оплот церковной доктрины – больше не было несокрушимо. Требовалось новое доказательство.

Более того, если Вселенная была бесконечна, она не могла иметь центра. Как же тогда могла быть центром Вселенной Земля? Ответ был найден в ноле.

Глава 4 **бесконечный бог ничто**

Теология ноля

Все новые философы – в сомненье:
Эфир отвергли – нет воспламененья,
Исчезло Солнце, и Земля пропала,
А как найти их – знания не стало...
Все из частиц, а целого – не стало,
Лукавство меж людьми возобладало,
Распались связи, преданы забвенью

Отец и Сын, Власть и Повиновение.

Джон Донн. «Анатомия мира»¹⁷

Ноль и бесконечность были самой сердцевиной Возрождения. По мере того как Европа медленно пробуждалась от Темных веков, пустота и бесконечность – ничто и все – грозили уничтожить аристотелевы основания Церкви и открыть путь научной революции.

Сначала папство не видело угрозы. Высокопоставленные церковники экспериментировали с опасными идеями пустоты и бесконечности, хотя те наносили удар по сути греческой философии, которую Церковь так лелеяла. Ноль появлялся на каждой ренессансной картине, а кардинал объявлял, что Вселенная бесконечна – не имеет границ. Впрочем, короткий роман с нолем и бесконечностью длился недолго.

Почувствовав угрозу, Церковь вернулась к старой философии, к аристотелевской доктрине, поддерживавшей ее столько лет. Однако было поздно. Ноль дал корни на Западе и, несмотря на все возражения папства, оказался слишком силен, чтобы его снова можно было изгнать. Аристотель пал под напором бесконечности и пустоты, а с ним вместе – и доказательство существования Бога.

Церкви ничего не оставалось, как признать ноль и бесконечность. В конце концов, верующие могли найти Бога, скрытого в пустоте и бесконечности.

Скорлупа раскололась

О боже, я бы мог замкнуться в ореховой скорлупе и считать себя царем бесконечного пространства, если бы мне не снились дурные сны.

Шекспир. «Гамлет»¹⁸

В начале Возрождения не было очевидно, что ноль является угрозой для Церкви. Он был инструментом искусства, бесконечным ничто, способствовавшим Возрождению в живописи.

До XV столетия картины и рисунки были в основном плоскими и безжизненными. Изображения были искаженными, двумерными; гигантские плоские рыцари выглядели из крохотных замков странной формы (рис. 17). Даже лучшие художники не могли изобразить реалистичной сцены. Они не знали, как пользоваться силой ноля.

¹⁷ Донн Джон. Стихотворения и поэмы. М.: Эксмо, 2007. Пер. Д. В. Щедровицкого

¹⁸ Шекспир В. Гамлет. Акт 2, Сцена 2 / Пер. М. Лозинского.

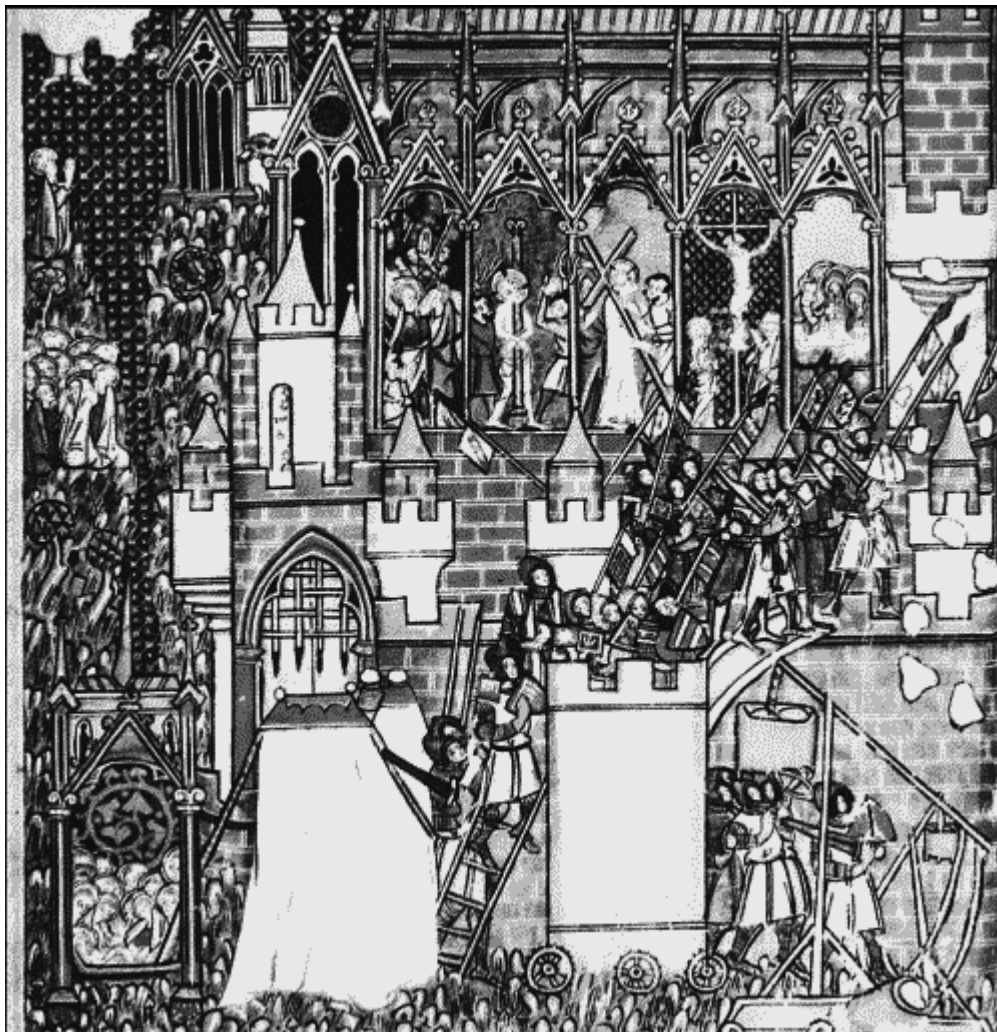


Рис. 17. Плоские рыцари и замок странной формы

Первым продемонстрировал силу бесконечности и ноля итальянский зодчий Филиппо Брунеллески: он создал реалистичное изображение, пользуясь бесконечно удаленной точкой.

По определению, точка – это ноль, благодаря концепции измерений. В повседневной жизни вы пользуетесь трехмерными объектами. (Эйнштейн показал, что наш мир имеет четыре измерения, как мы увидим в следующих главах.) Часы у вас на столе, чашка кофе, которую вы выпиваете утром, книга, которую вы читаете на ночь, – все это трехмерные объекты. Теперь представьте себе, что огромная рука спускается сверху и расплющивает книгу. Вместо трехмерного объекта книга теперь – плоский прямоугольник. Она потеряла одно измерение: она имеет длину и ширину, но не имеет высоты. Книга стала двумерна. Теперь представьте, что она повернута на бок и снова сплющена огромной рукой. Книга больше не является прямоугольником. Она сделалась отрезком прямой, снова потеряв одно измерение: не имеет высоты и ширины, но имеет длину. Она – одномерный объект. Вы можете лишить ее даже этого единственного измерения. Сплющенный по длине, отрезок прямой становится точкой, бесконечно малой, не имеющей ни высоты, ни ширины, ни длины. Точка – это объект, имеющий ноль измерений.

В 1425 году Брунеллески поместил именно такую точку в центр изображения знаменитого флорентийского здания – Баптистерия. Этот имеющий ноль измерений объект, исчезающая точка, бесконечно малое пятнышко на картине, представляет собой нечто, бесконечно удаленное от зрителя (рис. 18). Объекты на картине отступают в даль, они делаются все ближе к исчезающей точке, делаются более сжатыми по мере того, как удаляются от зрителя. Все,

находящееся достаточно далеко – люди, деревья, здания, – сжимаются в имеющую ноль измерений точку и исчезают. Ноль в центре картины содержит бесконечность пространства.

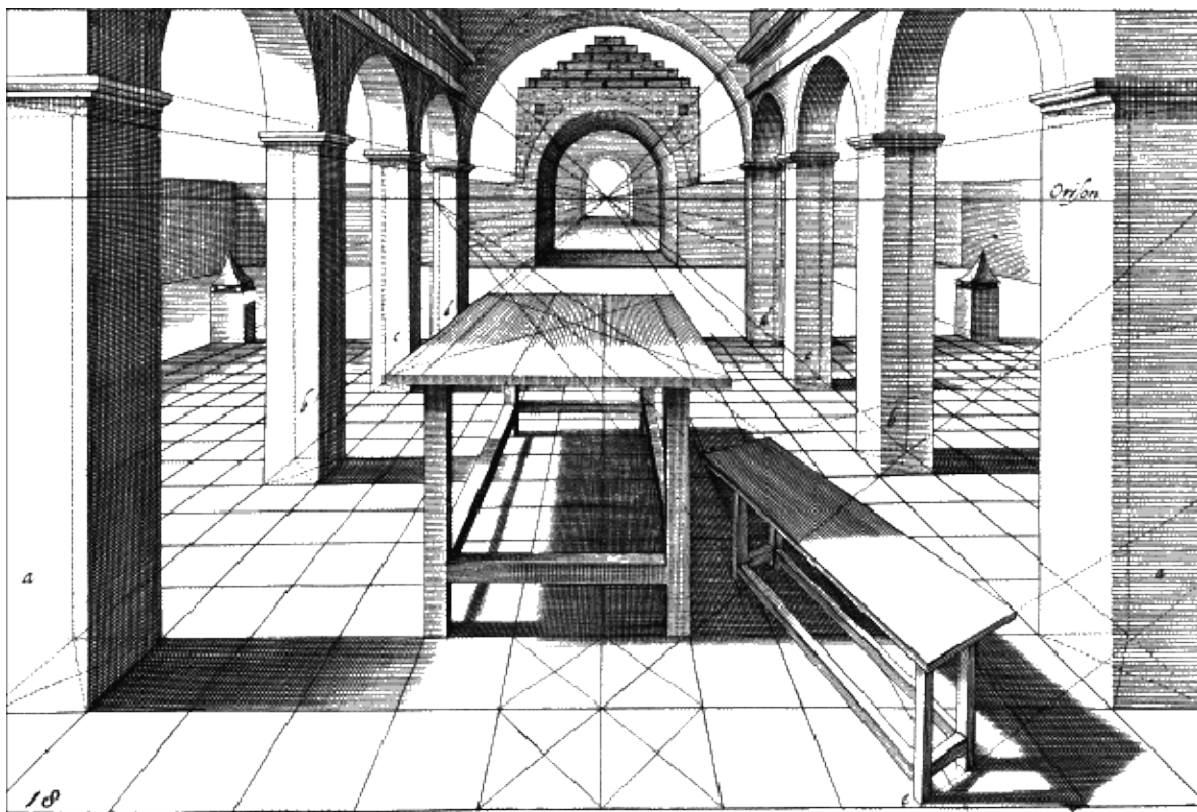


Рис. 18. Бесконечно удаленная точка

Этот очевидно противоречивый объект почти волшебным образом придал рисунку Брунеллески такое сходство с трехмерным Баптистериумом, что тот стал неотличим от реального здания. Действительно, когда Брунеллески воспользовался зеркалом и сравнил отражение Баптистериума с рисунком, оказалось, что отражение полностью соответствует геометрии здания. Бесконечно удаленная точка превратила двумерное изображение в точную копию трехмерного объекта.

То, что ноль и бесконечность соединены в бесконечно удаленной точке, – не совпадение. Умножение на ноль заставляет числовую ось сжаться в точку; исчезающая точка заставляет большую часть Вселенной сократиться до крошечного пятнышка. Это *сингулярность*, концепция, ставшая позднее очень важной в истории науки, однако на том раннем этапе математики знали немногим больше художников о свойствах ноля. В XV столетии художники были дилетантами-математиками. Леонардо да Винчи написал руководство для изображения перспективы. Другая его книга о живописи предостерегает: «Пусть никто, не являющийся математиком, не читает моих работ». Художники-математики совершенствовали технику перспективы и скоро оказались способны изображать любой предмет в трех измерениях. Они не были больше ограничены плоскостными изображениями.

Ноль преобразил мир искусства. Он буквально занимал центральное место на рисунке Брунеллески. Церковь тоже взялась за ноль и бесконечность, хотя христианская доктрина все еще зависела от идей Аристотеля. Современник Брунеллески, немецкий кардинал Николай Кузанский, рассмотрел бесконечность и тут же заявил: *Te r r a non est centra mundi* – «Земля не есть центр мира». Церковь еще не понимала, какой опасной, какой революционной была эта идея.

Одним из древних утверждений средневековой аристотелевской доктрины – столь же

непререкаемым, как запрет на вакуум, – было положение о том, что Земля уникальна. Она находилась в самом центре Вселенной. Особое положение Земли в центре Вселенной делало ее единственным миром, способным поддерживать жизнь в соответствии с утверждением Аристотеля, что все предметы ищут свое естественное место. Тяжелые объекты, такие как скалы или люди, принадлежат земле; легкие объекты, такие как воздух, принадлежат небесам. Это не только предполагает, что планеты – в небесах – созданы из света, воздушного вещества; это также означает, что любой человек в небесах естественным образом упадет на землю. Таким образом, существа могут населять только зерно ореха – космоса. Вообразить две планеты с жизнью на них – столь же глупо, как вообразить сферу с двумя центрами.

Когда епископ Тампье заявил, что всемогущий Бог может создать вакуум, если пожелает, это соответствовало утверждению, что Бог может нарушить любой закон Аристотеля. Бог мог бы создать жизнь в других мирах, если бы пожелал. Могли бы существовать тысячи других земель, каждая кишачая существами; это определенно было бы в силах Бога, согласен с этим Аристотель или нет.

Николай Кузанский был достаточно дерзок, чтобы заявить, что Бог и должен был так поступить. «Религии на других звездах сходны с этой, – говорил он, – потому что мы верим, что ни одна из них не лишена жителей». Небеса были полны бесчисленного числа звезд. Планеты сияли в небесах, Луна и Солнце изливали свет. Почему бы звездам на небе не быть самим планетами, лунами или солнцами? Может быть, и Земля ярко светит на их небесах, так же, как они – на наших. Кузанский был уверен, что Бог в самом деле создал бесконечное множество других миров. Земля больше не была центром Вселенной. Однако Николай Кузанский не был объявлен еретиком, Церковь никак не отреагировала на новую идею.

Тем временем другой Николай превратил философию Кузанского в научную теорию. Николай Коперник доказал, что Земля – не центр Вселенной. Она вращается вокруг Солнца. Вармийский каноник и врач, Коперник изучал математику, чтобы составлять астрологические таблицы для лучшего лечения пациентов. Попутно он занялся планетами и звездами. Это показало ему, какой запутанной была старая греческая система определения положения планет. Действующие как часы небеса Птолемея – с Землей в центре – были исключительно точны. Однако эта система была чудовищно сложна. Планеты перемещались по небу на протяжении года, но иногда останавливались, двигались обратно, а потом снова устремлялись вперед. Чтобы объяснить странное поведение планет, Птолемей добавил к своему часовому механизму *эпициклы* : маленькие окружности внутри больших могли объяснить обратное – ретроградное – движение планет (рис. 19).

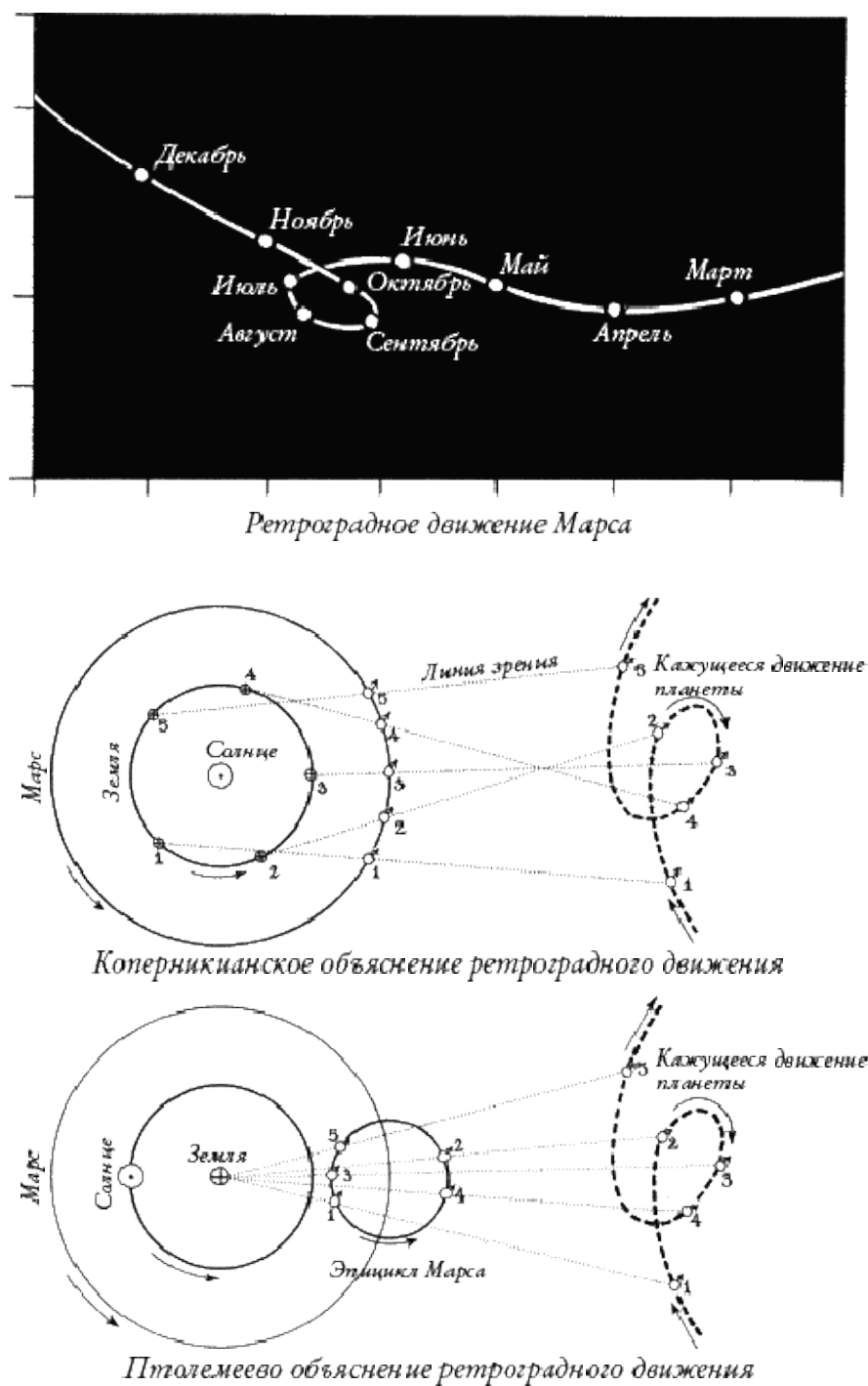


Рис. 19. Эпициклы, ретроградное движение и гелиоцентризм

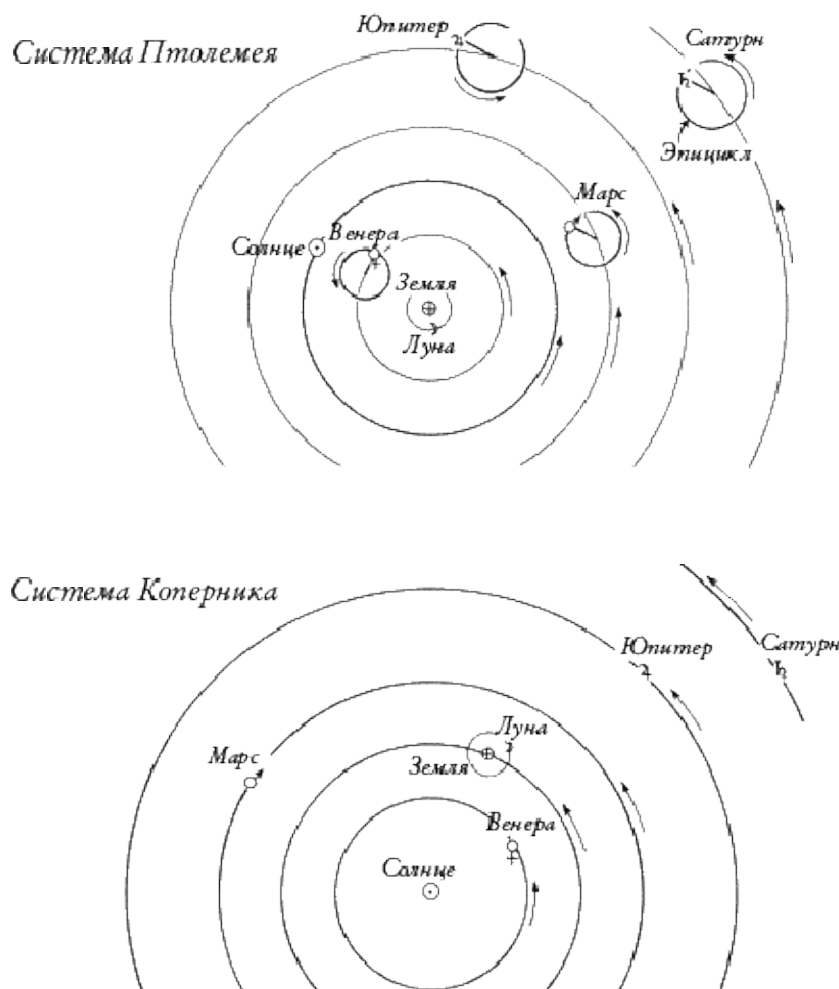


Рис. 19. Эпициклы, ретроградное движение и гелиоцентризм (продолжение)

Сила идеи Коперника была в ее простоте. Вместо того чтобы помещать Землю в центр Вселенной с ее полным эпициклов часовым механизмом, Коперник предположил, что центром является Солнце, а планеты движутся по простым окружностям. Планеты кажутся совершающими обратное движение, когда Земля их перегоняет, так что эпициклы не нужны. Хотя система Коперника не полностью совпадала с реальными данными – предположение о круговых орбитах оказалось неверным, хотя гелиоцентрическая идея была правильной – она была много проще системы Птолемея. Земля вращалась вокруг Солнца. *Terra non est centra mundi*.

Николай Кузанский и Николай Коперник раскололи скорлупу ореха – Вселенной Аристотеля и Птолемея. Земля больше не покоилась уютно в центре Вселенной, не существовало оболочки, содержащей космос. Вселенная уходила в бесконечность, испещренная бесчисленными мирами, каждый из которых населяли таинственные существа¹⁹. Однако как мог Рим претендовать на то, что является средоточием единственной истинной Церкви, если ее власть не могла распространяться на другие солнечные системы? Для Католической церкви перспективы выглядели мрачно, тем более что у нее начались неприятности с верующими даже в собственном мире. Коперник опубликовал свое главное творение, лежа на смертном одре – в 1543 году, незадолго до того, как Церковь начала душить новые идеи.

Книга Коперника *De Revolutionibus* была даже посвящена папе Павлу III. Но к этому

¹⁹ Тут автор утрирует, поскольку данные идеи принадлежат скорее Джордано Бруно.

времени Католическая церковь уже столкнулась с новой бедой, сделавшей нападки на Аристотеля особенно невыносимыми.

Неприятности начались в 1517 году, когда страдающий запором немецкий монах прибил к двери церкви в Виттенберге список своих тезисов. (Запор Лютера носит легендарный характер. Некоторые ученые считают, что его великие разоблачения Церкви пришли ему на ум, когда он сидел в уборной. «Освобождение Лютера от цепей страха совпало с освобождением его кишечника», – говорит один текст, комментирующий данную теорию.) Это было началом Реформации; интеллектуалы повсюду начали оспаривать авторитет папы. К 1530-м годам английский король Генрих VIII, стремясь обеспечить законность передачи трона, отверг власть папы и объявил себя главой Английской церкви.

Католическая церковь должна была нанести ответный удар. На протяжении столетий заигрывая с философами, под угрозой раскола она снова вернулась к ортодоксии и опять стала опираться на учения таких ученых, как святой Августин и Боэций, и на аристотелевское доказательство существования Бога. Кардиналы и служители Церкви больше не могли подвергать сомнению древние доктрины. Ноль стал еретической идеей. Следовало принять заключенную в скорлупу Вселенную, отвергнув пустоту и бесконечность. Один из ударных отрядов, распространявших эти учения, был создан в 1530 году: орден иезуитов, собрание высокообразованных интеллектуалов, хорошо подготовленных для нападения на протестантизм. Церковь имела и другие инструменты для борьбы с ересью – испанская инквизиция начала сжигать протестантов в 1543 году, в том же году, когда умер Коперник, а папа Павел III издал индекс запрещенных книг²⁰. Контрреформация была попыткой Церкви восстановить старый порядок, удушив новые идеи. Мысль, поддержанная такими разными людьми, как епископ Этьен Тампье в XIII веке и кардинал Николай Кузанский в XV веке, могла означать смертный приговор в XVI столетии.

Это и случилось с несчастным Джордано Бруно. В 1580 году Бруно, бывший доминиканец, опубликовал книгу «О бесконечной Вселенной и мирах», где предположил, как и Николай Кузанский, что Земля – не центр Вселенной, и существуют бесконечные миры, подобные нашему собственному. В 1600 году он был сожжен на костре²¹.

В 1616 году книга Коперника *De Revolutionibus* была запрещена специальным решением Конгрегации индекса «впредь до исправления», а знаменитому Галилео Галилею, стороннику запрещаемой теории, главный инквизитор передал от папы «увещевание» больше никогда не высказываться по ее поводу. Нападение на Аристотеля считалось нападением на Церковь.

Однако несмотря на контрреформацию, уничтожить новую философию было нелегко. С течением времени она, усилиями последователей Коперника, становилась все сильнее. В начале XVII века другой астроном, Иоганн Кеплер, усовершенствовал теорию Коперника, сделав ее еще более точной. Вместо того чтобы двигаться по окружностям, планеты в его теории, включая Землю, двигались вокруг Солнца по эллипсам. Это предположение окончательно сделало ненужными эпициклы, перекачавшие из модели Птолемея в модель Коперника,

²⁰ Здесь автор допускает некоторые хронологические ошибки: испанская инквизиция начала сжигать еретиков в 1478 году. Первый список запрещенных книг вышел в Нидерландах в 1529-м. Первый римский список запрещенных книг был издан уже при папе Павле I V, в 1559 году.

²¹ Джордано Бруно был сожжен в первую очередь из-за того, что отрицал Божественную природу Христа и непорочность Девы Марии.

чтобы привести в соответствие расчеты с перемещением планет на небе. Астрономы не могли больше отрицать, что гелиоцентрическая система значительно превосходит геоцентрическую: модель Кеплера была проще модели Птолемея и отличалась большей точностью. Несмотря на возражения Церкви, система Кеплера со временем вытеснила геоцентрическую, потому что Кеплер был прав, а Аристотель и Птолемей ошибались.

Церковь пыталась залатать прорехи в старом мышлении, но Аристотель, геоцентрический мир и феодальный порядок были смертельно ранены. Все, что философы на протяжении тысячелетий считали незыблемым, стало подвергаться сомнению. Аристотелевской системе нельзя было доверять, но в то же время ее нельзя было отбросить. Что же тогда можно было считать несомненным? В буквальном смысле слова ничто.

Ноль и пустота

Я оказываюсь созданным таким образом, что являюсь как бы чем-то средним между Богом и небытием, или между Высшей сущностью и ничем.

Рене Декарт. «Размышления о первой философии»²²

Ноль и бесконечность находились в самом центре философской войны, разгоревшейся в XVI и XVII веках. Пустота ослабила философию Аристотеля, а идея бесконечно большого космоса помогла расколоть скорлупу Вселенной. Земля не могла быть центром Божьего творения. Папство теряло управление своим стадом, и Католическая церковь пыталась отвергать ноль и бесконечность еще более яростно, чем раньше, однако ноль уже пустил корни. Даже наиболее преданные интеллектуалы – иезуиты – разрывались между старыми аристотелевскими методами и новой философией, которая допускала ноль и пустоту, бесконечность и бесконечное.

Рене Декарт получил иезуитское образование и тоже разрывался между старым и новым. Он не признавал пустоту, но поставил ее в центр своего мира. Родившийся в 1596 году Декарт поставил ноль в середину числовой оси, а доказательство существования Бога искал в пустоте и бесконечности. Однако полностью отвергнуть Аристотеля Декарт не мог, он так боялся пустоты, что отрицал ее существование.

Как и Пифагор, Декарт был математиком-философом. Возможно, его самым известным наследием стало математическое изобретение – то, что мы теперь называем декартовыми координатами. Любой, кто в школе изучал математику, с ними знаком: это набор чисел в скобках, обозначающий точку в пространстве. Например, символ (4, 2) обозначает точку, расположенную в четырех единицах вправо и двух единицах вверх. Однако вправо и вверх от чего? От начала координат, ноля (*рис. 20*).

²² Декарт Р. Размышления о первой философии. Размышление четвертое: об истине и лжи. Соч. в 2 т. М.: Мысль, 1989. Пер. С. Я. Шейнман-топштейн.

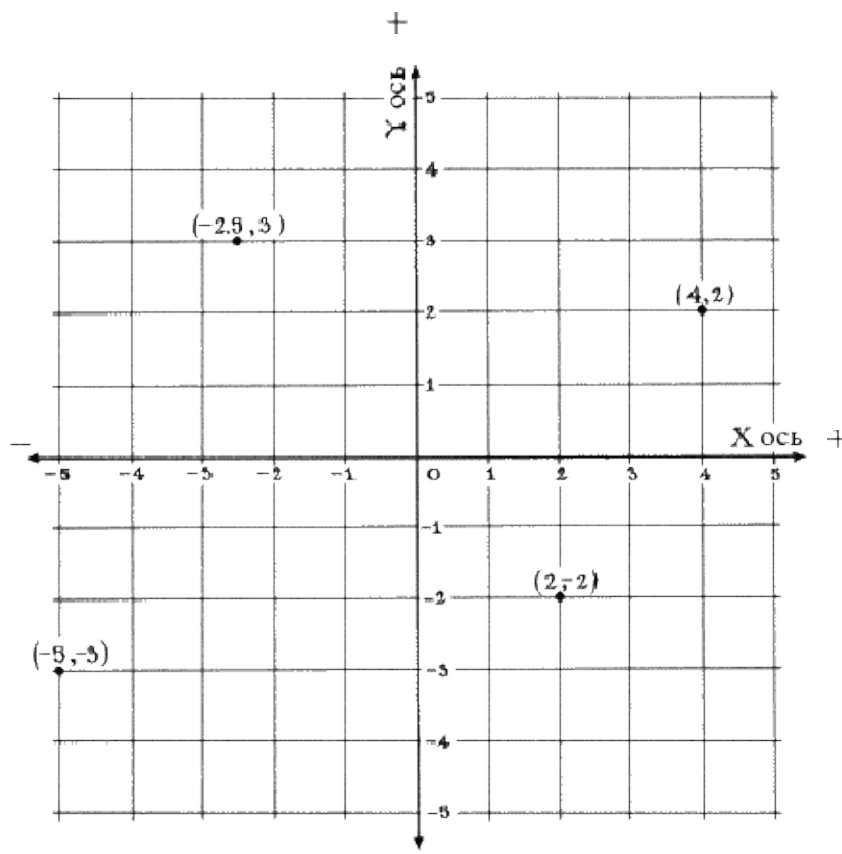


Рис. 20. Декартовы координаты

Декарт понял, что не может начать свои две оси с числа 1. Это вело бы к ошибке, подобной той, которую совершил Беда, обновляя календарь. Однако в отличие от Беды Декарт жил в Европе, где арабские цифры стали делом обычным, поэтому он начал отсчет от нуля. В самом центре системы координат – там, где пересекаются оси, – сидит ноль. Начало, точка $(0, 0)$ – основа декартовой системы координат. (Названия, использовавшиеся Декартом, несколько отличались от тех, которыми мы пользуемся сегодня. В частности, он не распространял свою систему на отрицательные числа, хотя его коллеги быстро это сделали.)

Декарт быстро понял, как могущественна его система координат. Он использовал ее для преобразования фигур и форм в уравнения и числа. Благодаря декартовым координатам любой геометрический объект – квадрат, треугольник, кривая – мог быть выражен уравнением в виде математической зависимости. Например, окружность с центром в начале координат является геометрическим местом точек с координатами $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Парабола может быть обозначена как $y - x^2 = 0$.

Декарт объединил числа и фигуры. Западное искусство геометрии и восточное искусство алгебры больше не были отдельными областями. Они были одним и тем же, так как каждая фигура могла быть просто выражена в виде уравнения $f(x, y) = 0$ (рис. 21). Ноль находился в центре системы координат, и ноль скрыто присутствовал в каждой геометрической фигуре.

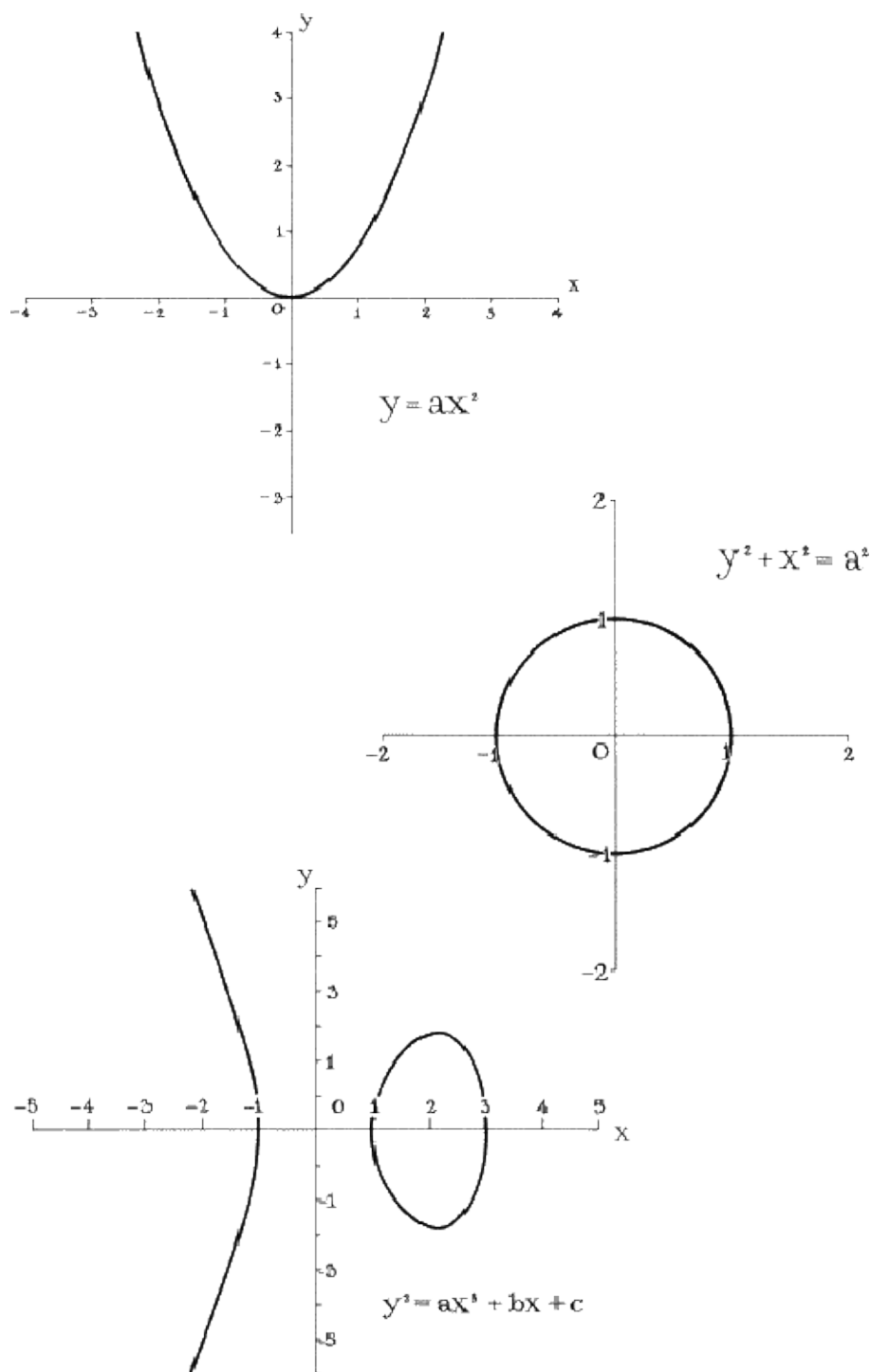


Рис. 21. Парабола, окружность и эллиптическая кривая

Для Декарта ноль также крылся во владениях Бога наравне с бесконечностью. Поскольку старая аристотелева доктрина рушилась, Декарт, верный своей иезуитской подготовке, старался использовать ничто и бесконечность взамен прежнего доказательства существования Бога.

Как и древние мыслители, Декарт полагал, что ничто – даже знание – не может быть создано из ничего. Это означало, что все идеи, все философские системы, все понятия, все будущие открытия уже существуют от рождения в умах людей, а исследования – просто процесс раскрытия уже вложенного знания законов, управляющих Вселенной. Поскольку мы имеем концепцию бесконечного совершенного существа в наших умах, Декарт утверждал, что это бесконечное совершенное существо – Бог – должно существовать. Все остальные существа меньше Бога, они конечны. Все они находятся где-то между Богом и ничто. Они – сочетание

бесконечности и ноля.

Однако хотя ноль снова и снова появлялся в философии Декарта, он до самой смерти настаивал на том, что пустоты – окончательного ноля – не существует. Дитя Контрреформации, Декарт узнал об Аристотеле как раз в тот момент, когда Церковь в наибольшей мере полагалась на его принципы. В результате Декарт, проникнутый философией Аристотеля, отрицал существование вакуума.

Занимать такую позицию было нелегко: Декарт, несомненно, осознавал связанные с полным отрицанием вакуума метафизические проблемы. Позднее он писал об атомах и вакууме: «Об этих вещах, вызывающих противоречия, можно абсолютно утверждать, что их не может быть. Однако не следует отрицать того, что они могут быть созданы Богом, а именно: если Бог изменил бы законы природы». Тем не менее, подобно своим средневековым предшественникам, Декарт полагал, что ничто на самом деле не движется по прямой, потому что за таким объектом оставался бы вакуум. Вместо этого считалось, что все объекты во Вселенной двигаются по окружностям. Это был истинно аристотелевский взгляд на вещи, однако пустоте предстояло опровергнуть Аристотеля однажды и навсегда.

Даже сегодня детей учат тому, что природа не терпит пустоты: учителя не понимают на самом деле, откуда взялась эта фраза. Это было следствием аристотелевской философии – вакуума не существует. Если кто-то попытается создать вакуум, природа сделает все, что в ее силах, чтобы этому воспрепятствовать. Однако преемник Галилея при тосканском дворе, Эванджелиста Торричелли, доказал ложность этого утверждения: он первым создал вакуум.

В Италии использовался насос, действовавший, как своего рода огромный шприц для подъема воды из колодцев и каналов. Он состоял из поршня, плотно входившего в трубу. Конеч трубы погружался в воду, и когда поршень шел вверх, повышался и уровень воды в трубе.

Галилей слышал от работника, что при работе такого насоса возникает проблема: он мог поднять воду только на 33 фута. После этого, хоть поршень и шел вверх, уровень воды в трубе оставался тем же самым. Это был любопытный феномен, и Галилей поручил его изучение своему ассистенту. Торричелли начал проводить опыты, пытаясь выяснить причину такого странного ограничения. В 1643 году Торричелли взял длинную трубку, запаянную с одного конца, и наполнил ее ртутью. Перевернув трубку, он погрузил открытый конец в сосуд с ртутью. Когда Торричелли поднимал перевернутую трубку в воздух, ожидалось, что ртуть быстро вытечет из нее, потому что будет замещена воздухом: ведь вакуум не мог быть создан. Однако когда трубка поднималась, не будучи извлеченной из сосуда с ртутью, там не было воздуха, который мог бы вытеснить ртуть из трубки. Если природа в самом деле настолько не терпела пустоты, ртуть в трубке должна была бы остаться на прежнем месте, чтобы не создалась пустота. На практике же ртуть в трубке не оставалась на прежнем уровне, она немного опускалась вниз, оставив сверху некоторое пространство. Что это было за пространство? Ничто. Это был первый случай в истории, когда был создан длительно существующий вакуум.

Какого бы размера трубку ни использовал Торричелли, ртуть опускалась вниз, пока верхняя граница ее столбика не оказывалась примерно на 30 дюймов выше уровня ртути в сосуде; если смотреть на это с другой точки зрения, ртуть могла подняться в трубке на 30 дюймов, сопротивляясь вакууму над ней. Природа не терпела пустоты как раз на 30 дюймов. Потребовался бы анти-Декарт, чтобы объяснить, почему.

В 1623 году Декарту было 27 лет, а Блезу Паскалю, которому предстояло стать оппонентом Декарта, – ноль лет. Отец Блеза Паскаля, Этьен Паскаль, был видным ученым и математиком; гений юного Паскаля не уступал гению его отца. Еще в молодости Блез изобрел механический калькулятор, названный паскалиной, сходный с некоторыми механическими

калькуляторами, которые инженеры использовали до изобретения электронного калькулятора. Когда Блезу было 23 года, его отец поскользнулся на льду и сломал бедро. Его лечили несколько янсенистов – католиков, принадлежавших к секте, образованной людьми, ненавидевшими орден иезуитов. Вскоре вся семья Паскалей была обращена в эту веру, и Блез сделался антииезуитом, контр-контрреформатором. Вновь найденная религия была не слишком удобна для молодого ученого. Епископ Янсений, основатель секты, провозглашал греховность науки, а любопытство в отношении природы считал сродни вожделению. К счастью, на некоторое время вожделение Паскаля оказалось сильнее его религиозного рвения – он использовал науку для разгадки секрета вакуума.

Примерно одновременно с обращением Блеза друг Этьена – военный инженер – навел на друзей и повторил для Паскалей опыт Торричелли. Блез Паскаль был заворочен и начал проводить собственные опыты, используя воду, вино и другие жидкости. Результатом стала работа «Новые эксперименты, касающиеся пустоты», опубликованная в 1647 году. Она оставляла без ответа главный вопрос: почему ртуть поднималась всего на 30 дюймов, а вода – на 33 фута? Современные Паскалю теории пытались отчасти спасти философию Аристотеля, утверждая, что нетерпимость природы к пустоте «ограниченна» и может уничтожить только конечный объем вакуума. У Паскаля возникла другая мысль.

Повинуясь догадке, он осенью 1648 года отправил своего зятя в горы с наполненной ртутью трубкой. На вершине горы ртуть поднялась в трубке значительно меньше, чем на 30 дюймов (рис. 22). Может быть, пустота меньше смущала природу на горе, чем на равнине?

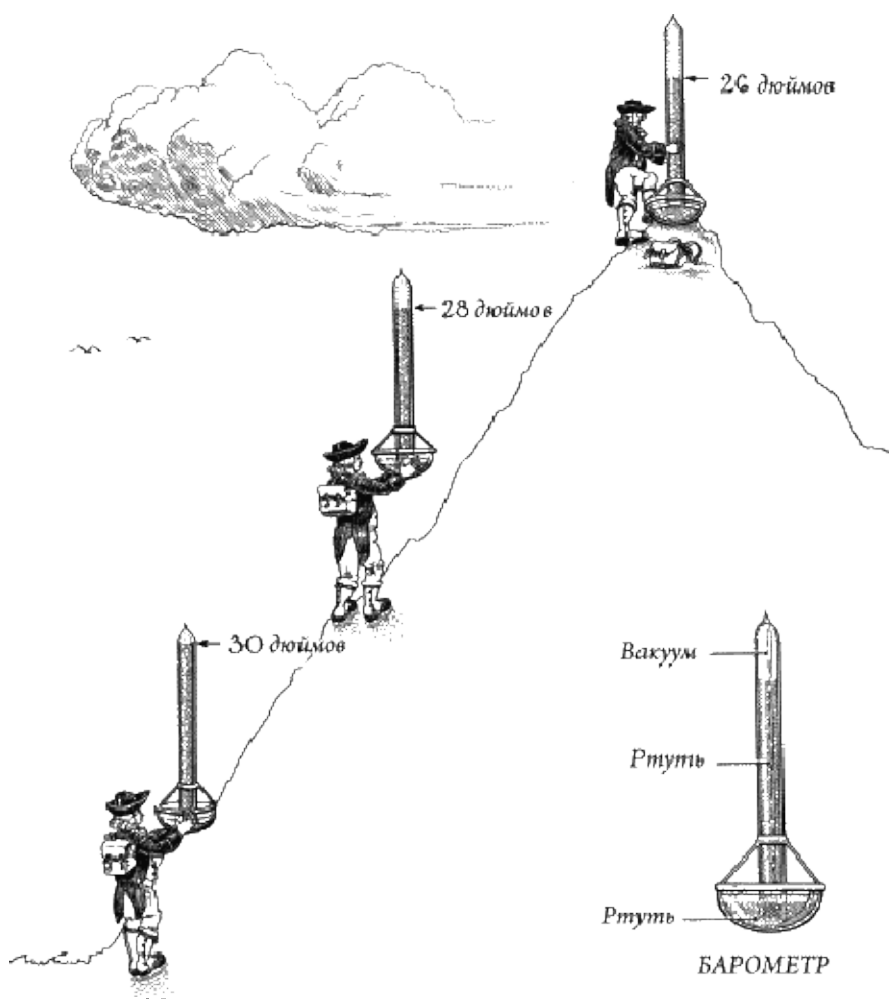


Рис. 22. Эксперимент Паскаля

Для Паскаля это кажущееся странным поведение столбика ртути доказывало, что не отвращение к вакууму поднимало ртуть в трубке. Это был вес атмосферного воздуха – давление на открытую поверхность ртути в сосуде заставляло жидкость подниматься по трубке. Атмосферное давление на поверхность жидкости в сосуде – будь это ртуть, вода или вино – приводит к подъему жидкости в трубке, точно так же, как нажатие на тубик с зубной пастой заставляет его содержимое выдавливаться из носика. Поскольку атмосфера не может давить с неограниченной силой, ее давление может поднять ртуть в трубке всего на 30 дюймов. На вершине же горы атмосферное давление меньше, так что не может поднять ртуть даже на эту высоту.

Это тонкий момент: вакуум ничего не всасывает, давит именно атмосфера. Однако простой эксперимент Паскаля опроверг утверждение Аристотеля о том, что природа не терпит пустоты. Паскаль писал: «До сих пор нельзя было найти никого, кто придерживался бы этого взгляда: у природы нет отвращения к вакууму, она не делает усилий избежать его и приемлет вакуум без трудностей и сопротивления». Аристотель был побежден, ученые перестали бояться пустоты и начали изучать ее.

Однако Паскаль, преданный янсенист, пытался доказать существование Бога с помощью ноля и бесконечности. Делал он это очень нечестивым способом.

Божественное пари

Да и что же такое, наконец, человек в природе? Ничто в сравнении с бесконечным, все в сравнении с ничтожеством, середина между ничем и всем.

Блез Паскаль. «Мысли о религии»²³

Паскаль был не только ученым-естествоиспытателем, но и математиком. Как ученый-естествоиспытатель Паскаль изучал вакуум – природу пустоты. В математике Паскаль помог изобрести целую новую область: теорию вероятности. Когда Паскаль соединил теорию вероятности с нолем и бесконечностью, он нашел Бога.

Теория вероятности была изобретена, чтобы помочь богатым аристократам выигрывать больше денег в карты. Теория Паскаля пользовалась огромным успехом, однако его карьере математика не суждено было оказаться долгой. 23 ноября 1654 года Паскаль испытал сильнейшее духовное переживание. Возможно, сказала старая янсенистская установка на отрицание науки... Какова бы ни была причина, вновь обретенная набожность привела Паскаля к полному отказу от математики и науки. (На короткое время, четырем годами позже, когда он не мог спать из-за болезни, Паскаль сделал исключение, занявшись математикой. Боль ослабла. Паскаль полагал, что это знак: Бог не осуждает его занятий.)

Паскаль сделался теологом, но ему не удавалось забыть свое безбожное прошлое. Даже когда дело дошло до утверждения существования Бога, Паскаль обратился к греховным приемам французов-игроков. Паскаль утверждал, что верить в Бога лучше, потому что это выгодная ставка – в прямом смысле слова.

Как он анализировал цену – или ожидание выигрыша – в игре, так он оценивал веру в

²³ Паскаль Б. Мысли о религии. М.: Типография И.Д. Сытина, 1892. Пер. С. Долгова.

Христа. Благодаря математическим понятиям ноля и бесконечности Паскаль пришел к заключению, что следует признать существование Бога.

Прежде чем рассмотреть заключенное им пари, стоит проанализировать несколько иную игру. Представьте себе, что имеется два конверта, помеченные буквами «А» и «Б». Прежде чем вам покажут конверты, бросок монеты определит, в каком из них будут деньги: если выпадет орел, то в конверте «А» окажется новенькая купюра в 100 \$; если выпадет решка, то деньги в конверте «Б», только уже не 100 \$, а 1 000 000 \$. Какой конверт вам следовало бы выбрать?

Очевидно, что конверт «Б»! Его ценность гораздо выше. Нетрудно показать это, используя инструмент из теории вероятности, именуемый математическим ожиданием: это мера того, как мы оцениваем стоимость каждого конверта.

Конверт «А» может содержать или не содержать купюру в 100 \$, он имеет некоторую ценность, потому что может содержать деньги, но 100 \$ он не стоит, потому что вы не можете быть абсолютно уверены, что деньги в нем. Математик взял бы каждое возможное содержимое конверта «А», а затем умножил бы на вероятность соответствующего исхода: $1/2$ шанса выиграть 0 \$ плюс $1/2$ шанса выиграть 100 \$ / $1/2 \times 0 = 0$ \$ плюс $1/2 \times 100 = 50$ \$; ожидание – 50 \$. Вывод математика был бы – ожидаемая цена конверта «А» – 50 \$. В то же время ожидаемая цена конверта «Б» такова: $1/2$ шанса выиграть 0 \$ плюс $1/2$ шанса выиграть 1 000 000 \$ / $1/2 \times 0 + 1/2 \times 1\,000\,000 = 500\,000$. Ожидание – 500 000 \$. Таким образом, ожидаемая цена конверта «Б» – 500 000 \$: в 10 000 раз больше, чем ожидаемая цена конверта «А». Ясно, что если вам предлагается выбрать между двумя конвертами, разумно выбрать конверт «Б».

Пари Паскаля было в точности сходно с этой игрой, за тем исключением, что конверты были другими: христианство и атеизм. (На самом деле Паскаль проанализировал только случай христианства, но случай атеизма был его логическим продолжением.) Допустим на мгновение, что шанс существования Бога – 50 на 50. (Паскаль полагал, что это, конечно, христианский Бог.)

Выбор конверта «Христианство» эквивалентен преданности христианской вере. Если вы выбираете этот путь, имеются две возможности: если вы верующий христианин, а Бога нет, вы просто превращаетесь в ничто после смерти; если же Бог есть, вы отправляетесь на небеса и счастливо живете вечно. Таким образом, ожидаемая цена преданности христианству – $1/2$ шанса превратиться в ничто плюс $1/2$ шанса попасть на небеса: $1/2 \times 0 + 1/2 \times \infty = \infty$. Так каково же ожидание? В конце концов, половина бесконечности – все равно бесконечность. Таким образом, цена преданности христианству бесконечна. А что случится, если вы – атеист? Если вы правы, и Бога нет, вы ничего не выигрываете. В конце концов, раз нет Бога, то нет и небес. Однако если вы ошибаетесь, и Бог есть, вы навечно отправляетесь в ад: перед вами отрицательная бесконечность. Таким образом, ожидаемая цена атеистических взглядов такова: $1/2$ шанса превратиться в ничто плюс $1/2$ шанса отправиться в ад – $1/2 \times 0 + 1/2 \times -\infty = -\infty$. Каково же ожидание? Отрицательная бесконечность. Хуже ничего не придумаешь. Разумный человек, несомненно, выберет христианство, а не атеизм. Однако мы сделали допущение: 50 на 50, что Бог существует. Что же будет, если шанс окажется 1 на 1000? Цена преданности христианству составит $999/1000$ шанса превратиться в ничто плюс $1/1000$ шанса попасть на небеса: $999/1000 \times 0 + 1/1000 \times \infty = 0 + 1/1000 \infty = 1/1000 \infty$. Каково ожидание? Оно то же самое: бесконечность; для атеиста оно тоже отрицательная бесконечность. Все же гораздо лучше быть христианином. Если бы вероятность составляла $1/10000$ или $1/1\,000\,000$, результат был бы тем же. Если нет ни одного шанса, что Бог существует, пари Паскаля – каким оно нам известно – теряет смысл. Ожидаемая цена приверженности христианству составила бы $0 \times \infty$, а это тарабарщина. Никто не был готов утверждать, что шанс существования Бога равен нолю. Каковы бы ни были ваши взгляды, всегда лучше верить в Бога благодаря магии ноля и

бесконечности. Паскаль наверняка знал, как заключать пари, хоть и отказался от математики, чтобы выиграть.

Глава 5

Бесконечные ноли и неверующие математики

Ноль и научная революция

Когда в математику были введены переменные величины и когда их изменяемость была распространена до бесконечно малого и бесконечно большого, тогда и математика, вообще столь строго нравственная, совершила грехопадение... Девственное состояние абсолютной значимости, неопровержимой доказанности всего математического навсегда ушло в прошлое; наступила эра разногласий, и мы дошли до того, что большинство людей дифференцирует и интегрирует не потому, что они понимают, что они делают, а просто потому, что верят в это, так как до сих пор результат всегда получался правильный.

Фридрих Энгельс. «Анти-Дюринг»²⁴

Ноль и бесконечность разрушили аристотелевскую философию, вакуум и бесконечный космос избавили Вселенную от скорлупы и от идеи о том, что природа не терпит пустоты. Древняя мудрость была отброшена, и ученые начали открывать законы, управляющие природными явлениями. Однако перед научной революцией стояла проблема ноля.

В глубине могучего нового инструмента научного мира – дифференциального и интегрального исчисления – таился парадокс. Изобретатели исчисления, Исаак Ньютон и Готфрид Вильгельм Лейбниц, создали мощнейший математический метод благодаря делению на ноль и сложению бесконечного числа нолей. Оба действия были столь же нелогичны, как сложение 1 и 1, чтобы получить 3. Дифференциальное и интегральное исчисление в своих основах отрицали математическую логику. Их принятие было актом веры. Ученые совершили этот прыжок, поскольку дифференциальное и интегральное исчисление есть язык природы. Чтобы в совершенстве понимать этот язык, наука должна была победить бесконечные ноли.

Бесконечные ноли

Когда после тысячелетнего оцепенения европейская мысль потряхнула усыпляющее влияние, с толь мастерски насаждавшееся отцами Церкви, вопрос о бесконечности стал одним из первых, на которые вновь было обращено внимание.

Тобиас Данциг. «Числа – язык науки»

Проклятие Зенона висело над математикой два тысячелетия. Казалось, что Ахиллес обречен вечно преследовать черепаху, никогда ее не догоняя. В простой загадке Зенона скрывалась бесконечность. Греки были остановлены бесчисленными шагами Ахиллеса. Им не

²⁴ Энгельс Ф. Анти-Дюринг. I, IX.

приходило в голову сложить вместе бесконечные части, хотя величина шагов Ахиллеса приближалась к нулю. Греки едва ли могли сложить шаги нулевой величины, не имея понятия ноля. Впрочем, когда Запад принял ноль, математики начали приручать бесконечность и закончили гонку Ахиллеса.

Несмотря на то, что последовательность Зенона имеет бесчисленные члены, мы можем сложить их и все же остаться в области конечных чисел: $1 + 1/2 + 1/4 + 1/16 + \dots = 2$. Первым человеком, проделавшим такой трюк – сложение бесконечного числа членов для получения конечного результата, – был британский логик XIV века Ричард Суисет. Он взял последовательность $1/2, 2/4, 3/8, 4/16, \dots, n/2n$, сложил ее члены и получил 2. В конце концов числа, составлявшие последовательность, все больше и больше приближались к нулю; по наивности можно было бы предположить, что это обеспечит конечность их суммы. Увы, бесконечность вовсе не так проста.

Примерно в то же время, когда Суисет получил свой результат, Николя Оресм, французский математик, попробовал сложить другую бесконечную последовательность чисел – так называемую гармоническую серию: $1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + \dots$. Как и в случаях последовательностей Зенона и Суисета, все члены данной последовательности все больше и больше приближаются к нулю. Тем не менее когда Оресм попытался сложить их, он обнаружил, что сумма становится все больше и больше. Несмотря на то, что отдельные члены последовательности стремятся к нулю, сумма делается бесконечно большой. Оресм показал это, сгруппировав члены: $1/2 + (1/3 + 1/4) + (1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8) + \dots$. Первый член новой последовательности очевидно равен $1/2$; второй больше $1/2$, так как больше, чем $(1/4 + 1/4)$; третий тоже больше $1/2$, так как больше, чем $(1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8) \dots$ и так далее. Вы продолжаете складывать $1/2, 1/2, 1/2 \dots$ и сумма становится все больше и больше – до бесконечности. Хотя члены последовательности стремятся к нулю, они стремятся недостаточно быстро. Сумма бесконечной последовательности может быть бесконечно большой, даже если ее члены стремятся к нулю. Однако это еще не самое странное свойство бесконечно большой суммы. Ноль сам не застрахован от странной природы бесконечности.

Представьте себе следующую серию: $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \dots$. Нетрудно увидеть, что сумма этой серии равна нулю: ведь $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) \dots$ – то же самое, что $0 + 0 + 0 + 0 + \dots$, что, несомненно, дает в сумме ноль. Однако внимание! Сгруппируйте члены серии иначе: $1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots$. Это то же самое, что $1 + 0 + 0 + 0 + \dots$ и явно равняется 1. Одна и та же сумма бесконечного числа нулей одновременно равна 0 и 1! Итальянский священник отец Гвидо Гранди даже использовал эту серию для доказательства того, что Бог мог создать Вселенную (1) из ничего (0). На самом деле такая серия в сумме может давать что угодно. Чтобы сумма стала равна 5, используйте 5 и –5 вместо 1 и –1, и можно будет доказать, что $0 + 0 + 0 + 0 + \dots$ равно 5.

Сложение бесконечного числа объектов друг с другом может приводить к странным и противоречивым результатам. Иногда, когда члены стремятся к нулю, сумма оказывается конечной, прекрасным, нормальным числом вроде 2 или 53. В других случаях сумма делается бесконечно большой. А сумма бесконечной серии нулей может равняться вообще чему угодно. И все это происходило одновременно. Происходило нечто странное, и никто не знал, как же обращаться с бесконечностью.

К счастью, физический мир проявил больше здравого смысла, чем мир математический. Складывать бесконечное число предметов друг с другом удастся вполне успешно при условии, что вы имеете дело с чем-то реальным, например, ищите объем бочки вина. 1612 год оказался знаменательным для вина.

Иоганн Кеплер – тот самый, который открыл, что планеты движутся по эллипсам, –

провел этот год, заглядывая в винные бочки, потому что понял, что методы виноделов, оценивающих объем бочек, очень грубы. Чтобы помочь торговцам вином, Кеплер расколол – в уме, конечно, – бочку на бесконечное число бесконечно малых кусочков, а потом сложил их, чтобы определить объем. Это может показаться странным способом измерения бочки, но идея оказалась блестящей.

Чтобы несколько упростить проблему, представим себе двумерный, а не трехмерный объект – треугольник. Треугольник на рис. 23 имеет высоту 8 и основание 8. Поскольку площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту, она равна 32.

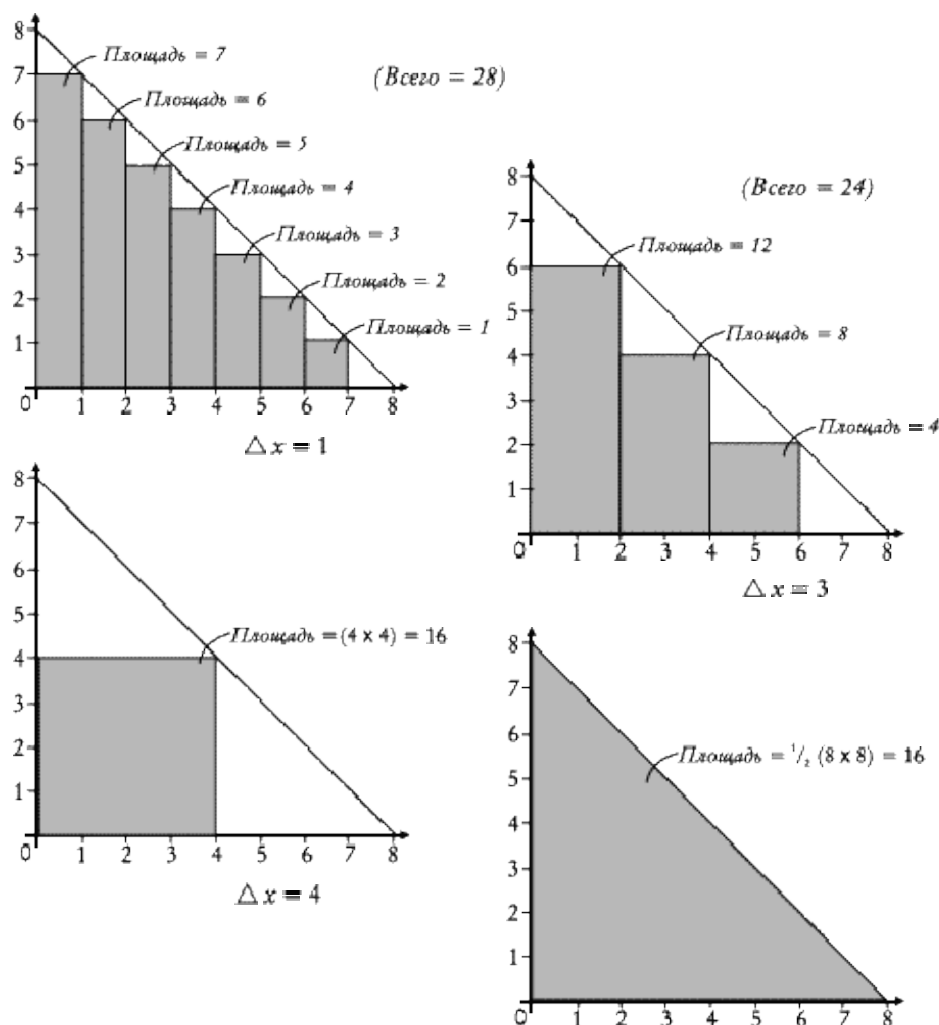


Рис. 23. Оценка площади треугольника

Теперь представьте себе, что вы пытаетесь оценить размер треугольника, вписывая в него маленькие прямоугольники. При первой попытке вы получите площадь в 16 – гораздо меньше действительной площади в 32. Вторая попытка окажется несколько лучше. С помощью трех прямоугольников вы получите площадь в 24. Близко, но вы еще не у цели. Третья попытка дает 28 – еще ближе.

Как вы видите, использование меньших и меньших прямоугольников, ширина которых, обозначенная символом Δx , стремится к нулю, делает результат все более близким к 32, истинной площади треугольника. (Сумма площадей прямоугольников равна $\sum f(x) \Delta x$, где греческий символ $\sum$ означает сумму по соответствующему ряду, а $f(x)$ есть уравнение кривой, к которой стремятся прямоугольники.

В современном написании, при том что x стремится к нулю, мы заменяем $\sum$ новым символом, $\int$, а $\emptyset x - dx$, что превращает уравнение в $\int f(x)dx$ – в интеграл.)

В одной из малоизвестных работ Кеплера «Новая стереометрия винных бочек»²⁵ он делает то же самое для трех измерений, рассекая бочку на плоскости и складывая плоскости друг с другом. Кеплер по крайней мере не боялся стоящей перед ним проблемы: по мере того как $\emptyset x$ приближается к нулю, получение суммы становится эквивалентным сложению бесконечного числа нолей – результат, не имеющий смысла. Кеплер игнорировал эту проблему. Хотя сложение бесконечного числа нолей с точки зрения логики – тарабарщина, ответ, который оно давало, был правильным.

Кеплер был не единственным выдающимся ученым, который рассекал объекты на бесконечно тонкие слои. Галилей тоже размышлял о бесконечности и бесконечно малых величинах. Об этих двух идеях – бесконечно больших и бесконечно малых, превосходящих наше конечное понимание, он писал: «Первых (мы не понимаем) по причине их огромности, вторых – их малости». Однако несмотря на глубокую тайну бесконечных нолей, Галилей чувствовал их могущество. «Представьте себе, чем они становятся, объединившись», – поражался он. Ученик Галилея Бонавентура Кавальери отчасти ответил на этот вопрос.

Вместо винных бочек Кавальери рассекал геометрические объекты. Для Кавальери всякая площадь, как, например, площадь треугольника, состояла из бесконечного числа имеющих нулевую ширину отрезков прямых, а всякий объем – из бесконечного числа имеющих нулевую высоту плоскостей. Эти неделимые отрезки и плоскости подобны атомам площади и объема; дальше делить их нельзя. Как Кеплер измерял объем винной бочки с помощью тонких слоев, так Кавальери складывал бесконечное число неделимых нолей для определения площади или объема геометрического объекта.

Утверждения Кавальери весьма беспокоили геометров. Сложение бесконечного числа имеющих нулевую площадь отрезков не могло дать двумерного треугольника, а бесконечного числа имеющих нулевой объем плоскостей – трехмерный объект. Это была та же проблема: нет логического смысла в сумме бесконечного числа нолей. Тем не менее метод Кавальери всегда приносил правильный ответ. Математики стали игнорировать логические и философские нестыковки при сложении бесконечного числа нолей, особенно поскольку неделимые, или бесконечно малые, как их стали называть, величины наконец позволили найти ответ на давно существовавшую проблему касательной.

Касательная – это прямая, лишь слегка целующая кривую. Для любой точки гладкой кривой, существующей в пространстве, имеется прямая, лишь задевающая кривую, касаясь ее только в одной точке. Это и есть касательная, и математики обнаружили, что она чрезвычайно важна при изучении движения. Например, представьте себе, что вы вращаете мяч на веревочке над головой. Он движется по окружности. Однако если вы внезапно перережете веревочку, мяч улетит по касательной к этой окружности; сходным образом рука питчера в бейсболе движется по дуге в момент броска, но как только он выпустит мяч, тот летит по касательной (рис. 24).

²⁵ Кеплер И. Новая стереометрия винных бочек / Пер. Ю. А. Белый. М.; Л., 1935.

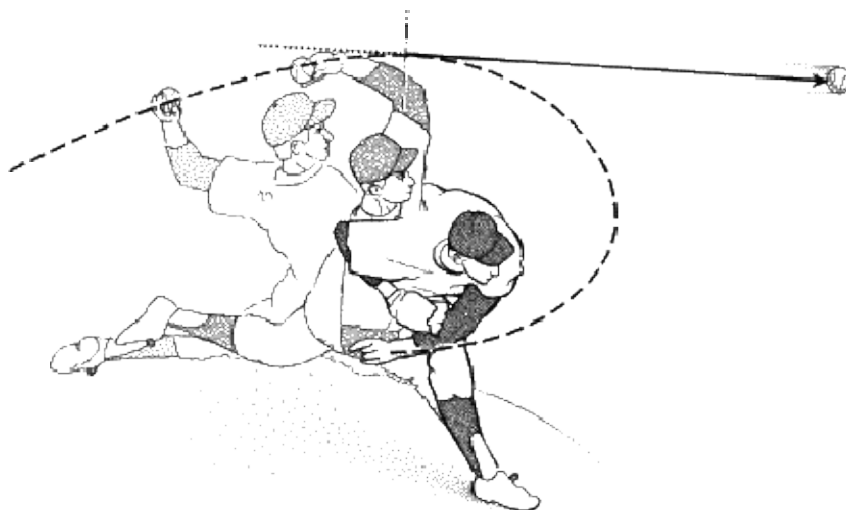


Рис. 24 . Полет по касательной

Другой пример: если вы захотите узнать, куда упадет мяч у подножия холма, вы будете искать точку, в которой касательная горизонтальна. Крутизна касательной – ее наклон – обладает в физике некоторыми важными свойствами: например, если у вас имеется кривая, представляющая траекторию движения велосипеда, то наклон касательной к этой кривой в каждой данной точке скажет вам, с какой скоростью двигался велосипед в момент, когда он этой точки достиг.

По этой причине несколько математиков XVII века, такие как Эванджелиста Торричелли, Рене Декарт, француз Пьер де Ферма (прославившийся своей последней теоремой) и англичанин Исаак Барроу, разрабатывали различные способы нахождения касательной в каждой точке кривой. Как и Торричелли, все они столкнулись с проблемой бесконечно малых величин.

Чтобы провести касательную к кривой в данной точке, лучше всего сделать так: выбрать другую точку поблизости и соединить две точки. Полученная прямая не будет в точности касательной, но если кривая не слишком ухабиста, две прямые будут довольно близки друг к другу. Можно предположить, что по мере того как уменьшается расстояние между двумя точками, соединяющая их прямая все ближе совпадет с касательной (*рис. 25*). Когда точки окажутся на нулевом расстоянии друг от друга, такое приближение даст вам касательную. Конечно, тут есть проблема.

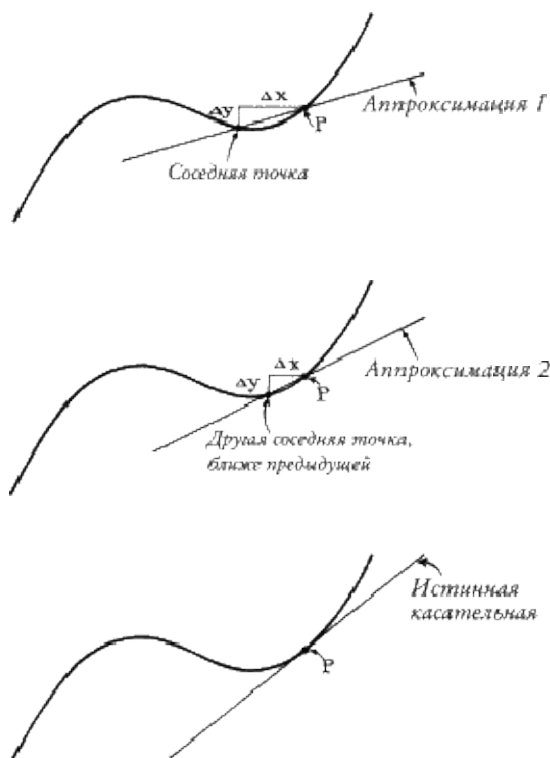


Рис. 25. Аппроксимация касательной

Самой важной особенностью прямой является ее наклон, и чтобы измерить его, математики выясняют, насколько прямая поднимается на определенном расстоянии. Например, представьте себе, что вы едете на восток вверх по холму; при этом на каждую милю, которую вы проехали, приходится подъем на полмили. Наклон холма – это просто подъем (полмили) над горизонтальным расстоянием, которое вы проехали (милей). Математики сказали бы, что наклон холма – $1/2$. Это же верно для прямых: чтобы определить наклон прямой, вы смотрите, насколько она переместилась по вертикали (математики обозначают это символом Δy) при заданном перемещении по горизонтали (которое обозначается Δx); таким образом, наклон равен $\Delta y / \Delta x$.

Когда вы пытаетесь рассчитать наклон касательной, процесс приближения вам портит ноль. По мере того как аппроксимация делается все лучше и лучше, точки на кривой, которые вы для нее используете, оказываются все ближе друг к другу. Это означает, что разница по вертикали, Δy , стремится к нулю, как и расстояние по горизонтали между точками, Δx . В результате, когда аппроксимация касательной делается все лучше, $\Delta y / \Delta x$ приближается к $0 / 0$. Ноль, деленный на ноль, может равняться любому числу на свете. Имеет ли наклон касательной какое-либо значение?

Каждый раз, когда математики пытались иметь дело с бесконечностью или с нулем, они сталкивались с логическими трудностями. Чтобы вычислить объем бочки или площадь параболы, математики складывали друг с другом бесконечные ноли; чтобы найти касательную к кривой, они делили ноль на самого себя. Ноль и бесконечность заставляли простой акт нахождения касательной или определения площади выглядеть противоречащими самим себе. Эти трудности положили бы конец интересным рассуждениям, если бы не одно обстоятельство: эти бесконечности и ноли служат ключом к пониманию природы.

Ноль и тайна математического анализа

Чем больше ум анализирует и развивает эти неуловимые идеи, тем больше он теряет и заходит в тупик; предметы, вначале мелькающие и крошечные, вскоре вообще исчезают из поля зрения... Это не конечные величины, не бесконечно малые величины, но и не ничто. Не назвать ли нам их призраками исчезнувших величин?

Епископ Беркли, «Аналитик»²⁶

Проблемы касательной и площади оказываются в запутанном состоянии из-за одних и тех же трудностей с бесконечностью и нолями. Это неудивительно, поскольку проблема касательной и проблема площади на самом деле одно и то же. Они обе – аспекты дифференциального и интегрального исчисления, научного инструмента, много более мощного, чем все, что было известно ранее. Телескоп, например, дал ученым возможность обнаружить луны и звезды, никогда раньше не наблюдавшиеся. Дифференциальное и интегральное исчисление, с другой стороны, дало ученым способ выражать законы, управляющие движением небесных тел, – и законы, со временем позволившие узнать, как эти луны и звезды возникли. Дифференциальное и интегральное исчисление оказалось истинным языком природы, но оно было пронизано нолями и бесконечностью, которые грозили уничтожить новый инструмент.

Его первооткрыватель едва не умер, не успев сделать первый вдох. Исаак Ньютон родился недоношенным на Рождество 1642 года, таким маленьким, что помещался в кружке объемом в кварту. Его отец, фермер, умер за два месяца до рождения сына.

Несмотря на тяжелое детство²⁷ и желание матери, чтобы он стал фермером, Ньютон поступил в 1660 году в Кембриджский университет и преуспел. За несколько лет он создал систематический метод разрешения проблемы касательной: теперь он мог вычислить касательную к любой плавной кривой в любой точке. Этот процесс представляет собой первую часть математического анализа, теперь известную как дифференциальное исчисление. Впрочем, способ Ньютона не особенно похож на тот, которым мы пользуемся сегодня.

Стиль дифференцирования Ньютона основывался на флюксиях (производных) – потоках – математических выражений, которые он называл флюентами (переменными). Как пример флюксий Ньютона рассмотрим уравнение $y = x^2 + x + 1$. В этом уравнении флюентами являются x и y ; Ньютон полагал, что x и y меняются – текут – с течением времени. Скорость их изменения – их флюксии – он обозначал как $\dot{x}$ и $\dot{y}$ соответственно.

Метод дифференцирования Ньютона основывался на одном приеме: он позволял флюксиям изменяться, но изменяться бесконечно мало. По сути, он не давал им времени течь. В обозначениях Ньютона y в этот момент менялся на $(y + o\dot{y})$, в то время как x менялся на $(x + o\dot{x})$. (Буква « o » представляла собой количество прошедшего времени; оно было почти нулем, но не совсем, как мы увидим.)

Уравнение тогда принимает вид:

$$(y + o\dot{y}) = (x + o\dot{x})^2 + (x + o\dot{x}) + 1.$$

Раскрытие выражения $(x + o\dot{x})^2$ дает нам $y + o\dot{y} = x^2 + 2x(o\dot{x}) + (o\dot{x})^2 + x + o\dot{x} + 1$. Приведение членов дает $y + o\dot{y} = (x^2 + x + 1) + 2x(o\dot{x}) + 1(o\dot{x}) + (o\dot{x})^2$. Поскольку $y = x^2 + x + 1$, мы можем вычесть y из левой части уравнения и $x^2 + x + 1$ из правой. Это дает нам $o\dot{y}$

²⁶ Беркли Дж. Соч. М.: Мысль, 2000. Пер. Е.С.Лагутина.

²⁷ Когда Ньютону было три года, его мать снова вышла замуж и переехала. Родив второму мужу троих детей, она практически не уделяла внимания Исааку. Даже после смерти отчима Исаак и его мать мало общались, хотя, получив после смерти мужа хозяйство, мать пыталась переложить на плечи юного Ньютона управление фермой (прим. авт.).

$= 2x(o\dot{x}) + 1(o\dot{x}) + (o\dot{x})^2$. Далее следует жульнический прием. Ньютон заявил, что поскольку $o\dot{x}$ на самом деле очень, очень мал, $o\dot{x}^2$ еще меньше и исчезает. По сути это был ноль, и его можно было игнорировать. Это дает нам $o\dot{y} = 2x(o\dot{x}) + 1(o\dot{x})$, а это значит, что $o\dot{y} / o\dot{x} = 2x + 1$. Это и есть угол наклона касательной в любой точке кривой (рис. 26).

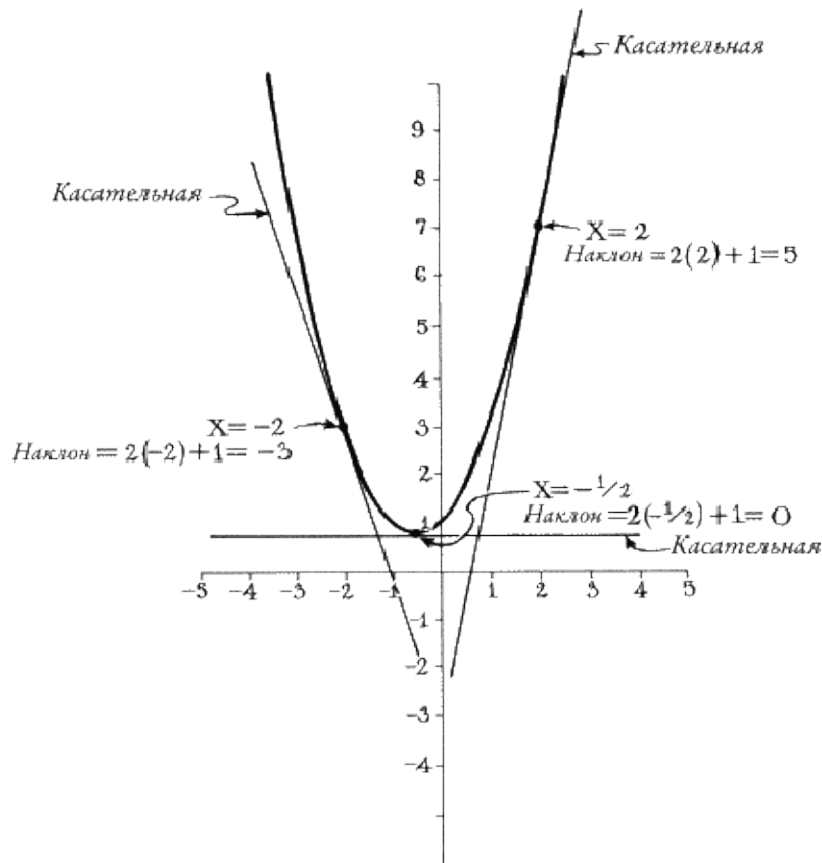


Рис. 26. Чтобы найти угол наклона в любой точке параболы $y = x^2 + x + 1$, нужно использовать формулу $2x + 1$

Бесконечно малый период времени o выпадает из уравнения, $o\dot{y} / o\dot{x}$ превращается в $\dot{y} / \dot{x}$, и об o больше не нужно думать.

Метод давал правильный ответ, но ньютоновское действие исчезновения очень смущало. Если, как настаивал Ньютон, $(o\dot{x})^2$, $(o\dot{x})^3$ и более высокие степени $o\dot{x}$ были равны нулю, то и само $o\dot{x}$ должно быть равно нулю²⁸. С другой стороны, если $o\dot{x}$ – ноль, то деление на $o\dot{x}$, как мы делали в конце, то же самое, что деление на ноль – как и самый последний шаг избавления от o в верхней и нижней части выражения $o\dot{y} / o\dot{x}$. Деление на ноль запрещено математической логикой.

Ньютонский метод флюксий был очень сомнителен. Он предполагал незаконную математическую операцию, однако обладал одним огромным преимуществом. Он работал. Метод флюксий не только разрешал проблему касательной, он разрешал и проблему площадей. Нахождение площади под кривой (или прямой, которая является одной из разновидностей

²⁸ Если вы перемножаете два числа и получаете ноль, то одно из них должно быть равно нулю. (В математических терминах: если $ab = 0$, то или $a = 0$, или $b = 0$.) Это значит, что если $a^2 = 0$, то $aa = 0$ и тем самым $a = 0$.

кривой) – операция, которую мы теперь называем интегрированием, – всего лишь действие, обратное дифференцированию. Как дифференцирование выражения $y = x^2 + x + 1$ дает уравнение для наклона касательной $y = 2x + 1$, интегрирование уравнения $y = 2x + 1$ дает формулу для определения площади под кривой. Эта формула – $y = x^2 + x + 1$; площадь под кривой, ограниченной точками $x = a$ и $x = b$ просто равна $(b^2 + b + 1) - (a^2 + a + 1)$ (рис. 27). (Технически формула имеет вид $y = x^2 + x + c$, где c есть любая константа. Процесс дифференцирования уничтожает часть информации, так что процесс интегрирования не дает вам точно тот ответ, который вы ищете, если только вы не добавите недостающие данные.)

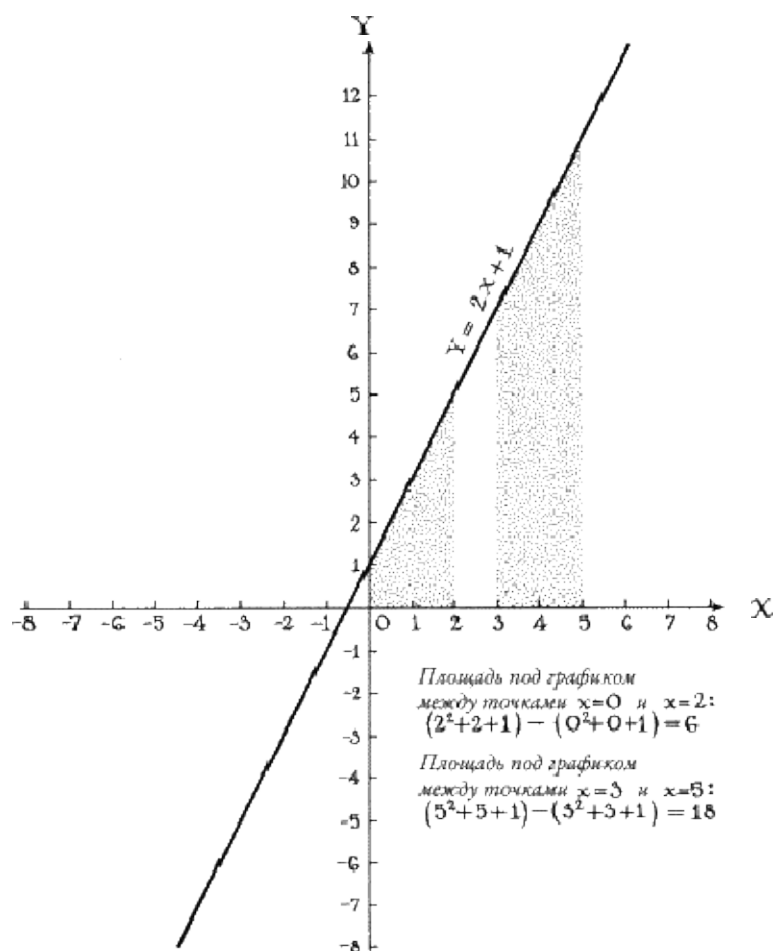


Рис. 27. Чтобы узнать площадь под кривой $y = 2x + 1$, используйте формулу $y = x^2 + x +$

1

Математический анализ – это комбинация этих двух инструментов, дифференцирования и интегрирования, в одной упаковке. Хотя Ньютон нарушил некоторые очень важные математические правила, заигрывая с нулем и бесконечностью, математический анализ давал настолько мощные методы вычислений, что ни один математик не смог его отвергнуть.

Природа говорит уравнениями. В этом странное совпадение. Правила математики были выстроены на основании подсчета овец и измерения земельных участков, однако те же самые правила управляют Вселенной. Законы природы описываются уравнениями, а уравнения в определенном смысле – всего лишь инструменты, используя которые, вы вводите числа и получаете другое число. Древние знали несколько этих уравнений-законов, вроде закона рычага, но с началом научной революции уравнения-законы стали появляться отовсюду. Третий закон Кеплера описывал время, которое нужно планетам для обращения по орбите: $r^3 / t^2 = k$, где t – время, r – расстояние и k – константа. В 1662 году Роберт Бойль показал, что

если взять запечатанный сосуд с газом внутри и начать газ сжимать, то давление внутри возрастет: давление, умноженное на объем, есть константа: $pV = k$, где p – давление, V – объем, k – константа. В 1676 году Роберт Гук вычислил силу действия пружины. Она равна отрицательной константе, умноженной на расстояние: $f = -kx$, где f – сила, x – расстояние, на которое растянута пружина, и k – константа. Эти ранние уравнения-законы были очень хороши для выражения простых зависимостей, однако уравнения имели ограничения – их постоянство, что не позволяло им быть универсальными.

Например, возьмем знаменитое уравнение, с которым все мы знакомимся в школе: скорость, умноженная на время, дает расстояние. Оно показывает, как далеко (на сколько миль – x) вы продвинетесь, если будете бежать с постоянной скоростью v в час на протяжении t часов: $vt = x$. Это уравнение очень полезно, когда вы подсчитываете, сколько времени займет путь от Нью-Йорка до Чикаго на поезде, который едет со скоростью ровно 120 миль в час. Однако сколько предметов на самом деле двигаются с постоянной скоростью, как поезд в этом математическом примере? Уроните мяч, и окажется, что он падает все быстрее и быстрее. В данном случае уравнение $x = vt$ попросту неверно. В случае падающего мяча $x = gt^2 / 2$, где g – ускорение, вызванное гравитацией. С другой стороны, если вы приложите к мячу увеличивающуюся силу, может оказаться, что $x = at^3 / 3$. Равенство расстояния скорости, умноженной на время, – это не универсальный закон, он действует не при всех условиях.

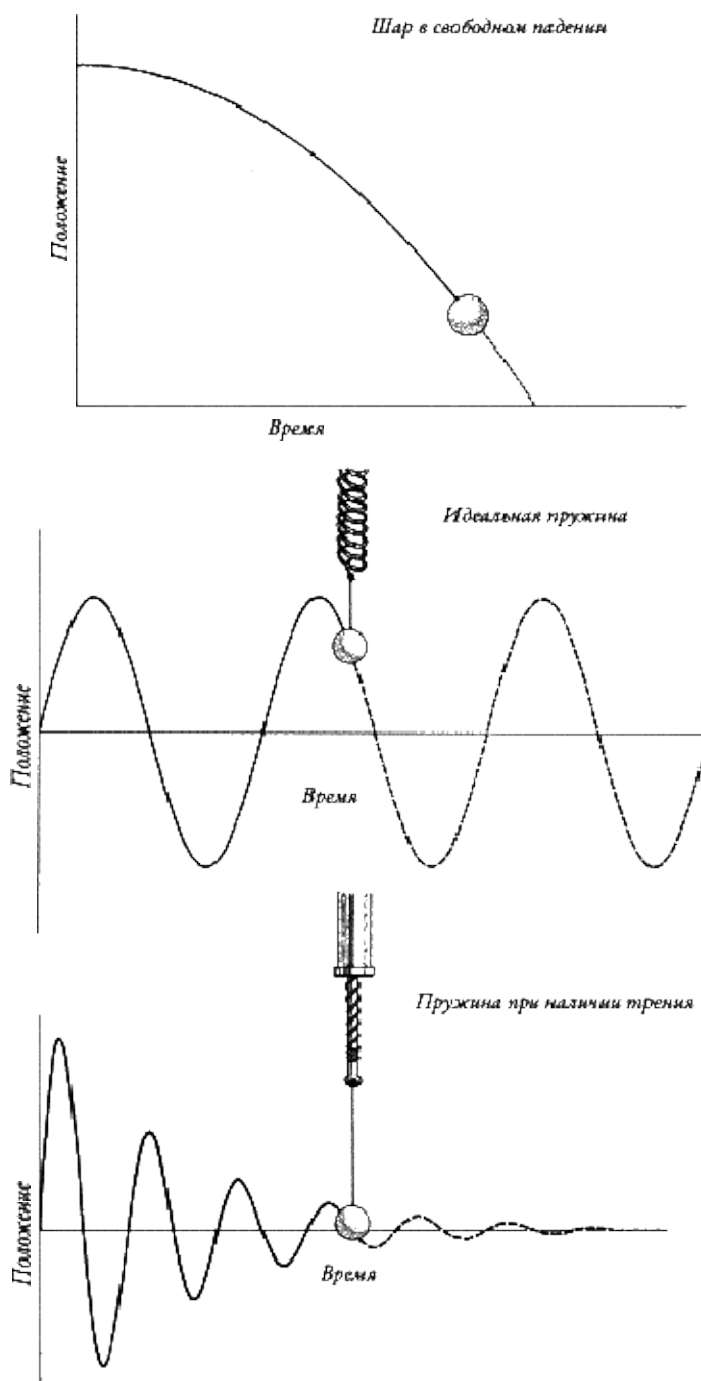
Исчисление позволило Ньютону объединить все эти уравнения в один великий свод законов – законов, приложимых во всех случаях, при всех условиях. Впервые наука смогла увидеть универсальные законы, лежащие в основе всех этих мелких полузаконов. Несмотря на то, что математики знали о глубинном пороке анализа, связанном с математикой ноля и бесконечности, они быстро восприняли новые математические инструменты. Дело в том, что природа говорит не обычными уравнениями. Она говорит дифференциальными уравнениями, и математический анализ – инструмент, который нужен, чтобы их создавать и решать.

Дифференциальные уравнения отличаются от обычных, с которыми все мы знакомы. Обычное уравнение подобно машине: вы скармливаете машине числа, и она выбрасывает ответ. Дифференциальное уравнение тоже похоже на машину, но на этот раз вы вводите в машину уравнения, а получаете новые уравнения. Загрузите уравнение, описывающее условия проблемы (движется ли мяч с постоянной скоростью или на мяч действует сила), и в результате получите уравнение, в котором закодирован ответ, который вы ищете: движется ли мяч по прямой или по параболе. Одно дифференциальное уравнение управляет всем неисчислимым количеством уравнений-законов. И в отличие от мелких уравнений-законов, которые то выполняются, то нет, дифференциальное уравнение верно всегда. Это универсальный закон, возможность заглянуть в механизм природы. Математический анализ Ньютона – его метод флюксий – сделал именно это: связал вместе такие концепции, как позиция, скорость, ускорение. Когда Ньютон обозначил положение функцией времени x , он понял, что скорость – это просто флюксия (современные математики называют ее производной от положения по времени: $\dot{x}$), а ускорение – всего лишь производная от скорости по времени: $\dot{x}''$. Переход от положения к скорости и к ускорению и обратно так же прост, как дифференцирование или интегрирование.

Имея в руках такой инструмент, Ньютон смог создать простое дифференциальное уравнение, описывающее движение всех тел во Вселенной: $F = mx''$, где F – сила, действующая на тело, а m – его масса. (На самом деле это не вполне универсальный закон, поскольку уравнение верно, только когда масса объекта постоянна. Более общая версия закона

Ньютона²⁹ выглядит так: $F = \dot{p}$, где p – количество движения, или импульс тела. Конечно, уравнения Ньютона были со временем усовершенствованы множеством ученых, в том числе Эйнштейном.)

Если у вас имеется уравнение, которое говорит вам о силе, приложенной к телу, дифференциальное уравнение точно сообщит вам, как тело движется. Например, мяч в свободном падении движется по параболе, в то время как пружина без трения вечно раскачивается туда и сюда, а под действием трения медленно останавливается (рис. 28). Какими бы разными ни казались эти исходы, все они описываются одним и тем же дифференциальным уравнением.



²⁹ Именно так закон формулировался Ньютоном, а более привычная нам формулировка (сила равна массе, умноженной на ускорение) была придумана для школьников, которые начинают изучать механику раньше анализа.

Рис. 28. *Различные движения, описываемые одним и тем же дифференциальным уравнением*

Точно так же, если вам известно, как движется тело – будь это мячик или гигантская планета, – дифференциальное уравнение скажет вам, какого рода сила к нему приложена. (Триумф Ньютона заключался в выведении уравнения, описывавшего силу притяжения и форму орбит планет. Раньше предполагалось, что сила была пропорциональна $1/r^2$, и когда из дифференциальных уравнений Ньютона были получены эллиптические орбиты, люди стали верить в правоту Ньютона.) Несмотря на возможности анализа, ключевая проблема сохранялась. Работы Ньютона основывались на очень шатком фундаменте – делении ноля на самого себя. Труды его соперника имели тот же недостаток.

В 1673 году почтенный немецкий юрист и философ посетил Лондон. Его имя было Готфрид Вильгельм Лейбниц. Они с Ньютоном едва не разорвали пополам научный мир, хотя ни один из них не мог разрешить проблему ноля, которой был пронизан математический анализ.

Никто не знает, не ознакомился ли во время визита в Англию тридцатитрехлетний Лейбниц с неопубликованной работой Ньютона. Однако между 1673 и 1676 годами, когда Лейбниц в следующий раз посетил Лондон, он тоже создал анализ, хотя и в несколько иной форме.

Глядя назад, можно заключить, что Лейбниц сформулировал свою версию независимо от Ньютона, хотя споры по этому поводу не прекращаются. Двое ученых в 1670-е годы вели переписку, так что очень трудно определить, как они влияли друг на друга. Впрочем, хотя две теории дают одинаковые ответы, условные обозначения – и философия – очень разнятся.

Ньютон не любил бесконечно малые величины, маленькие o в его флюксиях иногда вели себя как ноль, а иногда – как отличные от ноля числа. В определенном смысле эти бесконечно малые были бесконечно малы, меньше любого положительного числа, но все же каким-то образом больше ноля. Для математиков того времени это была смешная концепция.

Ньютона смущали бесконечно малые в его уравнениях, и он заметал их под ковер. Маленькие o в его уравнениях были всего лишь посредниками, костылями, которые чудесным образом исчезали к концу выкладок. С другой стороны, Лейбниц наслаждался бесконечно малыми. Там, где Ньютон писал $o \dot{x}$, Лейбниц писал dx – бесконечно малый кусочек x . Бесконечно малые выжили без изменений во всех расчетах Лейбница; действительно, производная от y по x было не свободным от бесконечно малых отношением флюксий $\dot{y} / \dot{x}$, а отношением бесконечно малых dy / dx .

В исчислении Лейбница с этими dy и dx можно было обращаться как с обычными числами, поэтому современные математики и физики обычно используют обозначения Лейбница, а не Ньютона. Дифференциальное исчисление Лейбница обладало той же силой, что и метод Ньютона, а благодаря обозначениям даже несколько большей. Тем не менее под всеми математическими ухищрениями дифференциалы Лейбница имели ту же запретную природу $0/0$, которая вредила флюксиям Ньютона. До тех пор, пока сохранялся этот недостаток, исчисление продолжало основываться скорее на вере, чем на логике. (На самом деле вера очень сильно влияла на Лейбница, когда он создавал новые математические методы, например двоичную систему счисления. Любое число могло быть записано как ряд нолей и единиц. Для Лейбница это было созданием *ex nihilo*, созданием Вселенной из ничего, большего, чем Бог / 1 и пустоты / 0. Лейбниц даже пытался убедить иезуитов использовать это знание для обращения китайцев в христианство.)

Должно было пройти много лет, прежде чем математики начали освобождать

математический анализ от его мистических обоснований, потому что математический мир был занят спорами по поводу того, кто его изобрел.

Едва ли можно сомневаться в том, что первым – в 1660-х годах – идею высказал Ньютон, однако он не публиковал свою работу в течение двадцати лет. Ньютон был магом, теологом, алхимиком, а не только ученым (например, он использовал библейские тексты для заключения о том, что второе пришествие Христа случится примерно в 2060 году), и многие его взгляды носили еретический характер. В результате он был склонен к хранению секретов и неохотно публиковал свои работы. Тем временем, пока Ньютон держал свое открытие в тайне, Лейбниц разработал собственную теорию. Двое ученых тут же обвинили друг друга в плагиате, и английское математическое сообщество, поддерживавшее Ньютона, отвернулось от континентальных математиков, поддерживавших Лейбница. В результате англичане держались за ньютоновские флюксии и не принимали более удобного обозначения дифференциалов Лейбница – назло себе. Когда дело дошло до развития математического анализа, английские математики сильно отстали от континентальных.

Именно француз, а не англичанин был первым, кто запустил зубы в таинственные ноли и бесконечность, пронизывавшие математический анализ; теперь математики узнают о правиле Лопиталья, начиная изучать дифференциальное исчисление. Как ни странно, не Лопиталь создал правило, которое теперь носит его имя.

Родившийся в 1661 году Гийом-Франсуа-Антуан де Лопиталь был маркизом и очень богатым человеком. Он рано начал интересоваться математикой, и хотя некоторое время прослужил в армии, сделавшись капитаном кавалерии, снова вернулся к своей первой любви – математике.

Лопиталь нанял себе лучшего учителя, какого только можно было нанять за деньги, – Иоганна Бернулли, швейцарского математика, одного из первых, кто освоил лейбницевское исчисление бесконечно малых. В 1692 году Бернулли обучил Лопиталья анализу. Лопиталь так увлекся новым математическим методом, что побудил Бернулли за деньги сообщить ему обо всех новых математических открытиях, чтобы маркиз мог делать с ними, что пожелает. В результате был создан учебник. В 1696 году Лопиталь издал «Анализ бесконечно малых». Эта книга стала первым учебником математического анализа и познакомила с лейбницевской версией дифференциального исчисления большую часть Европы. Лопиталь не только изложил основы анализа, но и добавил некоторые важные новые результаты. Самое знаменитое новшество стало известно как правило Лопиталья.

Правило Лопиталья нанесло первый удар по тревожащим математиков выражениям $0/0$, постоянно встречающимся в математическом анализе. Правило дало способ определять истинную величину математических функций, стремящихся к $0/0$ в данной точке. Правило Лопиталья гласит, что значение отношения функций равно производной верхнего выражения, деленному на производную нижнего выражения. Например, рассмотрим выражение $x / (\sin x)$, когда $x = 0$. При $x = 0$ $\sin x = 0$, так что выражение принимает вид $0/0$. Используя правило Лопиталья, мы увидим, что выражение стремится к $1 / (\cos x)$, поскольку производная x – это 1, а производная $\sin x$ – это $\cos x$. При $x = 0$ $\cos x$ равен 1, так что все выражение равно $1/1 = 1$. Ловкие манипуляции могли также позволить с использованием правила Лопиталья разрешать и другие странные вопросы: ∞ / ∞ , $0/0$, $0/\infty$, $\infty 0$.

Все эти выражения, но особенно $0/0$, могли бы принимать любые значения, какие только пожелаете, в зависимости от того, какие функции вы поставите в числитель и в знаменатель. Поэтому-то $0/0$ и называли неопределенностью. Это теперь не было полной тайной, математики могли получить некоторую информацию о $0/0$, если подходили к делу очень осторожно. Ноль больше не был врагом, которого следовало избегать, это была подлежащая изучению загадка.

Вскоре после смерти Лопиталья в 1704 году Бернулли начал утверждать, что тот украл его работу. В то время математическое сообщество отвергло претензии Бернулли: не только Лопиталь проявил себя как умелый математик; Иоганн Бернулли имел запятнанную репутацию. Он уже раньше пытался приписать себе заслугу другого математического доказательства (другим математиком был его брат, Якоб Бернулли). В данном случае, однако, претензии Иоганна Бернулли были обоснованны: это подтверждалось его перепиской с Лопиталем. К огорчению Бернулли, название «правило Лопиталья» прижилось.

Это правило было чрезвычайно важным для разрешения трудностей с $0/0$, однако лежащая в их основе проблема оставалась. Новая математика Ньютона и Лейбница зависит от деления на ноль и от чисел, которые чудесным образом исчезают при возведении в квадрат. С помощью правила Лопиталья $0/0$ исследуется инструментами, изначально опирающимися на $0/0$. Эти аргументы – замкнутый круг. Физики и математики по всему миру начали использовать математический анализ для изучения природы, а концепцию абсолютного пространства – для объяснения движения – под крики протеста со стороны Церкви.

В 1734 году, через 7 лет после смерти Ньютона, ирландский епископ Джордж Беркли написал книгу под названием «Аналитик, или рассуждение, адресованное неверующему математику». (Под неверующим математиком, вероятнее всего, подразумевался Эдмунд Галлей, всегда поддерживавший Ньютона.) В «Аналитике» Беркли обрушился на грязные трюки с нолем Ньютона и Лейбница.

Называя бесконечно малые «призраками исчезнувших величин», Беркли показал, что безнаказанное исчезновение этих бесконечно малых ведет к противоречию. Он заключал: «Разве математики, столь чувствительные в вопросах религии, строго скрупулезны в своей собственной науке?»

Хотя математики того времени язвили по поводу логики Беркли, славный епископ был совершенно прав. В те дни исчисление было очень отлично от других областей математики. Каждая теорема в геометрии строго доказывалась. Позаимствовав несколько правил у Евклида и тщательно, шаг за шагом продвигаясь вперед, математик мог доказать, что углы треугольника в сумме равны 180 градусам, или любой другой геометрический факт. С другой стороны, анализ основывался на вере.

Никто не мог объяснить, как при возведении в квадрат исчезают бесконечно малые. Этот факт просто принимался потому, что, заставив их исчезнуть в нужный момент, математики получали правильный результат. Никого не беспокоило деление на ноль, раз удобное игнорирование правил математики объясняло все – от падения яблока до орбит планет на небе. Хотя анализ давал правильные результаты, его использование было таким же актом веры, как вера в Бога.

Конец мистицизма

Количество – это что-то или ничто; если это что-то, оно еще не исчезло; если это ничто, оно буквально исчезло. Предположение, что имеется промежуточное состояние между этими двумя, – химера.

Жан Лерон Даламбер

Под сенью Французской революции мистика была изгнана из математического анализа.

Несмотря на шаткие основания, к концу XVIII века математики по всей Европе достигли поразительных успехов, используя новый инструмент. Колин Макларен и Брук Тейлор, возможно, лучшие английские математики эры изоляции от континента, обнаружили, как

использовать исчисление для того, чтобы записывать функции в совершенно новом виде. Например, используя некоторые уловки, математики обнаружили, что функция $1 / (1 - x)$ может быть записана как $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$. Хотя два выражения выглядят совершенно разными, они (с некоторыми пояснениями) – в точности одно и то же.

Эти пояснения, вытекающие из свойств нуля и бесконечности, могут оказаться очень важными. Швейцарский ученый Леонард Эйлер, вдохновленный простыми манипуляциями с нулем и бесконечностью в исчислении, используя те же рассуждения, что и Макларен и Тейлор, «доказал», что сумма $\dots 1/x^3 + 1/x^2 + 1/x + 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$ равна нулю. (Чтобы убедиться, что тут что-то не то, подставьте в качестве x число 1 и посмотрите, что получится.) Эйлер был прекрасный математик – он был одним из самых плодовитых и влиятельных ученых в истории, но в этом случае небрежное обращение с нулем и бесконечностью заставило его сделать ошибку.

Тем, кто наконец укротил ноли и бесконечность, оказался подкидыш; в 1717 году на ступенях «Круглой церкви Святого Иоанна» (*Saint Jean Baptiste le Rond*) в Париже был найден младенец. В память об этом ребенка назвали Жан Лерон. Со временем он взял фамилию Д'Аламбер. Хотя ребенок был воспитан в бедной рабочей семье – его приемный отец был стекольщиком, как выяснилось, его отцом являлся генерал, а мать – аристократка.

Д'Аламбер наиболее знаменит своим двадцатилетним участием совместно с Дени Дидро в создании «Энциклопедии наук, искусств и ремесел». Однако Д'Аламбер был больше, чем энциклопедистом. Именно он осознал, как важно рассмотреть путь, а не только пункт назначения. Именно Д'Аламберу принадлежит идея предела и разрешение существовавшей в исчислении проблемы нуля.

Рассмотрим еще раз историю Ахиллеса и черепахи – сумму шагов, все больше и больше приближающихся к нулю. Манипуляции с суммой бесконечного числа слагаемых – будь это проблема Ахиллеса, нахождение площади, ограниченной кривой, или альтернативное представление математической функции – заставили математиков прийти к противоречивому результату.

Д'Аламбер понял, что проблема Ахиллеса решается, если рассмотреть предел этой гонки. В приведенном выше примере с каждым шагом черепаха и Ахиллес приближаются к отметке в два фута. Ни один шаг не позволяет им продвинуться дальше и даже не позволяет им поравняться. В каждый момент они делаются ближе к указанной отметке. Таким образом, предел гонки – окончательный пункт назначения – и есть отметка в 2 фута. Именно там Ахиллес перегонит черепаху.

Однако как доказать, что 2 фута – на самом деле предел гонки? Я бросаю вам вызов. Задайте мне маленькое расстояние – сколь угодно малое, и я скажу вам, когда и Ахиллеса, и черепаху будет отделять от предела расстояние меньшее, чем заданное.

Например, пусть вы задали мне расстояние в одну тысячную фута. После некоторых вычислений я скажу вам, что после одиннадцатого шага Ахиллес окажется в 977 миллионных от отметки в 2 фута, а черепаха – в половине этого расстояния. Я принял ваш вызов и выиграл, имея даже 23 миллионных фута в запасе. Что было бы, если бы вы назвали расстояние в одну миллиардную фута? После 31 шага Ахиллес был бы в 931 триллионной от цели – на 69 триллионных ближе, чем требовалось, а черепаха снова в половине этого расстояния. Каков бы ни был ваш вызов, я выиграю, назвав вам момент, в который Ахиллес будет ближе к цели, чем вы потребовали. Это показывает, что действительно Ахиллес в процессе гонки как угодно близко подбегает к отметке в два фута: два фута – это предел гонки.

Теперь вместо того, чтобы думать о гонке как о сумме бесконечного числа шагов, представьте ее себе как предел конечных частичных гонок. Например, в первой из них Ахиллес

добегает до отметки в один фут. Всего при этом он пробегает один фут. В следующей частичной гонке он пробегает две части – сначала один фут, потом еще полфута. Всего он пробегает $1 + 1/2$ – всего 1,5 фута. Третья частичная гонка приведет его на $1 + 1/2 + 1/4$ – всего на 1,75 фута. Каждая из этих частичных гонок конечна и ясно определена, и мы никогда не сталкиваемся с бесконечностью.

То, что Даламбер сделал неформально и что позднее формализовали француз Огюст Коши, чех Бернанд Больцано и немец Карл Вейерштрасс, заключалось в том, что бесконечная сумма $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots + 1/2^n + \dots$ была записана как выражение $\lim (1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots + 1/2^n)$ при n , стремящемся к бесконечности. Это очень хитроумное изменение в записи, но в нем заключена вся разница.

Когда в выражении присутствует бесконечность или когда мы делим на ноль, все математические операции, даже такие простые, как сложение, вычитание, умножение и деление, оказываются все закона. Все делается бессмысленным, так что когда вы имеете дело с бесконечным рядом членов, даже знак $+$ делается не таким уж однозначным. Поэтому-то сумма бесконечного числа $+1$ и -1 , как мы видели в начале главы, одновременно равна 0 и 1.

Однако поставив перед рядом знак $\lim$, вы отделяете процесс от его цели. Таким образом, вы избегаете манипулирования бесконечностью и нолями. Так же, как в случае Ахиллеса, каждая из частичных гонок конечна, конечна и каждая частичная сумма под знаком $\lim$. Их можно складывать, делить, возводить в квадрат – делать с ними все что угодно. Правила математики работают, потому что все объекты конечны. Затем, после того как все манипуляции завершены, вы находите предел: экстраполируете и находите, к чему выражение стремится.

Иногда предела не существует. Например, сумма бесконечного числа $+1$ и -1 предела не имеет. Величина частичных сумм колеблется между 0 и 1; ряд не стремится к предсказуемому значению. Однако в случае гонки между Ахиллесом и черепахой частичные суммы составляют 1; 1,5; 1,75; 1,875; 1,9375 и т.д. – они оказываются все ближе и ближе к 2. Суммы имеют пункт прибытия – предел.

То же самое происходит при нахождении производной. Вместо того чтобы делить на ноль, как делали Ньютон и Лейбниц, современные математики делят на число, которому они позволяют стремиться к нулю. Они производят деление – совершенно законно, поскольку в операции не участвует ноль, – а потом находят предел. Жульнические уловки с исчезновением возведенных в квадрат бесконечно малых, а затем делением на ноль, чтобы найти производную, больше не нужны (см. Приложение С).

Такая логика может показаться мелочной и как аргумент столь же мистической, как «призраки» Ньютона, но на самом деле это не так. Она удовлетворяет жесткому требованию математиками логической строгости. Концепция пределом обладает твердым и последовательным основанием. На самом деле можно распрощаться с приведенным выше обсуждением «вызова»: существуют и другие способы определения предела. Можно назвать его схождением двух чисел, предела сверху и предела снизу. (У меня есть замечательное доказательство этого, но, увы, эта книга слишком мала, чтобы оно могло в ней поместиться.) Поскольку пределы логически безупречны, производная, определенная в терминах пределов, тоже делается логически безупречной, и исчисление получает надежный фундамент.

Больше не было необходимости делить на ноль. Из области математики исчез мистицизм, и снова к власти пришла логика. Мир царил до эры Террора.

Блинец бесконечности

Бог создал целые числа, все остальное – дело рук человека.

Леопольд Кронекер

Ноль и бесконечность всегда выглядели подозрительно похожими друг на друга. Умножьте ноль на что угодно, и вы получите ноль. Умножьте бесконечность на что угодно, и вы получите бесконечность. Деление числа на ноль дает бесконечность, деление числа на бесконечность дает ноль.

Прибавление нуля к числу оставляет число без изменения. Прибавление числа к бесконечности оставляет бесконечность без изменения. Это сходство было очевидным со времен Ренессанса, но математикам пришлось ждать до конца Французской революции, прежде чем они открыли большой секрет нуля.

Ноль и бесконечность – две стороны одной медали, равные и противоположные, инь и ян, одинаково могучие противники на противоположных концах области чисел. Причиняющая неприятности природа нуля связана со странной силой бесконечности, и можно понять бесконечное, изучая ноль. Чтобы узнать об этом, математикам пришлось погрузиться в мир воображаемого, странный мир, где окружности – прямые, прямые – окружности, а бесконечность и ноль находятся на противоположных полюсах.

Мнимые

...Прекрасное и удивительное убежище божественного духа – почти земноводное между существующим и не существующим.

Готфрид Вильгельм Лейбниц

Ноль – не единственное число, которое веками отвергалось математиками. Как и ноль, страдавший от предубеждения греков, игнорировались и другие числа – за то, что не имели геометрического смысла. Одним из таких чисел было i , обладавшее ключом к странным особенностям нуля.

Алгебра предложила новый способ смотреть на числа, совершенно оторванный от греческих геометрических идей. Вместо того чтобы пытаться измерить площадь под параболой, как это делали греки, ранние алгебраисты искали решения уравнений, определявших соотношения между разными числами. Например, простое уравнение $4x - 12 = 0$ описывает, как неизвестная величина x соотносится с числами 4, 12 и 0. В данном случае x равен 3. Подставьте 3 вместо x в данное уравнение, и вы сразу увидите, что уравнение выполняется: $3 - 3$ – это решение уравнения $4x - 12 = 0$.

Начав нанизывать символы, чтобы получить уравнение, вы можете столкнуться с чем-то неожиданным. Например, возьмите то же уравнение и замените в нем знак «–» на знак «+». Вы получите совершенно невинно выглядящее уравнение $4x + 12 = 0$, однако теперь его решение –3, отрицательное число.

Как и в случае с нолем, который индийские математики принимали, в то время как европейские веками отвергали, Восток принял и отрицательные числа, которые Запад пытался игнорировать. Еще в XVII веке Декарт отказывался признавать отрицательные числа корнями уравнений. Он называл их «ложными корнями». Это объясняет, почему он никогда не распространял свою систему координат на отрицательные числа. Декарт оказался жертвой своего успеха соединения алгебры с геометрией. Отрицательные числа давно были полезны

алгебраистам, даже западным. Они все время возникали при решении уравнений, таких как квадратные.

Линейное уравнение вроде $4x - 12 = 0$ решить чрезвычайно легко, и проблемы такого рода не занимали алгебраистов надолго. Они вскоре обратились к более трудным проблемам – квадратным уравнениям, начинавшимся с выражения x^2 , таким как $x^2 - 1 = 0$. Квадратные уравнения сложнее линейных, кроме всего прочего, они имеют два различных корня. Например, уравнение $x^2 - 1 = 0$ имеет два решения: 1 и -1 . (Подставьте -1 или 1 в уравнение вместо x , и вы увидите, что получится.) Любое из этих решений работает, поскольку, как выяснилось, выражение $x^2 - 1$ распадается на $(x - 1)(x + 1)$, делая ясным, что если x равен $+1$ или -1 , $x^2 - 1$ делается равным нулю.

Хотя квадратные уравнения более сложны, чем линейные, существует простой способ нахождения корней квадратного уравнения. Знаменитая формула, венчающая изучение алгебры в школе, дает значения корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$: $x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}) / 2a$. Знак «+» дает нам один корень, а знак «–» дает другой. Квадратичная формула была известна не одно столетие; математик IX века аль-Хорезми знал, как решить почти любое квадратное уравнение, хотя, по-видимому, не рассматривал как корни отрицательные числа. Вскоре после него алгебраисты научились принимать отрицательные числа за правомерные решения уравнений. С мнимыми числами, впрочем, дело обстояло несколько иначе.

Мнимые числа никогда не появлялись в линейных уравнениях, но начали возникать в квадратных. Рассмотрим уравнение $x^2 + 1 = 0$. Ни одно число явно не удовлетворяет этому уравнению: подстановка -1 ; 3 ; -750 ; $235,23$ или любого другого положительного или отрицательного числа не дает правильного ответа. Выражение просто не желает разлагаться. Хуже того, когда вы попытаетесь использовать формулу, вы получите два глупо выглядящих ответа: $+\sqrt{-1}$ и $-\sqrt{-1}$.

Эти выражения, похоже, не имеют смысла. Индийский математик Бхаскара писал в XII веке, что «не существует квадратного корня из отрицательного числа, потому что отрицательное число не является квадратом». Бхаскара и другие имели в виду, что когда вы возводите в квадрат положительное число, вы получаете положительное число: например, дважды два равно четырем. Когда вы возводите в квадрат отрицательное число, вы все равно получаете число положительное: -2 , умноженное на -2 , все равно дает 4. Когда вы возводите в квадрат ноль, вы получаете ноль. Положительные числа, отрицательные числа и ноль все дают вам неотрицательные квадраты, и эти три возможности охватывают всю числовую ось. Это значит, что не существует числа на числовой оси, которое при возведении его в квадрат давало бы отрицательное число. Квадратный корень из отрицательного числа представлялся смешной концепцией.

Декарт полагал, что эти числа еще хуже, чем отрицательные, он придумал презрительное наименование для квадратных корней из отрицательных чисел: мнимые числа. Название прижилось, и со временем символ для корня квадратного из -1 стал обозначаться как i .

Алгебраисты i обожали, а почти все остальные ненавидели. Это был прекрасный инструмент для решения полиномов – выражений типа $x^3 + 3x + 1$, куда входили разные степени x . На самом деле стоит включить i в область чисел, и любой полином делается решаемым; $x^2 + 1$ неожиданно разлагается на $(x - i)(x + i)$, и корнями уравнения оказываются $+i$ и $-i$. Кубические полиномы типа $x^3 - x^2 + x - 1$ разлагаются на три сомножителя, такие как $(x - 1)(x + i)(x - i)$. Выражения четвертой степени, первый член которых имеет вид x^4 , и пятой степени – с первым членом вида x^5 – разлагаются соответственно на четыре и пять сомножителей. Все полиномы степени n – имеющие член вида x^n – разлагаются на n отдельных сомножителей. Это основная теорема алгебры.

Уже в XVI веке математики использовали числа, включающие i : так называемые комплексные числа – для решения кубических уравнений и уравнений четвертой степени. Хотя многие математики рассматривали комплексные числа как удобную фикцию, другие видели в них Бога.

Лейбниц полагал, что i – странная смесь существования и несуществования, что-то вроде гибрида между 1 (Богом) и 0 (пустотой) в его бинарной схеме. Лейбниц уподоблял i Святому Духу: оба обладают эфемерным и едва ли материальным существованием. Однако даже Лейбниц не осознавал того, что i в конце концов откроет связь между нолем и бесконечностью. Потребовалось два важных открытия в математике, прежде чем была открыта истинная зависимость.

Мнение и опровержение

Нельзя не увидеть, с какой простотой эти концепции ведут к свойствам, уже известным, и к бесконечному множеству других, которые обычная геометрия с легкостью объяснить не может.

Жан-Виктор Понселе

Первое открытие – проективная геометрия – родилось в суматохе войны. В 1700-е годы Франция, Англия, Австрия, Пруссия, Испания, Нидерланды и другие государства соперничали на европейской арене. Союзы снова и снова возникали и распадались, происходили территориальные стычки из-за колоний, страны стремились к господству в торговле с Новым Светом. Всю первую половину XVIII столетия Франция, Англия и другие страны враждовали, и примерно через четверть века после смерти Ньютона разразилась полномасштабная война. Франция, Австрия, Испания и Россия противостояли Англии и Пруссии.

В 1763 году Франция капитулировала, и Семилетняя война (официальному ее объявлению предшествовали два года сражений) закончилась. Победа сделала Англию преобладающей силой в мире, но далось это дорогой ценой. И Франция, и Англия были истощены и в долгах, следствием этого для обеих стран стали революционные потрясения. Немногим более чем через десятилетие после окончания Семилетней войны началась война за независимость американских колоний, лишившая Англию ее богатейших заморских владений. В 1789 году, как раз когда Джордж Вашингтон возглавил вновь образованные Соединенные Штаты, началась Французская революция. Через четыре года революционеры обезглавили короля Франции.

Математик Гаспар Монж подписал постановление революционного правительства о казни короля. Монж был превосходным геометром, специализировавшимся в стереометрии. Его заслугой было то, как архитекторы и инженеры изображали здания и машины: они создавали проекции сооружений на горизонтальную и вертикальную плоскости, сохраняя таким образом всю информацию, необходимую для создания объекта. Работы Монжа были так важны для армии, что значительная их часть была засекречена сначала революционным, а затем пришедшим ему на смену наполеоновским правительством.

Жан-Виктор Понселе был учеником Монжа, осваивавшим трехмерную геометрию в качестве инженера наполеоновской армии. К своему несчастью, Понселе оказался в армии, как раз когда Наполеон в 1812 году вступил в войну с Россией.

При отступлении от Москвы наполеоновская армия была почти полностью уничтожена жестокой русской зимой и не менее жестокой русской армией. После сражения под Красным Понселе, которого сочли убитым, остался на поле боя. Он был жив и попал в плен к русским. За

время пребывания в плену Понселе создал новую дисциплину: проективную геометрию.

Математика Понселе была кульминацией работы, начатой художниками и архитекторами в XV веке – Филиппо Брунеллески и Леонардо да Винчи, которые обнаружили, как рисовать реалистично, используя перспективу. Когда все «параллельные» прямые сходятся в единственной точке на картине, зрителя заставляют верить, что они никогда не встретятся. Квадраты на полу на рисунке делаются трапециями, каждый предмет мягко искажается, но все выглядит совершенно естественным.

Таково свойство бесконечно удаленной точки – ноля в бесконечности.

Иоганн Кеплер, ученый, открывший, что планеты движутся по эллиптическим орбитам, распространил эту идею – идею бесконечно удаленной точки – еще на один шаг вперед. Эллипсы имеют два фокуса; чем более удлинненным является эллипс, тем дальше отстоят друг от друга фокусы. Все эллипсы обладают одним и тем же свойством: если бы у вас оказалось зеркало эллиптической формы и вы поместили в один из фокусов лампочку, все световые лучи сошлись бы в другом фокусе, вне зависимости от того, насколько вытянут был бы эллипс (рис. 29).

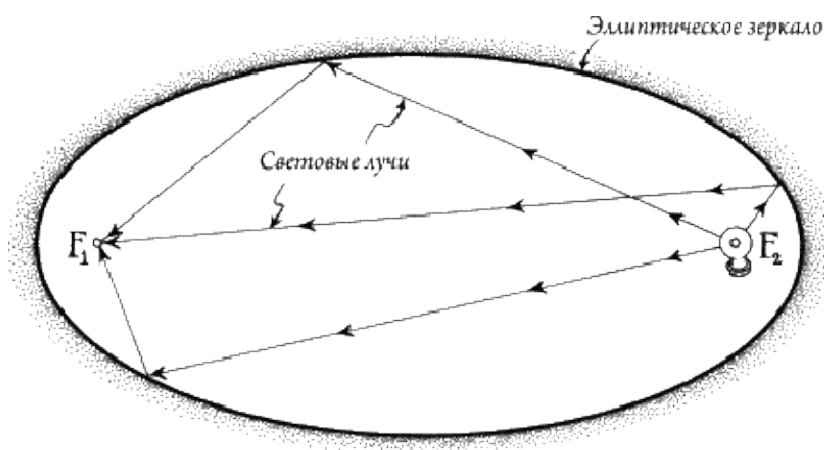


Рис. 29. Световые лучи в эллипсе

Кеплер в уме все больше и больше вытягивал эллипс, удаляя его фокус все дальше. Потом Кеплер вообразил, что второй фокус удален бесконечно далеко: он стал точкой в бесконечности. Неожиданно эллипс превратился в параболу, а все прямые, сходящиеся к точке, сделались параллельными. Парабола – это просто эллипс с одним фокусом в бесконечности (рис. 30).

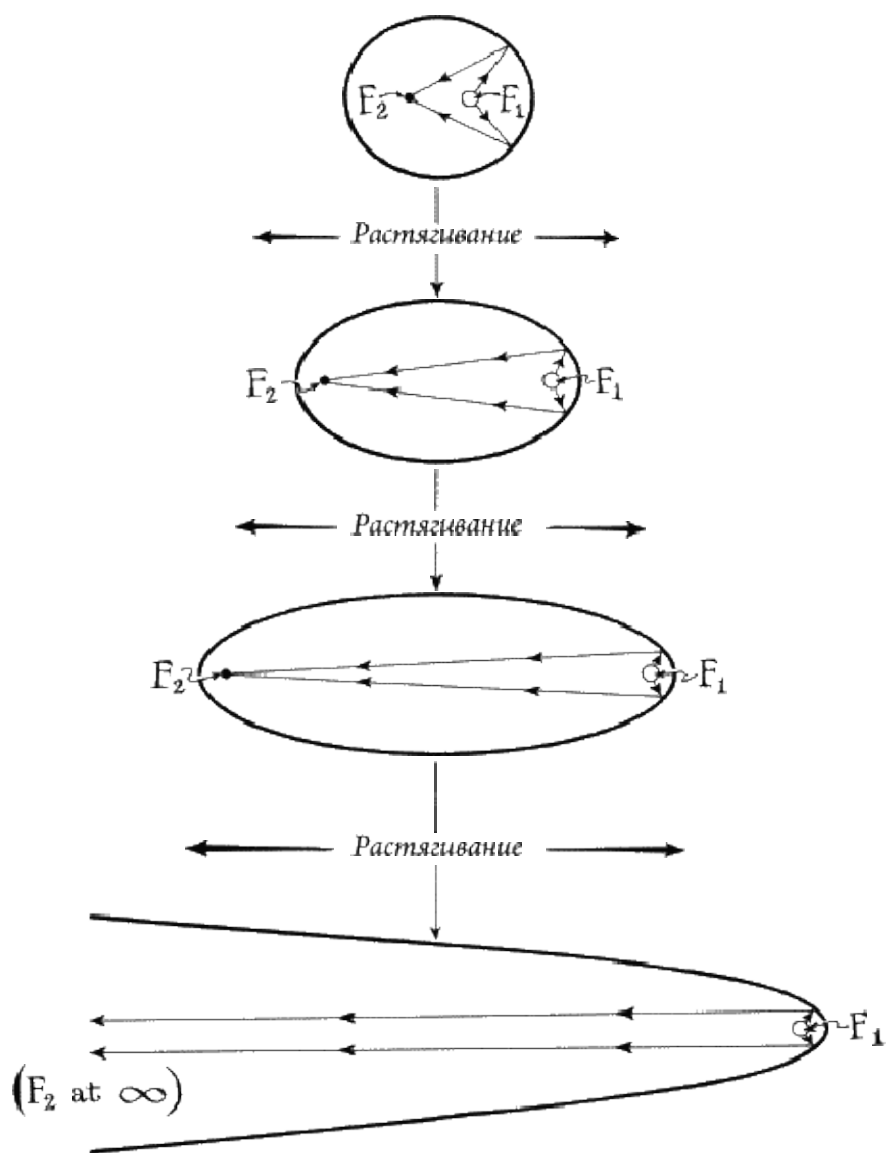


Рис.30. Растягивание эллипса дает параболу

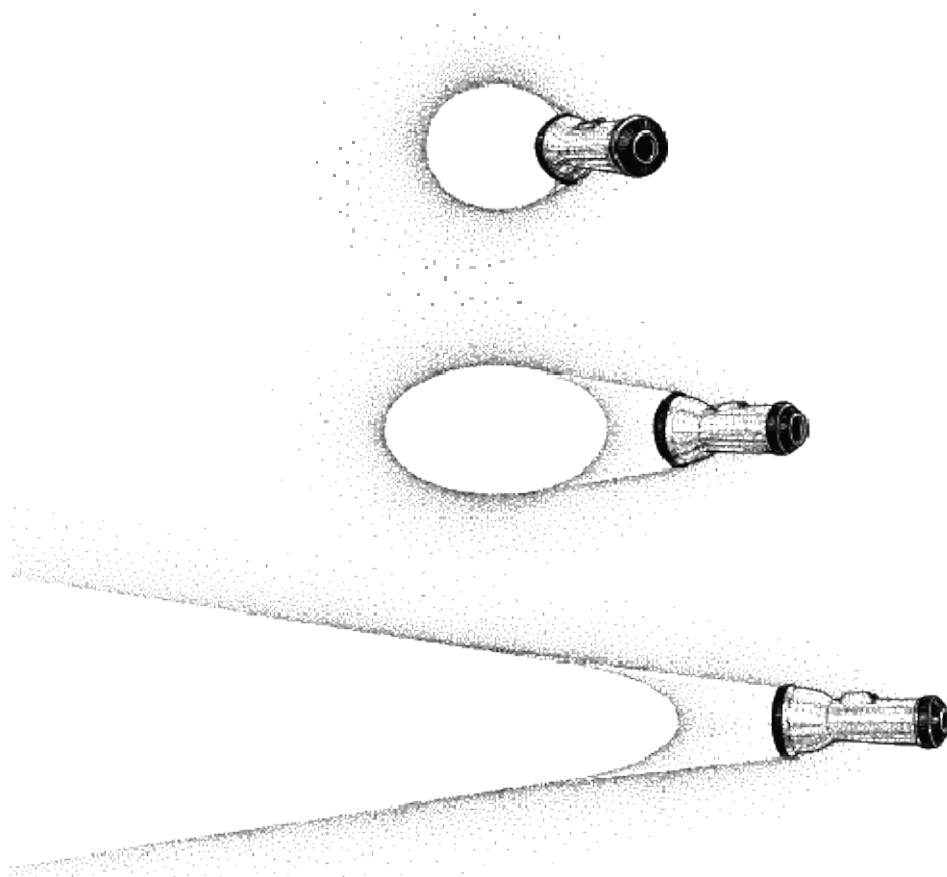


Рис.31. Получение эллипса и параболы с помощью фонарика

Это можно увидеть с помощью фонарика. Войдите в темную комнату и встаньте у стены. Направьте свет фонарика прямо на стену. На стене вы увидите ясный круг света. Теперь медленно наклоняйте фонарик вверх (рис. 31). Вы увидите, что круг растягивается в эллипс, который делается все длиннее и длиннее по мере того как вы увеличиваете наклон. Неожиданно эллипс раскрывается и превращается в параболу. Таким образом кеплеровская бесконечно удаленная точка доказала, что параболы и эллипсы в сущности одно и то же.

Это было началом проективной геометрии, дисциплины, в которой математики рассматривают тени и проекции геометрических фигур, чтобы узнать их скрытые свойства, даже более примечательные, чем родственность парабол и эллипсов. Впрочем, все зависело от того, признавалась ли бесконечно удаленная точка.

Жерар Дезарг, французский архитектор XVII века, был одним из зачинателей проективной геометрии. Он использовал бесконечно удаленную точку для доказательства ряда важных новых теорем, однако коллеги Дезарга не могли понять его терминологии и сочли его сумасшедшим. Хотя некоторые математики, например Блез Паскаль, оценили работы Дезарга, они были забыты.

Для Жана-Виктора Понселе это не имело значения. Как ученик Монжа, Понселе освоил систему построения проекций в двух плоскостях, а будучи военнопленным, имел достаточно свободного времени. Он использовал свое пребывание в плену для того, чтобы заново открыть концепцию бесконечно удаленной точки. Используя ее для развития идей Монжа, он стал подлинным создателем проективной геометрии. По возвращении из России (он привез с собой счеты – русский абак, к тому времени архаическую диковинку) Понселе поднял проективную геометрию до уровня настоящего высокого искусства³⁰. Впрочем, Понселе не имел

³⁰ Иногда помогает думать о волновой функции (технически о квадрате волновой функции) как о мере

представления о том, что проективная геометрия раскроет таинственную природу ноля, потому что для этого требовался второй важный прорыв, еще один важный компонент – комплексная плоскость. За этой частью загадки мы должны отправиться в Германию.

Карл Фридрих Гаусс, родившийся в 1777 году, был немецким вундеркиндом. Он начал свою математическую карьеру с исследования мнимых чисел. Его докторская диссертация включала доказательство фундаментальной теоремы алгебры – что полином степени n (квадратное уравнение имеет степень 2, кубическое – 3 и т.д.) имеет n корней. Это верно только в том случае, если вы принимаете мнимые числа, как и вещественные.

За свою жизнь Гаусс исследовал множество проблем, относящихся к самым разным разделам математики над невероятным множеством тем; его исследование работы по теории кривизны стало ключевым компонентом для общей теории относительности Эйнштейна. Кроме того, целую новую структуру в математике создал метод изображения комплексных чисел Гаусса.

В 1830-е годы Гаусс понял, что каждое комплексное число – число, имеющее вещественную и мнимую часть, как $1 - 2i$ – может быть изображено в декартовых координатах. Горизонтальная ось представляет вещественную часть комплексного числа, а вертикальная – мнимую (рис. 32). Эта простая конструкция, названная комплексной плоскостью, раскрыла многое о том, как работают числа.

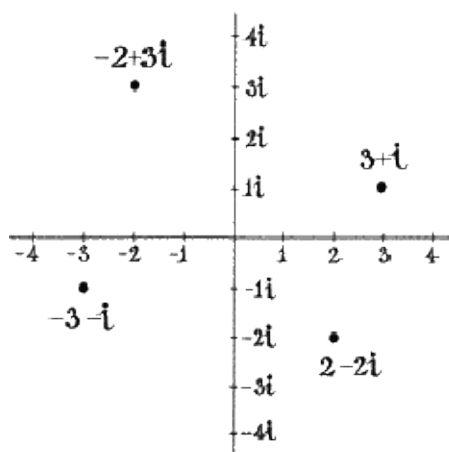


Рис. 32. Комплексная плоскость

Возьмите, например, число i . Угол между ним и осью x составляет 90 градусов (рис. 33). Что произойдет, когда вы возведете i в квадрат? Ну, по определению, $i^2 = -1$. Эта точка отстоит на 180 градусов от оси x : угол удвоился.

вероятности того, где окажется частица. Электрон, скажем, размазан по пространству, но когда вы делаете измерения, чтобы определить его местонахождение, волновая функция определяет, насколько вероятно обнаружить электрон в каждый данный момент в определенной точке пространства. Эйнштейн возражал именно против этой неопределенности природы. Его знаменитое заявление: «Бог не играет в кости со Вселенной» было возражением против вероятностной интерпретации квантовой механики. К несчастью для Эйнштейна, уравнения квантовой механики дают решения, невероятно точно соответствующие наблюдениям, и успешно объяснить квантовые эффекты с позиций традиционной классической физики невозможно (прим. авт.).



Рис. 33. i под углом 90 градусов

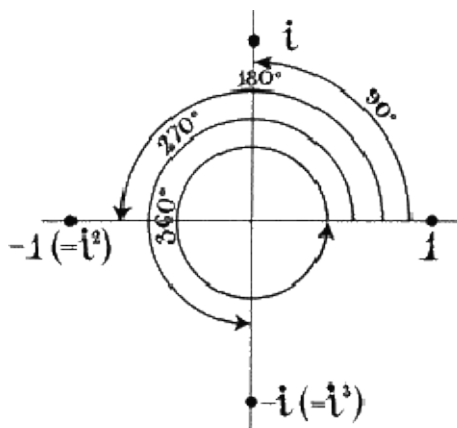


Рис. 34. Различные возможности i

Число i 3 равно $-i$ – в 270 градусах от оси x : угол утроился. Число $i^4 = 1$. Мы совершили оборот в 360 градусов – ровно в четыре раза больше исходного угла (рис. 34). Это не совпадение. Возьмите любое комплексное число и измерьте угол. Возведение этого числа в степень n увеличивает угол в n раз. И по мере того как вы все больше и больше увеличиваете n , число по спирали движется внутрь или наружу, в зависимости от того, находится ли исходное число внутри или снаружи единичной окружности – окружности с центром в начале координат и с радиусом 1 (рис. 35).

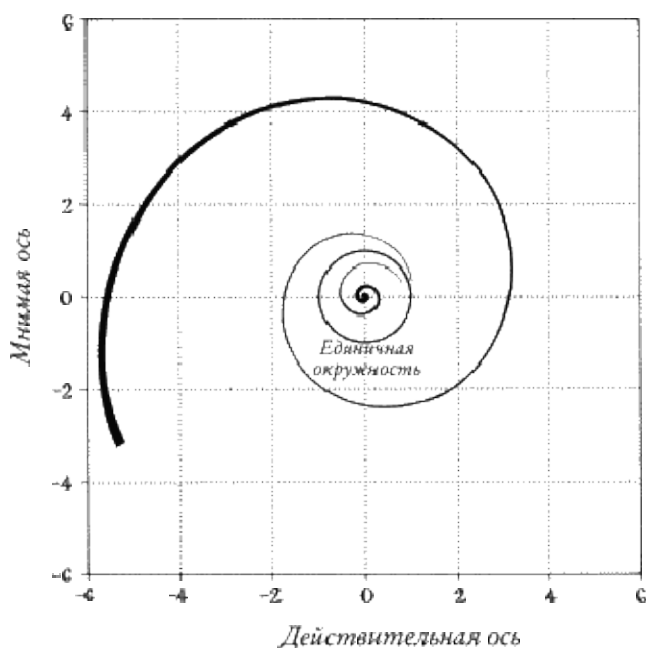


Рис. 35. Спираль внутри и снаружи единичной окружности

Умножение и возведение в степень на комплексной плоскости становятся геометрическими идеями, можно видеть, что происходит. Это было вторым большим продвижением вперед.

Человеком, который объединил эти две идеи, был ученик Гаусса Георг Фридрих Бернхард Риман. Риман объединил проективную геометрию с комплексными числами, и неожиданно прямые превратились в окружности, окружности – в прямые, а ноль и бесконечность стали полюсами шара, полного чисел.

Риман представлял себе прозрачный шар на комплексной плоскости; южный полюс шара касался ноля. Если бы на северном полюсе шара был крошечный источник света, все фигуры, отмеченные на шаре, отбрасывали бы тени на лежащую внизу плоскость. Тень экватора образовывала бы окружность вокруг начала координат. Тень южного полушария находится внутри окружности, а тень северного – снаружи (рис. 36). Начало координат – ноль – совпадает с южным полюсом. Каждая точка на шаре имеет тень на комплексной плоскости; в определенном смысле каждая точка на шаре – эквивалент своей тени на плоскости, и наоборот. Каждая окружность на плоскости есть тень окружности на шаре, и окружность на шаре соответствует окружности на плоскости – за одним исключением.

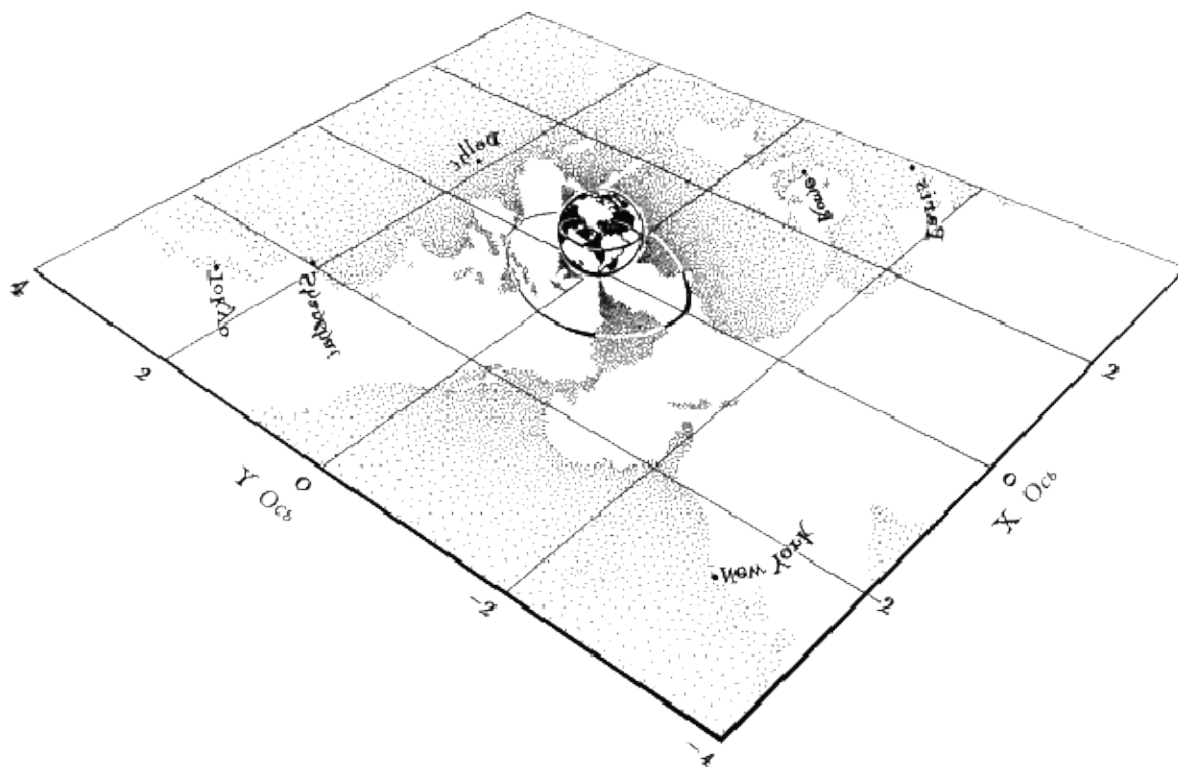


Рис. 36. Стереографические проекции шара

Если окружность проходит через северный полюс шара, то ее тень больше не окружность, а прямая. Северный полюс подобен бесконечно удаленной точке, как ее представляли себе Кеплер и Понселе. Прямые на плоскости – это просто окружности на сфере, проходящие через северный полюс – бесконечно удаленную точку (рис. 37).

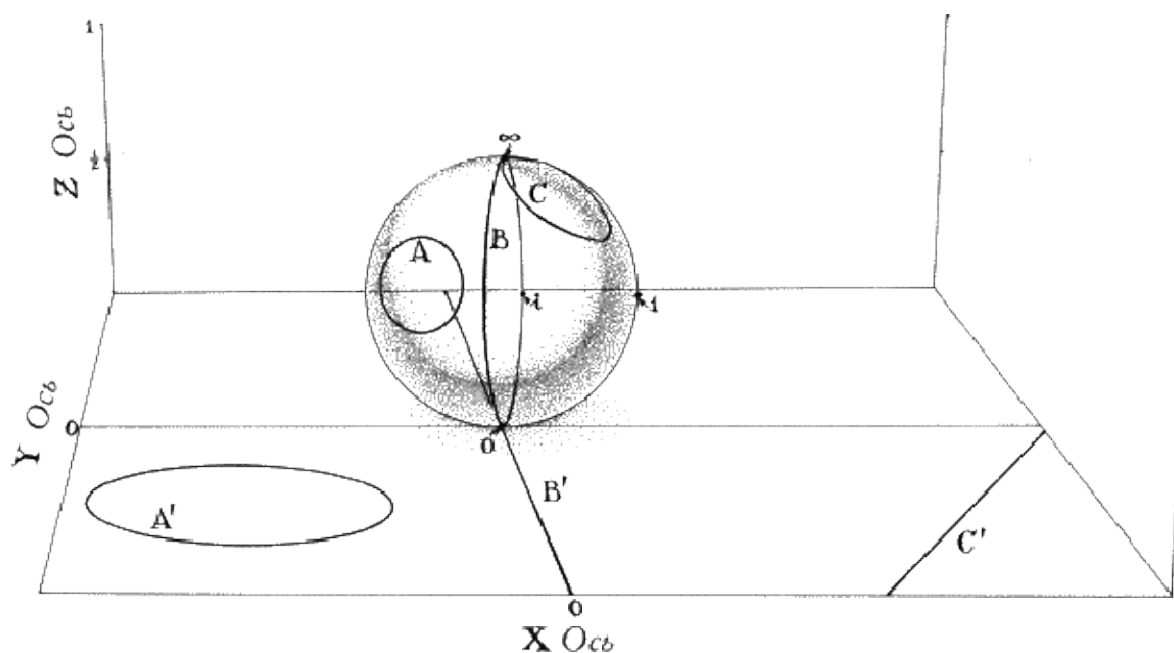


Рис. 37. Прямые и окружности – одно и то же

Как только Риман увидел, что комплексная плоскость (с бесконечно удаленной точкой) – то же самое, что и сфера, математики смогли увидеть умножение, деление и другие, более трудные операции, анализируя, как деформируется и вращается сфера. Например, умножение на число i эквивалентно вращению сферы на 90 градусов по часовой стрелке. Если вы берете число x и заменяете его на $(x - 1)/(x + 1)$, это эквивалентно такому повороту всей сферы на 90 градусов, что северный и южный полюса оказываются на экваторе (рис. 38, 39, 40). Самое интересное, что если вы берете число x и заменяете его на обратную величину $1/x$, это эквивалентно перевороту всей сферы вверх ногами и зеркальному отражению. Северный полюс становится южным, а южный – северным, ноль становится бесконечностью, а бесконечность – нулем. Все это встроено в геометрию сферы, $1/0 = \infty$ и $1/\infty = 0$. Бесконечность и ноль – просто противоположные полюса сферы Римана и могут мгновенно меняться местами. Они имеют равные и противоположные силы.

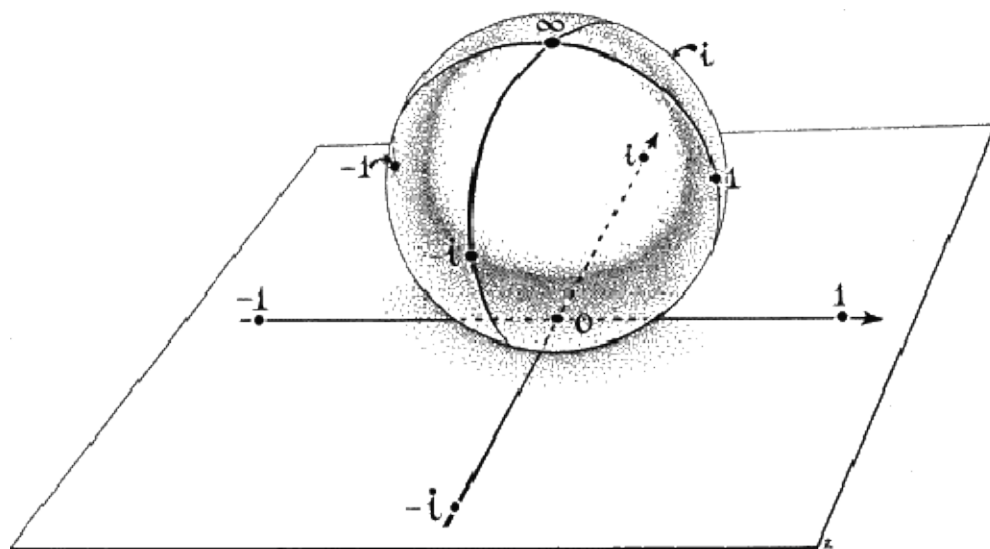


Рис. 38. Сфера Римана

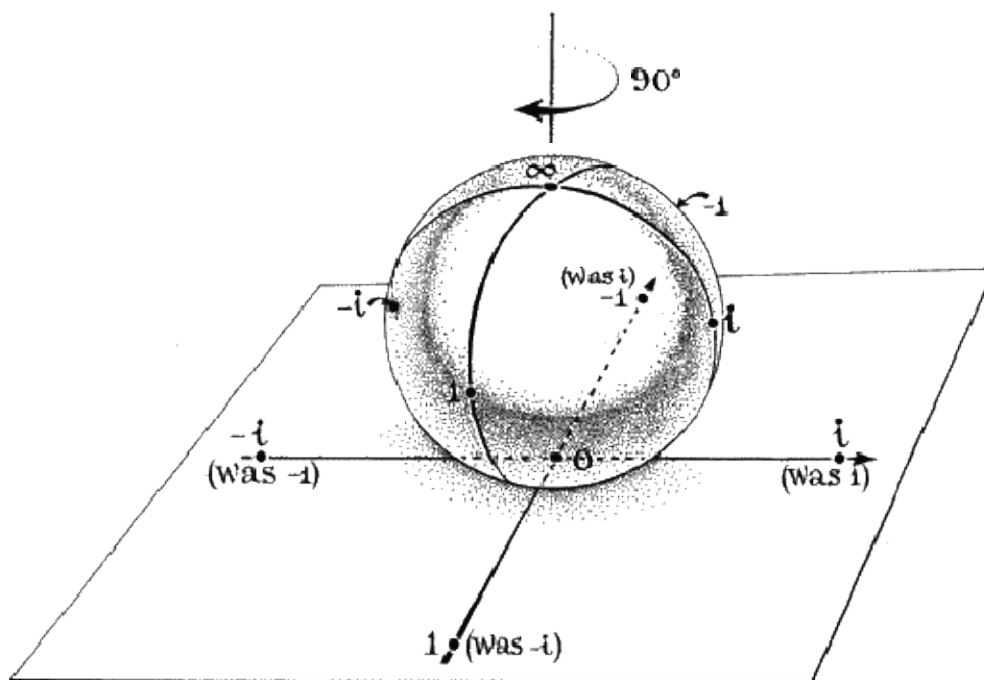


Рис. 39. Сфера Римана, трансформированная i

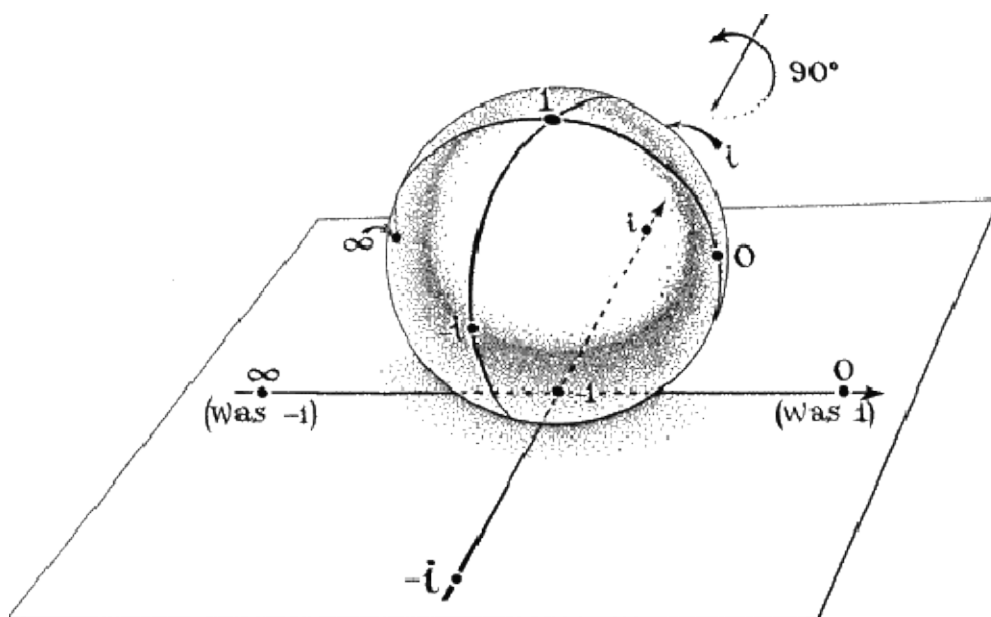


Рис. 40. Сфера Римана, трансформированная $(x-1)(x+1)$

Возьмите все числа на комплексной плоскости и умножьте на 2. Похоже, что вы взяли рукой за южный полюс и растянули резиновое покрытие сферы от южного к северному полюсу. Умножение на $1/2$ произведет обратный эффект: как будто вы растянули резиновое покрытие от северного полюса к южному. Умножение на бесконечность подобно втыканию иглы в южный полюс: резиновое покрытие все стянется вверх, к северному полюсу: любое число, умноженное на бесконечность, есть бесконечность. Умножение на ноль подобно втыканию иглы в северный полюс, и все стягивается к полю: любое число, умноженное на ноль, есть ноль. Бесконечность и ноль равны и противоположны и одинаково разрушительны.

Ноль и бесконечность вечно борются за поглощение всех чисел. Как в манихейском кошмаре, эти двое сидят на противоположных полюсах числовой сферы, всасывая в себя числа, как маленькие черные дыры. Возьмите любое число на плоскости. Для примера пусть это будет

$i / 2$. Возведем его в квадрат, в куб, в четвертую степень, в пятую, шестую, седьмую степень... Продолжаем умножать. Числа медленно по спирали приближаются к нулю, как вода по трубе. Что произойдет с $2i$? В точности противоположное. Возведем его в квадрат, в куб, в четвертую степень... Числа по спирали устремятся вовне (рис. 41). Однако на числовой сфере эти две кривые – дубликаты друг друга, они – зеркальные отражения (рис. 42). Такова судьба всех чисел на комплексной плоскости. Они неизбежно притягиваются к нулю или к бесконечности. Единственные числа, которые избегают этой участи, – те, что равноудалены от соперников, числа на экваторе, такие как 1, -1 и i . Эти числа, с одинаковой силой притягиваемые и нулем, и бесконечностью, вечно двигаются по спирали на экваторе и не могут вырваться. (Вы можете увидеть это на своем калькуляторе. Введите число – любое число. Возведите его в квадрат. Результат снова возведите в квадрат. Делайте это снова и снова. Последовательность быстро устремится к бесконечности или к нулю, если только вы изначально не ввели 1 или -1 . Избавления нет.)

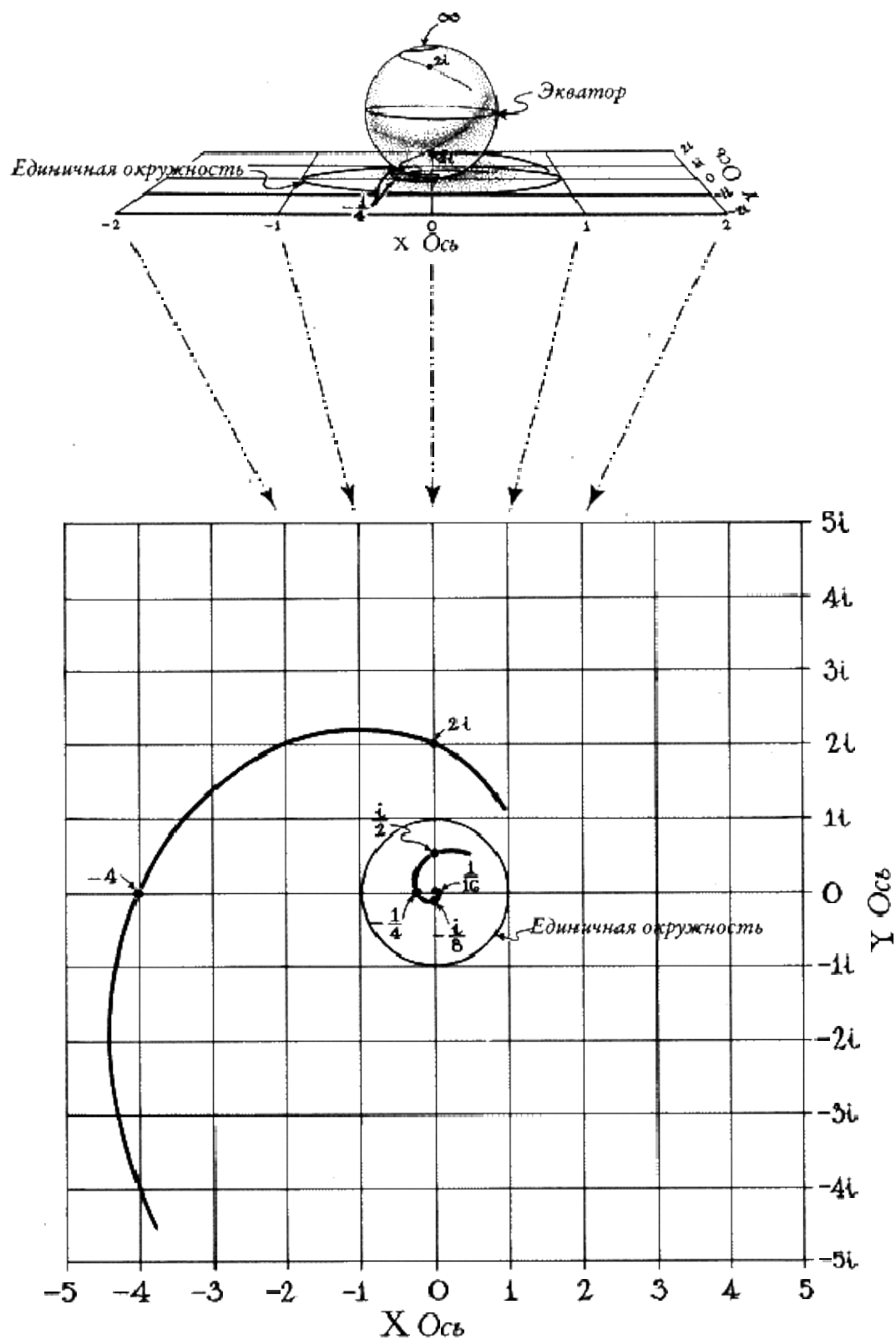


Рис. 41. Спиральное движение вовне и внутрь на плоскости

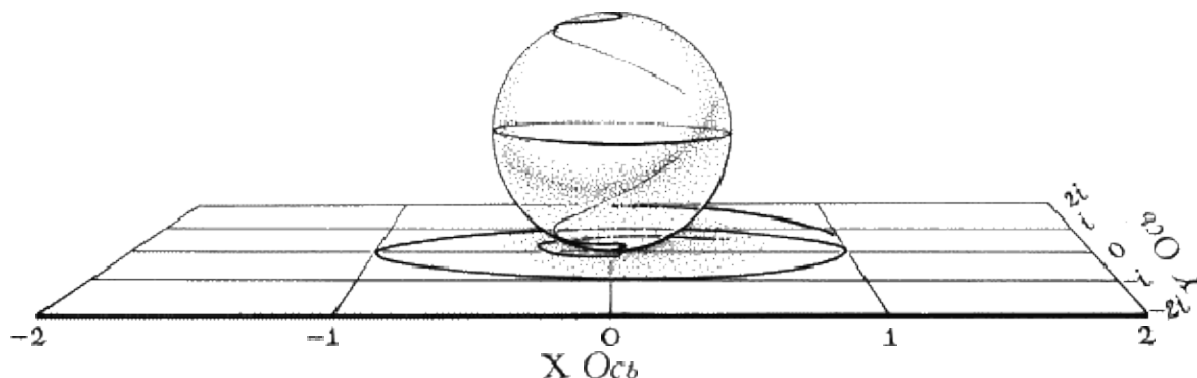


Рис. 42. На сфере – зеркальное отражение

Бесконечный ноль

Моя теория тверда, как скала; каждая стрела, направленная в нее, быстро вернется к стрелку. Откуда я это знаю? Я это изучал... Я проследил корни, так сказать, до первой непогрешимой причины всех созданных вещей.

Георг Кантор

Бесконечность больше не была тайной, она стала обыкновенным числом. Это был наколотый на булавку образец, приготовленный для изучения, и математики быстро взялись за анализ. Однако в самых глубинах бесконечности, угнездившись в огромном континууме чисел, все время появлялся ноль. Самое поразительное то, что сама бесконечность может быть нулем.

В прежние времена, до того как Риман увидел, что комплексная плоскость – на самом деле сфера, функции типа $1/x$ ставили математиков в тупик. Когда x стремится к нулю, $1/x$ делается все больше и больше и в конце концов просто взрывается и стремится к бесконечности. Риман сделал совершенно приемлемым приближение к бесконечности, поскольку бесконечность – это всего лишь точка на сфере, такая же, как любая другая точка; она больше не является чем-то, чего следует бояться. Математики начали анализировать и классифицировать точки, в которых функции взрываются: сингулярности, или особые точки.

Для кривой $1/x$ сингулярностью является точка $x = 0$. Это очень простой вид сингулярности, которую математики называют полюсом. Существуют и другие виды сингулярности, например, для кривой $\sin(1/x)$ точка $x = 0$ – существенно особая точка. Существенно особые точки – странные твари, рядом с сингулярностью такого сорта кривая делается абсолютно безумной. Она колеблется вверх и вниз все быстрее и быстрее по мере приближения к сингулярности, мечется от положительных значений к отрицательным и обратно. Даже в самой малой окрестности сингулярности кривая принимает почти все воображаемые значения снова и снова. Однако как бы странно эти функции не вели себя вблизи сингулярности, они больше не являлись тайной для математиков, которые учились вскрывать бесконечность.

Главным анатомом бесконечности был Георг Кантор. Хотя он в 1845 году родился в России, большую часть жизни Кантор провел в Германии. И именно в Германии – стране Гаусса и Римана – были открыты секреты бесконечности. К несчастью, Германия была также родиной Леопольда Кронекера, математика, который загнал Кантора в психиатрическую больницу.

В основе конфликта Кантора с Кронекером лежало представление о бесконечности, представление, которое может быть проиллюстрировано простой загадкой. Представьте себе

большой стадион, полный людей. Вам нужно узнать, больше ли на стадионе мест, чем зрителей, или их число одинаково. Вы могли бы пересчитать людей и узнать, сколько имеется мест, и потом сравнить количества, однако это заняло бы много времени. Есть гораздо более разумный способ. Просто попросите всех присутствующих сесть. Если останутся незанятые места, значит, людей меньше, чем мест. Если какое-то количество людей останется стоять, значит, мест слишком мало. Если все места окажутся заняты и никто не останется стоять, то число зрителей и мест одинаково.

Кантор обобщил этот прием. Он сказал, что два числовых множества чисел имеют одинаковую мощность, если один набор «садится» на другой набор – по одному числу на одно число другого набора – и не остается излишка. Например, рассмотрим набор $\{1, 2, 3\}$; он имеет ту же мощность, что и $\{2, 4, 6\}$, потому что мы можем создать точный паттерн «рассадки»: все числа «сидят», и все «места» заняты.

1	2	3
2	4	6

Однако это не так с набором $\{2, 4, 6, 8\}$, потому что 8 оказывается пустым «местом»:

1	2	3	
1	2	3	8

Дело приобретает особенно интересный характер, когда у вас имеется бесконечное множество. Рассмотрим множество всех чисел $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$. Очевидно, что оно равномощно самому себе: можно каждое число просто «посадить» на самого себя.

0	1	2	3	4	5	...
0	1	2	3	4	5	...

Здесь нет никакой уловки. Каждое множество, очевидно, равно (и равномощно) самому себе. Но что случится, если мы начнем убирать числа из набора? Например, что будет, если мы уберем ноль? Как ни странно, устранение нуля совсем не изменит размер мощности множества. Несколько изменив «рассадку», мы можем обеспечить, чтобы у всех было место и все места были заняты.

1	2	3	4	5	6	...
0	1	2	3	4	5	...

Набор остался той же мощности, несмотря на то, что мы из него кое-что убрали. На самом деле из набора целых чисел мы можем убрать бесконечное количество элементов – можем исключить, например, нечетные числа – мощность множества останется неизменной. Все

по-прежнему имеют места, и каждое место занято.

0	2	4	6	8	10	...
0	1	2	3	4	5	...

Это есть определение бесконечного: это нечто, что может оставаться той же мощности, даже если вы из него что-то вычтете.

Четные числа, нечетные числа, целые числа – все эти множества имеют одинаковую

мощность, размер, которую Кантор обозначил как $\aleph_0$

0 (*алеф-ноль*, названный так по первой букве еврейского алфавита). Поскольку эти наборы имеют ту же мощность, что и множество натуральных чисел, любое множество мощности $\aleph_0$

0 называется счетным. (Конечно, на самом деле вы не можете их пересчитать, если не располагаете бесконечным временем.) Даже множество рациональных чисел – множество чисел, которые могут быть записаны как a/b для целых чисел a и b , – является счетным.

Ловко отведя рациональным числам подходящие места, Кантор показал, что рациональные можно «рассадить» по стульям с натуральными номерами, то есть что они образуют множество размера $\aleph_0$

0 (см. Приложение D).

Однако, как было известно Пифагору, рациональные числа вовсе не заполняют все под солнцем. Рациональные и иррациональные числа в совокупности составляют так называемые вещественные числа. Кантор открыл, что множество вещественных чисел много больше множества рациональных чисел. Его доказательство было очень простым.

Представьте себе, что у вас имеется идеальный план «рассадики» вещественных чисел: каждое вещественное число имеет место, и каждое место занято. Это означает, что мы можем сделать список мест с указанием номера места одновременно с тем вещественным числом, которое на нем сидит. Например, наш список мог бы выглядеть примерно так:

Место	Вещественное число
1	3125123...
2	7843133...
3	9999999...
4	6261000...
5	3671123...
и т.д.	и т.д.

Уловка удалась, когда Кантор создал вещественное число, которого не было в списке.

Посмотрите на первую цифру первого числа в списке. В нашем примере это 3. Если бы наше новое число было равно первому числу в списке, его первой цифрой тоже было бы 3, но мы с легкостью можем воспрепятствовать этому. Давайте просто скажем, что наше новое число начинается с цифры 2. Поскольку первое число в списке начинается с 3, а новое число – с 2, мы знаем, что эти числа различны. (В строгом смысле слова это не так. Число 3,00000... равно числу 2,99999..., поскольку существует два способа записи многих рациональных чисел. Однако это мелочь, которую легко преодолеть. Для ясности мы проигнорируем это

исключение.)

Теперь перейдем ко второму вещественному числу. Как мы можем быть уверенными в том, что наше новое число отличается от второго числа из списка? Что ж, мы уже определили первую цифру нашего нового числа, так что не можем повторить в точности ту же уловку, но можем сделать кое-что не хуже. Второе число нашего списка имеет вторую цифру 8. Если наше новое число имеет вторую цифру 7, мы можем убедиться, что наше новое число не совпадает со вторым числом из списка, поскольку их вторые цифры отличаются друг от друга. Значит, они не одинаковы. Мы продолжаем делать то же самое, двигаясь по списку: рассматриваем третью цифру третьего числа и меняем ее, рассматриваем четвертую цифру четвертого числа и меняем ее – и так далее.

Место	Вещественное число
1	0,3125123... Первая цифра нашего нового числа 2 (отличная от 3)
2	0,7843133... Вторая цифра нашего нового числа 7 (отличная от 8)
3	0,9999999... Третья цифра нашего нового числа 8 (отличная от 9)
4	0,6261000... Четвертая цифра нашего нового числа 0 (отличная от 1)
5	0,3671123... Пятая цифра нашего нового числа 0 (отличная от 1) и т.д.

Это дает новое число 27800..., которое отличается от первого числа (их первые цифры не совпадают), от второго числа (их вторые цифры не совпадают), от третьего, четвертого, от пятого и т.д.

Перемещаясь подобным образом по диагонали, мы создаем новое число. Этот процесс обеспечивает отличие нового числа от всех чисел в списке. Оно отлично от всех чисел в списке, оно не может входить в список, но мы уже предположили, что наш список содержит все вещественные числа. В конце концов, это был полный список рассаженных чисел. Имеет место противоречие. Безупречный список «рассади» существовать не может.

Вещественные числа составляют бóльшую бесконечность, чем числа рациональные.

Термин для бесконечности такого типа – $\aleph_1$

1, это первая несчетная бесконечность. (Технически термин для бесконечности вещественной прямой – $\mathfrak{c}$, или бесконечность-континуум. Математики многие годы пытались определить, действительно ли мощность $\mathfrak{c}$ – $\aleph_1$

1. В 1963 году математик Пол Козн разрешил эту загадку, так называемую континуум-гипотезу: она недоказуема и не недоказуема в силу теоремы неполноты Гёделя. Сегодня большинство математиков воспринимают континуум-гипотезу как верную, хотя при некоторых исследованиях не-Канторовых трансфинитных чисел она оказывается неверна.) В уме Кантора существовало бесконечное число бесконечностей, одна в другой – трансфинитных чисел. $\aleph_\omega$

0 меньше, чем $\aleph_1$

1, которая, в свою очередь, меньше $\aleph_2$

2, которая меньше $\aleph_3$

3 и т.д. На вершине цепи располагается предельная бесконечность, поглощающая все прочие, – Бог, бесконечность, не поддающаяся никакому пониманию.

К несчастью для Кантора, не все разделяли его видение Бога. Леопольд Кронекер был видным профессором Берлинского университета и одним из учителей Кантора. Кронекер верил в то, что Бог никогда не допустил бы существования такой гадости, как иррациональные числа и тем более бесконечно увеличивающегося числа бесконечностей, образующих нечто вроде матрешки. Целые числа символизировали чистоту Бога, в то время как иррациональные числа и другие странные разновидности чисел представляли собой скверну – измышления несовершенного человеческого ума. Худшими из них были Канторовы трансфинитные числа.

Возмущенный взглядами Кантора, Кронекер обрушил на него ядовитую критику и очень затруднил публикацию его работ. Когда Кантор в 1883 году претендовал на должность в Берлинском университете, ему было отказано. Пришлось удовольствоваться должностью профессора гораздо менее престижного университета в Галле. Вероятно, виноват в этом был влиятельный Кронекер. В том же году Кантор написал опровержение нападок Кронекера. Затем в 1884 году Кантор пережил первый нервный срыв, приведший к депрессии.

Слабым утешением для него послужило бы то, что его работы стали основой целой новой области математики: теории множеств. Используя теорию множеств, математики открыли не только числа, о которых мы ничего не знаем; они разработали неслыханные до того понятия – бесконечные бесконечности, которые можно складывать, вычитать, умножать и делить, как обычные числа. Кантор открыл целую новую вселенную чисел. Немецкий математик Давид Гильберт сказал о нем: «Никто не сможет изгнать нас из рая, созданного для нас Кантором». Однако для Кантора признание опоздало: весь остаток жизни он лечился в психиатрических больницах и в 1918 году умер в одной из них.

В битве между Кронекером и Кантором Кантор в конце концов победил. Его теория показала, что дорогие Кронекеру целые числа – и даже числа рациональные – это ничто. Они – бесконечный ноль.

Рациональных чисел бесконечно много, и между любыми двумя числами по вашему выбору, как бы близко друг к другу они ни располагались, все еще находится бесконечное множество рациональных чисел. Они повсюду. Однако канторовская иерархия бесконечностей говорила о другом: она показывала, как мало места рациональные числа занимают на числовой оси.

Для такого сложного подсчета требуется остроумная уловка. Измерить объекты неправильной формы очень трудно. Например, представьте себе, что у вас пятно на деревянном полу. Какую площадь занимает пятно? Это совсем не очевидно. Если пятно имеет форму круга, квадрата или треугольника, площадь легко вычислить: просто возьмите рулетку и измерьте радиус или высоту и основание. Однако не существует формулы для вычисления площади пятна в форме амебы. Впрочем, существует другой способ.

Возьмите прямоугольный коврик и положите его поверх пятна. Если коврик покрывает пятно полностью, значит, пятно меньше коврика; если площадь коврика – квадратный фут, то площадь пятна меньше квадратного фута.

При использовании ковриков меньшего размера аппроксимация делается лучше и лучше. Предположим, что пятно покрывается пятью ковриками размером в одну восьмую квадратного фута. Значит, площадь пятна не больше пяти восьмых квадратного фута, что меньше нашей

оценки при помощи коврика в один квадратный фут. По мере того как вы берете все меньшие и меньшие коврики, покрытие делается все лучше и лучше, и их общая площадь все больше приближается к истинному размеру пятна. На самом деле вы можете определить площадь пятна как предел площади ковриков, когда площадь каждого из них стремится к нулю (рис. 43).

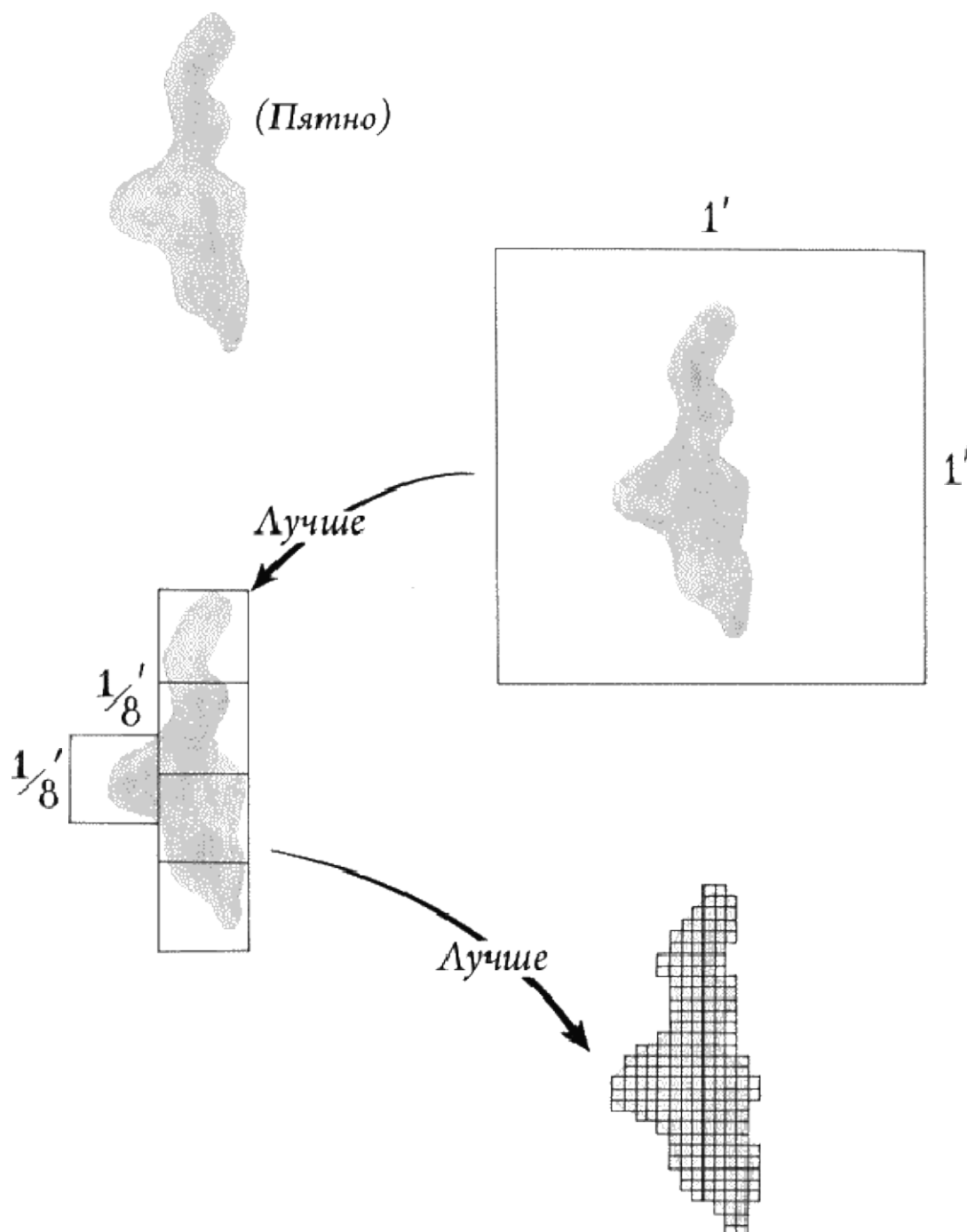


Рис. 43. Покрытие пятна ковриками

Проделаем то же самое с рациональными числами, но на этот раз наши коврики – это наборы чисел. Например, число 2,5 «покрывается» ковриком, который включает, скажем, все числа между 2 и 3: это коврик размера 1. Использование такого рода коврика для покрытия рациональных чисел имеет некоторые весьма странные последствия, как показал Кантор с помощью своей карты «рассадки». Карта «рассадки» охватывает все рациональные числа – соотносит каждое из них с его «местом», так что их можно пересчитать одно за другим по порядку, основываясь на номере их «места». Возьмите первое попавшееся рациональное число

и поместите его на числовую ось. Накройте его ковриком размера 1. Этим ковриком будет накрыто множество других чисел, но об этом мы можем не беспокоиться. Пока накрыто наше первое число, все в порядке.

Теперь возьмем второе число. Накроем его ковриком размера $1/2$. Возьмем третье число и накроем его ковриком размера $1/4$ и т. д. Продолжая процесс до бесконечности, поскольку каждое рациональное число присутствует на карте «рассадки», получим, что каждое рациональное число покрыто ковриком. Какова же суммарная площадь ковриков? Это наша старая приятельница, ахиллесова сумма. Складывая площади ковриков, мы получим сумму $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots + 1/2^n$, которая стремится к 2, когда n стремится к бесконечности. Таким образом, мы можем накрыть бесконечное множество рациональных чисел на числовой оси набором ковриков, общая площадь которых равна 2. Это означает, что все рациональные числа оси можно загнать на отрезок длиной меньше двух единиц пространства.

Как мы поступали в случае пятна, сделаем размеры ковриков еще меньше, чтобы получить лучшую аппроксимацию. Если вместо того, чтобы начинать с коврика размера 1, начать с коврика размером в $1/2$, то общая сумма площадей окажется равной 1. Значит, рациональные числа в сумме занимают меньше одной единицы пространства. Если мы начнем с первого коврика размера $1/1000$, все коврики займут меньше $1/500$ единицы пространства, и все рациональные числа уместятся меньше чем на $1/500$ единицы пространства. Если мы начнем с коврика размером в один атом, мы сможем накрыть все рациональные числа на числовой оси ковриками, которые в сумме имеют площадь меньшую, чем атом. Однако даже такие крохотные коврики, что могут все вместе уместиться в одном атоме, накроют все рациональные числа (рис. 44).

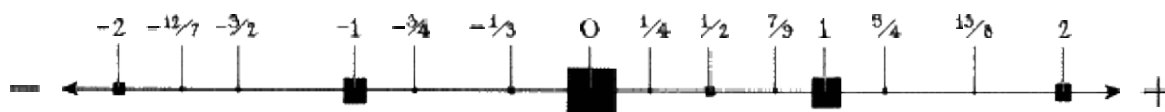


Рис. 44. Покрывание рациональных чисел

Мы можем брать какие угодно малые коврики, мы можем накрыть все рациональные числа ковриками, в сумме имеющими площадь в половину атома, в нейтрон или в кварк – столь малыми, какие только можем вообразить.

Так каков же тогда размер совокупности рациональных чисел? Мы определили размер как предел – сумму площадей ковриков, размер каждой из которых стремится к нулю.

Однако одновременно мы видели, что по мере уменьшения ковриков сумма покрывающих площадей делается все меньше и меньше, меньше атома, кварка или миллионной доли кварка – и при этом покрывает все рациональные числа. Каков предел величины, без остановки делающейся все меньше и меньше? Ноль.

Каков размер совокупности рациональных чисел? Они не занимают никакого пространства. Эту концепцию трудно воспринять, однако она истинна.

Несмотря на то, что рациональные числа находятся повсюду на числовой оси, они совсем не занимают места. Если бы мы кинули дротик в числовую ось, он никогда не попал бы в рациональное число. Никогда. И хотя рациональные числа не занимают места, этого нельзя сказать об иррациональных, потому что для них нельзя составить карты «рассадки» и пересчитать их по одному: всегда останутся неохваченные. Кронекер ненавидел иррациональные числа, но они занимают все место на числовой оси.

Бесконечность рациональных чисел – всего лишь ноль.

Глава 7

Абсолютные ноли

Физика ноля

Осмысленная математика включает пренебрежение количеством, когда оно мало, но не пренебрежение, когда оно бесконечно велико и когда вам этого не хочется!

Поль Дирак

Наконец стало неоспоримым, что бесконечность и ноль неразделимы и чрезвычайно важны для математики. У математиков не осталось иного выбора, кроме как научиться жить с ними. Для физиков, впрочем, ноль и бесконечность казались совершенно несущественными для понимания того, как функционирует Вселенная. Сложение бесконечностей и деление на ноль могут быть частью математики, но это не путь природы.

Или так надеялись ученые. Пока математики открывали связи между нолем и бесконечностью, физики начали сталкиваться с нолями в мире природы. Ноль перекочевал из математики в физику. В термодинамике он стал непреодолимым барьером: самой низкой возможной температурой. В общей теории относительности Эйнштейна ноль превратился в черную дыру, чудовищную звезду, проглатывающую целые солнца. В квантовой механике ноль оказался странным источником энергии – бесконечной и вездесущей, присутствующей даже в глубоком вакууме призрачной силой, проявляемой ничем.

Жар ноля

Когда вы можете измерить то, о чем говорите, и выразить это в числах, вы что-то знаете об этом; но когда вы это измерить не можете, когда не можете выразить это в числах, ваши знания незначительны и неудовлетворительны: они могут быть началом знания, но в своих мыслях вы едва ли достигли стадии науки.

Уильям Томсон, лорд Кельвин

Первый неизбежный ноль в физике возникает из закона, который полстолетия был в употреблении. Этот закон был в 1787 году открыт Жаком Александром Шарлем, французским физиком, уже прославившимся первым полетом на наполненном водородом воздушном шаре. Шарля помнят не за его достижения в авиации, а за закон природы, носящий его имя.

Шарль, как и многие физики его времени, был заинтересован удивительно различными свойствами разных газов. Кислород заставляет угли вспыхнуть ярким пламенем, углекислый газ тушит их. Хлор имеет зеленый цвет и смертельно ядовит, окись азота бесцветна и заставляет людей смеяться. Однако у всех этих газов основные свойства одни и те же: при нагревании они расширяются, при охлаждении сжимаются. Шарль открыл, что их поведение чрезвычайно постоянно и предсказуемо. Если взять одинаковые объемы двух разных газов, поместить их в одинаковые баллоны и одинаково нагреть, они расширятся одинаково, а при охлаждении одинаково сожмутся. Более того, с нагреванием или охлаждением на каждый градус связан определенный процент увеличения или уменьшения объема. Закон Шарля описывает связь объема газа с его температурой.

В 1850-х годах, однако, Уильям Томсон, британский физик, заметил в законе Шарля что-то странное: призрак нуля. Чем ниже температура, тем меньше и меньше становится объем баллонов. Если снижение температуры продолжается с постоянной скоростью, с постоянной скоростью уменьшается и объем баллонов, но это продолжается не вечно. Существует точка, в которой, согласно теории, газ не занимает никакого пространства. Закон Шарля гласит, что баллон с газом должен сжаться до нулевого объема. Конечно, нулевой объем – это самый малый возможный объем. Когда газ достигает этой точки, он не занимает никакого пространства. (Конечно, не может идти речи об отрицательном пространстве.) Если объем газа связан с его температурой, минимальный объем означает минимальную температуру. Газ не может становиться холоднее и холоднее до бесконечности. Когда вы не можете добиться еще большего сжатия баллона, вы не можете еще больше понизить и температуру. Это абсолютный ноль. Это низшая возможная температура, немногим меньше -273 градуса Цельсия.

Томсон больше известен как лорд Кельвин, и по имени Кельвина названа эта универсальная температурная шкала. Если шкала Цельсия – шкала со ста делениями, где ноль градусов – температура, при которой вода замерзает, а сто градусов – температура, при которой она кипит (при этом, естественно, подразумеваются так называемые «нормальные условия»), то по шкале Кельвина ноль градусов – это абсолютный ноль, а «цена» градуса совпадает со шкалой Цельсия.

Абсолютный ноль – это состояние, когда газ в сосуде лишен всей своей внутренней энергии. На самом деле такое состояние – недостижимая цель. Невозможно охладить тело до абсолютного нуля. Можно приблизиться к нему очень близко, тормозя атомы лазерным лучом. Физики сейчас могут достичь таким образом нескольких миллионных градуса выше абсолютного нуля. Впрочем, все во Вселенной стремится не дать на самом деле достичь абсолютного нуля. Дело в том, что любое имеющее энергию тело движется и излучает свет. Например, люди состоят из молекул воды, загрязненной небольшим количеством органических соединений. Все входящие в эти соединения атомы колеблются в пространстве. Чем выше температура, тем быстрее атомы двигаются. При этом они сталкиваются с другими, заставляя соседей двигаться в свою очередь.

Допустим, вы пытаетесь охладить банан до абсолютного нуля. Чтобы избавиться от всей внутренней энергии, содержащейся в банане, вы должны заставить его атомы перестать двигаться. Вы должны поместить банан в контейнер и охладить. Однако и контейнер тоже состоит из атомов. Атомы контейнера колеблются, они сталкиваются с атомами банана и приводят их в движение. Даже если вам удастся заставить банан плавать в абсолютном вакууме в центре контейнера, вы не сможете полностью прекратить движение, потому что танцующие частицы испускают свет. Свет постоянно исходит из атомов контейнера и попадает в банан, заставляя его частицы снова приходить в движение.

Все атомы, составляющие охлаждающую обмотку и жидкий азот, двигаются и испускают свет, так что банан постоянно поглощает энергию колеблющихся и испускающих свет атомов контейнера, пинцета, которым вы держите банан, охлаждающей обмотки, которую вы используете для создания низкой температуры. Вы не можете создать щит, который изолировал бы банан от всего окружения. Атомы такого щита тоже колебались бы и излучали свет. Каждое тело находится под воздействием окружающей его среды, так что охладить до абсолютного нуля что-либо – банан, кубик льда, сосуд с жидким гелием – невозможно. Это непреодолимый барьер.

Следствия из открытия абсолютного нуля весьма отличались от законов Ньютона. Выведенные Ньютоном уравнения давали физикам силу. Ученые могли с большой точностью определять орбиты планет и предсказывать движение различных тел. С другой стороны,

открытие Кельвина говорило физикам о том, чего они сделать не могут. Они не могли даже достичь абсолютного нуля. Это препятствие очень разочаровывало мир науки, но оно положило начало новой области физики – термодинамике.

Термодинамика – это наука о том, как ведут себя тепло и энергия. Подобно открытому Кельвином абсолютному нулю, законы термодинамики воздвигли непреодолимые барьеры, проникнуть за которые не может, как бы ни старался, ни один ученый. Например, термодинамика говорит, что создание вечного двигателя невозможно. Алчные изобретатели заваливают научные учреждения и журналы проектами невероятных механизмов – механизмов, которые вечно производили бы работу без источника энергии. Однако законы термодинамики утверждают, что подобное невозможно. Это еще одна цель, которая не может быть достигнута, несмотря ни на какие усилия. Невозможно даже создать машину, которая бы работала, не тратя энергии зря: какая-то ее часть обязательно будет отдаваться Вселенной в виде тепла. (Термодинамика похуже казино: вы не можете выиграть, что бы ни предпринимали. Нельзя даже сыграть вничью.)

Желание построить мостик между термодинамикой и механикой породило новую дисциплину, статистическую механику. Рассматривая коллективное движение групп атомов, физики могут предсказать поведение материи. Например, статистическое описание газа объясняет закон Шарля. По мере увеличения температуры газа его молекулы в среднем двигаются быстрее и с большей силой ударяют в стенки баллона. Газ сильнее давит на стенки, и давление повышается. Статистическая механика – теория колебаний – объяснила некоторые основополагающие свойства материи и даже, как на протяжении долгого времени многим казалось, природу света. Эта проблема многие столетия озадачивала ученых. Исаак Ньютон полагал, что свет состоит из крохотных частиц, испускаемых любым светящимся объектом. Со временем, однако, появились основания считать, что свет на самом деле – скорее волна, чем частица. В 1801 году британский ученый открыл интерференцию света, казалось бы, полностью разрешив вопрос.

Интерференция происходит со всеми видами волн. Когда вы кидаете камешек в пруд, возникают круговые колебания воды – волны. Вода поднимается и опускается, гребни и впадины распространяются наружу по кругу. Если вы бросите одновременно два камня, колебания будут интерферировать друг с другом. Вы сможете наглядно в этом убедиться, если опустите два вибрирующих стержня в сосуд с водой. Когда гребень волны от одного стержня встречается с впадиной от другого, они гасят друг друга; если вы присмотритесь внимательно, то заметите линии спокойной, лишенной волн воды (*рис. 45*).

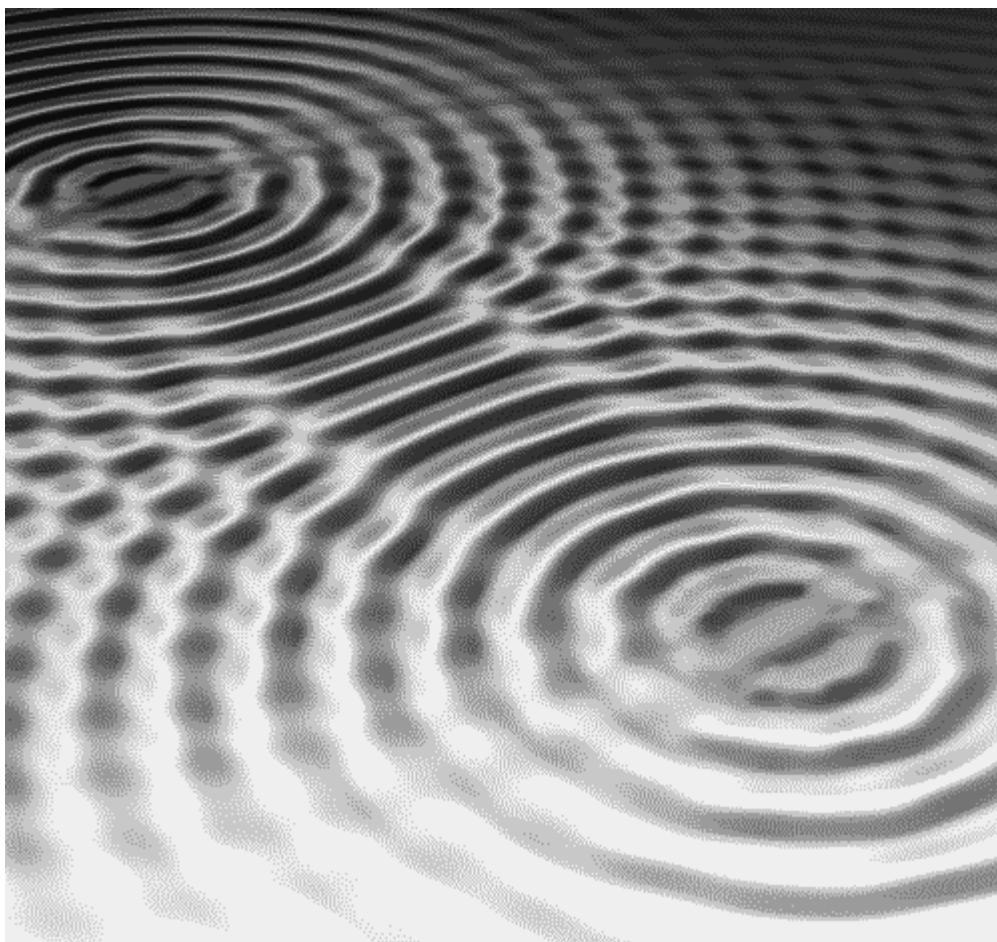


Рис. 45 . Интерференция волн на поверхности воды

То же самое верно для света. Если свет проходит через две узкие щели, то появляются темные участки – свободные от световых волн (*рис. 46*). (Сходный эффект можно наблюдать в домашних условиях. Сложите пальцы вместе. Между ними останутся крохотные промежутки, через которые проходит свет. Взгляните через один из этих промежутков на лампочку, и вы заметите тонкие темные линии, особенно вблизи верха и низа промежутка. Это – следствие волновой природы света.) Волны подобным образом интерферируют, а частицы – нет. Поэтому феномен интерференции, казалось бы, однозначно разрешает вопрос природы света. Физики пришли к выводу, что свет – это не частицы, а волны электрических и магнитных полей.

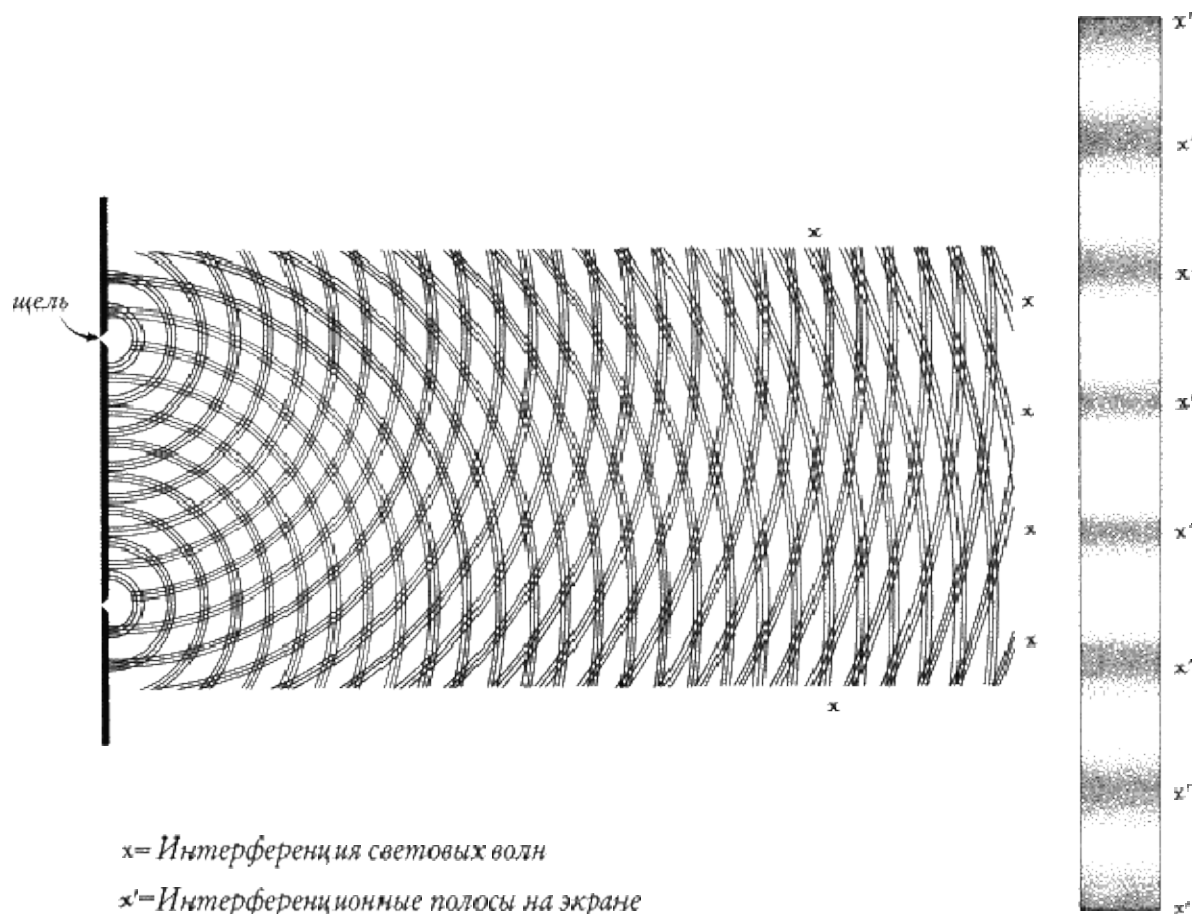


Рис. 46. Интерференция света. Если вы повернете книгу боком и посмотрите вдоль страницы, вы увидите на ней интерференционную картину.

Такая ситуация существовала до середины 1800-х годов. Казалось бы, она точно соответствует законам статистической механики.

Специалисты по статистической механике объясняют, как колеблются молекулы материи. Волновая теория света предполагает, что колебания молекул каким-то образом порождают волны излучения – световые волны. Более того, чем горячее тело, тем быстрее его молекулы двигаются. В то же время чем горячее объект, тем больше энергии в световых волнах света, которые он испускает. Все прекрасно сходится. Что касается света, то чем быстрее колеблется волна – чем выше ее частота, тем больше в ней энергии. (А также чем выше ее частота, тем короче длина волны: расстояние между двумя гребнями.) Действительно, один из самых важных законов термодинамики – так называемое уравнение Стефана – Больцмана – связывает колебания молекул с колебаниями света. Он связывает температуру тела с общим количеством световой энергии, которую оно испускает. Это была самая большая победа статистической механики и волновой теории света. (Уравнение утверждает, что испускаемая энергия пропорциональна температуре в четвертой степени. Оно говорит не только о том, сколько излучения испускает тело, но также насколько горячим оно становится, получив определенное количество энергии. Именно этот закон – наравне с цитатой из книги Исайи – физики использовали для того, чтобы определить, что температура небес выше 500 градусов по Кельвину.)

К несчастью, победа продержалась недолго. В конце столетия двое британских физиков попытались применить теорию статистической механики колебаний для решения простой проблемы. Требовалось довольно обычное вычисление: сколько света испускает пустая идеально поглощающая его полость? Применив базовые уравнения статистической механики

(которые говорят о том, как колеблются молекулы) и уравнения, описывающие взаимодействие с ними электрических и магнитных полей (а к этому времени уже стало известно, что свет – это колебания электромагнитного поля), физики вывели уравнение, определяющее зависимость доли энергии, изучаемой полостью, от длины световых волн, испускаемых полостью при любой данной температуре.

Так называемый закон Рэля – Джинса, названный в честь физиков лорда Рэля и сэра Джеймса Джинса, работает довольно хорошо. Он точно предсказывает долю энергии, уносимой светом в длинноволновой части диапазона. Но при высоких энергиях, в коротковолновой части спектра, закон оказывается неточным. Он предсказывает, что тело испускает все больше и больше света при все меньшей и меньшей длине волны (и тем самым излучает все больше и больше энергии). Соответственно, в коротковолновой части спектра, близкой к нулевой длине волны, свет уносит бесконечное количество энергии. И этот вывод из закона Рэля – Джинса не зависит от температуры тела. Даже кубик льда должен был бы испускать достаточно ультрафиолетовой, рентгеновской и гамма-радиации, чтобы испарить все вокруг. Это так называемая *ультрафиолетовая катастрофа*. Нулевая длина волны эквивалентна бесконечной энергии. Ноль и бесконечность сговорились, чтобы разрушить прекрасную, ясную систему законов. Разгадка этого парадокса быстро сделалась ведущей проблемой физики. Рэлей и Джинс не сделали никаких ошибок. Они использовали уравнения, которые физики считали верными, применили их общепринятым способом, но получили результат, не отражающий того, как работает природа. Кубики льда не уничтожают цивилизации гамма-излучением, хотя по принятым тогда правилам физики это было бы неизбежно. Какой-то из законов физики должен был быть неверным. Но какой?

Нулевой квант: бесконечная энергия

Для физиков вакуум в латентном виде содержит все частицы и все силы. Это гораздо более богатая субстанция, чем ничто философов.

Сэр Мартин Рис

Ультрафиолетовая катастрофа привела к квантовой революции. Квантовая механика избавилась от ноля в классической теории света – устранив бесконечную энергию, которая, предположительно, исходила из любой частицы материи во Вселенной. Впрочем, это была не такая уж победа. Ноль в квантовой механике означает, что вся Вселенная – включая вакуум – наполнена бесконечной энергией: энергией нулевых колебаний. Это в свою очередь ведет к самому странному нолю во Вселенной: фантомной силе ничто.

В 1900 году немецкие экспериментаторы попытались пролить свет на ультрафиолетовую катастрофу. Благодаря тщательным измерениям излучения, испускаемого телами при различных температурах, они показали, что формула Рэля – Джинса на самом деле не может предсказать истинное количество света, испускаемого телом. Молодой физик по имени Макс Планк рассмотрел новые данные и через несколько часов предложил новое уравнение взамен формулы Рэля – Джинса. Формула Планка не только объясняла новые измерения, она разгадывала загадку ультрафиолетовой катастрофы. По этой формуле энергия не возрастала до бесконечности по мере уменьшения длины волны, вместо этого она снова уменьшалась (*рис. 47*). К несчастью, хотя формула Планка была правильна, ее следствия были более тревожащими, чем разгадка ультрафиолетовой катастрофы.

Проблема заключалась в том, что формула Планка не вытекала из обычных следствий законов статистической механики. Законы физики должны были измениться, чтобы

соответствовать формуле Планка. Позднее Планк описывал свои действия как «акт отчаяния»: только отчаяние могло подвигнуть физика на столь, казалось бы, бессмысленные изменения законов физики. Согласно Планку, молекулы не могли поглощать и излучать свет какими угодно количествами. Обмен энергией строго дозировался порциями, именуемыми *квантами*. Вскоре идея получила продолжение: молекулы не могут обладать энергией в промежутке между двумя приемлемыми значениями.

Это могло бы показаться не таким уж странным предположением, но считалось, что природа так не действует. Природа не передвигается скачками. Глупо было бы представить себе людей ростом в пять и в шесть футов, но никого в промежутке. Смешно было бы ожидать, что автомобили будут двигаться со скоростью в 30 и 40 миль в час, но ни в коем случае не 33 или 38 миль! Между тем квантовый автомобиль вел бы себя именно так. Вы могли бы ехать со скоростью 30 миль в час, но стоило вам нажать на педаль газа, и неожиданно вы мгновенно оказывались едущим со скоростью 40 миль в час. Никакие промежуточные скорости непозволительны, так что для перехода от скорости в 30 миль в час к скорости в 40 миль в час вы должны совершить квантовый скачок. Точно так же квантовым людям было бы нелегко вырасти: они на несколько лет задержались бы на пяти футах, а потом в долю секунды – бах! – стали бы ростом в шесть футов. Квантовая гипотеза нарушает все, что нам говорит повседневный опыт.



Рис. 47. Рэлея – Джинс уходят в бесконечность, Планк остается конечным

Хотя она, казалось бы, не соответствует тому, как ведет себя природа, странная гипотеза Планка – квантование энергетических состояний молекул – приводила к правильной формуле для зависимости плотности излучаемой энергии от частот испускаемых телом волн. Несмотря

на то, что физики быстро убедились в правильности формулы Планка, они не приняли квантовую гипотезу. Она была для этого слишком странной.

Из диковинки в принятый факт квантовую гипотезу превратил, казалось бы, неожиданный кандидат: Альберт Эйнштейн, 26-летний клерк патентного бюро. Он показал сообществу физиков, что природа пользуется квантами, а не равномерным приростом. Впоследствии Эйнштейн сделался основным оппонентом теории, созданию которой помог.

Эйнштейн не выглядел революционером. Когда Макс Планк перевернул мир физики вверх тормашками, Эйнштейн боролся с безработицей. Оказавшись без денег, он поступил на временную работу в швейцарское патентное бюро, что было весьма далеко от должности ассистента в университете, к которой он стремился. К 1904 году Эйнштейн был женат, имел новорожденного сына, трудился в патентном бюро... едва ли это был путь к величию. Однако в марте 1905 года он написал статью, которая со временем принесла ему Нобелевскую премию. Эта статья, объяснявшая фотоэлектрический эффект, сделала квантовую механику предметом общего интереса. Поскольку была принята квантовая механика, были приняты и загадочные силы ноля.

Фотоэлектрический эффект был открыт в 1887 году немецким физиком Генрихом Герцем: при освещении ультрафиолетовыми лучами цинковых электродов разрядника образование искр заметно облегчается. Как потом выяснилось, при освещении поверхности металла из нее вылетали электроны. Данный феномен, получивший название *фотоэмиссии* (испускание электронов под действием луча света), был загадкой для классической физики. Ультрафиолетовое излучение несет очень большое количество энергии, так что ученые, естественно, заключили, что для выбивания электрона из атома требуется большая энергия. Согласно волновой теории света, существует другой способ увеличить энергию светового луча: сделать его ярче. Очень яркий голубой свет, например, мог бы нести столько же энергии, как и тусклый ультрафиолет. Следовательно, яркий голубой свет должен был выбивать электроны из атомов, как мог это делать тусклый ультрафиолетовый луч.

Однако, как скоро показали эксперименты, ничего такого не происходило. Даже тусклый ультрафиолетовый луч (с высокой частотой волны) вызывает выбивание электронов из металла. Однако если хоть немного снизить частоту ниже критического порога, сделав свет чуть более красным, фотоэмиссия внезапно прекращается. Каким бы ярким ни был луч, если свет не того цвета, все электроны остаются в металле и ни один из них не вылетает. Это не то, что могла бы сделать световая волна.

Эйнштейн преодолел эту преграду – загадку фотоэлектрического эффекта, но его решение было еще более революционным, чем гипотеза Планка. Если Планк предположил, что колебания молекул квантованы, то Эйнштейн пришел к выводу, что сам свет распространяется маленькими порциями энергии – *фотонами*. Эта идея противоречила общепринятым взглядам, потому что означала, что свет – не волна.

С другой стороны, если энергия света упакована в маленькие пакеты, то легко объяснить фотоэлектрический эффект. Свет действует как пульки, которыми стреляют в металл. Когда пулька попадает в электрон, она его толкает. Если пулька имеет достаточно энергии (если ее частота достаточно высока), она выбивает электрон на свободу. Если же частица света не имеет достаточной энергии, чтобы выпихнуть электрон, тот остается на месте, а фотон отскакивает прочь.

Идея Эйнштейна блестяще объясняла фотоэлектрический эффект. Свет квантуется фотонами, что прямо противоречило волновой теории света, не подвергавшейся сомнению на протяжении более чем столетия. Вместо этого она предполагала, что свет обладает природой и волны, и частицы. Хотя свет иногда ведет себя как частица, в других случаях он действует как

волна. На самом деле свет не частица и не волна, а их странная комбинация. Такую концепцию трудно воспринять. Однако эта идея лежит в основе квантовой теории.

Согласно ей, все на свете – свет, электроны, протоны, маленькие собачки – имеют свойства и волны, и частицы. Однако если тела одновременно и частицы, и волны, чем они могут быть? Математики знают, как их описать: это волновые функции, решения дифференциальных уравнений, называемых уравнениями Шрёдингера. К несчастью, это математическое описание не имеет интуитивного значения, практически невозможно представить себе, что такое эти функции³¹. Более того, по мере того как физики выявляли тонкости квантовой механики, обнаруживались все более странные вещи. Возможно, самая невероятная из них вызвана полем в уравнениях квантовой механики – это энергия нулевых колебаний.

Эта странная сила входит в математические уравнения квантовой вселенной. В середине 1920-х годов немецкий физик Вернер Гейзенберг обнаружил, что эти уравнения имеют шокирующее следствие: неопределенность. Сила ничто как раз и вытекает из принципа неопределенности Гейзенберга.

Принцип неопределенности имеет отношение к возможности описывать свойства частицы. Например, если мы хотим найти определенную частицу, нам нужно определить ее положение и скорость – узнать, где она находится и с какой скоростью движется. Принцип неопределенности Гейзенберга говорит нам, что произвести такое простое действие мы не можем. Как бы мы ни старались, невозможно одновременно точно определить местоположение и скорость частицы. Дело в том, что сам акт измерения уничтожает часть информации, получить которую мы стремимся.

Чтобы что-то измерить, вам нужно коснуться объекта. Например, представьте себе, что вы хотите измерить длину карандаша. Вы можете провести по нему пальцами и так определить длину. Однако при этом вы, возможно, немного переместите карандаш, тем самым слегка изменив его скорость. Лучшим способом было бы осторожно положить рядом с карандашом линейку, однако на самом деле сравнение длины двух предметов также немного нарушит скорость карандаша. Вы можете даже просто смотреть на карандаш, воспринимая отраженный им свет. Как ни мало возмущение, вызванное толчками фотонов, оно все же немножко меняет скорость карандаша. Независимо от того, каким способом вы хотите измерить длину карандаша, вы в любом случае в процессе слегка подтолкнете его. Принцип неопределенности Гейзенберга утверждает, что не существует возможности измерить длину карандаша – или определить местоположение электрона – и одновременно их скорость с полной точностью. На самом деле чем лучше вам известно положение частицы, тем меньше вы знаете о ее скорости, и наоборот. Если вы с нулевой ошибкой определили позицию электрона – точно знаете, где он находится в данный момент, вы должны обладать нулевой информацией о том, как быстро он движется. И если вам с абсолютной точностью – с нулевой ошибкой – известна скорость частицы, вы допустите бесконечную ошибку, определяя ее местоположение: вам ничего не будет известно о том, где частица находится. Вы никогда не можете одновременно знать и то, и другое. Если у вас есть некоторая информация об одном, то насчет другого имеет место неопределенность. Это еще один закон, который нельзя нарушить.

Принцип неопределенности Гейзенберга приложим не только к производимым людьми измерениям. Как и законы термодинамики, он действует и в отношении самой природы.

³¹ Если говорить точно, то принцип неопределенности Гейзенберга касается не скорости частицы, а ее момента, который объединяет скорость, направление движения и информацию о массе частицы. Однако в данном контексте момент, скорость и даже энергия могут рассматриваться почти взаимозаменяемо.

Неопределенность заставляет Вселенную кипеть бесконечной энергией. Представьте себе чрезвычайно маленький объем пространства – что-то вроде крошечной коробочки. Если мы проанализируем, что происходит внутри этой коробочки, мы можем прийти к некоторым заключениям. Например, мы с определенной точностью знаем положение частиц в коробочке: в конце концов, вне коробочки они быть не могут. Нам известно, что их передвижение ограничено определенным объемом, потому что если они окажутся вне коробочки, рассматривать их мы не будем. Поскольку мы имеем некоторую информацию о местонахождении частиц, принцип неопределенности Гейзенберга гласит, что мы точно не знаем скорости частиц – их энергии. По мере того как мы будем делать коробочку все меньше и меньше, мы все меньше и меньше будем знать об энергии частиц.

Такое рассуждение верно повсюду во Вселенной – как в центре Земли, так и в глубоком вакууме космоса. Это означает, что в достаточно малом объеме даже в вакууме содержится неопределенное количество энергии. Однако неопределенность в отношении энергии в вакууме выглядит смешно. Вакуум по определению не имеет в себе ничего – ни частиц, ни света. Таким образом, в вакууме совсем не должно быть энергии. Тем не менее в соответствии с принципом Гейзенберга нам неизвестно, сколько энергии имеется в этом объеме вакуума в любой данный момент. Энергия в крошечном объеме вакуума должна постоянно колебаться.

Однако как может вакуум, не имеющий в себе ничего, содержать вообще хоть какую-то энергию? Ответ дает другое уравнение: знаменитая формула Эйнштейна $E = mc^2$. Она связывает массу и энергию: масса тела эквивалентна определенному количеству энергии. (На самом деле физики не измеряют массу электрона, скажем, в килограммах, фунтах или обычных единицах массы или веса. Они говорят, что масса электрона в покое составляет 0,511 MeV [миллиона электрон-вольт] – огромное количество энергии.) Флуктуации энергии в вакууме – то же самое, что флуктуации в размере массы. Частицы постоянно то возникают, то исчезают, как миниатюрные чеширские коты. Вакуум никогда не бывает по-настоящему пуст. Вместо этого он кишит этими виртуальными частицами. В каждой точке пространства они успешно появляются и исчезают. Это и есть энергия нулевых колебаний, бесконечность в формулах квантовой теории. В строгом смысле энергия нулевых колебаний безгранична. В соответствии с уравнениями квантовой механики в пространстве внутри вашего тостера больше энергии, чем запасено во всех угольных шахтах, нефтяных запасах и всем ядерном оружии в мире.

Когда в уравнении содержится бесконечность, физики обычно решают, что где-то вкралась ошибка: бесконечность не имеет физического смысла. Не отличается от этого и энергия нулевых колебаний, большинство ученых ее полностью игнорирует. Они просто притворяются, что энергия нулевых колебаний равна нулю, хотя и знают, что она бесконечна. Это удобная фикция и обычно не имеет значения. Впрочем, случается, что и имеет. В 1948 году двое голландских физиков, Хендрик Б. Г. Казимир и Дирк Полдер, первыми поняли, что энергию нулевых колебаний не всегда можно игнорировать. Ученые изучали силы, действующие между атомами, когда обнаружили, что их измерения не соответствуют предсказанным силам. В поиске объяснения Казимир пришел к выводу, что это влияние силы ничто.

Секрет силы Казимира заключен в природе волн. В Древней Греции Пифагор наблюдал странное поведение волн, бегущих по струне: некоторые ноты были разрешены, а другие запрещены. Когда Пифагор дергал струну, она издавала чистую ноту тона, известного как основной. Когда он осторожно прижимал пальцем середину струны и снова дергал, он получал другую чистую ноту, на одну октаву выше основной. Одна треть струны давала еще один чистый тон. Однако Пифагор обнаружил, что не все ноты позволены. Когда он прижимал струну в случайном месте, ему редко удавалось получить чистый тон. На струне можно сыграть

только определенные ноты, большинство исключено (рис. 48).

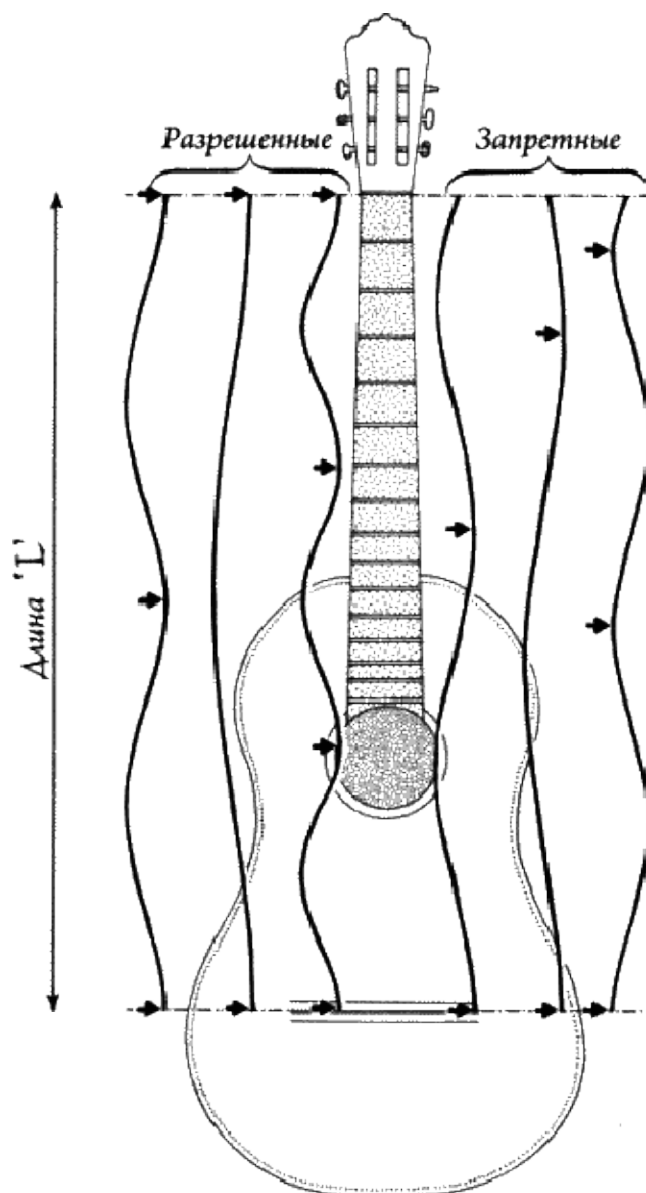


Рис. 48. Запретные ноты на гитарной струне

От волн на струне не так уж отличаются волны в материи. Как гитарная струна не может издать любую ноту – некоторые волны для нее «запретны», так и некоторые волны частиц запретны для внутреннего объема коробочки. Если приложить друг к другу две металлические пластины, например, то между ними не удастся поместить любую частицу. Внутри попадут только те из них, волны которых соответствуют размеру коробочки (рис. 49).

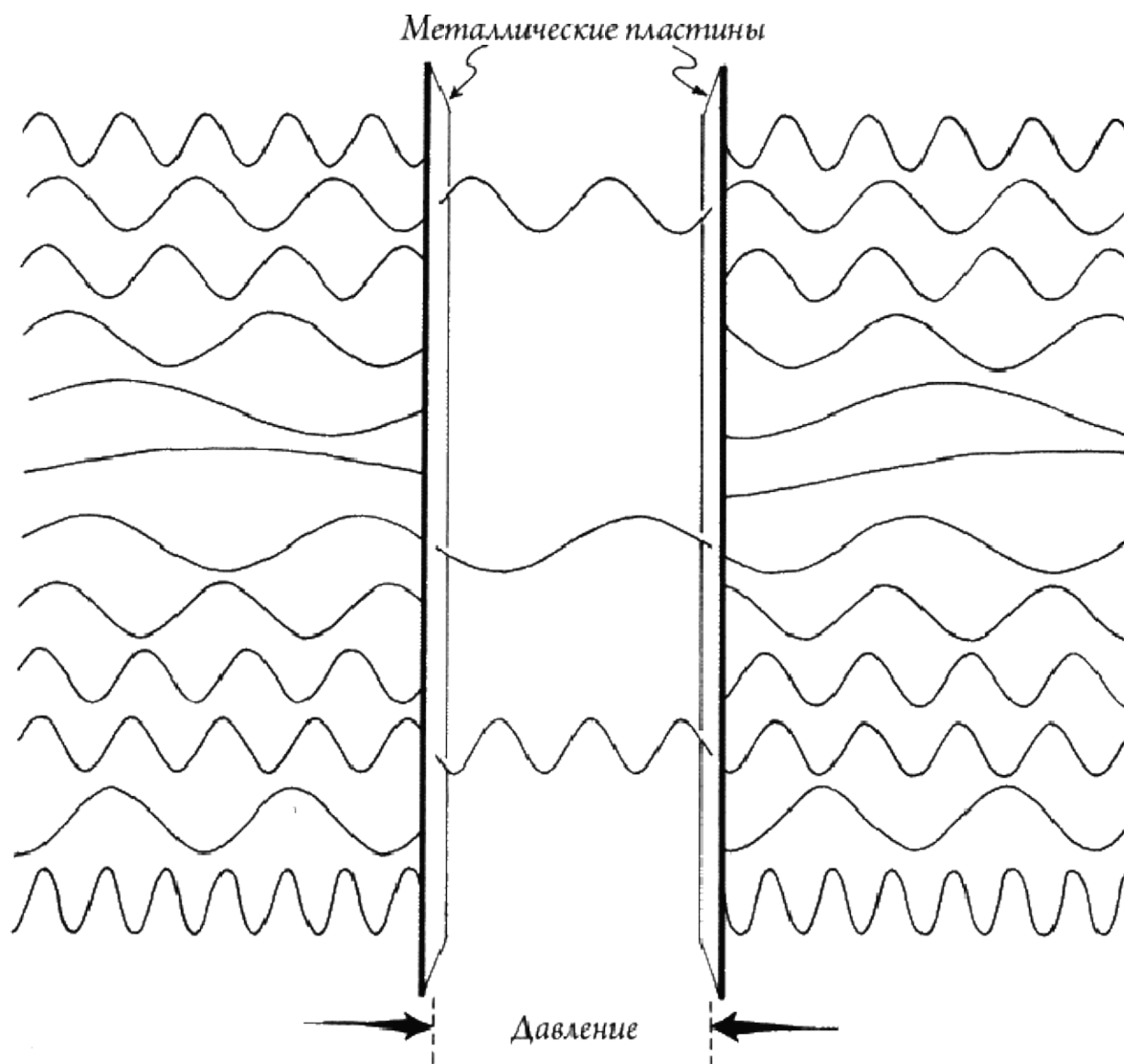


Рис. 49. Эффект Казимира

Казимир понял, что запретные волны частиц влияют на энергию нулевых колебаний вакуума, поскольку частицы повсюду возникают и исчезают.

Если вы поместите близко друг к другу металлические пластины, а между ними этим частицам появляться не позволено, то на внешней стороне пластин частиц окажется больше, чем на внутренней. Не уменьшившееся множество частиц давит на внешние стороны пластин, а поскольку на внутренних сторонах имеет место некомплект, пластины прижимаются друг к другу даже в глубоком вакууме. Это и есть сила вакуума, сила, созданная ничем, – эффект Казимира.

Хотя сила Казимира – таинственная фантомная сила, созданная ничем, напоминает научную фантастику, она существует. Эта сила очень мала и измерить ее трудно, но в 1995 году физик Стивен Ламоро напрямую измерил эффект Казимира. Поместив две позолоченные пластины на чувствительный прибор, измеряющий поворот, он определил, какую силу нужно приложить, чтобы противостоять действию силы на пластины Казимира. Ответ оказался следующим: вес примерно одной тридцатитысячной части муравья, что соответствовало теории Казимира. Ламоро измерил силу, прилагаемую пустым пространством.

Релятивистский ноль: черная дыра

(Звезда), как Чеширский Кот, исчезает из вида. Кот оставляет за собой только свою улыбку, а звезда – только свое гравитационное притяжение.

Джон Уилер

Ноль в квантовой механике насыщает вакуум бесконечной энергией. Ноль в другой великой современной теории – теории относительности – создает другой парадокс: бесконечное ничто черной дыры.

Как и квантовая механика, теория относительности была рождена светом. На этот раз трудности создала скорость света. Большинство объектов во Вселенной не имеют скорости, насчет которой были бы согласны все наблюдатели. Например, представьте себе маленького мальчика, который кидает камешки во все стороны. Наблюдателю, приближающемуся к мальчику, будет казаться, что камешки летят быстрее, чем тому, кто бежит прочь: скорость камешков выглядит зависящей от вашего направления движения и скорости. Аналогично скорость света должна была бы зависеть от того, бежите ли вы к источнику света или от него. В 1887 году американские физики Альберт Майкельсон и Эдуард Морли попытались измерить этот эффект. Они были поражены, когда не обнаружили разницы: скорость света была одинаковой во всех направлениях. Как такое могло быть?

Ответ опять нашел молодой Эйнштейн в 1905 году. И опять очень простой вывод имел огромные последствия.

Первое заключение, сделанное Эйнштейном, представляется довольно очевидным. Эйнштейн указал, что если несколько человек наблюдают один и тот же феномен – скажем, полет ворона к дереву, – законы физики для всех наблюдателей одинаковы. Если вы сравните записи человека, стоящего на земле, и того, кто едет в поезде, движущемся параллельно полету ворона, они разойдутся во мнениях относительно скорости ворона и дерева. Однако окончательный исход полета будет тем же: через несколько секунд ворон долетит до дерева. С этим согласятся оба наблюдателя, хотя они могут не согласиться насчет некоторых деталей. Это принцип относительности. (В специальной теории относительности, которую мы здесь обсуждаем, существуют ограничения в отношении того, какой вид движения позволителен. Каждый наблюдатель должен двигаться с постоянной скоростью по прямой. Другими словами, они не должны испытывать ускорения. В общей теории относительности эти ограничения устранены.)

Второе заключение несколько более озадачивает, особенно из-за того, что оно кажется противоречащим принципу относительности. Эйнштейн предположил, что все – с какой бы скоростью они ни двигались – согласны с тем, что скорость света в вакууме составляет 300 миллионов метров в секунду. Это константа, обозначаемая буквой c . Если кто-то посветит на вас фонариком, свет кинется на вас со скоростью c . Не имеет значения, стоит ли тот, кто держит фонарик, неподвижно, бежит к вам или бежит прочь. Луч света с вашей точки зрения – и с точки зрения всех остальных – всегда движется со скоростью c .

Это заключение бросало вызов всему, что физики считали правильным в отношении движения тел. Если бы ворон вел себя так же, как фотон, то наблюдатель в поезде и человек, стоящий неподвижно, одинаково оценивали бы скорость ворона. Это означало бы, что они разойдутся во мнениях относительно того, когда ворон доберется до дерева (*рис. 50*). Эйнштейн понял, что обойти это препятствие можно одним путем: считая, что течение времени меняется в зависимости от скорости наблюдателя. Часы в поезде могли тикать медленнее, чем часы у стоящего человека. То, что было бы для него десятью секундами, для едущего на поезде

могло бы показаться всего пятью. То же самое происходит с путешественником, удаляющимся на огромной скорости. Каждый щелчок его секундомера длился бы дольше секунды по часам неподвижного наблюдателя. Если астронавт совершит двадцатилетнее (по его часам) путешествие при скорости в девять десятых световой, он вернется на Землю, постарев на 20 лет, но для всех, кто оставался на Земле, пройдет 46 лет.

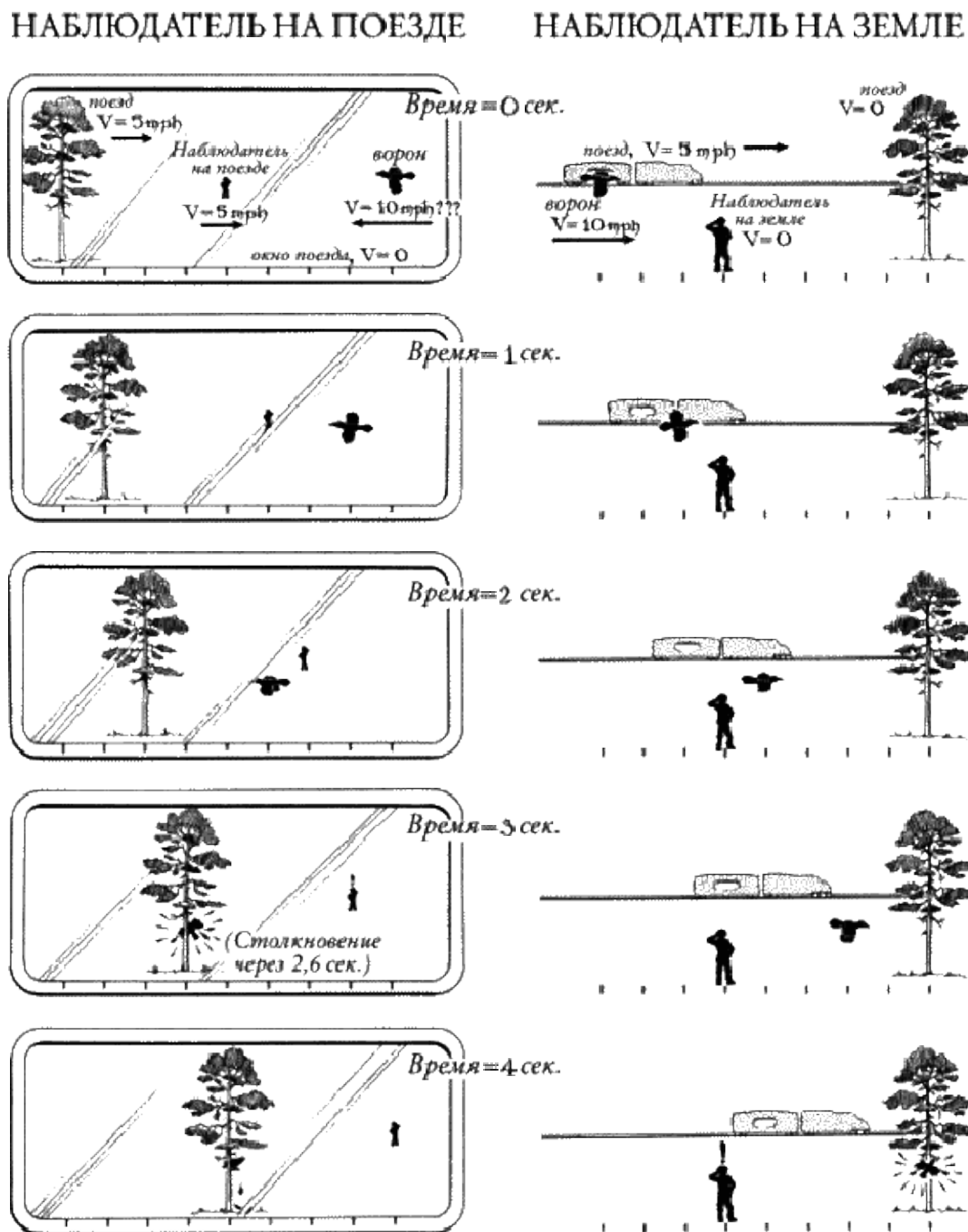


Рис. 50. Постоянная скорость ворона означает, что время относительно

Не только течение времени меняется со скоростью, то же происходит с длиной и массой. По мере увеличения скорости тела оно делается короче и тяжелее. При скорости в девять десятых световой линейка в один ярд станет всего 0,44 ярда длиной, а фунтовый пакет сахара будет весить 2,3 фунта, с точки зрения неподвижного наблюдателя. (Конечно, это не значит, что вы сможете на том же пакете сахара испечь больше печенья. С точки зрения пакета, его вес остается неизменным.)

В такую изменчивость времени, может быть, трудно поверить, однако ее наблюдали. Когда субатомная частица движется очень быстро, она живет до распада дольше, чем ожидалось, потому что ее часы идут медленнее. Также очень точные часы едва заметно отстают при полете в самолете с большой скоростью. Теория Эйнштейна работает. Впрочем, существует потенциальная проблема: ноль.

Когда космический корабль достигнет скорости света, время на нем будет все больше и больше замедляться. Если кораблю удастся достичь скорости света, каждая секунда на борту будет равна бесконечному числу секунд на Земле. За долю секунды будут проходить миллиарды и миллиарды лет, Вселенная проживет свой срок и сгорит. Для астронавта на борту такого корабля время остановится. Длительность будет умножена на ноль.

К счастью, остановить время не так легко. По мере все большего роста скорости время все больше и больше замедляется, но одновременно все больше растет масса космического корабля. Это все равно что катить детскую коляску, в которой младенец все растет и растет. Очень скоро вам придется катить борца сумо, что не так легко. Если вам удастся разогнать коляску еще больше, младенец станет весом с автомобиль... потом с военный корабль... потом с планету... потом со звезду... потом с галактику. По мере того как младенец становится массивнее, ваши усилия дают все меньший и меньший результат. Точно так же вы можете взять космический корабль и разогнать его, все больше приближая его скорость к скорости света. Однако через некоторое время он станет слишком массивен, чтобы разгонять его еще больше. Космический корабль, да и любой объект, обладающий массой, никогда не сможет достичь скорости света. Скорость света – абсолютный предел, достичь его нельзя, уж не говоря о том, чтобы превзойти. Природа защищает себя от неуправляемого ноля.

Впрочем, ноль слишком силен даже для природы. Когда Эйнштейн расширил теорию относительности так, чтобы она включала гравитацию, он не подозревал, что его новые уравнения – общая теория относительности – описывают окончательный ноль и самую худшую из бесконечностей – черную дыру.

В уравнениях теории Эйнштейна пространство и время представлены как различные аспекты одного и того же. Мы уже знали, что ускорение изменяет характер перемещения в пространстве: скорость движения либо увеличивается, либо уменьшается. Новым в уравнениях Эйнштейна было то, что ускорение изменяет не только характер перемещения в пространстве, но и течение времени: оно может ускоряться или замедляться. Таким образом, когда вы придаете ускорение телу, подвергая его действию какой-либо силы (будь это сила тяготения или толчок огромного космического слона), вы меняете характер его перемещения в пространстве и течение на нем времени, иначе говоря, характер перемещения его в пространстве-времени.

Такую концепцию трудно усвоить. Самый простой способ приблизиться к пониманию пространства-времени – через аналогию, представив себе пространство-время как гигантское резиновое полотно. Планеты, звезды и все прочее располагаются на этом полотне, слегка его деформируя. Искривление полотна, порожденное этими объектами, – гравитация. Чем массивнее объект, находящийся на полотне, тем сильнее искривление и больше углубление вокруг объекта и тем больше их стремление туда скатываться.

Кривизна резинового полотна – это не только кривизна пространства, но и кривизна времени тоже. Как пространство искривляется вблизи массивного объекта, так искривляется и время. Оно течет тем медленнее, чем сильнее искажение. То же самое происходит с массой. Когда вы попадаете в сильно искривленные районы пространства, масса тела увеличивается. Этот феномен известен как возрастание массы.

Эта аналогия объясняет орбиты планет: Земля просто катается по вмятине, которую

Солнце делает в резиновом полотне. Свет не распространяется по прямой, а идет по искривленному пути вокруг звезд. Чтобы наблюдать этот эффект, британский астроном сэр Артур Эддингтон в 1919 году отправился в экспедицию. Эддингтон определил положение звезды в момент солнечного затмения и обнаружил кривизну, предсказанную Эйнштейном (рис. 51).

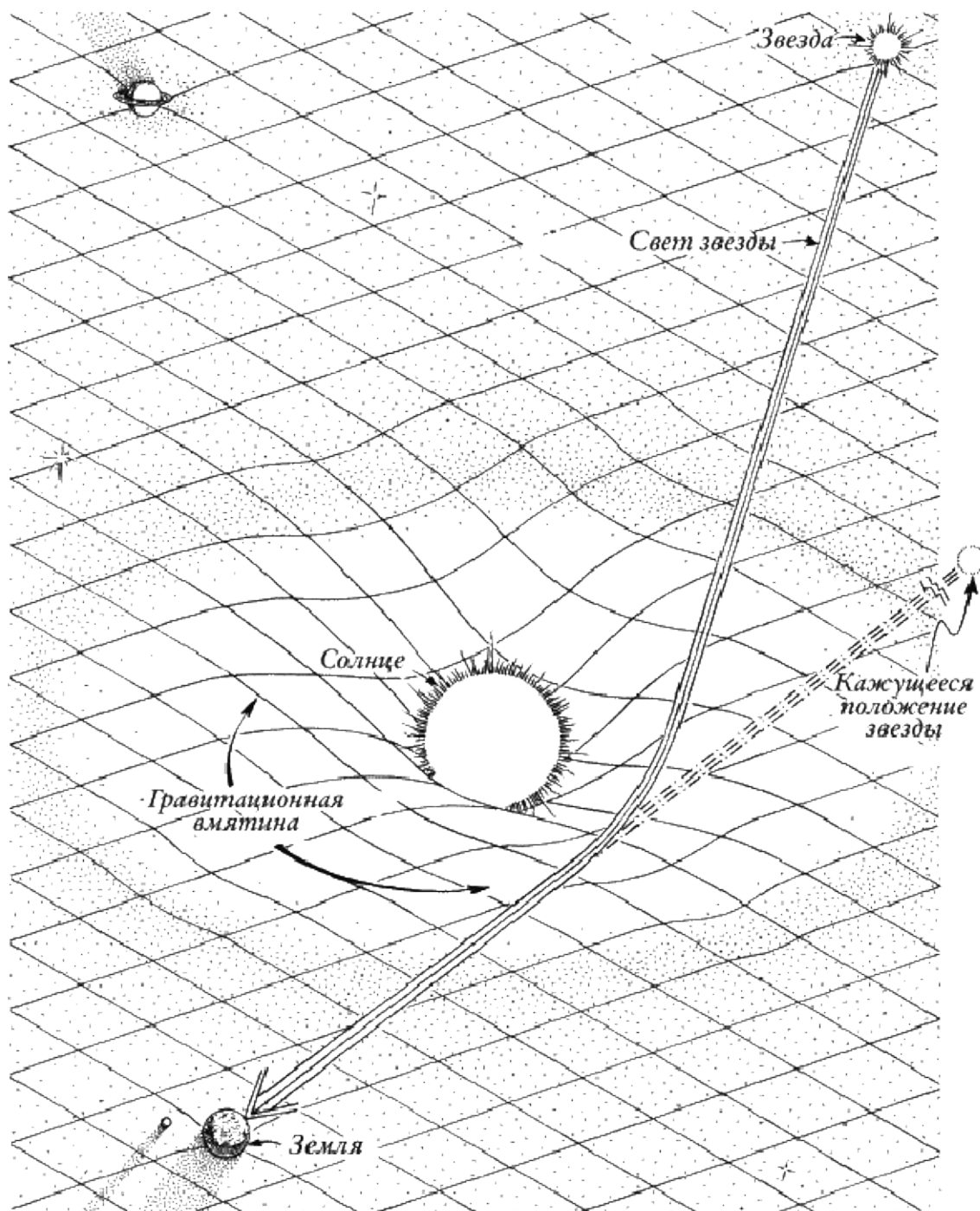


Рис. 51. Гравитация искривляет луч света вокруг Солнца

Уравнения Эйнштейна предсказали кое-что и более зловещее: черную дыру, звезду, имеющую настолько большую плотность, что даже свет не может преодолеть ее тяготение.

Черные дыры начинают жизнь, как и все звезды, в виде большого шара раскаленного газа, в основном водорода. Если бы на него ничто больше не воздействовало, достаточно большой шар коллапсировал бы под действием собственной гравитации, сжавшись до небольшого объема. К счастью для нас, коллапса не происходит потому, что действует другая сила:

ядерный синтез. По мере того как газ сжимается, он делается горячее и плотнее, и атомы водорода с возрастающей силой сталкиваются друг с другом.

В конце концов звезда делается такой раскаленной и плотной, что атомы водорода липнут друг к другу и сливаются, образуя гелий и выделяя огромное количество энергии. Эта энергия изливается из центра звезды, заставляя ее немного расшириться. Большую часть своей жизни звезда находится в состоянии устойчивого равновесия: стремление сжаться под действием собственной гравитации уравнивается энергией ядерного синтеза в центре звезды.

Это равновесие не может сохраняться вечно: звезда обладает лишь ограниченным количеством водородного горючего. Через какое-то время реакция синтеза ослабевает, и равновесие оказывается нарушенным. Как долго длится этот процесс, зависит от размера звезды. По иронии судьбы, чем больше звезда (чем большим запасом водорода она обладает), тем короче ее жизнь, потому что ядерная реакция протекает более бурно. У Солнца осталось топлива примерно на 5 миллиардов лет, но пусть это вас не успокаивает. Температура Солнца будет постепенно повышаться перед концом, вскипятив океаны Земли и сделав ее такой же непригодной для жизни, как Венера. Нам еще повезет, если жизни на Земле отведен миллиард лет. После продолжительной серии предсмертных судорог – точный порядок событий зависит от массы звезды – двигатель ядерного синтеза прекращает работать, и наступает коллапс под действием гравитации.

Закон квантовой механики, именуемый принципом запрета Паули, не дает материи сжаться в точку. Открытый в середине 1920-х годов немецким физиком Вольфгангом Паули, принцип запрета гласит, грубо говоря, что никакие два предмета не могут находиться в одном и том же месте в одно и то же время. В частности, никакие два электрона с одним и тем же квантовым состоянием не могут находиться в одной точке. В 1933 году индийский физик Субраманьян Чандрасекар понял, что принцип запрета Паули обладает лишь ограниченной способностью бороться с гравитацией.

По мере увеличения давления внутри звезды в соответствии с принципом запрета электроны должны двигаться все быстрее и быстрее, чтобы избегать друг друга. Однако существует предел скорости: электроны не могут превысить скорость света, так что если давление на материю возрастает, электроны не могут двигаться достаточно быстро, чтобы предотвратить коллапс. Чандрасекар показал, что коллапсирующая звезда с массой примерно 1,4 массы Солнца обладает достаточной гравитацией, чтобы преодолеть барьер, устанавливаемый принципом Паули. Электроны в звезде, масса которой превышает предел Чандрасекара, не могут помешать ее коллапсу. Сила тяготения так велика, что электроны прекращают сопротивление: они сливаются с протонами, образуя нейтроны. Массивная звезда кончает тем, что превращается в гигантский шар нейтронов: нейтронную звезду.

Дальнейшие вычисления показали, что когда звезда немного массивнее, чем требует предел Чандрасекара, давление получившихся в результате нейтронов – сходное с давлением электронов – может на некоторое время отсрочить коллапс. Это и происходит в нейтронной звезде. Достигнув этой точки, звезда оказывается настолько плотной, что каждая чайная ложка ее вещества весит сотни миллионов тонн. Впрочем, существует предел, которого не выдерживает даже давление нейтронов. Некоторые астрофизики считают, что еще большее сжатие заставляет нейтроны распадаться на компоненты-кварки, в результате чего образуется кварковая звезда. Однако это последний оборонный рубеж. После этого и начинается кавардак.

Когда очень массивная звезда коллапсирует, она исчезает. Гравитация настолько велика, что физики не знают ни одной силы во Вселенной, способной остановить коллапс – ни сопротивление электронов, ни давление нейтронов или кварков на это не способны. Умирающая звезда делается все меньше и меньше. Потом... наступает ноль.

Звезда сжимается до нулевого объема. Это и есть черная дыра, объект настолько парадоксальный, что некоторые ученые думают, что с ее помощью можно путешествовать быстрее света и обратно во времени.

Ключом к странным свойствам черной дыры служит то, как она искривляет пространство и время. Черная дыра не занимает никакого пространства, но обладает массой. Поскольку она обладает массой, она искривляет пространство-время. На самом деле проблема не в этом. По мере приближения к тяжелой звезде кривизна становится все больше и больше, но как только вы минуете внешнюю границу самой звезды, кривизна опять уменьшается, достигая наименьшей величины в центре звезды. В противоположность этому черная дыра – точка. Она занимает нулевое пространство, так что не имеет внешней границы, того места, где пространство снова начинает распрямляться. Кривизна пространства по мере приближения к черной дыре становится все больше и больше, никогда не достигая предела. Кривизна стремится к бесконечности, потому что черная дыра занимает нулевое пространство. Звезда образует разрыв в пространстве-времени (рис. 52). Ноль черной дыры – сингулярность, открытая рана в ткани Вселенной.

Это очень тревожащая концепция. Гладкая, непрерывная ткань пространства-времени может иметь разрывы, и никто точно не знает, что происходит в окрестности таких звезд. Эйнштейн был так смущен идеей сингулярностей, что отрицал существование черных дыр. Он ошибался: черные дыры существуют. Однако сингулярность черной дыры так отвратительна, так опасна, что природа пытается скрыть ее, не позволяет никому увидеть ноль в центре черной дыры и вернуться, чтобы рассказать об увиденном. У природы есть «космический цензор».

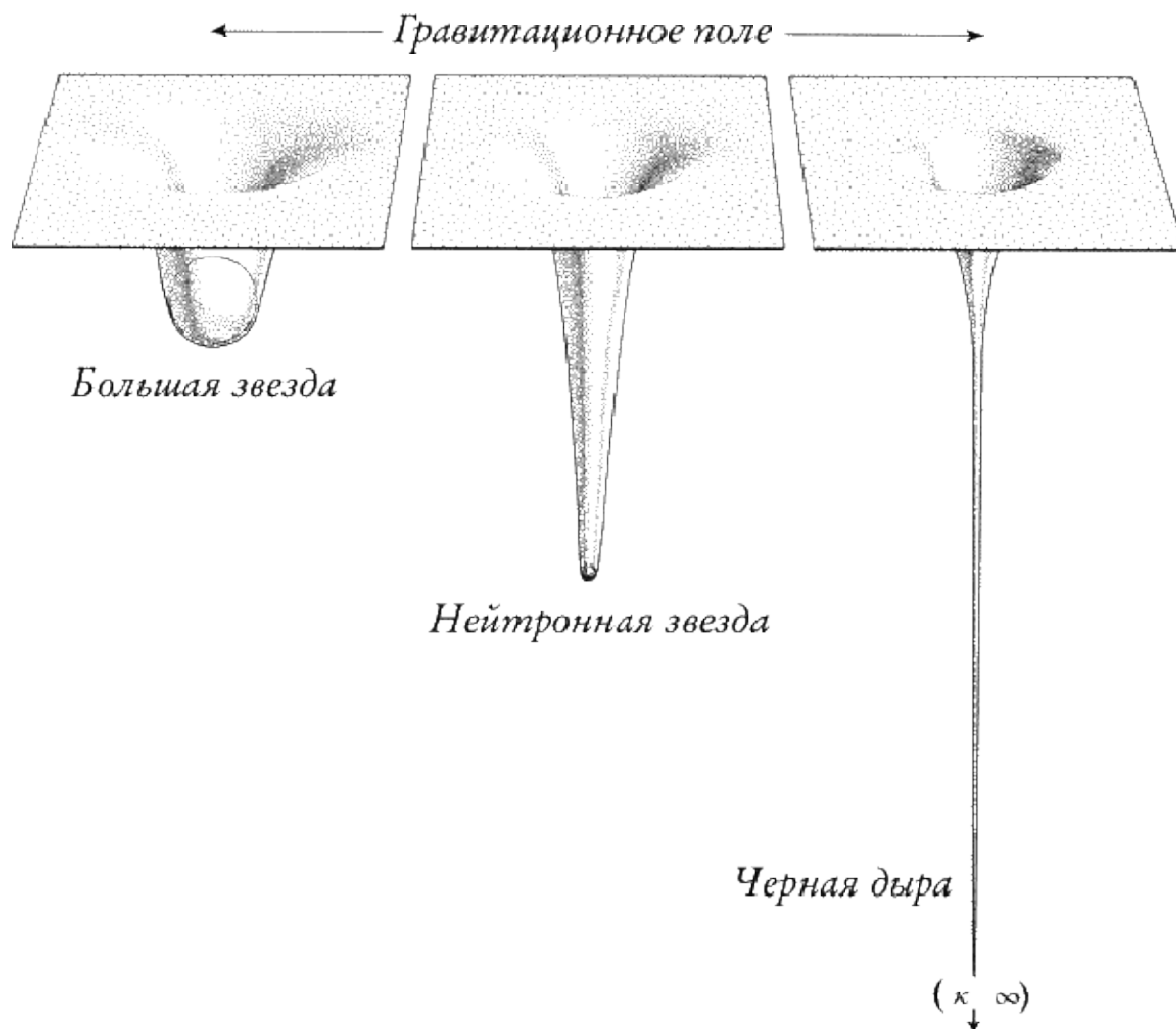


Рис. 52. В отличие от других звезд черная дыра разрывает пространство-время

Этот цензор – гравитация. Если вы кинете вверх камень, он упадет вниз под влиянием земного притяжения. Однако если вы кинете камень достаточно быстро, он не упадет на землю, он вырвется за пределы атмосферы и ускользнет от земной гравитации. Примерно так поступает НАСА, отправляя корабль к Марсу. Минимальная скорость, с которой нужно бросить камень, чтобы он вырвался из-под власти притяжения, называется *скоростью убегания*. Черные дыры обладают такой высокой плотностью, что если вы приблизитесь к ним слишком близко (за так называемый *горизонт событий*), то скорость убегания превысит скорость света. За горизонтом событий притяжение черной дыры настолько сильно и пространство настолько искривлено, что ничто не может вырваться наружу, даже свет.

Хотя черная дыра – это звезда, ее свет никогда не минует пределов горизонта событий, поэтому она и называется черной. Единственный способ увидеть сингулярность черной дыры – проникнуть за горизонт событий и посмотреть на нее собственными глазами. Впрочем, даже если бы у вас был невероятно прочный скафандр, который не дал бы вам превратиться в астронавта-спагетти, вы никогда не сможете никому рассказать о том, что увидели. Как только вы пересечете горизонт событий, никакие ваши сигналы (и вы сами) не смогут вырваться из гравитационной ловушки черной дыры. Переместиться за горизонт событий – все равно что сделать шаг за границу Вселенной. Вы никогда не сможете вернуться. Такова власть космического цензора.

Несмотря на то, что природа скрывает сингулярность черной дыры, ученые знают, что она существует. В направлении созвездия Стрельца, в самом центре нашей Галактики, находится супермассивная черная дыра, вес которой равен весу 4,5 миллиона Солнц. Астрономы наблюдают, как звезды танцуют вокруг этого невидимого партнера. Движение звезд выдает присутствие черной дыры, хотя она и невидима. Впрочем, даже будучи способными обнаруживать черные дыры, ученые так и не выявили полей в их центре, потому что эти ужасные сингулярности скрыты за горизонтом событий.

Это и к лучшему. Если бы не было горизонта событий, не было космического цензора, прячущего сингулярности от остальной Вселенной, могли бы произойти очень странные события. Теоретически голая сингулярность без горизонта событий могла бы позволить путешествовать быстрее света или перемещаться обратно во времени. Этого можно было бы достичь с помощью структуры, названной *кротовой норой*.

Если вернуться к аналогии резинового полотна, сингулярность – это точка, где пространство имеет бесконечную кривизну, это разрыв в ткани пространства-времени. При определенных условиях разрыв может быть растянут. Например, если черная дыра вращается или имеет электрический заряд, сингулярность, по расчетам математиков, оказывается не точкой (проколом в пространстве-времени), а кольцом. Физики предполагают, что две такие растянутые сингулярности могут быть соединены туннелем: кротовой норой (*рис. 53*). Тот, кто будет путешествовать по кротовой норе, вынырнет в другой точке пространства, а может быть, и времени. Точно так же, как кротовая нора может отправить вас в мгновение ока через половину Вселенной, она может переместить вас назад или вперед во времени (см. Приложение Е). Вы могли бы даже выследить свою мать и убить ее до того, как она повстречает вашего отца, что помешало бы вам родиться и создать ужасный парадокс.

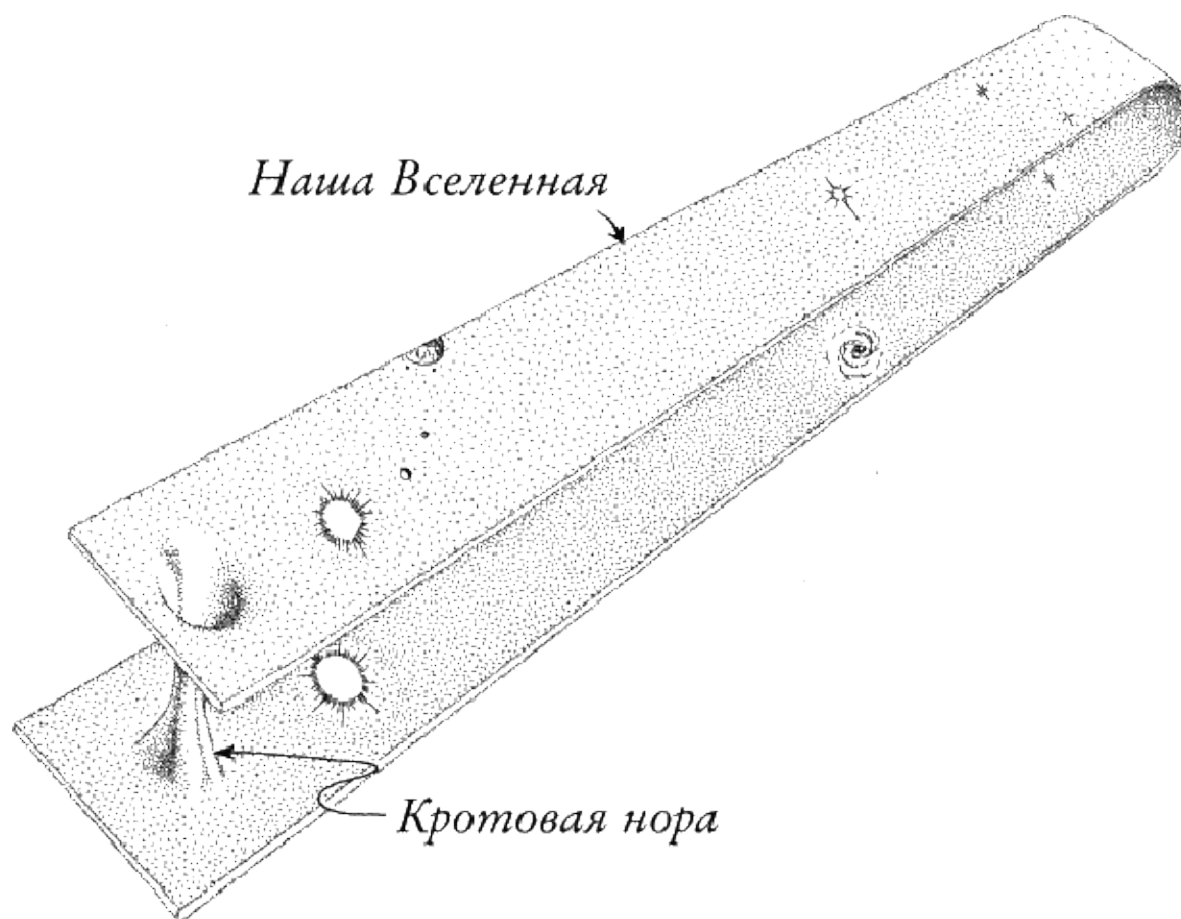


Рис. 53. Кротовая нора

Кротовая нора – парадокс, порожденный полем в уравнениях общей теории относительности. Никто на самом деле не знает, существуют ли кротовые норы, однако НАСА надеется, что это так.

Кое-что за ничто?

Не существует такой вещи, как бесплатный обед

Второй закон термодинамики

НАСА питает надежду, что ноль может открыть секрет путешествий к далеким звездам. В 1992 году НАСА провело симпозиум, названный «Физика третьего тысячелетия», на котором ученые обсуждали особенности кротовых нор, скачки сквозь пространство, двигатели, использующие энергию вакуума и другие нетрадиционные идеи.

Проблема космических путешествий связана с тем, что не от чего отталкиваться. Когда вы плаваете в бассейне, вы отталкиваетесь от воды, заставляя ее отступать назад и двигать вас вперед. Когда вы идете по земле, ваши ноги отталкиваются от почвы, создавая продвигающую вас вперед силу. В космосе отталкиваться не от чего, вы можете сколько угодно грести, но это ничего вам не даст.

Ракеты несут собственный запас вещества, от которого могут отталкиваться. Топливо ракеты сгорает в двигателе и выбрасывается назад, двигая космический корабль вперед, так же, как дуновение воздуха из воздушного шарика заставляет его летать по комнате. Однако выброс топлива – очень дорогой и трудный способ передвижения, и даже современные улучшения химических двигателей, такие как использование электричества для выброса вещества из дюэ

ракеты, не могут обеспечить достаточную энергию для того, чтобы космические зонды могли достичь далеких звезд за приемлемое время. Чтобы добраться даже до ближайшей звезды, вам понадобилось бы чудовищное количество топлива – огромные затраты.

Физик Марк Миллис, глава проекта НАСА «Физика прорыва в реактивном движении», надеется преодолеть эту трудность благодаря физике ноля. К несчастью, ноли черных дыр – сингулярности – в ближайшее время представляются маловероятными кандидатами. Не только чрезвычайно трудно создать голую сингулярность, требующуюся для кротовой норы. Есть вероятность, что такая сингулярность разорвет космического путешественника в клочья. В 1998 году двое физиков из Еврейского университета в Иерусалиме показали, что даже вращающаяся или электрически заряженная черная дыра – с прекрасной кольцевой сингулярностью – благодаря нарастанию массы убьет космонавта. По мере вашего приближения к сингулярности масса черной дыры увеличивается, и увеличивается до бесконечности. Гравитация делается такой сильной, что вы в долю секунды будете разорваны на части. Кротовые норы опасны для здоровья.

Даже если ноли в центре черной дыры не обеспечат легкого способа перемещаться через пространство, ноль квантовой механики предлагает альтернативу: энергия нулевых колебаний может оказаться неисчерпаемым топливом. Именно здесь заканчивается физика мейнстрима и начинается граница.

В соответствии с взглядами Миллиса, астронавты могли бы использовать энергию вакуума для движения корабля, как моряки использовали энергию ветра для движения парусников. «Я провожу аналогию с эффектом Казимира, когда пластины могут соединяться благодаря заметному давлению радиации извне, – говорит он. – Если бы существовал способ извлечь из этого асимметричную силу, действующую в одном направлении и не действующую в другом, это можно было бы использовать как движитель». К сожалению, до сих пор эффект Казимира проявлялся только симметрично: обе пластины притягивались друг к другу – действие одной было равным и противоположно направленным по отношению к действию другой. Однако если бы существовало нечто подобное квантовому парусу, одностороннее зеркало, которое отражало бы виртуальные частицы от одной стороны и позволяло им беспрепятственно проходить сквозь другую, энергия вакуума толкала бы объект в сторону неотражающей поверхности паруса. Миллис признает, что никто не знает, как этого добиться. «Нет теорий того, как создать подобный агрегат», – печально говорит он.

Проблема заключается в том, что в соответствии с законами физики нельзя получить нечто из ничего. Как паруса фрегата снижают скорость ветра, так и квантовый парус понизил бы энергию вакуума. Как можно изменить ничто?

Гарольд Путофф, директор Института перспективных исследований в Остине (Техас), полагает, что квантовый парус просто изменит свойства вакуума. (Путофф больше всего известен своей статьей 1904 года в журнале *Nature* и попыткой доказать, что Ури Геллер и другие физики могли наблюдать предметы на расстоянии – без участия зрения. Это заключение не соответствовало мейнстриму науки.) «Вакуум распадается к немного более низкому уровню», – говорит Путофф. Если так, то квантовые паруса – это лишь начало; станет возможным создание двигателей, работающих только на энергии нулевых колебаний. Единственным их недостатком, возможно, является истончение ткани Вселенной, но очень медленное. «Никто и не почувствует. Это все равно, что зачерпнуть чашку воды из океана», – говорит Путофф. Тем не менее угроза для Вселенной имеется.

Нет сомнения в том, что вакуум обладает энергией – об этом свидетельствует сила Казимира. Однако возможно ли, что энергия вакуума представляет собой самый низкий уровень энергии? Если нет, то в вакууме может крыться опасность. В 1983 году двое ученых в

журнале *Nature* высказали предположение, что использование энергии вакуума может привести к самоуничтожению Вселенной. В статье говорилось о том, что наш вакуум может быть «ложным» вакуумом в неестественном энергетическом состоянии – как мяч, неустойчиво лежащий на склоне холма. Если мы дадим вакууму достаточно сильный толчок, «мяч» может покатиться вниз по склону, стремясь к состоянию с более низкой энергией, и мы окажемся не в силах его остановить. Может образоваться огромный пузырь, растущий со скоростью света. Высвобожденная при этом энергия чревата неслыханными разрушениями. Катастрофа может оказаться такой ужасной, что все атомы будут разорваны на части.

К счастью, это совершенно фантастический сценарий. Наша Вселенная существует миллиарды лет, и невероятно, чтобы мы жили в таком неустойчивом состоянии. Столкновения космических лучей, вероятно, уже достаточно «воспламенили» вакуум, чтобы вызвать такую катастрофу, будь она возможна. Это не мешает некоторым энтузиастам – в том числе физикам – пикетировать лаборатории, работающие с высокими энергиями, как, например, Фермилаб (Национальную ускорительную лабораторию им. Энрико Ферми, США). Они опасаются, что обладающее высокой энергией столкновение частиц может привести к коллапсу вакуума. Даже если бы их опасения были обоснованы, представляется практически невозможным ускорить космический корабль с помощью энергии нулевых колебаний. Тем не менее Путофф полагает, что у него есть способ извлечь энергию из пустоты.

Теоретически ученые могут получать энергию в результате эффекта Казимира даже при абсолютном нуле в самом глубоком вакууме космоса. Две пластины, смыкаясь, выделяют тепло, которое может быть преобразовано в электричество. Увы, пластины нужно снова разъединять, на что требуется больше энергии, чем было произведено. Большинство ученых считают, что этот факт убивает идею создания вечного двигателя, питающегося энергией вакуума. Однако Путофф считает, что видит несколько путей преодолеть это препятствие. Одним из них является использование вместо пластин плазмы.

Плазма (газ из заряженных частиц), подобно металлическим пластинам, подвержена эффекту Казимира. Проводящий цилиндр из газа сжимался бы под действием флуктуаций нулевого уровня, как и пластины. Сжатие нагрело бы плазму, что привело бы к выделению энергии. В отличие от металлических пластин, плазму, по мнению Путоффа, легко получить с помощью электрического разряда.

Вместо того чтобы снова разъединять пластины, плазменный «пепел» можно просто отбросить. Путофф осторожно сообщает о том, что этим методом получил в 30 раз больше энергии, чем было затрачено. «Имеются определенные свидетельства, мы даже получили патент», – заявляет он. Впрочем, устройство Путоффа – одно в длинном ряду машин «бесплатной энергии», ни одна из которых в прошлом не выдержала научной проверки. Маловероятно, что механизм для использования энергии нулевых колебаний постигнет иная участь.

Глава 8 Час zero на Граунд-зиро

Ноль на границе пространства-времени

*Друг другу они чуждыми казались.
Взор смертного не мог бы различить,
Что в будущем своем они сливались.*

Томас Харди, «Слияние двоих»

В современной физике происходит борьба двух титанов. Общая теория относительности властвует над очень-очень большими объектами: большинством массивных тел во Вселенной, таких как звезды, солнечные системы, галактики. Квантовая механика управляет областью очень-очень малого: атомов, электронов, субатомных частиц. Казалось бы, эти две теории могли бы мирно уживаться: каждая диктовала бы свои правила для разных аспектов Вселенной.

К несчастью, существуют объекты, принадлежащие к обоим областям. Черные дыры очень-очень массивны, так что подчиняются законам относительности. В то же время они очень-очень малы и находятся под властью квантовой механики. Два набора законов не приходят к согласию и сталкиваются в центре черной дыры.

На пересечении квантовой механики и теории относительности, где две теории встречаются, обитает ноль и заставляет их ссориться. Черная дыра – это ноль в уравнениях общей теории относительности. Энергия вакуума – ноль в математических выкладках квантовой механики. Большой взрыв, самое загадочное явление в истории Вселенной, является нулем в обеих теориях. Вселенная возникла из ничего, и обе теории ломаются, когда дело доходит до объяснения возникновения космоса.

Чтобы понять Большой взрыв, физикам нужно поженить квантовую теорию с относительностью. За последние несколько лет у них наметился успех: они создали странную теорию, объясняющую квантово-механическую природу гравитации, что позволяет им бросить взгляд на само создание нашей Вселенной. Все, что было нужно, – это изгнать ноль.

Теория всего есть, по сути, Теория ничего.

Ноль изгнанный: теория струн

Проблема заключается в том, что когда мы пытаемся рассчитать путь к нулевому расстоянию, уравнение взрывается и дает нам бессмысленные ответы – такие, как бесконечность. Это причинило множество неприятностей, когда теория квантовой электродинамики еще только разрабатывалась. Ученые получали бесконечность при попытке разрешения любой проблемы!

Ричард Фейнман

Общей теории относительности и квантовой механике было суждено оказаться несовместимыми. Вселенная общей относительности – это гладкое резиновое полотно. Она непрерывна и текуча, никогда не имеет острия. Квантовая механика, с другой стороны, описывает дергающуюся и прерывистую Вселенную. То, что у обеих теорий есть общего (и на чем они сталкиваются), – это ноль.

Бесконечный ноль черной дыры – масса, сжатая в нулевой объем, бесконечно искривляющая пространство, – прорывает дырку в гладком резиновом полотне. Уравнения общей теории относительности не могут справиться с остротой ноля. В черной дыре пространство и время не имеют смысла. У квантовой механики имеется сходная проблема, связанная с энергией нулевых колебаний. В соответствии с квантовыми законами такая частица, как электрон, должна быть точкой. Другими словами, она совсем не занимает пространства. Электрон – это объект нулевых измерений, и эта его сходная с нулем природа означает, что ученые не знают его массы или заряда.

Подобное утверждение представляется глупым. Уже почти столетие назад физики

измерили массу и заряд электрона. Как можно не знать того, что было измерено? Ответ связан с нолем.

Электрон, который ученые видят в лаборатории, тот электрон, который физики, химики, инженеры знают и любят уже десятилетия, – самозванец. Это не настоящий электрон. Настоящий электрон прячется за завесой частиц, созданных флуктуациями нулевых колебаний, тех частиц, которые постоянно возникают и исчезают. Поскольку электрон существует в вакууме, он периодически поглощает или испускает одну из таких частиц, такую как протон. Рой частиц делает трудным измерение массы и заряда электрона, потому что измерению мешают частицы, маскирующие истинные свойства электрона. «Настоящий» электрон несколько тяжелее и имеет больший заряд, чем тот, который наблюдали физики.

Ученые смогли бы получить лучшее представление об истинных массе и заряде электрона, если бы смогли подобраться к нему поближе, если бы смогли изобрести крошечное приспособление, способное проникнуть в облако частиц и дать возможность разглядеть электрон более отчетливо. Согласно квантовой теории, как только измерительный прибор проник бы за слой виртуальных частиц на границе облака, ученые обнаружили бы, что масса и заряд электрона увеличиваются. По мере того как зонд приближался бы к электрону, он миновал бы все больше виртуальных частиц, так что наблюдаемые масса и заряд все увеличивались бы и увеличивались. Когда расстояние до электрона делалось бы все ближе к нулю, число частиц, которые зонд миновал, стремилось бы к бесконечности, так что измеренные зондом масса и заряд электрона также стремились бы к бесконечности. Согласно правилам квантовой теории, нулевой электрон обладает бесконечными массой и зарядом.

Как и с энергией нулевых колебаний, ученые научились игнорировать бесконечные массу и заряд электрона. Они не стремятся приблизиться к электрону на нулевое расстояние, вычисляя массу и заряд электрона; они останавливаются на произвольно выбранном расстоянии от ноля. Как только ученый выбирает подходящее близкое расстояние, все вычисления, использующие «истинные» значения массы и заряда, совпадают друг с другом. Этот процесс называется перенормировкой. «Это то, что я назвал бы безумным процессом», – писал физик Ричард Фейнман, хотя он и получил Нобелевскую премию за то, что его придумал.

Точно так же, как ноль проделывает дыру в гладком полотне общей теории относительности, он сглаживает и разравнивает острие заряда электрона, затуманивая его. Однако поскольку квантовая теория имеет дело с имеющими нулевые размеры частицами-точками, технически все взаимодействия между частицами имеют бесконечный характер: это сингулярности. Например, когда две частицы сливаются, они встречаются в точке – в имеющей нулевые размеры сингулярности. Эта сингулярность не имеет смысла ни в квантовой теории, ни в общей теории относительности. Ноль – помеха в работе обеих великих теорий. Поэтому физики попросту от него избавились.

Вовсе не очевидно, как избавляться от ноля, поскольку ноль снова и снова возникает в пространстве и времени. Сингулярности в центре черных дыр имеют нулевые размеры, как и элементарные частицы вроде электронов. Электроны и черные дыры – реальные объекты, физики не могут просто усилием воли заставить их исчезнуть. Однако ученые могут дать черным дырам и электронам дополнительное измерение.

Это и есть причина возникновения теории струн. Она была создана в 1970-х годах, когда физики начали видеть преимущества рассмотрения каждой частицы в виде вибрирующей струны, а не точки. Если обращаться с электронами (и с черными дырами) как с одномерными объектами, как с петлями струны, вместо того чтобы рассматривать их как не имеющие размеров точки, бесконечности в общей теории относительности и в квантовой теории чудесным образом исчезают. Например, трудности с перенормировкой – бесконечные масса и заряд электрона –

устраняются. Имеющий нулевые размеры электрон обладает бесконечными массой и зарядом потому, что это сингулярность. По мере приближения к нему измерения взмывают в бесконечность. Однако если электрон – это петля струны, частица больше сингулярностью не является. Это значит, что масса и заряд не устремляются к бесконечности, поскольку вы больше не минуете бесконечное облако частиц, приближаясь к электрону. Более того, когда две частицы сливаются, они больше не встречаются в подобной точке сингулярности; они образуют прекрасную, гладкую, непрерывную поверхность в пространстве-времени (рис. 54, 55).

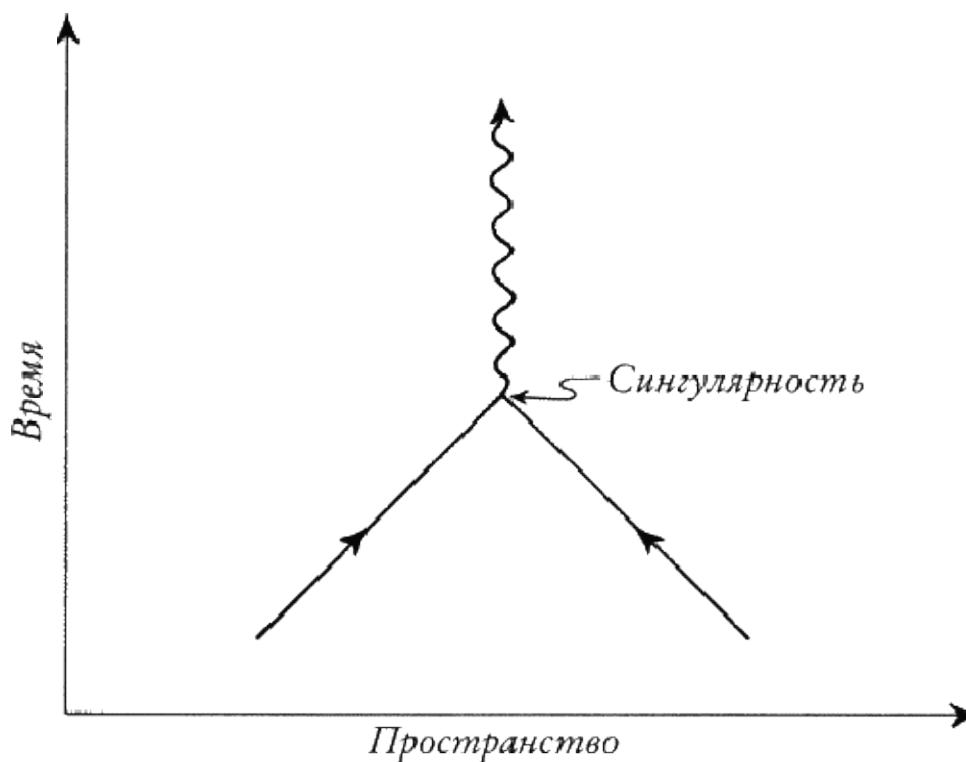


Рис. 54. Частицы-точки создают сингулярность

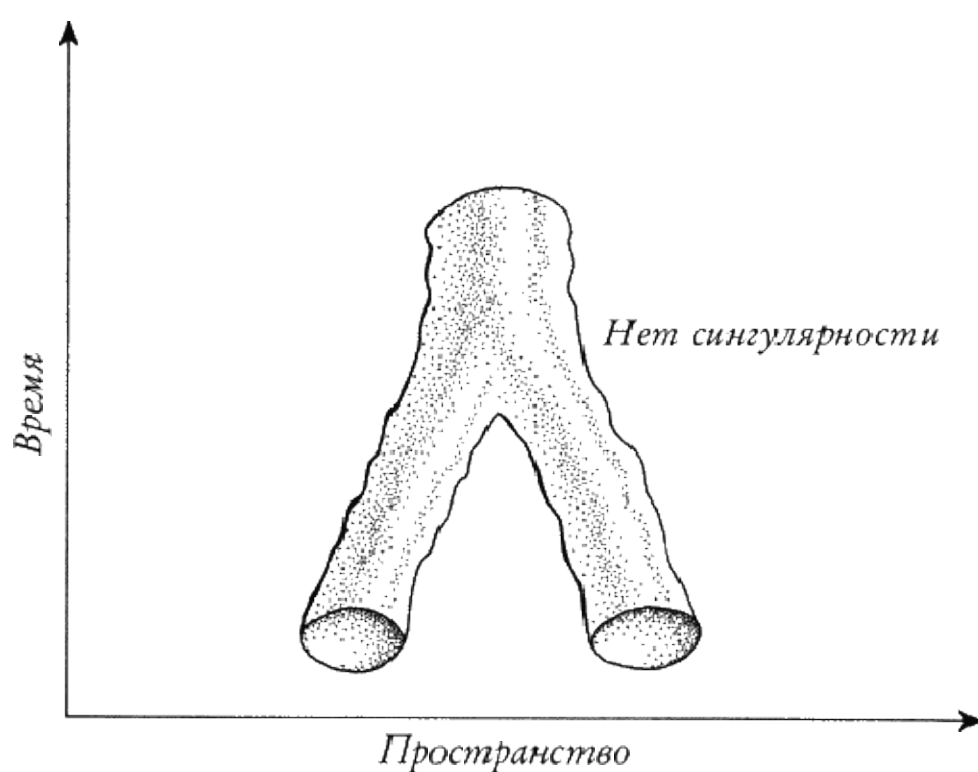


Рис. 55. Частицы-струны – нет

Согласно теории струн, различные частицы представляют собой один и тот же тип струны, просто они колеблются по-разному. Все во Вселенной состоит из струн, имеющих размер примерно 10–33 см. Сравнить размер струны с размером нейтрона – все равно что сравнить размер нейтрона с размером нашей Солнечной системы.

С точки зрения существ столь крупных, как мы, петли выглядят подобными точкам, потому что они такие крошечные. Расстояния (и времена) меньшие, чем размер петель, больше значения не имеют, они не несут никакого физического смысла. Благодаря теории струн ноль изгнан из Вселенной. Таких вещей, как нулевое расстояние или нулевое время, не существует. Это разрешает все проблемы бесконечности в квантовой механике.

Изгнание нуля также решает проблемы бесконечности в общей теории относительности. Если вы представляете себе черную дыру как струну, тела больше не проваливаются сквозь разрыв в ткани пространства-времени. Вместо этого петля-частица, приближаясь к петле – черной дыре, растягивается и касается черной дыры. Две петли вибрируют, разрываются и образуют одну петлю – несколько более массивную черную дыру. (Некоторые теоретики полагают, что акт слияния частицы с черной дырой порождает странные частицы, такие как тахионы: частицы с воображаемой массой, перемещающиеся обратно во времени со скоростью большей, чем скорость света. Такие частицы могут быть приемлемыми в некоторых версиях теории струн.)

Устранение нуля из Вселенной может казаться жестким шагом, однако со струнами гораздо легче иметь дело, чем с точками. Устранив ноль, теория струн сглаживает прерывистую, связанную с частицами природу квантовой теории и чинит прорехи, созданные черными дырами в общей теории относительности. Когда эти проблемы разрешаются, две теории перестают быть несовместимыми. Физики начали думать, что теория струн сможет объединить квантовую теорию и теорию относительности и приведет к возникновению квантовой теории гравитации – теории всего, которая объясняла бы каждый феномен во Вселенной. Впрочем, у теории струн существуют некоторые проблемы. Во-первых, чтобы работать, ей нужно десять измерений.

Для большинства людей при четырех измерениях – одно лишнее. Видеть три из них легко: влево-вправо, вперед-назад и вверх-вниз – это три измерения, в которых мы можем двигаться. Четвертое измерение появилось, когда Эйнштейн показал, что время сходно с этими тремя: мы постоянно движемся во времени, как автомобиль, разгоняющийся на шоссе. Согласно теории относительности, так же, как мы можем менять скорость перемещения вдоль шоссе, мы можем менять скорость, с которой перемещаемся сквозь время, – чем быстрее мы движемся в пространстве, тем больше внешние часы обгоняют наши собственные. Чтобы понять Вселенную Эйнштейна, мы должны принять идею о том, что время – четвертое измерение.

Четыре – это разумно, но десять? Мы можем учитывать показания в четырех измерениях, но что делать с остальными шестью? В соответствии с теорией струн они свернуты, как маленькие шарики, слишком миниатюрные, чтобы их увидеть. Когда вы берете лист бумаги, он представляется двумерным. Он имеет длину и ширину, но, по-видимому, не имеет никакой глубины. Тем не менее если вы возьмете лупу и посмотрите на край листа бумаги, вы начнете замечать, что капельку глубины он имеет. Вам нужен инструмент, чтобы это обнаружить, однако третье измерение присутствует, хотя и является слишком маленьким, чтобы его видеть при обычных условиях. То же самое верно и с теми шестью измерениями. В повседневной жизни они слишком малы, чтобы их видеть. Они слишком малы, чтобы мы могли их отследить даже с помощью самого мощного оборудования, которое смогли бы создать в ближайшем

будущем.

Что означают эти шесть добавочных измерений? На самом деле ничего. Они не измеряют ничего, к чему мы привычны: длину, ширину, толщину, время. Они просто математические конструкции, заставляющие математические операции в пределах теории струн проходить так, как они должны. Как и воображаемые числа, мы не можем их видеть и ощущать, хотя они необходимы для вычислений. Несмотря на то, что физически концепция представляется странной, ученых интересует предсказательная сила уравнений, а не их понятность, и шесть дополнительных измерений не представляют собой неразрешимой проблемы математически, хотя их выявление таковой оказаться могло бы. (Сегодня кажется, что десять – это мало. За последние несколько лет физики поняли, что многие соперничающие варианты теории струн в определенном смысле – одно и то же. Теперь ученые обнаруживают, что теории двойственны, как Понселе обнаружил взаимную двойственность прямых и точек. Физики полагают, что существует теория-чудовище, лежащая в основе всех конкурирующих теорий: так называемая М-теория, требующая одиннадцать измерений, а не десять.)

Струны (или их более обобщенные аналоги, *браны* – мембраны, поверхности в пространстве многих измерений) настолько малы, что рассмотреть их невозможно с помощью любого инструмента – по крайней мере, до тех пор, пока наша цивилизация не уйдет намного вперед. На субатомном уровне физики рассматривают частицы с помощью ускорителей, используя магнитные поля или другие средства, чтобы заставить частицы разгоняться до очень больших скоростей. Когда частицы сталкиваются друг с другом, они выбрасывают фрагменты. Коллайдеры (ускорители частиц) – это микроскопы, которыми можно пользоваться в субатомном мире, и чем больше энергии вкладывается в частицы, чем мощнее микроскоп, тем более мелкие объекты можно увидеть.

Большой адронный коллайдер, многомиллиардный проект, планировавшийся с начала 1990-х годов, – самый мощный когда-либо существовавший ускоритель частиц. Он состоит более чем из 10 000 магнитов, образующих петлю 54 мили в окружности – примерно той же величины, что кольцевая дорога вокруг Вашингтона. Однако даже его мощности недостаточно для того, чтобы увидеть струны или свернутые измерения – для этого понадобился бы ускоритель частиц примерно в 6 000 000 000 000 000 миль в окружности. Даже на скорости света частице потребовалось бы 1000 лет, чтобы завершить его облет.

В настоящее время невозможно представить себе инструмент, который дал бы ученым возможность напрямую наблюдать струны. Никто не смог придумать эксперимент, который дал бы физикам доказательство того, что черные дыры и частицы на самом деле струны. Это основное возражение против теории струн. Поскольку наука базируется на наблюдениях и экспериментах, некоторые критики утверждают, что теория струн – не наука, а философия. (Существует набор теорий, утверждающих, что некоторые из свернутых измерений могут быть размером в 10–19 сантиметров или даже больше. Это ввело бы их в область возможных экспериментов. Однако в настоящее время такие теории рассматриваются как не заслуживающие экспериментальной проверки – интересные идеи, но в лучшем случае очень спекулятивные.)

Ньютоновские законы движения и тяготения дали физикам объяснение того, как планеты и другие тела движутся во Вселенной. Когда бы ни бывала открыта новая комета, она давала дополнительную возможность проверки теории Ньютона. Однако некоторые проблемы оставались. Например, орбита Меркурия поворачивалась вокруг Солнца не совсем так, как предсказывал Ньютон, но в целом теории Ньютона при новых и новых проверках оправдывались.

Теории Эйнштейна исправили ошибки Ньютона. Например, они объяснили смещение

орбиты Меркурия. На основании этих теорий были также сделаны проверяемые предсказания того, как действует гравитация. Эддингтон наблюдал искривление света звезд во время солнечного затмения, что подтвердило одно из таких предсказаний. Теория струн, с другой стороны, очень успешно связывает несколько существующих теорий и предсказывает, как себя ведут черные дыры и частицы, однако ни одно из этих предсказаний нельзя проверить или наблюдать. Хотя теория струн математически последовательна и даже красива, она еще не наука³².

Час zero. Большой взрыв

Наблюдения Хаббла говорят о том, что было время – так называемый Большой взрыв, когда Вселенная была бесконечно малой и бесконечно плотной. При таких условиях все законы науки теряют смысл и не позволяют прогнозировать будущее.

Стивен Хокинг. «Краткая история времени: от Большого взрыва до черных дыр»

Вселенная родилась в ноль. Из пустоты, из ничего возник катаклизм – взрыв, который создал всю материю и энергию, из которых состоит Вселенная. Это событие – Большой взрыв – представлялось многим ученым и философам чудовищным. Прошло много времени, прежде чем астрофизики стали соглашаться с тем, что Вселенная конечна во времени, что она, в конце концов, имела начало.

Предрассудок насчет бесконечности Вселенной очень древен. Аристотель отвергал возникновение Вселенной из пустоты, потому что считал, что пустоты никогда не существовало. Однако это порождало парадокс. Если Вселенная не могла родиться из пустоты, тогда что-то должно было существовать до ее появления: Вселенная должна была существовать до того, как Вселенная родилась. Для Аристотеля единственный выход из этого тупика виделся в заключении о том, что Вселенная вечна. Она всегда существовала в прошлом и всегда будет существовать в будущем.

Западная цивилизация со временем должна была сделать выбор между Аристотелем и Библией, которая учит, что конечная Вселенная возникла из ничего, и содержит пророчества ее уничтожения. Хотя космос семитской Библии был поколеблен аристотелевским, идея вечной и неизменной Вселенной не была изгнана полностью, дожив даже до XX века. Она привела Эйнштейна к тому, что он называл величайшей ошибкой в своей карьере.

Для Эйнштейна общая теория относительности имела решающий недостаток. Она предсказывала конец Вселенной. Если верить уравнениям общей теории относительности, Вселенная нестабильна. Существовало всего два варианта, и оба неприятные.

Согласно одному, Вселенную ждет коллапс под действием ее собственной гравитации. По мере того как Вселенная будет становиться все меньше и меньше, она будет все более разогреваться. Она разгорится радиацией, которая истребит всякую жизнь и в конце концов

³² Да, математика может быть красива или уродлива. Как трудно объяснить, что делает музыкальное произведение или картину эстетически привлекательным, в равной мере трудно объяснить, что делает математическую теорему или физическую теорию красивой. Красивая теория должна быть простой, компактной, краткой. Она должна вызывать ощущение полноты и часто странной симметрии. Теории Эйнштейна особенно красивы, как и уравнения Максвелла. Для многих математиков уравнение Эйлера $e^{\pi i} + 1 = 0$ является образцом математической красоты, потому что это чрезвычайно простая компактная формула, связывающая все важные числа в математике совершенно неожиданным образом (прим. авт.).

уничтожит атомы, из которых состоит материя. Это была бы огненная смерть. Со временем Вселенная сожмется в имеющую нулевые измерения точку, подобную черной дыре, и исчезнет навсегда.

Другая возможность, если уж на то пошло, еще более мрачна. Вселенная будет расширяться до бесконечности. Галактики разойдутся все дальше друг от друга, и звездная материя, порождающая все энергетические реакции во Вселенной, будет делаться все более разреженной. Звезды выгорят, израсходовав все свое горючее, галактики сделаются все более темными, а потом холодными и безмолвными. Холодная мертвая материя звезд распадется, оставив после себя лишь слабую радиацию, которая равномерно распространится по Вселенной. Космос станет холодным супом гаснущего света.

Для Эйнштейна такие идеи были отвратительны. Как и Аристотель, он в душе считал Вселенную статичной, постоянной и вечной. Единственный выход он видел в том, чтобы «подкорректировать» свои уравнения общей теории относительности ради устранения неизбежного уничтожения. Он сделал это, добавив космогоническую константу – не открытую до сих пор силу, противостоящую гравитации. Давление этой космогонической константы уравновесило бы силу притяжения. Вместо коллапса Вселенную ожидало бы постоянное равновесие: она не сжималась бы и не расширялась. Постулирование такой загадочной силы было жестом отчаяния. «Я снова проделал кое-что с теорией гравитации, что грозит мне заключением в сумасшедший дом», – писал Эйнштейн, однако его так беспокоило неизбежное уничтожение Вселенной, что он был вынужден пойти на столь отчаянный шаг.

Эйнштейна не отправили в сумасшедший дом. Он предлагал и более странные вещи и оказывался прав. Впрочем, на этот раз удача ему изменила. Сами звезды разрушили представление Эйнштейна о статичном вечном космосе.

В 1900 году всей известной Вселенной был Млечный Путь. Астрономы не представляли себе, что есть что-то помимо нашего маленького пыльного звездного диска. Хотя они обнаружили светящиеся вращающиеся облака, не было особых оснований считать их чем-то иным, чем светящийся газ внутри нашей Галактики. В 1920-е годы все изменилось благодаря американскому астроному Эдвину Хабблу.

Особая разновидность звезд, названных переменными цефеидами, обладала свойством, позволившим Хабблу измерить расстояние до очень удаленных объектов.

Цефеиды пульсируют, делаясь то ярче, то тусклее. Эта пульсация вполне предсказуема, она строго зависит от того, сколько света они испускают. Цефеиды играют роль стандартных источников света, объектов, яркость которых известна. Они и стали ключевым инструментом для Хаббла. Они вели себя как прожектор на локомотиве.

Если вы смотрите на поезд, приближающийся к вам, вы заметите, что его прожектор делается ярче по мере приближения. Если вам известно, сколько света испускает прожектор (если он стандартный источник света), вы сможете сказать, насколько ярким он будет на каждом заданном расстоянии. Чем ближе поезд, тем ярче кажется его прожектор. Та же логика приложима и в обратном направлении: если вам известно, сколько света испускает прожектор, вы можете измерить его яркость в данный момент и вычислить, на каком расстоянии от вас находится поезд.

Хаббл именно это и проделал с цефеидами. Большинство звезд, которые он видел, удалены на десятки, сотни и тысячи световых лет от Земли. Однако когда он нашел цефеиду, мигающую сквозь одно из вращающихся облаков – туманность Андромеды, как его тогда называли, – он измерил световой поток и вычислил, что туманность удалена на миллион световых лет, далеко за пределы нашей Галактики. Туманность Андромеды оказалась не облаком светящегося газа, это было облако звезд настолько удаленных, что они выглядели как

туман, а не отдельные источники света. Другие вращающиеся галактики были еще более далекими. Сегодня астрономы подозревают, что Вселенная имеет в поперечнике 15 миллиардов световых лет и вся усеяна сгустками галактик.

Это было потрясающее открытие. Вселенная оказалась в миллионы раз больше, чем полагали раньше. Однако сколь бы потрясающим ни было это открытие, Хаббл в наибольшей мере знаменит не этим. Второе открытие Хаббла вдребезги разбило вечную Вселенную Эйнштейна.

Хаббл благодаря своим цефеидам измерял расстояния до разных галактик и скоро начал замечать пугающую зависимость: все галактики с огромной скоростью (в сотни миль в секунду) разлетаются прочь от нашего Млечного Пути. Галактики настолько далеки, что даже эти огромные скорости не так легко измерить.

Единственный способ определить скорость убегания Галактики – использовать доплеровский эффект, тот же принцип, который действует в лазерных винтовках. Вы могли заметить, что когда мимо вас мчится поезд, высота его гудка меняется. Когда поезд приближается, звук гудка бывает высоким, но когда поезд вас миновал, высота резко падает. Это происходит потому, что движение поезда сжимает звуковые волны впереди (делая их высокочастотными) и растягивает позади (в результате чего тон звука понижается) (*рис. 56*). Это и есть доплеровский эффект.

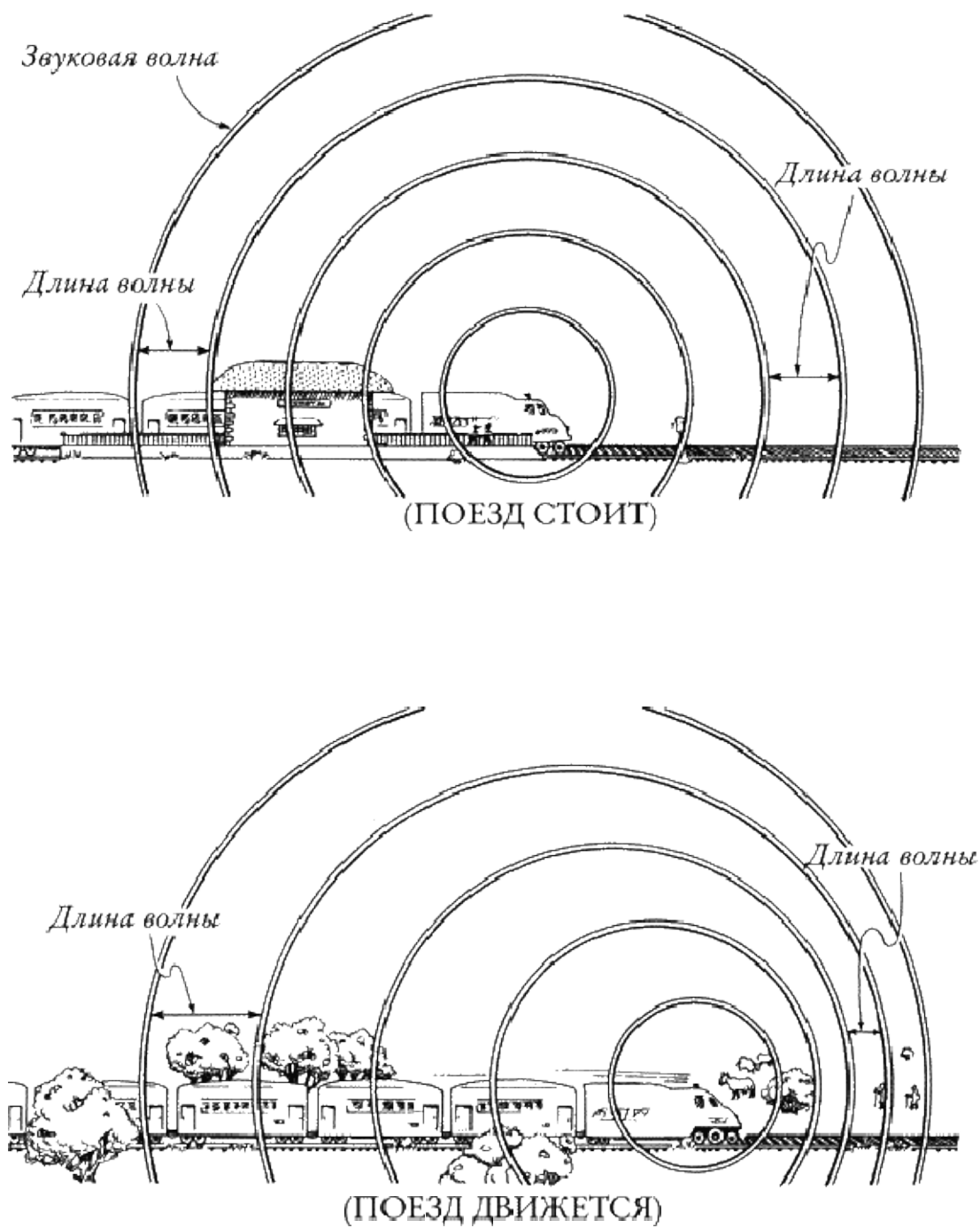


Рис. 56. Доплеровский эффект

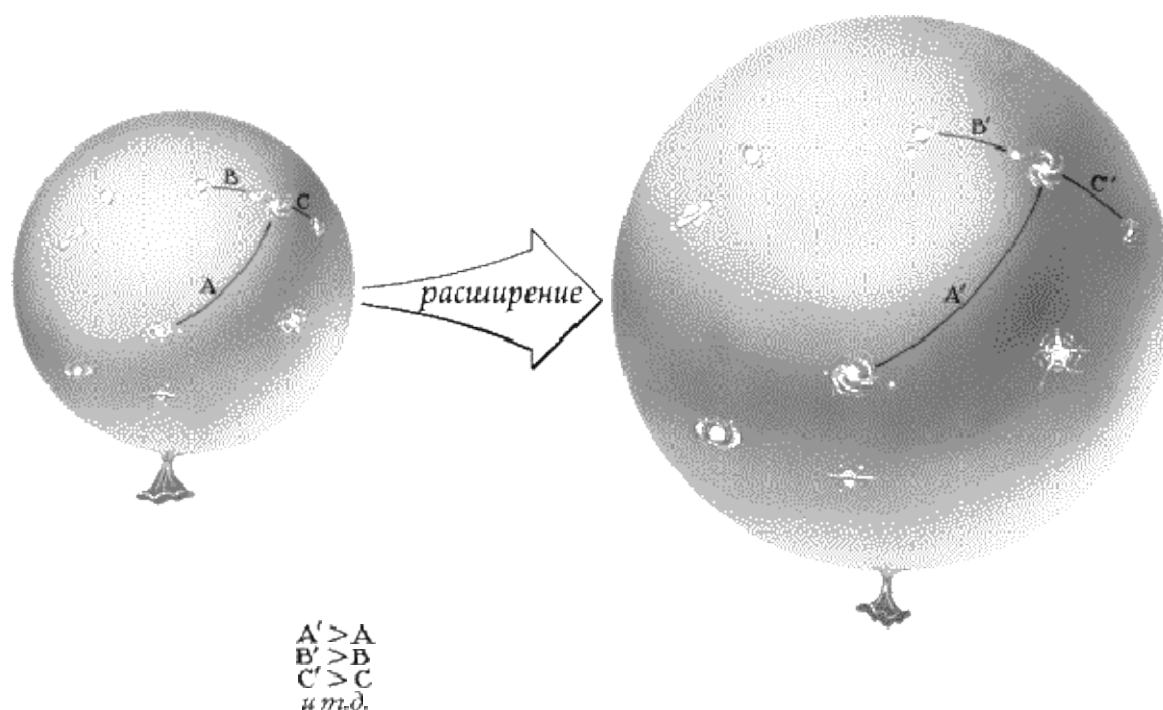


Рис. 57. *Расширяющаяся Вселенная*

В отношении света он действует тоже. Если звезда движется в направлении Земли, световые волны сжимаются, приобретают большую частоту, чем обычно, и смещаются к голубой части спектра – происходит так называемое голубое смещение. Если звезда удаляется, происходит нечто противоположное – красное смещение.

Полиция может определить, как быстро едет автомобиль, измерив изменение отраженного от автомобиля света – в виде радиоволн – при перемещении машины. Аналогичным способом – рассмотрев изменение спектра звезды – астроном вычисляет скорость движения звезды: к нам или от нас.

Хаббл объединил данные о расстоянии с данными доплеровского эффекта и получил нечто шокирующее. Не только галактики разбегаются от нас во всех направлениях, но и чем более удалена галактика, тем с большей скоростью она удаляется.

Как это может быть? Представьте себе надувной шар в горошек. Каждая горошинка – это галактика, а сам шар – материя пространства-времени. По мере надувания шара горошинки будут удаляться друг от друга. С точки зрения каждой горошинки, все остальные разбегаются от нее, и более дальние разбегаются быстрее, чем близкие (рис. 57). Вселенная, похоже, расширяется, как надуваемый шар. (Аналогия с шаром имеет один недостаток: в отличие от горошинок, которые увеличиваются в размерах по мере увеличения шара, галактики сохраняют свои размеры, удерживаемые собственной гравитацией.)

Время течет вперед, и Вселенная расширяется и расширяется. Если посмотреть на это с другой точки зрения, имея запись истории Вселенной и прокрутив эту запись обратно, мы увидели бы, как Вселенная сжимается и сжимается. В какой-то точке шар совсем сожмется, делаясь все меньше и меньше, и в конце концов исчезнет в точке – сингулярности начала времени и пространства. Это и есть первичный ноль, место рождения Вселенной, он и породил Большой взрыв, чудовищный взрыв, создавший космос. Именно из этой сингулярности возникли вся материя и энергия Вселенной, откуда произошли все галактики, звезды и планеты, которые когда-либо существовали или будут существовать. Вселенная имела начало примерно 15 миллиардов лет назад. С тех пор пространство расширялось. Надежда Эйнштейна на

устойчивую вечную Вселенную практически умерла.

Оставался единственный проблеск надежды, одна альтернатива Большому взрыву – теория стационарной Вселенной³³. Некоторые астрономы предположили, что существуют выбросы материи, а галактики движутся от них прочь, старея и умирая. Хотя отдельные галактики разбегаются и умирают, вся Вселенная как целое никогда не меняется. Она всегда сохраняет равновесие, постоянно себя восполняя. Вечная Вселенная Аристотеля все же выжила.

Некоторое время теории Большого взрыва и стационарной Вселенной существовали бок о бок. Это были альтернативы, которые астрономы выбирали в зависимости от своей философии. В середине 1960-х годов все изменилось. Теория стационарной Вселенной была убита тем, что ученые ошибочно приняли за голубиный помет.

В 1905 году несколько астрофизиков из Принстонского университета занимались расчетами того, что могло произойти сразу после Большого взрыва. Вся Вселенная должна была быть невероятно горячей и плотной, она должна была сиять ярким светом. Свет не должен был исчезнуть при расширении надувного шара – Вселенной, он должен был растянуться, как растягивалось пространство-время. Проведя еще несколько расчетов, астрофизики из Принстона поняли, что этот свет должен занимать микроволновую часть спектра и исходить со всех направлений. Это космическое реликтовое излучение было бы следами Большого взрыва. Оно дало бы физикам первое прямое свидетельство того, что теория Большого взрыва верна, а теория стационарной Вселенной ошибочна.

Ученым из Принстона не пришлось долго ждать подтверждения своих предсказаний. Двое инженеров из расположенных неподалеку лабораторий Белла в Марри Хилл, Нью Джерси, испытывали чувствительное оборудование для выявления микроволнового излучения. Несмотря на все старания, им не удавалось заставить оборудование работать как следует. Им мешало шипение, похожее на статические помехи в радиопрограммах. От него никак не удавалось избавиться. Сначала инженеры подумали, что виноваты голуби, гадящие на антенну, но после изгнания птиц и очистки антенны от помета шипение сохранилось. Они перепробовали все, что только могли придумать, чтобы избавиться от шума, но ничего не помогало. Когда же инженеры услышали о работах группы из Принстона, они поняли, что обнаружили остаточное космическое излучение. Голубиный помет был не виноват. Они слышали голос Большого взрыва, рассеявшийся и искаженный до шепота. (За свое открытие инженеры Арно Пензиас и Роберт Вильсон получили Нобелевскую премию. Физики из Принстона, Боб Дикке и П. Дж. Э. «Джим» Пибблс, не получили ничего, что несправедливо с точки зрения многих ученых. Нобелевский комитет склонен награждать трудоемкие тщательные эксперименты, а не важные теории.)

Большой взрыв удалось выследить, миф о стационарной Вселенной умер. Как ни непривлекательна была идея конечности Вселенной, физики постепенно признали Большой взрыв и согласились с тем, что Вселенная имела начало. Впрочем, проблемы с теорией оставались. Во-первых, Вселенная несколько комковата. Плотные скопления галактик разделены огромной пустотой. В то же время Вселенная выглядит более или менее одинаковой во всех направлениях, так что материя не образует одного огромного шара. Если Вселенная возникла из сингулярности, по всей вероятности, энергия от Большого взрыва должна была бы заполнить весь надувной шар довольно равномерно или сконцентрироваться в одном большом комке. Шарик окрасился бы равномерно или имел одно большое пятно, а не приобрел окраски в

³³ Речь идет о стационарной Вселенной без сохранения материи: не просто о «выбросах материи», а о том, что она постоянно рождается из ничего.

горошек. Что-то должно было быть причиной такой как раз правильной комковатости. Еще более тревожил вопрос о том, откуда возникла сингулярность, из которой возник Большой взрыв. Ноль хранит этот секрет.

Нулевой характер вакуума может объяснять комковатость Вселенной. Поскольку повсюду во Вселенной вакуум кипит квантовой пеной виртуальных частиц, ткань Вселенной заполнена бесконечной энергией нулевых колебаний. При правильных условиях эта энергия способна управлять поведением объектов, на начальных этапах существования Вселенной она могла отталкивать их друг от друга.

В 1980-е годы физики предположили, что энергия нулевых колебаний при раннем существовании Вселенной могла быть большей, чем она есть сейчас. Эта дополнительная энергия должна распространяться во всех направлениях, с огромной скоростью растягивая ткань пространства-времени. Она раздувала бы шар чудовищным рывком, с силой выравнивая комковатость Вселенной, как поток воздуха разравнивает морщинки на воздушном шаре. Это объясняло бы, почему Вселенная относительно равномерна. Однако вакуум нескольких первых моментов существования Вселенной – ложный вакуум, в нем энергия нулевых колебаний неестественно велика. Этот высокий уровень делает энергию нулевых колебаний внутренне нестабильной, и делает очень быстро – меньше чем за миллионную долю миллионной доли секунды: ложный вакуум коллапсирует, превращаясь в истинный вакуум с его повседневным уровнем энергии нулевых колебаний, который мы наблюдаем в нашей Вселенной. Это похоже на чайник с водой, который мгновенно нагрет до огромной температуры. Маленькие пузырьки «истинного» вакуума сформировались бы и расширились со скоростью света. Наша наблюдаемая Вселенная находится в одном из таких пузырьков или в нескольких соединившихся между собой. Асимметрия Вселенной может объясняться асимметричной природой этих слипшихся расширяющихся пузырьков. В соответствии с теорией расширения именно энергия ненулевых колебаний создала звезды и галактики.

Ноль также может хранить секрет того, что создало космос. Как пустота вакуума и энергия нулевых колебаний порождают частицы, так они могли породить и вселенные. Бульканье квантовой пены, спонтанное рождение и смерть частиц и могут объяснять возникновение космоса. Возможно, Вселенная – это просто квантовая флуктуация на высоком уровне, огромная сингулярность, частица, порожденная наивысшим вакуумом. Такое космическое яйцо взрывалось бы, расширялось и создавало пространство-время нашей Вселенной. Возможно, наша Вселенная – лишь одна из многих флуктуаций. Некоторые физики считают, что сингулярности в центре черных дыр – это окна в изначальную квантовую пену до Большого взрыва и что кипение пены в центре черной дыры, где время и пространство не имеют смысла, постоянно создает бесчисленные новые вселенные, которые рождаются, расширяются и создают свои собственные звезды и галактики. Ноль может хранить секрет нашего существования – и существования бесконечного множества других вселенных.

Ноль столь могуществен потому, что он вносит беспорядок в законы физики. Именно в час zero Большого взрыва и на Граунд-Зиро черной дыры математические уравнения, описывающие наш мир, перестают иметь смысл. Однако ноль нельзя игнорировать. Он не только хранит секрет нашего существования, но и несет ответственность за конец Вселенной.

Глава ∞

Конечная победа ноля

Последнее время

*Так вот и кончился мир,
Только не взрывом, а вздрогом.*

Т.С. Элиот. «Полые люди»³⁴

Пока одни физики пытаются истребить ноль в своих уравнениях, другие показывают, что ноль может оказаться тем, кто смеется последним. Хотя ученые могут никогда не раскрыть секрет рождения Вселенной, они на пороге понимания того, как она умрет. Окончательная судьба космоса зависит от ноля.

Эйнштейновские уравнения гравитации не допускают существования статичной, неменяющейся Вселенной. Впрочем, они не исключают нескольких вариантов развития событий, которые зависят от массы космоса. В первом случае надувной шар пространства-времени может расширяться до бесконечности, становясь все больше и больше. Звезды и галактики одна за другой будут гаснуть. Вселенная станет холодной и безжизненной. Впрочем, даже если массы галактик, скоплений галактик, невидимой темной материи будет достаточно, изначального толчка Большого взрыва не хватит для того, чтобы позволить шару расширяться до бесконечности. Галактики будут притягивать друг друга, стягивать ткань пространства-времени, и шар начнет сжиматься. Сжатие будет происходить все быстрее и быстрее, Вселенная становиться все горячее и горячее, наконец все закончится противоположностью Большого взрыва: Большим сжатием. Какая судьба нас ждет – Большое сжатие или Бесконечное расширение? Ответ легко увидеть.

Когда астрономы наблюдают далекую галактику, они смотрят назад во времени. Ближние галактики могут быть удалены на миллионы световых лет. Лучу света, покинувшему галактику сейчас, потребуется миллион лет, чтобы добраться до Земли. Свет который мы видим сегодня, был излучен миллион лет назад. Чем более удалены объекты, наблюдаемые астрономами, тем дальше в прошлое заглядывают ученые.

Судьба нашей Вселенной зависит от того, насколько хорошо расширяется шар пространства-времени. Если расширение быстро замедляется, это хороший знак: энергия Большого взрыва почти истощилась, и наша Вселенная будет двигаться к Большому сжатию. С другой стороны, если расширение Вселенной не особенно замедляется, энергия Большого взрыва могла дать ткани пространства-времени достаточный толчок, чтобы позволить ему расширяться бесконечно.

Астрономы начали измерять изменения в расширении Вселенной. Определенный тип сверхновых (взрывающихся) звезд, названный типом 1А, служит объектом стандартной светимости, как цефеиды Хаббла. Сверхновые 1А взрываются примерно одинаково и имеют одинаковую яркость. Однако в отличие от тусклых цефеид Хаббла сверхновые видны на расстоянии в половину диаметра Вселенной.

В конце 1997 года астрономы объявили, что использовали сверхновые для измерения расстояния до некоторых очень тусклых древних галактик. Расстояние до галактики говорит о ее возрасте, а ее доплеровское смещение говорит о ее скорости. Сравнивая данные о том, как быстро галактики удалялись в разные эры прошлого, астрономы получили возможность определить, как быстро расширяется пространство-время. Полученный ими ответ был странным.

³⁴ Элиот Т. С. Полые люди / Пер. В. Топорова. СПб.: Изд. дом «Кристалл», 2000.

Расширение Вселенной не замедляется, возможно, оно даже ускоряется. Данные, полученные благодаря сверхновым, говорят о том, что Вселенная становится все больше и больше и расширяется все быстрее и быстрее. Если так, то шанс Большого сжатия невелик, поскольку что-то противодействует силе тяготения. Физики снова заговорили о космологической константе – загадочном нечто, добавленном Эйнштейном к своим уравнениям, чтобы уравновесить влияние гравитации. Величайшая ошибка Эйнштейна, возможно, вовсе не ошибка.

Эта таинственная сила может быть силой вакуума. Крошечные частицы, пронизывающие пространство-время, оказывают легкое направленное наружу давление, незаметно растягивая ткань пространства-времени. За миллиарды лет это растяжение накопилось, и в результате Вселенная расширяется все быстрее и быстрее. Участь нашей Вселенной – не Большое сжатие, а вечное расширение и остывание из-за энергии нулевых колебаний и ноля в уравнениях квантовой теории, населяющих вакуум бесконечным множеством частиц.

Астрономы все еще проявляют сдержанность. Данные наблюдений за сверхновыми являются предварительными, но они делаются более основательными. Другие исследования, анализирующие выбросы газа или число гравитационных линз в поле зрения, подтверждают эти данные и предположение, что космос будет расширяться вечно. Вселенную ожидает тепловая смерть.

Ответ на вопрос о будущем Вселенной – лед, а не пламя, благодаря силе ноля.

В бесконечность и за ее пределы

Однако если нам удастся создать полную теорию, со временем она станет понятной каждому, а не только немногим ученым. Тогда все мы – философы, ученые и обычные люди – сможем принять участие в обсуждении того, почему мы и Вселенная существуем. Если мы найдем ответ на этот вопрос, это будет окончательным триумфом человеческого разума, потому что мы узнаем замысел Бога.

Стивен Хокинг

За всеми большими загадками физики кроется ноль. Бесконечная плотность черной дыры порождена делением на ноль. Возникновение Вселенной из ничего вследствие Большого взрыва – результат деления на ноль. Бесконечная энергия вакуума – следствие деления на ноль. Однако деление на ноль разрушает ткань математики и логические схемы и грозит уничтожением самого базиса науки.

Во времена Пифагора, до наступления эры ноля, царила чистая логика. Вселенная была упорядоченной и предсказуемой. Она была построена на рациональных числах и предполагала существование Бога. Внушающие тревогу парадоксы Зенона были объяснены благодаря изгнанию бесконечности и ноля из царства чисел.

С началом научной революции чисто логический мир уступил место эмпирическому, основанному на наблюдениях, а не на философии. Ньютон, чтобы объяснить законы Вселенной, должен был игнорировать нелогичность в дифференциальном исчислении – нелогичность, порожденную делением на ноль.

Как только математики и физики сумели преодолеть проблемы, связанные с делением на ноль в дифференциальном и интегральном исчислении, и ввести его в рамки логики, ноль вернулся в уравнения квантовой механики и общей теории относительности и снова замарал науку бесконечностью. Перед нолями Вселенной логика пасует. Квантовая теория и теория

относительности распадаются на части. Для решения проблемы ученые стараются снова изгнать ноль и унифицировать правила, которым подчиняется космос.

Если им это удастся, они поймут законы Вселенной. Мы познаем физические закономерности, управляющие всем до границ пространства-времени, от возникновения космоса до его конца. Люди поймут космический каприз, вызвавший Большой взрыв. Мы поймем замысел Бога. Однако на этот раз победить ноль может оказаться не так легко.

Теории, объединяющие квантовую теорию и общую теорию относительности, описывающие центр черной дыры и сингулярность Большого взрыва, настолько далеки от эксперимента, что может оказаться невозможным выяснить, какая из них правильна, а какая – нет. Доводы сторонников теории струн и космологов могут быть математически безупречными, но в то же время столь же бесполезными, как философия Пифагора. Математические теории могут быть красивыми, последовательными и как будто объясняющими природу Вселенной – и быть совершенно ошибочными.

Все, что известно ученым, – это что космос родился из ничего и вернется в ничто, из которого возник.

Вселенная начинается с нуля и кончается нулем.

Приложение А

Зверь, овощ или министр?

Пусть числа a и b оба будут равны 1. Поскольку они равны между собой,

$$b^2 = ab \dots\dots\dots (1).$$

Поскольку a равно самому себе, очевидно, что

$$a^2 = a^2 \dots\dots\dots (2).$$

Вычтем уравнение (1) из уравнения (2). Это дает

$$a^2 - b^2 = a^2 - ab \dots\dots\dots (3).$$

Мы можем преобразовать обе части уравнения:

$$a^2 - ab = a(a - b); a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Тут нет ничего сомнительного. Эти выкладки совершенно верны. Подставьте в них числа и убедитесь сами. Подставив эти значения в уравнение (3), получаем:

$$(a + b)(a - b) = a(a - b) \dots\dots\dots (4).$$

Пока все хорошо. Теперь разделим обе части равенства на $(a - b)$ и получим

$$a + b = a \dots\dots\dots (5).$$

Вычтем из обеих частей a и получим

$$b = 0 \dots\dots\dots (6).$$

Однако в самом начале этого рассуждения мы задали $b = 1$, и это значит, что

$$1 = 0 \dots\dots\dots (7).$$

Это важный результат. Рассуждаем дальше. Нам известно, что Уинстон Черчилль имел одну голову. Но, согласно равенству (7), один равен нулю, значит, Черчилль головы не имел. У него не было набора листовенных побегов, значит, он имел один набор листовенных побегов. Далее умножим обе части равенства (7) на 2 и получим

$$2 = 0 \dots\dots\dots (8).$$

У Черчилля было две ноги, следовательно, он не имел ног. У Черчилля было две руки, следовательно, он не имел рук. Теперь умножим равенство (7) на размер талии Черчилля в дюймах. Значит,

размер талии Черчилля = 0 (9).

Это значит, что Черчилль сужался до нуля. А теперь посмотрим, какого цвета был Уинстон Черчилль? Возьмем любой световой луч, отраженный от него, и выберем фотон. Умножим равенство (7) на длину волны и получим:

длина волны фотона Черчилля = 0 (10).

Однако умножив равенство (7) на 640 нанометров, мы видим, что

$640 = 0$ (11).

Соединив равенства (10) и (11), мы получим, что длина волны фотона Черчилля = 640 нанометров.

Это означает, что данный фотон, как и любой другой, исходящий от мистера Черчилля, – оранжевый. Таким образом, Уинстон Черчилль имеет ярко-оранжевый цвет.

Суммируя полученные результаты, можно сказать, что мы математически доказали, что Уинстон Черчилль не имеет рук и ног, вместо головы у него пучок зелени, он сужается до точки и имеет оранжевый цвет. Ясно, что Уинстон Черчилль – морковка. (Есть и более простой способ доказать это. Добавление 1 к обеим частям уравнения (7) дает равенство $2 = 1$. Уинстон Черчилль и морковка – разные вещи, поэтому они – одно и то же. Однако такое заключение менее удовлетворительно.)

Что не так в этом доказательстве? Только один шаг имеет порок – тот, благодаря которому мы переходим от уравнения (4) к уравнению (5). Мы делим на $(a - b)$. Однако осторожно! Поскольку a и b равны 1, $a - b = 1 - 1 = 0$. Мы делили на ноль и в результате получили смешное равенство $1 = 0$. Отсюда следует, что мы можем доказать любое утверждение, независимо от того, верно оно или ложно. Вся система математики развалилась.

Неосмотрительное использование нуля обладает властью уничтожить логику.

Приложение В Золотое сечение

Разделите отрезок прямой на две части, так, чтобы отношение меньшей части к большей было бы равно отношению большей части ко всему отрезку. Для простоты будем считать, что меньшая часть имеет в длину 1 фут, а большая – x футов. Очевидно, что длина всего отрезка в этом случае $x + 1$. Придав отношению алгебраический вид, получим, что отношение меньшей части к большей равно $1/x$, а отношение большей части ко всему отрезку – $x/(1+x)$.

Поскольку отношение меньшей части к большей равно отношению большей части к целому отрезку, мы можем приравнять отношения друг другу, что дает уравнение:

$$x/(1+x) = 1/x.$$

Мы стремимся решить это уравнение в отношении x , что и есть золотое сечение. Первый шаг – умножить обе части уравнения на x , что дает

$$x^2/(1+x) = 1.$$

Умножив потом обе части на $(1+x)$, получаем

$$x^2 = 1+x.$$

Вычтя $1+x$ из обеих частей уравнения, получаем

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Теперь можно решить квадратное уравнение:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}.$$

Мы имеем два решения, однако только первое из них, примерно равное 1,618, является положительным числом, только оно имело смысл для греков. Таким образом, золотое сечение

приблизительно равно 1,618.

Приложение С

Современное определение производной

В настоящее время понятие производной опирается на надежный логический *базис*, поскольку мы определяем ее в терминах пределов. Формальное определение производной от функции $f(x)$ в точке x_0 , обозначаемой как $f'(x)$, таково:

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$$

Чтобы увидеть, как это помогает избавиться от грязной уловки Ньютона, рассмотрим ту функцию, которая использовалась для демонстрации флюксий Ньютона: $f'(x) = x^2 + x + 1$.

Производная этой функции равна

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2\varepsilon x + \varepsilon^2 + x + \varepsilon + 1) - (x^2 + x + 1)}{\varepsilon}$$

Теперь x^2 взаимно уничтожается с $-x^2$, x аннигилирует с $-x$, а 1 с -1 . Остается

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(2\varepsilon x + \varepsilon + \varepsilon^2)}{\varepsilon}$$

Разделив на ε , мы помним, что ε всегда отлично от 0, потому что мы еще не вычислили предел. Получаем

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2x + 1 + \varepsilon)$$

Теперь мы находим предел и позволяем ε приблизиться к 0. Получаем

$$f'(x) = 2x + 1 + 0 = 2x + 1$$

Это и есть ответ, который мы ищем. Всего лишь небольшой сдвиг в мышлении, но он и составляет всю разницу.

Приложение D

Кантор пересчитывает рациональные числа

Чтобы показать, что рациональных чисел столько же, сколько натуральных, Кантор должен был всего лишь предложить разумный способ «рассадки». Именно это он и проделал.

Как вы можете вспомнить, рациональные числа – это набор чисел, которые могут быть выражены как a/b , где a и b – целые числа (при b , конечно, отличном от нуля). Для начала рассмотрим положительные рациональные числа.

Представьте себе числовую решетку – две числовые оси, пересекающиеся в нулевой точке, совсем как декартовы координаты. Поставим ноль в начало и любой другой точке решетки соотнесем рациональное число x/y , где x – координата точки по оси X , а y – координата по оси Y . Поскольку числовые оси уходят в бесконечность, каждое положительное сочетание x и y имеет точку на решетке (рис. 58).

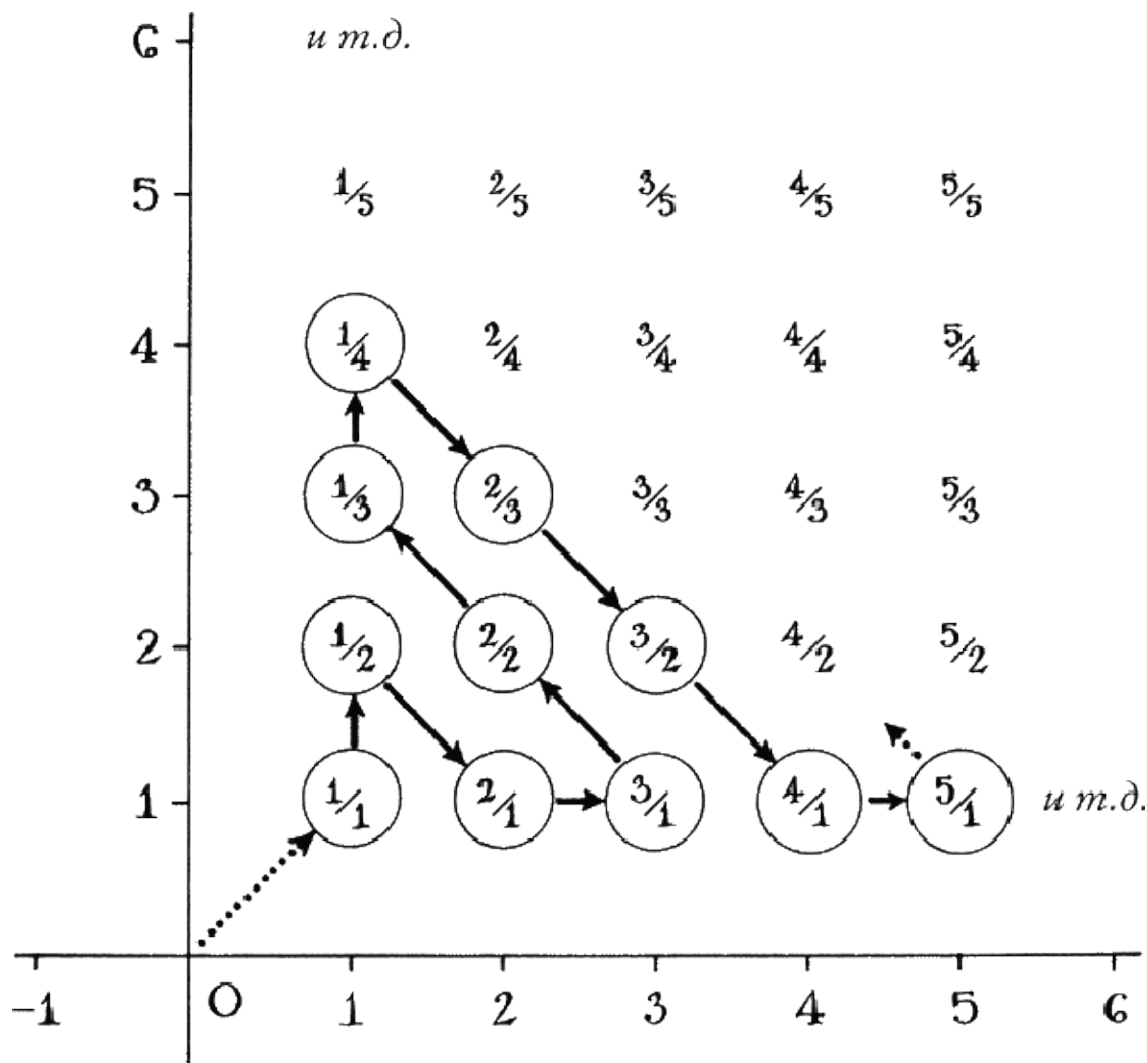


Рис. 58. Нумерация рациональных чисел

Теперь давайте составим схему рассадки положительных рациональных чисел. В качестве места 1 начнем с точки 0 на решетке. Затем перейдем к точке $1/1$ – это место 2, затем к точке $1/2$ – это место 3, затем – к $2/1$ (что, конечно, то же самое, что число 2) – это место 4, затем к $3/1$ – это место 5. Мы можем путешествовать туда и сюда по решетке, пересчитывая по дороге числа. Это дает такую схему рассадки (место – рациональное число):

- 1..... 0
- 2..... 1
- 3..... $1/2$
- 4..... 2
- 5..... 3
- 6..... 1
- 7..... $1/3$
- 8..... $1/4$
- 9..... $2/3$

И так далее, и так далее.

Со временем все числа получают места, некоторые – даже два. Удалить дубликаты легко – просто пропустить их при составлении схемы.

Следующий шаг – удвоить список, добавив отрицательные после соответствующих положительных рациональных чисел. Это даст нам схему рассадки:

Место – рациональное число

1 0

2 1

3 -1

4 $1/2$

5 $-1/2$

6 2

7 -2

8 3

9 -3

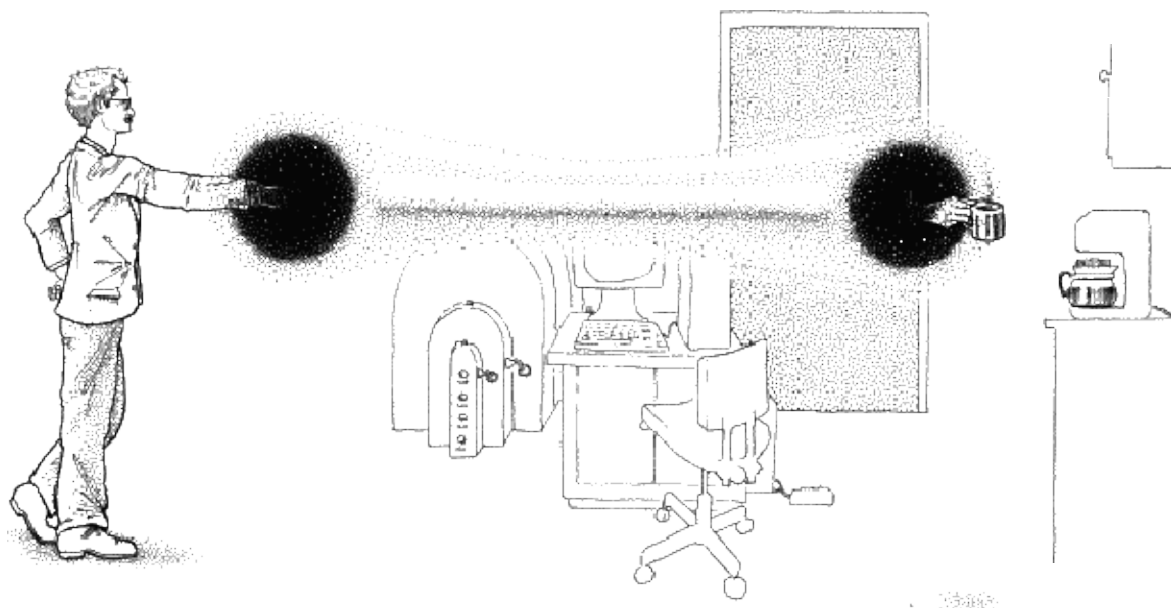
И так далее, и так далее.

Теперь все рациональные числа – положительные, отрицательные и ноль – имеют места. Поскольку никто не остался стоять и все места заняты, рациональных чисел столько же, сколько счетных.

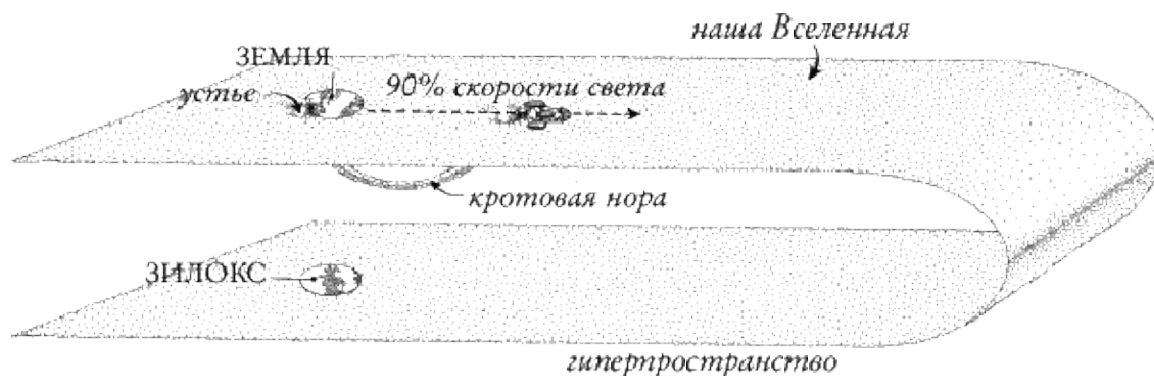
Приложение Е

Сделайте собственную машину времени для кротовой норы

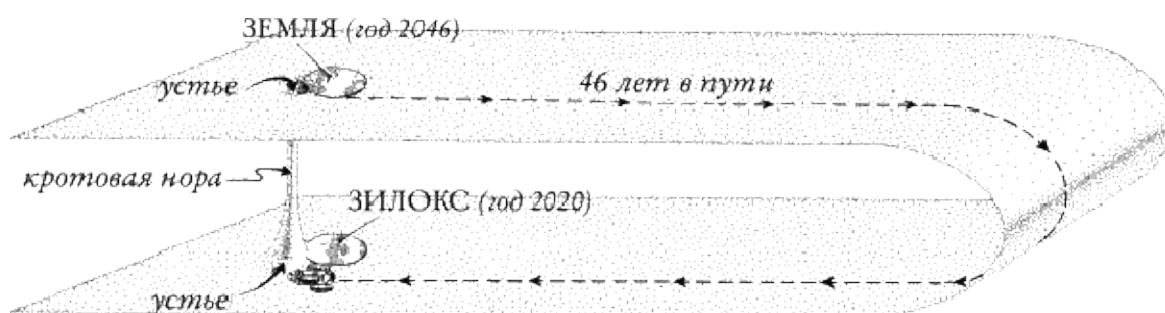
Это легко – просто следуйте этим несложным инструкциям.



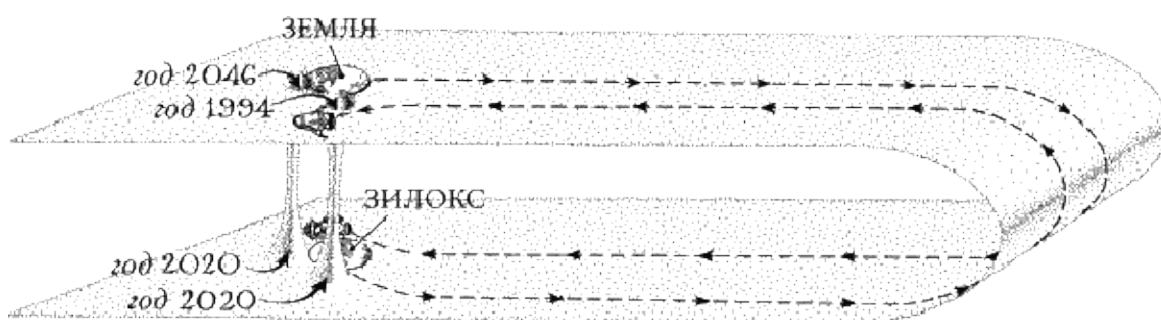
Шаг 1. Создайте небольшую кротовую нору. Оба ее конца будут в одной и той же точке времени.



Шаг 2. Прикрепите один конец кротовой норы к чему-нибудь очень тяжелому, а другой — к космическому кораблю, двигающемуся с 90% скорости света. Каждый год на корабле эквивалентен 2,3 года на Земле, часы на обоих концах кротовой норы будут идти с разной скоростью.



Шаг 3. Подождите немного. Через 46 лет по земному времени направьте кротовую нору к дружественной планете. Путешествие по кротовой норе приведет вас из 2046 года на Земле в 2020 год на Зилоксе или наоборот.



Шаг 4. Если вы достаточно сообразительны, вы могли начать планировать эту миссию заранее. Вы могли отправить на Зилокс послание задолго до того, как отправились в путь, организовав полет корабля с Зилокса навстречу, начавшийся в 1974 году (по летоисчислению Зилокса). Тогда в 2020 году по времени Зилокса другая кротовая нора могла бы переправить вас на Землю в 1994 год (по земному времени). Если вы будете пользоваться обеими кротовыми норами, то сможете перепрыгнуть из 2046 года (по Земле) в 2020-й (по Зилоксу) и далее в 1994-й (по Земле): вы вернетесь обратно во времени более чем на полстолетия!