Свешников А.Г.
Альшин А.Б.
Корпусов М.О.
Плетнер Ю.Д.

Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 517.95
ББК 22.311
Л 59

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 06-01-14022д, 06-01-02008эд

Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д. **Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 736 с. — ISBN 978-5-9221-0779-2.

Рассматриваются проблемы глобальной и локальной разрешимости, как в классическом, так и в сильном и слабом обобщенном смыслах, широких классов задач Коши и начально-краевых задач для линейных и нелинейных уравнений в частных производных высоких порядков, включая псевдопараболические уравнения и уравнения соболевского типа. В случае локальной разрешимости для ряда классов задач получены двусторонние оценки времени разрушения решений. Помимо аналитических методов предложены и реализованы численные методы исследования свойств решений конкретных задач.

Книга адресована специалистам в области дифференциальных уравнений и математической физики, а также аспирантам и студентам старших курсов соответствующих специальностей.

ISBN 978-5-9221-0779-2

© ФИЗМАТЛИТ, 2007
© А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер, 2007

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 9
Введение 10
Список обозначений 21

Часть I. Линейные уравнения

Глава 1. **Модельные линейные уравнения соболевского типа высокого порядка** 26
§ 1. Математические модели квазистационарных электромагнитных волн в анизотропных неметаллических средах с дисперсией 26
§ 2. Холодная плазма во внешнем магнитном поле 30
§ 3. Двухтемпературная плазма во внешнем магнитном поле 35
§ 4. Спиновые волны в магнетиках во внешнем магнитном поле 41

Глава 2. **Двумерные уравнения соболевского типа и новые классы обобщенных аналитических функций** 51
§ 1. О новых классах обобщенных аналитических функций 51
1.1. Вспомогательные результаты (52). 1.2. Двумерные уравнения соболевского типа. Обобщенная система Коши–Римана (56). 1.3. Псевдоаналитические функции. Формула Коши (58). 1.4. Существование производных любого порядка у псевдоаналитических функций. Обобщенная теорема Лиувилля (66). 1.5. Представление псевдоаналитических функций обобщенными рядами Тейлора и Лорана (67). 1.6. Решения двумерных аналогов уравнения Соболева (69). 1.7. Некоторые приложения (71).
§ 2. Новые классы обобщенных аналитических функций. Случай переменных коэффициентов 77
2.1. Интегральные операторы Вольтерра (78). 2.2. Двумерные операторы соболевского типа с переменными коэффициентами (78). 2.3. Псевдоаналитические функции (79). 2.4. Одно приложение (81).

Часть II. Нелинейные уравнения

Глава 3. **Модельные нелинейные уравнения псевдопараболического типа** 84

§ 1. Математические модели квазистационарных процессов в кристаллических полупроводниках 84

§ 2. Модельные уравнения псевдопараболического типа 91
2.1. Нелинейные волны типа волн Россби или дрейфовых волн в плазме и соответствующие диссипативные уравнения (92). 2.2. Нелинейные волны типа Осколкова–Бенджамена–Бона–Махони (94). 2.3. Модели анизотропных полупроводников (98). 2.4. Нелинейные сингулярные уравнения соболевского типа (102). 2.5. Псевдопараболические уравнения с нелинейным оператором при производной во времени (103). 2.6. Нелинейные нелокальные уравнения (104). 2.7. Краевые задачи для эллиптических уравнений с граничными условиями псевдопараболического типа (111).

§ 3. Разрушение решений — пробой полупроводников. 113

§ 4. Возникновение и распространение электрических доменов в полупроводниках 122

§ 5. Математические модели квазистационарных процессов в кристаллических электромагнитных средах с пространственной дисперсией 126

§ 6. Модельные уравнения псевдопараболического типа в электрических средах с пространственной дисперсией 130

§ 7. Модельные уравнения псевдопараболического типа в магнитных средах с пространственной дисперсией 132

Глава 4. **Разрушение решений класса сильно нелинейных псевдопараболических уравнений с источниками и уравнений с нелинейной диссипацией** 135

§ 1. Постановка задач 135

§ 2. Первоначальные определения и условия 136

§ 3. Однозначная разрешимость задачи (1.1) в слабом обобщенном смысле и разрушение ее решения. 140

§ 4. Однозначная разрешимость задачи (1.1) в сильном обобщенном смысле и разрушение ее решения. 167

§ 5. Однозначная разрешимость задачи (1.2) в слабом обобщенном смысле и оценки времени и скорости разрушения решения 176

§ 6. Локальная однозначная разрешимость задачи (1.2) в сильном обобщенном смысле и оценки времени и скорости разрушения решения в случае $\mathbb{B} \equiv 0$ 192

§ 7. Примеры 198

§ 8. Об одной начально-краевой задаче для нелинейного уравнения с двойной нелинейностью вида (1.1). 206
8.1. Локальная разрешимость в слабом обобщенном смысле задачи (8.7)–(8.9) (207). 8.2. Разрушение решения задачи (223).

§ 9. Об одной задаче для сильно нелинейного уравнения с подчиненной нелинейностью вида (1.2) 229
9.1. Однозначная слабая разрешимость задачи (9.7) (230). 9.2. Разрешимость в любом конечном цилиндре и разрушение за конечное время (242). 9.3. Скорость разрушения решения (249).

§ 10. Об одной задаче для полулинейного уравнения вида (1.2) 253
10.1. Разрушение классического решения задачи (253).

§ 11. О достаточных условиях разрушения обобщенного уравнения Буссинеска с источниками и нелинейной диссипацией 263
11.1. Локальная разрешимость сильного обобщенного решения задачи (263). 11.2. Разрушение решения задачи (266).

§ 12. О достаточном условии разрушения решения начально-краевой задачи для сильно нелинейного уравнения псевдопараболического типа 269
12.1. Локальная разрешимость задачи в сильном обобщенном смысле (269). 12.2. Разрушение сильного обобщенного решения задачи (12.1)–(12.2) и разрешимость в любом конечном цилиндре (277). 12.3. Физическая интерпретация (281).

Глава 5. **Разрушение решений сильно нелинейных волновых псевдопараболических уравнений или уравнений с линейной диссипацией** 282

§ 1. Постановка задач 282

§ 2. Первоначальные определения и условия 284

§ 3. Однозначная разрешимость задачи (1.1) в слабом обобщенном смысле и разрушение ее решения. 285

§ 4. Однозначная разрешимость задачи (1.1) в сильном обобщенном смысле и разрушение ее решения. 309

§ 5. Однозначная разрешимость задачи (1.2) в слабом обобщенном смысле и разрушение ее решения. 319

§ 6. Однозначная разрешимость задачи (1.2) в сильном обобщенном смысле и разрушение ее решения. 337

§ 7. Примеры 342

§ 8. О некоторых начально-краевых задачах для квазилинейных волновых уравнений вида (1.2) 351
8.1. Локальная разрешимость в сильном обобщенном смысле задач (8.1)–(8.3) (352). 8.2. Разрушение решений задач (358). 8.3. Опрокидывание ослабленного решения задачи (8.1) (365).

§ 9. Об одной начально-краевой задаче для сильно нелинейного уравнения вида (1.1) 372
9.1. Однозначная разрешимость задачи в слабом смысле (373). 9.2. Разрушение решения и глобальная разрешимость задачи (379).

§ 10. О разрушении решений одного класса квазилинейных волновых диссипативных уравнений псевдопараболического типа с источниками 384
10.1. Однозначная локальная разрешимость задачи в сильном смысле и разрушение ее решения (384). 10.2. Примеры (390).

§ 11. О разрушении решения уравнения Осколкова–Бенджамена–Бона–Махони–Бюргерса с кубическим источником 392
11.1. Однозначная локальная разрешимость задачи (393). 11.2. Глобальная разрешимость и разрушение решения задачи (395). 11.3. Физическая интерпретация полученных результатов(399).

§ 12. Об опрокидывании решения уравнения Осколкова–Бенджамена–Бона–Махони–Бюргерса с псевдолапласианом 399
12.1. Однозначная локальная разрешимость задачи (400). 12.2. Опрокидывание ослабленного решения задачи (407). 12.3. Физическая интерпретация полученных результатов (410).

§ 13. О достаточных, близких к необходимым, условиях разрушения решения одной задачи 411
13.1. Разрушение сильного обобщенного решения (411). 13.2. Глобальная во времени разрешимость задачи (416). 13.3. Физическая интерпретация полученных результатов (422).

§ 14. О достаточных условиях, близких к необходимым, разрушения решения сильно нелинейного обобщенного уравнения Буссинеска 422

Глава 6. **Разрушение решений сильно нелинейных волновых диссипативных псевдопараболических уравнений с источниками** 434

§ 1. Введение. Постановка задачи 434

§ 2. Однозначная разрешимость задачи (1.1) в слабом обобщенном смысле и разрушение ее решения. 435

§ 3. Однозначная разрешимость задачи (1.1) в сильном обобщенном смысле и разрушение ее решения. 457

§ 4. Примеры 462

§ 5. О разрушении решения волнового уравнения соболевского типа с нелокальным источником 467
5.1. Однозначная локальная разрешимость задачи (468). 5.2. Разрушение сильного обобщенного решения задачи (473).

§ 6. Разрушение решения сильно нелинейного уравнения спиновых волн 478
6.1. Однозначная локальная разрешимость задачи в сильном обобщенном смысле (478). 6.2. Разрушение сильного обобщенного решения задачи и глобальная разрешимость (487). 6.3. Физическая интерпретация полученных результатов (493).

§ 7. Об одной начально-краевой задаче для сильно нелинейного диссипативного уравнения вида (1.1) 493
7.1. Локальная однозначная разрешимость в слабом обобщенном смысле задачи (493). 7.2. Однозначная разрешимость задачи в любом конечном цилиндре и разрушение ее решения за конечное время (511).

Глава 7. **Некоторые частные задачи для нелинейных уравнений псевдопараболического типа** 516

§ 1. Нелинейное нелокальное уравнение псевдопараболического типа 516
1.1. Глобальная во времени разрешимость задачи (517). 1.2. Глобальная во времени разрешимость задачи в сильном обобщенном

смысле в случае $q \geqslant 1$ (548). 1.3. Асимптотическое поведение решения задачи (1.1), (1.2) при $t \to +\infty$ в случае $q > 0$ (550).

§ 2. Разрушение решений нелинейных псевдопараболических уравнений с источником вида псевдолапласиана 554
2.1. Разрушение ослабленного решения задачи (2.1) (554). 2.2. Разрушение и глобальная во времени разрешимость задачи (2.2) (561). 2.3. Разрушение решения задачи (2.3) (564). 2.4. Опрокидывание ослабленных решений задач (2.4), (2.5) (569). 2.5. Интерпретация полученных результатов (572).

§ 3. Разрушение решений псевдопараболических уравнений с быстро растущими нелинейностями 573
3.1. Локальная разрешимость и разрушение за конечное время решений задач (3.1), (3.2) (573). 3.2. Локальная разрешимость и разрушение за конечное время решения задачи (3.3) (581).

§ 4. Разрушение решения неоднородного нелинейного уравнения псевдопараболического типа 585
4.1. Однозначная локальная разрешимость задачи (585). 4.2. Разрушение сильного обобщенного решения задачи (4.1)–(4.2) (588). 4.3. Разрушение классического решения задачи (4.1)–(4.2) (590).

§ 5. Разрушение решения нелинейного нелокального уравнения псевдопараболического типа 592
5.1. Однозначная локальная разрешимость задачи (592). 5.2. Разрушение и глобальная разрешимость решения задачи (5.1) (594). 5.3. Скорость разрушения решения задачи (5.1) (598).

§ 6. О существовании решения уравнения Лапласа с нелинейным динамическим граничным условием 600
6.1. Редукция задачи к системе интегральных уравнений (600). 6.2. Глобальная во времени разрешимость и разрушение решения задачи. (606).

§ 7. Об условиях глобальной во времени разрешимости задачи Коши для полулинейного псевдопараболического уравнения 615
7.1. Редукция задачи к интегральному уравнению (615). 7.2. Теоремы существования–несуществования глобального во времени решения интегрального уравнения (7.3) (617).

§ 8. О достаточных условиях разрушения решения уравнения Буссинеска с нелинейным граничным условием Неймана 627

Часть III. Численные методы

Глава 8. **Методы численного решения начально-краевых задач для уравнений в частных производных, неразрешенных относительно старшей производной по времени** 634

§ 1. Численное решение начально-краевых задач для линейных уравнений соболевского типа методом динамических потенциалов. Динамические потенциалы 634
1.1. Динамические потенциалы для одного уравнения (635). 1.2. Разрешимость задачи Дирихле для одного уравнения (640).

§ 2. Численное решение начально-краевых задач для нелинейных уравнений псевдопараболического типа схемами Розенброка 647

2.1. Жесткий метод прямых (647). 2.2. Жесткие системы ОДУ и методы их решения (647). 2.3. Схемы типа Розенброка (647). 2.4. Метод ε-вложений (649). 2.5. Расчеты на сгущающихся сетках (649).

§ 3. Результаты численных расчетов 652
3.1. Нелинейные псевдопараболические уравнения с линейным оператором при производной по времени (653). 3.2. Сильно нелинейные уравнения псевдопараболического типа (658). 3.3. Уравнения с нелокальными членами (коэффициенты уравнения зависят от нормы функции) (665). 3.4. Выводы (672).

Приложение А. Вспомогательные оценки 673
Приложение Б. Некоторые результаты функционального анализа 677
§ 1. Пространства Соболева $\mathbb{W}^{s,p}(\Omega)$, $\mathbb{W}_0^{s,p}(\Omega)$, $\mathbb{W}^{s,p}(\Gamma)$ 677
§ 2. Слабая и $*-$слабая сходимости 679
§ 3. Слабая и сильная измеримость. Интеграл Бохнера 680
§ 4. Пространства интегрируемых функций и распределений 681
§ 5. Оператор Немыцкого. Теорема Вайнберга–Немыцкого 682
§ 6. Неравенства 684
§ 7. Операторное исчисление 685
§ 8. Теоремы о неподвижной точке 685
§ 9. Ослабленное решение уравнения Пуассона 685
§ 10. Пересечение и сумма банаховых пространств 687
§ 11. Классические, ослабленные, сильные обобщенные и слабые обобщенные решения эволюционных задач 688
§ 12. Две эквивалентные формулировки слабого решения в смысле $\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{B})$ 690
§ 13. Производные Гато и Фреше нелинейных операторов 693
§ 14. О градиенте функционала 701
Приложение В (к главе 8) 704
§ 1. Сходимость метода ε-вложений со схемой CROS 704
Список литературы 711
Формульный указатель линейных уравнений 729
Формульный указатель нелинейных уравнений 732

Предисловие

Настоящая книга посвящена исследованию общих проблем глобальной во времени разрешимости и разрушения за конечное время решений начальных и начально-краевых задач для линейных и нелинейных уравнений соболевского типа. Во многом определяющим импульсом к исследованию этого круга задач послужили наши совместные работы с выдающимся русским математиком С. А. Габовым, безвременно ушедшим из жизни в 1989 году.

Наши исследования разрушения решений нелинейных уравнений псевдопараболического типа в значительной степени были стимулированы классическим трудом А. А. Самарского, В. А. Галактионова, С. П. Курдюмова и А. П. Михайлова «Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений», оказавшим большое влияние на выбор рассматриваемой в книге тематики.

Мы глубоко признательны С. И. Похожаеву и Н. Н. Калиткину за полезное обсуждение ряда полученных в книге результатов. Наконец, мы хотим выразить глубокую признательность И. А. Шишмареву за весьма ценные замечания по различным разделам книги и всем участникам научного семинара «Нелинейные дифференциальные уравнения» под его руководством.

Авторы

Введение

Исследованию разнообразных начальных и начально-краевых задач для уравнений соболевского типа и подкласса псевдопараболических уравнений посвящено большое количество работ. Причем, по всей видимости, первым сторогим математическим исследованием задач для уравнений, не являющихся уравнениями типа Коши–Ковалевской, является пионерская работа С. Л. Соболева. Данная работа пробудила большой интерес к исследованию неклассических уравнений, названных уравнениями соболевского типа. В указанной работе было выведено линейное уравнение, описывающее малые колебания во вращающейся жидкости:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right)+\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=0.$$

Исследования С. Л. Соболева были продолжены Р. А. Александряном, В. Н. Масленниковой, В. П. Масловым, Т. И. Зеляником, Б. В. Капитоновым и математиками новосибирской школы академика Л. В. Овсянникова, Н. Д. Копачевским, а также С. А. Габовым, А. Г. Свешниковым. Среди работ, продолживших исследования С. Л. Соболева, уместно отметить работы М. И. Вишика, С. А. Гальперина, А. Г. Костюченко, Г. И. Эскина, В. Н. Врагова, Г. В. Демиденко и С. В. Успенского, И. А. Шишмарева, П. И. Наумкина, Т. Д. Джураева, И. Е. Егорова, С. Г. Пяткова, С. В. Попова, Е. С. Дзекцера, В. А. Боровикова, А. И. Кожанова, С. И. Ляшко, А. П. Осколкова, Г. А. Свиридюка, С. Я. Секерж-Зеньковича, М. Б. Тверского, В. Е. Федорова, М. В. Фалалеева, R. E. Showalter, T. W. Ting, H. Begehr, B. D. Coleman, R. J. Duffin, V. J. Mizel, E. Di Benedetto, U. Stefanelli, A. Favini, A. Yagi, J. M. Greenberg, R. C. MacCamy, V. J. Mizel, в которых рассматривались начально-краевые задачи для близких уравнений.

Отметим, что в монографии [Габов, 1] были рассмотрены вопросы глобальной во времени разрешимости начально-краевых задач для уравнений, возникающих в так называемых стратифицированных жидкостях и стратифицированных вращающихся жидкостях. Был предложен оригинальный метод редукции рассматриваемых начально-краевых задач к сингулярным интегральным уравнениям посредством так называемых динамических потенциалов. Полученные интегральные представления решений начально-краевых задач имеют весьма удобный вид для аналитических исследований таких свойств решений, как асимптотическое поведение решений при больших временах, а также

для численного моделирования происходящих в стратифицированных жидкостях процессов. Так было выявлено наличие в стратифицированных жидкостях чрезвычайно любопытного эффекта «квазифронта». В стратифицированной среде, где в предположении несжимаемости все возмущения должны распространяться с бесконечной скоростью, при наличии точечного мгновенного источника распространяется волновой фронт, скорость которого конечна. Причем этот волновой фронт имеет вид шлейфа осцилляций и экспоненциально малого предвестника. В случае только вращающейся жидкости указанный эффект не имеет места.

Иследования вопросов динамики стратифицированных жидкостей были продолжены в работах учеников С. А. Габова и А. Г. Свешникова, а именно Ю. Д. Плетнера, С. Т. Симакова, П. А. Крутицкого. В этих работах с использованием фундаментальных и сингулярных решений операторов внутренних волн, т. е. волн внутри стратифицированной жидкости, были построены динамические потенциалы, с помощью которых получены явные интегральные представления решений начально-краевых задач с негладкой границей. Отметим работу С. Я. Секерж-Зеньковича [Секерж, 1], где впервые с использованием преобразования Фурье было построено фундаментальное решение оператора внутренних гравитационных волн вида

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\triangle_3 u - \beta^2 u\right) + \omega_0^2 \triangle_2 u = 0,$$

где β — параметр стратификации, ω_0 — частота Вейселя–Брента.

В работах Ю. Д. Плетнера была обнаружена тесная связь между уравнениями соболевского типа и связанным с каждым конкретным уравнением соболевского типа некоторым эллиптическим уравнением. Именно, при изучении конкретных начально-краевых задач для уравнений внутренних волн было замечено, что свойства их решений по пространственным переменным близки к свойствам решений некоторого эллиптического уравнения. В частности, имеет место аналитичность по пространственным переменным. Кроме того, исходная система уравнений внутренних волн близка к классической системе Коши–Римана. Оказалось, например, что линейные уравнения внутренних волн можно, интегрируя по времени необходимое число раз, представить в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{3} [\mathbb{I} + \Phi_i *] \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \beta^2 u = 0,\ \Phi_i * u = \int_0^t ds \Phi_i(t-s) u(s),$$

$$\Phi_i(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0, +\infty).$$

Из данного вида и важного свойства равенства нулю спектрального радиуса вольтерровских операторов следует, что указанное интегро-

дифференциальное уравнение можно рассматривать как регулярно возмущенное вольтерровскими операторами эллиптическое уравнение

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \beta^2 u = 0.$$

Указанная связь оказалась весьма плодотворной при исследовании начально-краевых задач для двумерных уравнений внутренних гравитационных и ионно-звуковых волн в случае областей с негладкой границей [Альшин, 5; Корпусов, Свешников, 1]. Отметим также работы [Альшин, 1–6; Al'shin, 1–4]. Кроме того, в работе [Корпусов, Свешников, 1] были обнаружены модельные уравнения соболевского типа высокого, например восьмого, порядка в линейной теории плазмы и линейной теории спиновых волн во внешнем магнитном поле, исследование которых, как дифференциальных операторов высокого порядка, гораздо сложнее, чем исследование интегродифференциальных уравнений второго порядка. Отметим также, что в нашей работе [Корпусов, Свешников, 3] были получены модельные уравнения типа Соболева третьего порядка с производной по времени первого порядка, т. е. так называемые уравнения псевдопараболического типа.

Перейдем теперь к обзору результатов по исследованию подкласса уравнений соболевского типа — псевдопараболических уравнений [Гаевский]. Под псевдопараболическими уравнениями мы подразумеваем все уравнения высокого порядка с производной по времени первого порядка вида

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbb{A}(u)\right) + \mathbb{B}(u) = 0,$$

где $\mathbb{A}(u)$ и $\mathbb{B}(u)$ — это не более чем эллиптические, вообще говоря нелинейные, операторы.

В работе Г. И. Баренблатта, Ю. П. Желтова, И. Н. Кочиной математически строго было получено линейное псевдопараболическое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle u + cu\right) + \triangle u = 0,\ c \in \mathbb{R}^1 \backslash \{0\},$$

описывающее нестационарный процесс фильтрации в трещиновато-пористой жидкости. В работах А. П. Осколкова, Е. С. Дзекцера, Ю. Н. Работнова Г. А. Свиридюка и В. Е. Федорова были получены новые уравнения псевдопараболического типа. Отметим также наши работы [Корпусов, 3–5], где были выведены самые разнообразные линейные, нелинейные, нелокальные, третьего и пятого порядков уравнения псевдопараболического типа.

Исследованию уравнений псевдопараболического типа посвящено большое количество работ. При этом существует определенное разграничение в интересах исследователей. Одни занимаются волновыми уравнениями псевдопараболического типа, другие занимаются диссипативными уравнениями псевдопараболического типа. Указать все работы

по исследованию как волновых, так и диссипативных уравнений авторы не могут. Поэтому отметим лишь некоторые.

Волновые уравнения третьего и пятого порядка исследовались в работах [Корпусов, 14–15; Albert; Avrin; Berbernes; Benjamin; Biler; Bretherton; Chung; Chen; Goldstein; Greenberg; Hagen; Jeffrey; Karch; Lee; Li; Liu; Medeiros; Mei; Naumkin; Park; Pereira; Zhang]. В частности, рассматривались начальные, начально-краевые и периодические задачи, для которых исследовались вопросы глобальной во времени разрешимости и разрушения их решений. В случае глобальной во времени разрешимости исследовались вопросы асимптотического поведения решений рассматриваемых задач при больших временах, теория рассеяния и устойчивость решений типа уединенных волн как для одномерных, так и для многомерных уравнений типа Бенджамена–Бона–Махони–Бюргерса и Розенау–Бюргерса.

С другой стороны, немало работ посвящено исследованию диссипативных нелинейных уравнений псевдопараболического типа. Приведем некоторый обзор результатов.

Применение полугруппового подхода к общей теории сингулярных уравнений соболевского типа получило глубокое и широкое развитие в работах Г. А. Свиридюка и В. Е. Федорова. При помощи полугрупп операторов с нетривиальными ядрами и образами, а также некоторых обобщений понятий ограниченных, секториальных и радиальных операторов в сочетании с понятием фазового пространства, удалось свести изучение линейных и полулинейных сингулярных уравнений типа Соболева к изучению структур соответствующих ядер, образов и фазовых пространств полугрупп операторов.

Исследованию псевдопараболических уравнений с незнакоопределенным или необратимым оператором при старшей производной по времени посвящена работа И. Е. Егорова, С. Г. Пяткова, С. В. Попова. В данной монографии авторы исследовали уравнения, в абстрактной постановке имеющие вид

$$\mathbb{B}\frac{du}{dt} + \mathbb{L}u = f,$$

где $\mathbb{L}$, $\mathbb{B}$ — самосопряженные (или диссипативные) операторы в некотором гильбертовом пространстве. И основная цель работы, реализованная авторами, — это связанная с этим операторно-дифференциальным уравнением спектральная задача

$$\mathbb{L}u = \lambda\mathbb{B}u,$$

для которой изучены вопросы базисности собственных и присоединенных элементов в некотором семидефинитном гильбертовом пространстве.

Кроме того, в абстрактной постановке вырождающиеся уравнения псевдопараболического типа рассматривались в работе A. Favini, A. Yagi. В этой работе в законченном виде был предложен метод редук-

ции сингулярных уравнений соболевского типа к дифференциальному включению

$$\frac{du}{dt} \in \mathbb{A}u$$

с многозначным линейным оператором

$$\mathbb{A} : \mathbb{V} \to \mathbf{2}^{\mathbb{V}}.$$

Данный метод основан на хорошо разработанном методе многозначных линейных операторов, и основной результат работы A. Favini и A. Yagi — это теоремы об однозначной разрешимости задачи Коши для линейных сингулярных уравнений соболевского типа.

Широкий спектр результатов для уравнений и систем уравнений, не разрешенных относительно старшей производной, рассматривается в работах Г. В. Демиденко и С. В. Успенского. В монографии изучаются некоторые аспекты задачи Коши и смешанных задач для дифференциальных уравнений и систем, не разрешенных относительно старшей производной. Устанавливаются условия разрешимости в весовых соболевских пространствах, доказываются теоремы единственности, выводятся априорные $\mathbb{L}^p$-оценки решений. Изучаются асимптотические свойства решений некоторых задач гидродинамики.

Отметим также работу Х. Гаевского, К. Грегера и К. Захариаса, где рассматриваются вопросы локальной разрешимости для уравнений псевдопараболического типа. В данной монографии центральное место занимает исследование операторных и операторно-дифференциальных уравнений. Для псевдопараболических операторно-дифференциальных уравнений изучаются вопросы $\mathbb{C}$- и $\mathbb{L}^2$-разрешимости. Рассматривается обоснование методов конечномерной апроксимации, в частности метода Галеркина.

Исследованию псевдопараболических включений с двойной нелинейностью посвящена работа U. Stefanelli. Метод, используемый в данной работе, является развитием метода многозначных линейных операторов, предложенного в работе A. Favini, A. Yagi.

Псевдопараболические уравнения с монотонной нелинейностью исследовались в работах R. E. Showalter, где в развернутом виде применялся классический метод монотонности в приложении к разнообразным классам уравнений математической физики и, в частности, к нелинейным уравнениям соболевского типа с монотонными нелинейностями.

Оптимальное управление в линейных задачах для уравнений псевдопараболического типа исследовалось в работе С. И. Ляшко (см. также библиографию к этой работе). Отметим также работу Д. А. Номировского, где была доказана обобщенная разрешимость для классов линейных уравнений соболевского типа высокого порядка, например восьмого.

Существование глобального во времени решения нелинейного уравнения Буссинеска с источником и его разрушения за конечное время

$$u_t - \triangle\psi(u) - \triangle u_t + q(u) = 0$$

исследовалось в работах А. И. Кожанова. В его работах доказательство разрушения решения первой краевой задачи проводится на основе принципа сравнения для данного уравнения. В частности, в работе доказано разрушение положительного решения задачи и получены результаты типа теорем существования–несуществования.

Наконец, в работе А. Л. Гладкова исследован вопрос о единственности решения задачи Коши для квазилинейного уравнения псевдопараболического типа

$$u_t = c\triangle u_t + \varphi(u)$$

в классе растущих функций $\varphi(u)$, где u принадлежит некоторому классу корректности.

Доказательству принципа максимума для уравнений псевдопараболического типа посвящена работа E. Di Benedetto и M. Pierre. Исследованию псевдопараболических уравнений методами функций комплексного переменного посвящены работы H. Begehr и D. Q. Dai. Отметим также, что исследованиям задач для квазилинейных уравнений соболевского типа посвящены работы С. Г. Пяткова, C. Guowang и W. Shubin.

Перейдем к обзору результатов и методов доказательства теорем о несуществовании и разрушении решений для уравнений псевдопараболического типа.

Прежде всего отметим классическую работу Фуджиты о несуществовании положительного решения для полулинейного уравнения параболического типа. В данной работе, помимо доказательства разрушения, впервые был получен оптимальный результат типа теоремы существования–несуществования ограниченного решения, понимаемого в классическом смысле. В этой работе, с использованием известных свойств фундаментального решения оператора теплопроводности, получен оптимальный результат о разрушении положительного решения задачи Коши для полулинейного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \triangle u + u^{1+\alpha}.$$

В классических работах H. A. Levine был предложен энергетический подход к исследованию вопроса о разрушении сильного и слабого обобщенных решений при достаточно больших начальных данных задачи. Эта работа посвящена исследованию глобальной во времени неразрешимости задачи Коши для операторно-дифференциального уравнения вида

$$\mathbb{A}\frac{du}{dt} + \mathbb{L}u = \mathbb{F}(u), \quad u(0) = u_0,$$

где существенно использовался тот факт, что операторы $\mathbb{A}$ и $\mathbb{L}$ — линейные, положительно определенные и самосопряженные, а $\mathbb{F}(u)$ имеет симметричную производную Фреше. Забегая вперед, отметим, что наша техника доказательства несуществования глобальных во времени решений рассматриваемых задач является развитием энергетического метода H. A. Levine. И мы обобщаем подход H. A. Levine в следующих направлениях: во-первых, мы рассматриваем случай нелинейных операторов $\mathbb{A}$ и $\mathbb{L}$ и получаем двусторонние оценки времени разрушения, во-вторых, в случае линейного оператора $\mathbb{A}$ мы получаем оптимальные двусторонние оценки не только времени, но и скорости разрушения, в-третьих, мы рассматриваем случай волновых уравнений псевдопараболического типа, для которых техника работы H. A. Levine принципиально неприменима.

Отметим, что в работе S. Kaplan был применен принцип максимума для исследования класса квазилиненйых параболических уравнений.

В работе H. Amann и M. Fila была предложена новая задача, для которой удалось получить оптимальный результат Фуджиты. Следует указать также работы M. Chipot, D. Phillips, J. Escer, B. Hu, W. Walter.

Широкий спектр результатов по исследованию неограниченных решений был получен в классической работе А. А. Самарского, В. А. Галактионова, С. П. Курдюмова и А. П. Михайлова. В этой работе исследуются вопросы разрушения решений квазилинейных параболических уравнений. Причем используется самая разнообразная техника. Для одних задач применяются признаки сравнения, с помощью которых при использовании верхних и нижних решений доказываются теоремы существования–несуществования. Для других задач применяется метод неограниченных коэффициентов Фурье. Получены достаточные условия разрушения решений классов квазилинейных уравнений параболического типа. Заметим, что методика, развитая для доказательства разрушения решений параболических уравнений, может быть применена и при исследовании вопросов разрушения для псевдопараболических уравнений. Отметим также работы В. А. Галактионова.

В монографии С. И. Похожаева и Е. Митидьери получил глубокое развитие оригинальный метод исследования вопросов разрушения решений дифференциальных неравенств эллиптического, параболического и гиперболического типов. Для всех трех типов уравнений авторами предложено обобщение понятия емкости — нелинейная емкость, — с помощью которого изучение вопросов разрушения проводится по одной и той же схеме, вне зависимости от типа дифференциального неравенства. Данный подход, по всей видимости, может быть применен к исследованию дифференциальных неравенств псевдопараболического типа в неограниченных областях. В этой связи отметим, что в настоящей монографии мы прежде всего рассматриваем начально-краевые

задачи в ограниченных областях, где метод пробных функций неприменим.

Метод доказательства несуществования решения некоторых классов краевых задач, основанный на использовании принципа максимума, развит в работах Ю. В. Егорова, В. А. Кондратьева. Принципиально новый подход, называемый методом пробных функций, предложен в работах С. И. Похожаева и Э. Митидиери (см. также работы Г. Г. Лаптева).

Отметим, что развитый в работах N. Hayashi, И. А. Шишмарева, П. И. Наумкина, Е. И. Кайкиной метод построения асимптотики при больших временах для широкого класса нелинейных эволюционных уравнений может быть применен к исследованию асимптотики при больших временах для уравнений псевдопараболического типа. В частности, в работе [Шишмарев] было изучено асимптотическое поведение решения задачи Коши для следующего диссипативного уравнения псевдопараболического типа:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle u - u\right) + \triangle u + \alpha u^3 = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Отметим, что в монографии Н. Н. Калиткина, А. Б. Альшина, Е. А. Альшиной, Б. В. Рогова впервые был предложен оригинальный метод квазиравномерных сеток для численного решения начально-краевых задач в неограниченных областях без стандартной постановки некоторых вспомогательных граничных условий. Данный метод позволил провести численный анализ решений как для линейных, так и для нелинейных уравнений соболевского типа в неограниченных областях.

В заключение обзора результатов исследования решений задач для псевдопараболических уравнений отметим, что, насколько нам известно, изучению разрушений решений нелинейных уравнений псевдопараболического типа посвящены только работы H. A. Levine, А. И. Кожанова и, в частности, теоремы о разрушении решений полулинейных уравнений псевдопараболического типа в неограниченных областях могут быть получены методом пробных функций, развитым в работе С. И. Похожаева и Э. Митидиери. Что же касается сильно нелинейных уравнений псевдопараболического типа, в частности с нелинейными эллиптическими операторами при производной по времени, то такие результаты, помимо наших, нам неизвестны.

Отметим, что в работе В. К. Калантарова и О. А. Ладыженской впервые стали рассматриваться дифференциальные неравенства вида

$$\Phi\Phi'' - (1+\alpha)(\Phi')^2 + \mathrm{C}_1\Phi\Phi' + \mathrm{C}_2\Phi^2 \geqslant 0, \;\; \mathrm{C}_1 \geqslant 0, \;\; \mathrm{C}_2 \geqslant 0, \;\; \alpha > 0,$$

из которых получаются достаточные условия возникновения разрыва второго рода у функции $\Phi(t)$ (см. также работы [Eden, Kalantarov; Erdem, Kalantarov]). Отметим, что мы интенсивно используем данное обыкновенное дифференциальное неравенство для получения достаточ-

ных условий разрушения решений начально-краевых задач для нелинейных уравнений псевдопараболического типа.

Дадим теперь краткий обзор содержания нашей монографии, основной целью которой является освещение современного состояния исследования проблем существования-несуществования решений задач Коши и начально-краевых задач для линейных и нелинейных уравнений соболевского типа, а также численный анализ свойств их решений.

В первой главе рассматриваются модельные линейные уравнения соболевского типа высокого порядка, например восьмого. Рассматриваются модельные задачи линейной теории плазмы и линейной теории спиновых волн. Показано, что все модели сводятся к линейным уравнениям соболевского типа высокого порядка. Для соответствующих начально-краевых задач предложен оригинальный операторный метод исследования. Результаты главы опубликованы в работах [Корпусов, Свешников, 2–3] и [Плетнер, 8].

Вторая глава посвящена исследованию линейных двумерных уравнений соболевского типа и псевдоэллиптических уравнений с некоммутирующими вольтерровскими операторами. В данной главе развивается теория псевдоаналитических функций, обобщенных рядов Лорана и Тейлора. Результаты главы опубликованы в работах [Плетнер].

В третьей главе рассматриваются математические модели квазистационарных процессов в сплошных электромагнитных средах. Показано, что исходная система уравнений Максвелла в квазистационарном приближении и феноменологические уравнения, связывающие векторы напряженности электрического поля $\mathbf{E}$, индукции электрического поля $\mathbf{D}$, поляризации среды $\mathbf{P}$, плотности тока $\mathbf{J}$, напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$, индукции магнитного поля $\mathbf{B}$, намагниченности среды $\mathbf{M}$, с учетом разнообразных нестационарных процессов редуцируются к широкому спектру начальных и начально-краевых задач для, вообще говоря, сильно нелинейных уравнений псевдопараболического типа. При этом одни полученные модельные уравнения являются волновыми, а другие — диссипативными. Дано качественное описание некоторых существенно нелинейных эффектов, наблюдаемых в эксперименте. Результаты данной главы опубликованы в работах [Корпусов, Свешников, 4–5].

В четвертой главе рассматриваются две различные абстрактные задачи Коши для уравнений псевдопараболического типа с операторными коэффициентами в банаховых пространствах. Для первой задачи при некоторых условиях на операторные коффициенты получены необходимые и достаточные условия разрушения решений. Причем в случае разрушения получены оценки снизу и сверху времени разрушения решения. Наконец, для другой задачи получены оптимальные оценки снизу и сверху скорости разрушения решения. Для каждой из абстрактных задач приведены примеры физически осмысленных операторных коэффициентов. Детально рассмотрены три модельные задачи. Результаты главы опубликованы в работах М. О. Корпусова и А. Г. Свешникова.

В пятой главе рассматриваются абстрактные задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с нелинейными операторными коэффициентами. В частности, уравнения Осколкова–Бенджамена–Бона–Махони–Бюргерса с кубическим источником или с псевдолапласианом. В качестве приложений приведены примеры, вообще говоря сильно нелинейных, уравнений псевдопараболического типа в ограниченных областях с гладкой границей. Для данных задач получены достаточные, близкие к необходимым условия разрушения за конечное время и глобальной разрешимости. При некоторых условиях на нелинейные операторы доказана разрешимость задачи в любом конечном цилиндре, а при некоторых условиях на норму начальной функции в некотором банаховом пространстве, имеющих смысл достаточно большой начальной функции, доказано разрушение решения задачи за конечное время. Результаты главы опубликованы в работах М. О. Корпусова и А. Г. Свешникова.

В шестой главе продолжается рассмотрение абстрактной задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с нелинейными операторными коэффициентами. В качестве приложений приведены примеры сильно нелинейных волновых диссипативных уравнений псевдопараболического типа в ограниченных областях с гладкой границей. Получены достаточные, близкие к необходимым условия разрушения решений за конечное время и их глобальной во времени разрешимости. Кроме того, рассмотрены проблемы разрушения решений сильно нелинейного уравнения спиновых волн и сильно нелинейного диссипативного уравнения псевдопараболического типа. При некоторых условиях на нелинейные операторы доказана разрешимость задачи в любом конечном цилиндре, а при других условиях доказано разрушение решения задачи за конечное время при некоторых условиях на норму начальной функции в некотором банаховом пространстве, имеющих смысл достаточно большой начальной функции. Приведены задачи для сильно нелинейных волновых диссипативных уравнений псевдопараболического типа. Результаты главы опубликованы в работах М. О. Корпусова и А. Г. Свешникова.

В седьмой главе рассматриваются начальные и начально-краевые задачи для некоторых конкретных уравнений псевдопараболического типа, не удовлетворяющие условиям, сформулированным в четвертой и пятой главах, а также одна задача Коши в $\mathbb{R}^3$. Результаты главы опубликованы в работах М. О. Корпусова и А. Г. Свешникова.

В восьмой главе обсуждаются методы численного решения уравнений, неразрешенных относительно производной по времени. Вначале на примере одного линейного уравнения псевдопараболического типа рассматривается возможность применения теории динамических потенциалов для численного решения начально-краевых задач. При этом задача редуцируется к интегральному уравнению, для которого строится эффективный алгоритм численного решения, допускающий проведение расчетов на сгущающихся сетках с контролем точности.

Далее рассматриваются некоторые нелинейные уравнения псевдопараболического типа, рассмотренные во второй части книги. С использованием жесткого метода прямых задача сводится либо к решению неявной системы обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности, либо к решению дифференциально-алгебраической системы уравнений. Для решения этих задач используется комплексная схема Розенброка, пригодная для задач с большой жесткостью. Расчеты на сгущающихся сетках позволяют определить время разрушения решения с точностью порядка шага сетки. Результаты данной главы получены А. Б. Альшиным.

Все главы можно читать независимо друг от друга. При ссылках внутри главы используется двойная нумерация. При ссылках на формулы другой главы используется тройная нумерация. Например, (1.2.3) — формула (2.3) из гл. 1.

Ссылки на библиографию оформлены в виде указания всех авторов либо первого автора с указанием номера работы.

Многие уравнения и методы их исследования были получены в ходе выполнения проектов РФФИ №№ 02-10-00253, 05-01-00122, 05-01-00144, президентской программы поддержки научных школ и молодых кандидатов наук НШ-1918.2003.1, МК-1857.2005.1 и МК-1513.2005.9.

Список обозначений

Физические обозначения

$\mathbf{E}$ — вектор напряженности электрического поля;
$\mathbf{D}$ — вектор индукции электрического поля;
$\mathbf{P}$ — вектор поляризации;
$\mathbf{J}$ — вектор плотности тока;
$\mathbf{H}$ — вектор напряженности магнитного поля;
$\mathbf{B}$ — вектор индукции магнитного поля;
$\mathbf{M}$ — вектор намагниченности;
n — плотность свободных электронов;
Q — плотность источников тока свободных электронов;
σ_{ij} — тензор проводимости среды;
$\varkappa_{ij}$ — тензор электрической восприимчивости среды;
χ_{ij} — тензор магнитной восприимчивости среды;
φ — потенциал электрического поля;
ψ — потенциал магнитного поля;
$\varkappa_0$ — скалярная электрическая восприимчивость;
σ_0 — скалярная проводимость среды;
n_0 — «квазистационарное» распределение свободных электронов;
$\widehat{\mathrm{T}}_e$ — температура свободных электронов;
T_0 — температура фононов;
$\mathfrak{M}$ — «квазистационарная» намагниченность;
$\mathbf{m}$ — «быстропеременная» часть намагниченности.

Математические обозначения

$\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$ — декартово произведение топологических пространств A и B;
$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;
$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел;
$\mathbb{Z}^n$ — множество, состоящее из упорядоченного набора целых чисел вида $(z_1, z_2, ..., z_n)$, $z_m \in \mathbb{Z}$, $m = \overline{1, n}$;
$\mathbb{Z}^n_+$ — множество, состоящее из упорядоченных наборов неотрицательных целых чисел;
$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ — $\mathbb{N}$-мерное эвклидово пространство;
$|\cdot|$ — норма эвклидова пространства $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$;
$\mathbb{R}^1_+$ — множество неотрицательных вещественных чисел;
$\overline{\alpha}$ — мультииндекс $\overline{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{R}^1_+$;
$|\overline{\alpha}|$ — $|\overline{\alpha}| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$;
D_x — оператор градиента по переменной $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$;

D_x^m — оператор при $m = m_1 \otimes m_2 \otimes ... \otimes m_{\mathrm{N}}$ вида

$$\mathrm{D}_x^m \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{m_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{m_2} ... \left(\frac{\partial}{\partial x_N}\right)^{m_N};$$

$f^{(m)}(x)$ — в случае, если $m = (m_1, ..., m_{\mathrm{N}})$ – мультииндекс, $f^{(m)}(x) = \mathrm{D}_{x_1}^{m_1} ... \mathrm{D}_{x_{\mathrm{N}}}^{m_{\mathrm{N}}} f(x)$, $x = (x_1, ..., x_{\mathrm{N}}) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$;

∇_x — градиент по переменной $x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$;

$\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ — производная по направлению внешней номали $\mathbf{n}$ к «гладкой» границе $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{1,\delta}$ ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$;

∂_t — частная производная по t;

$\partial_{x_i}^k$ — частная производная k-го порядка по переменной $x_i \in \mathbb{R}^1$;

$\triangle_p u \equiv \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ — псевдолапласиан (*p-Laplacian*);

$\triangle$ — оператор Лапласа;

$\triangle^2$ — бигармонический оператор;

$\triangle_2 u \equiv \partial_{x_1}^2 u + \partial_{x_2}^2 u$ — двумерный оператор Лапласа;

$(-\triangle)^{1/2}$ — корень квадратный от оператора $-\triangle$, т. е. в случае $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$

$$-(-\triangle)^{1/2} u \equiv \frac{1}{(2\pi)^{\mathrm{N}}} \int\limits_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}} dk\, |k| \widehat{u}(k) \exp(i(k, x)),$$

а в случае ограниченной области Ω с «гладкой» границей $\partial\Omega$:

$$-(-\triangle)^{1/2} u \equiv \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^{1/2} (u, w_k) w_k,$$

где λ_k, w_k — k-е собственное значение и k-я собственная функция первой краевой задачи для оператора Лапласа;

$\widehat{u}$ — преобразование Фурье функции u;

$\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ — множество линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathbb{X}$ в $\mathbb{Y}$;

$\mathbb{A}_u'(\cdot)$ — производная Фреше от оператора $\mathbb{A}(u) : \mathbb{X} \to \mathbb{X}^*$, $\mathbb{A}_u'(\cdot) : \mathbb{X} \to \to \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{X}^*)$;

$\mathbb{X}^*$ — пространство сопряженное к банахову пространству $\mathbb{X}$;

$\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ — область в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$;

$\overline{\Omega}$ — замыкание области Ω;

$\partial\Omega$ — граница области Ω;

$\partial\Omega \in \mathbb{C}^{(m,\delta)}$ — граница $\partial\Omega$ области $\Omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ может быть в окрестности каждой точки $x \in \partial\Omega$ представлена локальными координатами

$$\zeta_i = \Phi_i(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{\mathrm{N}-1}, \eta), \quad i = \overline{1, \mathrm{N}-1},$$

причем функции Φ_i являются m раз непрерывно-дифференцируемыми функциями своих переменных, а функции $\Phi_i^{(m)}$, $m \in \mathbb{Z}_+^{\mathrm{N}}$, являются гельдеровскими с показателем $\delta \in (0, 1]$;

$\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$ — норма банахова пространства $\mathbb{X}$;

$\mathbb{C}^{(p)}(\Omega)$ — множество всех функций на Ω, которые имеют $p \in \mathbb{N}$ непрерывных производных в Ω;

$\mathbb{C}_b^{(p)}(\overline{\Omega})$ — банахово пространство с нормой

$$\| u \|_{\mathbb{C}^p} \equiv \sup_{x \in \Omega} \sum_{m=1}^{p} |\mathrm{D}_x^m u| ;$$

$\mathbb{C}_0^{\infty}(\Omega)$ — множество бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем;

$\operatorname{supp} u$ — «носитель» функции u;

$\mathrm{Lip}(\Omega)$ — банахово пространство липшиц-непрерывных функций с нормой

$$\| u \|_{\mathrm{Lip}} \equiv \sup_{x \in \Omega} |u| + \sup_{x,y \in \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|};$$

$\mathbb{C}^{(0,\delta)}(\Omega)$ — банахово пространство гельдеровских функций с нормой

$$\| u \|_{0,\delta} \equiv \sup_{x \in \Omega} |u| + \sup_{x,y \in \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\delta}}, \quad \delta \in (0, 1];$$

$\mathbb{AC}(0, \mathrm{T})$ — пространство абсолютно непрерывных функций;

$\mathbb{BV}(0, \mathrm{T})$ — пространство функций с конечной вариацией;

$\mathbb{L}^p(\Omega)$ — банахово пространство измеримых функций, суммируемых со степенью $p \in [1, +\infty]$ в области Ω с нормой

$$\| u \|_p \equiv \int\limits_{\Omega} dx \, |u|^p;$$

$(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{L}^2$ (иногда используется для обозначения скалярного произведения в $\mathbb{R}^N$);

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скобки двойственности между рефлексивным банаховым пространством $\mathbb{X}$ и его сопряженным $\mathbb{X}^*$;

$\| \cdot \|_*$ — норма банахова пространства $\mathbb{X}^*$, если $\| \cdot \|$ — норма банахова пространства $\mathbb{X}$;

$\mathbb{H}_0^m(\Omega)$ — гильбертово пространство измеримых функций, имеющих нулевой след на границе области Ω, у которых при $m \in \mathbb{N}$ существуют m обобщенных производных из $\mathbb{L}^2(\Omega)$ со скалярным произведением

$$(u, v)_{\mathbb{H}_0^m} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (\mathrm{D}^{\alpha} u, \mathrm{D}^{\alpha} v) ;$$

$\mathbb{H}^{-m}(\Omega)$ — гильбертово пространство, сопряженное к $\mathbb{H}_0^m(\Omega)$, любой элемент u которого можно представить в виде

$$u = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \mathrm{D}^{\alpha} g_{\alpha}, \quad g_{\alpha} \in \mathbb{L}^2(\Omega);$$

$\mathbb{H}^s(\Omega)$ — определяется посредством вещественной интерполяции:

$$\mathbb{H}^s(\Omega) = \left[\mathbb{H}^m(\Omega), \mathbb{H}^0(\Omega)\right]_\vartheta, \quad (1-\vartheta)m = s, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad 0 < \vartheta < 1;$$

$\mathbb{W}^{k,p}(\Omega)$ — банахово пространство измеримых функций, у которых определено $k \in \mathbb{N}$ обобщенных производных, суммируемых со степенью $p \in \mathbb{R}^1_+$ в области с нормой, имеющей вид

$$\| u \|_{k,p} \equiv \sum_{m=1}^{k} \| \mathrm{D}^m u \|_p;$$

$\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega)$ — банахово пространство, состоящее из элементов банахова пространства $\mathbb{W}^{k,p}(\Omega)$, имеющих нулевой след на границе области;

$\mathbb{W}^{-k,p'}(\Omega)$ — банахово пространство, сопряженное к банахову пространству $\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega)$, $p' = p/(p-1)$, элементы которого можно представить в виде

$$u = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \mathrm{D}^\alpha g_\alpha, \quad g_\alpha \in \mathbb{L}^{p'}(\Omega);$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ — скобки двойственности между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^s(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-s}(\Omega)$;

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,p}$ — скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-k,p'}(\Omega)$, $p' = p/(p-1)$;

$\mathbb{L}^p(0, \mathrm{T}; \mathbb{B})$ — банахово пространство сильно измеримых на интервале $(0, \mathrm{T})$, $\mathbb{B}$-значных функций, для которых конечен интеграл Лебега

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt \ \| u \|_{\mathbb{B}}^p$$

с нормой

$$\| u \| = \left(\int_0^{\mathrm{T}} dt \ \| u \|_{\mathbb{B}}^p \right)^{1/p};$$

$\mathbb{BC}(\mathbb{V}; \mathcal{L}(\mathbb{V}; \mathbb{V}^*))$ — множество непрерывных и ограниченных операторов на банаховом пространстве $\mathbb{V}$ в смысле равномерной топологии пространства линейных операторов $\mathcal{L}(\mathbb{V}; \mathbb{V}^*)$;

$\mathbb{R}(\lambda, \mathbb{T}) = (\lambda \mathrm{I} - \mathbb{T})^{-1}$ — резольвента оператора $\mathbb{T}$;

$\mathbb{C}^m(0, \mathrm{T}; \mathbb{B})$ — пространство m раз непрерывно дифференцируемых функций со значениями в банаховом пространстве $\mathbb{B}$;

$\mathcal{D}(\Omega)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем;

$\mathcal{D}'(\Omega)$ — пространство обобщенных функций, двойственное к $\mathcal{D}(\Omega)$.

Часть I

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Глава 1

МОДЕЛЬНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

В данной главе рассматриваются модельные линейные уравнения соболевского типа высокого порядка, например восьмого. Рассматриваются модельные задачи линейной теории плазмы и линейной теории спиновых волн. Показано, что все модели сводятся к линейным уравнениям соболевского типа высокого порядка. Для соответствующих начально-краевых задач предложен оригинальный операторный метод исследования. В случае двумерных уравнений развита теория псевдоаналитических функций, аналогичная теории аналитических функций для случае двумерного уравнения Лапласа. Изложенные в главе результаты опубликованы в работах [Корпусов, 2–3].

§ 1. Математические модели квазистационарных электромагнитных волн в анизотропных неметаллических средах с дисперсией

Особенности распространения электромагнитных волн в анизотропных средах определяются спецификой материальных уравнений. Если длина волны мала по сравнению с пространственными неоднородностями, то эти уравнения можно записать в виде, учитывающем только временную дисперсию (см., например, [Ландау; Виноградова]):

$$D_i(\mathbf{r},t) = E_i(\mathbf{r},t) + 4\pi P_i(\mathbf{r},t), \tag{1.1а}$$

$$B_i(\mathbf{r},t) = H_i(\mathbf{r},t) + 4\pi M_i(\mathbf{r},t), \tag{1.1б}$$

$$P_i(\mathbf{r},t) = \widehat{\varkappa}_{ij} * E_j(\mathbf{r},t) + P_{i0}(\mathbf{r},t), \tag{1.1в}$$

$$M_i(\mathbf{r},t) = \widehat{\chi}_{ij} * H_j(\mathbf{r},t) + M_{i0}(\mathbf{r},t); \tag{1.1г}$$

если не оговорено противное, во всех формулах предполагается суммирование по повторяющимся индексам, $i,j = 1,2,3$. Мы используем следующие обозначения: $\mathbf{r} = (x,y,z)$, $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ — векторы индукции и напряжености электромагнитного поля, $\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{M}(\mathbf{r},t)$ — векторы поляризации и намагниченности среды, $\mathbf{P}_0(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{M}_0(\mathbf{r},t)$ — заданные векторы, вообще говоря, зависящие от времени, определяемые начальным распределением поляризации и намагничен-

ности среды, $\widehat{\varkappa}_{ij}*$ и $\widehat{\mu}_{ij}*$ — сверточные вольтерровские операторы:

$$\widehat{\varkappa}_{ij} * f(t) = \int_0^t \varkappa_{ij}(t,\tau) f(\tau)\, d\tau, \quad \widehat{\chi}_{ij} * f(t) = \int_0^t \chi_{ij}(t,\tau) f(\tau)\, d\tau.$$

При этом интегрирование ведется в пределах от 0 до t, поскольку, с одной стороны, предполагается, что до момента времени $t = 0$ колебания в среде отсутствовали, а с другой стороны, в силу физического принципа причинности, поля в среде в данный момент времени могут зависеть только от полей в предшествующие моменты времени. В простейшем случае функции $\chi_{ij}(t,\tau)$ и $\varkappa_{ij}(t,\tau)$ зависят от разности аргументов: $\chi_{ij}(t-\tau)$, $\varkappa_{ij}(t-\tau)$. Предположим также, что данные функции принадлежат классу $\mathbb{C}^{(0)}[0;+\infty)$.

В случае квазистационарного электромагнитного поля к материальным уравнениям (1.1) необходимо добавить следующие уравнения электромагнитного поля (см., например: [Ландау]):

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho^{\mathrm{ext}}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \\ &\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \qquad\quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Макроскопический ток $\mathbf{j}^{\mathrm{ext}}$ сторонних зарядов предполагается отсутствующим. Вводя потенциалы электрического и магнитного полей по формулам

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\nabla\varphi(\mathbf{r},t), \quad \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = -\nabla\psi(\mathbf{r},t), \tag{1.3}$$

из уравнений (1.1)–(1.3) получаем

$$(\mathbf{I} + 4\pi\widehat{\varkappa}_{ll}*)\frac{\partial^2\varphi(\mathbf{r},t)}{\partial {x_l}^2} + 4\pi\sum_{i\neq j}^{3,3}\widehat{\varkappa}_{ij} * \frac{\partial^2\varphi(\mathbf{r},t)}{\partial x_i \partial x_j} = F_d(\mathbf{r},t) - 4\pi\rho^{\mathrm{ext}}, \tag{1.4а}$$

$$(\mathbf{I} + 4\pi\widehat{\chi}_{ll}*)\frac{\partial^2\psi(\mathbf{r},t)}{\partial x_l^2} + 4\pi\sum_{i\neq j}^{3,3}\widehat{\chi}_{ij} * \frac{\partial^2\psi(\mathbf{r},t)}{\partial x_i \partial x_j} = F_b(\mathbf{r},t), \tag{1.4б}$$

где $F_b(\mathbf{r},t) = 4\pi\operatorname{div}\mathbf{M}_0(\mathbf{r},t)$, $F_d(\mathbf{r},t) = 4\pi\operatorname{div}\mathbf{P}_0(\mathbf{r},t)$. Отметим, что в дальнейшем операторные тензоры электрической и магнитной восприимчивостей

$$\widehat{\varkappa}* = \begin{pmatrix} \widehat{\varkappa}_{11}* & \widehat{\varkappa}_{12}* & \widehat{\varkappa}_{13}* \\ \widehat{\varkappa}_{21}* & \widehat{\varkappa}_{22}* & \widehat{\varkappa}_{23}* \\ \widehat{\varkappa}_{31}* & \widehat{\varkappa}_{32}* & \widehat{\varkappa}_{33}* \end{pmatrix}, \quad \widehat{\chi}* = \begin{pmatrix} \widehat{\chi}_{11}* & \widehat{\chi}_{12}* & \widehat{\chi}_{13}* \\ \widehat{\chi}_{21}* & \widehat{\chi}_{22}* & \widehat{\chi}_{23}* \\ \widehat{\chi}_{31}* & \widehat{\chi}_{32}* & \widehat{\chi}_{33}* \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

удовлетворяют следующим условиям: $\widehat{\varkappa}_{ij}* = -\widehat{\varkappa}_{ji}*$, $\widehat{\chi}_{ij}* = -\widehat{\chi}_{ji}*$ при $i \neq j$. В этом случае с учетом (1.5) уравнения (1.4) примут диагональ-

ный вид

$$(\mathbf{I}+4\pi\widehat{\varkappa}_{ll}*)\frac{\partial^2\varphi(\mathbf{r},t)}{\partial {x_l}^2}=-4\pi\rho^{ext}+F_{\mathrm{d}}(\mathbf{r},t), \tag{1.6а}$$

$$(\mathbf{I}+4\pi\widehat{\chi}_{ll}*)\frac{\partial^2\psi(\mathbf{r},t)}{\partial x_l^2}=F_{\mathrm{b}}(\mathbf{r},t). \tag{1.6б}$$

Уравнения вида (1.6) возникают при рассмотрении нестационарных внутренних волн в несжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости [Габов, 1]. Особенно эффективным и «естественным» методом исследования подобных задач является операторный метод, идея которого восходит к работам [Вольтерра]. В последнее время этот метод развит в работах [Плетнер] и применен к исследованию начально-краевых задач для полных «небуссинесковских» уравнений внутренних гравитационно-гироскопических волн и ионно-звуковых волн в «незамагниченной» плазме [Альшин, 4; Корпусов, 1].

Отметим, что во многих случаях модельные задачи о нестационарных волнах в средах с анизотропной дисперсией сводятся к интегродифференциальным уравнениям (1.4) с ядрами сверточных операторов, зависящими от разности аргументов и имеющими вид синуса, полинома или экспоненты. В таких случаях возможна редукция исходной векторной системы уравнений на основе введения обобщенных потенциалов квазистационарных электрического и магнитного полей $\Phi(x,t)$ и $\Psi(x,t)$ [Габов, 1], связанных с известными потенциалами электрического и магнитного полей $\varphi(x,t)$, $\psi(x,t)$ некоторыми дифференциальными соотношениями вида

$$\varphi(x,t)=\mathbb{R}_n(D_t)\Phi(x,t),\quad \psi(x,t)=\mathbb{Q}_m(D_t)\Psi(x,t), \tag{1.7}$$

где $\mathbb{R}_n(D_t)$ и $\mathbb{Q}_m(D_t)$ — дифференциальные полиномы порядка n и m соответственно, конкретный вид которых определяется ядрами сверточных операторов $\widehat{\chi}_{ij}*$ и $\widehat{\varkappa}_{ij}*$. Как видно из соотношений (1.7), обобщенные потенциалы $\Phi(x,t)$ и $\Psi(x,t)$ определены неоднозначно как функции времени, поэтому необходимо потребовать выполнения некоторых калибровочных условий, например таких:

$$\frac{\partial^l}{\partial t^l}\Phi(x,t)\bigg|_{t=0}=0,\ \ \frac{\partial^k}{\partial t^k}\Psi(x,t)\bigg|_{t=0}=0, \tag{1.8}$$

где $l=\overline{0,n-1}$, $k=\overline{0,m-1}$. После подстановки соотношений (1.7) для обобщенных потенциалов в интегродифференциальные уравнения (1.7) с учетом условий (1.8) в указанных выше случаях, интегродифференциальные уравнения для потенциалов $\varphi(x,t)$, $\psi(x,t)$ преобразуются в дифференциальные уравнения составного типа [Габов] для

обобщенных потенциалов $\Phi(x,t)$ и $\Psi(x,t)$:

$$\mathbb{R}_n(D_t)\triangle_3\Phi(x,t)+\sum_{i,j=1}^{3,3}\widetilde{\mathbb{R}}_{nij}(D_t)\frac{\partial^2\Phi(x,t)}{\partial x_i\partial x_j}=-4\pi\rho^{ext}+F_{\mathrm{d}}(x,t),$$

$$\mathbb{Q}_m(D_t)\triangle_3\Psi(x,t)+\sum_{i,j=1}^{3,3}\widetilde{\mathbb{Q}}_{mij}(D_t)\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x_i\partial x_j}=F_{\mathrm{b}}(x,t),$$

$\widetilde{\mathbb{R}}_{nij}$, $\widetilde{\mathbb{Q}}_{mij}$ — полиномы порядка не выше n и m соответственно. В частности, в следующих главах будут рассматриваться задачи, подпадающие под данные условия. Однако вполне возможно, что более сложные процессы в средах с анизотропной дисперсией можно будет описать лишь существенно интегродифференциальными уравнениями, родственными к эллиптическим (см. [Плетнер]) вида (1.4).

Рассмотрим возможные граничные условия для введенных потенциалов квазистационарного электромагнитного поля в анизотропных средах с дисперсией. Введем единичный вектор нормали $\mathbf{n}_0(x)$ к граничной поверхности $S_{12}\in A^{(1,\lambda)}$ раздела двух сред, направленный из первой среды во вторую, обозначим через $S_{12}^{\pm}$ две стороны ориентированной поверхности S_{12}. Тогда граничные условия для векторов индукции и напряженности электромагнитного поля будут иметь вид (см., например: [Ландау])

$$\mathbf{E}_1\times\mathbf{n}_0\big|_{S_{12}^+}-\mathbf{E}_2\times\mathbf{n}_0\big|_{S_{12}^-}=0, \tag{1.9а}$$

$$\mathbf{D}_1\mathbf{n}_0\big|_{S_{12}^+}-\mathbf{D}_2\mathbf{n}_0\big|_{S_{12}^-}=4\pi\eta\big|_{S_{12}}, \tag{1.9б}$$

$$\mathbf{H}_1\times\mathbf{n}_0\big|_{S_{12}^+}-\mathbf{H}_2\times\mathbf{n}_0\big|_{S_{12}^-}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{i}\big|_{S_{12}}, \tag{1.9в}$$

$$\mathbf{B}_1\mathbf{n}_0\big|_{S_{12}^+}-\mathbf{B}_2\mathbf{n}_0\big|_{S_{12}^-}=0, \tag{1.9г}$$

где η, $\mathbf{i}$ — поверхностные плотности «внешних» зарядов и тока на границе раздела двух сред. Подставим в уравнения (1.9) выражения (1.3) и (1.1). Тогда граничные условия (1.9) примут вид

$$(\nabla\varphi_1,\zeta)\big|_{S_{12}^+}=(\nabla\varphi_2,\zeta)\big|_{S_{12}^-}, \tag{1.10а}$$

$$(\nabla\psi_1,\zeta)\big|_{S_{12}^+}-(\nabla\psi_2,\zeta)\big|_{S_{12}^-}=-\frac{4\pi}{c}(\mathbf{i},\zeta)\big|_{S_{12}}, \tag{1.10б}$$

$$(\mathbf{I}\delta_{ij}+4\pi\varkappa_{1ij}*)\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}n_{0i}\big|_{S_{12}^+}-(\mathbf{I}\delta_{ij}+4\pi\varkappa_{2ij}*)\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_j}n_{0i}\big|_{S_{12}^-}=4\pi\widetilde{\eta}(x,t)\big|_{S_{12}}, \tag{1.10в}$$

$$(\mathbf{I}\delta_{ij}+4\pi\chi_{1ij}*)\frac{\partial\psi_1}{\partial x_j}n_{0i}\big|_{S_{12}^+}-(\mathbf{I}\delta_{ij}+4\pi\chi_{2ij}*)\frac{\partial\psi_2}{\partial x_j}n_{0i}\big|_{S_{12}^-}=f_b(x,t)\big|_S, \tag{1.10г}$$

где $\zeta(x)$ — произвольный вектор в касательной плоскости в точке $x \in S_{12}$, $\widetilde{\eta}(x,t) = \eta(x,t) + \eta_0(x,t)$ — полная поверхностная плотность зарядов, «внешних» и «внутренних», $\eta_0(x,t) = P_{1i0}n_{0i}\big|_{S_{12}^+} - P_{2i0}n_{0i}\big|_{S_{12}^-}$, $f_b(x,t)\big|_S = M_{1i0}n_{0i}\big|_{S_{12}^+} - M_{2i0}n_{0i}\big|_{S_{12}^-}$.

Заметим, что из общих выражений (1.10) могут быть получены как точные, так и приближенные граничные условия для случаев, когда поле или совсем не проникает во вторую среду (идеальный проводник), или частично проникает, образуя «скин-слой».

В дальнейшем будут рассмотрены конкретные модели сред с анизотропной дисперсией и получены уравнения, описывающие нестационарные процессы в анизотропных средах, причем данные модели можно разделить на модели сред с анизотропией электрических свойств (плазма во внешнем магнитном поле) и с анизотропией магнитных свойств (магнетики во внешнем магнитном поле). Конкретный вид возможных граничных условий для каждой модели будет следовать из уравнений (1.10) и явного вида операторных тензоров электрической или магнитной восприимчивости.

§ 2. Холодная плазма во внешнем магнитном поле

Простейшая модель магнитоактивной плазмы, т.е. плазмы, помещенной во внешнее магнитное поле, — это модель холодной бесстолкновительной плазмы [Лифшиц]. Температура подобной плазмы предполагается настолько низкой, что тепловым движением частиц можно пренебречь. Условия применимости этого приближения (см.: [Петвиашвили]):

$$v_T|k_\parallel|/\omega \ll 1, \quad v_T|k_\perp|/\omega_B \ll 1, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{k}_\parallel$, $\mathbf{k}_\perp$ — составляющие волнового вектора вдоль и поперек внешнего магнитного поля $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{v}_T$ — тепловая скорость частицы, ω — характерная частота колебания электромагнитного поля, $\omega_B = |q|B_0/(mc)$ — ларморова частота частицы заряда q. Неравенства (2.1) должны выполняться для каждого рода частиц в плазме. Кроме того, частота ω не должна быть слишком близкой к ларморовой частоте какой-либо из частиц плазмы, поскольку вблизи этих частот нужно учитывать пространственную дисперсию при выполнении условий (2.1).

В указанных предположениях рассмотрим бесстолкновительную «холодную» ионно-электронную плазму, помещенную во внешнее магнитное поле $\mathbf{B}_0$. Выберем декартову систему координат $\{x,y,z\}$, в которой направление магнитного поля $\mathbf{B}_0$ совпадает с осью z. Линеаризованные уравнения движения ионов и электронов вместе с уравнениями Максвелла в приближении квазистационарного поля имеют вид (см. [Лифшиц; Гинзбург]):

$$m\frac{\partial \mathbf{v_e}}{\partial t} = e\nabla\varphi - m\omega_{Be}[\mathbf{v_e}, \mathbf{e_3}], \tag{2.2a}$$

$$M\frac{\partial \mathbf{v_i}}{\partial t} = -Ze\nabla\varphi + M\omega_{Bi}[\mathbf{v_i}, \mathbf{e_3}], \tag{2.2б}$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + en_0\mathbf{v_e} - Zen_0\mathbf{v_i} = 0, \tag{2.3а}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 0,\ \mathbf{D} = -\nabla\varphi + 4\pi\mathbf{P}, \tag{2.3б}$$

где индексы e, i относятся к электронам и ионам соответственно, $\omega_{Be} = eB_0/(mc)$, $\omega_{Bi} = ZeB_0/Mc$ — ларморовы частоты электронов и ионов (M и m — их масса соответственно), φ — потенциал электрического поля, $\mathbf{D}$, $\mathbf{P}$ — векторы электрической индукции и поляризации.

Проинтегрировав уравнения (2.2) по времени, получим

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{A}}_e\mathbf{v}_e &= \frac{e}{m}\widehat{S}_1{*}\nabla\varphi + \mathbf{f}^{(e)}(x), \\ \widehat{\mathbf{A}}_i\mathbf{v}_i &= -\frac{Ze}{M}\widehat{S}_1{*}\nabla\varphi + \mathbf{f}^{(i)}(x), \\ \mathbf{P} &= en_0\widehat{S}_1{*}(Z\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) + \mathbf{P}_0(x), \end{aligned} \tag{2.4}$$

где матричные операторы $\widehat{\mathbf{A}}_e$ и $\widehat{\mathbf{A}}_i$ из уравнений (2.4) имеют вид

$$\widehat{\mathbf{A}}_e = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \omega_{Be}\widehat{S}_1{*} & 0 \\ -\omega_{Be}\widehat{S}_1{*} & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

$$\widehat{\mathbf{A}}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\omega_{Bi}\widehat{S}_1{*} & 0 \\ \omega_{Bi}\widehat{S}_1{*} & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

$\mathbf{f}^{(e)}(x)$, $\mathbf{f}^{(i)}(x)$ — начальные распределения скоростей электронов и ионов соответственно, $\mathbf{P}_0(x)$ — начальное распределение поляризации плазмы, $\mathbf{I}$ — единичный оператор, $\widehat{S}_g{*}$ — сверточный вольтерровский оператор с ядром $g(t) \in \mathbb{C}^{(0)}[0; +\infty)$:

$$\widehat{S}_g{*}u = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)\,d\tau\,.$$

Определители матричных операторов $\widehat{\mathbf{A}}_e$ и $\widehat{\mathbf{A}}_i$ равны почти единичным вольтерровским операторам (см. [Вольтерра; Плетнер]):

$$\widehat{\det}\,\widehat{\mathbf{A}}_e = \mathbf{I} + \omega_{Be}^2\widehat{S}_t{*}, \quad \widehat{\det}\,\widehat{\mathbf{A}}_i = \mathbf{I} + \omega_{Bi}^2\widehat{S}_t{*},$$

причем операторы вида $\mathbf{I} + \widehat{S}_g{*}$ образуют абелеву группу относительно умножения (см. [Плетнер]). В частности, оператор

$$\mathbf{I} - \omega_{Be(i)}\widehat{S}_{sin(\omega_{Be(i)}t)}{*}$$

является обратным к оператору $\mathbf{I}+\omega^2_{Be(i)}\widehat{S}_{t}*$, поэтому для матричных операторов (2.6) определены обратные матричные операторы, имеющие вид:

$$\widehat{\mathbf{A}}_e^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{I}-\omega_{Be}\widehat{S}_{sin(\omega_{Be}t)}* & -\omega_{Be}\widehat{S}_1* & 0\\ \omega_{Be}\widehat{S}_1* & \mathbf{I}-\omega_{Be}\widehat{S}_{sin(\omega_{Be}t)}* & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{I}\end{pmatrix},$$

$$\widehat{\mathbf{A}}_i^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{I}-\omega_{Bi}\widehat{S}_{sin(\omega_{Bi}t)}* & \omega_{Bi}\widehat{S}_1* & 0\\ -\omega_{Bi}\widehat{S}_1* & \mathbf{I}-\omega_{Bi}\widehat{S}_{sin(\omega_{Bi}t)}* & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{I}\end{pmatrix}.$$

Разрешая уравнения (2.4) относительно вектор-функций $\mathbf{v}_e$, $\mathbf{v}_i$ и подставляя полученные выражения в уравнение для вектора поляризации (2.5), получаем

$$P_l=-\widehat{\varkappa}_{lj}*\varphi_{x_j}(x,t)+\frac{1}{4\pi}F_{l0}(x,t), \tag{2.7}$$

где $\widehat{\varkappa}=(\widehat{\varkappa}_{lj}*)$ — операторный тензор электрической восприимчивости,

$$\widehat{\varkappa}=\frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix}\widehat{\varkappa}_1* & -\widehat{\varkappa}_2* & 0\\ \widehat{\varkappa}_2* & \widehat{\varkappa}_1* & 0\\ 0 & 0 & \widehat{\varkappa}_3*\end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

$$\widehat{\varkappa}_1*=\frac{\omega^2_{pi}}{\omega_{Bi}}\widehat{S}_{sin(\omega_{Bi}t)}*+\frac{\omega^2_{pe}}{\omega_{Be}}\widehat{S}_{sin(\omega_{Be}t)}*,$$
$$\widehat{\varkappa}_2*=(1/2)(\omega^2_{pe}\omega_{Be}-\omega^2_{pi}\omega_{Bi})\widehat{S}_{t^2}*,\ \widehat{\varkappa}_3*=\omega^2_p\widehat{S}_t*,$$

$\omega^2_p=\omega^2_{pi}+\omega^2_{pe}$, $\omega^2_{pi}=4\pi Z^2e^2n_0/M$ — частота Ленгмюра для ионов, $\omega^2_{pe}=4\pi e^2n_0/m$ — частота Ленгмюра для электронов,

$$F_{l0}(x,t)=4\pi P_{l0}(x)+4\pi en_0\left[(\widehat{\mathbf{A}}_i^{-1})_{lj}f_j^{(i)}(x)-(\widehat{\mathbf{A}}_e^{-1})_{lj}f_j^{(e)}(x)\right]\frac{t^2}{2}.$$

Подставляя уравнение (2.7) с учетом (2.8) в уравнение (2.3), получаем интегродифференциальное уравнение электронно-ионных волн в холодной «замагниченной» плазме:

$$\triangle_3\varphi(x,t)+\omega_p^2\int\limits_0^t d\tau\,(t-\tau)\varphi_{x_3x_3}(x,\tau)+\int\limits_0^t d\tau\,\{\omega^2_{pe}sin[\omega_{Be}(t-\tau)]/\omega_{Be}+$$
$$+\,\omega^2_{pi}sin[\omega_{Bi}(t-\tau)]/\omega_{Bi}\}\triangle_2\varphi(x,\tau)=\operatorname{div}\mathbf{F_0}(x,t), \tag{2.9}$$
$$\triangle_2\equiv\partial^2/\partial x_1^2+\partial^2/\partial x_2^2.$$

Если ввести в рассмотрение функцию $\Phi(\mathbf{r},t)$, определяемую уравнением

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_{B_e}^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_{Bi}^2\right)\Phi(\mathbf{r},t)$$

и удовлетворяющую калибровочным условиям

$$\left.\frac{\partial^k}{\partial t^k}\Phi(x,t)\right|_{t=0}=0,\quad k=\overline{0,5}\,,$$

то из уравнения (2.9) вытекает дифференциальное уравнение в частных производных для обобщенного потенциала электрического поля $\Phi(x,t)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_e^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_i^2\right)\triangle_2\Phi+ \\ +\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_p^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_{Be}^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_{Bi}^2\right)\Phi_{x_3x_3}= \\ =\operatorname{div}\mathbf{F_0}(x,t),\quad (2.10)$$

где $\omega_i=\sqrt{\omega_{pi}^2+\omega_{Bi}^2}$, $\omega_e=\sqrt{\omega_{pe}^2+\omega_{Be}^2}$.

Отметим, что при $\omega\gg\sqrt{\omega_{Bi}\omega_{Be}}$ ионы можно считать неподвижными [Лифшиц]. В этом случае исходная векторная система уравнений состоит из уравнений (2.2), (2.3), где нужно формально потребовать равенства $\mathbf{v}_i=0$. При этом выражение для операторного тензора электрической восприимчивости можно получить из уравнения (2.8), в котором нужно взять все величины с индексом i равными нулю:

$$\widehat{\varkappa}=\frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix}\widehat{\varkappa}_1* & -\widehat{\varkappa}_2* & 0\\ \widehat{\varkappa}_2* & \widehat{\varkappa}_1* & 0\\ 0 & 0 & \widehat{\varkappa}_3*\end{pmatrix},\qquad (2.11)$$

$$\widehat{\varkappa}_1*=\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}}\widehat{S}_{sin(\omega_{Be}t)}*,\quad \widehat{\varkappa}_2*=(1/2)\omega_{pe}^2\omega_{Be}\widehat{S}_{t^2}*,\quad \widehat{\varkappa}_3*=\omega_{pe}^2\widehat{S}_t*\,.$$

Таким образом, интегродифференциальное уравнение электронных волн в холодной плазме во внешнем поле имеет вид

$$\triangle_3\varphi+\omega_{pe}^2\int_0^t d\tau\,(t-\tau)\varphi_{x_3x_3}(x,\tau)+ \\ +\omega_{pe}^2\int_0^t d\tau\,\frac{sin[\omega_{Be}(t-\tau)]}{\omega_{Be}}\triangle_2\varphi(x,\tau)=\operatorname{div}\mathbf{F_0}(x,t),\quad (2.12)$$

а соответствующее дифференциальное уравнение для обобщенного потенциала $\Phi(x,t)$, связанного с кулоновским потенциалом $\varphi(x,t)$ электрического поля соотношением

$$\varphi(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{B_e}^2\right)\Phi(x,t) \tag{2.13}$$

и удовлетворяющего калибровочным условиям

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}\Phi(x,t)\Big|_{t=0} = 0, \quad k = \overline{0,3},$$

примет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{pe}^2 + \omega_{Be}^2\right)\triangle_2\Phi + \\ + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{pe}^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{Be}^2\right)\Phi_{x_3x_3} = \operatorname{div}\mathbf{F_0}(x,t). \tag{2.14}$$

Приведем граничные условия на границе раздела «идеальный» проводник — «холодная» плазма. Для простоты мы рассмотрим случай неподвижных ионов (2.11)–(2.14), поскольку таким же образом могут быть получены граничные условия и для модели «холодной» ионно-электронной плазмы. С этой целью подставим в общее граничное условие (1.10) выражение для операторного тензора электрической восприимчивости (2.11), а затем подставим в (1.10в) уравнение (2.13) для обобщенного потенциала $\Phi(x,t)$ квазистационарного электрического поля и учтем калибровочные условия (2.14). Предполагая, что электрическое поле не проникает в «идеальный» проводник, получаем следующее граничное условие:

$$\mathfrak{L}_{tx}\Phi(x,t)\Big|_{x\in S} \equiv \left(\mathfrak{N}_{tx}\Phi(x,t) + \mathfrak{R}_{tx}\Phi(x,t)\right)\Big|_{x\in S} = \widetilde{\eta}(x,t)\big|_{x\in S}, \tag{2.15}$$

где

$$\mathfrak{N}_{tx}\Phi(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{Be}^2\right)\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial n_x} + \\ + 4\pi\omega_{pe}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{Be}^2\right)\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial x_3}\cos(\mathbf{n},\mathbf{e}_3) + \\ + 4\pi\omega_{pe}^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial x_1}\cos(\mathbf{n},\mathbf{e}_1) + \frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial x_2}\cos(\mathbf{n},\mathbf{e}_2)\right),$$

$$\mathfrak{R}_{tx}\Phi(x,t) = 4\pi\omega_{pe}^2\omega_{Be}\left(\frac{\partial^2\Phi(x,t)}{\partial t\partial x_1}\cos(\mathbf{n},\mathbf{e}_2) - \frac{\partial^2\Phi(x,t)}{\partial t\partial x_2}\cos(\mathbf{n},\mathbf{e}_1)\right) +$$

$$+ 4\pi\omega_{pe}^4\omega_{Be}\int\limits_0^t d\tau\,\left(\frac{\partial\Phi(x,\tau)}{\partial x_1}\cos(\mathbf{n},\mathbf{e}_2) - \frac{\partial\Phi(x,\tau)}{\partial x_2}\cos(\mathbf{n},\mathbf{e}_1)\right),$$

$\widetilde{\eta}(x,t)$ — поверхностная плотность заряда на поверхности проводника S. Если на проводнике задан полный заряд (основная задача электростатики [Смайт; Стрэттон; Тамм]) $q(t)$, $t\in[0,+\infty)$, то естественным граничным условием будет условие

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_S ds\,\mathfrak{L}_{tx}\Phi(x,t)\Big|_{x\in S} = q(t), \tag{2.16}$$

где оператор $\mathfrak{L}_{tx}$ определен в (2.15). В случае системы непересекающихся проводников для корректной постановки начально-краевой задачи достаточно задания заряда на каждом из проводников (см., например, [Тамм]) Кроме того, из граничного условия (1.10) вытекает, что

$$\Phi(x,t)\Big|_{x\in S} = C(t), \tag{2.17}$$

$C(t)$ — либо заданная функция времени, либо неизвестная функция, в последнем случае условие (2.17) должно рассматриваться совместно с условием (2.16).

Отметим, что по своей структуре граничный оператор $\mathfrak{N}_{tx}$ является некоторым аналогом классического оператора нормальной производной для уравнений высокого порядка составного типа [Плетнер], а оператор $\mathfrak{R}_{tx}$, как нетрудно заметить, — аналогом касательной производной. Таким образом, общий граничный оператор в краевом условии (2.15) является своеобразным неклассическим аналогом косой производной для уравнений составного типа.

Итак, математической моделью данной физической проблемы являются начально-краевые задачи для уравнения (2.14) с граничным условием (2.15).

§ 3. Двухтемпературная плазма во внешнем магнитном поле

Наряду с плазменными волнами, связанными с колебаниями электронов, в плазме могут распространятся также и ионно-звуковые волны, в которых существенные колебания испытывают как электронная, так и ионная плотности. Эти колебания имеют слабое затухание в том случае, если температура ионов T_i много меньше температуры электронов T_e (см. [Ландау]):

$$T_i \ll T_e\,.$$

В предположении, что давление плазмы мало по сравнению с давлением магнитного поля, $\beta \equiv 8\pi p_0/B_0^2 \ll 1$ (p_0 — невозмущенное давление

в плазме, $\mathbf{B_0}$ — невозмущенное магнитное поле), электрическое поле можно считать потенциальным:

$$c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = \partial_t \mathbf{B} \cong \mathbf{0}.$$

Кроме того, при условии $\omega > \omega_{Bi}$ можно считать, что «свободные» электроны распределены по Больцману. С точки зрения электродинамического описания колебаний в данной системе ионы можно считать внутренними зарядами, движение которых приводит к возникновению поляризации плазмы, а электроны — внешними зарядами.

Линеаризованная система уравнений, описывающая ионно-звуковые волны в бесстолкновительной плазме во внешнем однородном магнитном поле $\mathbf{B_0} = B_0\mathbf{e_3}$, имеет вид (см. [Петвиашвили])

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} = -(e/M)\nabla\varphi - \omega_{Bi}[\mathbf{e}_3, \mathbf{v}_i], \qquad (3.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = en_0\mathbf{v}_i,$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = -4\pi e n_e, \qquad (3.2)$$

$$\mathbf{D} = -\nabla\varphi + 4\pi\mathbf{P}, \qquad (3.3)$$

$$n_e = n_0 e\varphi/T_e, \qquad (3.4)$$

где $\mathbf{v}_i$ — гидродинамическая скорость, n_0 — невозмущенная плотность частиц, n_e — возмущенная часть плотности электронов, например, $n_e = n_0 exp(e\varphi/T_e) - n_0$, $\mathbf{P}$ — вектор поляризации плазмы, вызванный движением ионов, $\omega_{Bi} = eB_0/(Mc)$. В уравнении движения мы пренебрегли давлением ионов.

Система уравнений (3.1)–(3.4) отличается от системы (2.2), (2.3) только тем, что в уравнениях (3.1) отсутствуют слагаемые, связанные с движением электронов (слагаемые с индексом e), а в уравнении (3.2) для вектора индукции электрического поля электроны учитываются как внешние заряды в системе «ионы во внешнем магнитном поле». Поэтому из уравнений (2.7), (2.8), формально положив все величины с индексом e равными нулю, получим

$$P_l = -\widehat{\varkappa}_{lj} * \varphi_{x_j}(x,t) + (4\pi)^{-1} F_{l0}(x,t), \qquad (3.5)$$

где $\widehat{\varkappa} = (\widehat{\varkappa}_{lj}*)$ — операторный тензор электрической восприимчивости, равный

$$\widehat{\varkappa} = \frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} \widehat{\varkappa}_1* & \widehat{\varkappa}_2* & 0 \\ -\widehat{\varkappa}_2* & \widehat{\varkappa}_1* & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{\varkappa}_3* \end{pmatrix},$$

$$\widehat{\varkappa}_1* = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{Bi}}\widehat{S}_{sin(\omega_{Bi}t)}*,\ \widehat{\varkappa}_2* = (1/2)\omega_{pi}^2\omega_{Bi}\widehat{S}_{t^2}*,\ \widehat{\varkappa}_3* = \omega_{pi}^2\widehat{S}_t*,$$

$$F_{l0}(x,t) = 4\pi P_{l0}(x) + 4\pi e n_0 (\widehat{\mathbf{A}}_i^{-1})_{lj} f_j^{(i)}(x)\frac{t^2}{2},$$

матричный оператор $\widehat{\mathbf{A}}^{-1}$ определен в (2.13).

Подставляя выражение (3.5) для вектора поляризации плазмы в уравнение (3.3), а получившееся выражение для вектора индукции электрического поля — в уравнение Пуассона (3.2), с учетом (3.4) получим интегродифференциальное уравнение ионно-звуковых волн в «замагниченной» плазме:

$$\triangle_3\varphi - \frac{1}{r_D^2}\varphi + \omega_{pi}^2 \int\limits_0^t d\tau\,(t-\tau)\varphi_{x_3x_3}(x,\tau) + \\ + \omega_{pi}^2 \int\limits_0^t d\tau\,\frac{sin[\omega_{Bi}(t-\tau)]}{\omega_{Bi}}\triangle_2\varphi(x,\tau) = \operatorname{div}\mathbf{F_0}(x,t), \quad (3.6)$$

где $\omega_{pi}^2 = 4\pi e^2 n_0/M$ — частота Ленгмюра для ионов, $r_D = [T_e/(4\pi n_0 e^2)]^{1/2}$ — радиус Дебая, $\omega_{Bi} = eB_0/(Mc)$ — ионная гирочастота.

Если ввести обобщенный потенциал $\Phi(x,t)$, связанный с кулоновским потенциалом $\varphi(x,t)$ электрического поля соотношением

$$\varphi(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{B_i}^2\right)\Phi(x,t)$$

и удовлетворяющий начальным условиям, имеющим смысл калибровочных условий на обобщенный потенциал,

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}\Phi(x,t)\bigg|_{t=0} = 0, \quad k = \overline{0,3},$$

то из уравнения (3.6) вытекает дифференциальное уравнение для обобщенного потенциала электрического поля:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{Bi}^2\right)\left(\triangle_3\Phi - \frac{1}{r_D^2}\Phi\right) + \\ + \omega_{pi}^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\triangle_3\Phi + \omega_{pi}^2\omega_{Bi}^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2} = \operatorname{div}\mathbf{F_0}(x,t). \quad (3.7)$$

Отметим, что вывод уравнения ионно-звуковых волн в «незамагниченной» плазме вместе с постановкой начально-краевых задач имеется в работах [Габов, 2]. В частности, наиболее типичные граничные условия, соответствующие основной задаче электростатики о нахождении распределения поля в среде с заданным распределением заряда на проводнике, имеют вид (2.15)–(2.17).

Рассмотрим теперь некоторые волновые процессы в двухтемпературной плазме, наблюдаемые в случае низкочастотных колебаний: $\omega \ll \omega_{Bi}$ или $\omega \ll \omega_{Be}$.

В первом случае $\omega \ll \omega_{Bi}$ в работах [Кудашев; Ситенко; Каменец] была предложена модель для описания низкочастотных волн, сводящаяся к системе векторных уравнений динамики электронной и ионной компонент плазмы. Рассматривались колебания плазмы, однородные вдоль направления внешнего магнитного поля $\mathbf{B_0} = B_0\mathbf{e}_3$, с частотами $\omega < \omega_{Bi}$ и волновыми векторами, удовлетворяющими неравенству $1/\rho_i < k < 1/\rho_e$, где ρ_i и ρ_e — соответственно гирорадиусы для электронов и ионов. Тогда для движения электронов можно воспользоваться гидродинамическим описанием [Гинзбург]. Таким образом, в линейном приближении имеем

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + en_0\mathbf{v}_e = 0. \tag{3.8}$$

Ионы в данном случае рассматриваются как внешние заряды по отношению к системе «электроны во внешнем магнитном поле»:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi e n_i, \quad \mathbf{D} = -\nabla\varphi_e + 4\pi\mathbf{P}, \tag{3.9}$$

где n_i — возмущенная плотность ионов, а $\varphi_e(x,t)$ — потенциал электрического поля электронов. В случае низкочастотных колебаний по отношению к циклотронному вращению ионов, а стало быть, и по отношению к электронам, используют так называемое дрейфовое приближение для уравнения движения частиц [Клеммоу] (в данном случае для электронов):

$$\mathbf{v}_e = \frac{c}{B_0}\left(-[\nabla\varphi_e, \mathbf{e}_3] + \frac{1}{\omega_{Be}}\frac{\partial}{\partial t}\nabla_\perp\varphi_e\right) + v_{e3}\mathbf{e}_3, \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial v_{e3}}{\partial t} = \frac{e}{m}\frac{\partial\varphi_e}{\partial x_3}, \tag{3.11}$$

n_0 — невозмущенная плотность частиц, $\mathbf{v}_e$ — скорость электронов. Поскольку рассматриваются коротковолновые колебания плазмы, то для ионов гидродинамическое описание неприменимо. Для коротковолновых колебаний становится существенным тепловое движение ионов в поперечном направлении. Такое движение должно приводить к быстрому установлению больцмановского распределения ионов в поле колебаний. В линейном приближении для возмущенной части плотности ионов в поле потенциала $\varphi_e(x,t)$ имеем

$$n_i = -n_0 e\varphi_e/T_i. \tag{3.12}$$

Во случае $\omega \ll \omega_{Be}$ в работе [Кудашев] рассматривалась модель низкочастотных колебаний плазмы в предположении, что $\omega_{Bi} < \omega \ll \omega_{Be}$. В этом случае электроны рассматривались как внешние заряды по отношению к системе «ионы во внешнем магнитном поле»:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = -4\pi e n_e, \quad \mathbf{D} = -\nabla\varphi_i + 4\pi\mathbf{P}, \tag{3.13}$$

где n_e — возмущенная плотность электронов. При этом электроны распределены в поле потенциала $\varphi_i(x,t)$ электрического поля ионов по закону Больцмана. В линейном приближении для возмущенной части плотности электронов в поле потенциала $\varphi_i(x,t)$ имеем

$$n_e = n_0 e\varphi_i/T_e. \tag{3.14}$$

Ионы для простоты считаются «холодными» и описываются в рамках дрейфового приближения линейными уравнениями движения:

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} - en_0\mathbf{v}_i = 0, \tag{3.15}$$

$$\mathbf{v}_i = -\frac{c}{B_0}\left\{-[\nabla\varphi_i, \mathbf{e}_3] + \frac{1}{\omega_{Be}}\frac{\partial}{\partial t}\nabla_\perp\varphi_i\right\} + v_{i3}\mathbf{e}_3, \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial v_{i3}}{\partial t} = -\frac{e}{M}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_3}, \tag{3.17}$$

n_0 — невозмущенная плотность частиц, $\mathbf{v}_i$ — скорость ионов.

Полученные системы (3.8)–(3.12) и (3.9)–(3.17) являются векторными, что в ряде случаев сильно осложняет изучение свойств решений начально-краевых задач для этих систем. Покажем, как можно свести полученные математические модели к начально-краевым задачам для скалярных уравнений в частных производных высокого порядка составного типа.

Поскольку система уравнений (3.8)–(3.12) переходит в систему уравнений (3.13)–(3.17) при замене индексов $e \leftrightarrow i$ и одновременном изменении знака $n_i \mapsto -n_e$, $\mathbf{v}_e \mapsto -\mathbf{v}_i$, то рассмотрим первую систему уравнений и выпишем окончательные результаты для второй системы.

Проинтегрируем по времени уравнение (3.11) и подставим получившееся выражение вместе с уравнением (3.10) в выражение (3.8), которое, в свою очередь, проинтегрируем по времени. В результате получим

$$P_l = -\widehat{\varkappa}_{lj} * \varphi_{ex_j}(x,t) + (4\pi)^{-1}F_{l0}(x,t), \tag{3.18}$$

где операторный тензор электрической восприимчивости $\widehat{\varkappa} = (\widehat{\varkappa}_{lj}*)$ имеет вид

$$\widehat{\varkappa} = \frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} (c^2/u_{\mathrm{A}e}^2)\mathbf{I} & (\omega_{pe}^2/\omega_{Be})\widehat{S}_1* & 0 \\ -(\omega_{pe}^2/\omega_{Be})\widehat{S}_1* & (c^2/u_{\mathrm{A}e}^2)\mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{pe}^2\widehat{S}_t* \end{pmatrix}, \tag{3.19}$$

$u_{\mathrm{A}e} = B_0/\sqrt{4\pi n_0 m}$ — альфвеновская скорость для электронов,

$$\mathbf{F}_0(x,t) = -4\pi e n_0 v_{e3}(x,0)t\mathbf{e}_3 + 4\pi e(n_0/\omega_{Be})\nabla_\perp\varphi_e(x,0).$$

Из уравнений (3.9), (3.12) и (3.18),(3.19) вытекает интегродифференциальное уравнение, описывающее низкочастотные электронные магнито-звуковые волны:

$$\left(1+\frac{c^2}{u_{\mathrm{A}e}^2}\right)\triangle_2\varphi_e+(\varphi_e)_{x_3x_3}-\frac{1}{r_{\mathrm{D}e}^2}\varphi_e+ \\ +\omega_{pe}^2\int\limits_0^t d\tau\,(t-\tau)(\varphi_e)_{x_3x_3}(x,\tau)=\operatorname{div}\mathbf{F_0}(x,t), \quad (3.20)$$

где $r_{\mathrm{D}e}^2=T_e^2/(4\pi e^2n_0)$ — квадрат электронного дебаевского радиуса. Введем обобщенный потенциал электрического поля $\Phi_e(x,t)$:

$$\varphi_e(x,t)=\frac{\partial^2\Phi_e}{\partial t^2},$$

удовлетворяющий калибровочным условиям

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}\Phi_e(x,t)\bigg|_{t=0}=0, \quad k=\overline{0,1}.$$

Тогда уравнение (3.20) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\triangle_2\Phi_e+\frac{u_{\mathrm{A}e}^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\triangle_3\Phi_e-\frac{1}{r_{\mathrm{D}e}^2}\Phi_e\right)+ \\ +\omega_{Be}^2\frac{\partial^2\Phi_e}{\partial x_3^2}=\frac{u_{\mathrm{A}e}^2}{c^2}\operatorname{div}\mathbf{F}_0(x,t). \quad (3.21)$$

Рассмотрим теперь систему уравнений (3.13)–(3.17). Отметим, что операторный тензор электрической восприимчивости совпадает с (3.19) при замене индекса e на i. При этом интегродифференциальное уравнение, описывающее низкочастотные ионные магнито-звуковые волны, имеет вид

$$\left(1+\frac{c^2}{u_{\mathrm{A}i}^2}\right)\triangle_2\varphi_i+(\varphi_i)_{x_3x_3}-\frac{1}{r_{\mathrm{D}i}^2}\varphi_i+ \\ +\omega_{pi}^2\int\limits_0^t d\tau\,(t-\tau)(\varphi_i)_{x_3x_3}(x,\tau)=\operatorname{div}\mathbf{F_0}(x,t),$$

где $u_{\mathrm{A}i}=B_0/\sqrt{4\pi n_0M}$ — альфвеновская скорость для ионов, $r_{\mathrm{D}i}^2=$ $=T_i^2/(4\pi e^2n_0)$ — квадрат ионного дебаевского радиуса. Для обобщенного потенциала электрического поля $\Phi_i(x,t)$

$$\varphi_i(x,t)=\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^k}{\partial t^k}\Phi_i(x,t)\bigg|_{t=0}=0, \quad k=\overline{0,1},$$

дифференциальное уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\triangle_2\Phi_i+\frac{u_{\mathrm{A}i}^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\triangle_3\Phi_i-\frac{1}{r_{\mathrm{D}i}^2}\Phi_i\right)+$$

$$+\omega_{Bi}^2\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial x_3^2}=\frac{u_{\mathrm{A}i}^2}{c^2}\operatorname{div}\mathbf{F}_0(x,t). \quad (3.22)$$

Типичные граничные условия для уравнений (3.21), (3.22) будут иметь вид (2.15)–(2.17) с граничным оператором косой производной

$$\mathfrak{L}_{tx}\equiv\mathfrak{N}_{tx}+\mathfrak{R}_{tx},$$

$$\mathfrak{N}_{tx}\equiv\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial n_x}+\frac{c^2}{u_{\mathrm{A}e}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\cos(\mathbf{n},\mathbf{e}_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+\cos(\mathbf{n},\mathbf{e}_2)\frac{\partial}{\partial x_2}\right)+$$
$$+\omega_{pe}^2\cos(\mathbf{n},\mathbf{e}_3)\frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$\mathfrak{R}_{tx}\equiv\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}}\left(\cos(\mathbf{n},\mathbf{e}_1)\frac{\partial^2}{\partial t\partial x_2}-\cos(\mathbf{n},\mathbf{e}_2)\frac{\partial^2}{\partial t\partial x_1}\right).$$

Тем самым физические проблемы сведены к начально-краевым задачам для скалярных уравнений высокого порядка (3.21) и (3.22).

§ 4. Спиновые волны в магнетиках во внешнем магнитном поле

В макроскопической теории анизотропия магнитных свойств ферромагнетиков описывается путем введения в термодинамический потенциал энергии анизотропии. Для одно- и двуосных кристаллов разложение энергии анизотропии начинается с членов второй степени по компонентам $\mathbf{m}=\mathbf{M}/|\mathbf{M}|$ (см. [Ландау]):

$$U_{\text{ан}}=K_{ij}\,m_im_j, \quad (4.1)$$

где K_{ij} — симметричный тензор второго ранга, компоненты которого имеют размерность плотности энергии. С другой стороны, предполагается, что размеры ферромагнетика намного больше по сравнению с размерами, при которых существенна энергия неоднородности. В этом случае можно не учитывать ее вклад в свободную энергию ферромагнетика [Ландау].

Пусть $\{\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}\}$ — ортогональный базис в диагональном представлении тензора K_{ij}. Рассмотрим некоторые частные случаи выражения (4.1), реализуемые для одноосных кристаллов. Тензор K_{ij} для одноосных кристаллов имеет две независимые компоненты, а поскольку имеется квадратичная комбинация, не зависящая от направления вектора $\mathbf{m}$, $m_x^2+m_y^2+m_z^2=1$, то выражение (4.1) содержит всего один независимый коэффициент:

$$U_{\text{ан}}=-Km_z^2 \text{ — одноосный ферромагнетик.}$$

В зависимости от знака коэффициента K энергия анизотропии $U_{\text{ан}}$ будет минимальна при некоторых определенных направлениях вектора намагниченности $\mathbf{M}$:

$$K > 0 : \mathbf{M} = M_3\mathbf{e_3} \text{ — ферромагнетик типа «легкая» ось } (\mathbf{e_3}),$$

$$K < 0 : \mathbf{M} \perp \mathbf{e_3} \text{ — ферромагнетик типа «легкая» плоскость } (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}).$$

В рамках макроскопического описания движения магнитного момента для неметаллических ферромагнетиков (ферритов), можно воспользоваться бездиссипативным уравнением Ландау–Лифшица [Ландау; Виноградова]

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \gamma[\mathbf{H}, \mathbf{M}], \tag{4.2}$$

где $\mathbf{H} = \mathbf{H} + \beta M_z \mathbf{e}_3$ — эффективное магнитное поле в ферромагнетике, $\mathbf{H}$ — внешнее магнитное поле, $\beta = K/|\mathbf{M}|^2$, $\gamma = g|e|/2mc$, g — гиромагнитное отношение ферромагнетика. Кроме того, как всегда, предполагаем, что электромагнитное поле квазистационарно: $\omega \ll c/l$, l — характерные размеры тела. Тогда к уравнению Ландау–Лифшица (4.2) необходимо добавить уравнения «квазистационарного» магнитного поля:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} + \mathbf{4}\pi\mathbf{M}. \tag{4.3}$$

Рассмотрим сначала случай одноосного феррита типа «легкая» ось: $\mathbf{M_0} = M_0\mathbf{e}_3$, $\mathbf{H_0} = H_0\mathbf{e}_3$ — внешнее поле. Линеаризованное уравнение Ландау–Лифшица в данном случае примет вид

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = \gamma[\mathbf{H}, M_0\mathbf{e_3} + \mathbf{m}], \tag{4.4}$$

где $\mathbf{H} = H_0\mathbf{e_3} + \mathbf{h} + \beta M_0\mathbf{e}_3 + \beta\widetilde{m}_z\mathbf{e}_3$, $\mathbf{H} = H_0\mathbf{e_3} + \mathbf{h}$, $\beta = K/M_0^2$, $\mathbf{B} = (H_0 + 4\pi M_0)\mathbf{e_3} + \mathbf{h} + \mathbf{4}\pi\mathbf{m}$,

Таким образом, из системы уравнений (4.3), (4.4) получим

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = \gamma(H_0 + \beta M_0)[\mathbf{e_3}, \mathbf{m}] - \gamma M_0[\nabla\psi, e_3], \tag{4.5}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = 0, \ \mathbf{b} = -\nabla\psi + 4\pi\mathbf{m}, \ \mathbf{h} = -\nabla\psi, \tag{4.6}$$

где $\psi(x,t)$ — скалярный потенциал магнитного поля. Так же как и в предыдущих случаях, сведем эту систему к одному скалярному уравнению в частных производных высокого порядка составного типа. Проинтегрировав уравнение (4.5) по времени, получим

$$\widehat{\mathbf{V}}_1\mathbf{m} = -\widehat{\mathbf{V}}_2\nabla\psi + \mathbf{m}_0(x),$$

$$\widehat{\mathbf{V}}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \omega_1\widehat{S}_1* & 0 \\ -\omega_1\widehat{S}_1* & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \ \widehat{\mathbf{V}}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma M_0\widehat{S}_1* & 0 \\ -\gamma M_0\widehat{S}_1* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\omega_1 = \gamma(H_0 + \beta M_0)$. Матричный оператор $\widehat{\mathbf{V}}_1$ обратим, поскольку определитель этого матричного оператора равен почти единичному сверточному вольтерровскому (см. [Плетнер]):

$$\widehat{\det}\,\widehat{\mathbf{V}}_1 = \mathbf{I} + \omega_1^2 \widehat{S}_t *,$$

который однозначно обратим: $(\mathbf{I} + \omega_1^2 \widehat{S}_t *)^{-1} = \mathbf{I} - \omega_1 \widehat{S}_{\sin(\omega_1 t)} *$. Таким образом, обращая матричный оператор $\widehat{\mathbf{V}}_1$, в результате ряда преобразований приходим к следующему уравнению для намагниченности $\mathbf{m}$:

$$m_l = -\widehat{\chi}_{lj} * \psi_{x_j}(x,t) + \frac{1}{4\pi} q_l(x,t), \tag{4.7}$$

$$\widehat{\chi} = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} (\omega_2^2/\omega_1)\widehat{S}_{\sin(\omega_1 t)} * & \gamma M_0 \widehat{S}_{\cos(\omega_1 t)} * & 0 \\ -\gamma M_0 \widehat{S}_{\cos(\omega_1 t)} * & (\omega_2^2/\omega_1)\widehat{S}_{\sin(\omega_1 t)} * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

$q_l(x,t) = 4\pi(\widehat{\mathbf{V}}_1^{-1})_{lj} m_{ol}(x)$, $\omega_2^2 = 4\pi\gamma^2 M_0(H_0 + \beta M_0)$. Подставляя уравнение (4.7) в (4.6), с учетом (4.8) получаем интегродифференциальное уравнение спиновых волн в однородном феррите типа «легкая ось»:

$$\triangle_3 \psi(x,t) + \omega_2^2 \int_0^t d\tau \, \frac{sin[\omega_1(t-\tau)]}{\omega_1} \triangle_2 \psi(x,\tau) = 4\pi \operatorname{div} \mathbf{q}(x,t). \tag{4.9}$$

Введем обобщенный потенциал магнитного поля $\Psi(x,t)$, удовлетворяющий уравнению

$$\psi = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_1^2 \right) \Psi(x,t) \tag{4.10}$$

и дополнительным калибровочным условиям

$$\left. \frac{\partial^k}{\partial t^k} \Psi(x,t) \right|_{t=0} = 0, \quad k = \overline{0,1}. \tag{4.11}$$

Тогда из уравнения (4.9) с учетом (4.10) и (4.11) получим следующее уравнение:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_1^2 \right) \triangle_3 \Psi(x,t) + \omega_2^2 \triangle_2 \Psi(x,t) = \operatorname{div} \mathbf{q}(x,t), \tag{4.12}$$

где $\omega_1 = \gamma(H_0 + \beta M_0)$, $\omega_2 = \gamma\sqrt{4\pi M_0(H_0 + \beta M_0)}$.

Типичные граничные условия для данной модели в случае границы раздела «идеальный» проводник-магнетик имеют вид

$$\begin{gathered} \mathfrak{L}_{tx} \Psi(x,t)\Big|_{x\in S} = (\mathbf{q}, \mathbf{n})\big|_{x\in S}, \\ (\nabla\Psi, \zeta)\big|_S = -\frac{4\pi}{c}(\mathbf{i}, \zeta)\big|_{S_{12}}, \\ \mathfrak{L}_{tx} \equiv \mathfrak{N}_{tx} + \mathfrak{R}_{tx}, \end{gathered} \tag{4.13}$$

$$\mathfrak{N}_{tx} \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_1^2\right)\frac{\partial}{\partial n_x} + \omega_2^2\left(\cos(\mathbf{n},\mathbf{e}_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cos(\mathbf{n},\mathbf{e}_2)\frac{\partial}{\partial x_2}\right),$$

$$\mathfrak{R}_{tx} \equiv \gamma M_0\left(\cos(\mathbf{n},\mathbf{e}_1)\frac{\partial^2}{\partial t\partial x_2} - \cos(\mathbf{n},\mathbf{e}_2)\frac{\partial^2}{\partial t\partial x_1}\right),$$

где $\zeta(x)$ — произвольный вектор в касательной плоскости в точке $x \in S$, $\mathbf{i}$ — поверхностная плотность заряда на проводнике.

Рассмотрим теперь случай однородного феррита типа «легкая плоскость». В этом случае эффективное внутреннее поле феррита имеет вид $\mathbf{H}_{\text{eff}} = H_0\mathbf{e_1} + \mathbf{h} + \beta m_3\mathbf{e_3}$, а намагниченность $\mathbf{M} = M_0\mathbf{e_1} + \mathbf{m}$ (см. [Гуревич; Кринчик]). Подставляя выражения для эффективного поля и намагниченности в уравнение (4.3), получаем

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = \gamma H_0[\mathbf{e_1},\mathbf{m}] + \gamma M_0[\mathbf{h},\mathbf{e_1}] - \gamma|\beta|m_3M_0\mathbf{e_2}, \tag{4.14}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{b} = -\nabla\psi + 4\pi\mathbf{m}, \quad \mathbf{h} = -\nabla\psi. \tag{4.15}$$

Аналогично выводу уравнений (4.7)–(4.12) из системы (4.14), (4.15) получаем

$$m_l = -\widehat{\chi}_{lj} * \psi_{x_j}(x,t) + \frac{1}{4\pi}q_l(x,t), \tag{4.16}$$

$$\widehat{\chi} = \frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\omega_4^2/\omega_3)\widehat{S}_{\sin(\omega_3 t)*} & \gamma M_0\widehat{S}_{\cos(\omega_3 t)*} \\ 0 & -\gamma M_0\widehat{S}_{\cos(\omega_3 t)*} & (\omega_5^2/\omega_3)\widehat{S}_{\sin(\omega_3 t)*} \end{pmatrix}, \tag{4.17}$$

где

$$q_l(x,t) = 4\pi(\widehat{\mathbf{V}}_3)_{lj}m_{ol}(x),$$

$$\omega_3 = \gamma\sqrt{H_0(H_0 + |\beta|M_0)}\,,$$

$$\omega_4 = \gamma\sqrt{4\pi(H_0 + |\beta|M_0)M_0}\,,$$

$$\omega_5 = \gamma\sqrt{4\pi H_0 M_0}\,,$$

$$\widehat{\mathbf{V}}_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} - \omega_3\widehat{S}_{sin(\omega_3 t)*} & -\gamma(H_0 + \beta M_0)\widehat{S}_{\cos(\omega_3 t)*} \\ 0 & \gamma H_0\widehat{S}_{\cos(\omega_3 t)*} & \mathbf{I} - \omega_3\widehat{S}_{sin(\omega_3 t)*} \end{pmatrix}.$$

Подставляя уравнение (4.16) в (4.15), с учетом (4.17) получаем интегродифференциальное уравнение спиновых волн в однородном феррите типа «легкая плоскость»:

$$\triangle_3\psi(x,t) + \int_0^t d\tau\,\frac{sin[\omega_3(t-\tau)]}{\omega_3} \times$$

$$\times\left[\omega_4^2\psi_{x_2x_2}(x,\tau) + \omega_5^2\psi_{x_3x_3}(x,\tau)\right] = \operatorname{div}\mathbf{q}(x,t).$$

Для обобщенного потенциала магнитного поля $\Psi(x,t)$,

$$\psi = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_3^2\right)\Psi(x,t), \quad \left.\frac{\partial^k}{\partial t^k}\Psi(x,t)\right|_{t=0} = 0, \quad k = \overline{0,1},$$

получим, что и в этом случае математическая модель исследуемой задачи сводится к одному скалярному уравнению в частных производных высокого порядка составного типа:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_3^2\right)\triangle_3\Psi(x,t) + \omega_4^2\Psi_{x_2x_2}(x,t) + \\ + \omega_5^2\Psi_{x_3x_3}(x,t) = \operatorname{div}\mathbf{q}(x,t). \quad (4.18)$$

Стандартным образом можно показать, что граничные условия на поверхности раздела «идеальный» проводник — магнетик имеют вид (4.13) с граничным оператором косой производной $\mathfrak{L}_{tx}$ следующего вида:

$$\mathfrak{L}_{tx} \equiv \mathfrak{N}_{tx} + \mathfrak{R}_{tx},$$
$$\mathfrak{N}_{tx} \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_3^2\right)\frac{\partial}{\partial n_x} + \omega_4^2\cos(\mathbf{n},\mathbf{e}_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + \omega_5^2\cos(\mathbf{n},\mathbf{e}_3)\frac{\partial}{\partial x_3},$$
$$\mathfrak{R}_{tx} \equiv \gamma M_0\left[\cos(\mathbf{n},\mathbf{e}_3)\frac{\partial^2}{\partial t\partial x_2} - \cos(\mathbf{n},\mathbf{e}_2)\frac{\partial^2}{\partial t\partial x_3}\right].$$

Спиновые волны в различных структурах в рамках теории молекулярного поля описываются родственным образом. Особенности спиновых волн в антиферромагнетиках обусловлены существованием двух и более магнитных подрешеток. Рассмотрим простейший, но наиболее интересный случай — двухподрешеточный антиферромагнетик типа «легкая плоскость».

Пусть $\mathbf{H_0} = H_0\mathbf{e}_2$. Если не учитывать влияния анизотропии в базисной плоскости, то из симметрии задачи ясно, что намагниченности подрешеток установятся под одинаковым углом к внешнему полю, причем $\sin\alpha = H_0/2H_E$, где α — угол между $\mathbf{e_1}$ и направлением спонтанной намагниченности первой подрешетки $\mathbf{M}_{10}$ [Кринчик]. Уравнения движения намагниченностей подрешеток без учета диссипации имеют вид

$$\frac{\partial\mathbf{m}_1}{\partial t} = \gamma[\mathbf{H}_{1\text{эф}}, \mathbf{M}_1], \qquad \frac{\partial\mathbf{m}_2}{\partial t} = \gamma[\mathbf{H}_{2\text{эф}}, \mathbf{M}_2]. \quad (4.19)$$

Будем рассматривать малые колебания намагниченности $\mathbf{m_1}$ и $\mathbf{m_2}$ во внешнем магнитном поле. Тогда намагниченности подрешеток имеют вид

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{e}_1 M_0\cos\alpha + \mathbf{e_2} M_0\sin\alpha + \mathbf{m}_1, \quad (4.20\text{а})$$
$$\mathbf{M}_2 = -\mathbf{e}_1 M_0\cos\alpha + \mathbf{e_2} M_0\sin\alpha + \mathbf{m}_2, \quad (4.20\text{б})$$

— эффективные поля, действующие на подрешетки,

$$\mathbf{H}_{1\text{эф}} = H_0\mathbf{e}_2 + \frac{H_K}{M_0}m_{1x_3}\mathbf{e_3} - \lambda\mathbf{M}_2 + \mathbf{h}, \tag{4.21а}$$

$$\mathbf{H}_{2\text{эф}} = H_0\mathbf{e}_2 + \frac{H_K}{M_0}m_{2x_3}\mathbf{e_3} - \lambda\mathbf{M}_1 + \mathbf{h}, \tag{4.21б}$$

где $H_K = 2K/M_0 < 0$ — константа поля анизотропии; $-\lambda\mathbf{M}_1$, $-\lambda\mathbf{M}_2$ — обменные поля, действующие со стороны первой подрешетки на вторую и со стороны второй на первую, $\mathbf{h}$ — малое возмущение внешнего поля, причем $h \ll H_0$. Введем ферромагнитный и антиферромагнитный векторы: $\widetilde{\mathbf{m}} = \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2$, $\mathbf{L} = \mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2$. Тогда система уравнений (4.19)–(4.21) может быть сведена к следующим уравнениям (см. [Гуревич; Кринчик]):

$$\frac{\partial\widetilde{m}_1}{\partial t} = \gamma(H_0 - H_K\sin\alpha)\widetilde{m}_3 - 2\gamma\sin(\alpha)h_3, \tag{4.22}$$

$$\frac{\partial\widetilde{m}_2}{\partial t} = \gamma H_K\cos(\alpha)L_3, \tag{4.23}$$

$$\frac{\partial\widetilde{m}_3}{\partial t} = -\gamma H_0\widetilde{m}_1 + 2\gamma\sin(\alpha)h_1, \tag{4.24}$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial t} = -\gamma H_K\sin(\alpha)L_3, \tag{4.25}$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial t} = -\gamma(2H_E - H_K)\cos(\alpha)\widetilde{m}_3 + 2\gamma M_0\cos(\alpha)h_3,$$

$$\frac{\partial L_3}{\partial t} = \gamma H_E\cos(\alpha)\widetilde{m}_2 - 2\gamma M_0\cos(\alpha)h_2, \tag{4.26}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{b} = \mathbf{h} + 4\pi\widetilde{\mathbf{m}}, \quad \mathbf{h} = -\nabla\psi, \tag{4.27}$$

где

$$\widetilde{\mathbf{m}} = (\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, \widetilde{m}_3), \quad \mathbf{L} = (L_1, L_2, L_3), \quad H_E = \lambda M_0.$$

Покажем, что и эту систему можно свести к одному скалярному уравнению, аналогичному предыдущим.

Система уравнений для нахождения ферромагнитного вектора $\widetilde{\mathbf{m}}$ состоит из уравнений (4.22)–(4.27). Проинтегрируем по времени уравнения (4.22)–(4.24) и (4.26). В проинтегрированное уравнение (4.23) подставим выражение, получившееся в результате интегрирования соотношения (4.26) для L_3. В результате получим

$$\widehat{\mathbf{V}}_4\widetilde{\mathbf{m}} = \widehat{\mathbf{V}}_5\mathbf{h} + \widetilde{\mathbf{q}}_0(x,t),$$

$$\widetilde{\mathbf{q}}_0(x,t) = \widetilde{m}_{10}(x)\mathbf{e}_1 + \left(-\gamma|H_K|\cos(\alpha)L_{30}(x)t + \widetilde{m}_{20}(x)\right)\mathbf{e}_2 + \widetilde{m}_{30}(x)\mathbf{e}_3,$$

$$\widehat{\mathbf{V}}_4 = \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{V}}_{411} & 0 & \widehat{\mathbf{V}}_{413} \\ 0 & \widehat{\mathbf{V}}_{422} & 0 \\ -\widehat{\mathbf{V}}_{413} & 0 & \widehat{\mathbf{V}}_{433} \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{V}}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \widehat{\mathbf{V}}_{513} \\ 0 & \widehat{\mathbf{V}}_{522} & 0 \\ -\widehat{\mathbf{V}}_{513} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\widehat{\mathbf{V}}_{411} = \mathbf{I}, \widehat{\mathbf{V}}_{413} = -\gamma[H_0 + |H_K|\cos(\alpha)]\widehat{S}_1*,$$

$$\widehat{\mathbf{V}}_{422} = \mathbf{I} + \gamma^2|H_K|H_E\cos^2(\alpha)\widehat{S}_t*, \widehat{\mathbf{V}}_{433} = \mathbf{I},$$

$$\widehat{\mathbf{V}}_{513} = -2\gamma\sin(\alpha)\widehat{S}_1*, \widehat{\mathbf{V}}_{522} = 2\gamma^2 M_0|H_K|\cos^2(\alpha)\widehat{S}_t * .$$

Как и раньше, обращаем матричный оператор $\mathbf{V}_4$ (поскольку $\widehat{\det}\,\widehat{\mathbf{V}}_4 = \mathbf{I} + \gamma^2|H_K|H_E\cos^2(\alpha)\widehat{S}_t*$ — обратимый оператор) и в результате получаем уравнение для вектора намагниченности $\widetilde{\mathbf{m}}$ системы и выражение для операторного тензора магнитной восприимчивости:

$$\widetilde{m}_l = -\widehat{\chi}_{lj}\psi_{x_j} + \frac{1}{4\pi}q_{l0}(x,t), \tag{4.28}$$

$$\widehat{\chi}_{lj} = \frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} \widehat{\chi}_{11} & 0 & \widehat{\chi}_{13} \\ 0 & \widehat{\chi}_{22} & 0 \\ -\widehat{\chi}_{13} & 0 & \widehat{\chi}_{33} \end{pmatrix},$$

$$\widehat{\chi}_{11} = (\omega_8^2/\omega_6)\widehat{S}_{\sin(\omega_6 t)}*,\ \widehat{\chi}_{13} = -2\gamma\sin(\alpha)\widehat{S}_{\cos(\omega_6 t)}*,$$

$$\widehat{\chi}_{22} = (\omega_{10}^2/\omega_7)\widehat{S}_{\sin(\omega_7 t)}*, \widehat{\chi}_{33} = (\omega_9^2/\omega_6)\widehat{S}_{\sin(\omega_6 t)}*,$$

где

$$\omega_6^2 = \gamma^2 H_0(H_0 + |H_K|\sin\alpha),\ \omega_7^2 = \gamma^2 H_E|H_K|\cos^2\alpha,$$

$$\omega_8^2 = \omega_6^2/H_E,\ \omega_9^2 = 2\gamma^2 H_0\sin\alpha,\ \omega_{10}^2 = 2\gamma^2 M_0|H_K|\cos^2\alpha,$$

$$\mathbf{q}_{l0}(x,t) = 4\pi(\widehat{\mathbf{V}}^{-1})_{lj}\widetilde{\mathbf{q}}_{0j}.$$

Таким образом, из уравнений (4.27), (4.28) получаем интегродифференциальное уравнение спиновых волн в двухподрешеточном антиферромагнетике типа «легкая плоскость»:

$$\triangle_3\psi(x,t) + \int_0^t d\tau\ \{sin[\omega_6(t-\tau)]/\omega_6\}\left[\omega_8^2\psi_{x_1x_1}(x,\tau) + \omega_9^2\psi_{x_3x_3}(x,\tau)\right] +$$

$$+\omega_{10}^2\int_0^t d\tau\ \{\sin[\omega_7(t-\tau)]/\omega_7\}\,\psi_{x_2x_2}(x,\tau) = 4\pi\,\mathrm{div}\,\mathbf{q}_0(x,t). \tag{4.29}$$

Введем обобщенный потенциал магнитного поля $\Psi(x,t)$:

$$\psi(x,t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_6^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_7^2\right)\Psi(x,t),\ \ \frac{\partial^k}{\partial t^k}\Psi(x,t)\Big|_{t=0} = 0,\ \ k = \overline{0,3},$$

тогда получим дифференциальное уравнение для $\Psi(x,t)$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_7^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_6^2+\omega_8^2\right)\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_1^2}+$$
$$+\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_6^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_7^2+\omega_{10}^2\right)\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_2^2}+$$
$$+\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_7^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_6^2+\omega_9^2\right)\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_3^2}=\operatorname{div}\mathbf{q}_0(x,t). \quad (4.30)$$

Отметим, что к уравнениям вида (4.29), (4.30) сводится система уравнений, описывающая спиновые волны в слабом ферромагнетике в рамках модели Дзялошинского [Кринчик].

Граничные условия на поверхности раздела «идеальный» проводник - магнетик имеют вид (4.13) с граничным оператором косой производной $\mathfrak{L}_{tx}$, имеющим в данном случае вид

$$\mathfrak{L}_{tx}\equiv\mathfrak{N}_{tx}+\mathfrak{R}_{tx},$$

$$\mathfrak{N}_{tx}\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_6^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_7^2\right)\frac{\partial}{\partial n_x}+\omega_{10}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_6^2\right)\cos(\mathbf{n},\mathbf{e}_2)\frac{\partial}{\partial x_2}+$$
$$+\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_7^2\right)\left(\omega_8^2\cos(\mathbf{n},\mathbf{e}_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+\omega_9^2\cos(\mathbf{n},\mathbf{e}_3)\frac{\partial}{\partial x_3}\right),$$

$$\mathfrak{R}_{tx}\equiv 2\gamma\sin\alpha\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_7^2\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\cos(\mathbf{n},\mathbf{e}_3)\frac{\partial}{\partial x_1}-\cos(\mathbf{n},\mathbf{e}_1)\frac{\partial}{\partial x_3}\right).$$

При выводе уравнений спиновых волн мы не учитывали, что внутреннее поле в ферромагнетиках и антиферромагнетиках зависит от формы рассматриваемых кристаллов. Вообще говоря, учет формы представляет собой сложную краевую задачу. Однако можно рассмотреть наиболее простую из таких граничных задач — задачу об однородных магнитных колебаниях малого ферромагнитного эллипсоида [Гуревич]. Причем «малость» ферромагнетика понимается здесь двояким образом: малость по сравнению с другими размерами рассматриваемой системы, что позволяет рассматривать в качестве заданных величин внешние магнитные поля, и малость размеров образца по сравнению с длиной электромагнитной волны, что дает возможность для переменных составляющих использовать магнитостатическое приближение, т. е. систему уравнений магнитостатики.

Поскольку рассматриваемый образец является эллипсоидом, то можно применить известный результат магнитостатики [Смайт]: внутреннее магнитное поле в эллипсоиде, помещенном в однородное внешнее поле $\mathbf{H}_e$, однородно и имеет следующий вид:

$$\mathbf{H}=\mathbf{H_e}-\overline{\mathbf{N}}\mathbf{M}, \quad (4.31)$$

где $\mathbf{M}$ — намагниченность, $\overline{N}$ — симметричный тензор размагничивания. В результате подстановки в (4.31) выражений для постоянных поля $\mathbf{H_{e0}}$ и намагниченности $\mathbf{M_0}$ мы получим

$$\mathbf{H_0} = \mathbf{H_{e0}} - \overline{\mathbf{N}}\mathbf{M_0},$$

а для переменных составляющих

$$\mathbf{h} = \mathbf{h_e} - \overline{\mathbf{N}}\mathbf{m}. \tag{4.32}$$

Условие равновесия в данном случае примет вид

$$[\mathbf{M_0}, \mathbf{H_{e0}} - \overline{\mathbf{N}}\mathbf{M_0}] = \mathbf{0},$$

откуда следует, что $N_{13} = N_{23} = 0$. Линеаризованное уравнение Ландау–Лифшица с учетом (4.31) и (4.32) примет вид

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -\gamma[\mathbf{m}, \mathbf{H_{e0}} - \overline{\mathbf{N}}\mathbf{M_0}] - \gamma[(\overline{\mathbf{N}}\mathbf{m}), \mathbf{M_0}] - \gamma[\mathbf{M_0}, \mathbf{h_e}]. \tag{4.33}$$

Спроецируем (4.33) на оси системы координат, в которой ось z сонаправлена с $\mathbf{H}_0$. Пусть в выбранной системе координат (не совпадающей, вообще говоря, с собственной системой координат рассматриваемого эллипсоида) координаты тензора $\overline{N}$ имеют вид

$$\overline{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & 0 \\ N_{12} & N_{22} & 0 \\ 0 & 0 & N_{33} \end{pmatrix}.$$

Запишем уравнение (4.33) покомпонентно (см. [41]):

$$\begin{gathered} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \omega_{xy}\right) m_x + \omega_y m_y = \gamma M_0 h_{e2}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \omega_{xy}\right) m_y - \omega_x m_x = -\gamma M_0 h_{e1}, \\ \frac{\partial m_z}{\partial t} = 0, \end{gathered} \tag{4.34}$$

где

$$\omega_{xy} = \gamma N_{12} M_0, \quad \omega_x = \gamma(H_{e0} - N_{33}M_0 + N_{11}M_0) > 0,$$

$$\omega_y = \gamma(H_{e0} - N_{33}M_0 + N_{22}M_0) > 0.$$

Кроме того, в силу «малости» размеров ферромагнитного эллипсоида в указанном ранее смысле необходимо добавить уравнения магнитостатики:

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{b} = \mathbf{h_e} + 4\pi\mathbf{m}, \quad \mathbf{h}_e = -\nabla\psi. \tag{4.35}$$

Из системы уравнений (4.34), (4.35) стандартным образом получаем выражение для операторного тензора магнитной восприимчивости:

$$\widehat{\chi} = \frac{\omega_s}{4\pi} \begin{pmatrix} \widehat{\chi}_{11} & \widehat{\chi}_{12} & 0 \\ -\widehat{\chi}_{12} & \widehat{\chi}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{\chi}_{11} = \omega_y/\omega_0)\widehat{S}_{\sin(\omega_0 t)}*, \quad \widehat{\chi}_{12} = \left(\widehat{S}_{\cos(\omega_0 t)} * -(\omega_{xy}/\omega_0)\widehat{S}_{\sin(\omega_0 t)}*\right),$$

$$\widehat{\chi}_{22} = (\omega_x/\omega_0)\widehat{S}_{\sin(\omega_0 t)}*,$$

где $\omega_0^2 = \omega_x\omega_y - \omega_{xy}^2 > 0$, $\omega_s = 4\pi\gamma M_0$, и соответствующее интегро-дифференциальное уравнение спиновых волн в эллипсоидальном ферромагнетике во внешнем магнитном поле:

$$\triangle_3\psi + \omega_s \int_0^t d\tau \, \frac{sin[\omega_0(t-\tau)]}{\omega_0} \left(\omega_y\psi_{x_1x_1} + \omega_x\psi_{x_2x_2} - 2\omega_{xy}\psi_{x_1x_2}\right) = \\ = \operatorname{div}\mathbf{q}(x,t),$$

из которого для обобщенного потенциала магнитного поля

$$\psi = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_0^2\right)\Psi, \quad \left.\frac{\partial^k}{\partial t^k}\Psi(x,t)\right|_{t=0} = 0, \quad k = \overline{0,1},$$

вытекает дифференциальное уравнение составного типа:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_0^2\right)\triangle_3\Psi + \omega_s\omega_y\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \omega_s\omega_x\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} - \\ - 2\omega_{xy}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y} = \operatorname{div}\mathbf{q}(x,t). \quad (4.36)$$

Граничные условия на поверхности раздела «идеальный» проводник-магнетик имеют вид (4.13) с граничным оператором $\mathfrak{L}_{tx}$

$$\mathfrak{L}_{tx} \equiv \mathfrak{N}_{tx} + \mathfrak{R}_{tx},$$

$$\mathfrak{N}_{tx} \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_0^2\right)\frac{\partial}{\partial n_x} + \omega_s\omega_x\cos(\mathbf{n},\mathbf{e}_x)\frac{\partial}{\partial x} + \omega_s\omega_x\cos(\mathbf{n},\mathbf{e}_y)\frac{\partial}{\partial y},$$

$$\mathfrak{R}_{tx} \equiv \omega_s\left(\frac{\partial}{\partial t} - \omega_{xy}\right)\cos(\mathbf{n},\mathbf{e}_x)\frac{\partial}{\partial y} - \omega_s\left(\frac{\partial}{\partial t} + \omega_{xy}\right)\cos(\mathbf{n},\mathbf{e}_y)\frac{\partial}{\partial x}.$$

Таким образом, широкий круг векторных математических моделей, описывающих нестационарные волновые процессы в различных по своей физической природе средах с анизотропной дисперсией, однотипным образом может быть сведен к начально-краевым задачам для достаточно однотипных скалярных уравнений высокого порядка (2.10), (2.14), (3.7), (3.21), (3.22), (4.12), (4.18), (4.31), (4.36).

Глава 2

ДВУМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА И НОВЫЕ КЛАССЫ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Неклассические дифференциальные уравнения, аналогичные известному уравнению Соболева [Соболев; Масленникова; Зеленяк], возникающие при изучении нестационарных внутренних волн в стратифицированных и вращающихся жидкостях [Габов, 1], продолжают привлекать внимание исследователей. В случае двух пространственных переменных эти уравнения оказываются тесно связанными с системой дифференциальных уравнений первого порядка по пространственным переменным, которая в известном смысле аналогична системе Коши–Римана для уравнения Лапласа [Габов, 1].

В работах Ю. Д. Плетнера построен аналог системы Коши–Римана для двумерного уравнения гравитационно-гироскопических волн, отличный от построенного в [Габов, 1]. С его помощью удалось показать, что решения этого уравнения могут рассматриваться как мнимая или действительная части соответствующим образом введенных комплексных функций, по своим свойствам во многом аналогичных аналитическим функциям. Это позволило перенести на изучаемый случай ряд идей и методов теории функций комплексного переменного.

§ 1. О новых классах обобщенных аналитических функций

В этом параграфе изучаются двумерные аналоги уравнения Соболева

$$P_1(D_t)u_{x_1x_1}(x,t) + P_2(D_t)u_{x_2x_2}(x,t) = 0,$$

где

$$P_j(D_t) = \sum_{k=0}^{l-1} a_{kj} D_t^k + D_t^l, \quad l \in N,$$

a_{kj} — действительные постоянные. Для уравнений такого вида построена система типа Коши–Римана с операторными коэффициентами, представляющими собой сверточные по t операторы. На ее основе вводятся комплексные функции, аналогичные по свойствам аналитическим.

1.1. Вспомогательные результаты. Пусть $\varphi(t)$ — вообще говоря, комплекснозначная функция действительной переменной t, определенная при $t \geqslant 0$. Будем говорить, что $\varphi(t) \in \mathbb{C}_0^{(m)}[0,\infty)$, $m \in N$, если $\varphi(t) \in \mathbb{C}^{(m)}[0,\infty)$ и $D_t^k\varphi(0) = 0$, $k = 0,1,\ldots,m-1$. Во избежание недоразумений отметим, что всюду далее для краткости положим $\mathbb{C}_0^{(0)}[0,\infty) \equiv \mathbb{C}[0,\infty)$ для $m = 0$.

Пусть $x \equiv (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$. Будем говорить, что $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(m)}[\,[0,\infty); \mathbb{C}^{(l)}(G)]$; $m = 0,1,\ldots$; $l = 0,1,\ldots$, если существуют непрерывные в области $G \times [0,\infty)$ производные

$$\frac{\partial^{p+q}}{\partial t^p \partial x_j^q} u(x,t), \quad j = 1,2,$$

$p = 0,1,\ldots,m$, $q = 0,1,\ldots,l$. Введем также классы функций $\mathbb{C}_0^{(m)}[\,[0,\infty)$; $\mathbb{C}^{(l)}(G)] \equiv \{u(x,t) \in \mathbb{C}^{(m)}[\,[0,\infty); \mathbb{C}^{(l)}(G)] : D_t^k u(x,t) = 0,\ k = 0,1,\ldots,m-1\}$, $m,l = 0,1,\ldots$

Далее нам потребуется рассмотреть сверточные операторы, действующие по переменной t. Символом $*$ будем обозначать свертку двух функций по переменной t:

$$f(t) * \varphi(t) \equiv \int_0^t f(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau,$$

$$u(x,t) * v(x,t) \equiv \int_0^t u(x,t-\tau)v(x,\tau)\,d\tau.$$

Пусть $\mathcal{A}(t) \in \mathbb{C}[0,\infty)$. Определим функции $\mathcal{A}_k(t)$, $k = 1,2,\ldots$, следующим образом:

$$\mathcal{A}_1(t) \equiv \mathcal{A}(t), \qquad \mathcal{A}_k(t) = \mathcal{A}(t) * \mathcal{A}_{k-1}(t), \quad k = 2,3,\ldots \tag{1.1}$$

Заметим, что из (1.1) вытекает равенство

$$\mathcal{A}_{k+l}(t) = \mathcal{A}_k(t) * \mathcal{A}_l(t), \quad k,l = 1,2,\ldots \tag{1.2}$$

Для функций $\mathcal{A}_k(t)$, определенных (1.1), нетрудно получить оценки

$$\|\mathcal{A}_k(\cdot)\|_{\mathbb{C}[0,T]} \leqslant \frac{[C_{\mathcal{A}}(T)]^k T^{k-1}}{(k-1)!}, \quad k,l = 1,2,3,\ldots, \tag{1.3}$$

справедливые при любом $T > 0$; $C_{\mathcal{A}}(T) \equiv \|\mathcal{A}(\cdot)\|_{\mathbb{C}[0,T]}$. С помощью оценки (1.3) может быть доказана следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть радиус сходимости ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k \tag{1.4}$$

положителен. Тогда для любой функции $\mathcal{A}(t) \in \mathbb{C}[0,\infty)$ *ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mathcal{A}_k(t) \tag{1.5}$$

сходится абсолютно в норме $\mathbb{C}[0,T]$ *при любом* $T > 0$.

Так как $\mathcal{A}_k(t) \in \mathbb{C}[0,\infty)$ для любого $k = 1, 2, \ldots$, то из результата леммы 1 вытекает, что сумма ряда (1.5) есть функция класса $\mathbb{C}[0,\infty)$. Замечание. Учитывая результат леммы 1, оценку (1.3) и равенства (1.2), можно убедиться, что ряды вида (1.5), поставленные в соответствие рядам вида (1.4) с положительным радиусом сходимости, обладают всеми свойствами последних. В частности, если ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k z^k \tag{1.6}$$

имеют положительный радиус сходимости, то для любой функции $\mathcal{A}(t) \in \mathbb{C}[0,\infty)$ справедлива формула

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mathcal{A}_k(t)\right) * \left(\sum_{l=1}^{\infty} \beta_l \mathcal{A}_l(t)\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_n \mathcal{A}_n(t), \tag{1.7}$$

где $\gamma_n = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \beta_{n-k}$, причем ряд в правой части (1.7) сходится абсолютно в норме $\mathbb{C}[0,T]$ при любом $T > 0$.

Учитывая оценку (1.3), можно доказать также следующую лемму. Лемма 2. *Пусть радиус сходимости рядов* (1.6) *положителен. Тогда для любых* $\mathcal{A}(t), \mathcal{B}(t) \in \mathbb{C}[0,\infty)$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mathcal{A}_k(t)\right) * \left(\sum_{l=1}^{\infty} \beta_l \mathcal{B}_l(t)\right) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \alpha_k \beta_l \mathcal{A}_k(t) * \mathcal{B}_l(t), \tag{1.8}$$

где $\mathcal{A}_k(t)$, $\mathcal{B}_l(t)$ *выражаются через* $\mathcal{A}(t)$ *и* $\mathcal{B}(t)$ *с помощью формул* (1.1). *Двойной ряд в правой части* (1.8) *сходится абсолютно в норме* $\mathbb{C}[0,\mathrm{T}]$ *при любых* $\mathrm{T} > 0$.

Заметим, что из утверждения леммы вытекает возможность перестановки членов двойного ряда в (1.8).

Введем важный для дальнейшего изложения класс сверточных по t операторов. Будем говорить, что оператор $A*$ является оператором класса $\mathcal{E}$, если он представим в виде $\mathrm{I} + \mathcal{A}(t)*$, где I — единичный оператор, а $\mathcal{A}(t) \in \mathbb{C}[0,\infty)$, т. е. для любой функции $\varphi(t) \in \mathbb{C}[0,\infty)$

$$(E + \mathcal{A}(t)*)\varphi(t) = \varphi(t) \int_0^t \mathcal{A}(t-\tau)\varphi(\tau)\, d\tau.$$

Операторы класса $\mathcal{E}$ обладают рядом важных свойств:

1) операторы коммутируют друг с другом и переводят функции класса $\mathbb{C}_0^{(m)}[0,\infty)$, $m=0,1,\ldots$, в функции того же класса;

2) они обратимы, причем обратный оператор также есть оператор класса $\mathcal{E}$, и имеет место формула

$$(E+\mathcal{A}(t)*)^{-1}=E+\widetilde{\mathcal{A}}(t)*,\qquad \widetilde{\mathcal{A}}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\mathcal{A}_k(t), \tag{1.9}$$

где функции $\mathcal{A}_k(t)$ определены (1.1);

(Доказательство этого свойства основано на рассмотрении интегрального уравнения Вольтерра II рода и доказательстве сходимости ряда последовательных приближений. Сходимость ряда в (1.9) легко устанавливается с помощью оценки (1.3).)

3) любая целая степень оператора класса $\mathcal{E}$ есть оператор класса $\mathcal{E}$.

Это свойство непосредственно вытекает из предыдущих.

Результат леммы 1 позволяет определить любую вещественную степень оператора $A*=E+\mathcal{A}(t)*$ класса $\mathcal{E}$ следующим образом:

$$(A*)^{\alpha}=E+\mathfrak{A}_{\alpha}(t)*,\qquad \mathfrak{A}_{\alpha}(t)\equiv\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\mathcal{A}_k(t), \tag{1.10}$$

где $\mathcal{A}_k(t)$ определены (1.1), а

$$\binom{\alpha}{k}=\begin{cases}\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}, & k=1,2,\ldots,\\ 1, & k=0.\end{cases}$$

Учитывая очевидное соотношение

$$\mathcal{A}_k(t)*\varphi(t)=(A*-E)^k\varphi(t),\quad k=1,2,\ldots,$$

справедливое для любой $\varphi(t)\in\mathbb{C}[0,\infty)$, а также характер сходимости ряда в (1.10), полагая естественным образом $(A*-E)^0=E$, переписываем (1.10) в виде

$$(A*)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}(A*-E)^k. \tag{1.10′}$$

С учетом замечания к лемме 1 можно убедиться, что введенная таким образом степень оператора $A*$ класса $\mathcal{E}$ обладает теми же свойствами, что и обычная вещественная степень. Для нас, в частности, существенны соотношения

$$[(A*)^{\alpha}]^{-1}=(A*)^{\alpha},\qquad [(A*)^{\alpha}]^{1/\alpha}=A*, \tag{1.11}$$

справедливые для любого оператора $A*$ класса $\mathcal{E}$ и $\alpha\in\mathbb{R}^1$ (во втором из равенств (1.11), очевидно, $\alpha\neq 0$). Учитывая (1.11), нетрудно получить

разложение

$$(A*)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} [(A*)^2 - E]^k, \tag{1.12}$$

справедливое для любого оператора $A*$ класса $\mathcal{E}$.

Принимая во внимание результат леммы 2, с помощью формулы (1.12) можно доказать следующую лемму.

Л е м м а 3. *Для любых операторов $A*$, $B*$ класса $\mathcal{E}$*

$$(A*)^{-1}(B*)^{-1} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{j=0}^{k} \frac{\Gamma(k-j+1/2)\Gamma(j+1/2)}{j!(k-j)!} \times$$
$$\times [(A*)^2 - E]^j [(B*)^2 - E]^{k-j}. \tag{1.13}$$

При выводе формулы (1.13) следует учесть равенство (см. [Ватсон])

$$\binom{-1/2}{k} = \frac{(-1)^k}{\pi^{1/2} k!} \Gamma(k+1/2).$$

В дальнейшем будем рассматривать операторы вида $A* = E + \mathcal{A}(t)*$, где $\mathcal{A}(t) \in \mathbb{C}[0,\infty)$ — действительная функция. Такие операторы будем называть действительными операторами класса $\mathcal{E}$.

Пусть $A*$, $B*$ — действительные операторы класса $\mathcal{E}$. Всюду далее символами $A*$ и $B*$ будем обозначать именно такие операторы. Рассмотрим точку $x \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Поставим в соответствии координатам x_1, x_2 операторы $x_1 A*$, $x_2 B*$. Заметим, что поскольку операция свертки по t коммутирует с операцией умножения на произвольную функцию переменных x_1, x_2, то порядок операций при действии введенных операторов несуществен.

Рассмотрим соответствующую точке $x \in \mathbb{R}^2$ точку $z = x_1 + ix_2$ комплексной плоскости. Пусть $A* = E + \mathcal{A}(t)*$, $B* = E + \mathcal{B}(t)*$. Поставим в соответствие комплексному числу z оператор

$$z(A,B)* \equiv x_1 A* + ix_2 B*. \tag{1.14}$$

Нетрудно видеть, что при любом z оператор $z(A,B)*$ переводит функции класса $\mathbb{C}_0^{(m)}[0,\infty)$, $m = 0, 1, \ldots$, в функции того же класса. Исследуем вопрос об обратимости $z(A,B)*$. При $z = 0$ оператор $z(A,B)*$, очевидно, необратим. При $z \neq 0$ перепишем $z(A,B)*$ в виде

$$z(A,B)* = z(E + z^{-1}(x_1 \mathcal{A}(t)* + ix_2 \mathcal{B}(t)*)) \equiv z(E + \mathcal{F}(x,t)*). \tag{1.15}$$

Функция $\mathcal{F}(x,t)$, определенная (1.15), при любом фиксированном $z \neq 0$ есть функция класса $\mathbb{C}[0,\infty)$, причем нетрудно получить оценку

$$\|\mathcal{F}(x,\cdot)\|_{\mathbb{C}[0,T]} \leqslant C(\mathcal{A},\mathcal{B};T), \tag{1.16}$$

справедливую при любых $z \neq 0$, $T > 0$; $C(\mathcal{A},\mathcal{B};T) \equiv \max\{\|\mathcal{A}(\cdot)\|_{\mathbb{C}[0,T]}, \|\mathcal{B}(\cdot)\|_{\mathbb{C}[0,T]}\}$.

В силу (1.9) приходим к выводу, что при любом $z \neq 0$ оператор $(E + \mathcal{F}(x,t)*)$ обратим и

$$(E + \mathcal{F}(x,t)*)^{-1} = (E + \Phi(x,t)*), \tag{1.17а}$$

$$\Phi(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \mathcal{F}_k(x,t), \tag{1.17б}$$

где $\mathcal{F}_k(x,t)$ выражаются через $\mathcal{F}(x,t)$ по формулам (1.1). С учетом (1.17) приходим к выводу, что при любом $z \neq 0$ оператор $z(A,B)*$ обратим и

$$(z(A,B)*)^{-1} = z^{-1}(E + \Phi(x,t)*), \tag{1.18}$$

где функция $\Phi(x,t)$ определена (1.17б). На основании вышеизложенного нетрудно видеть, что при $z \neq 0$ определена любая целая степень оператора $z(A,B)*$, причем операторы $(z(A,B)*)^n$, $n \in Z$, переводят функции класса $\mathbb{C}_0^{(m)}[0,\infty)$, $m = 0, 1, \ldots$, в функции того же класса.

Заметим, что функция $\mathcal{F}(x,t)$, определенная (1.15), непрерывна в области $(\mathbb{R}^2 \setminus 0) \times [0,\infty)$. С учетом этого факта, оценок (1.16) и (1.3) нетрудно убедиться, что справедлива следующая лемма.

Лемма 4. *Функция* $\Phi(x,t)$, *определенная* (1.17б), *непрерывна в области* $(\mathbb{R}^2 \setminus 0) \times [0,\infty)$, *причем имеет место оценка*

$$\|\Phi(x,\cdot)\|_{\mathbb{C}[0,T]} \leqslant C(\mathcal{A},\mathcal{B};T) \exp[C(\mathcal{A},\mathcal{B};T)T], \tag{1.19}$$

справедливая при любом $x \neq 0$, $T > 0$; $C(\mathcal{A},\mathcal{B};T)$ *имеет тот же смысл, что и в* (1.16).

Рассмотрим функцию $f(\xi,t)$ комплексной переменной ξ и действительной t, определенную при ξ из некоторой окрестности точки $\xi_0 \neq 0$, $t \geqslant 0$. Из изученных свойств операторов класса $\mathcal{E}$ и оператора $z(A,B)*$ вытекает следующая лемма.

Лемма 5. *Для любых операторов* $A*$, $B*$, $C*$ *класса* $\mathcal{E}$ *пределы*

$$\lim_{\xi\to\xi_0} f(\xi,t), \qquad \lim_{\xi\to\xi_0} [C * f(\xi,t)],$$

$$\lim_{\xi\to\xi_0} [(z(A,B)*)^n f(\xi,t)], \quad z \neq 0, \quad n \in Z,$$

понимаемые в смысле сходимости в норме $\mathbb{C}[0,T]$ *при любом* $T > 0$, *существуют или не существуют одновременно.*

1.2. Двумерные уравнения соболевского типа. Обобщенная система Коши–Римана. Рассмотрим при $t \geqslant 0$, $x \in G \subset \mathbb{R}^2$ дифференциальное уравнение, обобщающее двумерное уравнение Соболева:

$$P_1(D_t)u_{x_1x_1}(x,t) + P_2(D_t)u_{x_2x_2}(x,t) = 0, \tag{1.20а}$$

где

$$P_j(\xi) = \sum_{k=0}^{l-1} a_{kj}\xi^k + \xi^l, \quad j = 1,2, \tag{1.20б}$$

l — некоторое натуральное число, a_{kj} — действительные постоянные. Производные по t при $t = 0$ понимаются как правые производные. Будем искать решения уравнения (1.20а) в классе $\mathbb{C}_0^{(l)}[[0,\infty), \mathbb{C}^{(2)}(G)]$, т. е. решения, удовлетворяющие начальным условиям

$$D_t^k u(x,0) = 0, \quad k = 0,1,\dots,l-1, \quad x \in G. \tag{1.21}$$

Проинтегрируем (1.20а) l раз по t с учетом условий (1.21). В результате получим уравнение

$$A_1 * u_{x_1x_1}(x,t) + B_1 * u_{x_2x_2}(x,t) = 0, \quad t \geqslant 0, \quad x \in G, \tag{1.22}$$

эквивалентное в классе функций $u(x,t) \in \mathbb{C}_0^{(l)}[[0,\infty); \mathbb{C}^{(2)}(G)]$ уравнению (1.20). В (1.22)

$$A_1* = E + \mathcal{A}_1(t)*, \qquad B_1* = E + \mathcal{B}_1(t)*,$$

$$\mathcal{A}_1(t) \equiv \sum_{k=0}^{l-1} a_{k1} \frac{t^{l-k-1}}{(l-k-1)!}, \qquad \mathcal{B}_1(t) \equiv \sum_{k=0}^{l-1} a_{k2} \frac{t^{l-k-1}}{(l-k-1)!},$$

и, таким образом, A_1*, B_1* — действительные операторы класса $\mathcal{E}$. Определим, согласно (1.10′),

$$A* \equiv (A_1*)^{-1/2}, \qquad B* \equiv (B_1*)^{-1/2}. \tag{1.23}$$

Учитывая результат §1, перепишем (1.22) в виде

$$(A*)^{-2} u_{x_1x_1}(x,t) + (B*)^{-2} u_{x_2x_2}(x,t) = 0, \tag{1.24}$$

где $A*$ и $B*$ определены (1.23). Таким образом, в классе функций $\mathbb{C}_0^{(l)}[[0,\infty); \mathbb{C}^{(2)}(G)]$ уравнения (1.20) и (1.24) эквивалентны. С учетом этого факта непосредственной проверкой может быть доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $u(x,t)$, $v(x,t) \in \mathbb{C}_0^{(l)}[[0,\infty); \mathbb{C}^{(2)}(G)]$ *и удовлетворяют при* $x \in G$, $t \geqslant 0$ *системе*

$$(A*)^{-1} u_{x_1} = (B*)^{-1} v_{x_2}, \qquad (B*)^{-1} u_{x_2} = -(A*)^{-1} v_{x_1}, \tag{1.25}$$

где $A*$ *и* $B*$ *определены* (1.23). *Тогда при* $x \in G$, $t \geqslant 0$ *они удовлетворяют и уравнению* (1.21).

Полученный результат показывает, что система (1.25) играет для уравнения (1.20) ту же роль, что и система Коши–Римана для уравнения Лапласа. Используем ее для построения теории, аналогичной теории функций комплексного переменного.

1.3. Псевдоаналитические функции. Формула Коши. Пусть $A*$, $B*$ — какие-либо фиксированные действительные операторы класса $\mathcal{E}$. Поставим в соответствие каждому комплексному числу $z = x_1 + ix_2$ оператор $z(A,B)*$ по правилу (1.14).

Пусть G — некоторая область на комплексной плоскости. Пусть при $z \in G$, $t \geqslant 0$ определена функция

$$f(z,t) = u(x,t) + iv(x,t),$$

непрерывная по совокупности переменных. Заметим, во избежание недоразумений, что здесь и далее $x \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ — точка, соответствующая точке $z = x_1 + ix_2$ комплексной плоскости. Кроме того, для простоты изложения область на плоскости $\mathbb{R}^2$, соответствующую области G комплексной плоскости, будем обозначать той же буквой G.

Пусть $z \in G$. Будем говорить, что функция $f(z,t)$ дифференцируема по оператору $z(A,B)*$ в точке z, если существует предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} (\Delta z(A,B)*)^{-1}[f(z+\Delta z,t) - f(z,t)] \equiv \frac{d}{dz(A,B)*} f(z,t), \quad (1.26)$$

понимаемый в смысле сходимости по норме $\mathbb{C}[0,T]$ при любом $T > 0$. Символом $(\Delta z(A,B)*)^{-1}$ обозначен оператор, обратный оператору $\Delta z(A,B)*$, поставленному в соответствие по правилу (1.3) приращению Δz. Предел (1.26) будем называть производной функции $f(z,t)$ по оператору $z(A,B)*$ в точке z.

Теорема 2. *Пусть функция $f(z,t) = u(x,t) + iv(x,t)$ определена при $z \in G$, $t \geqslant 0$, причем $u(x,t), v(x,t) \in \mathbb{C}[[0,\infty); \mathbb{C}^{(1)}(G)]$. Тогда, для того чтобы $f(z,t)$ была дифференцируемой по оператору $z(A,B)*$ в точке $z \in G$, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке при $t \geqslant 0$ имели место соотношения* (1.26).

Необходимость. Пусть в точке z существует предел (1.26). Считая, что $z + \Delta z$ стремится к z параллельно действительной оси, получаем

$$\frac{df}{dz(A,B)*} = (A*)^{-1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + i\frac{\partial v}{\partial x_1}\right). \quad (1.27)$$

Предполагая, что $z + \Delta z$ стремится к z параллельно мнимой оси, получаем

$$\frac{df}{dz(A,B)*} = (B*)^{-1}\left(-i\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_2}\right). \quad (1.28)$$

Сравнивая (1.27), (1.28), приходим к системе (1.25). Отметим, что при выводе формул (1.27), (1.28) существен тот факт, что для любой функции $w(x,t) \in \mathbb{C}[[0,\infty); \mathbb{C}^{(1)}(G)]$ любого оператора $C*$ класса $\mathcal{E}$ имеют место равенства

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(C * w(x,t)) = C * \frac{\partial w}{\partial x_j}(x,t), \quad j = 1,2,$$

для любого $x \in G$, $t \geqslant 0$.

Достаточность. Пусть $\Delta z = \Delta x_1 + i\Delta x_2$. В силу того факта, что $u(x,t), v(x,t) \in \mathbb{C}[[0,\infty); \mathbb{C}^{(1)}(G)]$, имеют место равенства

$$u(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, t) - u(x,t) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(x,t)\Delta x_1 + \\ + \frac{\partial u}{\partial x_2}(x,t)\Delta x_2 + \alpha(x,\Delta x,t)|\Delta z|, \quad (1.29а)$$

$$v(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, t) - v(x,t) = \frac{\partial v}{\partial x_1}(x,t)\Delta x_1 + \\ + \frac{\partial v}{\partial x_2}(x,t)\Delta x_2 + \beta(x,\Delta x,t)|\Delta z|, \quad (1.29б)$$

причем с помощью формулы Лагранжа с учетом принадлежности частных производных по $x_{1,2}$ функций u, v классу $\mathbb{C}[[0,\infty); \mathbb{C}(G)]$ легко показать, что α, β стремятся к нулю при $\Delta z \to 0$ равномерно по $t \in \in [0,T]$ для любого $T > 0$. Исследуя (1.29) с учетом соотношений (1.25), при любом $t \geqslant 0$ имеем

$$f(z+\Delta z, t) - f(z,t) = \Delta z(A,B) * (A*)^{-1}\left[\frac{\partial u}{\partial x_1}(x,t) + \right. \\ \left. + i\frac{\partial v}{\partial x_1}(x,t)\right] + \eta(z,\Delta z,t)|\Delta z|, \quad (1.30)$$

причем

$$\|\eta(z,\Delta z,\cdot)\|_{\mathbb{C}[0,T]} \to 0, \quad \Delta z \to 0, \quad \forall\, T > 0. \quad (1.31)$$

Принимая во внимание формулу (1.18), оценку (1.19) и условие (1.31), нетрудно видеть, что существует предел (1.26), причем

$$\frac{df}{dz(A,B)*}(z,t) = (A*)^{-1}\left[\frac{\partial u}{\partial x_1}(x,t) + i\frac{\partial v}{\partial x_1}(x,t)\right]. \quad (1.32)$$

Теорема доказана.

Заметим, что с учетом соотношений (1.25) можно получить и другие представления для производной функции $f(z,t)$ по оператору $z(A,B)*$. Из определения производной по оператору $z(A,B)*$ вытекает, как легко видеть, что относительно операций сложения функций и умножения на число она обладает теми же свойствами, что и обычная производная по z. Учитывая тот факт, что, по определению, предел (1.26) понимается в смысле сходимости в норме $\mathbb{C}[0,T]$ при любом $T > > 0$, нетрудно убедиться, что для любых двух дифференцируемых по оператору $z(A,B)*$ в точке z функций $f_1(z,t)$, $f_2(z,t)$ их свертка по t — функция $f_1(z,t) * f_2(z,t)$ — также будет дифференцируемой по $z(A,B)*$ в точке z, причем

$$\frac{d}{dz(A,B)*}(f_1(z,t) * f_2(z,t)) = \frac{df_1}{dz(A,B)*}(z,t) * f_2(z,t) +$$

$$+ f_1(z,t) * \frac{df_2}{dz(A,B)*}(z,t).$$

С учетом результата леммы 5 легко может быть доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Для любого оператора $C*$ класса $\mathcal{E}$ функции $f(z,t)$ и $C * f(z,t)$ дифференцируемы или недифференцируемы по оператору $z(A,B)*$ одновременно и*

$$\frac{d}{dz(A,B)*}(C * f(z,t)) = C * \frac{df}{dz(A,B)*}(z,t).$$

Производные по оператору $z(A,B)*$ высших порядков в предположении их существования определим обычным образом:

$$\frac{d^k}{(dz(A,B)*)^k} f(z,t) = \frac{d}{dz(A,B)*}\left(\frac{d^{k-1}}{(dz(A,B)*)^{k-1}} f(z,t)\right), \ k = 2,3,\ldots$$

Будем говорить, что функция $f(z,t)$ является (A,B)-псевдоаналитической в области G, если она дифференцируема по $z(A,B)*$ в каждой точке $z \in G$ и производная $df/dz(A,B)*$, как функция двух переменных z,t, непрерывна в области $G \times [0,\infty)$. Из перечисленных выше свойств производной по $z(A,B)*$ вытекает следующая теорема.

Теорема 4. *Сумма двух функций, (A,B)-псевдоаналитических в области G, их свертка по переменной t и произведение на число являются функциями, (A,B)-псевдоаналитическими в области G. Для любого оператора $C*$ класса $\mathcal{E}$ и (A,B)-псевдоаналитической в области G функции $f(z,t)$ функция $C * f(z,t)$ также является (A,B)-псевдоаналитической в G.*

Пусть в области G задана кусочно-гладкая кривая Γ. Используя параметрическое представление кривой Γ, зададим координаты x_1, x_2 каждой ее точки уравнениями $x_1 = x_1(s)$, $x_2 = x_2(s)$, где $x_1(s)$, $x_2(s)$ — кусочно-гладкие функции действительного параметра s, удовлетворяющие условию $[x_1'(s)]^2 + [x_2'(s)]^2 \neq 0$. Для любой достаточно гладкой функции $f(z,t) = u(x,t) + iv(x,t)$ в области $G \times [0,\infty)$ можно ввести в рассмотрение следующий интеграл по кусочно-гладкой кривой $\Gamma \subset G$:

$$\int_\Gamma dz(A,B) * f(z,t) = \int_\Gamma (dx_1 A * + i dx_2 B*) f(z,t) =$$

$$= \int_\Gamma [dx_1 A * u(x,t) - dx_2 B * v(x,t)] +$$

$$+ i \int_\Gamma [dx_1 A * v(x,t) + dx_2 B * u(x,t)]. \quad (1.33)$$

Из определения вытекает, что (1.33) обладает обычными свойствами криволинейных интегралов. В частности, имеет место формула

$$\int_{\Gamma} dz(A,B) * f(z,t) = \int_{\alpha}^{\beta} (x_1'(s)A* + ix_2'(s)B*) f(z(s),t)\, ds, \qquad (1.34)$$

где $z(s) = x_1(s) + ix_2(s)$ — параметрическое задание кривой Γ, $z(\alpha)$ и $z(\beta)$ — начальная и конечная точки этой кривой. Нетрудно убедиться, что для любой функции $f(z,t)$, непрерывной в области $G \times [0,\infty)$, любой кусочно-гладкой кривой $\Gamma \subset G$, любого оператора $C*$ класса $\mathcal{E}$

$$\int_{\Gamma} dz(A,B) * (C * f(z,t)) = C * \int_{\Gamma} dz(A,B) * f(z,t). \qquad (1.35)$$

В дальнейшем будем рассматривать интегралы от (A,B)-псевдоаналитических функций, причем в основном нас будет интересовать случай, когда кривая Γ является замкнутой кусочно-гладкой кривой, не имеющей точек самопересечения. Такую кривую будем называть замкнутым контуром. Имеет место аналог теоремы Коши.

Теорема 5. *Пусть в односвязной области G задана (A,B)-псевдоаналитическая функция $f(z,t)$. Тогда интеграл* (1.33) *от этой функции по любому замкнутому контуру $\Gamma \subset G$ равен нулю при всех $t \geqslant 0$.*

Для доказательства теоремы достаточно убедиться, что из условий (1.25), выполнение которых вытекает из условий теоремы, следует, что подынтегральные выражения в правой части (1.33) представляют собой полные дифференциалы.

Как и в теории функций комплексного переменного, теорема 5 допускает важную для практики видоизмененную формулировку.

Теорема 6. *Пусть $f(z,t)$ является (A,B)-псевдоаналитической в многосвязной области G, ограниченной извне контуром Γ_0, а изнутри — контурами $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$, и пусть $f(z,t)$ непрерывна по совокупности переменных z, t в области $\overline{G} \times [0,\infty)$ ($\overline{G}$ — замыкание области G). Тогда*

$$\int_{\Gamma} dz(A,B) * f(z,t) = 0, \quad t \geqslant 0,$$

где Γ — полная граница области G, состоящая из контуров Γ_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, причем обход границы Γ происходит в положительном направлении.

Здесь и далее правило обхода полной границы понимается в том же смысле, что и обычно [Свешников]. Доказательство теоремы требует проведения рассуждений, вполне аналогичных используемым при доказательстве соответствующего утверждения в теории аналитических функций.

На основе результатов §1 легко может быть доказана следующая лемма.

Лемма 6. *Пусть $f(z,t)$ является (A,B)-псевдоаналитической в некоторой окрестности точки $z_0 \neq 0$. Тогда*

$$\lim_{\Delta z \to 0} [((z_0+\Delta z)(A,B)*)^{-1} f(z_0+\Delta z,t)] = (z_0(A,B)*)^{-1} f(z_0,t), \quad (1.36)$$

причем предел в (1.36) *понимается в смысле сходимости по норме* $\mathbb{C}[0,\mathrm{T}]$ *при любом* $\mathrm{T}>0$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 7. *Пусть функция $f(z,t)$ является (A,B)-псевдоаналитической в области G. Тогда функция $(z(A,B)*)^{-1} f(z,t)$ также является (A,B)-псевдоаналитической в области G, за исключением точки* 0, *если она принадлежит области G.*

Обозначим $\psi(z,t) \equiv (z(A,B)*)^{-1} f(z,t)$. С учетом определения оператора $z(A,B)*$ в (1.14), нетрудно убедиться, что при $z \neq 0$ имеет место равенство

$$f(z+\Delta z,t) - f(z,t) = (\Delta z(A,B)*)\psi(z+\Delta z,t) + \\ + z(A,B) * [\psi(z+\Delta z,t) - \psi(z,t)]. \quad (1.37)$$

Считая в (1.37) $\Delta z \neq 0$, подействуем на обе части (1.37) оператором $(z(A,B)*)^{-1}(\Delta z(A,B)*)$. С учетом леммы 5, (A,B)-псевдоаналитичности функции $f(z,t)$, леммы 6, переходя к пределу при $\Delta z \to 0$, можно убедиться, что существует

$$\frac{d\psi}{dz(A,B)*}(z,t) = (z(A,B)*)^{-1} \frac{df}{dz(A,B)*}(z,t) - \\ - (z(A,B)*)^{-1}\psi(z,t), \quad z \neq 0. \quad (1.38)$$

Из (3.13) вытекает утверждение леммы.

Заметим, что с помощью (1.38) можно по индукции доказать следующее равенство для любой $\varphi(t) \in \mathbb{C}[0,\infty)$ при $z \neq 0$

$$\frac{d^n}{(dz(A,B)*)^n}(z(A,B)*)^{-1}\varphi(t) = \\ = (-1)^n n!(z(A,B)*)^{-(n+1)}\varphi(t), \ n=0,1,\ldots \quad (1.39)$$

Теорема 7. *Пусть $f(z,t)$ является (A,B)-псевдоаналитической в односвязной области G. Пусть $\Gamma \subset G$ — гладкий замкнутый контур, G_1 — область, ограниченная контуром Γ. Тогда при $t \geqslant 0$*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma d\xi(A,B) * ((\xi - z)(A,B)*)^{-1} f(\xi,t) = \\ = \begin{cases} f(z,t), & z \in G_1, \\ 0, & z \notin G_1. \end{cases} \quad (1.40)$$

При $z \notin G_1$ утверждение теоремы следует непосредственно из теоремы 5. Пусть $z \in G_1$. Окружим точку z окружностью радиуса ρ; обозначим ее $C_\rho : C_\rho \equiv \{\xi : |\xi - z| = \rho\}$. Этот контур, очевидно, допускает параметризацию $\xi = z + \rho e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. В силу теоремы 5 при достаточно малых ρ, таких что $C_\rho \subset G_1$, интеграл в левой части (1.40) равен

$$\int_{C_\rho} d\xi(A, B) * ((\xi - z)(A, B)*)^{-1} f(\xi, t). \tag{1.41}$$

Используя описанную выше параметризацию с учетом формулы (1.34) и леммы 6, переписываем (1.41) в виде

$$\int_0^{2\pi} (-\sin(\varphi)A* + i\cos(\varphi)B*)(\cos(\varphi)A* + i\sin(\varphi)B*)^{-1} \times$$
$$\times f(z + \rho e^{i\varphi}, t)\, d\varphi, \ \rho > 0. \tag{1.42}$$

Принимая во внимание равенство

$$(\cos(\varphi)A* + i\sin(\varphi)B*)^{-1} = [\cos^2(\varphi)(A*)^2 +$$
$$+ \sin^2(\varphi)(B*)^2]^{-1}(\cos(\varphi)A* - i\sin(\varphi)B*),$$

которое легко проверяется непосредственно, переписываем (1.42) в виде

$$\int_0^{2\pi} (-\sin\varphi\cos\varphi)[(A*)^2 - (B*)^2][\cos^2(\varphi)(A*)^2 +$$
$$+ \sin^2(\varphi)(B*)^2]^{-1} f(z + \rho e^{i\varphi}, t)\, d\varphi +$$
$$+ i \int_0^{2\pi} (A*)(B*)[\cos^2(\varphi)(A*)^2 + \sin^2(\varphi)(B*)^2]^{-1} f(z + \rho e^{i\varphi}, t)\, d\varphi.$$

Рассмотрим оператор $\cos^2(\varphi)(A*)^2 + \sin^2(\varphi)(B*)^2$. Учитывая, что $A* = E + \mathcal{A}(t)*$, $B* = E + \mathcal{B}(t)*$, и обозначая $\widetilde{\mathcal{A}}(t) = 2\mathcal{A}(t) + \mathcal{A}_2(t)$, где $\mathcal{A}_2(t)$ определена (1.1), и, аналогично, $\widetilde{\mathcal{B}}(t) = 2\mathcal{B}(t) + \mathcal{B}_2(t)$, получаем

$$\cos^2(\varphi)(A*)^2 + \sin^2(\varphi)(B*)^2 = E + \psi(\varphi, t)*,$$
$$\psi(\varphi, t) \equiv \cos^2(\varphi)\widetilde{\mathcal{A}}(t) + \sin^2(\varphi)\widetilde{\mathcal{B}}(t).$$

Очевидно, что функция $\psi(\varphi, t)$ непрерывна по φ, t в области $[0, 2\pi] \times [0, \infty)$. Учитывая этот факт, получаем при любом $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$[\cos^2(\varphi)(A*)^2 + \sin^2(\varphi)(B*)^2]^{-1} = (E + \psi(\varphi, t)*)^{-1} =$$
$$= E + \chi(\varphi, t)*, \tag{1.43a}$$

$$\chi(\varphi,t)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\psi_k(\varphi,t), \tag{1.43б}$$

где $\psi_k(\varphi,t)$ выражаются через $\psi(\varphi,t)$ по формулам (1.1). Ряд в (1.43а) сходится по норме $\mathbb{C}[0,T]$ при любом $T>0$ равномерно по $\varphi\in$ $\in[0,2\pi]$, и тем самым $\chi(\varphi,t)$, определенная (1.43б), непрерывна по φ, t в области $[0,2\pi]\times[0,\infty)$. Зафиксируем произвольную функцию $\eta(t)\in$ $\in\mathbb{C}[0,\infty)$ и рассмотрим интеграл

$$I_1(t)\equiv\int_0^{2\pi}\sin(\varphi)\cos(\varphi)(A*)^2(\cos^2(\varphi)(A*)^2+ \\ +\sin^2(\varphi)(B*)^2)^{-1}\eta(t)\,d\varphi. \tag{1.44}$$

Учитывая (1.43), характер сходимости ряда в (1.43б) и (1.35), перепишем (1.44) в виде

$$I_1(t)=\frac{1}{2}(A*)^2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\int_0^{2\pi}\sin(2\varphi)\psi_k(\varphi,t)\,d\varphi\right]*\eta(t)+ \\ +(A*)^2\int_0^{2\pi}\sin(\varphi)\cos(\varphi)\eta(t)\,d\varphi.$$

Заметим, что из определения $\psi_k(\varphi,t)$ вытекают равенства

$$\psi_k(\varphi,t)=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\cos^{2j}(\varphi)\sin^{2k-2j}(\varphi)\widetilde{\mathcal{A}}_j(t)*\widetilde{\mathcal{B}}_{k-j}(t). \tag{1.45}$$

Легко видеть, что

$$\int_0^{2\pi}\sin(2\varphi)\psi_k(\varphi,t)\,d\varphi=0,\quad k=1,2,\ldots,\quad t\geqslant 0,$$

и, таким образом, $I_1(t)\equiv 0$. Аналогично доказывается, что

$$I_2(t)\equiv\int_0^{2\pi}\cos(\varphi)\sin(\varphi)(B*)^2[\cos^2(\varphi)(A*)^2+ \\ +\sin^2(\varphi)(B*)^2]^{-1}\eta(t)\,d\varphi\equiv 0.$$

Рассмотрим теперь

$$I_3(t) \equiv \int_0^{2\pi} (A*)(B*)[\cos^2(\varphi)(A*)^2 + \sin^2(\varphi)(B*)^2]^{-1}\eta(t)\,d\varphi =$$

$$= 2\pi(A*)(B*)\eta(t) + A*B* \left[\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \int_0^{2\pi} \psi_k(\varphi,t)\,d\varphi\right] * \eta(t). \quad (1.46)$$

Учитывая (1.45), тот факт, что

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2k}\varphi\cos^{2m}\varphi\,d\varphi = 2\frac{\Gamma(k+1/2)\Gamma(m+1/2)}{(m+k)!}, \quad k,m = 0,1,\ldots,$$

и явный вид функций $\widetilde{\mathcal{A}}(t)$ и $\widetilde{\mathcal{B}}(t)$, через которые по формулам (1.1) выражаются $\widetilde{\mathcal{A}}_j(t)$, $\widetilde{\mathcal{B}}_{k-j}(t)$ в (3.20), из (1.46) получаем

$$I_3(t) \equiv 2A*B*\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \sum_{j=0}^{k} \frac{\Gamma(k-j+1/2)\Gamma(j+1/2)}{j!(k-j)!} \times \right.$$

$$\left. \times [(A*)^2 - E]^j [(B*)^2 - E]^{k-j}\eta(t)\right).$$

Из последнего равенства с учетом леммы 4 вытекает, что

$$I_3(t) = 2\pi\eta(t), \quad t \geqslant 0.$$

Заметим теперь, что, в силу изложенного выше, для любой функции $\eta(t) \in \mathbb{C}[0,\infty)$

$$\int_{C_\rho} d\xi(A,B) * ((\xi - z)(A,B)*)^{-1}\eta(t) = 2\pi i\eta(t), \quad t \geqslant 0. \quad (1.47)$$

Используя представление (1.42) интеграла (1.41) по C_ρ, можно показать, что для любой функции $\Phi(\xi,t)$, непрерывной по совокупности переменных в области $C_\rho \times [0,\infty)$, для любого $T > 0$

$$\left\| \int_{C_\rho} d\xi(A,B) * ((\xi - z)(A,B)*)^{-1}\Phi(\xi,\cdot) \right\|_{\mathbb{C}[0,T]} \leqslant$$

$$\leqslant C(T)\|\Phi(\xi,\cdot)\|_{\mathbb{C}[0,T]}, \quad (1.48)$$

где $C(T)$ — неотрицательная непрерывная функция по T. С учетом того факта, что функция $f(\xi,t)$ является (A,B)-псевдоаналитической в области $|\xi - z| \leqslant \rho$, нетрудно получить, что

$$\sup_{\xi \in C_\rho} \|f(\xi,\cdot) - f(z,\cdot)\|_{\mathbb{C}[0,T]} \to 0, \quad \rho \to 0+0, \quad (1.49)$$

для любого $T > 0$. Так как в силу теоремы 5 интеграл (1.41) по C_ρ не зависит от величины $\rho > 0$, то в (1.41) величину ρ можно устремить к нулю. При этом из (1.48), (1.49) вытекает, что при устремлении ρ к нулю функцию $f(\xi, t)$ в (1.41) можно заменить на $f(z, t)$. С учетом этого замечания, а также формулы (1.47) для случая $\eta(t) \equiv f(z, t)$ приходим к утверждению теоремы.

1.4. Существование производных любого порядка у псевдоаналитических функций. Обобщенная теорема Лиувилля. Рассмотрим функцию $\varphi(z, \xi, t)$ двух комплексных переменных z, ξ и действительной t, определенную для значений $t \geqslant 0$, $z = x_1 + ix_2$ из области G и для значений $\xi = \zeta_1 + i\zeta_2$, принадлежащих некоторой кусочно-гладкой кривой Γ. Взаимное расположение области G и кривой Γ может быть совершенно произвольным. Пусть $\varphi(z, \xi, t)$ удовлетворяет следующим условиям:

а) функция $\varphi(z, \xi, t)$ при любом $\xi \in \Gamma$ является (A, B)-псевдоаналитической в области G (см. [Плетнер, 4]);

б) функция $\varphi(z, \xi, t)$ и ее производная $\dfrac{d}{dz(A, B)*}\varphi(z, \xi, t)$ являются непрерывными по совокупности переменных при $z \in G$, $\xi \in \Gamma$, и $t \geqslant 0$.

Очевидно, что при сделанных предположениях для любых $z \in G$ и $t \geqslant 0$ существует интеграл

$$F(z, t) \equiv \int\limits_\Gamma d\xi(A, B) * \varphi(z, \xi, t). \tag{1.50}$$

Теорема 8. *При перечисленных выше условиях функция* (1.50) *является* (A, B)*-псевдоаналитической в области* G*, причем*

$$\frac{dF}{dz(A, B)*}(z, t) = \int\limits_\Gamma d\xi(A, B) * \frac{d\varphi(z, \xi, t)}{dz(A, B)*}.$$

Доказательство теоремы проводится при помощи рассуждений, совершенно аналогичным при доказательстве соответствующего утверждения в теории аналитических функций [Свешников]. При этом следует учесть, что операция интегрирования в (2.1) перестановочна с действием произвольного оператора $C*$ класса $\mathcal{E}$ (см. [Плетнер, 4]), и возможность дифференцирования по x_1, x_2 под знаком интеграла в (1.50).

С помощью теоремы 1 и результатов [Свешников] нетрудно убедиться, что справедлива следующая теорема.

Теорема 9. *Пусть функция* $f(z, t)$ *является* (A, B)*-псевдоаналитической в области* G *и непрерывной по совокупности переменных в области* $\overline{G} \times [0, \infty)$ ($\overline{G}$ *— замыкание области* G)*. Тогда во внутренних точках области* G *существуют производные функции* $f(z, t)$ *по оператору* $z(A, B)*$ *любого порядка, причем справедлива формула*

$$\frac{d^n}{[dz(A,B)*]^n}f(z,t) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} d\xi(A,B) * [(\xi - z)(A,B)*]^{-(n+1)}f(\xi,t), \tag{1.51}$$

где $n = 1, 2, \ldots$, Γ — *полная граница области* G, *обходимая в положительном направлении.*

На основе формулы (1.51) рассуждениями, аналогичным проводимым в теории аналитических функций [Свешников], может быть доказан аналог теоремы Лиувилля.

Теорема 10. *Пусть* $f(z,t)$ — *функция,* (A,B)-*псевдоаналитическая на всей плоскости, и пусть при всех* $z, t \geqslant 0$ *справедлива оценка*

$$|f(z,t)| \leqslant C(t),$$

где $C(t)$ — *непрерывная неотрицательная функция от* t. *Тогда* $f(z,t) \equiv \Phi(t) \in \mathbb{C}[0,\infty)$.

1.5. Представление псевдоаналитических функций обобщенными рядами Тейлора и Лорана. Пусть функция $f(z,t)$ является (A,B)-псевдоаналитической в круге $|z - z_0| < R$. Рассмотрим круг $|z - z_0| < R' < R$. В силу обобщенной формулы Коши [Свешников], для всех z из этого круга

$$f(z,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{R'}} d\xi(A,B) * [(\xi - z)(A,B)*]^{-1}f(\xi,t), \quad t \geqslant 0, \tag{1.52}$$

где $C_{R'} : |\xi - z_0| = R'$. Как и в [Плетнер, 2], для простоты рассуждений предположим, что $z_0 = 0$. Случай $z_0 \neq 0$, очевидно, рассматривается аналогично. Пусть точка $\xi = y_1 + iy_2 \in C_{R'}$, $z = x_1 + ix_2$ лежит в круге $|z| < R' < R$. Из результатов [Свешников] следует, что

$$(\xi - z)(A,B)* = \xi(A,B) * (E - [\xi(A,B)*]^{-1}z(A,B)*),$$

причем при любых $z, \xi \neq 0$

$$[\xi(A,B)*]^{-1}z(A,B)* = \xi^{-1}z(E + \chi(x,y,t)*), \tag{1.53}$$

где функция $\chi(x,y,t)$ непрерывна по совокупности переменных при $x, y \in \mathbb{R}^2\backslash 0$, $t \geqslant 0$, причем справедлива оценка

$$\|\chi(x,y,\cdot)\|_{\mathbb{C}[0,T]} \leqslant C(T), \quad T > 0, \tag{1.54}$$

где $C(T)$ — непрерывная неотрицательная функция от T. Дальнейшее рассмотрение основано на разложении подынтегрального выражения в (1.52) в ряд по степеням оператора $(\xi(A,B)*)^{-1}z(A,B)*$ и проводится совершенно аналогично тому, как это сделано в [Плетнер, 2]. Действительно, хотя в [Плетнер, 2] и рассматривались (A,B)-псевдоаналитические функции для случая конкретных операторов $A*$, $B*$, явный вид этих операторов при построении рядов типа Тейлора и Лорана не использовался; существенными были лишь формула типа

(1.53) и оценка, аналогичная (1.54). В силу сделанного замечания далее в этом параграфе приводятся лишь формулировки теорем, доказательства которых заинтересованный читатель найдет в [Плетнер, 2].

Теорема 11. *Функция $f(z,t)$, являющаяся (A,B)-псевдоаналитической внутри круга $|z-z_0|<R$, может быть представлена в этом круге сходящемся в норме $\mathbb{C}[0,T]\ \forall\, T>0$ рядом*

$$f(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}[(z-z_0)(A,B)*]^n c_n(t), \tag{1.55}$$

причем этот ряд определен однозначно. Коэффициенты $c_n(t)$ определяются формулами

$$c_n(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C d\xi(A,B)*[(\xi-z_0)(A,B)*]^{-(n+1)}f(\xi,t),$$

где C — гладкий замкнутый контур, целиком лежащий в круге $|z-z_0|<R$, содержащий точку z_0 внутри и обходимый в положительном направлении.

С помощью теоремы 4, так же как в теории аналитических функций [Свешников], может быть доказана следующая теорема.

Теорема 12. *Пусть $f(z,t)$ является (A,B)-псевдоаналитической в области G и обращается в нуль в различных точках $z_n\in G$, $z=1,2,\ldots$, при всех $t\geqslant 0$. Если $\{z_n\}$ сходится к пределу $a\in G$, то $f(z,t)\equiv 0$ при $z\in G$, $t\geqslant 0$.*

Следствие. Если для двух (A,B)-псевдоаналитических в области G функций $f_1(z,t)$, $f_2(z,t)$ при $t\geqslant 0$, $z\in L$ ($L\subset G$ — некоторая кривая) выполнено равенство $f_1(z,t)=f_2(z,t)$, то $f_1(z,t)\equiv f_2(z,t)$ при $z\in G$, для всех $t\geqslant 0$.

Пусть функция $f(z,t)$ является (A,B)-псевдоаналитической в области G. Точку $z_0\in G$ назовем правильной точкой функции $f(z,t)$, если существует сходящийся по норме $\mathbb{C}[0,T]$ при любом $T>0$ и при z из некоторого круга $|z-z_0|<R$ ряд вида (1.55), который в общей части круга $|z-z_0|<R$ и области G сходится к функции $f(z,t)$. Точки, не являющиеся правильными точками $f(z,t)$, будем называть особыми.

Точку z_0 назовем изолированной особой точкой функции $f(z,t)$, если $f(z,t)$ является (A,B)-псевдоаналитической в некотором круговом кольце $R_1<|z-z_0|<R_2$, а точка z_0 — особой точкой функции $f(z,t)$.

Теорема 13. *Функция $f(z,t)$, являющаяся (A,B)-псевдоаналитической в круговом кольце $R_1<|z-z_0|<R_2$, однозначно представляется в этом кольце рядом*

$$f(z,t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[(z-z_0)(A,B)*]^n c_n(t), \tag{1.56}$$

сходящимся по норме $\mathbb{C}[0,T]\ \forall\ T>0$. *Коэффициенты* $c_n(t)$ *вычисляются по формулам*

$$c_n(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C d\xi(A,B)*[(\xi-z_0)(A,B)*]^{-(n+1)}f(\xi,t),\quad n=0,\pm1,\dots,$$

где C *— произвольный замкнутый контур, лежащий в кольце* $R_1<|z-z_0|<R_2$, *обходимый в положительном направлении.*

Вычетом (A,B)-псевдоаналитической функции $f(z,t)$ в изолированной особой точке z_0 назовем комплекснозначную функцию действительной переменной $t\geqslant 0$, равную интегралу

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma d\xi(A,B)*f(\xi,t).$$

Здесь γ — произвольный замкнутый контур, лежащий в области, в которой $f(z,t)$ является (A,B)-псевдоаналитической, содержащий внутри единственную особую точку z_0 и обходимый в положительном направлении.

Чтобы отличать вычет (A,B)-псевдоаналитической функции $f(z,t)$ от вычета аналитической функции, будем обозначать его $R_{(A,B)}[f(z,t);z_0]$. Из теоремы 4 вытекает, что

$$R_{(A,B)}[f(z,t);z_0]=c_{-1}(t),$$

где $c_{-1}(t)$ — коэффициент разложения функции $f(z,t)$ в ряд Лорана (1.56) с центром в точке z_0.

С учетом изложенного выше и результатов [Свешников] легко может быть доказана следующая теорема.

Теорема 14. *Пусть* $f(z,t)$ *является* (A,B)*-псевдоаналитической в области* G, *за исключением конечного числа изолированных особых точек* z_k, $k=1,2,\dots,N$, *лежащих внутри области* G, *и непрерывной по совокупности переменных в области* $\overline{G}\times[0,\infty)$ ($\overline{G}$ *— замыкание области* G). *Тогда*

$$\int\limits_{\Gamma^+} d\xi(A,B)*f(\xi,t)=2\pi i\sum_{k=1}^{N}R_{(A,B)}[f(z,t);z_k],$$

где Γ^+ *— полная граница области* G, *обходимая в положительном направлении.*

1.6. Решения двумерных аналогов уравнения Соболева. С учетом результатов [Плетнер, 4] и теоремы 2 легко может быть доказана следующая теорема.

Теорема 15. *Если функция* $f(z,t)=u(x,t)+iv(x,t)$ *является* (A,B)*-псевдоаналитической в области* G, *то функции* $u(x,t)$, $v(x,t)$

удовлетворяют при $x \in G$, $t \geqslant 0$ *уравнению*

$$(A*)^{-2} w_{x_1 x_1} + (B*)^{-2} w_{x_2 x_2} = 0. \tag{1.57}$$

Функции $w(x,t) \in \mathbb{C}[(0,\infty); \mathbb{C}^{(2)}(G)]$, удовлетворяющие при $t \geqslant 0$, $x \in G$ уравнению (2.8), будем называть (A,B)-псевдогармоническими в области G.

Теорема 16. *Пусть функция* $u(x,t)$ *является* (A,B)*-псевдогармонической в односвязной области* G. *Тогда с точностью до аддитивной действительной функции* $C(t) \in \mathbb{C}[0,\infty)$ *определена* (A,B)*-псевдогармоническая в* G *функция* $v(x,t)$ *такая, что функция* $f(z,t) = u(x,t) + iv(x,t)$ *является* (A,B)*-псевдоаналитической.*

В силу обобщенных соотношений Коши–Римана по заданной $u(x,t)$ однозначно определяются производные искомой функции $v(x,t)$ по $x_{1,2}$ при $x \in G$, $t \geqslant 0$, причем они принадлежат классу $\mathbb{C}[(0,\infty); \mathbb{C}^{(1)}(G)]$. С учетом односвязности области G и того факта, что искомая функция $v(x,t)$ должна быть при любом $x \in G$ непрерывной по t при $t \geqslant$ $\geqslant 0$, как мнимая часть (A,B)-псевдоаналитической функции, приходим к утверждению теоремы.

Следствие 1. Любую (A,B)-псевдогармоническую в односвязной области G функцию $u(x,t)$ можно рассматривать как действительную или мнимую часть (A,B)-псевдоаналитической в G функции; эта последняя определена с точностью до слагаемого вида $iC(t)$ или $C(t)$, где $C(t) \in \mathbb{C}[0,\infty)$ — действительная функция.

Из следствия 1 и теоремы 4 вытекает следующее следствие.

Следствие 2. Любая (A,B)-псевдогармоническая в области G функция $u(x,t)$ при каждом $t \geqslant 0$ является аналитической функцией, как функция двух переменных x_1, x_2 в любой точке $x \in G$.

Применим полученные результаты для изучения свойств решений двумерных аналогов уравнения Соболева

$$P_1(D_t) u_{x_1 x_1}(x,t) + P_2(D_t) u_{x_2 x_2}(x,t) = 0, \quad x \in G \subset \mathbb{R}^2, \tag{1.58}$$

где

$$P_j(\xi) = \sum_{k=0}^{l-1} a_{kj} \xi^k + \xi^l, \quad j = 1,2, \quad l = 1,2,\ldots, \tag{1.58}$$

a_{kj} — действительные постоянные. Выше было показано, что в классе функций $\mathbb{C}_0^{(l)}[[0,\infty); \mathbb{C}^{(2)}(G)]$ уравнение (1.58а) эквивалентно уравнению

$$(A*)^{-2} u_{x_1 x_1} + (B*)^{-2} u_{x_2 x_2} = 0,$$

где

$$A* \equiv (A_1*)^{-1/2}, \quad B* = (B_1*)^{-1/2}, \tag{1.59}$$

$$A_1* = E + \mathcal{A}_1(t)*, \quad B_1* = E + \mathcal{B}_1(t)*,$$

$$\mathcal{A}_1(t)=\sum_{k=0}^{l-1}a_{k1}\frac{t^{l-k-1}}{(l-k-1)!},\qquad \mathcal{B}_1(t)=\sum_{k=0}^{l-1}a_{k2}\frac{t^{l-k-1}}{(l-k-1)!}. \quad (1.59\ )$$

Здесь a_{kj}, $k=0,1,\dots,l-1$; $j=1,2$, имеют тот же смысл, что и в (1.58б).

Принимая во внимание полученные выше результаты, в частности теорему 9 и следствия этой теоремы, приходим к следующему утверждению.

Теорема 17. *Любое решение уравнения* $(1.58a)$ *в области* $(x,t)\in G\times[0,\infty)$, *удовлетворяющее начальным условиям*

$$D_t^k u(x,0)=0,\quad k=0,1,\dots,l-1,\quad x\in G, \qquad (1.60)$$

где $G\subset\mathbb{R}^2$ *— односвязная область, можно рассматривать как действительную или мнимую часть* (A,B)*-псевдоаналитической в области* G *функции* (операторы $A*$, $B*$ определены (1.59)), действительная и мнимая части которой при любом $x\in G$ являются функциями переменной t из класса $\mathbb{C}_0^{(l)}[0,\infty)$. Эта функция определена с точностью до слагаемого вида $iC(t)$ или $C(t)$ соответственно, где $C(t)\in\mathbb{C}_0^{(l)}[0,\infty)$ — действительная функция.

Следствие 3. Любое решение уравнения (1.58) в области $(x,t)\in G\times[0,\infty)$, удовлетворяющее условиям (1.60), при любом $t\geqslant 0$ является аналитической функцией двух переменных x_1,x_2 в любой точке области G.

1.7. Некоторые приложения. Получим некоторые частные результаты, иллюстрирующие приложения изложенного выше формализма к решению конкретных задач. Прежде чем перейти к рассмотрению приложений, сделаем несколько полезных для дальнейшего замечаний. В работе [Плетнер, 4] было показано, что для любого оператора $C*$ класса $\mathcal{E}$ функции $f(z,t)$ и $C*f(z,t)$ являются или не являются (A,B)-псевдоаналитическими одновременно. Учитывая этот факт, а также вытекающее из определения оператора $z(A,B)*$ (см. [Плетнер, 4]) равенство

$$z(CA,CB)*=C*z(A,B)*,$$

справедливое для любого оператора $C*$ класса $\mathcal{E}$, можно доказать, что любая (A,B)-псевдоаналитическая функция является (CA,CB)-псевдоаналитической при любом операторе $C*$ класса $\mathcal{E}$, и обратно, причем

$$\frac{df}{dz(CA,CB)*}=(C*)^{-1}\frac{df}{dz(A,B)*}.$$

Заметим теперь, что результат теоремы 5 позволяет ввести понятие (A,B)-псевдоаналитического продолжения, аналогично тому, как это делается в теории аналитических функций [Свешников]. Это позволяет в ряде случаев легко строить (A,B)-псевдоаналитические продолжения функций $f(z,t)$, определенных при $t\geqslant 0$, $z\in L$, когда L — действи-

тельная или мнимая ось. При этом полезными оказываются следующие вспомогательные результаты.

Пусть $A*$, $B*$ — действительные операторы класса $\mathcal{E}$, т. е.

$$A* = E + \mathcal{A}(t)*, \quad B* = E + \mathcal{B}(t)*, \quad \mathcal{A}(t),\, \mathcal{B}(t) \in \mathbb{C}[0,\infty).$$

Рассмотрим оператор $z(A,B) * -bE$, где b — некоторое фиксированное комплексное число. С учетом результатов [Плетнер, 4] приходим к равенству

$$z(A,B) * -bE = (z-b)\{E + (z-b)^{-1}[x_1\mathcal{A}(t) * + ix_2\mathcal{B}(t)*]\} = \\ = (z-b)[E + \mathcal{F}(z,t)*], \quad (1.61)$$

причем функция $\mathcal{F}(z,t)$, определенная (1.61), непрерывна по совокупности переменных при $z \neq b$, $t \geqslant 0$. В силу этого факта, используя результаты [Плетнер, 4], нетрудно показать, что при любом $z \neq b$

$$[z(A,B) * -bE]^{-1} = (z-b)^{-1}[E + \Phi(z,t)*], \quad (1.62а)$$

$$\Phi(z,t) \equiv \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \mathcal{F}_k(z,t),$$

$$\mathcal{F}_1(z,t) \equiv \mathcal{F}(z,t), \quad \mathcal{F}_k(z,t) \equiv \mathcal{F}(z,t) * \mathcal{F}_{k-1}(z,t), \quad (1.62б)$$

где $k = 2, 3, \ldots$ Ряд в (1.62б) сходится при $|z-b| > \varepsilon > 0$ равномерно по z по норме $\mathbb{C}[0,T]$ при любом $T > 0$, и, таким образом, функция $\Phi(z,t)$ является непрерывной по совокупности переменных при $z \neq b$, $t \geqslant 0$.

Л е м м а 8. *Пусть функция $f(z,t)$ является (A,B)-псевдоаналитической в области G. Тогда функция*

$$\psi(z,t) \equiv [z(A,B) * -bE]^{-1} f(z,t) \quad (1.63)$$

также является (A,B)-псевдоаналитической в области G, за исключением точки b (если $b \in G$).

При $z \neq b$ перепишем (1.63) в виде

$$f(z,t) = [z(A,B) * -bE]\psi(z,t). \quad (1.64)$$

Зафиксируем точку $z_0 \in G$, $z_0 \neq b$, и зададим приращение Δz. Обозначим через $\Delta f(z_0,t)$, $\Delta\psi(z_0,t)$ соответствующие приращения функций $f(z,t)$, $\psi(z,t)$ в точке z_0, а через $\Delta z(A,B)*$ — оператор, соответствующий числу Δz (см. [Плетнер, 4]).

Из (1.64) нетрудно получить равенство

$$\Delta f(z_0,t) = \Delta z(A,B) * \psi(z_0 + \Delta z, t) + [z_0(A,B) * -bE]\Delta\psi(z_0,t). \quad (1.65)$$

При $z_0 \neq b$ подействуем на обе части (1.65) оператором

$$[z_0(A,B) * -bE]^{-1}[\Delta z(A,B)*]^{-1},$$

учитывая коммутацию рассматриваемых операторов между собой. Заметим, что из (A,B)-псевдоаналитичности функции $f(z,t)$ и формул

(1.62), (1.63) вытекает непрерывность $\psi(z,t)$ по совокупности переменных при $z \neq b$, $t \geqslant 0$. С учетом этого факта, исходя из определения производной по $z(A,B)*$ (см. [Плетнер, 4]), можно, переходя к пределу при $\Delta z \to 0$, получить

$$\frac{d\psi}{dz(A,B)*}(z_0,t) = [z_0(A,B) * -bE]^{-1}\frac{df}{dz(A,B)*}(z_0,t) - \\ - [z_0(A,B) * -bE]^{-2} f(z_0,t).$$

Лемма доказана.

Исходя из только что доказанной леммы по индукции нетрудно доказать, что для любой $\varphi(t) \in \mathbb{C}[0,\infty)$ и $m \in Z$ функция $[z_0(A,B) * -bE]^m \varphi(t)$ является (A,B)-псевдоаналитической на всей комплексной плоскости, за исключением точки b (если $m < 0$). Принимая во внимание результаты, полученные в работе [Плетнер, 4], приходим к следующей лемме.

Лемма 9. *При любой функции $\varphi(t) \in \mathbb{C}[0,\infty)$ функция*

$$[z(A,B)*]^n [z_0(A,B) * -bE]^{-m} \varphi(t), \quad m,n = 0,1,\dots,$$

является (A,B)-псевдоаналитической функцией на всей комплексной плоскости, за исключением точки b.

Рассмотрим функцию $f(x_1,t)$, определенную при $t \geqslant 0$ на действительной оси $z = x_1 \in (-\infty,+\infty)$, следующего вида:

$$f(x_1,t) = P_n(x_1,t)/Q_{2m}(x_1), \tag{1.66}$$

где

$$P_n(x_1,t) = \sum_{t=0}^{n} (x_1)^i c_i(t), \tag{1.67}$$

а величины $c_i(t) \in \mathbb{C}[0,\infty)$ — действительные функции, а $Q_{2m}(x_1)$ — полином степени $2m > n$ с действительными коэффициентами, не имеющий корней на действительной оси. Предположим также, что все корни полинома $Q_{2m}(x_1)$ простые. Из сделанных предположений вытекает, что полином $Q_{2m}(x_1)$ имеет m пар комплексно-сопряженных корней $(a_j, \overline{a}_j)$, $j = 1,2,\dots,m$. Для определенности будем считать $\operatorname{Im} a_j < 0$, $j = 1,2,\dots,m$. Из всего изложенного выше следует, что функцию $f(x_1,t)$, определенную (1.67), можно представить в виде

$$f(x_1,t) = \sum_{j=1}^{m} [(x_1 - a_j)^{-1} A_j(t) + (x_1 - \overline{a}_j)^{-1} \overline{A}_j(t)], \tag{1.68}$$

где $\mathcal{A}_j(t) \in \mathbb{C}[0,\infty)$ — вполне определенные функции.

Построим (A,B)-псевдоаналитическое продолжение функции (1.68) (или (1.67)). Для этого нам будет удобнее рассматривать искомую функцию $f(z,t)$ как $(E, A^{-1}B)$-псевдоаналитическую (E — единичный оператор), что возможно в силу замечания, сделанного в начале

этого параграфа. Заметим, что функция, (A,B)-псевдоаналитическая в некоторой области G, является непрерывной по совокупности переменных в области $G\times[0,\infty)$. С учетом этого факта, а также результата леммы 2, справедливого в случае произвольных операторов $A*$, $B*$ класса $\mathcal{E}$, в том числе и для пары $E,(A*)^{-1}B*$, приходим к следующей теореме.

Теорема 18. *Функция*

$$f(z,t)=\sum_{j=1}^{m}\{[z(E,A^{-1}B)*-a_jE]^{-1}A_j(t)+ \\ +[z(E,A^{-1}B)*-\overline{a}_jE]^{-1}\overline{A}_j(t)\}$$

является (A,B)*-псевдоаналитическим продолжением функции* (1.68) (*или* (1.67)) *с действительной оси.*

Результат леммы 2 позволяет строить (A,B)-псевдоаналитические продолжения функций вида (1.66) также и в случае кратных корней полинома $Q_{2m}(x)$. Однако из-за громоздкости возникающих при этом формул мы не приводим соответствующих рассуждений, ограничиваясь сделанным замечанием.

Отметим, что продолжения функций вида (1.66) с мнимой оси строятся аналогичным образом, при этом следует рассматривать искомое продолжение как (AB^{-1},E)-псевдоаналитическую функцию.

Рассмотрим теперь функцию

$$\varphi(z,t)\equiv 2\sum_{j=1}^{m}[z(E,A^{-1}B)*-a_jE]^{-1}A_j(t). \tag{1.69}$$

В силу изложенного выше она является (A,B)-псевдоаналитической при $z\neq a_j$, $j=1,2,\dots,m$. Нетрудно убедиться также, что функция $\operatorname{Re}\varphi(z,t)$ совпадает при $z=x_1\in(-\infty,+\infty)$, $t\geqslant 0$, с функцией $f(x_1,t)$, определенной (1.68) (или (1.67)).

Рассмотрим уравнение

$$P_1(D_t)u_{x_1x_1}(x,t)+P_2(D_t)u_{x_2x_2}(x,t)=0, \tag{1.70}$$

где $P_{1,2}(D_t)$ определены (1.58а), при $x_2>0$, $t\geqslant 0$. Дополним его начальными условиями

$$D_t^k u(x,0)=0,\quad k=0,1,\dots,l-1,\quad x_2>0. \tag{1.71}$$

Пусть функция $f(x_1,t)$, определенная (1.67), при любом x_1 принадлежит классу $\mathbb{C}_0^{(l)}[0,\infty)$. При этом, очевидно, $c_i(t)$ в (1.67а) и $A_j(t)$ в (1.68) также принадлежат $\mathbb{C}_0^{(l)}[0,\infty)$. Принимая во внимание этот факт, вводя операторы $A*$ и $B*$ по формулам (1.59) и учитывая результаты § 3, приходим к выводу, что функция

$$u(x,t)=\operatorname{Re}\varphi(z,t),$$

где $\varphi(z,t)$ определена (1.69), удовлетворяет при $x_2 > 0$, $t \geqslant 0$ уравнению (1.70), начальным условиям (1.71) и граничному условию

$$u(x,t)|_{x_2=0} = f(x_1,t), \quad t \geqslant 0, \quad x_1 \in (-\infty,+\infty),$$

а $f(x_1,t)$ определена (1.67).

Таким образом, построено решение задачи Дирихле для верхней полуплоскости $x_2 > 0$ с граничной функцией вида (1.67). Для изучения свойств полученного решения можно воспользоваться разложением (1.61) для операторов, входящих в формулу (1.69).

Результат леммы 2 позволяет, в принципе, провести аналогичное построение и в случае кратных корней полинома $Q_{2m}(x_1)$ в (1.66). Отметим, что функциями вида (1.66) можно с хорошей точностью приближать достаточно широкий класс граничных функций $f(x_1,t)$.

Не будем изучать здесь вопрос единственности построенных решений задачи Дирихле для уравнений общего вида (1.70), так как проведенное рассмотрение носило иллюстративный характер.

Остановимся более подробно на рассмотрении аналогичной задачи для двумерного уравнения гравитационно-гироскопических волн:

$$(\partial^2/\partial t^2 + \omega_0^2)u_{x_1x_1} + (\partial^2/\partial t^2 + \alpha^2)u_{x_2x_2} = 0, \tag{1.72}$$

которая по своему физическому содержанию является задачей о возбуждении двумерных волн в стратифицированной вращающейся жидкости, заполняющей верхнее полупространство, двумерными колебаниями плоского дна [Плетнер, 1].

З а д а ч а. Найти при $t \geqslant 0$ функцию $u(x,t) \in \mathbb{C}_0^{(2)}[[0,\infty); \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}_+{}^2)] \cap \cap \mathbb{C}_0^{(2)}[[0,\infty); \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\mathbb{R}}_+{}^2)]$, где $\mathbb{R}_+{}^2 \equiv \{x^2 \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$, $\overline{\mathbb{R}}_+{}^2 \equiv \mathbb{R}_+{}^2 \cup \cup \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$, удовлетворяющую при $t > 0$ в классическом смысле уравнению (1.72) в полуплоскости $\mathbb{R}_+{}^2$, краевому условию

$$u(x,t)|_{x_2=0} = f(x_1,t), \quad x_1 \in (-\infty,+\infty), \tag{1.73}$$

и условиям

$$\left|\frac{\partial^{k+l}}{\partial t^l \partial x_j^k} u(x,t)\right| \leqslant \frac{C(t)}{(1+|x_1|^\gamma)(1+x_2)}$$

при $|x_1|,\ x_2 \to +\infty,\ k = 0,1;\ l = 0,1,2;\ j = 1,2;\ \gamma > 1/2,\ C(t)$ — непрерывная функция.

Пусть $f(x_1,t)$ в (1.73) имеет вид (1.66), т.е.

$$f(x_1,t) = P_n(x_1,t)/Q_{2m}(x_1), \quad 2m - n \geqslant 2,$$

где $P_n(x_1,t)$, $Q_{2m}(x_1)$ описаны выше. Предположим, что при любом фиксированном x_1 функция $P_n(x_1,t) \in \mathbb{C}_0^{(2)}[0,\infty)$, т.е. $c_i(t)$ в (1.66а), $i = 1,2,\ldots,n$, и $\mathcal{A}_j(t)$ в (1.67), $j = 1,2,\ldots,m$, также принадлежат классу $\mathbb{C}_0^{(2)}[0,\infty)$.

Из изложенного выше вытекает, что решения уравнения (2.72) можно рассматривать как мнимые или действительные части (A,B)-

псевдоаналитических функций $f(z,t)$, принадлежащих при фиксированном z классу $\mathbb{C}_0^{(2)}[0,\infty)$ как функции переменной t. Операторы $A*$ и $B*$ в данном случае имеют вид [Плетнер, 2]

$$A* = E - \omega_0 J_1(\omega_0 t)*, \quad B* = E - \alpha J_1(\alpha t)*,$$

где $J_1(\xi)$ — функция Бесселя первого порядка. Для операторов такого вида в [Габов, 1] получена явная формула обращения, в частности

$$(A*)^{-1} = (E - \omega_0 S(\omega_0 t)*), \quad S(\omega_0 t) = -\int\limits_0^{\omega_0 t} \frac{J_1(\xi)}{\xi}\, d\xi. \tag{1.74}$$

Отметим, что в [Плетнер, 1–2] рассматривались (B^{-1}, A^{-1})-псевдоаналитические функции, что эквивалентно рассмотрению (A,B)-псевдоаналитических функций в силу замечания, сделанного в начале этого параграфа.

При сделанных предположениях граничная функция допускает разложение в виде (1.67), откуда, с учетом изложенного выше, вытекает, что функция

$$u(x,t) = 2\,\mathrm{Re} \sum_{j=1}^{m} [z(E, A^{-1}B) * -a_j E]^{-1} A_j(t), \tag{1.75}$$

где a_j, $A_j(t)$ определены (1.67), является решением задачи Д. В силу результатов [Плетнер, 1], построенное решение является единственным.

Для изучения поведения функций вида

$$[z(E, A^{-1}B) * -bE]^{-1} \psi(t) = w(z,t)$$

можно использовать формулу (1.62а), откуда с учетом конкретного вида $A*$, $B*$ и $(A*)^{-1}$ будем иметь

$$w(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} (z-b)^{-(k+1)} [-i x_2 F(t)*]^k \psi(t), \tag{1.76}$$

где $F(t) \equiv \alpha\omega_0 J_1(\alpha t) * S(\omega_0 t) - \alpha J_1(\alpha t) - \omega_0 S(\omega_0 t)$, а $S(\omega_0 t)$ определена (1.74).

Представление (1.76) может оказаться удобным для изучения решения $u(x,t)$, определенного (1.75), при не очень больших значениях t, так как в этом случае ряды вида (1.76) сходятся достаточно быстро [Плетнер, 2, 4].

Используя преобразование Лапласа по переменной t, можно получить еще одно представление операторов вида $[z(E, A^{-1}B) * -bE]^{-1}$ в рассматриваемом случае:

$$[z(E, A^{-1}B) * -bE]^{-1} = (z-b)^{-1} E + F(z,b,t)*, \tag{1.77а}$$

$$F(z,t;b)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{pt}[(x_1+ix_2\gamma(p)-b)^{-1}-(z-b)^{-1}]dp, \quad (1.77б)$$

$$\gamma(p)\equiv\left(\frac{p^2+\omega_0^2}{p^2+\alpha^2}\right)^{1/2}. \quad (1.77в)$$

Ветвь корня в (1.77в) выбрана таким образом, что $\gamma(p)\to 1$ при $p\to+\infty$, $\operatorname{Re}p>0$. Параметр $\sigma>0$ в (1.77в) выбирается так, чтобы контур интегрирования был расположен правее всех особенностей подынтегрального выражения. Такой выбор возможен в силу выбора ветви корня при любых $z\neq b$. Представление (1.77а) может оказаться удобным для изучения поведения решения задачи Д в рассматриваемом случае при $t\to+\infty$. Отметим, что результат леммы 2 позволяет провести аналогичное рассмотрение и в случае кратных корней полинома $Q_{2m}(x)$ в (1.73).

При произвольной граничной функции $f(x_1,t)$ решение задачи Д можно построить, используя преобразование Фурье по x_1, x_2 и Лапласа по t, как это сделано в работе [Масленникова, 5] для случая трехмерного уравнения Соболева. При этом решение представляется интегралом по действительной оси [Плетнер, 1], являющимся аналогом классического интеграла Пуассона для уравнения Лапласа. Для рассматриваемого в данной работе класса граничных функций предложенный выше метод позволяет получить представление решения, не содержащее интегралов по действительной оси, что может оказаться полезным.

Отметим также, что формулу (1.64) для случая граничной функции вида (1.61) можно получить исходя из общей формулы решения задачи Д (см. [Плетнер, 1]), используя (A,B)-псевдоаналитическое продолжение подынтегрального выражения на верхнюю полуплоскость и вычисляя соответствующий интеграл через вычеты (A,B)-псевдоаналитических функций (для случая $\alpha=0$ это сделано в работе [Плетнер, 2]).

§ 2. Новые классы обобщенных аналитических функций. Случай переменных коэффициентов

Выше изучались уравнения с постоянными коэффициентами. Однако при рассмотрении ряда интересных с прикладной точки зрения задач возникают аналогичные уравнения с переменными коэффициентами. Этим, наряду с чисто математическим интересом, обусловлена необходимость рассмотрения уравнений с переменными коэффициентами. Исследованию данного вопроса и посвящен данный параграф.

2.1. Интегральные операторы Вольтерра. В настоящем исследовании важную роль играют интегральные операторы Вольтерра

$$\widehat{\mathfrak{B}}\varphi = \int_0^t \mathfrak{B}(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau$$

с непрерывным вещественным ядром $\mathfrak{B}(t,\tau) \in \mathbb{C}[[0,\infty)\times[0,\infty)]$. Как и в [Плетнер, 5], будем называть такие операторы *операторами класса* $\mathbb{C}$. Наряду с операторами класса $\mathbb{C}$ будем рассматривать операторы вида $E+\widehat{\mathfrak{B}}$, где E — единичный оператор, $\widehat{\mathfrak{B}}$ — оператор класса $\mathbb{C}$. Такие операторы будем называть *операторами класса* $\mathcal{E}$. Операторы такого вида в случае, когда ядро оператора $\widehat{\mathfrak{B}}$ имеет вид $\mathfrak{B}(t-\tau)$, $\mathfrak{B}(t)\in\mathbb{C}[0,\infty)$, изучались в §1. В случае произвольного непрерывного ядра $\mathfrak{B}(t,\tau)$ различные операторы класса $\mathcal{E}$, вообще говоря, не коммутируют. В остальном же свойства операторов класса $\mathcal{E}$ совершенно аналогичны свойствам операторов, рассматривавшихся выше. В частности, можно ввести любую вещественную степень оператора $\widehat{B}$ класса $\mathcal{E}$ с помощью ряда

$$\widehat{B}^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} \alpha \\ k \end{array} \right) (\widehat{B}-I)^k, \tag{2.1}$$

причем оператор $\widehat{B}^{\alpha}$ также является оператором класса $\mathcal{E}$. Введенная таким образом степень обладает теми же свойствами, что и обычная вещественная степень.

Введем некоторые классы функций. Пусть функция $\varphi(t)$ определена при $t\geqslant 0$. Будем говорить, что $\varphi(t)\in\mathbb{C}^{(l)}[0,\infty)$, если $D_t^k\varphi(0)=0$, $k=0,1,\ldots,l-1$.

Пусть $x\equiv(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$. Будем говорить, что $u(x,t)\in\mathbb{C}^{(l)}[[0,\infty);\mathbb{C}^{(m)}(G)]$, $m=0,1,\ldots$; $l=0,1,\ldots$, если существуют непрерывные в $G\times[0,\infty)$ частные производные

$$D_t^p D_{x_j}^q u(x,t), \quad j=1,2; \quad p=0,1,\ldots,l; \quad q=0,1,\ldots,m.$$

Если при этом $D_t^k u(x,0)=0$, $k=0,1,\ldots,l-1$, то будем говорить, что $u(x,t)\in\mathbb{C}_0^{(l)}[[0,\infty);\mathbb{C}^{(m)}(G)]$.

2.2. Двумерные операторы соболевского типа с переменными коэффициентами. Рассмотрим при $t\geqslant 0$, $x\in G\subset\mathbb{R}^2$ дифференциальное уравнение

$$P_1(t,D_t)u_{x_1x_1} + P_2(t,D_t)u_{x_2x_2} = 0, \tag{2.2}$$

где

$$P_j(t,D_t) = \sum_{k=0}^{l-1} a_{kj}(t)D_t^k + D_t^l, \quad j=1,2,$$

l — некоторое натуральное число, $a_{kj}(t) \in C^{(k)}[0,\infty)$ — действительные функции. Будем рассматривать решения уравнения (2.2) из класса $\mathbb{C}_0^{(l)}[[0,\infty);\mathbb{C}^2(G)]$. Интегрируя (2.2) l раз по t и обращая один из возникающих при этом операторных коэффициентов класса $\mathcal{E}$, приходим к уравнению

$$u_{x_1x_1} + \widehat{C}_1 u_{x_2x_2} = 0, \tag{2.3}$$

которое в классе функций $\mathbb{C}_0^{(l)}[[0,\infty);\mathbb{C}^2(G)]$ эквивалентно уравнению (2.2). Оператор $\widehat{C}_1$ в (2.3) — оператор класса $\mathcal{E}$, конкретный вид которого определяется дифференциальными полиномами $P_j(t,D_t)$ и дается громоздким выражением, которое мы для краткости изложения опускаем. Определим согласно (2.1) оператор $\widehat{C}_1 \equiv \widehat{C}_1^{-1/2}$ и перепишем (2.3) в виде

$$u_{x_1x_1} + \widehat{C}^{-2} u_{x_2x_2} = 0. \tag{2.4}$$

Таким образом, в классе функций $\mathbb{C}_0^{(l)}[[0,\infty);\mathbb{C}^2(G)]$ уравнения (2.4) и (2.2) эквивалентны. С учетом этого факта непосредственной проверкой может быть доказана следующая теорема.

Теорема 19. *Пусть* $u(x,t)$, $v(x,t) \in \mathbb{C}_0^{(l)}[[0,\infty);\mathbb{C}^2(G)]$ *и удовлетворяют при* $x \in G$, $t \geqslant 0$ *системе*

$$u_{x_1} + \widehat{C}^{-1} v_{x_2} = 0, \quad \widehat{C}^{-1} u_{x_2} = -v_{x_1}, \tag{2.5}$$

где оператор $\widehat{C}$ *описан выше. Тогда при* $x \in G$, $t \geqslant 0$ *они удовлетворяют и уравнению* (2.2).

Используем систему (2.5) для введения новых классов обобщенных аналитических функций и изучения свойств решений уравнений вида (2.2).

2.3. Псевдоаналитические функции. Рассмотрим соответствующую точке $x \equiv (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ точку $z = x_1 + ix_2$ комплексной плоскости. Зафиксируем оператор $\widehat{C}$ класса $\mathcal{E}$. Сопоставим комплексному числу z оператор

$$z(I,\widehat{C}) = x_1 I + ix_2\widehat{C}. \tag{2.6}$$

Так же как в §1, убеждаемся, что при любом $z \neq 0$ оператор $z(I,\widehat{C})$ обратим и

$$(z(I,\widehat{C}))^{-1} = z^{-1}(I + \widehat{\Phi}(x)), \tag{2.7 }$$

$$\widehat{\Phi}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (iz^{-1}x_2(\widehat{C} - I))^k. \tag{2.7 }$$

Оператор $\widehat{\Phi}(x)$, определенный (2.7б), при каждом $z \neq 0$ является оператором класса $\mathbb{C}$ с комплекснозначным ядром $\Phi(x,t,\tau)$, непрерывным в области $(\mathbb{R}\backslash 0) \times [0,\infty) \times [0,\infty)$.

Пусть G — некоторая область комплексной плоскости. Пусть при $z \in G$, $t \geqslant 0$ определена функция

$$f(z,t) = u(x,t) + iv(x,t),$$

непрерывная по совокупности переменных. Здесь и далее $x \in \mathbb{R}$ — точка, соответствующая точке $z = x_1 + ix_2$ комплексной плоскости. Для простоты изложения область на плоскости $\mathbb{R}^2$, соответствующую комплексной области G, будем обозначать той же буквой.

Пусть $z \in G$. Будем говорить, что функция $f(z,t)$ дифференцируема по оператору $z(I,\widehat{C})$ в точке z, если существует предел

$$\lim_{h\to 0}(h(I,\widehat{C}))^{-1} = (f(z+h,t) - f(z,t)) \equiv \frac{d}{dz(I,\widehat{C})}f(z,t), \qquad (2.8)$$

понимаемый в смысле сходимости по норме $\mathbb{C}[0,T]$ при любом $T > 0$. Символом $(h(I,\widehat{C}))^{-1}$ обозначен оператор, определенный (2.7а), (2.7б), обратный оператору $h(I,\widehat{C})$, сопоставленному по правилу (2.6) приращению h. Предел (3.8) будем называть *производной функции* $f(z,t)$ *по оператору* $z(I,\widehat{C})$ в точке z. Так же как и выше, доказывается

Теорема 20. *Пусть функция* $f(z,t) = u(x,t) + iv(x,t)$ *определена при* $z \in G$, $t \geqslant 0$, *причем* $u(x,t)$, $v(x,t) \in \mathbb{C}[[0,\infty);\mathbb{C}^{(1)}(G)]$. *Тогда, для того чтобы* $f(z,t)$ *была дифференцируемой по оператору* $z(I,\widehat{C})$ *в точке* $z \in G$, *необходимо и достаточно, чтобы в этой точке при* $t \geqslant 0$ *имели место соотношения* (2.5).

Будем говорить, что функция $f(z,t)$ является $(I,\widehat{C})$-псевдоаналитической в области G, если она дифференцируема по $z(I,\widehat{C})$ в каждой точке $z \in G$ и производная $df/dz(I,\widehat{C})$ как функция двух переменных z,t непрерывна в области $G \times [0,\infty)$.

Для любой достаточно гладкой функции $f(z,t)$ в области $G \times [0,\infty)$ можно ввести следующий интеграл по кусочно-гладкой кривой $\Gamma \subset G$:

$$\int_\Gamma dz(I,\widehat{C})f(z,t) \equiv \int_\Gamma (dx_1 + idx_2\widehat{C})f(z,t).$$

Рассуждениями, аналогичными проведенным выше, доказываются аналоги теоремы и формулы Коши.

Теорема 21. *Пусть функция* $f(z,t)$ *является* $(I,\widehat{C})$*-псевдоаналитической в многосвязной области* G, *ограниченной извне контуром* Γ_0, *а изнутри — контурами* $\Gamma_1,\dots,\Gamma_n$, *и пусть функция* $f(z,t)$ *непрерывна по совокупности переменных* z,t *в области* $\overline{G} \times [0,\infty)$ ($\overline{G}$ — *замыкание области* G). *Тогда*

$$\int_\Gamma dz(I,\widehat{C})f(z,t) = 0, \quad t \geqslant 0,$$

где Γ — *полная граница области* G, *состоящая из контуров* Γ_i, $i = 0,1,\dots,n$, *причем обход границы* Γ *осуществляется в положительном направлении.*

Теорема 22. *Пусть $f(z,t)$ является $(I,\widehat{C})$-псевдоаналитической в односвязной области G. Пусть $\Gamma \subset G$ — гладкий замкнутый контур. G_1 — область, ограниченная контуром Γ. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} d\xi(I,\widehat{C})((\xi - z)(I,\widehat{C}))^{-1} f(\xi,t) = \begin{cases} f(z,t), & z \in G_1, \quad t \geqslant 0, \\ 0, & z \notin G_1, \quad t \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Дальнейшее рассмотрение аналогично проведенному в §1. Хотя там рассматривались обобщенные аналитические функции, порождаемые уравнениями с постоянными коэффициентами, полученные результаты, как нетрудно убедиться, легко переносятся на рассматриваемый случай. Так, на основе формулы (2.9) рассуждениями, практически дословно повторяющими рассуждения §1, могут быть получены аналог теоремы Лиувилля, представления рядами типа Тейлора и Лорана, теорема единственности $(I,\widehat{C})$-псевдоаналитической функции, введены понятия $(I,\widehat{C})$-псевдоаналитического продолжения с действительной оси, изолированной особой точки и вычета, а также доказана теорема о вычетах. Так же как и выше, устанавливается связь $(I,\widehat{C})$-псевдоаналитических функций с решениями уравнения (3.2) из класса $\mathbb{C}_0^{(2)}[0,\infty;\mathbb{C}^{(2)}(G)]$, аналогичная связи гармонических и аналитических функций. Соответствующие формулировки читатель может найти в работах [Плетнер].

2.4. Одно приложение. Рассмотрим приложение полученных результатов на примере следующей начально-краевой задачи.

Задача Д. Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую при $t > 0$ в полуплоскости $x_2 > 0$ уравнению (2.2), начальным условиям

$$D_t^k u(x,0) = 0, \quad k = 0,1,\ldots,l,$$

и граничному условию

$$u(x,t)\big|_{x_2=0} = P_n(x_1,t)/Q_{2m}(x_1) \equiv f(x_1,t), \tag{2.10}$$

где

$$P_n(x_1,t) = \sum_{i=0}^{n} x_1^i c_i(t),$$

$c_i(t) \in \mathbb{C}_0^{(l)}[0,\infty)$ — действительные функции, а $Q_{2m}(x_1)$ — полином степени $2m > n$ с действительными коэффициентами, не имеющий действительных корней. Предположим также, что все корни полинома $Q_{2m}(x_1)$ простые, и перепишем функцию $f(x_1,t)$, определенную (2.10), в виде

$$f(x_1,t) = \sum_{j=1}^{m}[(x_1 - a_j)^{-1} A_j(t) + (x_1 - \overline{a}_j)^{-1}\overline{A}_j(t)], \tag{2.11}$$

где a_j — корни полинома $Q_{2m}(x_1)$, удовлетворяющие условию $\operatorname{Im} a_j < 0$, $A_j(t) \in \mathbb{C}_0^{(l)}[0,\infty)$ — вполне определенные функции; чертой обозначено комплексное сопряжение.

Приведя уравнение (2.2) к виду (2.4), можно, так же как и в [133], построить $(I,\widehat{C})$-псевдоаналитическое продолжение граничной функции в верхнюю полуплоскость и построить решение рассматриваемой задачи

$$u(x,t) = 2\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{m}(z(I,\widehat{C}) - a_j I)A_j(t),$$

где a_j, $A_j(t)$ определены (11).

Поскольку рассмотрение в этом пункте данного параграфа носило иллюстративный характер, мы не будем изучать здесь вопрос единственности построенного решения.

Сделаем одно существенное замечание. Действуя на обе части уравнения (2.4) оператором $\widehat{C}^2$, а на обе части уравнений системы (2.5) оператором $\widehat{C}$ и вводя оператор $z(\widehat{C}^{-1},I) \equiv x_1\widehat{C}^{-1} + ix_2 I$, приходим к выводу, что введенные в данной главе $(I,\widehat{C})$-псевдоаналитические функции можно рассматривать и как $(\widehat{C}^{-1},I)$-псевдоаналитические. Такое представление оказывается весьма удобными при построении $(\widehat{C}^{-1},I)$-псевдоаналитического продолжения с мнимой оси.

Часть II

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Глава 3

МОДЕЛЬНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

В данной главе рассматриваются математические модели квазистационарных процессов в сплошных электромагнитных средах. Показано, что исходная система уравнений Максвелла в квазистационарном приближении и феноменологические уравнения, связывающие векторы напряженности электрического поля $\mathbf{E}$, индукции электрического поля $\mathbf{D}$, поляризации среды $\mathbf{P}$, плотности тока $\mathbf{J}$, напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$, индукции магнитного поля $\mathbf{B}$, намагниченности среды $\mathbf{M}$, с учетом разнообразных нестационарных процессов редуцируются к широкому спектру начальных и начально-краевых задач для, вообще говоря, сильно нелинейных уравнений псевдопараболического типа. При этом одни полученные модельные уравнения являются волновыми, а другие — диссипативными. Дано качественное описание некоторых существенно нелинейных эффектов, наблюдаемых в эксперименте. Результаты данной главы опубликованы в работах [Корпусов, 2–5].

§ 1. Математические модели квазистационарных процессов в кристаллических полупроводниках

Принципиальное свойство полупроводников заключается в том, что нестационарные процессы, наблюдаемые в них, описываются системой уравнений квазистационарного поля, уравнения неразрывности и материальных уравнений. Причем существенным в описании этих процессов является явный вид материальных уравнений, связывающих напряженность $\mathbf{E}$ и индукцию электрического поля $\mathbf{D}$, с одной стороны, и напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ и плотность тока в полупроводнике $\mathbf{J}$ — с другой. Система уравнений в некоторой декартовой системе координат в общем случае имеет вид [Бонч-Бруевич, 1]:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = -4\pi en, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \operatorname{div}\mathbf{J} + Q, \quad \mathrm{J_i} = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}\mathrm{E_j}, \quad i,j = \overline{1,3}, \tag{1.2}$$

где $\mathbf{P}$ — вектор поляризации, причем для некоторых моделей справедливо феноменологическое соотношение

$$\mathrm{P_i} = \sum_{j=1}^{3} \varkappa_{ij} \mathrm{E_j}, \quad i, j = \overline{1,3}. \tag{1.3}$$

При этом мы условно делим электроны основных центров кристаллической решетки полупроводника на свободные и связанные заряды [Тамм]. Напомним, что под свободными зарядами подразумеваются заряды, способные перемещаться на макроскопические растояния. С другой стороны, под связанными подразумеваются заряды, которые не могут перемещаться на макроскопические расстояния, их роль сводится к инициированию поляризации полупроводника. При таком разделении зарядов величина n в уравнениях (1.1) и (1.2) имеет смысл плотности свободных зарядов, а величина

$$\rho \equiv \operatorname{div} \mathbf{P} \tag{1.4}$$

— плотности связанных зарядов. Величина Q в уравнении (1.2) определяет источники или стоки тока свободных электронов из примесных центров или в примесные центры кристаллической решетки полупроводников соответственно, в зависимости от того, являются ли данные примесные центры донорами или акцепторами [Бонч-Бруевич, 1].

Рассмотрим теперь явные модельные соотношения вида (1.3) для одних моделей и явные модельные выражения для плотности связанных зарядов вида (1.4) для других моделей.

В большинстве моделей уравнение (1.3) имеет вид

$$\mathbf{P} = \varkappa_0 \mathbf{E}, \quad \varkappa_0 \in \mathbb{R}^1_+. \tag{1.5}$$

Однако при наличии внешнего магнитного поля $\mathbf{B}_0$ феноменологическое уравнение (1.3) принимает существенно анизотропный характер [Ландау]:

$$\varkappa = \begin{pmatrix} \varkappa_{11} & \varkappa_{12} & \varkappa_{13} \\ \varkappa_{21} & \varkappa_{22} & \varkappa_{23} \\ \varkappa_{31} & \varkappa_{32} & \varkappa_{33} \end{pmatrix},$$

где величины $\varkappa_{ij}$ зависят от величины магнитного поля $\mathbf{B}_0$. Если напряженность электрического поля сравнима с внутриатомными полями, то тензор поляризуемости электрического поля является, вообще говоря, нелинейной функцией компонент напряженности электрического поля [Ландау] в заданном трехмерном эвклидовом пространстве:

$$\varkappa_{ij} = \delta_{ij} a |\mathbf{E}|^{p-2}, \quad \varkappa_{ij} = \delta_{ij} a_j |\mathrm{E_j}|^{p_j - 2}, \quad a, a_j \in \mathbb{R}^1_+, \quad i, j = \overline{1,3}. \tag{1.6}$$

Отметим, что физически осмысленными значениями показателей p и p_j в выражениях (1.6) являются числа 3 и 4.

Рассмотрим теперь другой класс моделей, в которых, вообще говоря, несправедливы феноменологические соотношения вида (1.3). Или,

более точно, вектор поляризации $\mathbf{P}$ следует представить в следующем виде:

$$\mathbf{P} = d_1\mathbf{P}_1 + d_2\mathbf{P}_2, \quad d_1^2 + d_2^2 > 0, \quad d_1, d_2 \in \mathbb{R}^1_+ \cup \{0\},$$

где для вектора $\mathbf{P}_1$ справедливо феноменологическое соотношение вида (1.3):

$$\mathrm{P_{1i}} = \sum_{j=1}^{3} \varkappa_{1ij}\mathrm{E_j}, \quad i, j = \overline{1,3}, \tag{1.7}$$

со всеми возможными материальными уравнениями (1.5) и (1.6), в то время как относительно вектора $\mathbf{P}_2$ нам известно лишь модельное распределение плотности соответствующей части связанных зарядов вида (1.4):

$$\rho_2 \equiv \operatorname{div}\mathbf{P}_2. \tag{1.8}$$

В предположении, что система уравнений (1.1) и (1.2) рассматривается в цилиндрической области $G \equiv \Omega \times (0, \mathrm{T})$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, $\mathrm{T} > 0$, причем Ω — поверхностно-односвязная область, уравнение $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$ равносильно (в соответствующем классе гладкости) существованию потенциала электрического поля φ, удовлетворяющего уравнению $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. Теперь мы в состоянии указать модельные распределения плотности части связанных зарядов ρ_2 в самосогласованном поле потенциала электрического поля φ. Именно, хорошо известным является эффект экранировки Дебая [Клеммоу], согласно которому величина $\rho_2(\varphi)$ имеет вид

$$\rho_2 = \rho_0 \exp\left(\frac{e\varphi}{k\mathrm{T}_e}\right), \tag{1.9}$$

где $\mathrm{T_e}$ — температура связанных электронов основных центров кристаллической решетки. С другой стороны, известны «небольцмановские» распределения [Лифшиц], имеющие вид

$$\rho_2 = r|\varphi|^{q_1} \exp\left(\frac{e\varphi}{k\mathrm{T}_e}\right), \quad r > 0, \quad q_1 > 0. \tag{1.10}$$

Таким образом, в предположении сильно нагретых связанных электронов хорошим модельным распределением зарядов ρ_2 является

$$\rho_2 = r_1|\varphi|^{q_1}[1 + \varepsilon_1\varphi], \quad q_1 \geqslant 0, \quad r_1 > 0, \quad \varepsilon_1 = \frac{e}{k\mathrm{T}_e}. \tag{1.11}$$

Такого рода распределение связанных зарядов в самосогласованном поле полупроводника приводит к квазиупругой связи основных центров кристаллической решетки полупроводников и связанных электронов. Однако имеет место следующий пример. Как известно, существуют так называемые полупроводниковые сегнетоэлектрики (см., например, [Федосов]). Это полупроводниковые кристаллы, обладающие свойствами сегнетоэлектрика. Сегнетоэлектриком называется среда, обладающая свойством зависимости своих характеристик от температуры, причем существует критическая температура T_c, при которой происходит так

называемый фазовый переход второго рода. Имеет место существенное различие между свойствами среды при $\mathrm{T} < \mathrm{T}_c$ (пироэлектрическая фаза) и при $\mathrm{T}_c < \mathrm{T}$ (непироэлектрическая фаза) [Ландау]. В книге [Ландау, с. 128] приведен рисунок зависимости P_z от E_z (Oz — ось сегнетоэлектрика) при $\mathrm{T} < \mathrm{T}_c$, из которого видно, что производная на некотором участке меньше нуля:

$$\frac{d\mathrm{P}_z}{d\mathrm{E}_z} < 0,$$

что соответствует метастабильным состояниям. Но именно эти метастабильные состояния представляют значительный интерес для исследования. В дальнейшем мы будем рассматривать кубический сегнетоэлектрик–полупроводник [Ландау]. Если определить зависимость электрической индукции сегнетоэлектрического полупроводника как

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$$

и воспользоваться тем, что

$$\operatorname{div}\mathbf{P} \equiv \rho_2$$

имеет смысл плотности связанных зарядов, то, если в стандартном случае

$$\frac{d\mathrm{P}_i}{d\mathrm{E}_i} > 0, \quad \mathrm{E}_i = (\mathbf{e}_i, \mathbf{E}), \quad \mathrm{P}_i = (\mathbf{e}_i, \mathbf{P}), \quad i = \overline{1,3},$$

и соответствующее модельное распределение зарядов имеет вид (1.9)–(1.11), соответствующее модельное распределение связанных зарядов в нашем «неклассическом» случае:

$$\frac{d\mathrm{P}_i}{d\mathrm{E}_i} < 0, \quad \mathrm{E}_i = (\mathbf{e}_i, \mathbf{E}), \quad \mathrm{P}_i = (\mathbf{e}_i, \mathbf{P}), \quad i = \overline{1,3},$$

в линейном приближении может быть записано в следующем модельном виде:

$$\rho_2 = \overline{n}_0[1 - r_2\varphi], \quad r_2 > 0. \tag{1.12}$$

Условия отрицательности производных компонент вектора поляризации по соответствующим компонентам электрического поля можно характеризовать в линейном приближении как отрицательный добавок к электрической поляризуемости. Как известно (см. [Ландау]), ситуация отрицательности электрической поляризуемости исключается из физических расмотрений по соображениям устойчивости электродинамических систем. Однако в квазистационарном случае вполне возможно возникновение неравновесных метастабильных состояний, как в случае полупроводникового сегнетоэлектрика, при которых электрическая поляризуемость $\varkappa$ отрицательна локально во времени и, стало быть, диэлектрическая проницаемость $\varepsilon \equiv 1 + 4\pi\varkappa$ меньше единицы. Отметим, впрочем, что у нас появляется всего лишь отрицательный добавок к электрической поляризуемости, т. е. может оказаться, что

полная электрическая поляризуемость будет всегда положительной. Исследование начальных и начально-краевых задач для эволюционных нелинейных, как, в прочем, и линейных, уравнений в частных производных, учитывающих подобные ситуации, сопряжено с большими трудностями. В рамках наших рассмотрений такие случаи сводятся к так называемым сингулярным уравнениям соболевского типа, т. е. к уравнениям с необратимым оператором эллиптического типа при производной по времени. Такого рода задачи возникают в теории вязкоупругих жидкостей. И им посвящены, в частности, работы [Свиридюк].

Рассмотрим теперь модельные соотношения для связи плотности электрического поля $\mathbf{J}$ и напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ согласно формуле (1.2).

Во-первых, отметим, что при наличии внешнего магнитного поля $\mathbf{B}_0$ тензор проводимости в заданном трехмерном эвклидовом пространстве в приближении слабого магнитного поля имеет вид

$$\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 B_0 & 0 \\ -a_2 B_0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 + a_3 B_0^2 \end{pmatrix}, \tag{1.13}$$

где $a_l \geqslant 0 \ \ (l = \overline{1,3})$ — некоторые постоянные.

Во-вторых, в сильно «перегретом» полупроводнике тензор проводимости оказывается нелинейной функцией напряженности электрического поля [Басс]:

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\sigma_0(1 + \beta|\mathbf{E}|^2), \ \ \sigma_0 > 0, \tag{1.14}$$

а величина β может быть как больше, так и меньше нуля. В случае $\beta < 0$ экспериментально наблюдается пробой полупроводника [Бонч-Бруевич], что, в частности, в некотором обобщенном классе гладкости может быть доказано теоретически, если воспользоваться методом энергетических оценок, развитым в работах [Корпусов]. Кроме того, тензор проводимости может принимать следующий вид [Бонч-Бруевич]:

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\sigma_0|\mathbf{E}|^p, \ \ \sigma_0 > 0, \ \ p > 0. \tag{1.15}$$

Разумеется, при учете внешнего магнитного поля уравнения (1.14) и (1.15) существенно усложняются в силу анизотропного характера тензора проводимости (1.13).

Как и в случае с тензором электрической поляризуемости, феноменологическое соотношение (1.2) требует определенной модификации в том случае, когда имеется постоянное внешнее электрическое поле $\mathbf{E_0}$. В этом случае феноменологическое уравнение примет вид

$$\mathbf{J} = \mathbf{J_1} + b\mathbf{J_2}, \ \ b \in \{0\} \cup \{1\}, \tag{1.16}$$

$$\mathbf{J_1} = \mu e n_0(\varphi)\mathbf{E}_0, \quad \mathrm{J}_{2i} = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{2ij}\mathrm{E}_j, \tag{1.17}$$

где μ — подвижность свободных электронов, $n_0(\varphi)$ — некоторая, вообще говоря нелинейная, функция от потенциала самосогласованного поля φ, имеющая смысл квазистационарного распределения свободных электронов [Лифшиц]. Квазистационарное распределение свободных электронов хорошо описывается теми же уравнениями, что и плотность связанных электронов (1.9)–(1.12), но в общем случае с другими параметрами и, в частности, с другим показателем $q_2 \geqslant 0$. В случае сильно разогретых свободных электронов из (1.10) получим

$$n_0(\varphi) = r_3|\varphi|^{q_2}[1 + \varepsilon_2\varphi + \frac{1}{2}\varepsilon_2^2\varphi^2], \;\; q_2 \geqslant 0, \;\; r_3 > 0, \;\; \varepsilon_2 = e/(k\widehat{\mathrm{T}}_e), \tag{1.18}$$

где $\widehat{\mathrm{T}}_e$ — температура свободных электронов, ε_2 — малый параметр.

Наконец, функция $Q = Q(\varphi)$ в уравнении (1.2) зависит от плотности источников или стоков свободных электронов и имеет вид, сходный с видами распределений свободных и связанных электронов основных центров кристаллической решетки полупроводника. Мы будем использовать следующее модельное распределение (см., в частности, [Фурман]):

$$Q(\varphi) = \lambda|\varphi|^{q_3}\varphi, \;\; q_3 \geqslant 0, \tag{1.19}$$

где $\lambda < 0$ для донорных и $\lambda > 0$ для акцепторных примесных центров соответственно. Очевидно, что $\lambda = 0$ имеет место в отсутствие примесных центров.

Рассмотрим теперь возможные граничные условия для системы уравнений (1.1) и (1.2).

Введем единичный вектор нормали $\mathbf{n}(x)$ к граничной поверхности $\partial\Omega$ раздела двух сред, направленный из области Ω в область $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$. Обозначим через $\partial\Omega^{\pm}$ две стороны ориентированной поверхности $\partial\Omega$, тогда граничные условия для векторов индукции и напряженности электрического поля будут иметь вид (см., например, [Тамм])

$$\begin{gathered} [\mathbf{E}_1, \mathbf{n}]\big|_{\partial\Omega^+} - [\mathbf{E}_2, \mathbf{n}]\big|_{\partial\Omega^-} = 0, \\ (\mathbf{D}_1, \mathbf{n})\big|_{\partial\Omega^+} - (\mathbf{D}_2, \mathbf{n})\big|_{\partial\Omega^-} = 4\pi\eta\big|_{\partial\Omega}, \end{gathered} \tag{1.20}$$

где η — поверхностная плотность свободных зарядов на достаточно гладкой границе $\partial\Omega$.

Подставим в уравнения (1.20) выражения (1.3) и учтем потенциальность поля: $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, тогда граничные условия (1.20) примут вид

$$(\nabla\varphi_1, \zeta)\Big|_{\partial\Omega^+} = (\nabla\varphi_2, \zeta)\Big|_{\partial\Omega^-}, \tag{1.21}$$

$$(\mathbf{I}\delta_{ij} + 4\pi\varkappa_{1ij})\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}n_i\Big|_{\partial\Omega^+} -$$

$$-(\mathbf{I}\delta_{ij}+4\pi\varkappa_{2ij})\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_j}n_i\Big|_{\partial\Omega^-}=4\pi\widetilde{\eta}(x,t)\big|_{\partial\Omega},\quad(1.22)$$

где $\zeta(x)$ — произвольный вектор в касательной плоскости в точке $x\in\partial\Omega$, $\widetilde{\eta}(x,t)=\eta(x,t)+\eta_0(x,t)$ — полная поверхностная плотность зарядов, свободных и связанных, $\eta_0(x,t)=D_{1i0}n_{0i}\Big|_{\partial\Omega^+}-D_{2i0}n_{0i}\Big|_{\partial\Omega^-}$, $\varkappa_{ij}$ — тензор электрической поляризуемости.

С помощью введенного ранее потенциала электрического поля граничные условия (1.21)–(1.22) на поверхности раздела полупроводник–проводник примут вид

$$\varphi(\mathbf{r},t)\big|_{x\in\partial\Omega}=C(t),\quad(1.23)$$

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial\Omega}\mathfrak{L}_x\varphi(x,t)\Big|_{x\in\partial\Omega}d(\partial\Omega)=Q(t),\quad(1.24)$$

$Q(t)$ — полный заряд на поверхности проводника, оператор

$$\mathfrak{L}_x\varphi(x,t)|_{x\in\partial\Omega}\equiv\frac{\partial\varphi}{\partial n_x}+4\pi\sum_{i,k=1,1}^{3,3}\varkappa_{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\cos(\mathbf{n}_x,\mathbf{e}_i),$$

где правая часть (1.23) — либо явно заданная функция, либо неизвестная функция времени, подлежащая определению. В последнем случае для корректной постановки задачи достаточно задания полного заряда на поверхности проводника, т. е. нелокального граничного условия (1.24). Представляет интерес граничное условие полупроводник–проводник вида

$$(\mathbf{J},\mathbf{n})\Big|_{\partial\Omega}=0,$$

которое при связи плотности тока $\mathbf{J}$ и напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ (1.2) примет вид

$$\mathfrak{L}_x\varphi(x,t)\Big|_{x\in\partial\Omega}\equiv\sum_{i,k=1,1}^{3,3}\sigma_{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\Big|_{x\in\partial\Omega}\cos(\mathbf{n}_x,\mathbf{e}_i)=0.\quad(1.25)$$

Рассмотрим теперь физические условия, которые с математической точки зрения описываются задачей Коши для эволюционных уравнений физики полупроводников. Отметим, что задача Коши с физической точки зрения возникает в результате быстро протекающего лазерного облучения полупроводника. Время лазерного облучения на много порядков меньше, чем время релаксации возникшего в результате облучения нестационарного распределения плотности свободных электронов и соответствующего самосогласованного электрического поля.

В силу периодичности структуры кристаллического полупроводника третьей по важности после задачи Коши и произвольной граничной задачи является периодическая граничная задача.

Рассмотрим теперь модельные нелинейные граничные условия.

Для простоты предположим, что в заданной декартовой системе координат $\{Ox_1,Ox_2,Ox_3\}$ плоскость $x_3=0$ является границей разде-

ла «идеальный проводник–полупроводник», причем в области $x_3 > 0$ расположен полупроводник, а в области $x_3 < 0$ — идеальный проводник. Выберем внешнее направление нормали $\mathbf{n}$ к плоскости $x_3 = 0$ относительно области $x_3 < 0$. Под названием «идеальный проводник» понимается среда, в которой напряженность электрического поля равна нулю вне зависимости от внешних условий. Как известно, в стационарном случае проводник удовлетворяет этому условию. С другой стороны, в квазистационарном случае, который мы как раз и рассматриваем, проводник приближенно удовлетворяет условию отсутствия электрического поля внутри проводника [Тамм]. Будем рассматривать случай, когда поле $\mathbf{E}$ потенциально в области $x_3 > 0$ с потенциалом φ. Пусть на плоскости $\mathrm{x}_3 = 0$ имеется квазистационарное распределение свободных зарядов, эволюция которых описывается системой динамических граничных условий [Тамм]:

$$(\mathbf{D}, \mathbf{n}) = -4\pi e\omega, \quad x_3 = 0, \tag{1.26}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = (\mathbf{J}, \mathbf{n}) + \lambda |\varphi|^{q_3}\varphi, \quad x_3 = 0, \tag{1.27}$$

где ω — поверхностная плотность свободных электронов. Относительно граничных значений векторов индукции электрического поля $\mathbf{D}$ и плотности тока $\mathbf{J}$ предположим, что они удовлетворяют всем феноменологическим соотношениям, введенным в этом параграфе и понимаемым в предельном смысле на плоскости $\mathrm{x}_3 = 0$.

В следующем параграфе, мы рассмотрим модельные начально-краевые задачи для описывающих данный класс физических явлений в кристаллических полупроводниках эллиптических уравнений с псевдопараболическими граничными условиями, которые являются следствиями системы динамических граничных условий (1.26) и (1.27).

§ 2. Модельные уравнения псевдопараболического типа

В данном параграфе мы рассмотрим широкий спектр математических моделей, сводящихся к эволюционным уравнениям псевдопараболического типа. При этом некоторые модели связаны с изучением нестационарных процессов в полупроводниках во внешних электрическом или магнитном полях. В случае внешнего электрического поля потенциал электрического поля является решением волновых уравнений псевдопараболического типа, совпадающих с волновыми уравнениями типа Осколкова–Бенджамена–Бона–Махони–Бюргерса или родственных им. С другой стороны, модельные уравнения в случае внешнего магнитного поля имеют анизотропный характер. В отсутствие внешних полей получаемые уравнения имеют изотропный характер. Для рассматриваемых модельных уравнений большой теоретический и практический интерес представляют вопросы разрушения решений, что с точки зрения физики полупроводников означает электрический пробой

в полупроводнике. Отметим, что рассматриваемые уравнения имеют больший смысл, чем просто модельные уравнения физики полупроводников, поскольку возникают и из других разделов математической физики. С другой стороны, физическая интерпретация полученных математических результатов будет проиллюстрирована в основном на задачах физики полупроводников.

Рассмотрим сначала случай линейных операторов (эллиптического типа) при производной по времени.

С этой целью исследуем систему уравнений (1.1), (1.2) с феноменологическим уравнением (1.5) либо (1.7), (1.8) и уравнениями (1.11) или (1.12) при $q_1 = 0$, которые дополним феноменологическими уравнениями (1.13)–(1.19). Рассмотрим теперь простейший класс уравнений псевдопараболического типа.

2.1. Нелинейные волны типа волн Россби или дрейфовых волн в плазме и соответствующие диссипативные уравнения. Достаточно большое количество работ посвящено изучению планетарных волн или волн Россби. Такие волны имеют малую частоту и длиноволновой характер. Наблюдаются такие волны в атмосфере и в мировом Океане. Аналогичными уравнениями описываются так называемые дрейфовые волны в плазме, возникновение которых вызвано самыми разнообразными причинами, например неоднородностью распределения электронов в плазме или тороидальностью магнитной ловушки. Для этих уравнений рассматриваются задачи дифракции, возбуждения и вопросы существования солитонов (см. [Габов, 2; Bagchi; Knessl; Redekopp; Tan; Zakharov]).

В линейном приближении β-плоскости двумерное уравнение волн Россби имеет вид [Габов, 2]

$$\frac{\partial}{\partial t}\triangle_2\psi + \beta(y)\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \quad \triangle_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

где ось Ox направлена на восток, а ось Oy — на север, $\beta = \beta(y)$ — параметр Кориолиса. Одним из существующих нелинейных обобщений линейного двумерного уравнения волн Россби является двумерное уравнение Петвиашвили (см., например, [Tan]):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\triangle_2\psi - \psi) + \frac{\partial\psi}{\partial x} + \psi\frac{\partial\psi}{\partial x} + J(\psi, \triangle_2\psi) = 0, \quad J(a,b) = a_x b_y - a_y b_x.$$

К данному уравнению примыкает одномерное уравнение Камассы–Холма [Kamassa]

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u\right) - 3u\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

Предположим теперь, что температура связанных электронов кристаллического полупроводника достаточно велика, так что мы можем считать их плотность постоянной. В этом случае воспользуемся феноменологическим уравнением (1.5). С другой стороны, будем считать,

что температура свободных электронов не сравнима с температурой связанных электронов, и для квазистационарного распределения свободных электронов возьмем (1.18) при $q_2 = 0$. Для уравнения плотности тока (1.16) предположим, что $\mathbf{J}_2 = \sigma_0 \mathbf{E}$, и, кроме того, пусть ось Ox направлена вдоль внешнего постоянного поля $\mathbf{E}_0$. Тогда с учетом системы уравнений (1.1)–(1.2) приходим к нелинейному уравнению типа волн Россби:

$$\triangle \frac{\partial \varphi}{\partial t} + a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + a_2 \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + a_3 \triangle \varphi = 0, \quad \triangle \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \qquad (2.1)$$

где $a_1 = 4\pi e \varepsilon^{-1} \mu_1 \varepsilon_2 |\mathbf{E}_0|$, $a_2 = 4\pi e \varepsilon^{-1} 2 \mu_1 \varepsilon_2^2 |\mathbf{E}_0|$, $a_3 = 4\pi e \varepsilon^{-1} b \sigma_0$, $\varepsilon = 1 + 4\pi \varkappa_0$. Заметим, что из (1.16) следует неравенство $a_3 \geqslant 0$. Если учесть наличие источников (стоков) (1.19) и нелинейную зависимость тензора проводимости от электрического поля (1.14), приходим к следующему уравнению:

$$\triangle \frac{\partial \varphi}{\partial t} + a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + a_2 \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + a_3 \triangle \varphi + a_4 \operatorname{div} \left(|\nabla \varphi|^2 \nabla \varphi \right) + \overline{\lambda} |\varphi|^{q_3} \varphi = 0, \qquad (2.2)$$

где $q_3 \geqslant 0$, $a_4 = \varepsilon^{-1} b \sigma_0 \beta$, $\varepsilon = 1 + 4\pi \varkappa_0$, $\overline{\lambda} = -4\pi e \varepsilon^{-1} \lambda$. Заметим, что в силу (1.14) и (1.19) постоянные a_4, $\lambda \in \mathbb{R}^1$.

Отметим важное свойство рассматриваемых задач. При отсутствии внешнего электрического поля, что вполне естественно в реальной физической ситуации, из уравнения (2.2) получаем диссипативное уравнение

$$\triangle \frac{\partial \varphi}{\partial t} + a_3 \triangle \varphi + a_4 \operatorname{div} \left(|\nabla \varphi|^2 \nabla \varphi \right) + \overline{\lambda} |\varphi|^{q_3} \varphi = 0, \quad q_3 \geqslant 0, \qquad (2.3)$$

где постоянные a_3, a_4, λ определены в (2.1), (2.2) и (1.19), причем $a_3 \geqslant 0$, $a_4 \in \mathbb{R}^1$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$.

Наконец, рассмотрим еще одну модель, приводящую к диссипативным уравнениям, родственным (2.3). Предположим, что имеет место следующая связь плотности токов свободных зарядов $\mathbf{J}$ и напряженности электрического поля $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{J} = e \mu n_0(\varphi) \mathbf{E}, \quad n_0(\varphi) = r_3 [1 + \varepsilon_2 \varphi + \frac{1}{2} \varepsilon_2^2 \varphi^2], \quad n_0(\varphi) = r_3 |\varphi|^{q_2}, \qquad (2.4)$$

тогда из системы уравнений (1.1), (1.2), феноменологических соотношений (1.5) и (1.19) с учетом (2.4) получим

$$\triangle \frac{\partial \varphi}{\partial t} + a_5 [\triangle \varphi + \varepsilon_2 \frac{1}{2} \triangle \varphi^2 + \varepsilon_2^2 \frac{1}{6} \triangle \varphi^3] + \overline{\lambda} |\varphi|^{q_3} \varphi = 0, \quad q_3 \geqslant 0, \qquad (2.5)$$

или

$$\triangle \frac{\partial \varphi}{\partial t} + a_5 \frac{1}{q_2 + 1} \triangle (|\varphi|^{q_2} \varphi) + \overline{\lambda} |\varphi|^{q_3} \varphi = 0, \quad q_2, \quad q_3 \geqslant 0, \qquad (2.6)$$

где $a_5 = 4\pi e \varepsilon^{-1} r_3 e \mu$, $\varepsilon = 1 + 4\pi \varkappa_0$.

Отметим, что, казалось бы, совершенно несопоставимые по своим масштабам волновые процессы в атмосфере, плазме и в полупроводниках описываются одинаковыми уравнениями псевдопараболического типа (2.1), (2.2), (2.3), (2.5), (2.6).

2.2. Нелинейные волны типа Осколкова–Бенджамена–Бона–Махони. В работах [Benjamin; Осколков] было выведено следующее нелинейное одномерное модельное уравнение псевдопараболического типа:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = 0,$$

описывающее нелинейные поверхностные волны, распространяющиеся вдоль некоторого направления Ox. При учете вязкости данные волны описываются уравнением Осколкова–Бенджамена–Бона–Махони–Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = 0.$$

Эти уравнения, наряду с уравнениями КдФ и Бюргерса, стали классическими пробными уравнениями для самых разнообразных групповых методов и подходов к «интегрированию» дивергентных эволюционных нелинейных уравнений [Тахтаджян; Gardner; Zacharov]. Во многих недавних работах математики стали рассматривать многомерные обобщения уравнений типа Осколкова–Бенджамена–Бона–Махони [Benjamin; Biler; Chen; Guo; Hagen; Jeffrey; Karch; Li; Medeiros; Mei; Pereira; Zhang]. Однако вопрос о приложении полученных результатов к каким-либо многомерным модельным уравнениям типа Осколкова–Бенджамена–Бона–Махони остается, по всей видимости, открытым.

В рамках наших моделей при учете конечной температуры связанных электронов мы можем воспользоваться распределением (1.11) при $q_2 = 0$, что соответствует первым двум слагаемым в разложении больцмановского распределения (1.9) по степеням $e\varphi/(kT_e)$ в предположении $|e\varphi/(kT_e)| < 1$, что выполнено при условии ограниченности потенциала электрического поля φ и при достаточно высокой температуры T_e связанных электронов. В этом случае к уравнениям (2.1)–(2.3) и (2.5), (2.6) добавляется слагаемое

$$-r_1\varepsilon_1\varepsilon^{-1}\frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

и они примут следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle\varphi - a\varphi\right) + a_1\frac{\partial \varphi}{\partial x} + a_2\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x} + a_3\triangle\varphi = 0, \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle\varphi - a\varphi\right) + a_1\frac{\partial \varphi}{\partial x} + a_2\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x} + a_3\triangle\varphi + a_4\,\mathrm{div}\left(|\nabla\varphi|^2\nabla\varphi\right) + \overline{\lambda}\,|\varphi|^{q_3}\varphi = 0, \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\triangle\varphi - a\varphi) + a_3\triangle\varphi + a_4 \operatorname{div}\left(|\nabla\varphi|^2\nabla\varphi\right) + \overline{\lambda}\,|\varphi|^{q_3}\varphi = 0, \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\triangle\varphi - a\varphi) + a_5[\triangle\varphi + \varepsilon_2\frac{1}{2}\triangle\varphi^2 + \varepsilon_2^2\frac{1}{6}\triangle\varphi^3] + \overline{\lambda}\,|\varphi|^{q_3}\varphi = 0, \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\triangle\varphi - a\varphi) + a_5\frac{1}{q_2+1}\triangle(|\varphi|^{q_2}\varphi) + \overline{\lambda}\,|\varphi|^{q_3}\varphi = 0, \quad q_2,\ q_3 \geqslant 0, \tag{2.11}$$

где

$$\triangle \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$a = r_1\varepsilon^{-1}\varepsilon_1,\ \varepsilon_1 = e/(kT_e),\ \varepsilon_2 = e/(k\widehat{T}_e),\ \ a_1 = 4\pi e\mu_1\varepsilon^{-1}\varepsilon_2|\mathbf{E}_0|,\ \ a_2 = 8\pi e\mu_1\varepsilon^{-1}\varepsilon_2^2|\mathbf{E}_0|,\ a_3 = 4\pi e\varepsilon^{-1}b\sigma_0,\ a_4 = 4\pi e\varepsilon^{-1}b\sigma_0\beta,\ a_5 = 4\pi e^2\varepsilon^{-1}r_3\mu,$ $q_2,\ q_3 \geqslant 0,\ \varepsilon = 1 + 4\pi\varkappa_0,\ \overline{\lambda} = -4\pi e\varepsilon^{-1}\lambda$, причем $a_1, a_2, a_3 \geqslant 0,\ a, a_5 > 0\ \ a_4, \overline{\lambda} \in \mathbb{R}^1$. Заметим, что при учете внешнего постоянного электрического поля к уравнениям (2.9)–(2.11) добавляются слагаемые с конвективными нелинейностями вида

$$\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}.$$

В работах [Астратов; Фурман] было предложено теоретическое описание одного интересного явления, наблюдающегося при исследовании переходных процессов в некоторых кристаллических полупроводниках. Эффект заключался в том, что в первоначально однородном полупроводнике, облученном лазером, после помещения его в постоянное электрическое поле конденсатора наблюдалось образование слоев объемного заряда чередующихся знаков. Причем со временем толщина слоев уменьшалась, а их количество и абсолютная величина плотности объемного заряда в каждом слое увеличивались [Астратов]. Данное явление было названо эффектом стратификации объемного заряда в полупроводнике.

Исходная система уравнений, описывающая переходные процессы в полупроводнике, имеет вид [Фурман]:

$$\begin{gathered}\triangle_3\varphi = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho,\\ \rho^\sigma = \rho - e(n_0 - n),\\ \frac{\partial\rho^\sigma}{\partial t} = e\frac{n_0 - n}{\tau},\end{gathered} \tag{2.12}$$

где ρ — плотность объемного заряда в кристалле, ρ^σ — плотность объемного заряда, связанного на примесных центрах полупроводника, n_0 — равновесная концентрация электронов, n — концентрация свободных электронов, связанная с потенциалом $\varphi(x,t)$ электрического поля законом Больцмана:

$$n = n_0 \exp\frac{e\varphi}{k\mathrm{T}_e}, \tag{2.13}$$

τ — характерное время жизни свободных электронов, ε — диэлектрическая проницаемость полупроводника, T_e — температура свободных электронов, $x \in \Omega$ — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega \in A^{(1,\lambda)}$.

Система уравнений (2.12)–(2.13) с помощью общих методов, развитых в работе [Габов, 1], при начальном условии $\rho^\sigma(x,t)\big|_{t=0} = 0$ в классе функций $\varphi(x,t) \in \mathbb{C}([0,+\infty);\mathbb{C}^{(2)}(\Omega))$ редуцируется к одному интегродифференциальному нелинейному уравнению

$$\triangle_3\varphi(x,t) + \frac{4\pi e n_0}{\varepsilon}\left(f(\varphi)(x,t) + \frac{1}{\tau}\int\limits_0^t ds\, f(\varphi)(x,s)\right) = 0, \qquad (2.14)$$

где $f(\varphi) = 1 - \exp(e\varphi/kT_e)$.

В случае, если на границе области Ω задано распределение потенциала электрического поля, приходим к следующему граничному условию:

$$\varphi\big|_{x\in\partial\Omega} = a(x,t), \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geqslant 0, \qquad (2.15)$$

где $a(x,t) \in \mathbb{C}^{(0)}(\partial\Omega \times [0,+\infty))$ — заданная функция. При дополнительном условии

$$\frac{|ea(x,t)|}{kT_e} < 1$$

уравнение (2.15) может быть упрощено. Именно, расмотрим первые два слагаемых в разложении экспоненты $\exp(e\varphi/kT_e)$ по степеням $e\varphi/(kT_e)$. При этом приходим к следующему линейному уравнению:

$$\triangle_3\varphi(x,t) - \frac{1}{r_d^2}\left(\varphi(x,t) + \frac{1}{\tau}\int\limits_0^t ds\,\varphi(x,s)\right) = 0, \qquad (2.16)$$

$r_d = \sqrt{\varepsilon kT_e/(4\pi e^2 n_0)}$ — радиус Дебая. Причем в силу естественного требования согласования начального и граничного условий из уравнения (2.16) в рассматриваемом классе функций $\varphi(x,t)$ получаем, что начальное распределение потенциала электрического поля в полупроводнике $\varphi(x,0) = \varphi_0(x)$ удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\begin{gathered}\triangle_3\varphi_0(x) - r_d^{-2}\varphi_0(x) = 0,\ x \in \Omega,\\ \varphi_0\big|_{x\in\partial\Omega} = a(x,0),\ x \in \partial\Omega.\end{gathered} \qquad (2.17)$$

Если, кроме того, предположить, что $\varphi(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}((0,+\infty);\mathbb{C}^{(2)}(\Omega))$, то в данном расширенном классе гладкости интегродифференциальное уравнение (2.16) эквивалентно дифференциальному уравнению в част-

ных производных третьего порядка составного типа с начальным условием, удовлетворяющим краевой задаче (2.17):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle_3\varphi(x,t)-\frac{1}{r_d^2}\varphi(x,t)\right)-\frac{1}{r_d^2\tau}\varphi(x,t)=0. \tag{2.18}$$

Таким образом, приходим к постановке следующей начально-краевой задачи:

Задача D. Найти непрерывную функцию $\varphi(x,t)$ в $\overline{\Omega}\times[0,+\infty)$, принадлежащую классу $\mathbb{C}([0,+\infty);\mathbb{C}^{(2)}(\Omega))\cap\mathbb{C}^{(1)}((0,+\infty);\mathbb{C}^{(2)}(\Omega))$, и удовлетворяющую в классическом смысле уравнению (2.14), граничному условию (2.15), начальному условию (2.17). Отметим, что, казалось бы различные, волновое уравнение Осколкова–Бенджамена–Бона–Махони–Бюргерса (2.7) и диссипативное уравнение (2.18) связывает общий линейный оператор при производной по времени.

Существование и единственность решения поставленной начально-краевой задачи может быть доказано методами развитыми в предыдущих работах авторов (см. [Габов, Свешников]).

Рассмотрим теперь квазистационарные процессы в двухкомпонентном жидком полупроводнике. Общепринятой моделью для данного случая служит модель амбиполярной диффузии [Бонч-Бруевич], [Лифшиц]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial N_e}{\partial t}=D_e\,\mathrm{div}[\nabla N_e-\frac{eN_e}{T_e}\nabla\varphi],\\ \frac{\partial N_i}{\partial t}=D_i\,\mathrm{div}[\nabla N_i+\frac{eN_i}{T_i}\nabla\varphi],\\ \triangle\varphi=-4\pi e(N_i-N_e).\end{gathered} \tag{2.19}$$

В приближении квазинейтральной плазмы из (2.19) приходим к следующей упрощенной модельной системе уравнений:

$$\begin{gathered}N_e=N_{0e}\exp(e\beta u),\\ \frac{\partial N_i}{\partial t}=eD_i\,\mathrm{div}[N_e\nabla u],\\ \triangle u=-\frac{4\pi e}{T_i}(N_i-N_e),\end{gathered} \tag{2.20}$$

где $\varphi=T_iu,\ \ \beta=T_i/T_e$.

Предположим теперь, что $\beta|eu|<1$. Рассмотрим первые два слагаемых в разложении в ряд Тейлора функции $\exp(e\beta u)$, тогда из (2.20) получим:

$$\begin{gathered}N_e=N_{0e}+N_{0e}e\beta u\\ \frac{\partial N_i}{\partial t}=eD_iN_{0e}e\triangle u+D_iN_{0e}e^2\beta\,\mathrm{div}[u\nabla u],\\ \triangle u=-\frac{4\pi e}{T_i}(N_i-N_{0e}-N_{0e}e\beta u).\end{gathered} \tag{2.21}$$

Интегрируя по t второе уравнение системы (2.21) и подставляя получившееся выражение для N_i в третье уравнение, получим интегродифференциальное уравнение

$$\triangle u - \alpha_1 u + \alpha_2 \int\limits_0^t d\tau \, \triangle u(\mathbf{r},\tau) + \alpha_3 \int\limits_0^t d\tau \ \mathrm{div}[u \nabla u(\mathbf{r},\tau)] = 0, \qquad (2.22)$$

где $\alpha_1 = \beta / r_D^2$, $\alpha_2 = D_i / r_D^2$, $\alpha_3 = D_i e\beta / r_D^2$, $r_D^2 = 4\pi e^2 N_{0e} / T_i$.

Отметим, что естественным граничным условием является задание потенциала электрического поля на границе области Ω:

$$u(x,t)\big|_{x\in\partial\Omega} = a(x,t), \ x \in \partial\Omega. \qquad (2.23)$$

Причем в силу естественного требования согласования начального и граничного условий из уравнения (2.22) в классе функций

$$\mathbb{C}^{(1)}([0,+\infty); \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega}))$$

получим, что начальное распределение потенциала электрического поля в полупроводнике $u(x,0) = u_0(x)$ удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\begin{gathered} \triangle u_0(x) - \alpha_1 u_0(x) = 0, \ x \in \Omega, \\ u_0\big|_{x\in\partial\Omega} = a(x,0), \ x \in \partial\Omega. \end{gathered} \qquad (2.24)$$

И в этом случае интегродифференциальное уравнение (2.22) эквивалентно дифференциальному уравнению в частных производных третьего порядка составного типа с начальным условием, удовлетворяющим краевой задаче (2.24):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\triangle u - \alpha_1 u\right] + \alpha_2 \triangle u(\mathbf{r},t) + \alpha_3 \,\mathrm{div}[u \nabla u(\mathbf{r},t)] = 0. \qquad (2.25)$$

Таким образом, приходим к постановке следующей начально-краевой задачи.

Задача А. Найти непрерывную функцию $\varphi(x,t)$ в $\overline{\Omega} \times [0,+\infty)$, принадлежащую классу $\mathbb{C}([0,+\infty); \mathbb{C}^{(2)}(\Omega)) \cap \mathbb{C}^{(1)}((0,+\infty); \mathbb{C}^{(2)}(\Omega))$ и удовлетворяющую в классическом смысле уравнению (2.25), граничному условию (2.23), начальному условию (2.24). Уравнения (2.25) и (2.7) связывает общий линейный оператор при производной по времени.

2.3. Модели анизотропных полупроводников. Анизотропия проводящей среды может быть вызвана разными факторами. Согласно работе [Тамм] мы считаем, что в электродинамике сплошных сред заряды условно разделяются на связанные и на свободные заряды. Свободные заряды являются носителями макроскопического тока в проводящей среде, а связанные заряды определяют поляризацию среды. При таком разделении анизотропия проводящей среды может быть вызвана либо

анизотропией тока внешних зарядов в магнитном поле (эффект Холла), либо анизотропным распределением связанных зарядов — анизотропия поляризуемости среды (например, сегнетоэлектрики). Как мы увидим ниже, математические модели квазистационарных процессов в анизотропных проводящих средах в обоих случаях приводят к задачам для неклассических дифференциальных уравнений псевдопараболического типа третьего порядка.

Наличие внешнего магнитного поля даже в изначально электрически изотропной среде приводит к проявлению своеобразных свойств квазистационарных процессов, происходящих в данной среде. В частности, мы рассмотрим модельную задачу о диссипативных процессах в кристаллическом полупроводнике во внешнем магнитном поле.

Выберем правую декартову систему координат $\{Ox_1, Ox_2, Ox_3\}$ с ортами $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^3$, в которой ось Ox_3 направлена вдоль магнитного поля $\mathbf{B}_0$. В квазистационарном приближении система уравнений, описывающая диссипативные процессы в униполярном полупроводнике в постоянном магнитном поле, имеет вид [Тамм]

$$\begin{gathered}\operatorname{div}\mathbf{D} = -4\pi en, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \\ \frac{\partial n}{\partial t} = \operatorname{div}\mathbf{J} + \lambda\,|\varphi|^q\varphi, \qquad (2.26) \\ \mathrm{J}_i = \sum_{k=1}^{3}\sigma_{ik}(\mathbf{B}_0)\mathrm{E}_k, \quad \mathrm{P}_i = \sum_{k=1}^{3}\varkappa_{ik}(\mathbf{B}_0)\mathrm{E}_k, \quad \mathbf{B}_0 = \mathrm{B}_0\mathbf{e}_3, \quad i = \overline{1,3},\end{gathered}$$

$\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ — векторы индукции и напряженности электрического поля, $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ — вектор поляризации среды, $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ — плотность тока свободных зарядов, $\lambda \in \mathbb{R}^1$,

$$\varkappa = \begin{pmatrix} \varkappa_{11} & \varkappa_{12} & \varkappa_{13} \\ \varkappa_{21} & \varkappa_{22} & \varkappa_{23} \\ \varkappa_{31} & \varkappa_{32} & \varkappa_{33} \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

— координаты тензоров электрической поляризуемости и проводимости среды в данном базисе, зависящие от магнитного поля $\mathbf{B}_0 = \mathrm{B}_0\mathbf{e}_3$.

Вводя кулоновский потенциал $\varphi(\mathbf{r}, t)$ в предположении поверхностной-односвязности области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}, t),$$

из системы уравнений (2.26) получим нелинейное уравнение анизотропной диссипации в кристаллическом полупроводнике:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle\varphi + 4\pi\varkappa_{ik}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_k}\right) + 4\pi e\sigma_{ik}\frac{\partial^2\varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial x_i\partial x_k} - 4\pi e\lambda\,|\varphi|^q\varphi = 0, \quad (2.27)$$

где предполагается суммирование по повторяющимся индексам.

Краевые условия на границе раздела полупроводник–проводник имеют вид (1.21)–(1.22) с оператором косой производной

$$\mathfrak{L}_x \equiv \frac{\partial}{\partial n_x} + \sum_{i,k=1,1}^{3,3} \varkappa_{ik} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_k) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Заметим, что для многих изотропных полупроводниковых кристаллов тензор электрической поляризуемости имеет следующие координаты: $\varkappa_{ik} = \varkappa\delta_{ik}$ ($\varkappa > 0$, δ_{ik} — символ Кронекера), и не зависит от магнитного поля, а тензор проводимости в приближении слабого поля имеет координаты [Бонч-Бруевич]

$$\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 B_0 & 0 \\ -a_2 B_0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 + a_3 B_0^2 \end{pmatrix},$$

где $a_l \geqslant 0$ ($l = \overline{1,3}$) — некоторые постоянные. В этом случае уравнение (2.27) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \triangle_3 \varphi + \beta_1 \triangle_2 \varphi(\mathbf{r}, t) + \beta_2 \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial x_3^2} + \overline{\lambda} |\varphi|^q \varphi = 0, \tag{2.28}$$

а граничное условие $(\mathbf{J}, \mathbf{n}) = \mathbf{0}$ на поверхности полупроводник–проводник примет вид (1.25) с оператором косой производной

$$\mathfrak{L}_x \equiv \mathfrak{N}_x + \mathfrak{T}_x,$$
$$\mathfrak{N}_{tx} \equiv a_1 \frac{\partial}{\partial n_x} + a_3 B_0^2 \cos(\mathbf{n}_x, \mathbf{e}_3) \frac{\partial}{\partial x_3},$$
$$\mathfrak{T}_x \equiv a_2 B_0 \left(\cos(\mathbf{n}_x, \mathbf{e}_2) \frac{\partial}{\partial x_1} - \cos(\mathbf{n}_x, \mathbf{e}_1) \frac{\partial}{\partial x_2} \right),$$

где $\beta_1 = a_1/\varepsilon$, $\beta_2 = (a_1 + a_3 B_0^2)/\varepsilon$, $\varepsilon = 1 + 4\pi\varkappa$, $\overline{\lambda} = -4\pi e\lambda/\varepsilon$. Таким образом, модельная задача о квазистационарных процессах в полупроводнике при наличии внешнего магнитного поля и при учете эффекта Холла сводится к уравнению (2.28).

Рассмотрим теперь квазистационарные процессы в одноосном сегнетоэлектрике–полупроводнике. С одной стороны, данная среда характеризуется наличием выделенного направления спонтанной поляризации и сравнительно малой энергией, необходимой для изменения направления спонтанной поляризации [Ландау], с другой стороны, для нее характерны все свойства кристаллического полупроводника, в частности эффект экранирования Дебая с характерным радиусом $r_d = \sqrt{\mathrm{T}/4\pi e^2 n_0}$.

Выберем декартову систему координат $\{Ox_1, Ox_2, Ox_3\}$ с осью Ox_3, направленной вдоль полярной оси сегнетоэлектрика. В квазистационарном приближении малые флуктуации поляризации сегнетоэлектрика–

полупроводника вблизи равновесного состояния описываются системой уравнений [Федосов]:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = -4\pi en, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathrm{P}\mathbf{e}_3,$$
$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial t} + \alpha_1 \mathrm{P} = \alpha_2 \mathrm{E}_3, \tag{2.29}$$
$$\frac{\partial n}{\partial t} = \operatorname{div}\mathbf{J} + \lambda|\varphi|^q\varphi, \quad \mathbf{J} = \sigma_0\mathbf{E},$$

где $\alpha_1 \geqslant 0,\ \alpha_2 > 0,\ \mathrm{E}_3 = (\mathbf{E}, \mathbf{e}_3)$.

Из четвертого уравнения системы (2.29) получаем

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}_0(x)\exp(-\alpha_1 t) - \alpha_2 \int_0^t d\tau\ \exp(-\alpha_1(t-\tau))\frac{\partial\varphi(\mathbf{r},\tau)}{\partial x_3}.$$

Из последнего равенства и первых трех уравнений системы (2.29) получаем интегродифференциальное уравнение анизотропной релаксации в сегнетоэлектрике-полупроводнике:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle_2\varphi + [\mathrm{I} + 4\pi\alpha_2\mathcal{K}*]\frac{\partial^2\varphi(\mathbf{r},\tau)}{\partial x_3^2}\right) +$$
$$+ \alpha_3\triangle\varphi + \overline{\lambda}\,|\varphi|^q\varphi = 4\pi\frac{\partial \mathrm{P}_0(x)}{\partial x_3}\exp(-\alpha_1 t), \tag{2.30}$$

где $\alpha_3 = 4\pi e\sigma_0,\ \overline{\lambda} = -4\pi e\lambda$,

$$\triangle_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad \mathcal{K} * u \equiv \int_0^t d\tau\ \exp(-\alpha_1(t-\tau))u(\tau). \tag{2.31}$$

Типичные граничные условия на поверхности раздела проводник–полупроводник имеют вид (1.24) с граничным оператором

$$\mathfrak{L}_x \equiv \frac{\partial}{\partial n_x}\mathrm{I} + 4\pi\alpha_2\cos(\mathbf{n}_x, \mathbf{e}_3)\frac{\partial}{\partial x_3}\mathcal{K}*,$$

где оператор $\mathcal{K}*$ определен формулой (2.31). Отметим, что уравнение (2.30) отличается от всех полученных в данной работе, поскольку учитывает временную дисперсию тензора диэлектрической проницаемости. Таким уравнениям посвящена работа [Корпусов, 2]. В этой связи заметим, что в работах Ю. Д. Плетнера был предложен операторный метод исследования линейных уравнений соболевского типа произвольного порядка по времени. С помощью данного метода удалось конструктивно построить решения начальных и начально-краевых задач для уравнений соболевского типа. Причем была выяснена связь между уравнениями соболевского типа и некоторыми эллиптическими уравнениями, связанная со структурой рассматриваемого уравнения соболевского типа. Оказалось, что соболевское уравнение можно представить

как регулярно возмущенное вольтеровскими сверточными операторами эллиптическое уравнение. После чего был изучен вопрос о свойствах решений начально-краевых задач для уравнений соболевского типа по пространственным переменным с нулевыми начальными условиями и заданными граничными условиями. Приложению данного метода к начально-краевым задачам для некоторых уравнений соболевского типа посвящены работы [Альшин, 5; Корпусов, 1].

2.4. Нелинейные сингулярные уравнения соболевского типа. Как известно, для линейных эволюционных уравнений первого и второго порядков, разрешенных относительно старшей производной по времени, эффективным оказался метод полугрупп, развитый в работах [Крейн; Хилле]. С другой стороны, сингулярные уравнения соболевского типа представляют собой дифференциальные уравнения в частных производных, неразрешенные и неразрешаемые относительно старшей производной по времени, т. е. с необратимым оператором (в приложениях — эллиптического типа) при старшей производной по времени. В этом случае классический метод полугрупп неприменим. Однако Г. А. Свиридюком и В. Е. Федоровым в рассмотрение были введены полугруппы операторов с ненулевыми ядрами в подходящих банаховых пространствах. Для этого были введены в рассмотрение понятия относительно ограниченных, относительно секториальных и относительно радиальных операторов, обобщающих соответствующие классические определения теории операторов. С помощью развитого метода полугрупп с ядрами удалось доказать теоремы разрешимости линейных сингулярных уравнений соболевского типа и применить их к исследованию нелинейных соболевских уравнений. Отметим также работы [Favini; Stefanelli].

Модельные сингулярные уравнения соболевского типа формально могут быть получены из уравнений (2.1)–(2.3) и (2.5), (2.6) точно таким же образом, как это было сделано в пункте б), только для плотности связанных зарядов используется модельное распределение (1.12). Иначе говоря к уравнениям (2.1)–(2.3) и (2.5), (2.6) добавляется слагаемое

$$r_2\overline{n}_0\varepsilon^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

после чего они примут следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle\varphi+\overline{a}\varphi\right)+a_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}+a_2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}+a_3\triangle\varphi=0, \tag{2.32}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle\varphi+\overline{a}\varphi\right)+a_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}+a_2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}+ \\ +a_3\triangle\varphi+a_4\operatorname{div}\left(|\nabla\varphi|^2\nabla\varphi\right)+\overline{\lambda}\,|\varphi|^{q_3}\varphi=0, \tag{2.33}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle\varphi+\overline{a}\varphi\right)+a_3\triangle\varphi+a_4\operatorname{div}\left(|\nabla\varphi|^2\nabla\varphi\right)+\overline{\lambda}|\varphi|^{q_3}\varphi=0, \tag{2.34}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle\varphi+\overline{a}\varphi\right)+a_5[\triangle\varphi+\varepsilon_2\frac{1}{2}\triangle\varphi^2+\varepsilon_2^2\frac{1}{6}\triangle\varphi^3]+\overline{\lambda}\,|\varphi|^{q_3}\varphi=0, \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle\varphi+\overline{a}\varphi\right)+a_5\frac{1}{q_2+1}\triangle(|\varphi|^{q_2}\varphi)+\overline{\lambda}\,|\varphi|^{q_3}\varphi=0, \quad q_2,\ q_3\geqslant 0, \quad (2.36)$$

где

$$\triangle\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$\overline{a}=r_2\overline{n}_0\varepsilon^{-1}$, $\varepsilon_1=e/(kT_e)$, $\varepsilon_2=e/(k\widehat{T}_e)$, $a_1=4\pi e\mu_1\varepsilon^{-1}\varepsilon_2|\mathbf{E}_0|$, $a_2=8\pi e\mu_1\varepsilon^{-1}\varepsilon_2^2|\mathbf{E}_0|$, $a_3=4\pi e\varepsilon^{-1}b\sigma_0$, $a_4=4\pi e\varepsilon^{-1}b\sigma_0\beta$, $a_5=4\pi e^2\varepsilon^{-1}r_3\mu$, $q_2,\ q_3\geqslant 0$, $\varepsilon=1+4\pi\varkappa_0$, $\overline{\lambda}=-4\pi e\varepsilon^{-1}\lambda$, причем $a_1,a_2,a_3\geqslant 0$, $\overline{a},a_5>0$, $a_4,\overline{\lambda}\in\mathbb{R}^1$.

Таким образом, уравнения (2.32)–(2.36) являются базовыми модельными уравнениями соболевского типа, описывающими метастабильные состояния в полупроводниках при наличии отрицательной дифференциальной поляризуемости.

2.5. Псевдопараболические уравнения с нелинейным оператором при производной по времени. Как мы уже говорили во втором пар аграфе, в том случае, если величина электрического поля сравнима с внутриатомными полями, мы должны учесть зависимость электрической поляризуемости от электрического поля вида (1.6). Мы рассмотрим уравнения с учетом зависимости $(1.6)_1$. Уравнения с зависимостью $(1.6)_2$ получаются аналогичным образом. При этом учтем, что часть связанных зарядов имеет степенное распределение в самосогласованном поле, обращающееся в нуль вместе с потенциалом электрического поля φ:

$$\rho_2=r_4|\varphi|^{q_1}\varphi.$$

В этом случае к (2.1)–(2.3) и (2.5), (2.6) добавляется слагаемое

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(a\,\mathrm{div}(|\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi)-r_4|\varphi|^{q_1}\varphi\right)$$

и указанные уравнения примут следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle\varphi+a\,\mathrm{div}(|\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi)-r_4|\varphi|^{q_1}\varphi\right)+ \\ +a_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}+a_2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}+a_3\triangle\varphi=0, \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle\varphi+a\,\mathrm{div}(|\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi)-r_4|\varphi|^{q_1}\varphi\right)+a_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}+a_2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}+ \\ +a_3\triangle\varphi+a_4\,\mathrm{div}\left(|\nabla\varphi|^2\nabla\varphi\right)+\overline{\lambda}\,|\varphi|^{q_3}\varphi=0, \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle\varphi+a\,\mathrm{div}(|\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi)-r_4|\varphi|^{q_1}\varphi\right)+ \\ +a_3\triangle\varphi+a_4\,\mathrm{div}\left(|\nabla\varphi|^2\nabla\varphi\right)+\overline{\lambda}\,|\varphi|^{q_3}\varphi=0, \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle\varphi + a\,\mathrm{div}(|\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi) - r_4|\varphi|^{q_1}\varphi\right) + a_5[\triangle\varphi + \varepsilon_2\frac{1}{2}\triangle\varphi^2 + \\ + \varepsilon_2^2\frac{1}{6}\triangle\varphi^3] + \overline{\lambda}\,|\varphi|^{q_3}\varphi = 0, \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle\varphi + a\,\mathrm{div}(|\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi) - r_4|\varphi|^{q_1}\varphi\right) + \\ + a_5\frac{1}{q_2+1}\triangle(|\varphi|^{q_2}\varphi) + \overline{\lambda}\,|\varphi|^{q_3}\varphi = 0, \quad (2.41)$$

где

$$\triangle \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$q_1,\ q_2,\ q_3 \geqslant 0,\ \ \varepsilon_1 = e/(kT_e),\ \varepsilon_2 = e/(k\widehat{T}_e),\ \ a_1 = 4\pi e\mu_1\varepsilon_2|\mathbf{E}_0|,\ \ a_2 = 8\pi e\mu_1\varepsilon_2^2|\mathbf{E}_0|,\ \ a_3 = 4\pi eb\sigma_0,\ \ a_4 = 4\pi eb\sigma_0\beta,\ \ a_5 = 4\pi e^2 r_3\mu,\ \ \overline{\lambda} = -4\pi e\lambda,$ причем $r_4, a_1, a_2, a_3, a \geqslant 0,\ \ a_5 > 0,\ \ a_4, \overline{\lambda} \in \mathbb{R}^1$.

Таким образом, модельные уравнения (2.37)–(2.41) описывают либо нелинейную зависимость коэффициента электрической поляризуемости от напряженности электрического поля, либо нелинейную зависимость $\mathrm{div}\,\mathbf{P}$ от потенциала электрического поля.

2.6. Нелинейные нелокальные уравнения. В работе [Бонч-Бруевич, 2] были высказаны соображения в пользу рассмотрения подвижности электронов μ как нелокальной функции по пространственным переменным от напряженности электрического поля $\mathbf{E}$. С другой стороны, первая нелинейная поправка к подвижности электронов квадратична относительно напряженности поля. Поэтому разумно предположить, что первая нелинейная нелокальная поправка к подвижности электронов в случае $\Omega \equiv \mathbb{R}^3$ должна иметь вид

$$\mu(\mathbf{r}, t) = \mu_0 + c_1 \int\limits_{\mathbb{R}^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r_1}\, d\mathbf{r_2}\, \mathbb{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}, t)\mathbf{E}(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}, t)\mathbf{E}(\mathbf{r_2}, t), \quad (2.42)$$

где $c_1 \in \mathbb{R}^1,\ \mu_0 \geqslant 0$. Важный частный случай имеет место, когда начальное распределение потенциала электрического поля квазиоднородно, т. е. подвижность μ не зависит от $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$. В этом случае с необходимостью из (2.42) получаем, что ядро $\mathbb{K} \equiv \mathbb{K}(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}, t)$. Кроме того, в достаточно сильных полях $\mathbf{E}$ ядро можно считать равным нулю при $|\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}| > \mathrm{T}/(eE_0)$, и оно имеет острый пик при $\mathbf{r_1} = \mathbf{r_2}$ [Бонч-Бруевич, Звягин, Миронов]. Поэтому в первом приближении мы можем считать $\mathbb{K}(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}) = \delta(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2})$ в смысле $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$. Из этих предположений и равенства (2.42) следует соотношение

$$\mu(t) = \mu_0 + c_1 \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r}\ |\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2\,. \quad (2.43)$$

В силу известной связи подвижности свободных электронов и электрической проводимости $\sigma = en_0\mu$ из (2.43) получим

$$\sigma(t) = \sigma_0 + c_2 \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r}\ |\mathbf{E}(\mathbf{r},t)|^2\,,\ \sigma_0 = en_0\mu_0,\ \ c_2 = c_1 en_0. \tag{2.44}$$

Воспользовавшись теперь системой уравнений (1.1)–(1.2) и феноменологическими уравнениями (1.6)–(1.8), с учетом (2.44) получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle\varphi + a\,\mathrm{div}(|\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi) - r_4|\varphi|^{q_1}\varphi\right) + a_3\triangle\varphi + \\ + a_4 \parallel \nabla\varphi \parallel_2^2 \triangle\varphi = 0, \tag{2.45}$$

где $a, r_4, a_3, q_1 \geqslant 0,\ \ a_4 \in \mathbb{R}^1$,

$$\parallel \nabla\varphi \parallel_2^2 \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r}\ |\nabla\varphi(\mathbf{r},t)|^2\,.$$

Отметим, что в случае ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ мы можем формально рассматривать уравнение (2.45), в котором квадрат нормы $\parallel \nabla\varphi \parallel_2^2$ теперь будет равен

$$\parallel \nabla\varphi \parallel_2^2 \equiv \int\limits_{\Omega} d\mathbf{r}\ |\nabla\varphi(\mathbf{r},t)|^2\,.$$

В случае ограниченных полупроводников имеются другие соображения, приводящие к нелинейным нелокальным уравнениям псевдопараболического типа. Рассмотрим так называемые двухтемпературные перегревные механизмы, когда температура свободных электронов T_e больше фононной температуры T_0 [Басс]. В этом случае имеется следующая зависимость проводимости электрического поля от усредненной по области температуры свободных электронов [Басс; Ваксер]:

$$\sigma(\overline{\mathrm{T}}_e) = \sigma_0\left(\frac{\overline{\mathrm{T}}_e}{\mathrm{T}_0}\right)^q,\ \ \overline{\mathrm{T}}_e \equiv \frac{1}{mes(\Omega)}\int\limits_{\Omega} dx\,\mathrm{T}_e,\ \ q \in \mathbb{R}^1. \tag{2.46}$$

С другой стороны, температура свободных электронов в пределе $\mathrm{T}_e \gg \mathrm{T}_0$ связана с напряженностью электрического поля соотношением

$$\mathrm{T}_e = w_0|\mathbf{E}|^2,\ \ w_0 > 0, \tag{2.47}$$

либо соотношением

$$\mathrm{T}_e = w_1 + w_0|\mathbf{E}|^2,\ \ w_0 > 0,\ \ w_1 > 0. \tag{2.48}$$

Из (2.46)–(2.48) получаем следующую связь проводимости электрического поля и напряженности электрического поля:

$$\sigma(|\mathbf{E}|) = \frac{w_2}{[mes(\Omega)]^q}\left[\int\limits_\Omega dx\ |\mathbf{E}|^2\right]^q, \qquad \sigma(|\mathbf{E}|) = w_2\left[w_0 + w_1\frac{1}{mes(\Omega)}\int\limits_\Omega dx\ |\mathbf{E}|^2\right]^q, \tag{2.49}$$

где $w_2 = \sigma_0/\mathrm{T}_0^q$. Воспользовавшись теперь системой уравнений (1.1)–(1.2) и феноменологическими уравнениями (1.6)–(1.8) с учетом (2.49) получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\triangle\varphi + a\,\mathrm{div}(|\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi) - r_4|\varphi|^{q_1}\varphi\Big) + + w_2\left[w_3 + w_1\frac{1}{mes(\Omega)}\int\limits_\Omega dx\ |\nabla\varphi|^2\right]^q \triangle\varphi = 0, \tag{2.50}$$

где $a, r_4, w_3, q_1 \geqslant 0,\ \ w_2, w_1 > 0,\ q \in \mathbb{R}^1$.

В математике уже с 1876 г. известно одно уравнение, имеющее такую же нелинейную нелокальность, — волновое уравнение типа Кирхгоффа. В своем трактате [Kirkhoff] Кирхгофф предложил следующее интегродифференциальное уравнение:

$$\xi_{tt} - \left(\varepsilon^2 + \frac{1}{2l}\int\limits_0^l \xi_s^2\,ds\right)\xi_{ss} = 0,$$

для того чтобы описать малые поперечные колебания эластичного стержня длины l, когда продольные колебания малы по сравнению с поперечными. Подробное изложение модели Киркгоффа можно найти в обзоре [Spagnollo]. Для уравнения Киркгоффа рассматривались начальные, начально-краевые задачи [Похожаев, 1] и вопросы устойчивости [Ball].

Опишем теперь интересный эффект релаксации за конечное время, связанный с тем, что показатель q в уравнении (2.50) может быть отрицательным. Предположим, что $q \in (-1, 0)$, и рассмотрим модельную задачу для уравнения (2.50) при $a = q_1 = w_3 = 0$ и $r_4 = w_2 = w_1 = 1$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\triangle\varphi - \varphi) + c_1(\Omega)\left[\int\limits_\Omega dx\ |\nabla\varphi|^2\right]^q \triangle\varphi = 0, \tag{2.51}$$

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.52}$$

$$\varphi(x,t)\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.53}$$

где $q \in (-1,0)$, $c_1(\Omega) = [mes(\Omega)]^{-q}$ и ограниченная поверхностно-односвязная область $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ обладает гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$, $\delta \in \in (0,1]$.

Будем рассматривать задачу (2.51)–(2.53) в обобщенном смысле $\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T}_0;\mathbb{H}^{-1}(\Omega))$. Предположим, что эта задача имеет, вообще говоря неединственное, глобальное во времени решение класса

$$\varphi \in \mathbb{L}^{\infty}(0,\infty;\mathbb{H}_0^1(\Omega)),\ \varphi_t^{'} \in \mathbb{L}^2(0,\infty;\mathbb{H}_0^1(\Omega)).$$

Тогда, скалярно умножая обе части уравнения (2.51) на φ и φ_t относительно скобок двойственности $\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle\cdot,\cdot\rangle$ между гильбертовыми пространствами $\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{H}_0^1(\Omega))$ и $\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{H}^{-1}(\Omega))$, $\mathrm{T}>0$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — это скобки двойственности между Гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, в результате интегрирования по частям получим

$$\| \nabla\varphi \|_2^2 + \| \varphi \|_2^2 + 2c_1(\Omega)\int\limits_0^T ds\ \| \nabla\varphi \|_2^{2(1+q)}(s) =$$

$$= \| \nabla\varphi_0 \|_2^2 + \| \varphi_0 \|_2^2, \quad (2.54)$$

$$\int\limits_0^T ds\,[\| \nabla\varphi_s^{'} \|_2^2(s) + \| \varphi_s^{'} \|_2^2(s)] + \frac{c_1(\Omega)}{2(1+q)} \| \nabla\varphi \|_2^{2(1+q)} =$$

$$= \frac{c_1(\Omega)}{2(1+q)} \| \nabla\varphi_0 \|_2^{2(1+q)}, \quad (2.55)$$

что законно в рассматриваемом классе гладкости. В указанном классе гладкости в силу абсолютной непрерывности по $t \in (0,\mathrm{T})$ выражений

$$\int\limits_0^t ds\ \| \nabla\varphi \|_2^{2(1+q)}(s),\ \int\limits_0^t ds\,[\| \nabla\varphi_s^{'} \|_2^2(s) + \| \varphi_s^{'} \|_2^2(s)]$$

из соотношений (2.54) и (2.55) получаем соответственно следующие дифференциальные равенства:

$$\frac{d}{dt}\left[\| \nabla\varphi \|_2^2 + \| \varphi \|_2^2\right] + 2c_1(\Omega) \| \nabla\varphi \|_2^{2(1+q)}(t) = 0, \quad (2.56)$$

$$\| \nabla\varphi_t^{'} \|_2^2(t) + \| \varphi_t^{'} \|_2^2(t) + \frac{c_1(\Omega)}{2(1+q)}\frac{d}{dt} \| \nabla\varphi \|_2^{2(1+q)} = 0. \quad (2.57)$$

В силу условий на область Ω справедливо вложение $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^2(\Omega)$:

$$c_2(\Omega) \| \varphi \|_2^2 \leqslant \| \nabla\varphi \|_2^2,$$

с некоторой постоянной $c_2(\Omega)$. С учетом данного вложения из уравнения (2.56) получим следующее неравенство:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\| \nabla\varphi \|_2^2 + \| \varphi \|_2^2\right] + c_1(\Omega)c_2(\Omega)\frac{\| \varphi \|_2^2}{\| \nabla\varphi \|_2^{-2q}} \leqslant 0. \qquad (2.58)$$

Разделим обе части (2.58) на $c_2(\Omega)$ и сложим получившееся неравенство с уравнением (2.56), в результате получим

$$\frac{1}{2}\left[1 + c_2^{-1}(\Omega)\right]\frac{d}{dt}\left[\| \nabla\varphi \|_2^2 + \| \varphi \|_2^2\right] + \\ + c_1(\Omega)\frac{\| \nabla\varphi \|_2^2 + \| \varphi \|_2^2}{\| \nabla\varphi \|_2^{-2q}} \leqslant 0. \qquad (2.59)$$

Из (2.59) в силу отрицательности q вытекает неравенство

$$\frac{1}{2}\left[1 + c_2^{-1}(\Omega)\right]\frac{d}{dt}\left[\| \nabla\varphi \|_2^2 + \| \varphi \|_2^2\right] + \\ + c_1(\Omega)\frac{\| \nabla\varphi \|_2^2 + \| \varphi \|_2^2}{(\| \nabla\varphi \|_2^2 + \| \varphi \|_2^2)^{-q}} \leqslant 0. \qquad (2.60)$$

Введем обозначения:

$$F(t) \equiv \| \nabla\varphi \|_2^2 + \| \varphi \|_2^2,\ c_4(\Omega) = 2c_1(\Omega)c_2(\Omega)/(1 + c_2(\Omega)).$$

Тогда из (2.60) получим следующее обыкновенное дифференциальное неравенство первого порядка:

$$\frac{dF}{dt} + c_4(\Omega)F(t)^{1+q} \leqslant 0,\quad F(0) = \| \nabla\varphi_0 \|_2^2 + \| \varphi_0 \|_2^2 > 0, \qquad (2.61)$$

где $q \in (-1, 0)$. Из (2.61) вытекает неравенство

$$0 \leqslant F(t) \leqslant \left(F_0^{|q|} - |q|c_4(\Omega)t\right)^{\frac{1}{|q|}}.$$

Анализируя полученное неравенство, приходим к выводу, что, поскольку $F_0 = \| \nabla\varphi_0 \|_2^2 + \| \varphi_0 \|_2^2 > 0$, то найдется такой момент времени $0 < t_0 \leqslant F_0^{|q|}|q|^{-1}c_4^{-1}(\Omega)$, что

$$\| \nabla\varphi \|_2^2 (t_0) = \| \varphi_0 \|_2^2 (t_0) = 0.$$

Тем самым за конечное время t_0 все решения задачи (2.51)–(2.53) класса гладкости

$$\varphi \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega)),\quad \varphi_t' \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega)),\quad T > 0,$$

обращаются в нуль при почти всех $x \in \Omega$. В этом и заключается эффект релаксации за конечное время. Причем каждое решение задачи (2.51)–(2.53) обращается в нуль при почти всех $x \in \Omega$ за некоторое время t_0, различное, вообще говоря, для разных решений. Но если для данного

решения φ время релаксации равно некоторому t_0, то, рассматривая новую задачу (2.51)–(2.53) с начальным условием, равным нулю при $t = t_0$, мы получим, что в рассматриваемом обобщенном классе гладкости в силу (2.54) единственным решением будет тривиальное. Нетрудно убедиться, что сшитое при $t = t_0$ решение в силу (2.54), (2.55) будет удовлетворять указанному выше классу гладкости. Действительно, нам достаточно убедиться, что сшитое таким образом решение $\overline{\varphi}$,

$$\overline{\varphi}(x,t) = \begin{cases} \varphi(x,t), & t \in [0,t_0], \\ 0, & t \geqslant t_0, \end{cases}$$

принадлежит классу

$$\overline{\varphi} \in \mathbb{L}^{\infty}(t_0-\eta, t_0+\eta; \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \quad \overline{\varphi}_t' \in \mathbb{L}^2(t_0-\eta, t_0+\eta; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$$

в некоторой окрестности точки $t \in (t_0-\eta; t_0+\eta)$, $\eta \in (0, t_0/2)$. Из (2.54) и (2.55) следует, что

$$\| \nabla\overline{\varphi} \|_2^2 (t) + \| \overline{\varphi} \|_2^2 (t) \leqslant \| \nabla\varphi_0 \|_2^2 + \| \varphi_0 \|_2^2, \quad t \in (t_0-\eta, t_0+\eta),$$

$$\int\limits_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} ds \, [\| \nabla\overline{\varphi}_s \|_2^2 (s) + \| \overline{\varphi}_s \|_2^2 (s)] \leqslant \frac{c_1(\Omega)}{2(1+q)} \| \nabla\varphi_0 \|_2^{2(1+q)}.$$

Теперь мы в состоянии получить оптимальные оценки сверху и снизу на время и скорость релаксации за конечное время. С этой целью введем обозначения

$$\mathrm{M}(t^*) \equiv \left(\| \nabla\varphi \|_2^2 (t^*) + \| \varphi \|_2^2 (t^*) \right)^{1/2}, \quad \gamma \equiv \mathrm{M}^{-2q}(t^*), \; t^* \in (0, t_0),$$

$$u(s,x) \equiv \frac{1}{\mathrm{M}(t^*)} \varphi(s\gamma + t^*, x), \quad \mathrm{E}(u) \equiv \sqrt{\| \nabla u \|_2^2 (s) + \| u \|_2^2 (s)}, \quad x \in \Omega.$$

При этом мы будем под φ понимать какое-либо одно решение задачи (2.51)–(2.53) с фиксированной точкой «релаксации» $0 < t_0 \leqslant F_0^{|q|} |q|^{-1} c_4^{-1}(\Omega)$.

Нетрудно проверить, что введенная функция $u(s,x)$ удовлетворяет следующей начально-краевой задаче в смысле: $\mathbb{L}^2(-t^*/\gamma, T/\gamma - t^*/\gamma; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$,

$$\frac{\partial}{\partial s}(\triangle u - u) + c_1(\Omega) \| \nabla u \|_2^{2q} \triangle u = 0, \quad u(-t^*/\gamma, x) = \frac{\varphi_0}{\mathrm{M}(t^*)}, \qquad (2.62)$$

$$u(s,x) \in \mathbb{L}^{\infty}(-t^*/\gamma, T/\gamma - t^*/\gamma; \mathbb{H}_0^1(\Omega)),$$

$$u_s'(s,x) \in \mathbb{L}^2(-t^*/\gamma, T/\gamma - t^*/\gamma; \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \quad T > 0, \; q \in (-1, 0).$$

Докажем, что данное решение задачи (2.62), соответствующее фиксированному решению $\varphi(x,t)$ с некоторым временем релаксации t_0, таково, что

$$-c_6 \leqslant \frac{d}{ds}\mathrm{E}(u)\mid_{s=0} \leqslant -c_5, \quad c_5 > 0, \quad c_6 > 0. \tag{2.63}$$

Заметим, что в данном классе гладкости данное решение задачи (2.62) удовлетворяет (2.54) и (2.55) с заменой $\varphi(x,t)$ на $u(x,s)$ и T на s в верхних пределах. Отсюда, получаем, что $u(x,s)$ удовлетворяет также (2.56) и (2.57). В этом случае для $u(x,s)$ справедлива оценка (2.61), из которой вытекает

$$\frac{d}{ds}\mathrm{E}(u)\mid_{s=0} \leqslant -c_5, \quad c_5(\Omega) \equiv c_1(\Omega)c_2(\Omega)/(1+c_2(\Omega)), \tag{2.64}$$

где $c_2(\Omega)$ — максимальная постоянная вложения $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^2(\Omega)$: $c_2(\Omega) \parallel v \parallel_2^2 \leqslant \parallel \nabla v \parallel_2^2$. С другой стороны, имеет место следующее неравенство:

$$\left|\int\limits_\Omega dx[(\nabla u_s^{'}, \nabla u) + (u_s^{'}, u)]\right|^2 \leqslant [\parallel \nabla u \parallel_2^2 + \parallel u \parallel_2^2] \times$$

$$\times [\parallel \nabla u_s^{'} \parallel_2^2 + \parallel u_s^{'} \parallel_2^2]. \tag{2.65}$$

При этом,

$$\left|\int\limits_\Omega dx\,[(\nabla u_s^{'}, \nabla u) + (u_s^{'}, u)]\right|^2 = \frac{1}{4}\left|\frac{d\mathrm{F}}{ds}\right|^2, \tag{2.66}$$

где $\mathrm{F}(s) \equiv \parallel \nabla u \parallel_2^2 (s) + \parallel u \parallel_2^2 (s)$. В силу (2.56), (2.57) с заменой $\varphi(x,t)$ на $u(x,s)$ из (2.65) и (2.66) получим

$$\mathrm{F}\frac{d^2\mathrm{F}}{ds^2} - (q+1)\left|\frac{d\mathrm{F}}{ds}\right|^2 \geqslant 0. \tag{2.67}$$

Разделив обе части равенства (2.67) на $\mathrm{F}^{2+q}(s) > 0$ при

$$s \in [-t^*/\gamma, t_0/\gamma - t^*/\gamma),$$

после несложных преобразований получим

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\mathrm{F}^{q+1}}\frac{d\mathrm{F}}{ds}\right) \geqslant 0, \quad q \in (-1,0). \tag{2.68}$$

Интегрируя дифференциальное неравенство (2.68) по $s \in [-t^*/\gamma, t]$, $t \in (-t^*/\gamma, t_0/\gamma - t^*/\gamma)$, получим

$$\frac{1}{\mathrm{F}^{q+1}}\frac{d\mathrm{F}}{ds}\bigg|_{s=t} \geqslant -\frac{1}{\mathrm{F}^{q+1}}\frac{d\mathrm{F}}{ds}\bigg|_{s=-t^*/\gamma} =$$

$$= -2c_1(\Omega)\frac{\| \nabla\varphi_0 \|_2^{2(q+1)}}{\mathrm{M}(t^*)^{2(q+1)}}\frac{\mathrm{M}(t^*)^{2(q+1)}}{\left[\| \nabla\varphi_0 \|_2^2 + \| \varphi_0 \|_2^2\right]^{q+1}} =$$

$$= -2c_1(\Omega)\frac{\| \nabla\varphi_0 \|_2^{2(q+1)}}{\left[\| \nabla\varphi_0 \|_2^2 + \| \varphi_0 \|_2^2\right]^{q+1}} \equiv -2c_6. \quad (2.69)$$

Поскольку $\mathrm{F}' = 2\mathrm{E}\mathrm{E}'$, то из (2.69) вытекает

$$\left.\frac{d\mathrm{E}}{ds}\right|_{s=0} \geqslant -c_6. \quad (2.70)$$

Собирая вместе (2.64) и (2.70), приходим к выводу о справедливости (2.63). Нетрудно убедиться, что с учетом определения $\mathrm{E}(s)$ соотношение (2.63) эквивалентно следующим дифференциальным неравенствам:

$$-c_6 \leqslant \frac{1}{\mathrm{M}(t^*)^{1+2q}}\frac{d\mathrm{M}(t^*)}{dt^*} \leqslant -c_5, \;\; t^* \in (0, t_0), \;\; q \in (-1, 0). \quad (2.71)$$

Интегрируя соотношение (2.71) в пределах по $t^* \in (t, t_0)$, $\mathrm{M}(t_0) = 0$, получим неравенство

$$-c_6 2|q|(t_0 - t) \leqslant -\mathrm{M}^{2|q|}(t) \leqslant -c_5 2|q|(t_0 - t).$$

Откуда вытекает нужная оценка

$$(c_5 2|q|)^{1/|q|}(t_0 - t)^{1/|q|} \leqslant \| \nabla\varphi \|_2^2(t) + \| \varphi \|_2^2(t) \leqslant$$
$$\leqslant (c_6 2|q|)^{1/|q|}(t_0 - t)^{1/|q|}, \quad (2.72)$$

где

$$c_6 \equiv c_1(\Omega)\frac{\| \nabla\varphi_0 \|_2^{2(q+1)}}{\left[\| \nabla\varphi_0 \|_2^2 + \| \varphi_0 \|_2^2\right]^{q+1}},$$

$$c_5(\Omega) \equiv c_1(\Omega)c_2(\Omega)/(1 + c_2(\Omega)), \;\; c_1(\Omega) = [mes(\Omega)]^{-q},$$

$c_2(\Omega)$ — наибольшая постоянная вложения $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^2(\Omega)$: $c_2(\Omega) \| v \|_2^2 \leqslant \| \nabla v \|_2^2$. Из (2.72) легко вытекают оценки сверху и снизу на время релаксации всех решений задачи (2.51)–(2.53).

2.7. Краевые задачи для эллиптических уравнений с граничными условиями псевдопараболического типа. Рассмотрим следующую модельную задачу. Пусть область $x_3 > 0$ пространства $\mathbb{R}^3$ занимает полупроводник, в котором отсутствуют свободные заряды, так что справедлива система уравнений квазистационарного поля:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 0, \;\; \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \;\; \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \;\; x_3 > 0. \quad (2.73)$$

Очевидно, что в области $x_3 > 0$ поле $\mathbf{E}$ потенциально: $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. Предположим, что в соответствии с феноменологическими уравнения-

ми (1.3)–(1.12), первое уравнение из (2.73) может быть записано в следующем общем виде:

$$\triangle\varphi + a\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) + r_4|\varphi|^{q_1}\varphi = 0, \quad x_3 > 0, \tag{2.74}$$

где $p > 2$, $q_1 \geqslant 0$, $a \geqslant 0$, $r_4 \in \mathbb{R}^1$. С другой стороны, на границе $x_3 = 0$ предполагаем выполненными граничные условия вида (1.26) и (1.27) с теми же самыми, но предельными феноменологическими соотношениями (1.3)–(1.12). Дополнительно мы требуем выполнения предельного феноменологического соотношения, родственного к (1.14):

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}(\sigma_0 + \beta|\mathrm{E_j}|^2).$$

В результате из системы уравнений (1.26) и (1.27) получим следующее нелинейное динамическое граничное условие псевдопараболического типа:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} + a\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}\right|^{p-2}\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} + r_4|\varphi|^{q_1}\varphi\right) + a_3\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} + a_4\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}\right|^{2}\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} + \overline{\lambda}|\varphi|^{q_3}\varphi\right]\Bigg|_{x_3=0} = 0, \tag{2.75}$$

где $a_3 \geqslant 0$, $a_4, \overline{\lambda} \in \mathbb{R}^1$, $q_3 \geqslant 0$, а постоянные a и r_4 те же, что и в уравнении (2.74).

Краевая задача (2.74) с граничным условием (2.75) должна быть дополнена начальным условием на границе $x_3 = 0$. В качестве таковых могут быть взяты условие

$$\varphi(x', x_3, t)\big|_{x_3=0,t=0} = \varphi_0(x'), \quad x' = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

либо условие

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{x_3=0,t=0} = \mathrm{E_{n0}}(x'), \quad x' = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{2.76}$$

Исследования задач для уравнения Лапласа с динамическими граничными условиями псевдопараболического типа можно найти в работе [Amann, 1] и в работе [Корпусов, 21].

В качестве примера рассмотрим одну начально-краевую задачу для уравнения Лапласа с нелинейным граничным условием, решение которой может быть выписано явно. При этом для простоты рассмотрим совсем «хороший» случай $\mathrm{E_{n0}}(x') \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Изучим следующую задачу (2.74)–(2.76) при $a = r_4 = \overline{\lambda} = 0$, $a_3 = a_4 = 1$:

$$\triangle\varphi = 0, \quad x_3 > 0, \tag{2.77}$$

$$\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial\mathbf{n}\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}+\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}\right|^2\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}\right]\Bigg|_{x_3=0}=0, \tag{2.78}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{x_3=0,t=0}=f_0(x')\in\mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2),\quad x'=(x_1,x_2). \tag{2.79}$$

Введем обозначения

$$f(x',t)\equiv\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{x_3=0},\quad f(x',0)=f_0(x'), \tag{2.80}$$

тогда в силу (2.78) получим следующее дифференциальное уравнение с начальным условием,

$$\frac{\partial f}{\partial t}+f+f^3=0,\qquad f(x',0)=f_0(x'),$$

которое легко интегрируется:

$$f(x',t)=\frac{f_0e^{-t}}{\sqrt{1+f_0^2\,[1-e^{-2t}]}}. \tag{2.81}$$

С учетом (2.80) и (2.81) задача (2.77)–(2.79) редуцируется к следующей задаче Неймана для уравнения Лапласа с параметром $t>0$:

$$\triangle\varphi=0,\quad x_3>0,$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{x_3=0}=\frac{f_0(x')e^{-t}}{\sqrt{1+f_0^2(x')\,[1-e^{-2t}]}},\quad f_0(x')\in\mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2),\quad t\geqslant 0.$$

Решение данной задачи в классе убывающих при $|x|\to+\infty$ функций $\varphi(x_1,x_2,x_3,t)$ в силу принципа максимума единственно и имеет вид

$$\varphi=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}dy_1\,dy_2\,\frac{1}{\sqrt{x_3^2+(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}}\times$$

$$\times\,\frac{f_0(y_1,y_2)e^{-t}}{\sqrt{1+f_0^2(y_1,y_2)\,[1-e^{-2t}]}}.$$

§ 3. Разрушение решений — пробой полупроводников

При исследовании построенных начально-краевых задач для уравнений псевдопараболического типа очевидным первым шагом является рассмотрение вопроса о локальной во времени разрешимости в том или ином классе. Причем для некоторых уравнений и соответствующих начально-краевых задач данное исследование может оказаться чрезвычайно сложной задачей, поскольку даже для такого мощного метода, как метод априорных оценок может отсутствовать условие его приме-

нимости — нужные априорные оценки. Кроме того, при наличии локальной во времени разрешимости рассматриваемой начально-краевой задачи могут возникнуть другие проблемы: доказательство глобальной во времени разрешимости либо глобальной во времени неразрешимости. Причем наиболее интересным с математической и с физической точек зрения является результат о разрушении решения, т. е. о глобальной неразрешимости при наличии локальной во времени разрешимости в некотором классе. Особенно остро данная проблема возникает в случае нелинейного оператора при производной по времени. Отметим, что в наших работах [Корпусов] был предложен подход к исследованию именно этого класса начально-краевых задач для уравнений псевдопараболического типа. В дальнейшем мы рассмотрим вопрос о разрушении решений двух различных начально-краевых задач псевдопараболического типа без доказательства локальной разрешимости в нужном нам классе.

Явление пробоя полупроводников заключается в лавинном росте концентрации свободных зарядов. Это паталогическое явление приводит к выходу из строя приборов на основе полупроводников. И основная задача физики полупроводников заключается в выяснении причины возникновения пробоя и создании полупроводниковых приборов с такими параметрами, которые бы обеспечивали определенную стабильность в их работе. С другой стороны, контролируемый рост концентрации свободных зарядов является необходимым условием для создания генераторов электромагнитной энергии. Поэтому необходимо создавать такие приборы на основе полупроводников, которые бы, с одной стороны, гарантировали бы неограниченный рост концентрации свободных зарядов, а с другой стороны, предотвращали пробой. С математической точки зрения пробой полупроводника описывается как разрушение решения той или иной начальной либо начально-краевой задачи за конечное время. Иначе говоря, найдется такой момент времени T_0, зависящий от параметров задачи, до которого решение рассматриваемой задачи принадлежит некоторому функциональному классу, а при $t \geqslant \geqslant T_0$ уже ему не принадлежит.

С точки зрения рассматриваемых нами в данной работе задач возникновение пробоя обусловлено наличием либо источников свободных зарядов от донорных примесей (1.19), либо отрицательности дифференциальной проводимости $\beta < 0$ в уравнении (1.14). В этом параграфе мы рассмотрим две модельные задачи о возникновении пробоя в каждом из этих двух случаев. При этом мы будем предполагать локальную однозначную разрешимость этих задач в нужном нам классе гладкости, хотя, конечно, доказательство локального во времени существования и единственности решения с нужной гладкостью представляет собой, как правило, чрезвычайно сложную задачу. Здесь же мы хотим продемонстрировать лишь сам метод доказательства разрушения решения, который был успешно применен в работах [Корпусов], где, в частности,

были доказаны теоремы о локальной во времени однозначной разрешимости соответствующих задач.

Рассмотрим сначала первую начально-краевую задачу для уравнения (2.39) при $r_4, a_3, a_4 = 0$ (см. [74]):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle u + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right) + |u|^q u = 0, \tag{3.1}$$

$$u(x,t)\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{3.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{3.3}$$

где $p > 2$, $q > 0$, $(x,t) \in \Omega \times (0, \mathrm{T}]$. Уравнение (3.1) будем понимать в смысле $\mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}_0; \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega))$, $p' = p/(p-1)$. Будем предполагать, что найдется такое $\mathrm{T}_0 > 0$, при котором существует единственное решение задачи (3.1)–(3.3) класса

$$u \in \mathbb{L}^\infty([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), \quad u_t' \in \mathbb{L}^2([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)),$$

где $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ — ограниченная область, причем $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$, $\delta \in (0,1]$. С необходимостью имеем: $u_0(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$.

Для удобства введем обозначения

$$v_t' \equiv \frac{\partial v}{\partial t},$$

$$E(t) \equiv \frac{1}{2}\parallel \nabla u \parallel_2^2 + \frac{p-1}{p}\sum_{i=1}^{3}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_p^p, \quad E_0 \equiv E(0),$$

$$B_2 \equiv B_1^{q+2}\left(\frac{p}{p-1}\right)^{(q+2)/p}, \quad \alpha \equiv \frac{q+2}{p},$$

где B_1 — наилучшая постоянная вложения пространств $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$ при условиях $q > 0$, если $p \geqslant 3$, и $0 < q \leqslant (5p-6)/(3-p)$, если $2 < p < 3$, гарантирующих указанное вложение в трехмерном случае (см., например, [Байокки]).

Умножая уравнение (3.1) на $u(x,t)$ и $u_t'(x,t)$, скалярно в смысле скобок двойственности $\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle\cdot,\cdot\rangle$ [151] между банаховыми пространствами $\mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}_0; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$ и $\mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}_0; \mathbb{W}^{1,p'}(\Omega))$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{1,p'}(\Omega)$, после интегрирования по частям, что законно в рассматриваемом классе гладкости, получим

$$\frac{1}{2}\parallel \nabla u \parallel_2^2 + \frac{p-1}{p}\sum_{i=1}^{3}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_p^p =$$

$$= \frac{1}{2} \parallel \nabla u_0 \parallel_2^2 + \frac{p-1}{p} \sum_{i=1}^{3} \left\| \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \right\|_p^p + \int_0^t ds \parallel u \parallel_{q+2}^{q+2} (s),$$

$$\int_0^t ds \left[\parallel \nabla u_s' \parallel_2^2 (s) + \frac{4(p-1)}{p^2} \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega dx \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left| \frac{\partial u_s'}{\partial x_i} \right|^2 \right] +$$

$$+ \frac{1}{q+2} \parallel u_0 \parallel_{q+2}^{q+2} = \frac{1}{q+2} \parallel u \parallel_{q+2}^{q+2} (t).$$

Отсюда в рассматриваемом классе гладкости сразу же выводим, что при $t \in (0, T_0)$ имеют место дифференциальные соотношения

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \parallel \nabla u \parallel_2^2 + \frac{p-1}{p} \sum_{i=1}^{3} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p \right] = \parallel u \parallel_{q+2}^{q+2} (s), \tag{3.4}$$

$$\parallel \nabla u_t' \parallel_2^2 + \frac{4(p-1)}{p^2} \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega dx \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left| \frac{\partial u_t'}{\partial x_i} \right|^2 = \frac{1}{q+2} \frac{d}{dt} \parallel u \parallel_{q+2}^{q+2}. \tag{3.5}$$

Справедливы следующие неравенства:

$$\left| \int_\Omega dx \left(\nabla u_t', \nabla u \right) \right|^2 \leqslant \parallel \nabla u_t' \parallel_2^2 \parallel \nabla u \parallel_2^2, \tag{3.6}$$

$$\left| \int_\Omega dx \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u_t'}{\partial x_i} \right| \leqslant \int_\Omega dx \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-1} \left| \frac{\partial u_t'}{\partial x_i} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^{p/2} \left(\int_\Omega dx \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left| \frac{\partial u_t'}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{1/2}. \tag{3.7}$$

В силу неравенства Шварца (см., например, [Морен]) имеем

$$\sum_{i=1}^{3} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^{p/2} \left(\int_\Omega dx \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left| \frac{\partial u_t'}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{3} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{3} \int_\Omega dx \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left| \frac{\partial u_t'}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{1/2}. \tag{3.8}$$

В силу (3.4)–(3.8) справедлива цепочка неравенств:

$$\left|\langle u,[-\triangle u-\triangle_p u]_t'\rangle\right|^2\leqslant$$

$$\leqslant\left|\langle\nabla u_t',\nabla u\rangle\right|^2+(p-1)^2\left|\sum_{i=1}^3\int\limits_\Omega dx\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u_t'}{\partial x_i}\right|^2+$$

$$+2(p-1)\left|\left(\nabla u_t',\nabla u\right)\right|\left|\sum_{i=1}^3\int\limits_\Omega dx\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u_t'}{\partial x_i}\right|\leqslant\|\nabla u_t'\|_2^2\|\nabla u\|_2^2+$$

$$+(p-1)^2\sum_{i=1}^3\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_p^p\sum_{i=1}^3\int\limits_\Omega dx\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\left|\frac{\partial u_t'}{\partial x_i}\right|^2+2(p-1)\|\nabla u_t'\|_2\times$$

$$\times\|\nabla u\|_2\left(\sum_{i=1}^3\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_p^p\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^3\int\limits_\Omega dx\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\left|\frac{\partial u_t'}{\partial x_i}\right|^2\right)^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\|u\|_2^2+(p-1)\sum_{i=1}^3\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_p^p\right)\times$$

$$\times\left(\|\nabla u_t'\|_2^2+(p-1)\sum_{i=1}^3\int\limits_\Omega dx\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\left|\frac{\partial u_t'}{\partial x_i}\right|^2\right)\leqslant$$

$$\leqslant p\left(\|\nabla u_t'\|_2^2+(p-1)\sum_{i=1}^3\int\limits_\Omega dx\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\left|\frac{\partial u_t'}{\partial x_i}\right|^2\right)\times$$

$$\times\left(\frac12\|\nabla u\|_2^2+\frac{p-1}{p}\sum_{i=1}^3\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_p^p\right).$$

Из (3.4), (3.5) и предыдущего неравенства получим

$$\frac{d^2E}{dt^2}E-\alpha\left(\frac{dE}{dt}\right)^2\geqslant0,\quad\alpha=\frac{q+2}{p}.\tag{3.9}$$

Теперь рассмотрим три случая: $0<\alpha<1$, $\alpha=1$, $1<\alpha$.

В первом случае ($0<\alpha<1$) из (3.9) следует

$$\left(\frac{E_t'}{E^\alpha}\right)'\geqslant0,\quad\frac{E_t'}{E^\alpha}\geqslant\frac{\|u_0\|_{q+2}^{q+2}}{E_0^\alpha},$$

$$E(t)\geqslant\left[E_0^{1-\alpha}+(1-\alpha)\frac{\|u_0\|_{q+2}^{q+2}}{E_0^\alpha}t\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}.\tag{3.10}$$

Рассмотрим теперь второй случай: $\alpha = 1$. Из (3.9) получаем

$$E''_{tt}E - \left(E'_t\right)^2 \geqslant 0, \quad \left(\ln \frac{E'_t}{E}\right)'_t \geqslant 0, \quad E(t) \geqslant E_0 \exp\{\frac{\| u_0 \|^{q+2}_{q+2}}{E_0} t\}. \quad (3.11)$$

Рассмотрим третий случай: $\alpha > 1$. Из (3.9) вытекает

$$\left(\frac{E'_t}{E^\alpha}\right)'_t \geqslant 0, \ \frac{E'_t}{E^\alpha} \geqslant \frac{\| u_0 \|^{q+2}_{q+2}}{E_0^\alpha},$$

$$E \geqslant E_0 \left[1 - (\alpha - 1)\frac{\| u_0 \|^{q+2}_{q+2}}{E_0} t\right]^{-1/(\alpha-1)}. \quad (3.12)$$

Из (3.4) следует

$$\frac{1}{2} \| \nabla u \|^2_2 + \frac{p-1}{p} \sum_{i=1}^{3} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^p_p = \frac{1}{2} \| \nabla u_0 \|^2_2 + \frac{p-1}{p} \sum_{i=1}^{3} \left\| \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \right\|^p_p + \int_0^t ds \ \| u \|^{q+2}_{q+2} (s). \quad (3.13)$$

В силу условий на $p > 2$ и $q > 0$ имеет место вложение $\mathbb{W}^{1,p}_0(\Omega) \subset \subset \mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$. Теперь с учетом (3.13) имеем

$$\| u \|_{q+2} \leqslant B_1 \left(\sum_{i=1}^{3} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^p_p \right)^{1/p},$$

$$\frac{1}{2} \| \nabla u \|^2_2 + \frac{p-1}{p} \sum_{i=1}^{3} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^p_p \leqslant \frac{1}{2} \| \nabla u_0 \|^2_2 + \frac{p-1}{p} \sum_{i=1}^{3} \left\| \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \right\|^p_p + B_1^{q+2} \int_0^t ds \left(\sum_{i=1}^{3} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^p_p \right)^{(q+2)/p} (s).$$

Итак, имеем

$$E(t) \leqslant E_0 + B_2 \int_0^t ds \, E^\alpha(s), \quad (3.14)$$

где

$$\alpha = \frac{q+2}{p}, \quad B_2 \equiv B_1^{q+2} \left(\frac{p}{p-1}\right)^{(q+2)/p}.$$

Используя леммы Гронуолла–Беллмана и Бихари [Демидович], из (3.14) получим

$$E(t) \leqslant \left[E_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)B_2 t)\right]^{1/(1-\alpha)} \quad \text{при } 0 < \alpha < 1, \quad (3.15)$$

$$E(t) \leqslant E_0 \exp\{B_2 t\} \quad \text{при } \alpha = 1, \quad (3.16)$$

$$E(t) \leqslant E_0 \left[1 - (\alpha-1)B_2 E_0^{(\alpha-1)} t\right]^{-1/(\alpha-1)} \quad \text{при } \alpha > 1. \quad (3.17)$$

Из (3.10)–(3.12) и (3.15)–(3.17) вытекает следующее утверждение.

Теорема [Корпусов, 9]. *Пусть существует единственное максимальное решение задачи* (3.1)–(3.3) *класса*

$$u \in \mathbb{L}^{\infty}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), \quad u_t' \in \mathbb{L}^2([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)).$$

Тогда

1) *если* $p > q+2$, *то* $\mathrm{T}_0 = +\infty$:

$$\left[E_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\frac{\| u_0 \|_{q+2}^{q+2}}{E_0^{\alpha}} t\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \leqslant E(t) \leqslant \left[E_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)B_2 t\right]^{\frac{1}{1-\alpha}};$$

2) *если* $p = q+2$, *то* $\mathrm{T}_0 = +\infty$:

$$E_0 \exp\left\{\| u_0 \|_{q+2}^{q+2} E_0^{-1} t\right\} \leqslant E(t) \leqslant E_0 \exp\{B_2 t\};$$

3) *если же* $p < q+2$ *(т. е.* $\alpha > 1$*), то* $\mathrm{T}_0 = \mathrm{T}_0(u_0)$ *таково, что*

$$\limsup_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p = +\infty,$$

$$\mathrm{T}_1 \equiv (\alpha-1)^{-1} B_2^{-1} E_0^{-\alpha+1} \leqslant \mathrm{T}_0 \leqslant (\alpha-1)^{-1} \| u_0 \|_{q+2}^{-q-2} E_0 \equiv \mathrm{T}_2,$$

$$\alpha \equiv \frac{q+2}{p}.$$

Перейдем к интерпретации результатов теоремы. Слагаемое $|u|^q u$ в уравнении (3.1) соотвествует наличию источника тока свободных электронов от донорных примесных центров, которые с точки зрения зонной теории перешли из зоны валентности полупроводникового кристалла в зону проводимости. При этом они потратили определенную энергию для преодоления барьера. Зависимость тензора диэлектрической проницаемости от поля увеличивает энергию барьера и, стало быть, препятствует переходу из зоны валентности в зону проводимости. Сочетание этих двух факторов и приводит либо к пробою полупроводника, либо к постепенному росту энергии электронов, который, при учете тепловых потерь, в свою очередь приводит к разогреву полупроводника [Басс]. Рост энергии электрического поля в данном случае означает, что с некоторого момента времени порядок величины напря-

женности электрического поля окажется сравнимым с внутриатомными электрическими полями. В этом смысле оправдано рассмотрение задач о пробое полупроводника, вызванном наличием источников тока свободных зарядов, при учете зависимости электрической поляризуемости от напряженности электрического поля вида (1.6).

Рассмотрим теперь модельную задачу о возникновении пробоя полупроводника при учете отрицательности дифференциальной проводимости $\beta < 0$ в уравнении (1.14). При этом исследуем самую простую из возможных модельных задач.

Рассмотрим первую начально-краевую задачу для уравнения (2.3) при $\overline{\lambda} = 0,\ a_3 = 1,\ a_4 = -1$:

$$\triangle \frac{\partial u}{\partial t} + \triangle u - \operatorname{div}\left(|\nabla u|^2 \nabla u\right) = 0, \tag{3.18}$$

$$u(x,t)\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{3.19}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{3.20}$$

Уравнение (3.18) будем понимать в смысле $\mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}_0; \mathbb{W}^{-1,4/3}(\Omega))$. Будем предполагать, что найдется такое $\mathrm{T}_0 > 0$, при котором существует единственное максимальное решение задачи (3.18)–(3.20) класса

$$u \in \mathbb{L}^\infty([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega)), \quad u_t^{'} \in \mathbb{L}^2([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega)),$$

где $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ — ограниченная область, причем $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$, $\delta \in (0, 1]$. С необходимостью имеем: $u_0(x) \in \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega)$.

Отметим, что в силу линейности оператора при производной по времени в уравнении (3.18) применим подход, изложенный в работе [Levine, 1]. Однако в данном случае необходимый результат может быть получен непосредственно.

Сделаем замену в уравнении (3.18) $u = e^{-t} v$, тогда получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \triangle v - e^{-2t} \operatorname{div}\left(|\nabla v|^2 \nabla v\right) = 0. \tag{3.21}$$

Умножив обе части уравнения (3.21) скалярно на v и $v_t^{'}$ в смысле скобок двойственности $\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \, \langle \cdot, \cdot \rangle$ [Робертсон] между банаховыми пространствами $\mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}_0; \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega))$ и $\mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}_0; \mathbb{W}^{-1,4/3}(\Omega))$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скобки двойственности между пространствами $\mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-1,4/3}(\Omega)$, после интегрирования по частям в силу указанной гладкости решения задачи (3.18)–(3.20) получим

$$\| \nabla v \|_2^2 = \| \nabla u_0 \|_2^2 + 2 \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \, e^{-2t} \| \nabla v \|_4^4 \, (t),$$

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt\, e^{2t} \parallel \nabla v_t^{'} \parallel_2^2 + \frac{1}{4} \parallel \nabla u_0 \parallel_4^4 = \frac{1}{4} \parallel \nabla v \parallel_4^4 (t).$$

Отсюда сразу же выводим, что в рассматриваемом класе гладкости имеют место следующие соотношения при $t \in (0, \mathrm{T}_0)$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \nabla v \parallel_2^2 = e^{-2t} \parallel \nabla v \parallel_4^4, \tag{3.22}$$

$$\parallel \nabla v_t^{'} \parallel_2^2 = \frac{e^{-2t}}{4}\frac{d}{dt} \parallel \nabla v \parallel_4^4 . \tag{3.23}$$

В силу неравенства Коши–Буняковского имеем

$$\left|\langle \triangle v_t^{'}, v\rangle\right|^2 = \left|\int_\Omega (\nabla v_t^{'}, \nabla v)\, dx\right|^2 \leqslant \parallel \nabla v_t^{'} \parallel_2^2 \parallel \nabla v \parallel_2^2, \tag{3.24}$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$. Из (3.22)–(3.24) приходим к следующему дифференциальному неравенству второго порядка:

$$Ee^{-2t}\frac{d}{dt}\left(e^{2t}\frac{dE}{dt}\right) - 2\left(\frac{dE}{dt}\right)^2 \geqslant 0, \quad E \equiv \parallel \nabla v \parallel_2^2 . \tag{3.25}$$

Из (3.25), разделив обе части на E^3, получим неравенство

$$\frac{E^{''}}{E^2} + 2\frac{E^{'}}{E^2} - 2\frac{(E^{'})^2}{E^3} \geqslant 0,$$

из которого легко следует

$$\left(e^{2t}\frac{E^{'}}{E^2}\right)^{'} \geqslant 0. \tag{3.26}$$

Интегрируя (3.26) с учетом (3.22), получим

$$E \geqslant \left[E_0^{-1} - \frac{\parallel \nabla u_0 \parallel_4^4}{\parallel \nabla u_0 \parallel_2^4}(1 - e^{-2t})\right]^{-1}, \quad E_0 = E(0) = \parallel \nabla u_0 \parallel_2^2 . \tag{3.27}$$

Теперь предположим, что начальное распределение потенциала электрического поля удовлетворяет условию

$$\parallel \nabla u_0 \parallel_4^4 > \parallel \nabla u_0 \parallel_2^2 . \tag{3.28}$$

В силу условия (3.28) из (3.27) следует, что найдется такое T_0, удовлетворяющее оценке сверху

$$T_0 \leqslant -\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{\parallel \nabla u_0 \parallel_2^2}{\parallel \nabla u_0 \parallel_4^4}\right), \tag{3.29}$$

и в силу монотонности $\| \nabla u \|_2^2 (t)$, следующей из (3.22), имеет место выражение

$$\lim_{t \uparrow T_0} \| \nabla u \|_2^2 = +\infty. \tag{3.30}$$

Проанализируем полученные результаты (3.28)–(3.30). С физической точки зрения условие (3.28) означает, что потенциальная энергия системы (3.18)–(3.20) превышает ее кинетическую энергию. И в этом случае наличие отрицательной проводимости приводит к пробою (3.30). Однако вполне возможно, что противоположное условие

$$\| \nabla u_0 \|_4^4 \leqslant \| \nabla u_0 \|_2^2$$

может привести к определенной стабилизации. С математической точки зрения для этого требуется доказать глобальную во времени разрешимость задачи (3.18)–(3.20) при указанном условии, что, на наш взгляд совсем непросто, так как нет необходимой априорной оценки. И, к тому же, для начала требуется доказать локальную во времени разрешимость в том или ином смысле.

Таким образом, мы показали, что источники тока свободных зарядов (1.19) или отрицательности дифференциальной проводимости ($\beta < 0$) в уравнении (1.14) приводят к пробою полупроводников. Впрочем, имеются также факторы, приводящие к некоторой стабилизации.

§ 4. Возникновение и распространение электрических доменов в полупроводниках

При больших отклонениях от равновесия в однородном полупроводнике возникают области сильного (или слабого) электрического поля — *электрические домены* [Бонч-Бруевич, 2]. Эти домены могут быть покоящимися или движущимися. Причем домены движутся в направлении движения основных носителей заряда, например, в случае электронной проводимости движение происходит в направлении, противоположном внешнему электрическому полю. Как правило, время образования и время исчезновения домена в полупроводниках много меньше времени движения домена по полупроводнику. Отметим, что при тех или иных способах наблюдения за движением домена отчетливо видно, что он не меняет своей формы.

Основной причиной возникновения доменов считают наличие падающей ветви вольтамперной характеристики, или, иначе говоря, отрицательность дифференциальной проводимости [Бонч-Бруевич, 1]. Действительно, как мы выяснили в §3, при достаточно большом возмущении распределения потенциала электрического поля в полупроводнике с отрицательной дифференциальной проводимостью возможно возникновение режима лавинного роста напряженности электрического поля. К сожалению, наши рассуждения не позволяют сделать вывода о том, как поточечно будет вести себя напряженность электрического поля в

этом случае. Но сам механизм возникновения домена мы можем рассмотреть. Пусть некоторое начальное распределение потенциала электрического поля, такое что полупроводник, занимающий поверхностно-односвязную ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, можно разделить на две области: D_1 и D_2, замыкание которых $\overline{D}_1$ и $\overline{D}_2$ имеет общую непустую границу $\Gamma \in \mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0,1]$, которая заранее неизвестна и подлежит определению, так что области зависят от Γ. Причем в замкнутой области $\overline{D}_1$ выполнено условие (3.28), а в области $\overline{D}_2$ имеет место противоположное условие. Мы предполагаем, что условие, противоположное (3.28), гарантирует глобальную во времени разрешимость задачи (3.18)–(3.20).

Гипотеза. В этом случае в области D_1 мы будем иметь рост по времени напряженности электрического поля, в то время как в области D_2 напряженность электрического поля будет оставаться ограниченной в последующие моменты времени.

Разумеется, чтобы решить задачу о возникновении электрического домена нужно рассмотреть задачу для уравнения (3.18) в области Ω с условиями сопряжения на переменной границе Γ. И все это с математической точки зрения очень непросто.

Не претендуя на оригинальность, рассмотрим самую простую модельную одномерную задачу о возникновении электрических доменов, показывающую, что наша гипотеза имеет основание. Рассмотрим модельное уравнение (3.18) в одномерном случае на отрезке $x \in \in (0,1)$, которое дополним однородными граничными условиями Неймана $u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$ и начальным условием $u(x,0) = u_0(x)$:

$$u_{xxt} + u_{xx} - \left(|u_x|^2 u_x\right)_x = 0, \tag{4.1}$$

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \tag{4.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x). \tag{4.3}$$

Предположим, что $u_0(x) \in \mathbb{C}^{(2)}[0,1] \cap \{u_{0x}(0) = u_{0x}(1) = 0\}$, а локальное во времени решение задачи (4.1)–(4.3) ищем в классе

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}); \mathbb{C}^{(2)}[0,1] \cap \{u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0\}), \quad \mathrm{T} > 0.$$

Интегрируя уравнение (4.1) по $x \in [0,y]$ в рассматриваемом классе гладкости, получим

$$u_{yt} + u_y - (u_y)^3 = 0, \quad y \in (0,1). \tag{4.4}$$

Поскольку потенциал электрического поля $u(x,t)$ связан с напряженностью поля E соотношением $\mathrm{E} = -u_x$, то уравнение (4.4) можно переписать в виде

$$\mathrm{E}_t + \mathrm{E} - \mathrm{E}^3 = 0, \tag{4.5}$$

которое дополним начальным условием (4.3)

$$\mathrm{E}(0,x) = \mathrm{E}_0(x) \equiv -u_{0x}(x). \tag{4.6}$$

Таким образом, мы редуцировали задачу (4.1)–(4.3) к задаче Коши (4.5), (4.6) с параметром $x \in [0,1]$. Обыкновенное дифференциальное уравнение (4.5) легко интегрируется, и в результате с учетом начального условия (4.6) имеем

$$\mathrm{E} = \frac{\mathrm{E}_0}{\sqrt{1 - \mathrm{E}_0^2\,[1 - e^{-2t}]}}\,e^{-t}. \tag{4.7}$$

Из формулы (4.7) следует, что в тех точках интервала $(0,1)$, где $|\mathrm{E}_0(x)| > 1$, найдется такой момент времени $t_0 = t_0(x)$,

$$t_0 \equiv -\frac{1}{2}\ln\left(1 - \mathrm{E}_0^{-2}(x)\right), \tag{4.8}$$

что имеет место лавинный рост по времени напряженности электрического поля:

$$\lim_{t \uparrow t_0} |\mathrm{E}(x,t)| = +\infty. \tag{4.9}$$

С другой стороны, в точках интервала $(0,1)$, в которых начальная напряженность электрического поля равна по модулю единице, имеем

$$\mathrm{E}(x,t) = \mathrm{E}_0(x). \tag{4.10}$$

Наконец, в тех точках отрезка $[0,1]$, в которых $|\mathrm{E}_0(x)| < 1$, напряженность электрического поля экспоненциально стремится к нулю:

$$|\mathrm{E}(x,t)| \leqslant \frac{|\mathrm{E}_0(x)|}{\sqrt{1 - \mathrm{E}_0^2(x)}}\,e^{-t}. \tag{4.11}$$

Случаи (4.9)–(4.11) как раз и описывают возникновение электрических доменов. Действительно, рассмотрим следующее начальное распределение напряженности электрического поля на отрезке $[0,1]$:

$$\mathrm{E}_0(x) = \begin{cases} \mathrm{E}_0 > 1, & x \in \mathrm{I}_1, \\ \mathrm{E}_0 < -1, & x \in \mathrm{I}_2, \\ \mathrm{E}_0 = \pm 1, & x \in \mathrm{I}_3, \\ |\mathrm{E}_0| < 1, & x \in \mathrm{I}_4, \end{cases}$$

$$\overline{\mathrm{I}}_1 \cup \overline{\mathrm{I}}_2 \cup \overline{\mathrm{I}}_3 \cup \overline{\mathrm{I}}_4 = [0,1], \quad \mathrm{E}_0(x) \in \mathbb{C}^{(1)}[0,1],$$

причем I_1, I_2, I_4 — односвязные открытые множества. В силу (4.8) и (4.9) за конечные времена

$$\overline{t}_+ \equiv \inf\{t_0 : t_0(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(1 - \mathrm{E}_0^{-2}(x)\right),\ x \in \mathrm{I}_1\},$$

$$\overline{t}_- \equiv \inf\{t_0 : t_0(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(1 - \mathrm{E}_0^{-2}(x)\right),\ x \in \mathrm{I}_2\}$$

в области I_1 возникнет режим с обострением с положительной напряженностью электрического поля, в области I_2 — режим с отрицательной напряженностью электрического поля. А на множествах I_3 и I_4 напряженность электрического поля будет оставаться ограниченной. Тем самым в полупроводнике за конечное время $\overline{t} = \min\{\overline{t}_+, \overline{t}_-\}$ возникнут электрические домены. Это время тем меньше, чем больше начальное распределение напряженности электрического поля в областях I_1 и I_2.

Отметим, что стационарные электрические домены представляют собой нетривиальные стационарные решения волновых уравнений, например уравнения (3.18).

Рассмотрим теперь вопрос о распространении электрических доменов. Очевидной причиной движения доменов является внешнее электрическое поле. И если учесть перечиленные опытные факты, становится понятным, что мы имеем дело с уединенными волнами, которые, как известно, распространяются без изменения формы. Остается открытым только вопрос о том, какими волновыми уравнениями описываются уединненые волны, наблюдаемые в эксперименте. Мы напомним волновые уравнения с диссипацией, выведенные в данной главе, учитывающие отрицательную дифференциальную проводимость. Это уравнения (2.2), (2.8), (2.33), (2.38) при $\overline{\lambda} = 0$:

$$\begin{gathered}
\triangle\frac{\partial\varphi}{\partial t} + a_1\frac{\partial\varphi}{\partial x} + a_2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + a_3\triangle\varphi - \overline{a}_4\operatorname{div}\left(|\nabla\varphi|^2\nabla\varphi\right) = 0,\\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle\varphi - a\varphi\right) + a_1\frac{\partial\varphi}{\partial x} + a_2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + a_3\triangle\varphi - \overline{a}_4\operatorname{div}\left(|\nabla\varphi|^2\nabla\varphi\right) = 0,\\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle\varphi + \overline{a}\varphi\right) + a_1\frac{\partial\varphi}{\partial x} + a_2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + a_3\triangle\varphi - \overline{a}_4\operatorname{div}\left(|\nabla\varphi|^2\nabla\varphi\right) = 0,\\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle\varphi + a\operatorname{div}(|\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi) - r_4|\varphi|^{q_1}\varphi\right) +\\
+ a_1\frac{\partial\varphi}{\partial x} + a_2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + a_3\triangle\varphi - \overline{a}_4\operatorname{div}\left(|\nabla\varphi|^2\nabla\varphi\right) = 0.
\end{gathered}$$

Можно предположить, что наблюдаемое в некоторых экспериментах распространение доменов описывается в рамках уединенных волн классическими уравнениями типа Осколкова–Бенджамена–Бона–Махони (2.7) или нелинейными волнами Россби (2.1) при $a_3 = 0$:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle\varphi - a\varphi\right) + a_1\frac{\partial\varphi}{\partial x} + a_2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0,\\
\triangle\frac{\partial\varphi}{\partial t} + a_1\frac{\partial\varphi}{\partial x} + a_2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0.
\end{gathered}$$

Итак, естественно поставить две различные задачи: о возникновении электрического домена и о его движении в полупроводнике. Эти задачи будут предметом наших дальнейших исследований.

§ 5. Математические модели квазистационарных процессов в кристаллических электромагнитных средах с пространственной дисперсией

В случае проводящих сред для адекватного описания в ряде случаев необходимо учитывать пространственную дисперсию рассматриваемых нестационарных процессов. Под пространственной дисперсией понимается нелокальная связь таких характеристик электромагнитной среды, как индукция электрического поля $\mathbf{D}$ и напряженность электрического поля $\mathbf{E}$:

$$\mathrm{D}_i(\mathbf{r}) = \mathrm{E}_i(\mathbf{r}) + \int\limits_{\Omega} \varkappa_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\mathrm{E}_j(\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}',$$

магнитная индукция $\mathbf{B}$ и напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$:

$$\mathrm{B}_i(\mathbf{r}) = \mathrm{H}_i(\mathbf{r}) + \int\limits_{\Omega} \chi_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\mathrm{H}_j(\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}',$$

плотность тока в среде $\mathbf{J}$ и напряженность электрического поля $\mathbf{E}$

$$\mathrm{J}_i(\mathbf{r}) = \int\limits_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\mathrm{E}_j(\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}',$$

где по повторяющимся индексам предполагается суммирование. Заметим, что в данной работе мы будем считать, что ядра

$$\varkappa_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad \chi_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad \sigma_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

интегральных операторов из указанных равенств зависят от разности аргументов $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$:

$$\varkappa_{ij}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad \chi_{ij}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad \sigma_{ij}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|).$$

Область $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, вообще говоря, является произвольной поверхностно-односвязной, ограниченной либо неограниченной, либо совпадающей со всем пространством $\mathbb{R}^3$. Отметим, что в дальнейшем мы будем рассматривать более общую связь параметров электромагнитной среды.

Принципиальное свойство таких сред, как, например, полупроводники, заключается в том, что нестационарные процессы наблюдаемые в них, описываются системой уравнений квазистационарного поля, уравнения неразрывности и материальных уравнений. Причем существенным в их описании является явный вид материальных уравнений, связывающих напряженность $\mathbf{E}$ и индукцию электрического поля $\mathbf{D}$, с одной стороны, и напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ и плотность тока в полупроводнике $\mathbf{J}$ — с другой. Система уравнений в некоторой декартовой системе координат в общем случае имеет вид [Бонч-Бруевич, 2]

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = -4\pi e n, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}, \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{J} + Q, \tag{5.2}$$

где $\mathbf{P}$ — вектор поляризации, $\mathbf{J}$ — плотность электрического тока в среде. В поверхностно-односвязной области Ω можно ввести потенциал φ электрического поля $\mathbf{E}$: $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. В (5.2) Q — источники или стоки свободных зарядов (электронов).

С другой стороны, спиновые волны в магнетиках в отсутствие внешнего магнитного поля описываются в квазистационарном приближении следующей системой уравнений:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}, \tag{5.3}$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \gamma\,[\mathbf{H}, \mathbf{M}] + \mathbf{R}, \tag{5.4}$$

где $\mathbf{M}$ — вектор намагниченности, $\mathbf{R}$ — вектор стоков (или источников) магнитных доменов. В поверхностно-односвязной области Ω можно ввести потенциал ψ магнитного поля $\mathbf{H}$: $\mathbf{H} = -\nabla\psi$.

Отметим, что системы уравнений (5.1), (5.2) и (5.3), (5.4) имеют сходный вид. Хотя, как мы покажем, система уравнений (5.1), (5.2) редуцируется к гораздо большему числу уравнений. Система (5.3), (5.4) чрезвычайно сложна, поэтому в дальнейшем нам необходимо получить более простую систему уравнений. С этой целью сделаем некоторые физические предположения. Представим вектор намагниченности в виде суммы квазистационарного слагаемого $\mathfrak{M}$ и «быстропеременного» слагаемого $\mathbf{m}$ [Кринчик; Гуревич],

$$\mathbf{M} = \mathfrak{M} + \mathbf{m}, \tag{5.5}$$

причем справеливы следующие соотношения:

$$|\mathbf{m}| \ll |\mathfrak{M}|, \quad \left|\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t}\right| \gg \left|\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}\right|.$$

С учетом этих соотношений уравнение (5.4) можно представить в виде

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = \gamma\,[\mathbf{H}, \mathfrak{M}] + \mathbf{R}. \tag{5.6}$$

Относительно величины $\mathfrak{M}$ предположим, что она связана с напряженностью магнитного поля $\mathbf{H}$ в среде некоторым феноменологическим, вообще говоря нелинейным, нелокальным соотношением

$$\mathfrak{M}_i = \widehat{\chi}_{ij}(\mathbf{H})\mathrm{H}_j, \tag{5.7}$$

где $\widehat{\chi}_{ij}$ — некоторые нелинейные интегральные операторы.

В дальнейшем вместо системы уравнений (5.3), (5.4) мы будем рассматривать систему уравнений (5.3),(5.5)–(5.7).

Теперь рассмотрим возможные феноменологические связи характеристик электромагнитных сред. Связь индукции электрического поля $\mathbf{D}$ и плотности электрического тока $\mathbf{J}$ с напряженностью электрического поля $\mathbf{E}$, намагниченности $\mathbf{M}$ с напряженностью магнитного поля $\mathbf{H}$.

Все нелокальные выражения мы будем выписывать для случая $\Omega = \mathbb{R}^3$, а затем переписывать нужные нам соотношения в случае произвольной области Ω.

Начнем с вектора поляризации среды $\mathbf{P}$. В отсутствие внешнего магнитного поля в изотропной среде «хорошим» феноменологичеким соотношением, связывающим вектор поляризации $\mathbf{P}$ с напряженностью электрического поля, учитывающим пространственную дисперсию в среде с сильными полями, является

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3, \tag{5.8}$$

где

$$\mathbf{P}_1 = |\mathbf{E}|^{p-2}\mathbf{E},\ \mathbf{P}_2(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} dy\, \mathrm{S}_1(|x-y|)\mathbf{E}(y,t),\ \operatorname{div}\mathbf{P}_3 = \rho_1(\varphi),$$

$p = 3, 4$. Преобразование Фурье ядра $\mathrm{S}_1(|x|)$ обозначим через $\widehat{\mathrm{S}}_1(\mathbf{k})$. Явный вид первых слагаемых в разложении преобразования Фурье $\widehat{\mathrm{S}}_1(\mathbf{k})$ ядра $\mathrm{S}_1(|x|)$ по степеням $\mathbf{k}$ в случае кристаллов, симметрия которых не допускает естественной оптической активности, имеет в простейшем случае квадратичный вид [Ландау]

$$\widehat{\mathrm{S}}_1(\mathbf{k}) = \varkappa_0|\mathbf{k}|^{\mathbf{2}}.$$

Так что в некотором классе функций $\mathbf{E}(x,t)$ для ядра указанного вида справедливо соотношение

$$\mathbf{P}_2 = -\varkappa_0 \triangle \mathbf{E}. \tag{5.9}$$

Теперь рассмотрим явное выражение для плотности связанных зарядов $\rho_1(\varphi)$. Достаточно хорошим модельным распределением плотности связанных зарядов является степенная функция

$$\rho_1(\varphi) = a_1|\varphi|^{q_1}\varphi,\ \ q_1 > 0,\ \ a_1 > 0. \tag{5.10}$$

Рассмотрим теперь феноменологические соотношения для плотности тока $\mathbf{J}$ в среде, в которой, возможно, имеется внешнее постоянное электрическое поле $\mathbf{E}_0$:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 + \mathbf{J}_3, \tag{5.11}$$

$$\mathbf{J}_1 = \sigma_0|\mathbf{E}|^{p-2}\mathbf{E},\ \ \mathbf{J}_2 = \int\limits_{\mathbb{R}^3} dy\, \mathrm{K}_2(|x-y|)\mathbf{E}(y,t),\ \ \mathbf{J}_3 = \rho_2(\varphi)\mathbf{E}_0, \tag{5.12}$$

где $p = 3, 4$. Обозначим через $\widehat{\mathrm{S}}_2(\mathbf{k})$ преобразование Фурье ядра $\mathrm{K}_2(|x|)$. Мы рассмотрим наиболее распространенное модельное выражение для $\widehat{\mathrm{S}}_2(\mathbf{k}) = \sigma_1|\mathbf{k}|^{-1}$. И тогда для величины $\operatorname{div}\mathbf{J}_2$ в некотором классе гладкости убывающих при $|\mathbf{r}| \to +\infty$ функций $\varphi(x,t)$ получим следующее соотношение:

$$\operatorname{div}\mathbf{J}_2 = \sigma_1(-\triangle)^{1/2}\varphi,\ \ \sigma_1 > 0, \tag{5.13}$$

где мы воспользовались тем, что $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ в рассматриваемой поверхностно-односвязной области. Будем рассматривать случай, когда для ρ_2 имеют место явные выражения

$$\rho_2(\varphi) = a_2|\varphi|^{q_2+1}, \;\; \rho_2(\varphi) = a_2|\varphi|^{q_2}\varphi, \;\; a_2 > 0, \;\; q_2 > 0, \tag{5.14}$$

Теперь рассмотрим модельный вид распределения источников или стоков тока свободных зарядов в среде. Функция $Q = Q(\varphi)$ в уравнении (5.2) зависит от плотности источников с донорных центров кристалической решетки или стоков свободных электронов с акцепторных центров кристаллической решетки и имеет вид, сходный с видами распределений свободных и связанных электронов основных центров кристаллической решетки полупроводника. Мы будем использовать следующее модельное распределение:

$$Q(\varphi) = \lambda|\varphi|^{q_3}\varphi, \;\; q_3 \geqslant 0, \tag{5.15}$$

где $\lambda < 0$ для донорных и $\lambda > 0$ для акцепторных примесных центров соответственно. Очевидно, что $\lambda = 0$ в отсутствие примесных центров.

Рассмотрим явный вид квазистационарной намагниченности $\mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3, \tag{5.16}$$

$$\mathfrak{M}_{1i} = \chi_{ij}\mathrm{H}_j, \;\; \mathfrak{M}_2 = \chi_0\,|\mathbf{H}|^2\,\mathbf{H}, \;\; \mathfrak{M}_3 = \int\limits_{\mathbb{R}^3} dy\,\mathrm{K}_3(|x-y|)\mathbf{H}(y,t). \tag{5.17}$$

Обозначим преобразование Фурье ядра $\mathrm{K}_3(|x|)$ через $\widehat{\mathrm{S}}_3(\mathbf{k})$. Как и в случае ядра $\mathrm{K}_1(|x|)$, первое слагаемое в разложении $\widehat{\mathrm{S}}_3(\mathbf{k})$ по степеням $|\mathbf{k}|$ в некоторых кристаллических средах имеет вид

$$\widehat{\mathrm{S}}_3(\mathbf{k}) = \chi_1|\mathbf{k}|^{\mathbf{2}}. \tag{5.18}$$

Так что в некором классе функций $\mathbf{E}(x,t)$ для ядра указанного вида справедливо соотношение

$$\mathfrak{M}_3 = -\varkappa_0\triangle\mathbf{H}. \tag{5.19}$$

По аналогии со случаем электрической среды, в магнитной среде можно на феноменологическом уровне учесть диссипацию. И нам кажется весьма логичным рассмотреть случай, когда вместо диссипации в магнитной среде имеются «источники» магнитных доменов. Правда, в отличие от электрической среды, рассматриваемые факторы имеют векторный характер. При этом в работах обычно используется кубическое по $\mathbf{H}$ соотношение

$$\mathbf{R} = \lambda_1\,|\mathbf{H}|^2\,\mathbf{H}, \tag{5.20}$$

$\lambda_1 < 0$ для «источников» и $\lambda_1 > 0$ для «стоков».

Мы указали весь набор модельных феноменологических соотношений между параметрами среды.

Рассмотрим теперь возможные граничные условия для систем уравнений (5.1), (5.2) и (5.3),(5.5)–(5.7).

Введем единичный вектор нормали $\mathbf{n}(x)$ к граничной поверхности $\partial\Omega$ раздела двух сред, направленный из области Ω в область $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$. Обозначим через $\partial\Omega^{\pm}$ две стороны ориентированной поверхности $\partial\Omega$, тогда граничные условия для векторов индукции и напряженности электрического поля будут иметь вид (см., например, [Тамм])

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}_1, \mathbf{n}]\Big|_{\partial\Omega^+} - [\mathbf{E}_2, \mathbf{n}]\Big|_{\partial\Omega^-} &= 0, \\ (\mathbf{D}_1, \mathbf{n})\Big|_{\partial\Omega^+} - (\mathbf{D}_2, \mathbf{n})\Big|_{\partial\Omega^-} &= 4\pi\eta\Big|_{\partial\Omega}, \end{aligned} \tag{5.21}$$

где η — поверхностная плотность свободных зарядов на границе $\partial\Omega$.

Для системы уравнений (5.3),(5.5)–(5.7) справедливы аналогичные граничные условия

$$\begin{aligned} [\mathbf{H}_1, \mathbf{n}]\Big|_{\partial\Omega^+} - [\mathbf{H}_2, \mathbf{n}]\Big|_{\partial\Omega^-} &= \tfrac{4\pi}{c}\mathbf{I}, \\ (\mathbf{B}_1, \mathbf{n})\Big|_{\partial\Omega^+} - (\mathbf{B}_2, \mathbf{n})\Big|_{\partial\Omega^-} &= 0, \end{aligned} \tag{5.22}$$

где $\mathbf{I}$ — поверхностная плотность тока. Отметим только, что на границе полупроводник—идеальный проводник в случае «заземленного» проводника граничные условия имеют вид

$$\varphi\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{5.23}$$

и аналогичные краевые условия имеют место для границы раздела магнетик—идеальный проводник:

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{5.24}$$

§ 6. Модельные уравнения псевдопараболического типа в электрических средах с пространственной дисперсией

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые модельные задачи о квазистационарных процессах в электрических средах при учете пространственной дисперсии. При этом часть получающихся уравнений имеют волновой, а часть — диссипативный характер. В этом параграфе мы выведем некоторые уравнения пятого порядка с производной по времени первого порядка псевдопараболического типа, имеющие вид модельных трехмерных уравнений типа Розенау и Розенау–Бюргерса:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\triangle^2 u + \triangle u\right) + u\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\triangle^2 u + \triangle u\right) + u\frac{\partial u}{\partial x_1} + \triangle u = 0.$$

Эти уравнения являются модельными уравнениями волн в средах с сильной пространственной дисперсией. В связи с исследованиями одномерных и многомерных задач Коши и начально-краевых задач для уравнений Розенау и Розенау–Бюргерса смотрите работы [Chung; Liu; Mei; Park].

Рассмотрим сначала модельную задачу о волнах в проводящей среде без пространственной дисперсии диэлектрической проницаемости, но с пространственной дисперсией коэффициента проводимости среды вида (5.12) при наличии «источников» или «стоков» тока свободных зарядов (5.15) и внешнего постоянного электрического поля $\mathbf{E}_0 = -\mathrm{E}_0\mathbf{e}_1$, где $\mathbf{e}_1$ — орт вдоль оси Ox_1. Кроме того, предположим, что задан линейный закон распределения связанных зарядов вида (5.10) с $q_1 = 0$. Тогда из системы уравнений (5.1), (5.2), (5.8), (5.10)–(5.15) получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle\varphi - d_1\varphi\right) - d_2(-\triangle)^{1/2}\varphi + d_3\frac{\partial|\varphi|^{q_2+1}}{\partial x_1} + d_4|\varphi|^{q_3}\varphi = 0, \qquad (6.1)$$

где $d_1 = 4\pi a_1,\ d_2 = 4\pi e\sigma_1,\ d_3 = 4\pi e a_2|\mathrm{E}_0|,\ d_4 = -4\pi e\lambda_1,\ d_1, d_2, d_3 > 0,$ $q_2, q_3 > 0$, $d_4 \in \mathbb{R}_+$. Важным частным случаем уравнения (6.1) является следующее уравнение в безразмерных переменных:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle\varphi - \varphi\right) - (-\triangle)^{1/2}\varphi + \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + d\varphi^3 = 0, \quad d \in \mathbb{R}^1_+, \qquad (6.2)$$

которое можно назвать нелинейным нелокальным уравнением типа Осколкова–Бенджамена–Бона–Махони с кубическим источником ($d > > 0$) или кубическим стоком ($d < 0$).

Если мы теперь учтем пространственную дисперсию диэлектрической проницаемости вида (5.9), то получим следующее уравнение пятого порядка:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-d_5\triangle^2\varphi + \triangle\varphi - d_1\varphi\right) - d_2(-\triangle)^{1/2}\varphi + \\ + d_3\frac{\partial|\varphi|^{q_2+1}}{\partial x_1} + d_4|\varphi|^{q_3}\varphi = 0, \qquad (6.3)$$

где $d_1 = 4\pi a_1,\ d_2 = 4\pi e\sigma_1,\ d_3 = 4\pi e a_2|\mathrm{E}_0|,\ d_4 = -4\pi e\lambda_1,\ d_5 = 4\pi\varkappa_0,$ $d_1, d_2, d_3, d_5, q_2, q_3 > 0,\ d_4 \in \mathbb{R}_+$. Имеет физический смысл и случай, когда $a_1 = 0$ и $\sigma_1 = 0$, и тогда в безразмерных переменных из (6.3) получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\triangle^2\varphi + \triangle\varphi\right) + \frac{\partial|\varphi|^{q_2+1}}{\partial x_1} + d_4|\varphi|^{q_3}\varphi = 0. \qquad (6.4)$$

Выпишем теперь общее уравнение, следующее из системы уравнений (5.1), (5.2), (5.8)–(5.15). Для удобства мы выпишем его сразу же в безразмерных переменных:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-a_1\triangle^2\varphi+\triangle\varphi+a_2\,\mathrm{div}(|\nabla\varphi|^{p_1-2}\nabla\varphi)-a_3|\varphi|^{q_1}\varphi\right)-a_4(-\triangle)^{1/2}\varphi+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(|\varphi|^{q_2+1}\right)+a_5\triangle\varphi+a_6\,\mathrm{div}(|\nabla\varphi|^{p_2-2}\nabla\varphi)+a_7|\varphi|^{q_3}\varphi=0, \quad (6.5)$$

где $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \geqslant 0$, $a_6,\ a_7 \in \mathbb{R}^1$, $q_1, q_2 \geqslant 0$, $p_1, p_2 \geqslant 2$. Из этого общего уравнения помимо (6.1)–(6.4) вытекают следующие частные уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\triangle^2 u+\triangle u\right)+u\frac{\partial u}{\partial x_1}-\mathrm{div}(|\nabla u|^2\nabla u)=0, \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle^2 u-\triangle u\right)+\mathrm{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)=0, \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\triangle^2 u+\triangle u+\mathrm{div}(|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u)\right)-\mathrm{div}(|\nabla u|^{p_2-2}\nabla u)=0, \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\triangle^2 u+\triangle u+\mathrm{div}(|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u)\right)+$$
$$+\triangle u-\mathrm{div}(|\nabla u|^{p_2-2}\nabla u)=0, \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle u+\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\right)-(-\triangle)^{1/2}u+|u|^q u=0, \quad (6.10)$$

где $p, p_1, p_2 > 2,\ q > 0$.

Заметим, что уравнения (6.1)–(6.10) должны быть дополнены граничными условиями (5.21)–(5.24).

§ 7. Модельные уравнения псевдопараболического типа в магнитных средах с пространственной дисперсией

В этом параграфе мы получим модельные уравнения теории спиновых волн. При этом мы учтем наличие пространственной дисперсии.

Рассмотрим сначала простейший случай, когда связь квазистационарной намагниченности $\mathfrak{M}$ с вектором напряженности магнитного поля линейна:

$$\mathfrak{M}_i = a_i \mathrm{H}_i. \quad (7.1)$$

Тогда из системы уравнений (5.3), (5.5)–(5.7) в отсутствие пространственной дисперсии и источников либо стоков магнитных доменов ($\mathbf{R} = \mathbf{0}$) с помощью известных формул векторного анализа с учетом (7.1) следует цепочка преобразований:

$$\mathrm{div}\,\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t}=\gamma\,\mathrm{div}\,[\mathbf{H},\mathfrak{M}]=-\gamma\,(\mathbf{H},\mathrm{rot}\,\mathfrak{M})=-\gamma\beta_1\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\right)-$$
$$-\gamma\beta_2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)-\gamma\beta_3\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right), \quad (7.2)$$

где $\beta_1 = a_2 - a_3$, $\beta_2 = a_3 - a_1$, $\beta_3 = a_1 - a_2$. Заметим, что $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0$ и предположим, что $|\beta_1| + |\beta_2| + |\beta_3| > 0$. Тогда из системы уравнений (5.3), (5.5)–(5.7) с учетом (7.2) получим существенно трехмерное уравнение спиновых волн

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^{3}(1+\alpha_1)\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i^2}\right) + \\ + 4\pi\gamma\Big[\beta_1\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\right) + \beta_2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right) + \\ + \beta_3\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)\Big] = 0,$$

где $\alpha_i = 4\pi a_i$. Данное уравнение эквивалентными преобразованиями может быть сведено к следующему уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial t}\triangle\psi + \beta_1\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\right) + \beta_2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right) + \\ + \beta_3\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right) = 0, \quad (7.3)$$

где $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0$ и $|\beta_1| + |\beta_2| + |\beta_3| > 0$. По всей видимости, уравнение (7.3) является новым. Отметим его существенно трехмерный волновой характер. Было бы чрезвычайно интересно применить к его исследованию групповой подход и найти нетривиальные автомодельные решения. Кроме того, в силу квадратичного вида нелинейности уравнения (7.3) интересно выяснить, имеет ли место «опрокидывание» решений данного уравнения. Отметим, что уравнение (7.3) имеет вид, близкий к существенно двумерному уравнению плоских волн в идеальной несжимаемой жидкости [Габов, 3]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\triangle\psi + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\triangle\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\triangle\psi}{\partial y} = 0.$$

Для данного уравнения в работе [Габов, 3] были изучены вопросы существования решений вида уединенных волн с помощью сведения задачи к исследованию нелинейного уравнения Гаммерштейна. Теперь учтем пространственную дисперсию вида (5.17) и наличие «источников» или «стоков» вида (5.20). Тогда из системы уравнений (5.3), (5.5)–(5.7) приходим к следующему модельному трехмерному уравнению спиновых волн в средах с пространственной дисперсией, в безразмерных переменных имеющему вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\sum_{i=1}^{3}(1+\alpha_i)\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i^2} - \mu_0\triangle^2\psi\right] + \lambda\,\mathrm{div}(|\nabla\psi|^2\nabla\psi) +$$

$$+\beta_1\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\right)+\beta_2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)+\beta_3\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)=0, \tag{7.4}$$

$\lambda\in\mathbb{R}^1$, $\beta_1+\beta_2+\beta_3=0$, $|\beta_1|+|\beta_2|+|\beta_3|>0$. Наконец, выпишем общее нелинейное волновое уравнение, вытекающее из системы уравнений (5.3), (5.5)–(5.7), (5.16)–(5.20) и обобщающее уравнение (7.4):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\sum_{i=1}^{3}(1+\alpha_i)\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i^2}-\mu_0\triangle^2\psi+\operatorname{div}(|\nabla\psi|^2\nabla\psi)\right]+\lambda\operatorname{div}(|\nabla\psi|^2\nabla\psi)+$$
$$+\triangle\psi+\beta_1\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\right)+\beta_2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)+$$
$$+\beta_3\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)=0, \tag{7.5}$$

$\lambda\in\mathbb{R}^1$, $\beta_1+\beta_2+\beta_3=0$, $|\beta_1|+|\beta_2|+|\beta_3|>0$.

Начально-краевые задачи для уравнения (7.5) мы будем рассматривать в шестой главе.

Таким образом, нами рассмотрены некоторые волновые уравнения в различных электромагнитных средах. Причем все уравнения (6.1)–(6.10) в отсутствие внешнего электрического поля становятся чисто диссипативными.

Глава 4

РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЙ КЛАССА СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫХ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИСТОЧНИКАМИ И УРАВНЕНИЙ С НЕЛИНЕЙНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

В четвертой главе рассматриваются две различные абстрактные задачи Коши для уравнений псевдопараболического типа с операторными коэффициентами в банаховых пространствах. Для первой задачи при некоторых условиях на операторные коэффициенты получены необходимые и достаточные условия разрушения решения за конечное время и глобальной во времени разрешимости. Причем в случае разрушения получены оценки снизу и сверху на время разрушения. Наконец, для одной задачи получены оптимальные оценки снизу и сверху на скорость разрушения решения. Для каждой из абстрактных задач приведены примеры физически осмысленных операторных коэффициентов. Детально рассмотрены некоторые модельные задачи. Результаты главы опубликованы в работах [Корпусов, 6–14, 16, 22, 24, 25].

§ 1. Постановка задач

Целью настоящей главы является получение необходимых и достаточных условий разрушения решений класса сильно нелинейных уравнений соболевского типа в абстрактной постановке задачи Коши для уравнения с операторными коэффициентами в банаховых пространствах:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbb{A}_0 u + \sum_{j=1}^{N} \mathbb{A}_j(u)\right) = \mathbb{F}(u), \quad u(0) = u_0, \tag{1.1}$$

и оценок снизу и сверху на время разрушения решений задачи (1.1). Кроме того, целью настоящего исследования является получение оптимальных оценок снизу и сверху на скорость разрушения решений абстрактной задачи Коши

$$\frac{d}{dt}\mathbb{A}_0 u + \mathbb{B}(u) = \mathbb{F}(u), \quad u(0) = u_0. \tag{1.2}$$

Под оптимальными результатами мы понимаем следующее: при определенных входящих параметрах задачи имеет место разрушение решений, а при других условиях — их глобальная разрешимость. В этой

связи мы намеренно сузили класс рассматриваемых уравнений соболевского типа до класса, для которого мы можем получить оптимальные результаты. И, кроме того, мы рассматриваем лишь такие задачи, для которых может быть доказана единственность решения, понимаемого в том или ином смысле.

Приведем примеры некоторых модельных трехмерных сильно нелинейных уравнений соболевского типа, вывод которых содержится в третьей главе:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle u+\sum_{j=1}^{n}\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p_j-2}\nabla u\right)\right)+|u|^{q}u=0, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle u-|u|^{q_1}u\right)+|u|^{q}u=0, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle u+\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)-|u|^{q_1}u\right)+|u|^{q}u=0, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\triangle u-u)+\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+\lambda|u|^{p-2}u=0, \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle^2 u-\triangle u\right)+\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)=0, \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\triangle^2 u+\triangle u+\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u\right)\right)-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p_2-2}\nabla u)=0, \tag{1.8}$$

где $p_j>2$, q_1, $q\geqslant 0$, p_1, p_2, $p>2$, $p_j>2$, $\lambda>0$, $j=\overline{1,n}$.

§ 2. Первоначальные определения и условия

В дальнейшем для произвольного банахова пространства $\mathbb{X}$ через $\mathbb{X}^*$ будем обозначать сопряженное пространство. При $h\in\mathbb{X}^*$ и $u\in\mathbb{X}$ через $\langle h,u\rangle$ обозначим скобки двойственности между пространствами $\mathbb{X}$ и $\mathbb{X}^*$ [Робертсон; Иосида]. Сильную и слабую сходимость будем обозначать соответственно $\to$ и $\rightharpoonup$. Нормы в $\mathbb{X}$ и в $\mathbb{X}^*$ обозначим через $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_*$ соответственно. Кроме того, для двух банаховых пространств $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ символом $\mathbb{X}\hookrightarrow\mathbb{Y}$ будем обозначать компактное вложение $\mathbb{X}$ в $\mathbb{Y}$.

Определение 1. Пусть $\mathbb{X}$ — банахово пространство, D — подмножество $\mathbb{X}$, $\mathbb{A}$ — отображение D в $\mathbb{X}^*$. Тогда $\mathbb{A}$ называется монотонным отображением, если для произвольных $u,v\in\mathrm{D}$ выполнено неравенство

$$\langle\mathbb{A}(u)-\mathbb{A}(v),u-v\rangle\geqslant 0.$$

Определение 2. Пусть $\mathbb{X}$ — банахово пространство, D — подмножество $\mathbb{X}$, $\mathbb{F}$ — отображение D в $\mathbb{X}^*$. Тогда оператор $\mathbb{F}(u)$ называется ограниченно липшиц-непрерывным, если

$$\|\mathbb{F}(u)-\mathbb{F}(v)\|_*\leqslant\mu(\mathrm{R})\,\|u-v\|,\quad \mathrm{R}=\max(\|u\|,\|v\|),\quad\forall\,u,v\in\mathrm{D},$$

где $\mu(\mathrm{R})$ — возрастающая и непрерывная функция, а $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_*$ — нормы соответственно в $\mathbb{X}$ и в $\mathbb{X}^*$.

Определение 3. Функционал $\mathbb{J}$: $\mathrm{D} \in \mathbb{X} \to \mathbb{R}^1$ называется слабо полунепрерывным снизу, если для любой последовательности $u_m \in \mathrm{D}$, слабо сходящейся к $u_0 \in \mathrm{D}$, выполнено неравенство

$$\mathbb{J}(u_0) \leqslant \liminf_{m \to +\infty} \mathbb{J}(u_m).$$

Определение 4. Оператор $\mathbb{A} : \mathrm{D} \subset \mathbb{X} \to \mathbb{X}^*$ называется полунепрерывным на D, если для любых $u, v, w \in \mathrm{D}$ функция $\lambda \to \langle \mathbb{A}(u + \lambda v), w\rangle$ непрерывна как функция из $\mathbb{R}^1$ в $\mathbb{R}^1$.

Определение 5. Оператор $\mathbb{F}(u) : \mathrm{D} \subseteq \mathbb{X} \to \mathbb{X}^*$ называется усиленно непрерывным, если, какова бы ни была последовательность $u_m \in$ $\in \mathrm{D}$, слабо сходящаяся к $u_0 \in \mathrm{D}$, имеем

$$\lim_{m \to +\infty} \| \mathbb{F}(u_m) - \mathbb{F}(u) \|_* = 0.$$

Определение 6. Если в точке $u \in \mathrm{D} \subset \mathbb{X}$, D — выпуклое множество, имеет место равенство

$$\mathbb{F}(u + h) - \mathbb{F}(u) = \Gamma(u, h) + \omega(u, h),$$

где $\Gamma(u, h)$ — линейный оператор от $h \in \mathbb{X}$ и при фиксированном $u \in$ $\in \mathrm{D} \subset \mathbb{X}$

$$\lim_{\|h\| \to +0} \frac{\| \omega(u, h) \|_*}{\| h \|} = 0,$$

то $\Gamma(u, h)$ называется дифференциалом Фреше и обозначается $\mathbf{d}\mathbb{F}(u, h)$.

Определение 7. Мы скажем, что оператор $\mathbb{F}(u)$ имеет на множестве w локально равномерный дифференциал Фреше $\mathbf{d}\mathbb{F}(u, h)$, если каждому $\varepsilon > 0$ и произвольному $u_0 \in w$ отвечают такие положительные числа $\eta(\varepsilon, u_0)$ и $\delta(\varepsilon, u_0)$, что для всякого u_0 из шара $\mathbb{U}(u_0, \eta)$ имеет место неравенство

$$\| \omega(u, h) \|_* < \varepsilon \| h \|,$$

если $\| h \| < \delta$.

Определение 8. Симметрическим мы назовем линейный оператор $\mathbb{A}$, действующий из рефлексивного банахова пространства $\mathbb{X}$ в сопряженное $\mathbb{X}^*$, если для любых $u, v \in \mathbb{X}$ выполнено соотношение

$$\langle \mathbb{A}u, v\rangle = \langle \mathbb{A}v, u\rangle.$$

Приведем необходимые для дальнейшего определения, предположения и вспомогательные результаты (см., например, [Гаевский]).

Пусть банаховы пространства $\mathbb{V}_i$, $\mathbb{V}_0$, $\mathbb{W}_0$, $\mathbb{W}_1$ бесконечномерны, сепарабельны и рефлексивны с соответствующими сопряженными банаховыми пространствами $\mathbb{V}_i^*$, $\mathbb{V}_0^*$, $\mathbb{W}_0^*$, $\mathbb{W}_1^*$ относительно скобок двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle_i$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$, $(\cdot,\cdot)_0$, $(\cdot,\cdot)_1$, $i = \overline{1, N}$. Обозначим через $\|\cdot\|_j$, $j = \overline{0, N}$, нормы банаховых пространств $\mathbb{V}_j$, а через $\|\cdot\|_j^*$ — нормы

банаховых пространств $\mathbb{V}_j^*$. Нормы банаховых пространств $\mathbb{W}_i$, $i = 0, 1$, обозначим через $|\cdot|_i$, а нормы банаховых пространств $\mathbb{W}_i^*$ — через $|\cdot|_i^*$. Пусть $\mathbb{H}$ — гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным. Далее мы предположим, что выполнены следующие условия.

Условия (V).

1. Пусть $\mathbb{V}_i$, $i = \overline{0, N}$, непрерывно вложены в $\mathbb{H}$.
2. Для сильно сопряженного к банахову относительно нормы

$$\|\cdot\| = \sum_{i=0}^{N} \|\cdot\|_i,$$

рефлексивному пространству

$$\mathbb{V} \equiv \bigcap_{i=0}^{N} \mathbb{V}_i$$

справедливо явное выражение

$$\mathbb{V}^* = \biguplus_{i=0}^{N} \mathbb{V}_i^*.$$

3. Справедливы следующие цепочки непрерывных вложений:

$$\mathbb{V} \subseteq \mathbb{V}_i \subseteq \mathbb{H} \subseteq \mathbb{V}_i^* \subseteq \mathbb{V}^*, \quad i = \overline{0, N},$$
$$\mathbb{V} \subseteq \mathbb{W}_j \subseteq \mathbb{H} \subseteq \mathbb{W}_j^* \subseteq \mathbb{V}^*, \quad j = \overline{0, 1}.$$

4. Пространство $\mathbb{V}$ бесконечномерное и сепарабельное.

Замечание 1. Из условия **V** 1. вытекает, что пересечение

$$\mathbb{V} \equiv \bigcap_{i=0}^{N} \mathbb{V}_i,$$

наделенное нормой

$$\|\cdot\| = \sum_{i=0}^{N} \|\cdot\|_i,$$

можно сделать банаховым пространством.

Обозначим через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}^*$.

Пусть операторы $\mathbb{A}_i$, $\mathbb{A}_0$, $\mathbb{F}$, $\mathbb{B}$ определены на пространствах $\mathbb{V}_i$, $\mathbb{V}_0$, $\mathbb{W}_0$, $\mathbb{W}_1$ со значениями в сопряженных пространствах:

$$\mathbb{A}_i : \mathbb{V}_i \to \mathbb{V}_i^*, \quad \mathbb{A}_0 : \mathbb{V}_0 \to \mathbb{V}_0^*, \quad \mathbb{F} : \mathbb{W}_0 \to \mathbb{W}_0^*, \quad \mathbb{B} : \mathbb{W}_1 \to \mathbb{W}_1^*, \quad i = \overline{1, N}.$$

Причем области значений операторов $\mathbb{A}_j$ совпадают с соответствующими банаховыми пространствами $\mathbb{V}_j^*$, $j = \overline{0, N}$.

Введем некоторые условия на операторные коэффициенты уравнений (1.1) и (1.2).

Условия (A).

1. Пусть операторы $\mathbb{A}_j : \mathbb{V}_j \to \mathbb{V}_j^*$, $j = \overline{1, N}$, являются монотонными, полунепрерывными операторами.
2. Операторы $\mathbb{A}_j$ имеют симметричную производную Фреше для любого фиксированного $u \in \mathbb{V}_j$:

$$\mathbb{A}_{j,u}^{'}(u) : \mathbb{V}_j \to \mathcal{L}(\mathbb{V}_j, \mathbb{V}_j^*), \quad j = \overline{1, N},$$

неотрицательно определенную, и, кроме того, производная Фреше является полунепрерывной в каждом $\mathbb{V}_j$ в том смысле, что, каковы бы ни были $u, v, h_1, h_2 \in \mathrm{D} \subset \mathbb{V}_j$, $j = \overline{1, N}$, и $\lambda \in \mathbb{R}^1$, функция $\langle \mathbb{A}_{j,u}^{'}(u + \lambda v)h_1, h_2 \rangle_j$ непрерывна как функция из $\mathbb{R}^1$ в $\mathbb{R}^1$ относительно λ.

3. Справедливы неравенства снизу и сверху

$$\| \mathbb{A}_j(u) \|_j^* \leqslant \mathrm{M}_j \| u \|_j^{p_j - 1}, \quad \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j \geqslant \mathrm{m}_j \| u \|_j^{p_j},$$

$p_j > 2$, $\quad j = \overline{1, N}$, $\quad \mathrm{M}_j > 0 \quad$ и $\mathrm{m}_j > 0$.

4. $\langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j^{1/p_j}$ — полунормы в банаховых пространствах $\mathbb{V}_j$.
5. Операторы $\mathbb{A}_j$ положительно однородные порядка $p_j - 1$:

$$\mathbb{A}_j(sv) = s^{p_j - 1}\mathbb{A}_j(v), \quad s > 0.$$

Условия (A_0).

1. $\langle \mathbb{A}_0 u - \mathbb{A}_0 v, u - v \rangle_0 \geqslant m_0 \| u - v \|_0^2$ для любых $u, v \in \mathbb{V}_0$, $m_0 > 0$ — постоянная.
2. Оператор $\mathbb{A}_0$ симметричен.
3. Оператор $\mathbb{A}_0 : \mathbb{V}_0 \to \mathbb{V}_0^*$ удовлетворяет условию

$$\| \mathrm{Au} \|_0^* \leqslant \mathrm{M}_0 \| \mathrm{u} \|_0,$$

$\mathrm{M}_0 > 0$ — постоянная.

4. $\langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0^{1/2}$ — полунорма на $\mathbb{V}_0$.

Условия (F).

1. Оператор $\mathbb{F}(u) : \mathbb{W}_0 \to \mathbb{W}_0^*$ является ограниченно липшиц-непрерывным:

$$| \mathbb{F}(u) - \mathbb{F}(v) |_0^* \leqslant \mu(\mathrm{R}) | u - v |_0, \quad \mathrm{R} = \max(| u |_0, | v |_0),$$

где $\mu(R)$ — возрастающая и непрерывная функция.

2. Оператор $\mathbb{F}(u)$ дифференцируем по Фреше и имеет симметричную производную при любом фиксированном $u \in \mathbb{W}_0$.
3. Для любых $s > 0$ и $v \in \mathbb{W}_0$, $\mathbb{F}(sv) = s^{1+q}\mathbb{F}(v)$, $q > 0$.
4. Справедливо неравенство сверху

$$| \mathbb{F}(u) |_0^* \leqslant \mathrm{B} | u |_0^{q+1}, \quad \mathrm{B} > 0.$$

Условия (B).

1. Пусть оператор $\mathbb{B} : \mathbb{W}_1 \to \mathbb{W}_1^*$ является монотонным полунепрерывным.
2. Справедливы неравенства снизу и сверху

$$| \mathbb{B}(u) |_1^* \leqslant \mathrm{C} \mid u \mid_1^{q+1}, \quad (\mathbb{B}(u), u)_1 \geqslant \mathrm{c} \mid u \mid_1^{q+2}, \quad q > 0,$$

   $\mathrm{C} > 0$ и $\mathrm{c} > 0$.
3. $(\mathbb{B}(u), u)_1^{1/(q+2)}$ — полунорма на $\mathbb{W}_1$.
4. Оператор $\mathbb{B}$ положительно однородный порядка $q+1$:

$$\mathbb{B}(sv) = s^{q+1}\mathbb{B}(v), \quad s > 0.$$

5. Оператор $\mathbb{B}$ имеет симметричную производную Фреше при любом фиксированном $u \in \mathbb{W}_1$:

$$\mathbb{B}_u'(u) : \mathbb{W}_1 \to \mathcal{L}(\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_1^*).$$

Отметим, что из условий A_0 следует, что величина $\langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0^{1/2}$ является нормой на $\mathbb{V}_0$.

§ 3. Однозначная разрешимость задачи (1.1) в слабом обобщенном смысле и разрушение ее решения

Определение 9. Слабым обобщенным решением абстрактной задачи Коши (1.1) назовем решение, удовлетворяющее условиям

$$\int_0^{\mathrm{T}} \varphi(t) \left[\frac{d}{dt} \sum_{j=0}^{N} \langle \mathbb{A}_j(u), w\rangle_j - (\mathbb{F}(u), w)_0 \right] dt = 0 \tag{3.1}$$

$$\forall \ w \in \mathbb{V}, \ \ \forall\, \varphi \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}),$$

$$u(0) = u_0 \in \mathbb{V}.$$

Решение задачи (3.1) ищется в классе

$$u(t) \in \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}), \quad \frac{du}{dt} \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_0),$$

$$\mathbb{A}_j(u) \in \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_j^*), \ j = \overline{0, N}, \ \ \frac{d}{dt}\mathbb{A}(u) = \frac{d}{dt}\sum_{j=0}^{N} \mathbb{A}_j(u) \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}^*),$$

и, кроме того,

$$\mathbb{A}(u) = \sum_{j=0}^{N} \mathbb{A}_j(u) \in \mathbb{C}_w^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}^*),$$

т. е. оператор $\mathbb{A}(u)$ является сильно абсолютно непрерывным и слабо дифференцируемым на сегменте $[0, \mathrm{T}]$. Поэтому в силу свойств (A), (A_0) и (F) и условий нижеследующей теоремы 1 получаем, что

$$\mathbb{A}(u) = \sum_{j=0}^{N} \mathbb{A}_j(u) \in \mathbb{H}^1(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}^*), \quad \mathbb{F}(u) \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}^*),$$

$$\mathbb{A}(u) = \sum_{j=0}^{N} \mathbb{A}_j(u) \in \mathbb{C}_w^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}^*).$$

Тем самым задача (3.1) в силу условий **V** и условий нижеследующей теоремы 1 эквивалентна следующей задаче:

$$\int_0^{\mathrm{T}} \varphi(t) \left[\frac{d}{dt} \sum_{j=0}^{N} \langle \mathbb{A}_j(u), w \rangle - \langle \mathbb{F}(u), w \rangle \right] dt = 0 \; \forall \; w \in \mathbb{V}, \; \forall \; \varphi(t) \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}),$$

$$u(0) = u_0 \in \mathbb{V},$$

где символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначена скобка двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}^*$.

Используя результат §12 Приложения Б, приходим к выводу, что задача (3.1) эквивалентна следующей задаче:

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt \left[\left\langle \frac{d}{dt} \mathbb{A}(u), v \right\rangle - \langle \mathbb{F}(u), v \rangle \right] = 0 \;\; \forall \;\; v \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}), \;\; u(0) = u_0 \in \mathbb{V}.$$

Действительно, нам достаточно проверить, что для $h \equiv \mathbb{A}(u)$ имеет место соотношение

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt \, \varphi(t) \frac{d}{dt} \langle h, w \rangle = \int_0^{\mathrm{T}} dt \, \varphi(t) \langle h', w \rangle \;\; \forall \; w \in \mathbb{V}.$$

Для доказательства этого соотношения рассмотрим следующее разностное равенство:

$$\frac{1}{\alpha} \left[\langle h(t+\alpha), w \rangle - \langle h(t), w \rangle \right] = \left\langle \frac{h(t+\alpha) - h(t)}{\alpha}, w \right\rangle \;\; \forall \;\; t, t+\alpha \in (0, \mathrm{T}).$$

Предел правой части в силу условия $h \in \mathbb{C}_w^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}^*)$ при $\alpha \to +0$ существует. Значит, существует предел левой части. По теореме Лебега получаем требуемый результат.

Теперь мы укажем, в каком месте доказательства нам требуется условие $h \equiv \mathbb{A}(u) \in \mathbb{H}^1(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}^*) \cap \mathbb{C}_w^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}^*)$. Это условие достаточно для доказательства того, чтобы

$$\langle h, w \rangle \in \mathbb{H}^1(0, \mathrm{T}) \subset \mathbb{AC}([0, \mathrm{T}]) \;\; \forall \; w \in \mathbb{V},$$

и, значит, справедлива формула интегрирования по частям:

$$\langle h, w\rangle(t) = \langle h(0), w\rangle + \int\limits_0^t ds\, \frac{d}{ds}\langle h(s), w\rangle \ \ \forall\, w \in \mathbb{V}.$$

Действительно, в силу того что $h(t) \in \mathbb{H}^1(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}^*)$, справедливы следующие оценки:

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\ |\langle h(t), w\rangle| \leqslant \left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\ \| h(t) \|^{*2}\right)^{1/2} \mathrm{T}^{1/2} \| w \|,$$

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\ \left|\left\langle h'(t), w\right\rangle\right| \leqslant \left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\ \| h'(t) \|^{*2}\right)^{1/2} \mathrm{T}^{1/2} \| w \| .$$

Наконец, условие $h(t) \in \mathbb{C}_w^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}^*)$ достаточно для того, чтобы имело место для почти всех $t \in (0, \mathrm{T})$ равенство

$$\frac{d}{dt}\langle h(t), w\rangle = \left\langle h'(t), w\right\rangle \ \ \forall\, w \in \mathbb{V}.$$

Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 1. О необходимом и достаточном условии разрушения решения. *Пусть выполнены условия* (A), (A_0), (F). *Предположим, что* $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$, *т. е. оператор вложения вполне непрерывен. Пусть, кроме того,* $\mathbb{V}_0 \subseteq \mathbb{W}_0$. *Предположим, что либо* $2 < \overline{p} < q + 2$, *либо* $\overline{p} \geqslant q + 2$ *и в последнем случае* $\mathbb{V}_{j^*} \subseteq \mathbb{W}_0$, *где*

$$\overline{p} = \max_{j \in \overline{1,N}} p_j, \quad j^* \in \overline{1, N}, \quad p_{j^*} = \overline{p}.$$

Пусть выполнено неравенство

$$(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > 0.$$

Тогда для любого $u_0 \in \mathbb{V}$ *найдется такое максимальное* $\mathrm{T}_0 \equiv \mathrm{T}_{u_0} > 0$, *что задача Коши* (1.1) *имеет единственное слабое обобщенное решение класса*

$$u(t) \in \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}), \quad \frac{du}{dt}(t) \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_0),$$

$$\mathbb{A}(u) = \sum_{j=0}^{N} \mathbb{A}_j(u) \in \mathbb{H}^1(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}^*) \cap \mathbb{C}_w^1([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}^*) \ \ \forall\, \mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0).$$

Причем справедливы следующие двусторонние оценки для положительно определенной в силу условий $(\mathrm{A})_0$ 2 *и* (A) 3 *функции, имеющей смысл кинетической энергии*:

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u), u\rangle_j$$

в трех случаях относительно возможных значений величины

$$\alpha \equiv \frac{q+2}{\overline{p}}, \quad \overline{p} \equiv \max_{j=\overline{1,N}} p_j \ :$$

1) *если* $\alpha = 1$, *то* $\mathrm{T}_0 = +\infty$ *и*

$$\Phi_0 \exp\{\mathbb{E}_0 t\} \leqslant \Phi(t) \leqslant \Phi_0 \exp\{\mathrm{C}_2 t\};$$

2) *если* $\alpha \in (0,1)$, *то* $\mathrm{T}_0 = +\infty$ *и*

$$\Phi_0 \left[1 + (1-\alpha)\mathbb{E}_0 \Phi_0^{\alpha-1} t\right]^{1/(1-\alpha)} \leqslant$$
$$\leqslant \Phi(t) \leqslant \Phi_0 \left[1 + (1-\alpha)\mathrm{C}_2 \Phi_0^{\alpha-1} t\right]^{1/(1-\alpha)};$$

3) *если* $\alpha > 1$, *то*

$$\limsup_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \Phi(t) = +\infty, \quad \mathrm{T}_1 \leqslant \mathrm{T}_0 \leqslant \mathrm{T}_2,$$

где

$$\mathrm{C}_2 \equiv \mathrm{BC}_{j^*}^{q+2} \left(\frac{\overline{p}}{\overline{p}-1}\right)^{(q+2)/\overline{p}}, \quad |\ v\ |_0 \leqslant \mathrm{C}_{j^*} \langle \mathbb{A}_{j^*}(v), v\rangle_{j^*}^{1/p_{j^*}}, \quad \overline{p} = \max_{j=1,N} p_j,$$

$$\Phi_0 \equiv \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0\rangle_j, \quad \mathbb{E}_0 \equiv \frac{(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0}{\Phi_0^{\alpha}},$$

$$\mathrm{T}_2 \equiv \frac{1}{\alpha - 1} \frac{\Phi_0}{(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0},$$

$$\mathrm{T}_1 = (q/2)^{-1} \Phi_0^{-q/2} \overline{\mathrm{B}}^{-1}, \quad \overline{\mathrm{B}} \equiv \mathrm{BC}_1^{q+2} 2^{(q+2)/2},$$

C_1 — *константа наилучшего вложения* $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$, B — *константа из условия* (F)4.

Доказательство.

Замечание 2. Поскольку решение принадлежит классу

$$u(t) \in \mathbb{L}^{\infty}(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}), \quad \frac{du}{dt} \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_0),$$

то после возможного изменения на множестве нулевой меры Лебега отображение $u(t) : [0, \mathrm{T}] \to \mathbb{V}_0$ непрерывно. Стало быть, имеет смысл начальное условие $u(0) = u_0$.

Доказательство теоремы проведем в несколько шагов, заключающихся в построении галеркинских приближений, априорных оценок, применении метода монотонности, доказательстве единственности решения и разрушения решения. Тем самым будет дано полное доказательство сформулированной теоремы 1. Перейдем к выполнению предложенной программы доказательства теоремы.

Шаг 1. *«Галеркинские» приближения.*

В силу сепарабельности банахова пространства $\mathbb{V}$ найдется счетная всюду плотная в $\mathbb{V}$ линейно независимая система функций $\{w_i\}_{i=1}^{m}$.

Будем доказывать разрешимость задачи (3.1) методом Галеркина в сочетании с методами монотонности и компактности [Лионс, 1].

Сначала рассмотрим следующую конечномерную аппроксимацию задачи (3.1):

$$\int_0^{\mathrm{T}} \Big[\frac{d}{dt}\langle \mathbb{A}_0 u_m, w_k\rangle_0 + \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N}\langle \mathbb{A}_j(u_m), w_k\rangle_j - \\ - (\mathbb{F}(u_m), w_k)_0\Big]\varphi(t)\,dt = 0 \quad (3.2)$$

$$\forall\ \varphi(t) \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T}),\quad k = \overline{1,m},$$
$$u_m = \sum_{i=1}^{m} c_{mi}(t) w_i,\quad u_{m0} = \sum_{i=1}^{m} c_{mi}(0) w_i,$$
$$c_{mi}(0) = \alpha_{mi},\quad u_{m0} \to u_0 \ \text{ сильно в } \ \mathbb{V}.$$

В классе $c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}_{m0}])$ в силу (3.2) приходим к равенству

$$\int_0^{\mathrm{T}} \left(\sum_{i=1}^{m} c_{mi}^{'} \left[\langle \mathbb{A}_0 w_i, w_k\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \langle \mathbb{A}_{j,u_m}^{'}(u_m) w_i, w_k\rangle_j \right] - \\ - (\mathbb{F}(u_m), w_k)_0)\varphi(t) \right) dt = 0.$$

Ниже мы докажем непрерывность по $t \in [0,\mathrm{T}]$ функционалов $f_j \equiv \equiv \langle \mathbb{A}_{j,u_m}^{'}(u_m) w_i, w_k\rangle_j$. Стало быть, выражение в фигурных скобках принадлежит к классу $\mathbb{C}[0,\mathrm{T}]$. В силу очевидного вложения $\mathbb{C}_0^{\infty}[0,\mathrm{T}] \subset \subset \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T})$ и основной леммы вариационного исчисления приходим к поточечному для всех $t \in [0,\mathrm{T}]$ равенству

$$\sum_{i=1}^{m} c_{mi}^{'} \left[\langle \mathbb{A}_0 w_i, w_k\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \langle \mathbb{A}_{j,u_m}^{'}(u_m) w_i, w_k\rangle_j \right] = (\mathbb{F}(u_m), w_k)_0, \quad (3.3)$$

где $k = \overline{1,m}$. Введем обозначение

$$a_{ik} \equiv \langle \mathbb{A}_0 w_i, w_k\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \langle \mathbb{A}_{j,u_m}^{'}(u_m) w_i, w_k\rangle_j\,.$$

Очевидно, что

$$\sum_{i,k=1,1}^{m,m} a_{ik}\xi_i\xi_k = \langle \mathbb{A}_0\eta,\eta\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N}\langle \mathbb{A}'_{j,u_m}(u_m)\eta,\eta\rangle_j \geqslant \langle \mathbb{A}_0\eta,\eta\rangle_0,\ \ \eta=\sum_{i=1}^{m}\xi_i w_i,$$

поскольку $\mathbb{A}_0$ — положительно определенный оператор, а значит $\langle \mathbb{A}_0\eta,\eta\rangle_0 \geqslant 0$, причем равенство $\langle \mathbb{A}_0\eta,\eta\rangle_0 = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $\eta = 0$. С другой стороны,

$$\eta \equiv \sum_{i=1}^{m}\xi_i w_i,$$

и в силу линейной независимости системы функций $\{w_i\}_{i=1}^m$ в $\mathbb{V}$ приходим к выводу, что $\eta = 0$ тогда и только тогда, когда $\{\xi_i\}_{i=1}^m = \mathbf{0}$. Отсюда и из работы [Постников] получим, что $\det\{a_{ik}\}_{i,k=1,1}^{m,m} > 0$.

Докажем теперь, что функционалы $f_j \equiv \langle \mathbb{A}'_{j,u_m}(u_m)w_i, w_k\rangle_j$ являются непрерывными по совокупности переменных $c_{mi},\ \ i=\overline{1,m}$. Действительно, пусть $\overline{c}_{m1},...,\overline{c}_{mm}$ — некоторая точка эвклидова пространства $\mathbb{R}^m$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned}|f_j(\overline{c}_{m1},...,\overline{c}_{mm}) - f_j(c_{m1},...,c_{mm})| \leqslant \\ \leqslant |f_j(\overline{c}_{m1},...,\overline{c}_{mm}) - f_j(c_{m1},\overline{c}_{m2},...,\overline{c}_{mm})| + \\ + |f_j(c_{m1},\overline{c}_{m2},...,\overline{c}_{mm}) - f_j(c_{m1},c_{m2},\overline{c}_{m3},...,\overline{c}_{mm})| + \\ + |f_j(c_{m1},c_{m2},\overline{c}_{m3}...,\overline{c}_{mm}) - f_j(c_{m1},c_{m2},c_{m3},...,\overline{c}_{mm})| + ... \\ ... + \left|f_j(c_{m1},c_{m2},...,c_{(m-1)m},\overline{c}_{mm}) - f_j(c_{m1},...,c_{mm})\right|. \quad (3.4)\end{aligned}$$

В силу условия (A)2 найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$ что каждое из слагаемых в правой части неравенства (3.4) при условии

$$\sum_{k=1}^{m}|\overline{c}_{mk} - c_{mk}| \leqslant \delta(\varepsilon),$$

меньше величины $\varepsilon/(m+1)$. Докажем теперь липшиц-непрерывность функционалов $f_{0k} = (\mathbb{F}(u_m), w_k)_0$ по совокупности переменных $\{c_{mi}\}_{i=1}^m$. Пусть

$$u_j = \sum_{i=1}^{m} c_{mi}^j w_i,\ \ j=1,2.$$

В силу условия (F)1 справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned}\left|(\mathbb{F}(u_1) - \mathbb{F}(u_2), w_k)_0\right| \leqslant |\ \mathbb{F}(u_1) - \mathbb{F}(u_2)\ |_0^*|\ w\ |_0 \leqslant \\ \leqslant B\ |\ u_1 - u_2\ |_0 \leqslant B_1\sum_{l=1}^{m}|c_{ml}^1 - c_{ml}^2|.\end{aligned}$$

Тем самым функции $f_{0k} = f_{0k}(c_{m1}, ..., c_{mm})$ являются липшиц-непрерывными и тем более непрерывными по совокупности переменных. Стало быть, система обыкновенных дифференциальных уравнений (3.3) является системой типа Коши–Ковалевской и удовлетворяет условиям, гарантирующим ее разрешимость на некотором сегменте $[0, \mathrm{T}_{m0}]$, $\mathrm{T}_{m0} > 0$, в классе $c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^1([0, \mathrm{T}_{m0}])$, $k = \overline{1, m}$ (см., например, [Петровский]).

Шаг 2. *Априорные оценки.*

Справедлива следующая лемма.

Л е м м а 1. *Найдется такое* $\mathrm{T} > 0$, *не зависящее от* $m \in \mathbb{N}$, *что для последовательности* $\{u_m\}$ *галеркинских приближений справедливы следующие свойства равномерно по* $m \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{gathered}
u_m \ \textit{ограничено в} \ \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}); \\
u_m^{'} \ \textit{ограничено в} \ \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_0); \\
\mathbb{A}_0 u_m \ \textit{ограничено в} \ \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_0^*); \\
\mathbb{A}_j(u_m) \ \textit{ограничено в} \ \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_j^*); \\
\mathbb{F}(u_m) \ \textit{ограничено в} \ \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_0^*).
\end{gathered}
$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Умножим обе части равенства (3.3) на $c_{mk}(t)$ и просуммируем по $k = \overline{1, m}$, тогда получим

$$
\langle \mathbb{A}_0 u_m^{'}, u_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \langle \mathbb{A}_{j, u_m}^{'}(u_m) u_m^{'}, u_m \rangle_j = (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0 \,. \tag{3.5}
$$

С другой стороны, в силу того что $u_m = \sum\limits_{k=1}^{N} c_{mk}(t) w_k \in \mathbb{C}^1([0, \mathrm{T}_m]; \mathbb{V})$, а также условий (A), справедлива цепочка равенств (см., например, [Levine, 1])

$$
\begin{gathered}
\frac{d}{dt} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j = p_j \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_{mt}^{'} \rangle_j, \\
\langle (\mathbb{A}_j(u_m))_t^{'}, u_m \rangle_j + \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_{mt}^{'} \rangle_j = p_j \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_{mt}^{'} \rangle_j, \\
\langle (\mathbb{A}_j(u_m))_t^{'}, u_m \rangle_j = (p_j - 1) \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_{mt}^{'} \rangle_j = \frac{p_j - 1}{p_j} \frac{d}{dt} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j.
\end{gathered}
$$

Докажем равенства

$$
\frac{d}{dt} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j = p_j \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_{mt}^{'} \rangle_j.
$$

Действительно, имеем

$$\mathbb{J}_{mj}(t) \equiv \int\limits_0^1 ds\, \langle \mathbb{A}_j(su_m), u_m\rangle_j = \frac{1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j,$$

$$\frac{d\mathbb{J}_{mj}(t)}{dt} = \int\limits_0^1 ds\, \left[s\langle \mathbb{A}'_{su_m}(su_m)u'_m, u_m\rangle_j + \langle \mathbb{A}_j(su_m), u'_m\rangle_j\right] =$$

$$= \int\limits_0^1 ds\, \left[s\frac{d}{ds}\langle \mathbb{A}_j(su_m), u'_m\rangle_j + \langle \mathbb{A}_j(su_m), u'_m\rangle_j\right] =$$

$$= \int\limits_0^1 ds\, \frac{d}{ds}\left[s\langle \mathbb{A}_j(su_m), u'_m\rangle\right] = \langle \mathbb{A}_j(u_m), u'_m\rangle_j.$$

Здесь мы воспользовались тем, что производные Фреше операторов $\mathbb{A}_j$ в силу условий (A) симметричны. Отсюда и из (3.5) получим

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j-1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j\right] = (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0\,. \quad (3.6)$$

Из (3.6), интегрированием обеих частей по $t \in (0, \mathrm{T}_m)$, вытекает

$$\frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j-1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j = \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, u_{m0}\rangle_0 +$$

$$+ \sum_{j=1}^N \frac{p_j-1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_{m0}), u_{m0}\rangle_j + \int\limits_0^t ds\, (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0\,. \quad (3.7)$$

В силу условия (A) 3 в банаховом пространстве $\mathbb{V}_0$ можно выбрать норму, эквивалентную исходной:

$$\| v \|_0 = \langle \mathbb{A}_0 v, v\rangle_0^{1/2}. \quad (3.8)$$

С другой стороны, $\mathbb{V}_0 \hookrightarrow \mathbb{W}_0$ и $\left|(\mathbb{F}(u_m), u_m)_0\right| \leqslant \mathrm{B} \mid u_m \mid_0^{q+2}$. Из (3.7) с учетом (3.8) следует, что

$$\frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j-1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, u_{m0}\rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j-1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_{m0}), u_{m0}\rangle_j +$$

$$+ \mathrm{B}2^{(q+2)/2}\mathrm{C}_1{}^{q+2} \times$$

$$\times \int\limits_0^t ds \left(\frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j \right)^{(q+2)/2}. \quad (3.9)$$

Тем самым получена первая априорная оценка решений «галеркинских» приближений (3.3).

Выведем теперь вторую априорную оценку. Умножим (3.3) на $c_{mk}^{'}$ и просуммируем по $k = \overline{1,m}$. В результате интегрирования обеих частей полученного равенства по $t \in (0, \mathrm{T}_m)$ получим

$$\int\limits_0^t ds \left[\langle \mathbb{A}_0 u_m^{'}, u_m^{'}\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \langle (\mathbb{A}_j(u_m))^{'}, u_m^{'}\rangle_j \right] +$$

$$+ \frac{1}{q+2}\left(\mathbb{F}(u_{m0}), u_{m0}\right)_0 = \frac{1}{q+2}\left(\mathbb{F}(u_m), u_m\right)_0. \quad (3.10)$$

В силу того что $\left(\mathbb{F}(u_0), u_0\right)_0 > 0$, найдется такая подпоследовательность последовательности $\{u_{m0}\}$, что $\left(\mathbb{F}(u_{m0}), u_{m0}\right)_0 > 0$. Отсюда и из (3.10) вытекает

$$\left(\mathbb{F}(u_m), u_m\right)_0 > 0. \quad (3.11)$$

Введем обозначение

$$\Phi_m \equiv \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j, \quad (3.12)$$

$$\Phi_{m0} \equiv \Phi_m(0). \quad (3.13)$$

Значит, в силу (3.6) и (3.11)–(3.13) имеем: $\Phi_m{}'(t) > 0$. Из (3.9) получим

$$\Phi_m \leqslant \Phi_{m0} + \overline{\mathrm{B}} \int\limits_0^t ds\, \Phi_m^{(q+2)/2}(s), \quad (3.14)$$

где

$$\overline{\mathrm{B}} \equiv \mathrm{B}\mathrm{C}_1^{q+2} 2^{(q+2)/2},$$

C_1 — константа наилучшего вложения $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$, B — константа из условия (F) 4. Из (3.14) и теоремы Бихари (см., например, [Демидович]) следует

$$\Phi_m \leqslant \frac{\Phi_{m0}}{\left[1 - \frac{q}{2}\Phi_{m0}^{q/2}\overline{\mathrm{B}}t\right]^{2/q}}. \quad (3.15)$$

Поскольку $u_{m0} \to u_0$ сильно в $\mathbb{V}$, то $\Phi_{m0} \leqslant \mathrm{C}_0$ не зависит от $m \in \mathbb{N}$. Далее возможны два случая для некоторой подпоследовательности последовательности $\{u_m\}$: либо $\Phi_{m0} \downarrow \Phi_0$, либо $\Phi_{m0} \uparrow \Phi_0$.

Рассмотрим сначала случай $\Phi_{m0} \uparrow \Phi_0$. Тогда справедливы неравенства

$$1 - \frac{q}{2}\overline{\mathrm{B}}\Phi_{m0}^{q/2}t \geqslant 1 - \frac{q}{2}\overline{\mathrm{B}}\Phi_0^{q/2}t \ \ \forall\, t \in (0, \mathrm{T}_1), \ \ \mathrm{T}_1 = \overline{\mathrm{B}}^{-1}\frac{2}{q}\Phi_0^{-q/2},$$

$$\Phi_m \leqslant \mathrm{C}_1 \ \ \forall\, t \in (0, \mathrm{T}), \ \ \mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_1), \ \ \mathrm{T}_1 = \overline{\mathrm{B}}^{-1}\frac{2}{q}\Phi_0^{-q/2}, \tag{3.16}$$

где C_1 не зависит от $m \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим теперь случай $\Phi_{m0} \downarrow \Phi_0$. Для любого $\overline{m} < m$ имеем

$$\Phi_{\overline{m}0} > \Phi_{m0}, \ \ 1 - \frac{q}{2}\overline{\mathrm{B}}\Phi_{m0}^{q/2}t \geqslant 1 - \frac{q}{2}\overline{\mathrm{B}}\Phi_{\overline{m}0}^{q/2}t.$$

И для любого $t \in [0, \overline{\mathrm{B}}^{-1}\frac{2}{q}\Phi_{\overline{m}0}^{-q/2})$ получим

$$\Phi_m \leqslant \frac{\mathrm{C}_0}{\left[1 - \frac{q}{2}\Phi_{\overline{m}0}^{q/2}\overline{\mathrm{B}}t\right]^{2/q}}.$$

Стало быть, для любого фиксированного T из интервала $\mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_1)$ найдется такое $\overline{m} \in \mathbb{N}$, что будет иметь место неравенство (3.16).

В силу того что найдется такое $p_{j^*} = \max\limits_{j=\overline{1,N}} p_j > 2$ и $p_{j^*} \geqslant q+2$, что $\mathbb{V}_{j^*} \subset \mathbb{W}_0$, справедливо следующее неравенство:

$$|\, v \,|_0 \leqslant \mathrm{C}_{j^*}\langle \mathbb{A}_{j^*}(v), v\rangle_{j^*}^{1/p_{j^*}}. \tag{3.17}$$

Из (3.17) сразу же получаем, что

$$|\, v \,|_0^{q+2} \leqslant \mathrm{C}_{j^*}^{q+2}\left(\frac{p_{j^*}}{p_{j^*}-1}\right)^{(q+2)/p_{j^*}} \times \\ \times \left(\frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 v, v\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N}\frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(v), v\rangle_j\right)^{(q+2)/p_{j^*}}. \tag{3.18}$$

С учетом (3.7), (3.13), (3.17) и (3.18) приходим к выводу, что

$$\Phi_m \leqslant \Phi_{m0} + \mathrm{BC}_{j^*}^{q+2}\left(\frac{p_{j^*}}{p_{j^*}-1}\right)^{(q+2)/p_{j^*}}\int\limits_0^t ds\, \Phi_m^{\alpha_{j^*}}(s), \tag{3.19}$$

где

$$\alpha_{j^*} \equiv \frac{q+2}{p_{j^*}}.$$

Рассмотрим два случая: $\alpha_{j^*} < 1$ и $\alpha_{j^*} = 1$. Воспользовавшись теоремами Гронуолла–Белмана–Бихари [Демидович], из (3.19) получим

$$\Phi_m \leqslant \left[\Phi_{m0}^{1-\alpha_{j^*}} + (1-\alpha_{j^*})\mathrm{C}_2 t\right]^{1/(1-\alpha_{j^*})}, \quad \alpha_{j^*} \in (0,1), \tag{3.20}$$

$$\Phi_m \leqslant \Phi_{m0} \exp\{C_2 t\}, \quad \alpha_{j^*} = 1, \tag{3.21}$$

где

$$C_2 \equiv BC_{j^*}^{q+2} \left(\frac{p_{j^*}}{p_{j^*} - 1} \right)^{(q+2)/p_{j^*}}.$$

В силу того что $u_{m0} \to u_0$ сильно в $\mathbb{V}$, имеем: $\Phi_{m0} \leqslant C_0$ не зависит от $m \in \mathbb{N}$. Поэтому получим

$$\Phi_{m0} \leqslant C_3, \ \ \forall\, T \geqslant 0 \ \ \forall\, \alpha_{j^*} \in (0, 1]. \tag{3.22}$$

Из условия (A) 3 и (3.12), (3.16), (3.22) следует, что

$$(\mathbb{F}(u_m), u_m)_0 \leqslant B \mid u_m \mid_0^{q+2} \leqslant$$

$$\leqslant BC_1^{q+2} 2^{(q+2)/2} \left(\frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j \right)^{(q+2)/2} \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \Phi_m^{(q+2)/2} \leqslant C_{30},$$

где $0 < C_{30} < +\infty$ — не зависящая от $m \in \mathbb{N}$ постоянная для любых $T > 0$ в случае $\alpha_{j^*} \in (0, 1]$ и для любых $T \in (0, T_1)$, где T_1 определено в (3.16) в случае $\alpha_{j^*} > 1$. Теперь из (3.10) и условий (A) 2 и $(A)_0$ 2 вытекает, что

$$m_0 \int_0^t ds \ \| u_m' \|_0^2 \leqslant \int_0^t ds \, \langle \mathbb{A}_0 u_m', u_m' \rangle_0 \leqslant C_{40},$$

где $0 < C_{40} < +\infty$ — не зависящая от $m \in \mathbb{N}$ постоянная для любых $T > 0$ в случае $\alpha_{j^*} \in (0, 1]$ и для любых $T \in (0, T_1)$, где T_1 определено в (3.16), в случае $\alpha_{j^*} > 1$. Что дает вторую априорную оценку.

Итак,

$$u_m \text{ ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{V}), \ \ u_m' \text{ ограничено в } \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{V}_0), \tag{3.23}$$

где включения имеют место для любых $T > 0$ в случае $\alpha_{j^*} \in (0, 1]$ и для любых $T \in (0, T_1)$, где T_1 определено в (3.16), в случае $\alpha_{j^*} > 1$.

Стало быть, в силу (3.23) найдется такая подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$, что

$$u_m \rightharpoonup u \ *-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{V}), \tag{3.24а}$$

$$u_m' \rightharpoonup u' \text{ слабо в } \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{V}_0). \tag{3.24б}$$

Здесь следует заметить, что из (3.24) вытекает

$$u_m' \rightharpoonup u' \text{ в } \mathcal{D}'(0, T; \mathbb{V}),$$

поэтому в силу слабой сходимости в $\mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{V}_0)$

$$u_m' \rightharpoonup \eta,$$

приходим к выводу, что $\eta(t) = u'(t)$ для почти всех $t \in (0, T)$.

Из (3.24) и компактного вложения $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$ получим, что для почти всех $t \in (0, \mathrm{T})$ $u_m(t) \to u(t)$ сильно в $\mathbb{W}_0$. С другой стороны, в силу условия (F) 1 имеем

$$| \mathbb{F}(u_m) - \mathbb{F}(u) |_0^* \leqslant \mu(\mathrm{R}) \, | u_m - u |_0 \to 0 \ \text{ при } \ m \to +\infty, \tag{3.25}$$

где $\mathrm{R} = \max\{| u |_0, | u_m |_0\}$. Из (3.25) вытекает, что

$$\mathbb{F}(u_m)(t) \to \mathbb{F}(u)(t) \ \text{ сильно в } \ \mathbb{W}_0^*, \ \text{ для почти всех } t \in (0, \mathrm{T}). \tag{3.26}$$

Шаг 3. *Метод монотонности.*

Воспользуемся теперь методом монотонности. Напомним, что на шаге 2 мы получили предельные включения (3.24) и (3.26) и, кроме того,

$$\mathbb{A}(u_m) \rightharpoonup \chi \ \ *-\text{слабо в } \ \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}^*), \quad \mathbb{A}(u) \equiv \sum_{j=0}^{N} \mathbb{A}_j(u). \tag{3.27}$$

Лемма 2. *Пусть* $\mathbb{A}(u) \equiv \sum\limits_{j=0}^{\mathrm{N}} \mathbb{A}_j(u)$. *Тогда найдется такая подпоследовательность последовательности* $\{u_m\}$, *что*

$$\mathbb{A}(u_m) \rightharpoonup \mathbb{A}(u) \ *-\textit{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}^*)$$

для некоторого $\mathrm{T} > 0$. *Кроме того, для некоторой подпоследовательности последовательности* $\{u_m\}$

$$u_m \to u \ \textit{сильно в } \mathbb{L}^{p_j}(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_j), \ \ j = \overline{0, N}.$$

Доказательство.

Перепишем уравнение (3.2) в эквивалентном виде

$$\langle \mathbb{A}(u_m), w_j \rangle = \langle \mathbb{A}(u_{m0}), w_j \rangle + \int_0^t ds \ \left(\mathbb{F}(u_m), w_j \right)_0, \tag{3.28}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}^*$.

Зафиксируем $j \in \mathbb{N}$ и перейдем к пределу при $m \to +\infty$ в уравнении (3.28), тогда получим

$$\chi = \int_0^t ds \, \mathbb{F}(u) + \mathbb{A}(u_0). \tag{3.29}$$

Пусть

$$0 \leqslant \mathbb{X}_\mu \equiv \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}(u_\mu) - \mathbb{A}(v), u_\mu - v\rangle = \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}(u_\mu), u_\mu\rangle -$$

$$- \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}(u_\mu), v\rangle - \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}(v), u_\mu - v\rangle,$$

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}(u_\mu), u_\mu\rangle = \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}(u_{\mu 0}), u_\mu\rangle + \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \int\limits_0^t ds\ (\mathbb{F}(u_\mu)(s), u_\mu(t))_0\,.$$

Отсюда получим, что

$$0 \leqslant \limsup_{\mu\to+\infty} \mathbb{X}_\mu \leqslant \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \int\limits_0^t ds\ (\mathbb{F}(u)(s), u(t))_0 +$$

$$+ \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}(u_0), u\rangle - \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \chi, v\rangle - \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}(v), u - v\rangle =$$

$$= \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \chi - \mathbb{A}(v), u - v\rangle \geqslant 0. \quad (3.30)$$

Положим теперь $v = u - \lambda w$ для любых $v, w \in \mathbb{L}^r(0, \mathrm{T}; \mathbb{V})$, $\lambda > 0$, $u \in$ $\in \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}) \subset \mathbb{L}^r(0, \mathrm{T}; \mathbb{V})$, $\chi, \mathbb{A}(v) \in \mathbb{L}^{r'}(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}^*)$, $r > 1$, $r' = \frac{r}{r-1}$.

В силу (3.30) справедливо следующее неравенство:

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \chi - \mathbb{A}(u - \lambda w), w\rangle \geqslant 0,$$

из которого в силу полунепрерывности каждого из операторов $\mathbb{A}_j(v)$, $j = \overline{0, N}$, получим

$$\chi = \mathbb{A}(u).$$

С другой стороны, в силу (3.29)

$$\limsup_{\mu\to+\infty} \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}_j(u_\mu), u_\mu\rangle_j \leqslant -\liminf_{\mu\to+\infty} \sum_{k=0, k\neq j}^{N} \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}_k(u_\mu), u_\mu\rangle_k +$$

$$+ \limsup_{\mu\to+\infty} \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}(u_\mu), u_\mu\rangle \leqslant$$

$$\leqslant -\sum_{k=0,k\neq j}^{N}\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \mathbb{A}_k(u),u\rangle_k + \int_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \mathbb{A}(u),u\rangle = \int_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \mathbb{A}_j(u),u\rangle_j, \quad (3.31)$$

где мы воспользовались тем, что величины

$$\left(\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \mathbb{A}_j(u),u\rangle_j\right)^{1/p_j}, \quad \left(\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \mathbb{A}_0 u,u\rangle_0\right)^{1/2}$$

в силу свойств $(\mathrm{A}_0)3$ и $(\mathrm{A})3$ являются нормами на банаховых пространствах $\mathbb{V}_j$ и $\mathbb{V}_0$ соответственно.

Наконец, в силу $u_\mu \rightharpoonup u$ слабо в $\mathbb{L}^{p_j}(0,\mathrm{T};\mathbb{V})$, $j=\overline{0,N}$, и того, что операторы $\mathbb{A}_j(v)$ порождают по указанному выше правилу нормы на банаховых пространствах $\mathbb{V}_j$, $j=\overline{0,N}$, имеем

$$\liminf_{\mu\to+\infty}\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \mathbb{A}_j(u_\mu),u_\mu\rangle_j \geqslant \int_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \mathbb{A}_j(u),u\rangle_j. \quad (3.32)$$

Из (3.31) и (3.32) следует, что

$$\lim_{\mu\to+\infty}\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \mathbb{A}_j(u_\mu),u_\mu\rangle_j = \int_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \mathbb{A}_j(u),u\rangle_j. \quad (3.33)$$

Теперь в силу условий (A) 3 имеем, что

$$\left(\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \mathbb{A}_j(u),u\rangle_j\right)^{1/p_j}$$

является нормой, эквивалентной к исходной норме

$$\left(\int_0^{\mathrm{T}} dt\ \|\,u\,\|_j^{p_j}\right)^{1/p_j}$$

банахова пространства $\mathbb{L}^{p_j}(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_j)$. Поэтому из (3.33) следует существование подпоследовательности последовательности $\{u_m\}$ такой, что

$$\left(\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \mathbb{A}_j(u_m),u_m\rangle_j\right)^{1/p_j} \to \left(\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \mathbb{A}_j(u),u\rangle_j\right)^{1/p_j}, \quad j=\overline{0,N}.$$

С другой стороны,

$$u_m \rightharpoonup u \ \text{ слабо в } \mathbb{L}^{p_j}(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_j), \quad j=\overline{0,N},$$

значит, найдется такая подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$, что $u_m \to u$ сильно в каждом $\mathbb{L}^{p_j}(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_j)$, $j = \overline{0,N}$.

Лемма доказана.

Шаг 4. *Предельный переход и единственность.*

Из предельных выражений (3.24), (3.26) и (3.27) вытекает возможность перехода к пределу при $m \to +\infty$ в уравнении (3.28). Действительно, пусть

$$f_{mk}(t) = \sum_{j=0}^{N} \langle \mathbb{A}_j(u_m), w_k\rangle_j - \sum_{j=0}^{N} \langle \mathbb{A}_j(u_{m0}), w_k\rangle_j - \int\limits_0^t ds\ \left(\mathbb{F}(u_m)(s), w_k\right)_0,$$

$$f_k(t) = \sum_{j=0}^{N} \langle \mathbb{A}_j(u), w_k\rangle_j - \sum_{j=0}^{N} \langle \mathbb{A}_j(u_0), w_k\rangle_j - \int\limits_0^t ds\ \left(\mathbb{F}(u)(s), w_k\right)_0.$$

По доказанному имеем: $f_{mk}(t) \rightharpoonup f_k(t)$ $*$ – слабо в $\mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T})$, т. е.

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, f_{mk}(t) g(t) \to \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, f_k(t) g(t) \ \ \forall\, g \in \mathbb{L}^1(0,\mathrm{T}).$$

С другой стороны, $f_{mk}(t) = 0$ для всех $t \in [0,\mathrm{T}]$. Значит,

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, f(t) g(t) = 0 \ \ \forall\, g \in \mathbb{L}^1(0,\mathrm{T}).$$

В силу очевидных вложений $\mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T}) \subset \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T})$ и $\mathbb{C}_0^{\infty}([0,\mathrm{T}]) \subset \subset \mathbb{L}^1(0,\mathrm{T})$ при любом конечном $0 < \mathrm{T} < +\infty$ и в силу основной леммы вариационного исчисления получим, что $f(t) = 0$ для почти всех $t \in \in (0,\mathrm{T})$. В результате указанного предельного перехода для почти всех $t \in (0,\mathrm{T})$ получим

$$\langle \mathbb{A}_0 u, v\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \langle \mathbb{A}_j(u), v\rangle_j = \langle \mathbb{A}_0 u_0, v\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \langle \mathbb{A}_j(u_0), v\rangle_j + \int\limits_0^t ds\ \left(\mathbb{F}(u), v\right)_0(s) \ \ \forall\, v \in \mathbb{V},$$

$$u(0) = u_0 \in \mathbb{V}.$$

С другой стороны, $u' \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0)$, $u \in \mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T};\mathbb{V}^*)$. Перепишем последнее равенство в следующем виде:

$$\sum_{j=0}^{N} \langle \mathbb{A}_j(u), v\rangle_j = \sum_{j=0}^{N} \langle \mathbb{A}_j(u_0), v\rangle_j + \int\limits_0^t ds\ \left(\mathbb{F}(u), v\right)_0(s) \ \ \forall\, v \in \mathbb{V}.$$

Значит, для почти всех $t \in (0, \mathrm{T})$ справедливо равенство в смысле $\mathbb{V}^*$:

$$\mathbb{A}(u) = \sum_{j=0}^{N} \mathbb{A}_j(u) = \sum_{j=0}^{N} \mathbb{A}_j(u_0) + \int_0^t ds\, \mathbb{F}(u)(s) \tag{3.34}$$

для почти всех $t \in (0, \mathrm{T})$. Отметим, что правая часть (3.34) принадлежит классу $\mathbb{C}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}^*)$, значит, левая часть после исправления на множестве нулевой меры Лебега на интервале $(0, \mathrm{T})$ также будет принадлежать классу $\mathbb{C}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}^*)$.

Ранее мы доказали, что

$$\mathbb{A}(u) = \sum_{j=0}^{N} \mathbb{A}_j(u) \in \mathbb{L}^{\infty}(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}^*) \subset \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}^*).$$

Кроме того, из (3.34) вытекает, что

$$\frac{d}{dt} \sum_{j=0}^{N} \mathbb{A}_j(u) \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}^*).$$

Значит, $\mathbb{A}(u) \in \mathbb{H}^1(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}^*)$. Наконец, докажем, что

$$\sum_{j=0}^{N} \mathbb{A}_j(u) \in \mathbb{C}_w^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}^*),$$

где символом $\mathbb{C}_w^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}^*)$ мы обозначили множество всех деминепрерывных функций на отрезке $[0, \mathrm{T}]$ со значениями в рефлексивном банаховом пространстве $\mathbb{B}$, имеющих деминепрерывную слабую производную. Исправлением на множестве нулевой меры Лебега на интервале $(0, \mathrm{T})$ функция $\mathbb{A}(u) \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}^*)$. Наконец, справедливо следующее выражение для функции $h(t) = \mathbb{A}(u)$:

$$\left\langle \frac{h(t+\alpha) - h(t)}{\alpha} - \mathbb{F}(u)(t), w \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\alpha} \int_t^{t+\alpha} ds\, \mathbb{F}(u)(s) - \mathbb{F}(t), w \right\rangle \equiv \mathrm{J},$$

где $\forall\, w \in \mathbb{V}^*$ и для почти всех $t \in (0, \mathrm{T})$. Справедлива следующая оценка для почти всех $t \in (0, \mathrm{T})$:

$$|\mathrm{J}| \leqslant \frac{1}{\alpha} \int_t^{t+\alpha} ds\ \| \mathbb{F}(u)(s) - \mathbb{F}(u)(t) \|^* \| w \| \to +0$$

при $\alpha \to +0$ в силу результата теоремы 3.8.5 [Хилле]. По доказанному имеем: $u(t) \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}_0) \subseteq \mathbb{C}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{W}_0)$. Докажем теперь, что $\mathbb{F}(u) \in$

$\in \mathbb{C}([0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^*)$. Действительно, в силу условия $\mathbb{V}_0 \subseteq \mathbb{W}_0$ и условий (F) имеем

$$|\mathbb{F}(u)(t) - \mathbb{F}(u)(t_0)|_0^* \leqslant \mathrm{C}|u(t) - u(t_0)|_0 \ \ \forall\, t, t_0 \in [0,\mathrm{T}].$$

Отсюда сразу же получаем требуемый результат. Поскольку $\mathbb{W}_0^* \subseteq \mathbb{V}^*$, то приходим к выводу, что $\mathbb{F}(u)(t) \in \mathbb{C}([0,\mathrm{T};\mathbb{V}^*)$. Значит,

$$\mathbb{A}(u) \in \mathbb{C}_w^{(1)}([0,\mathrm{T};\mathbb{V}^*).$$

Теперь рассмотрим уравнение (3.2), которое перепишем в следующем виде:

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\varphi(t)\left[\frac{d}{dt}\left\langle\sum_{j=0}^{N}\mathbb{A}_j(u_m), w\right\rangle - \langle\mathbb{F}(u_m), w\rangle\right] = 0$$

$$\forall\,\varphi(t) \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T}), \ \ \forall\, w \in \mathbb{V}.$$

В силу результата леммы 1 имеем: $\mathbb{F}(u_m) \rightharpoonup \mathbb{F}(u)$ слабо в $\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{V}^*)$. С одной стороны,

$$\mathbb{A}(u_m) \rightharpoonup \mathbb{A}(u)$$

слабо в $\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{V}^*)$. Значит,

$$\frac{d}{dt}\mathbb{A}(u_m) \to \frac{d}{dt}\mathbb{A}(u)$$

в смысле $\mathcal{D}^{'}(0,\mathrm{T};\mathbb{V}^*)$. С другой стороны, имеет место поточечное по $t \in [0,\mathrm{T}]$ равенство в смысле $\mathbb{V}^*$:

$$\frac{d}{dt}\mathbb{A}(u_m) = \mathbb{F}(u_m).$$

Значит,

$$\frac{d}{dt}\mathbb{A}(u_m) \rightharpoonup \psi$$

слабо в $\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{V}^*)$ Тем самым,

$$\frac{d}{dt}\mathbb{A}(u_m) \rightharpoonup \frac{d}{dt}\mathbb{A}(u)$$

слабо в $\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{V}^*)$. Переходя к пределу при $m \to +\infty$ в уравнении (3.2), получим, что $u(t)$ является решением задачи

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\varphi(t)\left[\frac{d}{dt}\left\langle\sum_{j=0}^{N}\mathbb{A}_j(u), w\right\rangle - \langle\mathbb{F}(u), w\rangle\right] = 0,\ \forall\,\varphi(t) \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T})\ \forall\, w \in \mathbb{V},$$

которая в свою очередь эквивалентна задаче (3.1).

Пусть теперь u — это произвольное решение задачи

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\varphi(t)\left[\left\langle \frac{d}{dt}\sum_{j=0}^{N}\mathbb{A}_j(u),w\right\rangle-\langle\mathbb{F}(u),w\rangle\right]=0\ \ \forall\,\varphi(t)\in\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T}),\ \ \forall\,w\in\mathbb{V},$$

класса

$$u\in\mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T};\mathbb{V}),\ \ \sum_{j=0}^{N}\mathbb{A}_j(u)\in\mathbb{H}^1(0,\mathrm{T};\mathbb{V}^*)\cap\mathbb{C}_w^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{V}^*),$$
$$\mathbb{F}(u)\in\mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T};\mathbb{V}^*).$$

Теперь возьмем $\varphi(t)=1\in\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T})$. В указанном классе гладкости при почти всех $t\in(0,\mathrm{T})$ получим уравнение

$$\sum_{j=0}^{N}\langle\mathbb{A}_j(u),w\rangle_j=\sum_{j=0}^{N}\langle\mathbb{A}_j(u_0),w\rangle_j+\int\limits_0^t ds\ (\mathbb{F}(u),w)_0(s)\ \ \forall\,w\in\mathbb{V}.$$

Значит,

$$\sum_{j=0}^{N}\mathbb{A}_j(u)=\sum_{j=0}^{N}\mathbb{A}_j(u_0)+\int\limits_0^t ds\mathbb{F}(u)(s)\tag{3.35}$$

в смысле $\mathbb{V}^*$ при почти всех $t\in(0,\mathrm{T})$. Пусть u_1 и u_2 — какие-либо два слабых обобщенных решения в указанном классе гладкости, соответствующие одной и той же начальной функции $u_0\in\mathbb{V}$. Тогда из (3.35) получим соотношение

$$\sum_{j=0}^{N}(\mathbb{A}_j(u_1)-\mathbb{A}_j(u_2))=\int\limits_0^t ds\ (\mathbb{F}(u_1)(s)-\mathbb{F}(u_2)(s))$$

для почти всех $t\in(0,\mathrm{T})$ в смысле $\mathbb{V}^*$. Поскольку $w=u_1-u_2\in\in\mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T};\mathbb{V})$, то для почти всех $t\in(0,\mathrm{T})$ определено выражение

$$\langle\mathbb{A}_0w,w\rangle_0+\sum_{j=1}^{N}\langle\mathbb{A}_j(u_1)-\mathbb{A}_j(u_2),w\rangle=\int\limits_0^t ds\ (\mathbb{F}(u_1)(s)-\mathbb{F}(u_2)(s),w(t))_0,$$

откуда в силу монотонности операторов $\mathbb{A}_j(u)$, $j=\overline{1,N}$, и с учетом условия (A_0) 2 и вложения $\mathbb{V}_0\subseteq\mathbb{W}_0$ приходим к неравенству

$$\|\,w\,\|_0^2\,(t)\leqslant\mathrm{m}_0^{-1}\mid w\mid_0(t)\int\limits_0^t ds\mid\mathbb{F}(u_1)-\mathbb{F}(u_2)\mid_0^*\leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{D}_1 \parallel w \parallel_0 (t) \int\limits_0^t ds \parallel w \parallel_0 (s), \quad \mathrm{D}_1 > 0,$$

из которого в силу теоремы Гронуолла–Белмана получаем, что $u_1 = u_2$ почти всюду на множестве $(0, \mathrm{T}) \times \Omega$.

Замечание 3. Отметим, что в доказательстве единственности существенно наличие линейного оператора $\mathbb{A}_0$ при производной по времени с областью определения $\mathbb{V}_0 \subseteq \mathbb{W}_0$. В случае отсутствия указанного линейного оператора может иметь место неединственность. Для полноты приведем следующий пример.

Пример неединственности.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) - |u|^{p-2}u\right) + |u|^q u = 0, \qquad (3.36)$$
$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \; u(x,0) = 0,$$

где $p > q + 2$. Будем искать нетривиальные решения задачи (3.36) в классе $u \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}]; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$. Пусть $u(x,t) = \varphi(t) f(x)$. Потребуем, чтобы было выполнено равенство

$$\frac{d}{dt}\left(|\varphi|^{p-2}\varphi\right) = |\varphi|^q \varphi, \quad \varphi(0) = 0, \quad p > q + 2, \qquad (3.37)$$

тогда из (3.36) получим

$$\triangle_p f - |f|^{p-2} f + |f|^q f = 0, \quad f\big|_{\partial\Omega} = 0. \qquad (3.38)$$

Решениями задачи (3.37) являются следующие функции:

$$\varphi(t) = \pm \left(\frac{p-2-q}{p-1}\right)^{1/(p-2-q)} \begin{cases} (t - T_0)^{1/(p-2-q)}, & t \geqslant \mathrm{T}_0, \\ 0, & t \in [0, \mathrm{T}_0]. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь задачу (3.38). Для доказательства разрешимости данной задачи воспользуемся методом расслаивающих функционалов С. И. Похожаева [Похожаев] и теорией категорий Люстерника–Шнирельмана [Люстерник].

Введем функционал Эйлера, соответствующий задаче (3.38):

$$\mathrm{E}[f] = -\frac{1}{p}\int\limits_\Omega dx \; |\nabla f|^p - \frac{1}{p}\int\limits_\Omega dx \, |f|^p + \frac{1}{q+2}\int\limits_\Omega dx \; |f|^{q+2}. \qquad (3.39)$$

Рассмотрим формальную процедуру метода расслаивающих функционалов. Возьмем $f = rv$, тогда из (3.39) получим

$$\widetilde{\mathrm{E}}(r,v) \equiv \mathrm{E}(rv) = -\frac{|r|^p}{p}\left[\int\limits_\Omega dx \; |\nabla v|^p + \int\limits_\Omega dx \; |v|^p\right] + \frac{|r|^{q+2}}{q+2}\int\limits_\Omega dx \; |v|^{q+2}.$$

Потребуем, чтобы

$$\| v \| \equiv \left(\int\limits_{\Omega} dx \ |\nabla v|^p + \int\limits_{\Omega} dx \ |v|^p \right)^{1/p} = 1, \tag{3.40}$$

тогда

$$\widetilde{\widetilde{\mathrm{E}}}(r) \equiv \widetilde{\mathrm{E}}(r,v)\Big|_{\|v\|=1} \equiv -\frac{|r|^p}{p} + \frac{|r|^{q+2}}{q+2} \int\limits_{\Omega} dx \ |v|^{q+2},$$

$$\frac{\partial \widetilde{\widetilde{\mathrm{E}}}}{\partial r} = -r|r|^{p-2} + r|r|^q \int\limits_{\Omega} dx \ |v|^{q+2} = 0, \quad r = \pm \left(\int\limits_{\Omega} dx \, |v|^{q+2} \right)^{1/(p-2-q)},$$

$$\mathrm{F}[v] \equiv \widetilde{\mathrm{E}}(r(v),v) = \frac{p-q-2}{p} \left(\int\limits_{\Omega} dx \, |v|^{q+2} \right)^{p/(p-2-q)}. \tag{3.41}$$

Таким образом, возникает задача минимизации функционала F (3.41) при условии (3.40). Для доказательства существования экстремалей этой вариационной задачи на условный экстремум можно воспользоваться теорией категорий Люстерника–Шнирельмана, поскольку функционал (3.41) четный [Люстерник]. Кроме того, задача на условный экстремум (3.40), (3.41) эквивалентна следующей вариационной задаче на условный экстремум ($p > q+2$):

$$\inf \left\{ \overline{\mathrm{E}}[v] : \| v \| = 1, v \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \right\}, \ \ \overline{\mathrm{E}}[v] = \int\limits_{\Omega} dx \, |v|^{q+2}. \tag{3.42}$$

Для доказательства существования решений задачи (3.42) надо проверить выполнимость следующих условий.

1. Функционал $\overline{\mathrm{E}}[v]$ имеет усиленно непрерывный градиент $\Gamma(v)$ в шаре $\| v \| \leqslant R$.
2. Потенциальный оператор $\Gamma(v)$ позитивен: $\langle \Gamma(v), v \rangle > 0$.
3. Оператор $\Lambda(v) \equiv \mathbf{grad} \, \| v \|$ удовлетворяет на сфере $\| v \| = r \leqslant R$ условию Липшица и имеет непрерывный обратный.

Условие усиленной непрерывности в шаре $\| v \| \leqslant R$ можно заменить требованием слабой непрерывности функционала $\overline{\mathrm{E}}[v]$ и равномерной дифференцируемости в шаре $\| v \| \leqslant R$.

Сначала докажем слабую непрерывность функционала

$$\overline{\mathrm{E}}[v] = \int\limits_{\Omega} dx \, |v|^{q+2}. \tag{3.43}$$

Пусть имеет место компактное вложение $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$. Действительно, указанное вложение имеет место, если

$0 < q < (Np - 2N + 2p)/(N - p)$ при $N > p$, $0 < q < +\infty$ при $N \leqslant p$. Пусть теперь $v_n \rightharpoonup v$ слабо в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$. Тогда $v_n \to v$ сильно в $\mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$, а значит, $\| v_n \|_{q+2} \to \| v \|_{q+2}$. Стало быть, функционал (3.43) слабо непрерывен.

Докажем теперь, что функционал (3.43) равномерно дифференцируем по Фреше на любом шаре $\| v \| \leqslant R$. Действительно,

$$\overline{\mathrm{E}}[v+h] - \overline{\mathrm{E}}[v] - \langle \widetilde{\Gamma}(v), h \rangle = \omega(v,h),$$

$$\int\limits_\Omega dx\, |v+h|^{q+2} - \int\limits_\Omega dx\, |v|^{q+2} - (q+2) \int\limits_\Omega dx\, h|v|^q v = \omega(v,h),$$

причем

$$|\omega(v,h)| \leqslant C \int\limits_\Omega dx\, |h|^2 |v|^q,$$

откуда сразу же получаем, что

$$|\omega(v,h)| \leqslant C \| h \|_{q+2}^2 \| v \|_{q+2}^q \leqslant C \| h \|_{q+2}^2 \leqslant C \| h \|^2,$$

$$\frac{|\omega(v,h)|}{\| h \|} \leqslant C \| h \| .$$

Значит, функционал (3.43) является равномерно дифференцируемым по Фреше на любом шаре $\| v \| \leqslant R$.

Докажем теперь выполнимость условия 3 на сфере $\| v \| = r$. Действительно, в силу результата §14 Приложения В, имеем

$$\mathbf{grad} \| v \| = \left(\| v \|_p^p + \| \nabla v \|_p^p \right)^{1/p-1} \left(-\triangle_p v + |v|^{p-2} v \right),$$

где через $\mathbf{grad} \| v \|$ мы обозначили значение $\mathbf{grad} \| \cdot \|$ на элементе v. Тогда

$$\| \mathbf{grad} \| v_1 \| - \mathbf{grad} \| v_2 \| \|^* \leqslant$$

$$\leqslant r^{-1+1/p} \left[\int\limits_\Omega dx \left| |\nabla v_1|^{p-2} \nabla v_1 - |\nabla v_2|^{p-2} \nabla v_2 \right|^{p'} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_\Omega dx \left| |v_1|^{p-2} v_1 - |v_2|^{p-2} v_2 \right|^{p'} \right]^{1/p'} \leqslant$$

$$\leqslant r^{-1+1/p} (p-1) \left(\int\limits_\Omega dx \left[\max(|v_1|^{p-2}, |v_2|^{p-2}) |v_1 - v_2|^{p/(p-1)} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \max \left(|\nabla v_1|^{p-2}, |\nabla v_2|^{p-2} \right)^{p/(p-1)} |\nabla v_1 - \nabla v_2|^{p/(p-1)} \right] \right)^{1/p'} \leqslant$$

$$\leqslant C(r)\sum_{i=1}^{2}\left(\int\limits_{\Omega} dx\,|v_i|^{(p-2)pr_1/(p-1)}\right)^{(p-1)/(pr_1)}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\Omega} dx\,|v_1-v_2|^{pr_2/(p-1)}\right)^{(p-1)/(pr_2)}+$$

$$+\,C(r)\sum_{i=1}^{2}\left(\int\limits_{\Omega} dx\,|\nabla v_i|^{(p-2)pr_1/(p-1)}\right)^{(p-1)/(pr_1)}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\Omega} dx\,|\nabla v_1-\nabla v_2|^{pr_2/(p-1)}\right)^{(p-1)/(pr_2)}\equiv \mathrm{J},$$

$$r_1^{-1}+r_2^{-1}=1,\ \ r_2=p-1,\ \ r_1=\frac{p-1}{p-2},\ \ p'=\frac{p}{p-1},$$

$$\mathrm{J}\leqslant C\left(\|\,v_1-v_2\,\|_p+\|\,\nabla v_1-\nabla v_2\,\|_p\right)\leqslant C\,\|\,v_1-v_2\,\|,$$

где через C мы обозначаем различные постоянные, зависящие от r. Стало быть оператор $\mathbf{grad}\,\|\,v\,\|$ является липшиц-непрерывным.

Докажем теперь существование непрерывного обратного оператора на сфере $\|\,v\,\|=r$. Действительно,

$$\langle \mathbf{grad}\,\|\,v_1\,\|-\mathbf{grad}\,\|\,v_2\,\|, v_1-v_2\rangle=$$
$$=r^{1/p-1}\langle -\triangle_p v_1+|v_1|^{p-2}v_1+\triangle_p v_2-|v_2|^{p-2}v_2, v_1-v_2\rangle\geqslant$$
$$\geqslant r^{1/p-1}2^{1-p}\,\|\,v_1-v_2\,\|^p\,.$$

Значит,

$$\|\,\mathbf{grad}\,\|\,v_1\,\|-\mathbf{grad}\,\|\,v_1\,\|\|^*\geqslant r^{1/p-1}2^{1-p}\,\|\,v_1-v_2\,\|^{p-1},$$

откуда вытекает, что

$$\|\,z_1-z_2\,\|_*^{1/(p-1)}\geqslant\left(r^{1/p-1}2^{1-p}\right)^{1/(p-1)}\|\,\mathbf{grad}^{-1}\,\|\,z_1\,\|-\mathbf{grad}^{-1}\,\|\,z_2\,\|\|\,.$$

Таким образом, существует непрерывный обратный оператор к $\mathbf{grad}\,\|\,v\,\|$.

Стало быть, в силу теоремы Люстерника–Шнирельмана 14.2 [Вайнберг] получим, что на сфере $\|\,v\,\|=1$ существует не менее чем счетное множество геометрически разных векторов, являющихся решением вариационной задачи (3.42), а значит, минимизирующих функционал Эйлера (3.39) и имеющих вид

$$f_k(x)=r(v_k)v_k=\pm v_k\left(\int\limits_{\Omega} dx\,|v_k|^{q+2}\right)^{1/(p-2-q)},$$

$$\| f_k \| = \left(\int\limits_{\Omega} dx \, |v_k|^{q+2} \right)^{1/(p-2-q)},$$

где $k \in \mathbb{N}$. Стало быть, задача (3.36) имеет, образно говоря, не менее чем счетное множество «интегральных воронок» вида $u_k = \varphi(t) f_k(x)$ в пространстве $\mathbb{R}^1_+ \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^1$.

Шаг 5. *Разрушение решений.*

Справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть*

$$\Phi \equiv \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0 + \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u), u\rangle_j, \quad \alpha \equiv \frac{q+2}{\overline{p}}, \quad \overline{p} \equiv \max_{j=\overline{1,N}} p_j.$$

Тогда

1) *если* $\alpha \in (0,1)$, *то* $\mathrm{T}_0 = +\infty$ *и имеет место неравенство*

$$\Phi_0 \left[1 + (1-\alpha)\mathrm{E}_0 \Phi_0^{\alpha-1} t\right]^{1/(1-\alpha)} \leqslant \Phi \leqslant \Phi_0 \left[1 + (1-\alpha)\mathrm{C}_2 \Phi_0^{\alpha-1} t\right]^{1/(1-\alpha)};$$

2) *если* $\alpha = 1$, *то* $\mathrm{T}_0 = +\infty$ *и имеет место неравенство*

$$\Phi_0 \exp(\mathrm{E}_0 t) \leqslant \Phi \leqslant \Phi_0 \exp(\mathrm{C}_2 t);$$

3) *если* $\alpha > 1$, *то* $\mathrm{T}_0 \in [\mathrm{T}_1; \mathrm{T}_2]$, *и справедливо соотношение*

$$\limsup_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \Phi(t) = +\infty,$$

где

$$\mathrm{T}_1 = \frac{2}{q} \Phi_0^{-q/2} \overline{\mathrm{B}}^{-1}, \quad \mathrm{T}_2 = \frac{1}{\alpha - 1} \frac{\Phi_0}{(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0}, \quad \mathrm{C}_2 \equiv \mathrm{B}\mathrm{C}_{j^*}^{q+2} \left(\frac{\overline{p}}{\overline{p} - 1} \right)^{\alpha},$$

$$|v|_0 \leqslant \mathrm{C}_{j^*} \langle \mathbb{A}_{j^*} v, v\rangle_{j^*}^{1/p_{j^*}},$$

$$\mathrm{E}_0 \equiv \frac{(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0}{\Phi_0^{\alpha}}, \quad \Phi_0 \equiv \Phi(0), \quad \overline{\mathrm{B}} \equiv \mathrm{B}\mathrm{C}_1^{q+2} 2^{(q+2)/2}.$$

Доказательство.

В силу условий (A) 2 справедливо неравенство Шварца [Морен] для производных Фреше $\mathbb{A}'_{j,u} : \mathbb{V}_j \to \mathcal{L}(\mathbb{V}_j; \mathbb{V}_j^*)$ операторов $\mathbb{A}_j : \mathbb{V}_j \to \mathbb{V}_j^*$:

$$\left| \langle (\mathbb{A}_j(u_m))', u_m \rangle_j \right| = \left| \langle \mathbb{A}'_{j,u_m}(u_m) u'_m, u_m \rangle_j \right| \leqslant$$

$$\leqslant \langle \mathbb{A}'_{j,u_m}(u_m) u'_m, u'_m \rangle_j^{1/2} \langle \mathbb{A}'_{j,u_m}(u_m) u_m, u_m \rangle_j^{1/2} =$$

$$= \langle (\mathbb{A}_j(u_m))', u'_m \rangle_j^{1/2} (p_j - 1)^{1/2} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j^{1/2}, \quad (3.44)$$

$$\left| \langle \mathbb{A}_0 u'_m, u_m \rangle_0 \right| \leqslant \langle \mathbb{A}_0 u'_m, u'_m \rangle_0^{1/2} \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0^{1/2}. \quad (3.45)$$

Здесь мы воспользовались следующим равенством:

$$\mathbb{A}_{j,v}^{'}(v)v = (p_j - 1)\mathbb{A}_j(v).$$

Приведем его вывод. Действительно, имеют место следующие равенства:

$$\mathbb{A}_j(\rho v) = \rho^{p_j-1}\mathbb{A}_j(v), \quad \mathbb{A}_{j,v}^{'}(\rho v)\rho = \rho^{p_j-1}\mathbb{A}_{j,v}^{'}(v), \quad \mathbb{A}_{j,v}^{'}(\rho v) = \rho^{p_j-2}\mathbb{A}_{j,v}^{'}(v),$$

$$\int_0^1 d\rho \left\langle \frac{d}{d\rho}\mathbb{A}_j(\rho v), w \right\rangle_j = \left\langle \int_0^1 d\rho\, \mathbb{A}_{j,\rho v}^{'}(\rho v)v, w \right\rangle_j \ \forall\ w \in \mathbb{V}_j, \ \ j = \overline{0,N},$$

$$\langle \mathbb{A}_j(v) - (p_j - 1)^{-1}\mathbb{A}_{j,v}^{'}(v)v, w\rangle_j = 0 \ \forall\ w \in \mathbb{V}_j, \ \ j = \overline{0,N}.$$

Значит, имеет место операторное равенство

$$(p_j - 1)\mathbb{A}_j(v) = \mathbb{A}_{j,v}^{'}(v)v \ \forall\ v \in \mathbb{V}_j,\ j = \overline{0,N}.$$

Введем обозначение

$$\Phi_m \equiv \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j. \tag{3.46}$$

Из (3.44)–(3.46) вытекает

$$\left|\frac{d}{dt}\Phi_m\right|^2 \leqslant \left|\left|\langle \mathbb{A}_0 u_m^{'}, u_m\rangle_0\right| + \sum_{j=1}^{N}\left|\langle (\mathbb{A}_j(u_m))^{'}, u_m\rangle_j\right|\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\langle \mathbb{A}_0 u_m^{'}, u_m^{'}\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N}\langle (\mathbb{A}_j(u_m))^{'}, u_m^{'}\rangle_j\right) \times$$

$$\times \left(\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N}(p_j - 1)\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j\right) \leqslant$$

$$\leqslant \overline{p}\left(\langle \mathbb{A}_0 u_m^{'}, u_m^{'}\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N}\langle (\mathbb{A}_j(u_m))^{'}, u_m^{'}\rangle_j\right) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\overline{p}}\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N}\frac{p_j - 1}{\overline{p}}\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j\right) \leqslant$$

$$\leqslant \overline{p}\left(\langle \mathbb{A}_0 u_m^{'}, u_m^{'}\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N}\langle (\mathbb{A}_j(u_m))^{'}, u_m^{'}\rangle_j\right) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j \right), \quad (3.47)$$

где $\overline{p} = \max\limits_{j=1,N} p_j > 2$. Напомним соотношения (3.6) и (3.10):

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j \right] = (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0, \quad (3.48)$$

$$\langle \mathbb{A}_0 u_m^{'}, u_m^{'}\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N}\langle (\mathbb{A}_j(u_m))^{'} u_m^{'}\rangle_j = \frac{1}{q+2}\frac{d}{dt}(\mathbb{F}(u_m), u_m)_0. \quad (3.49)$$

Из (3.47)–(3.49) вытекает обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка:

$$\Phi_m^{''}\Phi_m - \alpha\left(\Phi_m^{'}\right)^2 \geqslant 0, \quad \alpha \equiv \frac{q+2}{\overline{p}}, \quad \overline{p} = \max_{j=1,N} p_j > 2. \quad (3.50)$$

Из (3.50) следует, что

$$\frac{\Phi_m^{'}}{\Phi_m^{\alpha}} \geqslant \frac{(\mathbb{F}(u_{m0}), u_{m0})_0}{\Phi_{m0}^{\alpha}} \equiv \mathbb{E}_{m0}. \quad (3.51)$$

Теперь рассмотрим три случая: $\alpha > 1$, $\alpha = 1$, $0 < \alpha < 1$.

В случае $\alpha > 1$ из (3.50) получим

$$\Phi_m \geqslant \frac{1}{\left[\Phi_{m0}^{1-\alpha} - (\alpha-1)\mathbb{E}_{m0}t\right]^{1/(\alpha-1)}} \geqslant \frac{\Psi_{m0}}{[\mathrm{T}_{2m} - t]^{1/(\alpha-1)}}, \quad (3.52)$$

$$\Psi_{m0} \equiv \frac{1}{(\alpha-1)^{1/(\alpha-1)}}\frac{\Phi_{m0}^{\alpha/(\alpha-1)}}{(\mathbb{F}(u_{m0}), u_{m0})_0^{1/(\alpha-1)}},$$

$$\mathrm{T}_{2m} \equiv \frac{1}{\alpha-1}\frac{\Phi_{m0}}{(\mathbb{F}(u_{m0}), u_{m0})_0}.$$

В случае $\alpha = 1$ из (3.51) сразу же получим

$$\Phi_m \geqslant \Phi_{m0}\exp\{\mathbb{E}_{m0}t\}. \quad (3.53)$$

Аналогичным образом в случае $\alpha \in (0,1)$ приходим к выводу, что

$$\Phi_m \geqslant \Phi_{m0}\left[1 + (1-\alpha)\mathbb{E}_{m0}\Phi_{m0}^{\alpha-1}t\right]^{1/(1-\alpha)}. \quad (3.54)$$

Докажем теперь, что $\Phi_m(t) \to \Phi(t)$ для почти всех $t \in (0, \mathrm{T})$, где

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N}\frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u), u\rangle_j.$$

Во-первых, в силу того что $u_m \to u$ сильно в $\mathbb{L}^{p_j}(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_j)$, имеем

$$\int\limits_0^t ds\Phi_m(s) \to \int\limits_0^t ds\,\Phi(s).$$

С другой стороны, из (3.48) получим

$$\Phi_m = \Phi_{m0} + \int\limits_0^t ds\ (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0\,(s).$$

По условию $\Phi_{m0} \to \Phi_0$, $u_m(t) \to u(t)$ сильно в $\mathbb{W}_0$ для почти всех $t \in (0,\mathrm{T})$, поэтому в силу ограниченной липшиц-непрерывности оператора $\mathbb{F}(u) : \mathbb{W}_0 \to \mathbb{W}_0^*$ приходим к выводу, что $\mathbb{F}(u_m) \to \mathbb{F}(u)$ сильно в $\mathbb{W}_0^*$ для почти всех $t \in (0,\mathrm{T})$. С другой стороны, понятно, что $\left|(\mathbb{F}(u_m), u_m)_0\right| \leqslant \mathrm{B} \mid u_m \mid_0^{q+2} \leqslant \mathrm{C} \parallel u_m \parallel_{\mathbb{V}}^{q+2} \leqslant \mathrm{C}$, где C не зависит от $m \in \in \mathbb{N}$ и от $t \in (0,\mathrm{T})$. Поэтому по теореме Лебега [Дьяченко] получим, что для почти всех $t \in (0,\mathrm{T})$

$$\Phi_m \to \eta.$$

И снова по теореме Лебега получим

$$\int\limits_0^t ds\,\Phi_m \to \int\limits_0^t ds\,\eta.$$

Значит,

$$\int\limits_0^t ds\ [\Phi(s) - \eta(s)] = 0 \ \ \forall\, t \in (0,\mathrm{T}),$$

отсюда сразу же получаем, что

$$\Phi_m(t) \to \Phi(t) \tag{3.55}$$

для почти всех $t \in (0,\mathrm{T})$.

С учетом того что $u_{m0} \to u_0$ сильно в $\mathbb{V}$, имеем при $m \to +\infty$

$$\Phi_{m0} \to \Phi_0 \equiv \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0\rangle_j,$$

$$\mathbb{E}_{m0} \to \mathbb{E}_0 \equiv \frac{(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0}{\Phi_0^{\alpha}}.$$

Из (3.55) переходом к пределу при $\to +\infty$ в неравенствах (3.20), (3.21) и в (3.53), (3.54), получим, что

$$\Phi_0 \exp\{\mathbb{E}_0 t\} \leqslant \Phi(t) \leqslant \Phi_0 \exp\{\mathrm{C}_2 t\}, \ \ \alpha = \frac{q+2}{\overline{p}} = 1, \tag{3.56}$$

$$\Phi_0\left[1+(1-\alpha)\mathbb{E}_0\Phi_0^{\alpha-1}t\right]^{1/(1-\alpha)} \leqslant \Phi(t) \leqslant$$
$$\leqslant \Phi_0\left[1+(1-\alpha)\mathrm{C}_2\Phi_0^{\alpha-1}t\right]^{1/(1-\alpha)}, \quad (3.57)$$

где

$$\alpha \equiv \frac{q+2}{\overline{p}}, \quad \mathrm{C}_2 \equiv \mathrm{B}\mathrm{C}_{j^*}^{q+2}2^{(q+2)/\overline{p}},$$
$$|\, v \,|_0 \leqslant \mathrm{C}_{j^*}\langle \mathbb{A}_{j^*}(v), v\rangle_{j^*}^{1/p_{j^*}}, \quad \overline{p} = \max_{j=1,N} p_j.$$

Из (3.56) и (3.57) приходим к первым двум утверждениям теоремы. Рассмотрим теперь неравенства (3.15) и (3.52). Отметим, что при $m \to +\infty$

$$\Psi_{m0} \to \Psi_0 \equiv \frac{1}{(\alpha-1)^{1/(\alpha-1)}} \frac{\Phi_0^{\alpha/(\alpha-1)}}{(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0^{1/(\alpha-1)}},$$
$$\mathrm{T}_{2m} \to \mathrm{T}_2 \equiv \frac{1}{\alpha-1}\frac{\Phi_0}{(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0},$$
$$\mathrm{T}_{1m} \to \mathrm{T}_1 = (q/2)^{-1}\Phi_0^{-q/2}\overline{\mathrm{B}}^{-1},$$

$$\overline{\mathrm{B}} \equiv \mathrm{B}\mathrm{C}_1^{q+2}2^{(q+2)/2},$$

где C_1 — константа наилучшего вложения $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$, B — константа из условия (F) 4.

Рассмотрим сначала неравенство (3.52).

Без ограничения общности переходом к подпоследовательности мы можем считать, что последовательность $\mathrm{T}_{2m} > 0$ равномерна по m, поскольку $\mathrm{T}_2 > 0$. В силу сходимости последовательности $\mathrm{T}_{2\mathrm{m}} \to \mathrm{T}_2$ при $m \to +\infty$, мы можем выбрать монотонно сходящуюся подпоследовательность, которую мы снова обозначим через T_{2m}. Соотвествующие подпоследовательности последовательностей $\{u_{0m}\}$ и $\{u_m\}$ мы снова будем обозначать $\{u_{0m}\}$ и $\{u_m\}$. Пусть последовательность $\mathrm{T}_{2m} \uparrow \mathrm{T}_2$, тогда неравенство (3.52) имеет место равномерно по $t \in [0, \mathrm{T}_{2\overline{m}})$, $m \geqslant \geqslant \overline{m}$ для некоторого фиксированного $\overline{m} \in \mathbb{N}$. Переходя к пределу при $m \to +\infty$ для таких t в неравенстве (3.16), получим

$$\Phi \geqslant \frac{1}{\left[\Phi_0^{1-\alpha} - (\alpha-1)\mathbb{E}_0 t\right]^{1/(\alpha-1)}} = \frac{\Psi_0}{\left[\mathrm{T}_2 - t\right]^{1/(\alpha-1)}} \quad (3.58)$$

при $t \in [0, \mathrm{T}_{2\overline{m}})$. Отсюда в силу произвольности $\overline{m} \in \mathbb{N}$ сразу же получаем, что (3.58) справедливо для всех $t \in [0, \mathrm{T}_2)$ и время разрушения решения задачи (3.1) удовлетворяет оценке сверху: $\mathrm{T}_0 \leqslant \mathrm{T}_2$.

Пусть теперь последовательность $\mathrm{T}_{2m} \downarrow \mathrm{T}_2$. Сделаем предположение о том, что $\mathrm{T}_0 > \mathrm{T}_2$, и пусть, кроме того,

$$M \equiv \sup_{t\in[0,\mathrm{T}_2]} \Phi(t) < +\infty.$$

Тогда (3.52) имеет место равномерно по $t \in [0, T_2)$. Переходя к пределу при $m \to +\infty$ в неравенстве (3.52), получим в силу сделанного предположения относительно T_0 следующее неравенство:

$$\Phi \geqslant \frac{1}{\left[\Phi_0^{1-\alpha} - (\alpha-1)\mathbb{E}_0 t\right]^{1/(\alpha-1)}} = \frac{\Psi_0}{[T_2 - t]^{1/(\alpha-1)}} \leqslant M < +\infty$$

для всех $t \in [0, T_2)$. Из вида полученного неравенства следует, что наше предположение не выполняется. Отсюда сразу же следует, что $T_0 \leqslant T_2$. Аналогичным образом из неравенства (3.15) вытекает, что

$$\Phi(t) \leqslant \frac{\Phi_0}{\left[1 - \frac{q}{2}\Phi_0^{q/2}\overline{\mathrm{B}}t\right]^{2/q}} \quad \forall\, t \in (0, T_1), \quad T_0 \geqslant T_1.$$

Лемма доказана.
Теорема доказана.

§ 4. Однозначная разрешимость задачи (1.1) в сильном обобщенном смысле и разрушение ее решения

В данном параграфе мы рассмотрим задачу (1.1) при таких условиях на операторные коэффициенты, когда можно применить метод сжимающих отображений для доказательства локальной разрешимости. При этом мы, как и в §3, получим необходимые и достаточные условия разрушения решений задачи (1.1) и двусторонние оценки времени разрушения.

Определение 10. Сильным обобщенным решением задачи (1.1) назовем решение класса $u \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{V})$ задачи, удовлетворяющее условиям

$$\langle (\mathbb{A}_0 u)', v\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \langle (\mathbb{A}_j(u))', v\rangle_j = (\mathbb{F}(u), v)_0, \quad \forall\ v \in \mathbb{V}, \quad u(0) = u_0 \in \mathbb{V},$$

где производная по времени понимается в классическом смысле.

Поэтому в силу свойств (A), (A_0) и (F) в предположении, что производная Фреше $\mathbb{A}'_{j,u}(u) : \mathbb{V}_j \to \mathcal{L}(\mathbb{V}_j; \mathbb{V}_j^*)$ оператора $\mathbb{A}_j$ является сильно непрерывной по $u \in \mathbb{V}_j$, получаем, что $\mathbb{A}_0 u \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{V}_0^*)$, $\mathbb{A}_j(u) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{V}_j^*)$, $\mathbb{F}(u) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{W}_0^*)$ и, значит, $\mathbb{A}_0 u$ и $\mathbb{A}_j(u)$ принадлежат классу $\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{V}_0^*)$, а $\mathbb{F}(u) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{V}_0^*)$. Тем самым задача в силу условий (V) и условий нижеследующей теоремы 2 эквивалентна следующей задаче:

$$\langle (\mathbb{A}_0 u)', v\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \langle (\mathbb{A}_j(u))', v\rangle_0 = \langle \mathbb{F}(u), v\rangle_0 \quad \forall\ v \in \mathbb{V}, \quad u(0) = u_0 \in \mathbb{V},$$

где производная по времени понимается в классическом смысле, а символом $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ обозначена скобка двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{V}_0$ и $\mathbb{V}_0^*$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. О необходимом и достаточном условии разрушения решения задачи (1.1). *Пусть выполнены условия* A, A_0, F. *Предположим, что* $\mathbb{V}_0 \subseteq \mathbb{V}_j$, $j = \overline{1,N}$, $\mathbb{V}_0 \subseteq \mathbb{W}_0$. *Кроме того, предположим, что либо* $2 < \overline{p} < q+2$, *либо* $\overline{p} \geqslant q+2$ *и в последнем случае* $\mathbb{V}_{j^*} \subseteq \mathbb{W}_0$, *где*

$$\overline{p} = \max_{j\in\overline{1,N}} p_j, \quad j^* \in \overline{1,N}, \quad p_{j^*} = \overline{p}.$$

Пусть производные Фреше операторов $\mathbb{A}_j : \mathbb{V}_j \to \mathbb{V}_j^*$

$$\mathbb{A}_{j,u}^{'} : \mathbb{BC}(\mathbb{V}_j; \mathcal{L}\left(\mathbb{V}_j, \mathbb{V}_j^*\right)),$$

т. е. являются непрерывными и ограниченными, и пусть, кроме того, они являются монотонными в том смысле, что

$$\langle \mathbb{A}_{j,u}^{'}(u)u_1 - \mathbb{A}_{j,u}^{'}(u)u_2, u_1 - u_2\rangle_j \geqslant 0 \ \ \forall \ \ u, u_1, u_2 \in \mathbb{V}_j, \quad j = \overline{1,N}.$$

Пусть выполнено неравенство

$$(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > 0.$$

Тогда для любого $u_0 \in \mathbb{V}_0$ *найдется такое максимальное* $\mathrm{T}_0 \equiv \mathrm{T}_{u_0} > 0$, *что задача Коши* (1.1) *имеет единственное решение в классе*

$$u(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{V}_0).$$

Причем справедливы следующие двусторонние оценкия:

1) *если* $\alpha \in (0,1)$, *то* $\mathrm{T}_0 = +\infty$ *и*

$$\left[\Phi_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\mathbb{E}_0 t\right]^{1/(1-\alpha)} \leqslant \Phi(t) \leqslant \left[\Phi_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\mathrm{A}t\right]^{1/(1-\alpha)};$$

2) *если* $\alpha = 1$, *то* $\mathrm{T}_0 = +\infty$ *и*

$$\Phi_0 \exp\{\mathbb{E}_0 t\} \leqslant \Phi(t) \leqslant \Phi_0 \exp\{\mathrm{A}t\};$$

3) *если* $\alpha > 1$, *то* $\mathrm{T}_0 \in [\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2]$ *и справедливо предельное равенство*:

$$\limsup_{t\uparrow \mathrm{T}_0} \| u \|_0 = +\infty,$$

где

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u), u\rangle_j, \quad \Phi_0 \equiv \Phi(0),$$

$$\mathrm{A} \equiv \mathrm{C}_{j^*}^{q+2}\mathrm{M}2^{(q+2)/\overline{p}}, \quad \mathbb{E}_0 \equiv \frac{(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0}{\Phi_0^{\alpha}}, \quad \overline{\mathrm{B}} = \mathrm{M}\mathrm{C}_1^{q+2}2^{(q+2)/2},$$

$$\mathrm{T}_1 \equiv \frac{2}{q}\Phi_0^{-q/2}\overline{\mathrm{B}}^{-1}, \quad \mathrm{T}_2 \equiv \Phi_0^{1-\alpha}(\alpha-1)^{-1}\mathbb{E}_0^{-1}, \quad \alpha \equiv \frac{q+2}{\overline{p}}.$$

Доказательство.

Доказательство опять проведем в несколько шагов, причем на каждом шаге сформулируем и докажем предварительный результат в виде соответствующей леммы.

Шаг 1. *Локальная разрешимость.*

Справедлива следующая лемма.

Лемма 4. *Для любого* $u_0 \in \mathbb{V}_0$ *найдется такое максимальное* $\mathrm{T}_0 > 0$, *что для любого* $\mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0)$ *существует единственное решение класса* $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0)$ *задачи* (1.1).

Доказательство.

Рассмотрим задачу (1.1). Заметим, что для оператора

$$\mathbb{A}(u) \equiv \mathbb{A}_0 u + \sum_{j=1}^{N} \mathbb{A}_j(u) : \mathbb{V}_0 \to \mathbb{V}_0^*$$

справедливо равенство

$$\langle \mathbb{A}(u_1) - \mathbb{A}(u_2), u_1 - u_2\rangle_0 = \langle \mathbb{A}_0 u_1 - \mathbb{A}_0 u_2, u_1 - u_2\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \langle \mathbb{A}_j(u_1) - \mathbb{A}_j(u_2), u_1 - u_2\rangle_j \geqslant$$

$$\geqslant \langle \mathbb{A}_0 u_1 - \mathbb{A}_0 u_2, u_1 - u_2\rangle_0 = \| u_1 - u_2 \|_0^2 .$$

Стало быть, для оператора $\mathbb{A}$ существует липшиц-непрерывный обратный оператор $\mathbb{A}^{-1} : \mathbb{V}_0^* \to \mathbb{V}_0$ с постоянной Липшица, равной 1. С учетом этого сделаем замену в уравнении (1.1): $v = \mathbb{A}(u)$, тогда уравнение примет следующий эквивалентный вид:

$$\frac{dv}{dt} = \mathbb{F}(\mathbb{A}^{-1}(v)), \quad v(0) = v_0, \tag{4.1}$$

где $v_0 = \mathbb{A}(u_0)$. Задача (4.1) эквивалентна следующей:

$$v(t) = v_0 + \int_0^t ds \, \left[\mathbb{F}(\mathbb{A}^{-1}(v))\right](s). \tag{4.2}$$

Воспользуемся методом сжимающих отображений для доказательства локальной разрешимости уравнения (4.2) в классе $v \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0^*)$. С этой целью введем замкнутое ограниченное выпуклое подмножество банахова пространства $\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0^*)$:

$$\mathbb{B}_\mathrm{R} = \{v \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0^*) : \| v \|_\mathrm{T}^* \leqslant \mathrm{R}\},$$

где

$$\| v \|_\mathrm{T}^* = \operatorname*{ess.sup}_{t\in(0,\mathrm{T})} \| v \|_0^* .$$

Докажем, что оператор

$$\mathbb{H}(u) \equiv \int\limits_0^t ds\,[\mathbb{F}(\mathbb{A}^{-1}(v))](s)$$

действует из $\mathbb{B}_{\mathrm{R}}$ в $\mathbb{B}_{\mathrm{R}}$ и является сжимающим. Нетрудно доказать, что оператор $\mathbb{H}(v)$ действует из $\mathbb{B}_{\mathrm{R}}$ в $\mathbb{B}_{\mathrm{R}}$ при достаточно большом R и при достаточно малом T. Поэтому сразу же займемся сжимаемостью оператора $\mathbb{H}(v)$. Действительно, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\| \mathbb{H}(v_1) - \mathbb{H}(v_2) \|_{\mathrm{T}}^* \leqslant \mathrm{T}\mu_1(\overline{\mathrm{R}}) \| \mathbb{A}^{-1}(v_1)) - \mathbb{A}^{-1}(v_2)) \|_{\mathrm{T}}, \tag{4.3}$$

где

$$\| \cdot \|_{\mathrm{T}} \equiv \operatorname*{ess.sup}_{t\in(0,\mathrm{T})} \| \cdot \|_0,$$

$$\overline{\mathrm{R}} = \max\{\| \mathbb{A}^{-1}(v_1) \|_{\mathrm{T}}, \| \mathbb{A}^{-1}(v_2) \|_{\mathrm{T}}\}.$$

Из (4.3) в силу свойств оператора $\mathbb{A}^{-1}$ вытекает следующая цепочка неравенств:

$$\| \mathbb{H}(v_1) - \mathbb{H}(v_2) \|_{\mathrm{T}}^* \leqslant \mathrm{TC}\mu_1(\mathrm{R}) \| v_1 - v_2 \|_{\mathrm{T}}^* . \tag{4.4}$$

При условии $\mathrm{T} \leqslant 1/2[\mu_1(\mathrm{R})\mathrm{C}]^{-1}$ из неравенства (4.4) вытекает сжимаемость оператора $\mathbb{H}(v)$ на множестве $\mathbb{B}_{\mathrm{R}}$. Значит, существует единственное решение уравнения (4.2) класса $v \in \mathbb{L}^{\infty}(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_0^*)$. Используя стандартный алгоритм продолжения решений интегральных уравнений во времени, приходим к выводу, что найдется такое максимальное $\mathrm{T}_0 > 0$, что существует единственное решение уравнения (4.2) класса $v \in \mathbb{L}^{\infty}(0, \mathrm{T}_0; \mathbb{V}_0^*)$, причем либо $\mathrm{T}_0 = +\infty$, либо $\mathrm{T}_0 < +\infty$ и в последнем случае имеет место предельное равенство

$$\limsup_{t\uparrow \mathrm{T}_0} \| v \|_0^* = +\infty.$$

Наконец, из уравнения (4.2) в силу сглаживающих свойств оператора $\mathbb{H}(v)$ получим, что $v \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{V}_0^*)$.

Теперь заметим, что имеет место равенство

$$\mathbb{A}(u) \equiv \mathbb{A}_0 u + \sum_{j=1}^{N} \mathbb{A}_j(u) = v(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{V}_0^*). \tag{4.5}$$

Уравнение (4.5) в классе $u \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{V}_0)$ эквивалентно следующему:

$$u(t) = \mathbb{A}^{-1}(v).$$

Из последнего уравнения следует, что $u(t) \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{V}_0)$. Действительно,

$$\| u(t) - u(t_0) \|_0 \leqslant \| \mathbb{A}^{-1}(v)(t) - \mathbb{A}^{-1}(v)(t_0) \|_0 \leqslant \| v(t) - v(t_0) \|_0^* \to +0$$

при $t \to t_0$. Значит, существует единственное решение уравнения (4.5) класса $u \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{V}_0)$. Докажем теперь, что на самом деле решение принадлежит классу $\mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{V}_0)$.

Рассмотрим сначала производную Фреше оператора $\mathbb{A}$:

$$\mathbb{A}_u^{'}(u) = \mathbb{A}_0 + \sum_{j=1}^{N} \mathbb{A}_{j,u}^{'}(u). \tag{4.6}$$

В силу условий теоремы имеем

$$\langle \mathbb{A}_u^{'}(u)u_1 - \mathbb{A}_u^{'}(u)u_2, u_1 - u_2 \rangle \geqslant \| u_1 - u_2 \|_0^2$$

для любых $u, u_1, u_2 \in \mathbb{V}_0$. Значит, в силу (4.6) при любом фиксированном $u \in \mathbb{V}_0$ существует липшиц-непрерывный обратный оператор $[\mathbb{A}_u^{'}(u)]^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{V}_0^*; \mathbb{V}_0)$.

Теперь рассмотрим следующее уравнение:

$$\mathbb{A}_0 u + \sum_{j=1}^{n} \mathbb{A}_j(u) = v(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{V}_0^*). \tag{4.7}$$

Для дальнейшего изложения нам потребуется доказать, что оператор

$$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{I} + \widehat{\mathbb{B}}, \;\; \widehat{\mathbb{B}} = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{A}_0^{-1} \mathbb{A}_{j,u}^{'}(u)$$

имеет ограниченный обратный. Здесь $\mathbb{A}_{j,u}^{'}(u)$ — производная Фреше на фиксированном элементе $u \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{V}_0)$ оператора $\mathbb{A}_j$. Действительно, рассмотрим уравнение

$$\left[\mathbb{I} + \widehat{\mathbb{B}}\right] w = 0. \tag{4.8}$$

Докажем, что это уравнение имеет только тривиальное решение. С этой целью подействуем оператором $\mathbb{A}_0$ на обе части уравнения (4.8), тогда получим

$$\mathbb{A}_u^{'} w = \mathbb{A}_0 w + \sum_{j=1}^{n} \mathbb{A}_{j,u}(u) w = 0 \;\; \forall\, u \in \mathbb{V}_0.$$

Но мы ранее доказали, что для оператора $\mathbb{A}_u^{'}(u)$ определен липшиц-непрерывный обратный оператор $[\mathbb{A}_u^{'}(u)]^{-1}$. Теперь подействуем этим оператором на обе части последнего равенства. Все операции были эквивалентными, и поэтому приходим к выводу, что $w = 0$ в классе $\mathbb{V}_0$.

В классе $u \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{V}_0)$ уравнение (4.7) эквивалентно следующей задаче:

$$\left[\mathbb{A}_0 + \sum_{j=1}^{N} \mathbb{A}_{j,u}^{'}(u)\right] u^{'} = v^{'} \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{V}_0^*), \quad u = \mathbb{A}^{-1} v.$$

Подействуем оператором $\mathbb{A}_0^{-1}$ на последнее уравнение, тогда получим

$$\left[\mathbb{I} + \widehat{\mathbb{B}}\right] u^{'} = \mathbb{A}_0^{-1} v^{'}. \tag{4.9}$$

Введем оператор

$$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{I} + \widehat{\mathbb{B}} : \mathbb{V}_0 \to \mathbb{V}_0^*,$$

для которого, как мы уже доказали, существует обратный линейный ограниченный оператор. Поэтому (4.9) эквивалентно следующему уравнению:

$$u^{'} = \widehat{\mathbb{C}}^{-1} \mathbb{A}_0^{-1} v^{'}. \tag{4.10}$$

Нам осталось доказать, что $u^{'} = \widehat{\mathbb{C}}^{-1} \mathbb{A}_0^{-1} v^{'} \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{V}_0)$ при фиксированном $u \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{V}_0)$. Действительно, в силу (4.10) справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \| u^{'}(t) - u^{'}(t_0) \|_0 \leqslant & \| \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) \mathbb{A}_0^{-1} [v^{'}(t) - v^{'}(t_0)] \|_0 + \\ & + \| (\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) - \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t)) \mathbb{A}_0^{-1} v^{'}(t_0) \|_0 \leqslant \\ \leqslant & \mathrm{C} \| v^{'}(t) - v^{'}(t_0) \|_0^* + \mathrm{C} \| \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) - \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t) \|_{\mathbb{V}_0 \to \mathbb{V}_0}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Отметим, что линейный при фиксированном $u \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{V}_0)$ оператор $\widehat{\mathbb{C}}$ является непрерывным, а значит, в силу теоремы Банаха об обратном отображении, оператор $\widehat{\mathbb{C}}^{-1}$ является линейным непрерывным и, следовательно, в силу линейности ограниченным. Стало быть, мы можем воспользоваться спектральным представлением для линейного ограниченного оператора $\widehat{\mathbb{C}}^{-1} : \mathbb{V}_0 \to \mathbb{V}_0$.

Прежде всего введем резольвенту оператора $\widehat{\mathbb{C}}$:

$$\mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}) = \left(\lambda \mathbb{I} - \widehat{\mathbb{C}}\right)^{-1}.$$

Пусть Γ — окружность $|\lambda| = r$ с достаточно большим радиусом, большим чем

$$\sup_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} \| \widehat{\mathbb{C}} \|_{\mathbb{V}_0 \to \mathbb{V}_0}.$$

Введенная величина определена корректно, поскольку при $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \subset [0, \mathrm{T}_0)$ имеет место неравенство

$$\sup_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} \| u \|_0 < +\infty.$$

Теперь мы можем воспользоваться спектральным представлением для операторов $\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t)$ и $\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0)$ с одним и тем же введенным ранее контуром Γ:

$$\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}d\lambda\,\lambda^{-1}\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t)),\ \ \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}d\lambda\,\lambda^{-1}\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0)).$$

Очевидно, имеем

$$\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t)-\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}d\lambda\,\lambda^{-1}\left[\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t))-\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0))\right].$$

Теперь воспользуемся известным представлением для резольвент операторов:

$$\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t))-\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0))=\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0))\sum_{n=1}^{+\infty}[(\widehat{\mathbb{C}}(t)-\widehat{\mathbb{C}}(t_0))\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0)]^n$$

при условии

$$\|\,\widehat{\mathbb{C}}(t_0)-\widehat{\mathbb{C}}(t)\,\|_{\mathbb{V}_0\to\mathbb{V}_0}\|\,\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0))\,\|_{\mathbb{V}_0\to\mathbb{V}_0}\leqslant\delta<1.$$

Справедлива следующее неравенство:

$$\|\,\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t))-\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0))\,\|_{\mathbb{V}_0\to\mathbb{V}_0}\leqslant\|\,\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0))\,\|_{\mathbb{V}_0\to\mathbb{V}_0}\times$$
$$\times\sum_{n=1}^{+\infty}\|\,\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0))\,\|^n_{\mathbb{V}_0\to\mathbb{V}_0}\|\,\widehat{\mathbb{C}}(t)-\widehat{\mathbb{C}}(t_0)\,\|^n_{\mathbb{V}_0\to\mathbb{V}_0}.$$

Теперь заметим, что

$$\widehat{\mathbb{C}}(t)-\widehat{\mathbb{C}}(t_0)=\mathbb{A}_0^{-1}\sum_{j=1}^{N}\left[\mathbb{A}_{j,u}(u(t))-\mathbb{A}_{j,u}(u(t_0))\right].$$

В силу непрерывности производных Фреше $\mathbb{A}_{j,u}(\cdot)$ по $u\in\mathbb{V}_0$ и $u\in\in\mathbb{C}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{V}_0)$, имеем

$$\|\,\widehat{\mathbb{C}}(t)-\widehat{\mathbb{C}}(t_0)\,\|_{\mathbb{V}_0\to\mathbb{V}_0}\leqslant\sum_{j=1}^{N}\|\,\mathbb{A}_{j,u}(u(t))-\mathbb{A}_{j,u}(u(t_0))\,\|_{\mathbb{V}_0\to\mathbb{V}_0^*}\to+0,$$
$$\|\,\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t))-\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0))\,\|_{\mathbb{V}_0\to\mathbb{V}_0}\to 0,$$
$$\|\,\widehat{\mathbb{C}}(t)^{-1}-\widehat{\mathbb{C}}(t_0)^{-1}\,\|_{\mathbb{V}_0\to\mathbb{V}_0}\to+0$$

при $t\to t_0$.

Значит, в силу (4.11) $u\in\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{V}_0)$.

Лемма доказана.

Шаг 2. *Априорные оценки и разрушение.*

Справедлива следующая лемма.

Лемма 5. *Пусть*

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0 + \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u), u\rangle_j, \quad \alpha \equiv \frac{q+2}{\overline{p}}.$$

Тогда

1) *если* $\alpha \in (0,1)$, *то* $\mathrm{T}_0 = +\infty$ *и справедливо двустороннее неравенство*

$$\left[\Phi_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\mathrm{E}_0 t\right]^{1/(1-\alpha)} \leqslant \Phi(t) \leqslant \left[\Phi_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\mathrm{A}t\right]^{1/(1-\alpha)};$$

2) *если* $\alpha = 1$, *то* $\mathrm{T}_0 = +\infty$ *и справедливо двустороннее неравенство*

$$\Phi_0 \exp(\mathrm{E}_0 t) \leqslant \Phi(t) \leqslant \Phi_0 \exp(\mathrm{A}t);$$

3) *если* $\alpha > 1$, *то* $\mathrm{T}_0 \in [\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2]$, *причем*

$$\lim_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \Phi(t) = +\infty,$$

где

$$\mathrm{T}_1 \equiv \frac{2}{q}\Phi_0^{-q/2}\overline{\mathrm{B}}^{-1}, \quad \mathrm{T}_2 \equiv \frac{1}{\alpha - 1}\Phi_0^{1-\alpha}\mathrm{E}_0^{-1},$$
$$\mathrm{E}_0 \equiv \frac{(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0}{\Phi_0^{\alpha}}, \quad \mathrm{A} \equiv \mathrm{C}_{j^*}^{q+2}\mathrm{M}2^{(q+2)/\overline{p}}.$$

Доказательство.

Пусть $u \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{V}_0)$ — максимальное решение задачи (1.1). Тогда, умножив обе части равенства (1.1) на $u(t)$ и на $u_t'(t)$, после интегрирования по частям получим следующие равенства:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u), u\rangle_j\right] = (\mathbb{F}(u), u)_0, \tag{4.12}$$

$$\langle \mathbb{A}_0 u', u'\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N}\langle (\mathbb{A}_j(u))', u'\rangle_j = \frac{1}{q+2}\frac{d}{dt}(\mathbb{F}(u), u)_0. \tag{4.13}$$

Интегрируя уравнение (4.12) по $t \in (0,\mathrm{T})$, получим

$$\Phi(t) = \Phi_0 + \int_0^t ds\ (\mathbb{F}(u), u)_0, \tag{4.14}$$

где

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u), u\rangle_j, \quad \Phi_0 = \Phi(0).$$

Так как по условию $\mathbb{V}_0 \subset \mathbb{W}_0$, найдется постоянная $\mathrm{C}_1 > 0$, такая что

$$| v |_0 \leqslant \mathrm{C}_1 \langle \mathbb{A}_0 v, v \rangle_0^{1/2},$$

и из (4.14) вытекает неравенство

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 + \mathrm{M}\mathrm{C}_1^{q+2} \int_0^t ds\, \langle \mathbb{A}_0 v, v \rangle_0^{(q+2)/2} \leqslant \Phi_0 + \overline{\mathrm{B}} \int_0^t ds\, \Phi^{(q+2)/2}(s),$$

$$\overline{\mathrm{B}} \equiv \mathrm{M}\mathrm{C}_1^{q+2} 2^{(q+2)/2}.$$

По теореме Бихари [Демидович] имеем

$$\Phi(t) \leqslant \frac{\Phi_0}{\left[1 - \frac{q}{2}\Phi_0^{q/2}\overline{\mathrm{B}}t\right]^{2/q}} \quad \forall\, t \in [0, \mathrm{T}_1), \quad \mathrm{T}_1 \equiv \frac{2}{q}\Phi_0^{-q/2}\overline{\mathrm{B}}^{-1}. \tag{4.15}$$

Стало быть, в случае $\overline{p} < q + 2$, в силу (4.15) $\mathrm{T}_0 \geqslant \mathrm{T}_1$.

Пусть теперь $\overline{p} \geqslant q + 2$. Воспользуемся тем, что в данном случае всегда найдется такое $j^* \in \overline{1, N}$ и $p_{j^*} = \overline{p}$ с $p_{j^*} \geqslant q + 2$ такое, что $\mathbb{V}_{j^*} \subset \subset \mathbb{W}_0$. Пусть C_{j^*} — константа вложения $\mathbb{V}_{j^*} \subset \mathbb{W}_0$:

$$| v |_0 \leqslant \mathrm{C}_{j^*} \langle \mathbb{A}_{j^*}(v), v \rangle_{j^*}^{1/p_{j^*}},$$

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 + \mathrm{C}_{j^*}^{q+2}\mathrm{M} \int_0^t ds\, \langle \mathbb{A}_{j^*}(v), v \rangle_{j^*}^{(q+2)/p_{j^*}} \leqslant$$

$$\leqslant \Phi_0 + \mathrm{C}_{j^*}^{q+2}\mathrm{M} \left(\frac{\overline{p}}{\overline{p} - 1}\right)^{(q+2)/\overline{p}} \int_0^t ds\, \Phi^{(q+2)/\overline{p}}(s).$$

Пусть

$$\alpha \equiv \frac{q+2}{\overline{p}},$$

Рассмотрим два случая:

$$\alpha = 1, \quad \alpha \in (0, 1).$$

В первом случае по теореме Гронуолла–Беллмана [Демидович]

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 \exp\{\mathrm{A}t\}, \quad \mathrm{A} \equiv \mathrm{C}_{j^*}^{q+2}\mathrm{M} \left(\frac{\overline{p}}{\overline{p} - 1}\right)^{(q+2)/\overline{p}}. \tag{4.16}$$

Во-втором случае $\alpha \in (0, 1)$ по теореме Бихари получим

$$\Phi(t) \leqslant \left[\Phi_0^{1-\alpha} + (1 - \alpha)\mathrm{A}t\right]^{1/(1-\alpha)}. \tag{4.17}$$

Из (4.16) и (4.17) следует, что величина $\mathrm{T}_0 = +\infty$ в случае $\alpha \in (0, 1]$.

Теперь из соотношений (4.12) и (4.13) точно так же, как и на шаге 5 теоремы 1, выводим следующее обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка:

$$\Phi''\Phi - \alpha\left(\Phi'\right)^2 \geqslant 0, \quad \alpha = \frac{q+2}{\overline{p}}. \tag{4.18}$$

Рассмотрим три возможных случая:

$$\alpha > 1, \quad \alpha = 1, \quad \alpha \in (0,1).$$

Пусть $\alpha > 1$, тогда интегрируя дифференциальное неравенство (4.18) с учетом (4.12) и (4.13), получим

$$\Phi(t) \geqslant \frac{1}{\left[\Phi_0^{1-\alpha} - (\alpha-1)\mathbb{E}_0\right]^{1/(\alpha-1)}}, \quad \mathbb{E}_0 \equiv \frac{(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0}{\Phi_0^{\alpha}},$$

из которого сразу же получаем: $\mathrm{T}_0 \leqslant \mathrm{T}_2 \equiv \Phi_0^{1-\alpha}(\alpha-1)^{-1}\mathbb{E}_0^{-1}$.

Пусть теперь $\alpha = 1$, тогда из (4.18) следует

$$\Phi(t) \geqslant \Phi_0 \exp\{\mathbb{E}_0 t\}.$$

Наконец, если $\alpha \in (0,1)$, то из (4.18) вытекает, что

$$\Phi(t) \geqslant \left[\Phi_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\mathbb{E}_0 t\right]^{1/(1-\alpha)}.$$

Таким образом, лемма доказана.

Теорема доказана.

§ 5. Однозначная разрешимость задачи (1.2) в слабом обобщенном смысле и оценки времени и скорости разрушения решения

На протяжении этого параграфе мы будем предполагать, что имеет место следующая цепочка непрерывных вложений:

$$\mathbb{W}_1 \subset \mathbb{V}_0 \subset \mathbb{W}_0 \subset \mathbb{H} \subset \mathbb{W}_0^* \subset \mathbb{V}_0^* \subset \mathbb{W}_1^*.$$

Определение 11. Слабым обобщенным решением задачи (1.2) назовем решение $u(t)$ задачи, удовлетворяющее условиям

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\varphi(t)\left[\langle \mathbb{A}_0 u', w\rangle_0 + (\mathbb{B}(u), w)_1 - (\mathbb{F}(u), w)_0\right] = 0 \tag{5.1}$$

$\forall\, w \in \mathbb{W}_1$, $\forall\, \varphi(t) \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T})$. В классе

$$u \in \mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_1), \quad u' \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0), \quad \langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0 \in \mathbb{H}^1(0,\mathrm{T}),$$
$$\mathbb{A}_0 u \in \mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0^*) \cap \mathbb{H}^1(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_1^*),$$

при условии, что почти всюду на интервале $(0,\mathrm{T})$ имеет место равенство

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0 = 2\langle \mathbb{A}_0 u', u\rangle_0,$$

задача (5.1) эквивалентна следующей задаче:

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\varphi(t)\left(\mathbb{A}_0 u' + \mathbb{B}(u) - \mathbb{F}(u), w\right)_1 = 0 \ \ \forall\, w \in \mathbb{W}_1, \ \ \forall\, \varphi(t) \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T}),$$

которая в свою очередь в силу результата §12 Приложения Б эквивалентна задаче

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\left(\mathbb{A}_0 u' + \mathbb{B}(u) - \mathbb{F}(u), v\right)_1 = 0 \ \ \forall\, v \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_1).$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* $(\mathrm{A})_0$, (B), (F) *и, кроме того,* $u_0 \in \mathbb{W}_1$ *и* $\mathbb{W}_1 \hookrightarrow \mathbb{W}_0$, *т. е. оператор вложения вполне непрерывен. Пусть, кроме того, начальная функция удовлетворяет условию*

$$(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 - (\mathbb{B}(u_0), u_0)_1 > 0.$$

Тогда найдется такое максимальное $\mathrm{T}_0 > 0$, *что существует единственное сильное обобщенное решение задачи* (1.2) *класса*

$$u \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_1), \ \ \frac{du}{dt} \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0) \ \ \forall\, \mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}_0),$$
$$\mathbb{A}_0 u \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0^*) \cap \mathbb{H}^1(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_1^*),$$
$$\langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0 \in \mathbb{H}^1(0,\mathrm{T}),$$

и почти всюду на интервале $(0,\mathrm{T})$ *имеет место равенство*

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0 = 2\langle \mathbb{A}_0 u', u\rangle_0.$$

Причем

$$\limsup_{t\uparrow \mathrm{T}_0} \langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0 = +\infty$$

и справедливы двусторонние оценки скорости разрушения:

$$[qc_1]^{-1/q} \leqslant \langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0^{1/2} [\mathrm{T}_0 - t]^{1/q} \leqslant [qc_2]^{-1/q} \ \ \forall\, t \in [0,\mathrm{T}_0),$$

и времени разрушения:

$$(qc_1)^{-1}\langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0\rangle_0^{-q/2} \leqslant \mathrm{T}_0 \leqslant (qc_2)^{-1}\langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0\rangle_0^{-q/2},$$

где

$$c_2 \equiv \frac{\left[(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 - (\mathbb{B}(u_0), u_0)_1\right]}{\langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0\rangle_0^{(q+2)/2}}, \ \ c_1 \equiv \mathrm{BC}_1^{q+2},$$

$$\left|(\mathbb{F}(v),v)_0\right| \leqslant \mathrm{B}\,|v|_0^{q+2}, \quad |v|_0 \leqslant \mathrm{C}_1\langle \mathbb{A}_0 v, v\rangle_0^{1/2}.$$

Доказательство.

Замечание 5. Из условий теоремы следует, что $u(t):[0,\mathrm{T}]\to$ $\to \mathbb{V}_0$ — сильно абсолютно непрерывная функция на отрезке $[0,\mathrm{T}]$ со значением в $\mathbb{V}_0$. И стало быть, имеет смысл начальное условие $u(0)=$ $=u_0$.

Доказательство теоремы, так же как и в предыдущих случаях, проведем в несколько этапов.

Шаг 1. *«Галеркинские» приближения.*

Рассмотрим следующую схему «Галеркинских» приближений:

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\varphi(t)\left[\langle \mathbb{A}_0 u_m^{'}, w_j\rangle_0 + (\mathbb{B}(u_m),w_j)_1 - (\mathbb{F}(u_m),w_j)_0\right] = 0 \qquad (5.2)$$

$$\forall\,\varphi(t)\in\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T}),\ \forall\, j=\overline{1,m},$$

$$u_m=\sum_{k=1}^{m} c_{mk}(t)w_k,\ c_{mk}(0)=\alpha_{mk},\ u_{m0}=\sum_{k=1}^{m}\alpha_{mk}w_k\to u_0 \text{ сильно в } \mathbb{W}_1,$$

где $\{w_k\}_{k=1}^{+\infty}$ — линейно независимая система функций, плотная в $\mathbb{W}_1$.

В силу определения u_m в классе $c_{mk}(t)\in\mathbb{C}^{(1)}[0,\mathrm{T}_{m0})$ из (5.2) получим

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\varphi(t)\left[\sum_{k=1}^{m} a_{kj}\frac{dc_{mk}}{dt} + (\mathbb{B}(u_m),w_j)_1 - (\mathbb{F}(u_m),w_j)_0\right] = 0$$

$$\forall\,\varphi(t)\in\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T}),\ \ a_{kj}=\langle \mathbb{A}_0 w_k, w_j\rangle_0.$$

В классе $c_{mk}(t)\in\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}])$ подынтегральное выражение в квадратных скобках принадлежит классу $\mathbb{C}[0,\mathrm{T}]$. В силу очевидного вложения $\mathbb{C}_0^{\infty}([0,\mathrm{T}])\subset\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T})$ и основной леммы вариационного исчисления из (5.2) приходим к поточечному равенству

$$\sum_{k=1}^{m} a_{kj}\frac{dc_{mk}}{dt} + (\mathbb{B}(u_m),w_j)_1 = (\mathbb{F}(u_m),w_j)_0, \quad a_{kj}\equiv\langle \mathbb{A}_0 w_k, w_j\rangle_0, \quad (5.3)$$

где $a_{kj}\equiv\langle \mathbb{A}_0 w_k, w_j\rangle_0$. Заметим, что соответствующая квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1,1}^{m,m} a_{kj}\xi_k\xi_j = \langle \mathbb{A}_0\eta,\eta\rangle_0$$

является неотрицательно определенной в силу положительной определенности оператора $\mathbb{A}_0$. Причем она обращается в нуль тогда и только

тогда, когда $\eta \equiv \sum\limits_{i=1}^{N} \xi_i w_i$. Но система функций $\{w_i\}_{i=1}^{m}$ является по определению линейно независимой в $\mathbb{W}_1$. Стало быть, $\eta = 0$ тогда и только тогда, когда $\{\xi_i\}_{i=1}^{m} = \mathbf{0}$. Значит, в силу критерия Сильвестра [Постников] приходим к выводу, что $\det\{a_{kj}\}_{k,j=1,1}^{m,m} > 0$. Наконец, в силу полунепрерывности оператора $\mathbb{B} : \mathbb{W}_1 \to \mathbb{W}_1^*$ и ограниченной липшиц-непрерывности оператора $\mathbb{F} : \mathbb{W}_0 \to \mathbb{W}_0^*$ приходим к выводу, что (5.3) — это система типа Коши–Ковалевской и удовлетворяет условиям общей теоремы о разрешимости систем обыкновенных дифференциальных уравнений [Петровский]. Поэтому найдется такое $\mathrm{T}_{m0} > 0$, что существует решение системы (5.3) класса $\mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_{m0}); \mathbb{W}_1)$.

Шаг 2. *Априорные оценки.*

Справедлива следующая лемма.

Лемма 6. *Найдется такое* $\mathrm{T} > 0$, *независящее от* $\mathrm{m} \in \mathbb{N}$, *что для некоторой подпоследовательности последовательности* $\{u_m\}$ *справедливы следующие свойства равномерно по* $m \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{gathered}
u_m \ \textit{ограничено в} \ \mathbb{L}^{\infty}(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_1); \\
u_m^{'} \ \textit{ограничено в} \ \mathbb{L}^{2}(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_0); \\
\mathbb{A}_0 u_m \ \textit{ограничено в} \ \mathbb{L}^{\infty}(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_0^*); \\
\mathbb{B}(u_m) \ \textit{ограничено в} \ \mathbb{L}^{\infty}(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_1^*); \\
\mathbb{F}(u_m) \ \textit{ограничено в} \ \mathbb{L}^{\infty}(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_0^*).
\end{gathered}
$$

Доказательство.

Умножим обе части равенства (5.3) последовательно на c_{mj} и на $c_{mj}^{'}$ и просуммируем по $j = \overline{1, m}$. Тогда получим

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0 + (\mathbb{B}(u_m), u_m)_1 = (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0 , \tag{5.4}
$$

$$
\langle \mathbb{A}_0 u_m^{'}, u_m^{'} \rangle_0 + \frac{1}{q+2}\frac{d}{dt}\,(\mathbb{B}(u_m), u_m)_1 = \frac{1}{q+2}\frac{d}{dt}\,(\mathbb{F}(u_m), u_m)_0 . \tag{5.5}
$$

Из (5.5) получим

$$
\int\limits_0^t ds\, \langle \mathbb{A}_0 u_m^{'}, u_m^{'} \rangle_0 + \frac{1}{q+2}\,(\mathbb{B}(u_m), u_m)_1 =
$$

$$
= \frac{1}{q+2}\left[(\mathbb{B}(u_{m0}), u_{m0})_1 - (\mathbb{F}(u_{m0}), u_{m0})_0\right] + \frac{1}{q+2}\,(\mathbb{F}(u_m), u_m)_0 .
$$

По условию теоремы $(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > (\mathbb{B}(u_0), u_0)_1$. Поэтому, переходя, если это необходимо, к подпоследовательности, получим

$$
(\mathbb{F}(u_{m0}), u_{m0})_0 > (\mathbb{B}(u_{m0}), u_{m0})_1 .
$$

В этом случае сразу же приходим к выводу, что

$$\int\limits_0^t ds\,\langle \mathbb{A}_0 u_m', u_m'\rangle_0 + \frac{1}{q+2}\,(\mathbb{B}(u_m), u_m)_1 \leqslant \frac{1}{q+2}\,(\mathbb{F}(u_m), u_m)_0\ . \quad (5.6)$$

Интегрируя по $t \in [0, \mathrm{T}]$ равенство (5.4), получим

$$\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle_0 \leqslant \langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, u_{m0}\rangle_0 + 2\int\limits_0^t ds\ (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0 \leqslant$$

$$\leqslant \langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, u_{m0}\rangle_0 + 2\mathrm{B}\int\limits_0^t ds\ \mid u_m \mid_0^{q+2} \leqslant$$

$$\leqslant \langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, u_{m0}\rangle_0 + 2\mathrm{B}\mathrm{C}_1^{q+2}\int\limits_0^t ds\,\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle_0^{(q+2)/2}.$$

Пусть $\Phi_m \equiv \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle_0$, тогда

$$\Phi_m \leqslant \Phi_{m0} + \mathrm{A}\int\limits_0^t ds\,\Phi_m^{(q+2)/2},\ \ \mathrm{A} \equiv 2\mathrm{B}\mathrm{C}_1^{q+2}. \quad (5.7)$$

По теореме Бихари [Демидович] из (5.7) получим

$$\Phi_m \leqslant \frac{\Phi_{m0}}{\left[1 - \frac{q}{2}\Phi_{m0}^{q/2}\mathrm{A}t\right]^{2/q}} = \frac{\left(\frac{2}{q}\right)^{2/q}\mathrm{A}^{-2/q}}{[\mathrm{T}_{2m} - t]^{2/q}},\ \ \mathrm{T}_{2m} \equiv \frac{2}{q}\Phi_{m0}^{-q/2}\mathrm{A}^{-1}. \quad (5.8)$$

Поскольку $u_{m0} \to u_0$ сильно в $\mathbb{W}_1 \subset \mathbb{V}_0$, то $\mathrm{T}_{2m} \to \mathrm{T}_2$, где

$$\mathrm{T}_2 \equiv \frac{2}{q}\Phi_0^{-q/2}\mathrm{A}^{-1}.$$

Переходя к подпоследовательности, можно считать, что либо $\mathrm{T}_{2m} \uparrow \mathrm{T}_2$, либо $\mathrm{T}_{2m} \downarrow \mathrm{T}_2$.

Рассмотрим сначала случай $\mathrm{T}_{2m} \downarrow \mathrm{T}_2$. Тогда $\mathrm{T}_{2m} - t \geqslant \mathrm{T}_2 - t$, и из (5.8) получим

$$\Phi_m \leqslant \left(\frac{2}{q}\right)^{2/q}\mathrm{A}^{-2/q}\frac{1}{[\mathrm{T}_2 - t]^{2/q}}\ \ \forall\, t \in [0, \mathrm{T}_2).$$

Рассмотрим теперь случай $\mathrm{T}_{2m} \uparrow \mathrm{T}_2$. В этом случае $\mathrm{T}_{2m} - t \geqslant$ $\geqslant \mathrm{T}_{2\overline{m}} - t$, $m > \overline{m} \in \mathbb{N}$, и из (5.8) следует

$$\Phi_m \leqslant \left(\frac{2}{q}\right)^{2/q}\mathrm{A}^{-2/q}\frac{1}{[\mathrm{T}_{2\overline{m}} - t]^{2/q}}\ \ \forall\, t \in [0, \mathrm{T}_{2\overline{m}})$$

Отсюда сразу же получаем, что для любого $\mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_2)$ найдется такая постоянная $\mathrm{C}(\mathrm{T})$, что

$$\Phi_m \leqslant \mathrm{C}(\mathrm{T}) < +\infty.$$

С другой стороны, $\mid u_m \mid_0 \leqslant \mathrm{C}_0 \Phi_m^{1/2} \leqslant \mathrm{C}(\mathrm{T})$. И из (5.6) следует цепочка неравенств

$$\int_0^t ds \, \langle \mathbb{A}_0 u_m^{'}, u_m^{'} \rangle_0 + \frac{1}{q+2} \, (\mathbb{B}(u_m), u_m)_1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{q+2} \, (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0 \leqslant \frac{1}{q+2} \mathrm{B} \mid u_m \mid_0^{q+2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\mathrm{C}_1 \mathrm{B}}{q+2} \Phi_m^{(q+2)/2} \leqslant \mathrm{C}(\mathrm{T}) < +\infty \quad \forall \, \mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_2).$$

Итак, мы доказали, что

$$u_m^{'} \text{ ограничено в } \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_0),$$
$$u_m \text{ ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_1),$$
$$\mathbb{A}_0 u_m \text{ ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_0^*),$$
$$\mathbb{B}(u_m) \text{ ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_1^*).$$

Лемма доказана.

Переходя, если это необходимо, к подпоследовательности, получим

$$u_m \rightharpoonup u \ *-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_1),$$
$$u_m^{'} \rightharpoonup u^{'} \text{ слабо в } \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_0),$$
$$\mathbb{A}_0 u_m \rightharpoonup \mathbb{A}_0 u \ *-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_0^*),$$
$$\mathbb{B}(u_m) \rightharpoonup \chi \ *-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_1^*).$$

Здесь следует заметить, что из

$$u_m \rightharpoonup u \ *-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_1)$$

вытекает

$$u_m^{'} \rightharpoonup u^{'} \text{ в } \mathcal{D}^{'}(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}),$$

поэтому в силу слабой сходимости в $\mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_0)$,

$$u_m^{'} \rightharpoonup \eta,$$

приходим к выводу, что $\eta(t) = u^{'}(t)$. Кроме того, в силу $\mathbb{W}_1 \hookrightarrow \mathbb{W}_0$ и ограниченной липшиц-непрерывности оператора $\mathbb{F} : \mathbb{W}_0 \to \mathbb{W}_0^* \subset \mathbb{W}_1^*$ имеем

$$\mid \mathbb{F}(u_m) - \mathbb{F}(u) \mid_1^* \leqslant \mathrm{C} \mid \mathbb{F}(u_m) - \mathbb{F}(u) \mid_0^* \leqslant \mathrm{C} \mid u_m - u \mid_0 \to 0, \quad m \to +\infty,$$

поскольку для почти всех $t \in (0, \mathrm{T})$ $u_m \rightharpoonup u$ слабо в $\mathbb{W}_1 \hookrightarrow \mathbb{W}_0$, а значит, сильно в $\mathbb{W}_0$.

Шаг 3. *Метод монотонности.*

Имея в виду, что $\mathbb{B}(u_m) \to \chi$ $*-$слабо в $\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_1^*)$, докажем следующую лемму.

Лемма 7. *Найдется такая подпоследовательность последовательности* $\{u_m\}$, *что*

$$\mathbb{B}(u_m) \rightharpoonup \mathbb{B}(u) \ *-\textit{слабо в}\ \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_1^*).$$

Доказательство.

Из (5.2) следует, что

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbb{A}_0 u_m, w_j\rangle_0 + (\mathbb{B}(u_m), w_j)_1 = (\mathbb{F}(u_m), w_j)_0, \quad j = \overline{1,m}.$$

Из полученных на шаге 2 результатов следует, что

$$\langle \mathbb{A}_0 u_m^{'}, w_j\rangle_0 \rightharpoonup \langle \mathbb{A}_0 u^{'}, w_j\rangle_0 \ \text{слабо в}\ \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T}),$$
$$(\mathbb{B}(u_m), w_j)_1 \rightharpoonup (\chi, w_j)_1, \ *-\text{слабо в}\ \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T}),$$
$$\langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, w_j\rangle_0 \to \langle \mathbb{A}_0 u_0, w_j\rangle_0, \quad \langle \mathbb{A}_0 u_m(\mathrm{T}), w_j\rangle_0 \to \langle \mathbb{A}_0 u(\mathrm{T}), w_j\rangle_0.$$

Переходя к пределу при $m \to +\infty$ при фиксированном $j = \overline{1,m}$, получим

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbb{A}_0 u, w_j\rangle_0 + (\chi, w_j)_1 = (\mathbb{F}(u), w_j)_0, \quad j = \overline{1,+\infty}.$$

Откуда сразу же получаем, что в смысле $\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_1^*)$ справедливо равенство

$$\frac{d}{dt}\mathbb{A}_0 u + \chi = \mathbb{F}(u). \tag{5.9}$$

В силу монотонности оператора $\mathbb{B} : \mathbb{W}_1 \to \mathbb{W}_1^*$ справедливо равенство

$$\mathbb{X}_\mu \equiv \int_0^{\mathrm{T}} dt\ (\mathbb{B}(u_\mu) - \mathbb{B}(v), u_\mu - v)_1 \quad \forall\, v \in \mathbb{L}^p(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_1). \tag{5.10}$$

Согласно (5.2)

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt\ (\mathbb{B}(u_\mu), u_\mu)_1 = \langle \mathbb{A}_0 u_{\mu 0}, u_{\mu 0}\rangle_0 -$$
$$- \langle \mathbb{A}_0 u_\mu(\mathrm{T}), u_\mu(\mathrm{T})\rangle_0 + \int_0^{\mathrm{T}} dt\ (\mathbb{F}(u_\mu), u_\mu)_0.$$

Поскольку $u_\mu \to u$ слабо в $\mathbb{W}_1$ при почти всех $t \in (0,\mathrm{T})$, то в силу компактного вложения $\mathbb{W}_1 \hookrightarrow \mathbb{W}_0$ имеем

$$(\mathbb{F}(u_\mu), u_\mu)_0 \to (\mathbb{F}(u), u)_0 \ \text{ при } \ \mu \to +\infty,$$

при почти всех $t \in (0, \mathrm{T})$. Кроме того, в силу условий (A_0) величина

$$\langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0^{1/2}$$

является нормой на банаховом пространстве $\mathbb{V}_0$, поэтому имеем

$$\liminf_{\mu\to+\infty}\langle \mathbb{A}_0 u_\mu(\mathrm{T}), u_\mu(\mathrm{T})\rangle_0 \geqslant \langle \mathbb{A}_0 u(\mathrm{T}), u(\mathrm{T})\rangle_0,$$

поскольку $\mathbb{W}_1 \subset \mathbb{V}_0$. С другой стороны, в силу того что $u_{\mu 0} \to u_0$ сильно в $\mathbb{W}_1$, имеем

$$\langle \mathbb{A}_0 u_{\mu 0}, u_{\mu 0}\rangle_0 \to \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0\rangle_0,$$

$$\limsup_{\mu\to+\infty}\int_0^{\mathrm{T}} dt\ (\mathbb{B}(u_\mu), u_\mu)_1 \leqslant \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0\rangle_0 -$$

$$- \langle \mathbb{A}_0 u(\mathrm{T}), u(\mathrm{T})\rangle_0 + \int_0^{\mathrm{T}} dt\ (\mathbb{F}(u), u)_0\,. \quad (5.11)$$

Тогда, в силу (5.9) получим

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt\ (\chi, u)_1 = \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0\rangle_0 - \langle \mathbb{A}_0 u(\mathrm{T}), u(\mathrm{T})\rangle_0 + \int_0^{\mathrm{T}} dt\ (\mathbb{F}(u), u)_0\,. \quad (5.12)$$

Из (5.10)–(5.12) вытекает

$$0 \leqslant \limsup_{\mu\to+\infty} \mathbb{X}_\mu \leqslant -\int_0^{\mathrm{T}} dt\ (\chi, v)_1 - \int_0^{\mathrm{T}} dt\ (\mathbb{B}(v), u-v)_1 + \int_0^{\mathrm{T}} dt\ (\chi, u)_1\,,$$

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt\ (\chi - \mathbb{B}(v), u-v)_1 \geqslant 0, \quad v = u - \lambda w, \quad u \in \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_1),$$

$w \in \mathbb{L}^r(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_1)$, $\lambda > 0$. В силу полунепрерывности оператора $\mathbb{B} : \mathbb{W}_1 \to \mathbb{W}_1^*$ получим

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt\ (\chi - \mathbb{B}(u), w)_1 \geqslant 0 \ \ \forall\, w \in \mathbb{L}^r(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_1).$$

Отсюда приходим к выводу, что

$$\chi = \mathbb{B}(u),$$

что и доказывает утверждение леммы 7.

Шаг 4. *Предельный переход и единственность.*

В силу предельных равенств, полученных на шаге 2 и 3, приходим к выводу, что найдется такая подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$, что в равенстве (5.2) можно перейти к пределу при $m \to +\infty$ и получить

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt\, \varphi(t) \left[\langle \mathbb{A}_0 u', v\rangle_0 + (\mathbb{B}(u), v)_1 - (\mathbb{F}(u), v)_0 \right] = 0 \tag{5.13}$$

$\forall\, \varphi(t) \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T})$, $\forall\, v \in \mathbb{W}_1$. Возьмем в (5.2) функцию $\varphi(t) = 1$, тогда получим

$$\langle \mathbb{A}_0 u_m, w_j\rangle_0 = \langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, w_j\rangle_0 + \int_0^t ds\, \left[(\mathbb{F}(u_m), w_j)_0 - (\mathbb{B}(u_m), w_j)_1 \right].$$

Переходя к пределу в последнем равенстве, получим, что для почти всех $t \in (0,\mathrm{T})$ имеет место равенство

$$\langle \mathbb{A}_0 u, w_j\rangle_0 = \langle \mathbb{A}_0 u_0, w_j\rangle_0 + \int_0^t ds\, \left[(\mathbb{F}(u), w_j)_0 - (\mathbb{B}(u), w_j)_1 \right].$$

Отсюда в свою очередь получаем, что

$$\mathbb{A}_0 u = \mathbb{A}_0 u_0 + \int_0^t ds\, \left[\mathbb{F}(u)(s) - \mathbb{B}(u)(s) \right].$$

Точно так же, как на шаге 4 доказательства теоремы 1 настоящей главы, можно показать, что

$$\mathbb{A}_0 u \in \mathbb{H}^1(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_1^*).$$

Докажем теперь, что

$$\langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0 \in \mathbb{H}^1(0,\mathrm{T})$$

и почти всюду на интервале $(0,\mathrm{T})$ имеет место равенство

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0 = 2\langle \mathbb{A}_0 u', u\rangle_0.$$

Действительно, в силу того что $u \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0)$ и $u' \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0)$, имеем

$$\langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0 \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T}),\ \ \langle \mathbb{A}_0 u', u\rangle_0 \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T}).$$

Теперь расмотрим разностное соотношение

$$\frac{1}{h}\left[\langle \mathbb{A}_0 u(t+h), u(t+h)\rangle_0 - \langle \mathbb{A}_0 u(t), u(t)\rangle_0\right] =$$

$$= \frac{1}{h}\langle \mathbb{A}_0 u(t+h) - \mathbb{A}_0 u(t), u(t+h)\rangle_0 +$$

$$+\frac{1}{h}\langle \mathbb{A}_0 u(t), u(t+h)-u(t)\rangle_0 = \mathrm{J}$$

для всех $t,\ t+h \in (0,\mathrm{T})$. Заметим, что согласно условиям (A_0) оператор $\mathbb{A}_0$ симметричный, и поэтому для J справедливо равенство

$$\mathrm{J} = \frac{1}{h}\langle \mathbb{A}_0 u(t+h)-\mathbb{A}_0 u(t), u(t+h)\rangle_0 + \frac{1}{h}\langle \mathbb{A}_0 u(t+h)-\mathbb{A}_0 u(t), u(t)\rangle_0.$$

Теперь введем обозначение

$$\overline{\mathbb{B}}(u) = \mathbb{F}(u) - \mathbb{B}(u).$$

Заметим, что в смысле $\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_1^*)$ имеет место равенство

$$\mathbb{A}_0 u^{'} = \overline{\mathbb{B}}(u).$$

В классе $u^{'} \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0)$ имеем: $\mathbb{A}_0 u^{'} \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0^*)$. Стало быть, $\overline{\mathbb{B}}(u) \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0^*)$. Перепишем равенство для J в следующем виде:

$$\mathrm{J} = \left\langle \frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} ds\,\overline{\mathbb{B}}(u)(s), u(t+h)-u(t)\right\rangle_0 +$$

$$+ 2\left\langle \frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} ds\,[\overline{\mathbb{B}}(u)(s)-\overline{\mathbb{B}}(u)(t)], u(t)\right\rangle_0 + 2\left\langle \overline{\mathbb{B}}(u)(t), u(t)\right\rangle_0.$$

Поскольку $\overline{\mathbb{B}}(u) \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0^*)$ и, кроме того, $u \in \mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{V}_0)$, то первые два слагаемых в выражении для J для почти всех $t \in (0,\mathrm{T})$ стремятся к нулю при $h \to 0$. С другой стороны, имеем

$$\overline{\mathbb{B}}(u) = \mathbb{A}_0 u^{'}$$

в смысле $\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0^*)$. Таким образом, приходим к выводу, что для почти всех $t \in (0,\mathrm{T})$ имеет место равенство

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0 = 2\langle \mathbb{A}_0 u^{'}, u\rangle.$$

Из этого равенства в классе $u^{'} \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0)$, $u \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0)$ приходим к выводу, что $\langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0 \in \mathbb{H}^1(0,\mathrm{T})$.

Теперь мы можем переписать равенство (5.13) в эквивалентном виде

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\varphi(t)\left(\mathbb{A}_0 u^{'} + \mathbb{B}(u) - \mathbb{F}(u), w\right)_1 = 0 \ \ \forall\,\varphi(t) \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T}),\ \ \forall\, w \in \mathbb{W}_1,$$

которая в свою очередь эквивалентна следующей

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\left(\mathbb{A}_0 u^{'} + \mathbb{B}(u) - \mathbb{F}(u), v\right)_1 = 0 \ \ \forall\, v \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_1).$$

Пусть теперь u_1 и u_2 — два слабых обобщенных решения последней задачи класса

$$u \in \mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_1),\ \ \frac{du}{dt} \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0),\ \ \forall\, \mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}_0),$$
$$\mathbb{A}_0 u \in \mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0^*) \cap \mathbb{H}^1(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_1^*),$$
$$\langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0 \in \mathbb{H}^1(0,\mathrm{T}),$$

и почти всюду на интервале $(0,\mathrm{T})$ имеет место равенство

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0 = 2\langle \mathbb{A}_0 u', u\rangle_0,$$

соответствующее одной и той же начальной функции $u_0 \in \mathbb{W}_1$. Пусть $v = u_1 - u_2 \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_1)$. Тогда в силу монотонности $\mathbb{B}(u)$ получим неравенство

$$\mathrm{m}_0 \parallel u_1 - u_2 \parallel_0^2 (\mathrm{T}) \leqslant \langle \mathbb{A}_0 u_1 - \mathbb{A}_0 u_2, u_1 - u_2\rangle_0 \leqslant$$
$$\leqslant 2\int_0^{\mathrm{T}} dt \mid \mathbb{F}(u_1) - \mathbb{F}(u_2) \mid_0^* \mid u_1 - u_2 \mid_0 \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{C}\int_0^{\mathrm{T}} dt \parallel u_1 - u_2 \parallel_0^2 (t).$$

По теореме Гронуолла–Белмана [45] приходим к выводу, что $u_1 = u_2$ почти всюду $(0,\mathrm{T})$.

Шаг 5. *Разрушение решения задачи* (1.2).

Докажем необходимый нам для дальнейшего результат относительно свойств галеркинских приближений u_m.

Лемма 8. *Найдется такая подпоследовательность последовательности* $\{u_m\}$, *что*

$$u_m \to u \ \ \textit{сильно в}\ \ \mathbb{L}^{q+2}(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_1).$$

Доказательство.

В силу полунепрерывности снизу нормы рефлексивного банахова пространства и свойства (B) 2 оператора $\mathbb{B} : \mathbb{W}_1 \to \mathbb{W}_1^*$ приходим к выводу, что, поскольку $u_\mu \rightharpoonup u$ слабо в $\mathbb{L}^{q+2}(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_1)$, то

$$\liminf_{\mu\to+\infty} \int_0^{\mathrm{T}} (\mathbb{B}(u_\mu), u_\mu)_1\, dt \geqslant \int_0^{\mathrm{T}} dt\ (\mathbb{B}(u), u)_1\,.$$

С другой стороны, на шаге 4 нами было доказано, что

$$\limsup_{\mu\to+\infty}\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\ \left(\mathbb{B}(u_\mu),u_\mu\right)_1 \leqslant \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\ \left(\mathbb{B}(u),u\right)_1.$$

Значит,

$$\lim_{\mu\to+\infty}\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\ \left(\mathbb{B}(u_\mu),u_\mu\right)_1 = \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\ \left(\mathbb{B}(u),u\right)_1. \tag{5.14}$$

В силу условий (B) норма

$$\left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\ \left(\mathbb{B}(v),v\right)_1\right)^{1/(q+2)}$$

эквивалентна исходной норме пространства $\mathbb{L}^{q+2}(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_1)$. Поскольку $u_\mu \rightharpoonup u\ *$ – слабо в $\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_1)$, то $u_\mu \rightharpoonup u$ слабо в $\mathbb{L}^{q+2}(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_1)$. Тогда в силу (5.14) приходим к выводу, что $u_\mu \to u$ сильно в $\mathbb{L}^{q+2}(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_1)$. Пусть

$$\Phi_m \equiv \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle_0,\ \Phi_{m0} \equiv \Phi_m(0),\ \Phi \equiv \langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0,\ \Phi_0 \equiv \Phi(0).$$

Докажем, что $\Phi_m \to \Phi$ для почти всех $t \in (0,\mathrm{T})$. Из сильной сходимости $u_m \to u$ в $\mathbb{L}^{q+2}(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_1) \subset \mathbb{L}^{q+2}(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0)$ следует

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle_0 \to \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0. \tag{5.15}$$

С другой стороны,

$$\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle_0 = -\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\ \left(\mathbb{B}(u_m),u_m\right)_1 + \\ + \langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, u_{m0}\rangle_0 + \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\ \left(\mathbb{F}(u_m),u_m\right)_0. \tag{5.16}$$

Правая часть равенства (5.16) сходится в силу (5.14), стало быть, сходится и левая часть при почти всех $\mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}_0)$ к некоторой функции $\eta(t)$:

$$\Phi_m \to \eta(t) \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T}).$$

По теореме Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла [Дьяченко] имеем

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle \to \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\eta(t) \;\text{ при } m \to +\infty.$$

Значит, в силу (5.15)

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\;[\eta(t) - \Phi(t)] = 0.$$

Стало быть, $\eta(t) = \Phi(t)$ для почти всех $t \in (0, \mathrm{T}_0)$.

Лемма доказана.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 9. *Для любого $u_0 \in \mathbb{W}_0$ при условии*

$$(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 - (\mathbb{B}(u_0), u_0)_1 > 0$$

найдется такое T_0, *что*

$$\lim_{t\uparrow \mathrm{T}_0} \Phi(t) = +\infty,$$

где $\Phi(t) \equiv \langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0$.

Доказательство.

Из соотношений (5.4) (5.5) для $\Phi_m(t)$ получим обыкновенное дифференциальное неравенство

$$\Phi_m^{''}\Phi_m - \alpha\left(\Phi_m^{'}\right)^2 \geqslant 0, \quad \alpha \equiv \frac{q+2}{2}. \tag{5.17}$$

Из (5.17) вытекают следующие неравенства:

$$\left(\frac{\Phi_m^{'}}{\Phi_m^{\alpha}}\right)^{'} \geqslant 0, \quad \frac{\Phi_m^{'}}{\Phi_m^{\alpha}} \geqslant \left.\frac{\Phi_m^{'}}{\Phi_{m0}^{\alpha}}\right|_{t=0}. \tag{5.18}$$

Поскольку $\mathbb{E}_0 \equiv (\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 - (\mathbb{B}(u_0), u_0)_1 > 0$, то, переходя, если это необходимо, к подпоследовательности, получим

$$\mathbb{E}_{m0} \equiv (\mathbb{F}(u_{m0}), u_{m0})_0 - (\mathbb{B}(u_{m0}), u_{m0})_1 > 0.$$

Тогда из (5.18) вытекает

$$\Phi_m \;\geqslant\; \left(\frac{q}{2}\right)^{-2/q} \Phi_{m0}^{1+2/q}\mathbb{E}_{m0}^{-2/q}\frac{1}{[\mathrm{T}_{1m} - t]^{2/q}}, \quad \mathrm{T}_{1m} \;\equiv\; \Phi_{m0}(\alpha\,-\,1)^{-1}\mathbb{E}_{m0}^{-1}. \tag{5.19}$$

Переходя к подпоследовательности, можно считать, что либо $\mathrm{T}_{1m} \uparrow \mathrm{T}_1$, либо $\mathrm{T}_{1m} \downarrow \mathrm{T}_1$, где

$$\Phi_0 \equiv \Phi(0), \;\; \Phi(t) \equiv \langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0, \;\; \mathbb{E}_0 \equiv (\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 - (\mathbb{B}(u_0), u_0)_1\,,$$

$$\mathrm{T}_1 \equiv \frac{2}{q}\frac{\Phi_0}{(\mathbb{F}(u_0),u_0)_0-(\mathbb{B}(u_0),u_0)_1}.$$

Рассмотрим сначала случай $\mathrm{T}_{1m}\uparrow\mathrm{T}_1$, тогда $\mathrm{T}_{1m}-t\leqslant\mathrm{T}_1-t$ и для любого $m>\overline{m}\in\mathbb{N}$, $t\in[0,\mathrm{T}_{\overline{m}})$ в силу (5.19) справедливо неравенство

$$\Phi_m\geqslant\frac{\mathbb{D}_{m0}}{[\mathrm{T}_1-t]^{2/q}}\ \ \forall\, t\in(0,\mathrm{T}_{1\overline{m}}),\quad \mathbb{D}_{m0}\equiv\left(\frac{q}{2}\right)^{-2/q}\mathbb{E}_{m0}^{-2/q}\Phi_{m0}^{1+2/q}. \tag{5.20}$$

Переходя к пределу при $m\to+\infty$ равномерно по $t\in(0,\mathrm{T}_{1\overline{m}})$, в силу того что $\Phi_m(t)\to\Phi(t)$ для почти всех $t\in(0,\mathrm{T}_{1\overline{m}})$, из (5.20) получим

$$\Phi(t)\geqslant\frac{\mathbb{D}_0}{[\mathrm{T}_1-t]^{2/q}},\ \ \mathbb{D}_0\equiv\left(\frac{q}{2}\right)^{-2/q}\mathbb{E}_0^{-2/q}\Phi_0^{1+2/q}\quad\forall\, t\in(0,\mathrm{T}_{1\overline{m}}). \tag{5.21}$$

Откуда в силу произвольности $\overline{m}\in\mathbb{N}$ получим, что неравенство (5.21) имеет место для любого $t\in(0,\mathrm{T}_1)$.

Пусть теперь $\mathrm{T}_{1m}\downarrow\mathrm{T}_1$. В этом случае имеем

$$\Phi_m(t)\geqslant\frac{\mathbb{D}_{m0}}{[\mathrm{T}_{1m}-t]^{2/q}}\ \ \forall\, t\in[0,\mathrm{T}_{1m}).$$

Переходя к пределу при $m\to+\infty$ в последнем неравенстве получим

$$\Phi(t)\geqslant\frac{\mathbb{D}_0}{[\mathrm{T}_1-t]^{2/q}}\ \ \forall\, t\in[0,\mathrm{T}_1). \tag{5.22}$$

Предположим теперь, что $\mathrm{T}_0>\mathrm{T}_1$ и, значит,

$$\Phi(t)\leqslant\mathrm{C}(t)\ \ \forall\, t\in(\mathrm{T}_1,\mathrm{T}_0).$$

Однако в силу (5.21) и (5.22) приходим к выводу, что найдется $t^*\in\in(0,\mathrm{T}_1)$ такое, что будет иметь место противоположное неравенство. Значит, $\mathrm{T}_0\leqslant\mathrm{T}_1$.

Лемма доказана.

Шаг 6. Оценки скорости и времени разрушения решения задачи (1.2).

Введем обозначения

$$U_m(s,x)\equiv\frac{u_m(s\gamma_m+t^*,x)}{M_m(t^*)},\ \ \gamma_m\equiv\frac{1}{M_m^q(t^*)},\ \ M_m(t^*)\equiv\langle\mathbb{A}_0u_m,u_m\rangle_0^{1/2},$$

где t^* — фиксированный момент времени из интервала $[0,\mathrm{T}_0)$. Нетрудно убедиться, что введенная функция $U_m(s,x)$ является решением следующей задачи:

$$\frac{d}{ds}\langle\mathbb{A}_0U_m,w_j\rangle_0+(\mathbb{B}(U_m),w_j)_1=(\mathbb{F}(U_m),w_j)_0,\ \ j=\overline{1,m}, \tag{5.23}$$

$$U_m\left(-\frac{t^*}{\gamma_m}\right)\equiv U_{m0},\ \ U_{m0}\equiv\frac{u_{m0}}{M_m(t^*)}=\sum_{k=1}^m\frac{\alpha_{mk}}{M_m(t^*)}w_k,$$

$$u_{m0} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{mk} w_k \to u_0 \text{ сильно в } \mathbb{W}_1.$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 10. *Для любого $u_0 \in \mathbb{W}_1$ справедливы следующие двусторонние оценки скорости разрушения решения задачи* (1.2)

$$[qc_1]^{-1/q} \leqslant M(t)[\mathrm{T}_0 - t]^{1/q} \leqslant [qc_2]^{-1/q} \ \ \forall\, t \in [0, \mathrm{T}_0),$$

где

$$c_2 \equiv \frac{\left[(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 - (\mathbb{B}(u_0), u_0)_1\right]}{\langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0\rangle_0^{(q+2)/2}}, \ \ c_1 \equiv \mathrm{BC}_1^{q+2},$$
$$\left|(\mathbb{F}(v), v)_0\right| \leqslant \mathrm{B}\,|v|_0^{q+2}, \ \ |v|_0 \leqslant \mathrm{C}_1 \langle \mathbb{A}_0 v, v\rangle_0^{1/2}.$$

Доказательство.

Докажем, что найдутся такие $c_{1m},\ c_{2m} \in (0, +\infty)$, что

$$0 < c_{2m} \leqslant \frac{d}{ds}\langle \mathbb{A}_0(U_m), U_m\rangle_0^{1/2}\Big|_{s=0} \leqslant c_{1m} < +\infty. \tag{5.24}$$

Отметим, что для задачи (5.23) справедливо энергетическое равенство (5.4), из которого следует цепочка неравенств

$$\frac{d}{ds}\langle \mathbb{A}_0 U_m, U_m\rangle_0^{1/2}\Big|_{s=0} \leqslant$$
$$\leqslant |(\mathbb{F}(U_m), U_m)|_{s=0} \leqslant \mathrm{BC}_1^{q+2}\langle \mathbb{A}_0 U_m, U_m\rangle_0^{(q+2)/2}\Big|_{s=0} \leqslant \mathrm{BC}_1^{q+2} \equiv \mathrm{c}_{1m},$$

где

$$\left|(\mathbb{F}(v), v)_0\right| \leqslant \mathrm{B}\,|v|_0^{q+2}, \ \ |v|_0 \leqslant C_1 \langle \mathbb{A}_0 v, v\rangle_0^{1/2}.$$

Итак,

$$\frac{d}{ds}\langle \mathbb{A}_0 U_m, U_m\rangle_0^{1/2}\Big|_{s=0} \leqslant c_{1m}. \tag{5.25}$$

Пусть теперь $\varphi_m \equiv \langle \mathbb{A}_0 U_m, U_m\rangle_0$. Аналогично предыдущим рассуждениям легко показать, что для функции $\varphi_m(s)$ справедливо неравенство вида (5.17):

$$\varphi_m \frac{d^2\varphi_m}{ds^2} - \alpha\left(\frac{d\varphi_m}{ds}\right)^2 \geqslant 0, \quad \alpha \equiv \frac{q+2}{2}. \tag{5.26}$$

Интегрируя дифференциальное неравенство (5.26) по $s \in (-t^*/\gamma, t)$, получим

$$\frac{d\varphi_m}{ds}\frac{1}{\varphi_m^{\alpha}}\Big|_{s=t} \geqslant 2\frac{\left[(\mathbb{F}(u_{m0}), u_{m0})_0 - (\mathbb{B}(u_{m0}), u_{m0})_1\right]}{\langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, u_{m0}\rangle_0^{(q+2)/2}}. \tag{5.27}$$

Теперь воспользуемся тем, что по условию теоремы 2

$$(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 - (\mathbb{B}(u_0), u_0)_1 > 0,$$

поэтому найдется такая подпоследовательность последовательности $\{u_{m0}\}$, что

$$(\mathbb{F}(u_{m0}), u_{m0})_0 - (\mathbb{B}(u_{m0}), u_{m0})_1 > 0.$$

Из (5.27) следует

$$\frac{d}{ds}\langle \mathbb{A}_0 U_m, U_m\rangle_0^{1/2}\Big|_{s=0} \leqslant \frac{\left[(\mathbb{F}(u_{m0}), u_{m0})_0 - (\mathbb{B}(u_{m0}), u_{m0})_1\right]}{\langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, u_{m0}\rangle_0^{(q+2)/2}} \equiv c_{2m} > 0.$$

Неравенство (5.24) эквивалентно следующему двустороннему неравенству:

$$0 < c_{2m} \leqslant \frac{1}{M_m(t^*)^{q+1}} \frac{dM_m(t^*)}{dt^*} \leqslant c_{1m} < +\infty, \quad q > 0, \tag{5.28}$$

где

$$c_{2m} \equiv \frac{\left[(\mathbb{F}(u_{m0}), u_{m0})_0 - (\mathbb{B}(u_{m0}), u_{m0})_1\right]}{\langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, u_{m0}\rangle_0^{(q+2)/2}}, \quad c_{1m} \equiv \mathrm{B}\mathrm{C}_1^{q+2},$$

$$\left|(\mathbb{F}(v), v)_0\right| \leqslant \mathrm{B}\,|v|_0^{q+2}, \quad |v|_0 \leqslant \mathrm{C}_1 \langle \mathbb{A}_0 v, v\rangle_0^{1/2}.$$

Интегрируя (5.28) по t^* в пределах от t до T_{m0} :

$$\limsup_{t^* \uparrow \mathrm{T}_{m0}} M_m(t^*) = +\infty,$$

получим

$$[qc_{1m}]^{-1/q} \leqslant M_m(t)(\mathrm{T}_{m0} - t)^{1/q} \leqslant [qc_{2m}]^{-1/q}, \quad t \in [0, \mathrm{T}_{m0}). \tag{5.29}$$

Причем справедливы следующие оценки снизу и сверху на время разрушения T_{m0}:

$$\mathrm{A}_{1m} \leqslant \mathrm{T}_{m0} \leqslant \mathrm{A}_{2m},$$

где

$$\mathrm{A}_{1m} \equiv \frac{1}{q\mathrm{C}_1^{q+2}\mathrm{B}\langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, u_{m0}\rangle_0^{q/2}},$$

$$\mathrm{A}_{2m} \equiv \frac{\langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, u_{m0}\rangle_0}{q\left[(\mathbb{F}(u_{m0}), u_{m0})_0 - (\mathbb{B}(u_{m0}), u_{m0})_1\right]}.$$

Нетрудно доказать, что найдутся такие постоянные $0 < \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2 < +\infty$, не зависящие от $m \in \mathbb{N}$, что

$$0 < \mathrm{A}_1 \leqslant \mathrm{T}_{m0} \leqslant \mathrm{A}_2 < +\infty.$$

Пусть $\mathrm{T}_0 \equiv \liminf\limits_{m\to+\infty} \mathrm{T}_{m0}$. Тогда найдется такая подпоследовательность последовательности $\{\mathrm{T}_{m0}\}$, что либо $\mathrm{T}_{m0} \uparrow \mathrm{T}_0$, либо $\mathrm{T}_{m0} \downarrow \mathrm{T}_0$.

Рассмотрим сначала случай $\mathrm{T}_{m0} \uparrow \mathrm{T}_0$. Тогда для любого фиксированного $\overline{m} \in \mathbb{N}$ можно перейти к пределу при $m \to +\infty$ в неравенстве (5.29) равномерно по $t \in [0, \mathrm{T}_{\overline{m}0}]$, и получим

$$[qc_1]^{-1/q} \leqslant M(t)[\mathrm{T}_0 - t]^{1/q} \leqslant [qc_2]^{-1/q} \ \ \forall\, t \in [0, \mathrm{T}_{\overline{m}0}), \tag{5.30}$$

где

$$c_2 \equiv \frac{\big[(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 - (\mathbb{B}(u_0), u_0)_1\big]}{\langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0\rangle_0^{(q+2)/2}}, \ \ c_1 \equiv \mathrm{B}\mathrm{C}_1^{q+2},$$
$$\big|(\mathbb{F}(v), v)_0\big| \leqslant \mathrm{B}\,|v|_0^{q+2}, \ \ |v|_0 \leqslant C_1 \langle \mathbb{A}_0 v, v\rangle_0^{1/2}.$$

Откуда в силу произвольности $\overline{m} \in \mathbb{N}$ приходим к выводу о справедливости неравенства (5.30) равномерно по $t \in [0, \mathrm{T}_0)$.

Рассмотрим теперь случай $\mathrm{T}_{m0} \downarrow \mathrm{T}_0$. Тогда мы можем перейти к пределу при $m \to +\infty$ в неравенстве (5.29) равномерно по $t \in$ $\in [0, \mathrm{T}_0)$ и получим (5.30).

Итак, лемма 10 доказана.

Теорема доказана.

§ 6. Локальная однозначная разрешимость задачи (1.2) в сильном обобщенном смысле и оценки времени и скорости разрушения решения в случае $\mathbb{B} \equiv 0$

Определение 12. Сильным обобщенным решением задачи (1.2) назовем решение класса $u \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}_0)$, удовлетворяющее условиям

$$\langle (\mathbb{A}_0 u)', v\rangle_0 = (\mathbb{F}(u), v)_0 \ \ \forall\, v \in \mathbb{V}_0, \ \ \forall\, t \in [0, \mathrm{T}],$$

где производная по времени понимается в классическом смысле.

Поскольку

$$\mathbb{A}_0 u \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}_0^*),$$
$$\mathbb{F}(u) \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{W}_0^*) \subset \mathbb{C}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}_0^*),$$

то задача в силу условий нижеследующей теоремы 4 эквивалентна задаче

$$\langle (\mathbb{A}_0 u)', v\rangle_0 = \langle \mathbb{F}(u), v\rangle_0 \ \ \forall\, v \in \mathbb{V}_0, \ \ \forall\, t \in [0, \mathrm{T}],$$

где производная по времени понимается в классическом смысле, а символом $\langle \cdot, \cdot\rangle_0$ обозначена скобка двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{V}_0$ и $\mathbb{V}_0^*$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* $(\mathrm{A})_0$ *и* (F) *и, кроме того,* $\mathbb{V}_0 \subset \mathbb{W}_0$. *Тогда для любого* $u_0 \in \mathbb{V}_0$, *найдется такое* $\mathrm{T}_0 > 0$, *что задача Коши* (1.1)–(1.2) *при* $\mathbb{B} = 0$ *имеет единственное решение*

класса $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{V}_0)$. *Если, кроме того,* $(\mathbb{F}(u_0),u_0)_0>0$ *для данного* $u_0\in\mathbb{V}_0,\ \|\ u_0\ \|_0>0$, *то время существования решения* $0<\mathrm{T}_0<+\infty$, *причем*

$$\lim_{t\uparrow \mathrm{T}_0}\|\ u(t)\ \|_0=+\infty. \tag{6.1}$$

Кроме того, найдутся такие положительные постоянные $\mathrm{C}_1,\ \mathrm{C}_2$, *что справедливы следующие оценки снизу и сверху на скорость и время разрушения*:

$$\mathrm{C}_1(\mathrm{T}_0-t)^{-1/q}\ \leqslant\|\ u\ \|_0\leqslant\ \mathrm{C}_2(\mathrm{T}_0-t)^{-1/q}.$$

Доказательство.

Шаг 1. Локальная разрешимость

Справедлива следующая лемма.

Лемма 11. *Для любого* $u_0\in\mathbb{V}_0$ *при условии* $(\mathbb{F}(u_0),u_0)_0>0$ *найдется такое максимальное* $\mathrm{T}_0>0$, *что существует единственное решение задачи* (1.2) *при* $\mathbb{B}=0$ *класса* $u\in\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{V}_0)$ *для любого* $\mathrm{T}\in(0,\mathrm{T}_0)$.

Доказательство.

Рассмотрим задачу, эквивалентную (1.2) в классе: $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{V}_0)$

$$\frac{du}{dt}-\mathbb{G}(u)(t)=0,\ u(0)=u_0\in\mathbb{V}_0\ \forall\ t\in[0,\mathrm{T}],u\in\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{V}_0),\tag{6.2}$$

где оператор $\mathbb{G}(u)=\mathbb{A}_0^{-1}\mathbb{F}(u)(t),\ u\in\mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{V}_0)$. Справедлива цепочка соотношений

$$\lim_{t\to t_0}\|\ \mathbb{G}(u)(t)-\mathbb{G}(u)(t_0)\ \|_0\leqslant \mathrm{m}_0^{-1}\lim_{t\to t_0}|\ \mathbb{F}(u)(t)-\mathbb{F}(u)(t_0)\ |_0^*\leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{m}_0^{-1}\mu(\mathrm{R})\lim_{t\to t_0}|\ u(t)-u(t_0)\ |_0\leqslant \mathrm{C}\lim_{t\to t_0}\|\ u(t)-u(t_0)\ \|_0=0,$$

где $\mathrm{R}=\max\{\|\ u(t_0)\ \|,\|\ u(t)\ \|\}$. Значит, $\mathbb{G}:\mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{V}_0)\to\mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{V}_0)$.

Введем следующее множество: $\mathbb{B}_R=\{u(t)\in\mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{V}_0):\|\ u\ \|_{\mathrm{T}}\leqslant R\}$, где

$$\|\ v\ \|_{\mathrm{T}}\equiv\sup_{t\in[0,\mathrm{T}]}\|\ v\ \|_0\ .$$

Докажем, что оператор

$$\mathbb{U}(u)\equiv u_0+\int_0^t ds\,\mathbb{G}(u)(s),\quad t\in[0,\mathrm{T}],\tag{6.3}$$

действует из $\mathbb{B}_R$ в $\mathbb{B}_R$ и является сжимающим на $\mathbb{B}_R$. Действительно, поскольку

$$\mathbb{G}:\mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{V}_0)\to\mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{V}_0),$$

то очевидно, что

$$\mathbb{U}:\mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{V}_0)\to\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{V}_0).$$

С другой стороны,

$$\| \mathbb{U}(u) \|_{\mathrm{T}} \leqslant \| u_0 \|_0 + \int\limits_0^{\mathrm{T}} ds \ \| \mathbb{G}(u) \|_0 (s) \leqslant \| u_0 \|_0 + \mathrm{T} \sup_{t\in[0,\mathrm{T}]} \| \mathbb{G}(u) \|_0 (t),$$

$$\| \mathbb{G}(u) \|_0 (t) \leqslant \mathrm{m}_0^{-1} \| \mathbb{F}(u) \|_0^* \leqslant C\mathrm{m}_0^{-1} \mid \mathbb{F}(u) \mid_0^* \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{m}_0^{-1}\mathrm{C}\mu(\mid u \mid_0) \mid u \mid_0 \leqslant \mathrm{C}\mathrm{m}_0{}^{-1}\mu(\mathrm{C}R) \| u \|_0 .$$

Поэтому

$$\| \mathbb{U} \|_{\mathrm{T}} \leqslant \| u_0 \| + m_0^{-1}\mathrm{C}\mu(\mathrm{C}R)R\mathrm{T}.$$

Пусть $\| u_0 \|_0 \leqslant R/2$, $\mathrm{T} < \mathrm{m}_0/(2\mathrm{C}\mu(\mathrm{C}R))$, тогда при достаточно большом $R > 0$ и малом $\mathrm{T} > 0$

$$\| \mathbb{U} \|_{\mathrm{T}} \leqslant R.$$

Таким образом, $\mathbb{U} : \mathbb{B}_R \to \mathbb{B}_R$.

Докажем теперь, что оператор $\mathbb{U}$, определенный формулой (6.3), является сжимающим на $\mathbb{B}_R$. Пусть $u, v \in \mathbb{B}_R$, тогда имеем

$$\| \mathbb{U}(u) - \mathbb{U}(v) \|_{\mathrm{T}} \leqslant \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \ \| \mathbb{G}(u) - \mathbb{G}(v) \|_0 \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{m}_0{}^{-1} \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \ \| \mathbb{F}(u) - \mathbb{F}(v) \|_0^* (t) \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{m}_0^{-1}\mathrm{C}\mu(\mathrm{C}R)\mathrm{T} \| u - v \|_{\mathrm{T}},$$

из последнего неравенства при $T < \mathrm{m}_0/(\mathrm{C}2\mu(\mathrm{C}R))$ получаем

$$\| \mathbb{U}(u) - \mathbb{U}(v) \|_{\mathrm{T}} < \frac{1}{2} \| u - v \|_{\mathrm{T}} .$$

Таким образом, оператор $\mathbb{U}$ является сжимающим на $\mathbb{B}_R$. Поэтому в силу теоремы о сжимающем отображении для любого $u_0 \in \mathbb{V}_0$ найдется такое $\mathrm{T} > 0$, что существует единственное решение задачи (6.2) класса $\mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}_0)$.

Используя стандартный алгоритм продолжения решения во времени, получим, что существуют $\mathrm{T}_0 > 0$ и единственное решение задачи (1.2) при $\mathbb{B} = 0$ класса $\mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{V}_0)$. Причем либо $\mathrm{T}_0 < +\infty$, и тогда

$$\limsup_{t\uparrow \mathrm{T}_0} \| u \|_0 = +\infty,$$

либо $\mathrm{T}_0 = +\infty$.

Действительно, рассмотрим норму $\psi(\mathrm{T}) \equiv \| u(t) \|_{\mathrm{T}}$. Функция $\psi(\mathrm{T})$ является монотонно возрастающей. Стало быть, при $\mathrm{T} \uparrow \mathrm{T}_0$ функция $\psi(\mathrm{T})$ имеет либо конечный, либо бесконечный предел. Предположим,

что $\psi(\mathrm{T})$ имеет конечный предел при $\mathrm{T} \uparrow \mathrm{T}_0$. Рассмотрим вспомогательное интегральное уравнение вида (6.3)

$$u(x,t) = u(x,\mathrm{T}') + \int\limits_0^t ds\, \mathbb{G}(u)(s).$$

Норма $\| \nabla u \|_2^2 (\mathrm{T}')$ равномерно ограничена по $\mathrm{T}' \in (0, \mathrm{T}_0)$, что позволяет выбрать такое $\mathrm{T}^* \in (0, \mathrm{T}_0)$, что для любого $\mathrm{T}' \in (0, \mathrm{T}_0)$ интегральное уравнение имеет единственное решение класса $u(x,t) \in \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}^*]; \mathbb{V}_0)$. Пусть $\mathrm{T}' = \mathrm{T}_0 - \mathrm{T}^*/2$, обозначим через $v(x,t)$ соответствующее решение последнего интегрального уравнения и определим $\widehat{u}(x,t)$ на сегменте $[0, \mathrm{T}_0 + \mathrm{T}^*/2]$ как

$$\widehat{u}(x,t) = \{u(x,t),\ t \in [0, \mathrm{T}']; \ \ v(x, t - \mathrm{T}'),\ t \in [\mathrm{T}', \mathrm{T}_0 + \mathrm{T}^*/2]\}.$$

По построению $\widehat{u}(x,t)$ является решением задачи (1.1)–(1.2) на отрезке $[0, \mathrm{T}_0 + \mathrm{T}^*/2]$ и в силу локальной единственности является продолжением функции $u(x,t)$. Это противоречит максимальности отрезка $[0, \mathrm{T}_0]$. Полученное противоречие доказывает, что

$$\lim_{\mathrm{T} \uparrow \mathrm{T}_0} \| u(t) \|_{\mathrm{T}} = +\infty.$$

Отсюда сразу же получаем, что

$$\overline{\lim_{t \uparrow \mathrm{T}_0}} \| u(t) \|_0 = +\infty.$$

Таким образом, для любого $u_0 \in \mathbb{V}$ найдется такое $\mathrm{T}_0 > 0$, что существует единственное максимальное решение задачи (1.2) при $\mathbb{B} = = 0$ класса $u(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{V}_0)$.

Лемма доказана.

Шаг 2. *Разрушение решения задачи* (1.2) *при* $\mathbb{B} = 0$ *за конечное время, оценки времени и скорости разрушения.*

Справедлива следующая лемма.

Лемма 12. *Для любого* $u_0 \in \mathbb{V}_0$ *найдется такое* $\mathrm{T}_0 > 0$, *что*

$$\lim_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \Phi(t) = +\infty, \ \ \Phi(t) \equiv \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0.$$

Кроме того, справедливо двустороннее неравенство для скорости разрушения решения:

$$\mathrm{C}_1 (\mathrm{T}_0 - t)^{-1/q} \leqslant \| u \|_0 \leqslant \mathrm{C}_2 (\mathrm{T}_0 - t)^{-1/q},$$

где

$$\mathrm{C}_1 = \mathrm{M}_0^{-1/2} [q\mu (\mathrm{m}_0^{-1/2} \mathrm{B}_1) \mathrm{m}_0^{-1} \mathrm{B}_1^2]^{-1/q},$$

$$\mathrm{C}_2 = \mathrm{m}_0^{-1/2} [q (\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0^{-(q+2)/2}]^{-1/q}.$$

Доказательство.

В силу условий $(\mathrm{A})_0$ и (F) и уравнения (1.2) справедлива следующая цепочка равенств

$$\langle \mathbb{A}_0 u_t, u\rangle_0 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0 = (\mathbb{F}(u), u)_0, \tag{6.4}$$

$$\langle \mathbb{A}_0 u_t, u_t\rangle_0 = \frac{1}{q+2}\frac{d}{dt}(\mathbb{F}(u), u)_0. \tag{6.5}$$

Обозначим $\varphi(t) \equiv \langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0$, тогда из (6.4), (6.5) и неравенства Шварца [Морен]: прямым вычислением получим

$$\varphi''(t)\varphi(t) - \frac{q+2}{2}(\varphi'(t))^2 \leqslant 0, \tag{6.6}$$

причем в классе $u(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{V}_0)$ непосредственной проверкой получаем: $\varphi(t) \in \mathbb{C}^{(1)}[0, \mathrm{T}_0)$.

С другой стороны, из соотношения (6.5) выводим, что правая часть равенства (6.4) непрерывно дифференцируема по $t \in [0, \mathrm{T}_0)$. Стало быть, в классе $u(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{V}_0)$ получаем

$$\varphi(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0, \mathrm{T}_0).$$

В силу условия теоремы $(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > 0$ и соотношений (6.4)–(6.5) имеем

$$0 < (q+2)\int_0^t \langle \mathbb{A}_0 u_s, u_s\rangle_0\, ds + (\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 = (\mathbb{F}(u), u)_0, \tag{6.7}$$

$$\langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0 = \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0\rangle_0 + 2\int_0^t ds\,(\mathbb{F}u, u)_0 > 0. \tag{6.8}$$

Из (6.7), (6.8) получаем, что $\varphi(t) > 0$ при $t \in [0, \mathrm{T}_0)$.

Предположим, что $\mathrm{T}_0 = +\infty$, тогда $u(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, +\infty); \mathbb{V}_0)$. При этом $\varphi(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0, +\infty)$ Из (6.6) после ряда выкладок получаем

$$\left(\frac{\varphi'}{\varphi^\alpha}\right)' \geqslant 0, \quad \alpha = \frac{q+2}{2}.$$

Отсюда следует, что справедливы неравенства

$$\varphi_0^{q/2} - \varphi^{q/2}(t) \geqslant q(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0(\langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0\rangle_0)^{-(q+2)/2}t,$$

$$\varphi_0^{q/2} \geqslant q(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0(\langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0\rangle_0)^{-(q+2)/2}t.$$

Последнее неравенство означает, что t не может принимать сколь угодно большие значения. Полученное противоречие доказывает, что $T_0 < +\infty$. Первое утверждение леммы доказано.

Перейдем к выводу оценок времени и скорости разрушения решения задачи (1.2). С этой целью воспользуемся техникой [Rossi].

Введем функцию

$$v_\gamma(s) = N^{-1}(t^*)u(s\gamma + t^*),\ \gamma = N^{-q}(t^*),\ N(t^*) = \langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0^{1/2}(t^*).$$

Нетрудно проверить, что функция $v_\gamma(s)$ является решением следующей задачи:

$$\mathbb{A}_0 \frac{dv_\gamma(s)}{ds} = \mathbb{F}(v_\gamma)(s),\ \ v_\gamma(-t^*/\gamma) = u_0 N(t^*)^{-1}. \tag{6.9}$$

Докажем, что найдутся такие постоянные $c_1,\ c_2 > 0$, что

$$0 < c_2 \leqslant \frac{d}{ds}\langle \mathbb{A}_0 v_\gamma, v_\gamma\rangle_0^{1/2}(0) \leqslant c_1 < +\infty. \tag{6.10}$$

В силу (6.9) справедливы следующие цепочки неравенств:

$$\frac{d}{ds}\langle \mathbb{A}_0 v_\gamma, v_\gamma\rangle_0(s) = 2(\mathbb{F}(v_\gamma), v_\gamma)_0 \leqslant$$

$$\leqslant 2\mu(|\ v_\gamma\ |_0)\ |\ v_\gamma\ |_0^2 \leqslant 2\mu(\mathrm{B}_1\ \|\ v_\gamma\ \|_0)\mathrm{B}_1^2\ \|\ v_\gamma\ \|_0^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\mu(\mathrm{B}_1 \mathrm{m}_0^{-1/2}\langle \mathbb{A}_0 v_\gamma, v_\gamma\rangle_0^{1/2})\mathrm{m}_0^{-1}\mathrm{B}_1^2\langle \mathbb{A}_0 v_\gamma, v_\gamma\rangle_0,$$

$$\frac{d}{ds}\langle \mathbb{A} v_\gamma, v_\gamma\rangle_0(0) \leqslant 2\mu(\mathrm{B}_1 \mathrm{m}_0{}^{-1/2})\mathrm{B}_1^2 \mathrm{m}_0{}^{-1},$$

$$\frac{d}{ds}\langle \mathbb{A} v_\gamma, v_\gamma\rangle_0^{1/2}(0) \leqslant c_1,$$

где $c_1 = \mu(\mathrm{B}_1 \mathrm{m}_0^{-1/2})\mathrm{B}_1^2 \mathrm{m}_0^{-1}$.

Пусть $\varphi_\gamma(s) = \langle \mathbb{A}_0 v_\gamma, v_\gamma\rangle_0(s)$, тогда с учетом (6.6) получим

$$\varphi_\gamma''(s)\varphi_\gamma(s) - \frac{q+2}{2}(\varphi_\gamma'(s))^2 \leqslant 0.$$

Из последнего неравенства следует неравенство

$$\varphi_\gamma'(s)/\varphi_\gamma^\alpha(s) \geqslant \varphi_\gamma'(s)/\varphi_\gamma^\alpha(s)\Big|_{s=-t^*/\gamma} = 2(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0\langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0\rangle_0^{-(q+2)/2},$$

где $\alpha = (q+2)/2$. Отсюда получаем

$$\frac{d}{ds}\langle \mathbb{A}_0 v_\gamma, v_\gamma\rangle_0^{1/2}(0) \geqslant (\mathbb{F}(u_0), u_0)_0\langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0\rangle_0^{-(q+2)/2} = c_2. \tag{6.12}$$

Из (6.11)–(6.12) вытекает неравенство (6.10), которое эквивалентно следующему неравенству:

$$0 < c_2 \leqslant N'(t^*)/N^{q+1}(t^*) \leqslant c_1 < +\infty. \tag{6.13}$$

Интегрируя неравенство (6.13) в пределах от t до T_0 с учетом (6.1), получим

$$[qc_1]^{-1/q} \leqslant N(t)(\mathrm{T}_0 - t)^{1/q} \leqslant [qc_2]^{-1/q}, \quad N(t) = \langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0^{1/2}, \qquad (6.14)$$

где

$$c_1 = \mu(\mathrm{B}_1 \mathrm{m}_0^{-1/2})\mathrm{B}_1^2 \mathrm{m}_0^{-1}, \quad c_2 = (\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0\rangle_0^{-(q+2)/2}.$$

С другой стороны, имеем

$$\mathrm{m}_0^{1/2} \parallel u \parallel_0 (t) \leqslant N(t) \leqslant \mathrm{M}_0^{1/2} \parallel u \parallel_0 (t).$$

Отсюда и из (6.14) получим

$$\mathrm{C}_1(\mathrm{T}_0 - t)^{-1/q} \leqslant \parallel u \parallel_0 \leqslant \mathrm{C}_2(\mathrm{T}_0 - t)^{-1/q}, \qquad (6.15)$$

где

$$\mathrm{C}_1 = \mathrm{M}_0^{-1/2}[q\mu(\mathrm{m}_0^{-1/2}\mathrm{B}_1)\mathrm{m}_0^{-1}\mathrm{B}_1^2]^{-1/q},$$
$$\mathrm{C}_2 = \mathrm{m}_0^{-1/2}[q(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0\rangle_0^{-(q+2)/2}]^{-1/q}.$$

Из (6.15) получим оценки снизу и сверху на время разрушения:

$$\mathrm{C}_1^q \parallel u_0 \parallel_0^{-q} \leqslant \mathrm{T}_0 \leqslant \mathrm{C}_2^q \parallel u_0 \parallel_0^{-q},$$

что полностью доказывает утверждение леммы, а тем самым и теорему 4.

§ 7. Примеры

Рассмотрим теперь примеры (1.3)–(1.8) сильно нелинейных уравнений соболевского типа, удовлетворяющих условиям на операторные коэффициенты уравнений (1.1), (1.2), при которых справедливы доказанные нами теоремы. В примерах используются стандартные теоремы вложения Соболева, и соответствующие результаты можно найти в [Демиденко].

Во всех примерах гильбертово пространство $\mathbb{H} = \mathbb{L}^2(\Omega)$.

Пример 1.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle u + \sum_{j=1}^{n} \operatorname{div}(|\nabla u|^{p_j - 2}\nabla u)\right) + |u|^q u = 0,$$
$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x),$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей класса $\mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0,1]$, а операторные коэффициенты имеют вид

$$\mathbb{A}_0 u \equiv -\triangle u : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$
$$\mathbb{A}_j(u) \equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p_j - 2}\nabla u) : \mathbb{W}_0^{1,p_j}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,p_j'}(\Omega),$$

$$\mathbb{F}(u) \equiv |u|^q u : \mathbb{L}^{q+2}(\Omega) \to \mathbb{L}^{q'}(\Omega),$$
$$p_j > 2, \quad q_1 > 0, \quad p_j' \equiv \frac{p_j}{p_j - 1}, \quad q' \equiv \frac{q+2}{q+1},$$

$$\mathbb{V}_0 \equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega), \qquad \mathbb{V}_j \equiv \mathbb{W}_0^{1,p_j}(\Omega), \qquad \mathbb{W}_0 \equiv \mathbb{L}^{q+2}(\Omega),$$
$$\mathbb{V}_0^* \equiv \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \qquad \mathbb{V}_j^* \equiv \mathbb{W}^{-1,p_j'}(\Omega), \qquad \mathbb{W}_0^* \equiv \mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\Omega),$$
$$\mathbb{V} \equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega) \bigcap \left(\bigcap_{j=1}^{n} \mathbb{W}_0^{1,p_j}(\Omega) \right).$$

Вложение $\mathbb{V}_0 \equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{W}_0 \equiv \mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$ имеет место при следующих условиях:

$$0 < q \leqslant \frac{4}{N-2} \text{ при } N \geqslant 3, \quad 0 < q < +\infty \text{ при } N = 1, 2.$$

Наконец вложение $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$ справедливо при условиях

$$\bigcap_{j=1}^{n} \mathbb{W}_0^{1,p_j}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^{q+2}(\Omega),$$

что в свою очередь справедливо при условиях

$$0 < q < +\infty \text{ при } N \leqslant \overline{p} \equiv \max_{j=\overline{1,n}} p_j, \quad 2 < q + 2 < \frac{N\overline{p}}{N - \overline{p}} \text{ при } N > \overline{p}.$$

Потребуем выполнения следующего условия на начальные функции $u_0 \in \mathbb{V}$:

$$(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > 0.$$

Можно проверить, что операторные коэффициенты и банаховы пространства удовлетворяют всем условиям теоремы 1.

Пример 2.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\triangle u + \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) - |u|^{q_1} u \right) + |u|^q u = 0,$$
$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x),$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей класса $\mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0, 1]$, а операторные коэффициенты имеют вид

$$\mathbb{A}_0 u \equiv -\triangle u : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$
$$\mathbb{A}_1(u) \equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p_1 - 2} \nabla u) : \mathbb{W}_0^{1,p_1}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,p_1'}(\Omega),$$
$$\mathbb{A}_2(u) \equiv |u|^{p_2 - 2} u : \mathbb{L}^{p_2}(\Omega) \to \mathbb{L}^{p_2'}(\Omega),$$
$$\mathbb{F}(u) \equiv |u|^q u : \mathbb{L}^{q+2}(\Omega) \to \mathbb{L}^{q'}(\Omega),$$

$$p_1 \equiv p > 2, \;\; p_2 \equiv q_1 + 2, \;\; q_1 > 0, \;\; p_1^{'} \equiv \frac{p_1}{p_1 - 1}, \;\; p_2^{'} \equiv \frac{p_2}{p_2 - 1}, \;\; q^{'} \equiv \frac{q+2}{q+1},$$

$$\mathbb{V}_0 \equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad \mathbb{V}_1 \equiv \mathbb{W}_0^{1,p_1}(\Omega), \quad \mathbb{V}_2 \equiv \mathbb{L}^{p_2}(\Omega), \quad \mathbb{W}_0 \equiv \mathbb{L}^{q+2}(\Omega),$$

$$\mathbb{V}_0^* \equiv \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \quad \mathbb{V}_1^* \equiv \mathbb{W}^{-1,p_1^{'}}(\Omega), \quad \mathbb{V}_2^* \equiv \mathbb{L}^{p_2^{'}}(\Omega), \quad \mathbb{W}_0^* \equiv \mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\Omega),$$

$$\mathbb{V} \equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega) \bigcap \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \bigcap \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega).$$

Вложение $\mathbb{V}_0 \equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{W}_0 \equiv \mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$ имеет место при следующих условиях:

$$0 < q \leqslant \frac{4}{N-2} \;\text{ при }\; N \geqslant 3, \;\; 0 < q < +\infty \;\text{ при }\; N = 1, 2.$$

Наконец вложение $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$ справедливо при условиях

$$\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^{q+2}(\Omega),$$

что в свою очередь справедливо тогда, когда

$$0 < q < +\infty \;\text{ при }\; N \leqslant p, \;\; 2 < q + 2 < \frac{Np}{N-p} \;\text{ при }\; N > p.$$

Если $p \geqslant q_1 + 2$, то в силу установленных выше условий справедливо вложение $\mathbb{V}_1 \subset \mathbb{W}_0$. Если же $q_1 + 2 > p$, то при условии $q_1 + 2 \geqslant q + 2$ имеем: $\mathbb{V}_2 \subset \mathbb{W}_0$. Наконец, $u_0 \in \mathbb{V}$. Потребуем выполнения следующего условия на начальные функции $u_0 \in \mathbb{V}$:

$$(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > 0.$$

Можно проверить, что операторные коэффициенты и соответствующие банаховы пространства удовлетворяют всем условиям теоремы 1.

Пример 3.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle u - |u|^{q_1}u\right) + |u|^q u = 0,$$
$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \;\; u(x,0) = u_0(x),$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей класса $\mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0,1]$, а операторные коэффициенты имеют вид

$$\mathbb{A}_0 u \equiv -\triangle u : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$
$$\mathbb{A}_1(u) \equiv |u|^{p_1-2}u : \mathbb{L}^{p_1}(\Omega) \to \mathbb{L}^{p_1^{'}}(\Omega),$$
$$\mathbb{F}(u) \equiv |u|^q u : \mathbb{L}^{q+2}(\Omega) \to \mathbb{L}^{q^{'}}(\Omega),$$
$$\mathbb{V}_0 \equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega), \qquad \mathbb{V}_1 \equiv \mathbb{L}^{p_1}(\Omega), \qquad \mathbb{W}_0 \equiv \mathbb{L}^{q+2}(\Omega),$$
$$\mathbb{V}_0^* \equiv \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \qquad \mathbb{V}_1^* \equiv \mathbb{L}^{p_1^{'}}(\Omega), \qquad \mathbb{W}_0^* \equiv \mathbb{L}^{q^{'}}(\Omega),$$
$$p_1 = q_1 + 2, \;\; q_1 > 0, \;\; p_1^{'} \equiv \frac{p_1}{p_1 - 1}, \;\; q^{'} \equiv \frac{q+2}{q+1}, \;\; q > 0.$$

Вложение $\mathbb{V}_0 \hookrightarrow \mathbb{W}_0$ имеет место при условии

$$0 < q < \frac{4}{N-2} \ \text{ при } \ N \geqslant 3, \ \ 0 < q < +\infty \ \text{ при } \ N = 1, 2.$$

Это означает, что

$$\mathbb{V} \equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega) \bigcap \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{W}_0 \equiv \mathbb{L}^{q+2}(\Omega).$$

Потребуем, чтобы

$$(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > 0,$$

$$0 < q_1 < \frac{4}{N-2} \ \text{ при } \ N \geqslant 3, \ \ 0 < q_1 < +\infty \ \text{ при } \ N = 1, 2.$$

Проверим теперь монотонность производной в смысле Фреше оператора $\mathbb{A}_1(u) = |u|^{q_1} u$. Действительно, производная Фреше имеет вид

$$\mathbb{A}_{1,u}^{'}(u)h \equiv (q_1+1)|u|^{q_1} h : \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega) \to \mathbb{L}^{q_1^{'}}(\Omega),$$

$$q_1^{'} \equiv \frac{q_1+2}{q_1+1}, \ \ \forall\, h \in \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega),$$

$$\langle \mathbb{A}_{1,u}^{'}(u)u_1 - \mathbb{A}_{1,u}^{'}(u)u_2, u_1 - u_2 \rangle_1 = (q_1+1)\langle |u|^{q_1}u_1 - |u|^{q_1}u_2, u_1 - u_2 \rangle_1 =$$

$$= (q_1+1) \int\limits_\Omega dx \ (|u|^{q_1}u_1 - |u|^{q_1}u_2)(u_1 - u_2) \geqslant 0, \ \ \forall\, u, u_1, u_2 \in \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega).$$

Докажем теперь, что при условии $\| \nabla u_n - \nabla u \|_2 \to 0$, когда $n \to +\infty$, имеет место сходимость производных Фреше в равномерной операторной топологии $\mathcal{L}(\mathbb{H}_0^1(\Omega), \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$. Действительно,

$$\| \mathbb{A}_{1,u}^{'}(u) - \mathbb{A}_{1,u}^{'}(u_n) \|_{\mathbb{H}_0^1 \to \mathbb{H}^{-1}} = \sup_{\|\nabla h\|_2 = 1} \| \mathbb{A}_{1,u}^{'}(u)h - \mathbb{A}_{1,u}^{'}(u_n)h \|_{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C} \sup_{\|\nabla h\|_2 = 1} \| \mathbb{A}_{1,u}^{'}(u)h - \mathbb{A}_{1,u}^{'}(u_n)h \|_{(q_1+2)/(q_1+1)} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C} \sup_{\|\nabla h\|_2 = 1} \left(\int\limits_\Omega dx \ |[|u|^{q_1} - |u_n|^{q_1}]h|^{\frac{q_1+2}{q_1+1}} \right)^{(q_1+1)/(q_1+2)}.$$

Рассмотрим отдельно интеграл

$$\mathrm{J}_n = \int\limits_\Omega dx \ |[|u|^{q_1} - |u_n|^{q_1}]h|^{\frac{q_1+2}{q_1+1}} \leqslant \int\limits_\Omega dx \ ||u|^{q_1} - |u_n|^{q_1}|^{\frac{q_1+2}{q_1+1}} |h|^{\frac{q_1+2}{q_1+1}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_\Omega dx \ ||u|^{q_1} - |u_n|^{q_1}|^{(q_1+2)/q_1} \right)^{q_1/(q_1+1)} \left(\int\limits_\Omega dx \, |h|^{q_1+2} \right)^{1/(q_1+1)} \leqslant$$

$$\leqslant \| \nabla h \|_2^{(q_1+2)/(q_1+1)} \left(\int\limits_\Omega dx \, \big| |u|^{q_1} - |u_n|^{q_1} \big|^{(q_1+2)/q_1} \right)^{q_1/(q_1+1)} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C} \left(\int\limits_\Omega dx \, \big| |u|^{q_1} - |u_n|^{q_1} \big|^{(q_1+2)/q_1} \right)^{q_1/(q_1+1)} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C} \max\{ \| \nabla u \|_2^{(q_1+2)q_1/(q_1+1)}, \| \nabla u_n \|_2^{(q_1+2)q_1/(q_1+1)} \} \leqslant \mathrm{C}.$$

Отметим, что поскольку $\| \nabla u - \nabla u_n \|_2 \to +0$ при $n \to +\infty$, то в силу теоремы вложения Соболева $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega)$ имеем: $u_n \to u$ сильно в $\mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega)$.

Рассмотрим функцию $f(x,u) = |u|^{q_1} : \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega) \to \mathbb{L}^{\frac{q_1+2}{q_1}}(\Omega)$. Можно проверить, что выполнены все условия теоремы 15 (см. Приложение Б). По определению непрерывность оператора $f : \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega) \to \mathbb{L}^{(q_1+2)/q_1}(\Omega)$ означает, что имеет место предельное равенство

$$\lim_{n \to +\infty} \int\limits_\Omega \int dx \, |f(x,u) - f(x,u_n)|^{\frac{q_1+2}{q_1+1}} = 0.$$

Значит, по теореме Немыцкого–Вайнберга (см. Приложение Б): имеем $\mathrm{J}_n \to +0$ при $n \to +\infty$ равномерно по h из сферы $\| \nabla h \|_2 = 1$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 2.

Пример 4.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\triangle u - u) + \operatorname{div}(|\nabla u|^q \nabla u) + |u|^q u = 0,$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x),$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей класса $\mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0,1]$, а операторные коэффициенты имеют вид

$$\mathbb{A}_0 u \equiv -\triangle u + u : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$

$$\mathbb{B}(u) \equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^q \nabla u) : \mathbb{W}_0^{1,q+2}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,q'}(\Omega),$$

$$\mathbb{F}(u) \equiv |u|^q u : \mathbb{L}^{q+2}(\Omega) \to \mathbb{L}^{q'}(\Omega),$$

$$\mathbb{V}_0 \equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega), \qquad \mathbb{W}_1 \equiv \mathbb{W}_0^{1,q+2}(\Omega), \qquad \mathbb{W}_0 \equiv \mathbb{L}^{q+2}(\Omega),$$

$$\mathbb{V}_0^* \equiv \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \qquad \mathbb{W}_1^* \equiv \mathbb{W}^{-1,q'}(\Omega), \qquad \mathbb{W}_0^* \equiv \mathbb{L}^{q'}(\Omega).$$

При условиях

$$0 < q < \frac{4}{N-2} \ \text{ при } \ N \geqslant 3, \ \ 0 < q < +\infty \ \text{ при } \ N = 1,2$$

имеет место вложение $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$. А значит, вложение

$$\mathbb{W}_1 \subset \mathbb{V}_0 \hookrightarrow \mathbb{W}_0.$$

Потребуем выполнения следующего условия на начальные функции $u_0 \in \mathbb{W}_1$:

$$(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > (\mathbb{B}(u_0), u_0)_1 .$$

Стало быть, выполнены все условия теоремы 3.

Пример 5.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle^2 u - \triangle u\right) + \operatorname{div}(|\nabla u|^q \nabla u) = 0,$$
$$u\big|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x),$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$ класса $\mathbb{C}^{(4,\delta)}$, $\delta \in (0,1]$, а операторные коэффициенты имеют вид

$$\mathbb{A}_0 u \equiv \triangle^2 u - \triangle u : \mathbb{H}_0^2(\Omega) \to \mathbb{H}^{-2}(\Omega),$$
$$\mathbb{F}(u) \equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^q \nabla u) : \mathbb{W}_0^{1,q+2}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,q'}(\Omega),$$
$$\mathbb{V}_0 \equiv \mathbb{H}_0^2(\Omega), \quad \mathbb{W}_0 \equiv \mathbb{W}_0^{1,q+2}(\Omega),$$
$$\mathbb{V}_0^* \equiv \mathbb{H}^{-2}(\Omega), \quad \mathbb{W}_0^* \equiv \mathbb{W}^{-1,q'}(\Omega).$$

Причем имеет место вложение $\mathbb{V}_0 \subset \mathbb{W}_0$ при условиях

$$0 < q < \frac{4}{N-2} \text{ при } N \geqslant 3, \quad 0 < q < +\infty \text{ при } N = 1, 2.$$

Потребуем теперь выполнения условия на функцию $u_0 \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$:

$$(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > 0.$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 4.

Пример 6.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle^2 u - \triangle u - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u)\right) + \operatorname{div}(|\nabla u|^q \nabla u) = 0, \ p_1 > 2, \ q > 0,$$
$$u\big|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x),$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$ класса $\mathbb{C}^{(4,\delta)}$, $\delta \in (0,1]$, а операторные коэффициенты имеют вид

$$\mathbb{A}_0 u \equiv \triangle^2 u - \triangle u : \mathbb{H}_0^2(\Omega) \to \mathbb{H}^{-2}(\Omega),$$
$$\mathbb{F}(u) \equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^q \nabla u) : \mathbb{W}_0^{1,q+2}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,q'}(\Omega),$$
$$\mathbb{A}_1(u) \equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u) : \mathbb{W}_0^{1,p_1}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,p_1'}(\Omega),$$
$$\mathbb{V}_0 \equiv \mathbb{H}_0^2(\Omega), \qquad \mathbb{W}_0 \equiv \mathbb{W}_0^{1,q+2}(\Omega), \qquad \mathbb{V}_1 \equiv \mathbb{W}_0^{1,p_1}(\Omega),$$
$$\mathbb{V}_0^* \equiv \mathbb{H}^{-2}(\Omega), \qquad \mathbb{W}_0^* \equiv \mathbb{W}^{-1,q'}(\Omega), \qquad \mathbb{V}_1^* \equiv \mathbb{W}^{-1,p_1'}(\Omega).$$

Причем имеет место вложение $\mathbb{V}_0 \subset \mathbb{W}_0$ при условиях

$$0 < q < \frac{4}{N-2} \text{ при } N \geqslant 3, \quad 0 < q < +\infty, \text{ при } N = 1, 2.$$

Это означает, что

$$\mathbb{V} \equiv \mathbb{H}_0^2(\Omega) \bigcap \mathbb{W}_0^{1,p_1}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{W}_0^{1,q+2}(\Omega).$$

Потребуем теперь выполнения условия на функцию $u_0 \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$:

$$(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > 0$$

и условий

$$2 < p_1 \leqslant \frac{2N}{N-2}$$

при $N \geqslant 3$,

$$2 < p_1$$

при $N = 1, 2$. Проверим теперь монотонность производной Фреше оператора:

$$\mathbb{A}_1(u) = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u)$$

в указанном в формулировке теоремы 2 смысле. Действительно, производная Фреше имеет вид

$$\mathbb{A}_{1,u}^{'} = \mathbb{A}_{11} + \mathbb{A}_{12},$$

$$\mathbb{A}_{11}(u)h \equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p_1-2}\nabla h) \ \ \forall\, h \in \mathbb{W}_0^{1,p_1}(\Omega),$$

$$\mathbb{A}_{12}(u)h \equiv -(p_1-2)\operatorname{div}(|\nabla u|^{p_1-4}(\nabla u, \nabla h)\nabla u),$$

$$\langle \mathbb{A}_{11}(u)u_1 - \mathbb{A}_{11}(u)u_2, u_1 - u_2\rangle_1 =$$

$$= \langle -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u_1) + \operatorname{div}(|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u_2), u_1 - u_2\rangle_1 =$$

$$= \int\limits_\Omega dx \left(|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u_1 - |\nabla u|^{p_1-2}\nabla u_2\right)(\nabla u_1 - \nabla u_2) \geqslant 0$$

$\forall\, u, u_1, u_2 \in \mathbb{W}_0^{1,p_1}(\Omega)$. Докажем теперь, что производные Фреше $\mathbb{A}_{11}(u)$ на элементе $u \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$ обладают свойством непрерывности в равномерной операторной топологии $\mathcal{L}(\mathbb{H}_0^2(\Omega); \mathbb{H}^{-2}(\Omega))$:

$$\| \mathbb{A}_{11}(u) - \mathbb{A}_{11}(u_n) \|_{\mathbb{H}_0^2 \to \mathbb{H}^{-2}} \to +0$$

при условии $\| u - u_n \|_{\mathbb{H}_0^2} \to +0$ при $n \to +\infty$. Действительно,

$$\| \mathbb{A}_{11}(u) - \mathbb{A}_{11}(u_n) \|_{\mathbb{H}_0^2 \to \mathbb{H}^{-2}} = \sup_{\|h\|_{\mathbb{H}_0^2}=1} \| \mathbb{A}_{11}(u)h - \mathbb{A}_{11}(u_n)h \|_{\mathbb{H}^{-2}} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C} \sup_{\|h\|_{\mathbb{H}_0^2}=1} \left(\int\limits_\Omega dx \left| |\nabla u|^{p_1-2} - |\nabla u_n|^{p_1-2} \right|^{p_1^{'}} |\nabla h|^{p_1^{'}} \right)^{1/p_1^{'}}.$$

Рассмотрим отдельно следующий интеграл:

$$\mathrm{J}_n = \int\limits_\Omega dx \, \left| |\nabla u|^{p_1-2} - |\nabla u_n|^{p_1-2} \right|^{p_1'} |\nabla h|^{p_1'}.$$

Справедливо следующее неравенство:

$$\mathrm{J}_n \leqslant \mathrm{C} \left(\int\limits_\Omega dx \, \left| |\nabla u|^{p_1-2} - |\nabla u_n|^{p_1-2} \right|^{p_1/(p_1-2)} \right)^{(p_1-2)/(p_1-1)} \times$$

$$\times \left(\int\limits_\Omega dx \, |\nabla h|^{p_1} \right)^{1/(p_1-1)} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C} \max\{ \| u \|_{+2}^{p_1(p_1-2)/(p_1-1)}, \| u_n \|_{+2}^{p_1(p_1-2)/(p_1-1)} \} \leqslant \mathrm{C}.$$

Теперь заметим, что поскольку $\| u - u_n \|_{+2} \to +0$ при $n \to +\infty$, то $\nabla u_n \to \nabla u$ при $n \to +\infty$ сильно в $\mathbb{L}^{p_1}(\Omega)$. Рассмотрим функцию $\mathrm{f}(x,u) = |\nabla u|^{p_1-2} : \mathbb{L}^{p_1}(\Omega) \times \mathbb{L}^{p_1}(\Omega) \times \ldots \times \mathbb{L}^{p_1}(\Omega) \to \mathbb{L}^{p_1/(p_1-2)}(\Omega)$. Можно проверить, что выполнены все условия теоремы Немыцкого–Вайнберга. По определению непрерывность оператора $f : \mathbb{L}^{p_1}(\Omega) \times \times \mathbb{L}^{p_1}(\Omega) \times \ldots \times \mathbb{L}^{p_1}(\Omega) \to \mathbb{L}^{p_1/(p_1-2)}(\Omega)$ означает, что имеет место предельное равенство

$$\lim_{n \to +\infty} \int\limits_\Omega \int dx \, |f(x,u) - f(x,u_n)|^{p_1/(p_1-2)} = 0$$

при условии сильной сходимости $\nabla u_n \to \nabla u$ в $\mathbb{L}^p(\Omega)$.

Значит, в силу теоремы Немыцкого–Вайнберга (см. Приложение Б) приходим к выводу, что $\mathrm{J}_n \to +0$ при $n \to +\infty$ равномерно по h из сферы $\| \triangle h \|_2 = 1$.

Рассмотрим теперь оператор

$$\mathbb{A}_{12}(u)h \equiv -(p_1 - 2) \operatorname{div}(|\nabla u|^{p_1-4}(\nabla u, \nabla h)\nabla u).$$

Введем функции

$$f_{ij}(\overrightarrow{\xi}) = |\overrightarrow{\xi}|^{p_1-2} \frac{\xi_i}{|\overrightarrow{\xi}|} \frac{\xi_j}{|\overrightarrow{\xi}|}, \quad \overrightarrow{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N, \quad i,j = \overline{1,N},$$

где $\xi_m = u_{x_m}$, $m \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{1,p_1}(\Omega)$. Нетрудно проверить, что операторы Немыцкого, определенные функциями f_{ij}, действуют из

$$\underbrace{\mathbb{L}^{p_1}(\Omega) \times \mathbb{L}^{p_1}(\Omega) \times \ldots \times \mathbb{L}^{p_1}(\Omega)}_{N}$$

в $\mathbb{L}^{p_1/(p_1-2)}(\Omega)$. Тогда справедливо неравенство

$$\| \mathbb{A}_{12}(u) - \mathbb{A}_{12}(u_n) \|_{\mathbb{H}_0^2 \to \mathbb{H}^{-2}} = \sup_{\|h\|_{\mathbb{H}_0^2}=1} \| \mathbb{A}_{12}(u)h - \mathbb{A}_{12}(u_n)h \|_{\mathbb{H}^{-2}} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C} \sum_{i,j=1}^{N} \sup_{\|h\|_{\mathbb{H}_0^2}=1} \left(\int_\Omega dx \left| |\nabla u|^{p_1-2} \frac{u_{x_i}}{|\nabla u|} \frac{u_{x_j}}{|\nabla u|} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - |\nabla u_n|^{p_1-2} \frac{u_{nx_i}}{|\nabla u_n|} \frac{u_{nx_j}}{|\nabla u_n|} \right|^{p_1'} |h_{x_j}|^{p_1'} \right)^{1/p_1'} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C} \sum_{i,j=1}^{N} \left(\int_\Omega dx \left| |\nabla u|^{p_1-2} \frac{u_{x_i}}{|\nabla u|} \frac{u_{x_j}}{|\nabla u|} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - |\nabla u_n|^{p_1-2} \frac{u_{nx_i}}{|\nabla u_n|} \frac{u_{nx_j}}{|\nabla u_n|} \right|^{p_1/(p_1-2)} \right)^{(p_1-2)/(p_1-1)} \to +0,$$

как только $\nabla u_n \to \nabla u$ сильно в $\mathbb{L}^{p_1}(\Omega)$.

Монотонность оператора $\mathbb{A}_{12}$ очевидна.

Таким образом, выполнены все условия теоремы 2.

§ 8. Об одной начально-краевой задаче для нелинейного уравнения с двойной нелинейностью вида (1.1)

Прежде всего дадим вывод задачи, рассматриваемой в дальнейшем. Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 1$, — ограниченная область с гладкой границей класса $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0,1]$. Причем область Ω занимает полупроводник с тензором диэлектрической проницаемости ε_{ij}, нелинейной и анизотропной по полю $\mathbf{E}$:

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \delta_{ij}|\mathrm{E}_i|^{p-2}, \quad \mathrm{D}_i = \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_{ij}\mathrm{E}_j, \quad i,j = \overline{1,N}, \quad p > 2, \tag{8.1}$$

и, кроме того, с объемной плотностью тока свободных зарядов, зависящей от потенциала φ самосогласованного поля $\mathbf{E}$ по закону

$$|\varphi|^q\varphi, \quad q > 0. \tag{8.2}$$

Рассмотрим в области Ω систему уравнений квазистационарного электрического поля, которая с учетом (8.2) примет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = n, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad \partial n/\partial t = |\varphi|^q\varphi. \tag{8.3}$$

Из (8.1) и (8.3) получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle\varphi+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\right)+|\varphi|^q\varphi=0,\ \ p>2,\ \ q>0. \tag{8.4}$$

Предположим, что на границе раздела $\partial\Omega$ полупроводник–идеальный проводник задано условие

$$\varphi\big|_{\partial\Omega}=0, \tag{8.5}$$

а в области Ω задано начальное распределение потенциала электрического поля:

$$\varphi(x,0)=\varphi_0(x). \tag{8.6}$$

Для удобства введем обозначение $u(x,t)\equiv\varphi(x,t)$, тогда с учетом (8.4)–(8.6) приходим к следующей задаче:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle u+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right)+|u|^q u=0, \tag{8.7}$$

$$u(x,t)\big|_{\partial\Omega}=0,\ \ t\geqslant 0, \tag{8.8}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ \ x\in\overline{\Omega}, \tag{8.9}$$

$p>2,\ q>0,\ (x,t)\in\Omega\times(0,T]$.

8.1. Локальная разрешимость в слабом обобщенном смысле задачи (8.7)–(8.9). Пусть $\partial\Omega\in\mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta\in(0,1]$, — граница ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ и натуральное число $s\geqslant 2$ таково, что $(s-1)/N\geqslant 1/2-1/p$. Рассмотрим следующую задачу на собственные функции и собственные значения:

$$(-1)^s\triangle^s w_k-\lambda_k w_k=0,\ \ \left.\frac{\partial^n w_k}{\partial x_i^n}\right|_{\partial\Omega}=0,\ \ n=\overline{1,s-1}. \tag{8.10}$$

В силу определения s справедливо следующее вложение: $\mathbb{H}_0^s(\Omega)\hookrightarrow\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, $p>2$. Причем пространство $\mathbb{H}_0^s(\Omega)$ плотно в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Поэтому собственные функции задачи (8.10) образуют «галеркинский» базис в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$.

Дадим определение слабого обобщенного решения.

Определение 13. Слабым обобщенным решением задачи (8.7)–(8.9) назовем решение следующей задачи:

$$\int_0^{\mathrm{T}}dt\,\varphi(t)\left[\left\langle\left(\triangle u+\triangle_p u\right)',w\right\rangle+\left(|u|^q u,w\right)\right]=0$$

$$\forall\,\varphi(t)\in\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T}),\ \forall\,w\in\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega),$$

$$u(0)=u_0\in\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega),$$

где символ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скобка двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$. Наконец, символом $(\cdot,\cdot)$ обозначено

скалярное произведение в $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Кроме того, через $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ обозначим скобку двойственности между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$.

Решение данной задачи будем искать в следующем классе:

$$u \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)),\quad u' \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{H}_0^1(\Omega)),$$
$$\triangle_p u \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)),$$
$$\triangle u + \triangle_p u \in \mathbb{H}^1(0,\mathrm{T};\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)) \cap \mathbb{C}_w^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)).$$

В рассматриваемом классе гладкости в силу §12 Приложения 2 наша задача эквивалентна задаче

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\left\langle \frac{d}{dt}(\triangle u + \triangle_p u) + |u|^q u, v\right\rangle = 0\ \ \forall\, v \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)).$$

Замечание 6. В качестве $w \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ можно взять элементы $w_j \in \mathbb{H}_0^s(\Omega)$, $j = \overline{1,+\infty}$, поскольку их линейные комбинации плотны в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть $u_0(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Если либо $N \leqslant p$ при $q > 0$, либо $N > p$ при $0 < q < [N(p-2)+2p]/[2(N-p)]$, то найдется такое максимальное $\mathrm{T}_0 = \mathrm{T}_0(u_0,q,p) > 0$ и существует функция $u(x,t) : (0,\mathrm{T}_0)\times\Omega \to \mathbb{R}$ такая, что для любого $\mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}_0)$ функция $u(x,t)$ является слабым обобщенным решением задачи* (8.7)–(8.9) *и имеют место включения*

$$u \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)),\ u' \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{H}_0^1(\Omega)), \tag{8.11}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \in \mathbb{L}^2(Q),\quad \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^2(\Omega)),$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \in \mathbb{L}^2([0,\mathrm{T}];\mathbb{L}^{p'}(\Omega)),$$
$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^{p'}(\Omega)),\quad i = \overline{1,N},$$
$$\triangle u + \triangle_p u \in \mathbb{H}^1(0,\mathrm{T};\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)) \cap \mathbb{C}_w^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)),$$
$$p' = p/(p-1),\ Q = (0,\mathrm{T})\times\Omega,$$

кроме того $u(0) = u_0$ почти всюду в Ω. При дополнительных условиях $0 < q < p/(N-p)$ при $N > p$, $q > 0$ при $N \leqslant p$ функция $u(x,t)$ единственная.

Доказательство.

Замечание 7. Поскольку в условиях теоремы 1 $u \in \in \mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$, $u' \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{H}_0^1(\Omega))$, то в силу результата работы ([Лионс, 1]) имеем: $u(t) : [0,\mathrm{T}] \to \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ — сильно непрерывная функция.

Для доказательства локальной разрешимости воспользуемся методом Галеркина в сочетании с методами монотонности и компактности [Лионс, 1].

Будем искать приближенное решение задачи (8.7)–(8.9) в виде

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\varphi(t)\left[\frac{d}{dt}\langle\triangle u_m, w_j\rangle_0 + \frac{d}{dt}\langle\triangle_p u_m, w_j\rangle - (|u_m|^q u_m, w_j)\right] = 0 \quad (8.12)$$

$$\forall\ \varphi(t) \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T}),\ \forall\ j = \overline{1,m},$$

$$u_m = \sum_{k=1}^{m} c_{mk}(t) w_k,\ \ u_{0m} \equiv u_m(0) = \sum_{k=1}^{m} c_{mk}(0) w_k \to u_0 \text{ в } \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega),$$

$$c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(1)}[0,\mathrm{T}_m].$$

Как и ранее, можно доказать, что в классе $c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(1)}[0,\mathrm{T}_{m0})$ при некотором $\mathrm{T}_{m0} > 0$ задача (8.12) эквивалентна задаче

$$(\nabla u_m', \nabla w_j) + (p-1)\sum_{i=1}^{N}\left(\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u_m'}{\partial x_i}, \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right) = (|u_m|^q u_m, w_j), \quad (8.13)$$

где $j = \overline{1,m}$. Из (8.13) сразу же получаем

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{N}\left(\left[1 + (p-1)\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\right]\frac{\partial w_k}{\partial x_i}, \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right) c_{mk}' = (|u_m|^q u_m, w_j),$$

где $j = \overline{1,m}$. Теперь в качестве «галеркинского» базиса в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ выберем собственные функции задачи (8.10). Введем обозначение

$$a_{kj} \equiv \sum_{i=1}^{N}\left(\left[1 + (p-1)\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\right]\frac{\partial w_k}{\partial x_i}, \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right).$$

Имеем

$$\sum_{k,j=1,1}^{m,m} a_{kj}\xi_k\xi_j = \|\nabla\eta\|_2^2 + (p-1)\sum_{i=1}^{N}\left(\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}, \eta_i^2\right) \geqslant \|\nabla\eta\|_2^2,$$

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial w_k}{\partial x_i}\xi_k,\ \ \eta = \sum_{k=1}^{m} w_k\xi_k.$$

Норма $\| \nabla\eta \|_2$ обращается в нуль в классе $\eta \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $\eta = \sum\limits_{k=1}^{m} w_k\xi_k = 0$. Поскольку $\{w_k\}_{k=1}^{+\infty}$ — «галеркинский» базис в $\mathbb{W}_0^1(\Omega)$, то $\eta = 0$ тогда и только тогда, когда $\{\xi_k\}_{k=1}^{m} = \mathbf{0}$, поэтому в силу критерия Сильвестра (см., например, [Постников]) получаем: $\det\{a_{kj}\}_{k,j=1,1}^{m,m} > 0$. Общие результаты о нелинейных системах обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [Петровский]) гарантируют существование решения задачи (8.13) на некотором интервале $[0, t_m]$, $t_m > 0$, в смысле $c_{km} \in \mathbb{C}^{(1)}[0, t_m]$. В дальнейшем мы получим априорные оценки, из которых следует: $t_m = \mathrm{T}$, где T не зависит от m. Значит, $c_{km} \in \mathbb{C}^{(1)}[0, \mathrm{T}]$, $u_m \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$.

Займемся выводом априорных оценок.

Умножим обе части равенства (8.13) на c_{mj} и просуммируем по $j = \overline{1, m}$, тогда получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m\|_2^2 + \frac{p-1}{p}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^p = \|u_m\|_{q+2}^{q+2}. \tag{8.14}$$

Отметим, что нормы

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_p^p\right)^{1/p}, \left(\|\, v\,\|_p^p + \sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_p^p\right)^{1/p}$$

эквивалентны на пространстве $v \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ (см., например, [Лионс, 1]). Поэтому сразу же будем рассматривать пространство $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ с нормой

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_p^p\right)^{1/p}.$$

Из (8.14) следует

$$\frac{1}{2}\,\|\,\nabla u_m\,\|_2^2 + \frac{p-1}{p}\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^p = \frac{1}{2}\,\|\,\nabla u_{0m}\,\|_2^2 + \frac{p-1}{p}\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u_{0m}}{\partial x_i}\right\|_p^p + \int_0^t ds\,\|\,u_m\,\|_{q+2}^{q+2}(s). \tag{8.15}$$

В силу условий, сформулированных в доказываемой теореме относительно p, q, N, и теорем вложения Соболева (см., например, [Байокки]) выполнено вложение $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{L}^{2q+2}(\Omega) \subset \mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$. Теперь в силу (8.15) имеем

$$\|\,u_m\,\|_{q+2} \leqslant \mathrm{B}_1\left(\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^p\right)^{1/p},$$

$$\frac{1}{2}\parallel\nabla u_m\parallel_2^2+\frac{p-1}{p}\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^p\leqslant\frac{1}{2}\parallel\nabla u_{0m}\parallel_2^2+\frac{p-1}{p}\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u_{0m}}{\partial x_i}\right\|_p^p+$$
$$+\mathrm{B}_1^{q+2}\int_0^t ds\,\left(\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^p\right)^{(q+2)/p}(s).$$

Итак, имеем

$$\mathrm{E}_m(t)\leqslant\mathrm{E}_{0m}+\mathrm{B}_2\int_0^t ds\,\mathrm{E}_m^{\alpha}(s),\tag{8.16}$$

$$\mathrm{E}_m(t)\equiv\frac{1}{2}\parallel\nabla u_m\parallel_2^2+\frac{p-1}{p}\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^p,\ \ \mathrm{E}_{0m}\equiv\mathrm{E}_m(0),$$

где

$$\alpha=\frac{q+2}{p},\ \mathrm{B}_2\equiv\mathrm{B}_1^{q+2}\left(\frac{p}{p-1}\right)^{(q+2)/p}.$$

Используя леммы Гронуолла–Беллмана–Бихари (см., например, [Демидович]), в силу (8.16) получим

$$\mathrm{E}_m(t)\leqslant\mathrm{E}_{0m}\exp\{\mathrm{B}_2t\}\quad\text{при}\ \ \alpha=1,\tag{8.17}$$

$$\mathrm{E}_m(t)\leqslant\left[\mathrm{E}_{0m}^{1-\alpha}+(1-\alpha)\mathrm{B}_2t)\right]^{1/(1-\alpha)}\quad\text{при}\ \ \alpha\in(0,1),\tag{8.18}$$

$$\mathrm{E}_m(t)\leqslant\mathrm{E}_{0m}\left[1-(\alpha-1)\mathrm{B}_2\mathrm{E}_{0m}^{(\alpha-1)}t\right]^{-1/(\alpha-1)}\quad\text{при}\ \ \alpha>1.\tag{8.19}$$

Умножим теперь уравнение (8.13) на $c_{mj}^{'}$ и просуммируем по $j=\overline{1,m}$, тогда после интегрирования по времени $s\in[0,t]$ получим

$$\int_0^t ds\,\left[\parallel\nabla u_m^{'}\parallel_2^2(s)+\frac{4(p-1)}{p^2}\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega dx\,\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)\right)^2\right]+$$
$$+\frac{1}{q+2}\parallel u_{0m}\parallel_{q+2}^{q+2}=\frac{1}{q+2}\parallel u_m\parallel_{q+2}^{q+2}.\tag{8.20}$$

В силу условий доказываемой теоремы относительно параметров q, p, N и в силу теорем вложения Соболева (см., например, [Байокки]), получим

$$\int_0^t ds\,\left[\parallel\nabla u_m^{'}\parallel_2^2(s)+\frac{4(p-1)}{p^2}\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega dx\,\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)\right)^2\right]\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{q+2}\mathrm{B}_1^{q+2}\left(\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^p\right)^{(q+2)/p}.\tag{8.21}$$

В силу того что $u_{0m} \to u_0$ сильно в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, справедливо следующее неравенство: $\mathrm{E}_{0m} \leqslant \mathrm{A}$, где A не зависит от m. Отсюда из (8.17)–(8.19) приходим к выводу, что найдется такое максимальное $\mathrm{T}_0 > 0$, что справедливо неравенство $\mathrm{E}_m(t) \leqslant \mathrm{C}$, $t \in [0, \mathrm{T}]$, $\forall \mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0)$, где C не зависит ни от m, ни от t.

Таким образом, из (8.17)–(8.21) следует, что найдется такое $\mathrm{T}_0 \equiv \equiv \mathrm{T}_0(u_0, q, p)$, что для любого $\mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0)$ выполнены следующие включения (8.11):

$$u_m \text{ ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), \tag{8.22а}$$

$$u_m^{'} \text{ ограничено в } \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \tag{8.22б}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right) \text{ ограничено в } \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{L}^2(\Omega)), \tag{8.22в}$$

$$|u_m|^q u_m \text{ ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{L}^{q^{'}}(\Omega)). \tag{8.22г}$$

Наконец, понятно, что

$$\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \text{ ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{L}^2(\Omega)), \quad i = \overline{1, N}. \tag{8.23}$$

В силу (8.22)–(8.23) имеем, что $t_m = \mathrm{T}$, где T не зависит от $m \in \in \mathbb{N}$. Значит, $u_m = \sum\limits_{k=1}^{m} c_{km}(t) w_k \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$. Из включений (8.22)–(8.23) и результатов [Лионс, 1] приходим к выводу, что из последовательности u_m можно выделить такую подпоследовательность которую мы снова обозначим через u_m, что

$$u_m \rightharpoonup u \quad *-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)),$$

$$u_m^{'} \rightharpoonup u^{'} \quad \text{слабо в } \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}_0^1(\Omega)),$$

$$\triangle u_m \rightharpoonup \triangle u \quad *-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)),$$

$$-\triangle_p u_m \rightharpoonup \chi \quad *-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_0^{-1,p^{'}}(\Omega)),$$

$$|u_m|^q u_m \rightharpoonup w \quad *-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{L}^{q^{'}}(\Omega)),\ q^{'} = (q+2)/(q+1).$$

Здесь следует заметить, что из

$$u_m \rightharpoonup u \quad *-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$$

вытекает

$$u_m^{'} \rightharpoonup u^{'} \text{ в } \mathcal{D}^{'}(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)),$$

поэтому в силу слабой сходимости в $\mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$,

$$u_m^{'} \rightharpoonup \eta,$$

приходим к выводу, что $\eta(t) = u^{'}(t)$ для почти всех $t \in [0, \mathrm{T}]$.

Отсюда имеем: $u_m \rightharpoonup u$ слабо в $\mathbb{H}^1(Q)$, $Q = (0,\mathrm{T}) \times \Omega$, тогда в силу компактного вложения $\mathbb{H}^1(Q) \hookrightarrow \mathbb{L}^2(Q)$ приходим к выводу, что $u_m \to u$ сильно в $\mathbb{L}^2(Q)$, а значит, почти всюду (см., например, [Гаевский]). Тогда в силу леммы 1.3 работы ([Лионс, 1]) получим: $|u_m|^q u_m \rightharpoonup |u|^q u$ $*-$слабо в $\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^{q'}(\Omega))$, $q' = (q+2)/(q+1)$. Таким образом, $w = |u|^q u$. Из (8.22) и (8.23) следует, что

$$\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \in \mathbb{H}^1(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^2(\Omega)), \quad u_m \in \mathbb{H}^1(0,\mathrm{T};\mathbb{H}_0^1(\Omega)). \tag{8.24}$$

Имея в виду, что предел последовательности $-\triangle_p u_m \rightharpoonup \chi$ $*-$слабо в $\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^{1,p'}(\Omega))$, докажем, что $\chi = -\triangle_p u$.

Запишем систему уравнений (8.13) в эквивалентном виде

$$\frac{d}{dt}\langle(\triangle u_m + \triangle_p u_m), w_j\rangle + \langle |u_m|^q u_m, w_j\rangle = 0, \quad j = \overline{1,m}, \quad \forall\ t \in [0,\mathrm{T}], \tag{8.25}$$

где введено обозначение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скобки двойственности между пространствами $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$. Причем в силу второго включения в (8.24) получаем, что $\langle |u_m|^q u_m, w_j\rangle \in \mathbb{H}^1(0,\mathrm{T})$. Поэтому и $\langle(\triangle u_m + \triangle_p u_m), w_j\rangle \in \mathbb{H}^1(0,\mathrm{T})$. Тогда, интегрируя уравнение (8.25) по времени, получим

$$\langle \triangle u_m + \triangle_p u_m, w_j\rangle + \left\langle \int_0^t ds\, |u_m|^q u_m(s), w_j \right\rangle = \\ = \langle \triangle u_{0m} + \triangle_p u_{0m}, w_j\rangle. \tag{8.26}$$

Поскольку $\triangle u_m \rightharpoonup \triangle u$ $*-$слабо в $\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{H}^{-1}(\Omega))$, то $\langle \triangle u_m, w_j\rangle \rightharpoonup \langle \triangle u, w_j\rangle$ $*-$слабо в $\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T})$, $j = \overline{1,m}$. Кроме того, $-\triangle_p u_m \rightharpoonup \chi$ $*-$слабо в $\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega))$, $p' = p/(p-1)$, поэтому $-\langle \triangle_p u_m, w_j\rangle \rightharpoonup \langle \chi, w_j\rangle$ $*-$слабо в $\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T})$, $j = \overline{1,m}$. Наконец,

$$\int_0^t ds\, \langle |u_m|^q u_m, w_j\rangle = \int_0^t ds\, \langle |u_m|^q u_m - |u|^q u, w_j\rangle + \int_0^t ds\, \langle |u|^q u, w_j\rangle, j = \overline{1,m},$$

С другой стороны, $|u_m|^q u_m,\ |u|^q u \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^{q'}(\Omega))$, где $q' = (q+2)/(q+1)$. И, кроме того, $|u_m|^q u_m \rightharpoonup |u|^q u$ $*-$слабо в $\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^{q'}(\Omega))$, тогда в силу теоремы Лебега о переходе к пределу

под знаком интеграла Лебега получим

$$\left| \int_0^t ds \, \langle |u_m|^q u_m - |u|^q u, w_j \rangle \right| \to +0$$

при $m \to +\infty$. В силу условия $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$ получим, что правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $m \to +\infty$.

Поскольку $u_{0m} \to u_0$ сильно в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, то мы имеем: $\langle \triangle u_{0m}, w_j \rangle \to \langle \triangle u_0, w_j \rangle$, $\langle \triangle_p u_{0m}, w_j \rangle \to \langle \triangle_p u_0, w_j \rangle$, $j = \overline{1, m}$.

Значит, переходя к пределу при $m \to +\infty$ в равенстве (8.26), получим

$$\triangle u - \chi = \triangle u_0 + \triangle_p u_0 - \int_0^t ds \, |u|^q u(s). \tag{8.27}$$

Введем обозначение: $\mathbb{A}(v) = -\triangle_p v$. Из (8.26) следует

$$\langle \mathbb{A}(u_m), u_m \rangle = \langle \triangle u_m, u_m \rangle + \left\langle \int_0^t ds \, |u_m|^q u_m(s), u_m(t) \right\rangle - \\ - \langle \triangle u_{0m} + \triangle_p u_{0m}, u_m \rangle = - \| \nabla u_m \|_2^2 + \\ + \left\langle \int_0^t ds \, |u_m|^q u_m(s), u_m(t) \right\rangle - \langle \triangle u_{0m} + \triangle_p u_{0m}, u_m \rangle. \tag{8.28}$$

В силу того что $u_m \rightharpoonup u$ слабо в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ при почти всех $t \in (0, \mathrm{T})$ и в силу результата работы [Канторович] имеем

$$\liminf_{m \to +\infty} \| \nabla u_m \|_2^2 \geqslant \| \nabla u \|_2^2 .$$

Кроме того,

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt \left\langle \int_0^t ds |u_m|^q u_m(s), u_m(t) \right\rangle = \int_0^{\mathrm{T}} dt \left\langle \int_0^t ds |u_m|^q u_m(s), u_m(t) - u(t) \right\rangle + \\ + \int_0^{\mathrm{T}} dt \left\langle \int_0^t ds |u_m|^q u_m(s), u(t) \right\rangle.$$

Справедливо следующее неравенство:

$$\left| \int_0^{\mathrm{T}} dt \left\langle \int_0^t ds |u_m|^q u_m(s), u_m(t) - u(t) \right\rangle \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \int\limits_\Omega dx \left[\int\limits_0^t ds\, |u_m|^{q+1} \right]^2 \right)^{1/2} \times$$

$$\times \left(\int\limits_Q dx\, dt\, [u_m(t) - u(t)]^2 \right)^{1/2}, \quad Q \equiv (0, \mathrm{T}) \times \Omega.$$

В силу условий теоремы относительно параметров q, p, N и теорем вложения Соболева (см., например, [Байокки]) имеем: $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \subset \mathbb{L}^{2q+2}(\Omega)$. В этом случае получаем

$$\left| \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left\langle \int\limits_0^t ds\, |u_m|^q u_m(s), u_m(t) - u(t) \right\rangle \right| \leqslant$$

$$\leqslant C(\mathrm{T}, q, p) \left(\int\limits_Q dx\, dt\, [u_m(t) - u(t)]^2 \right)^{1/2}.$$

Причем, в силу того что $u_m \to u$ сильно в $\mathbb{L}^2(Q)$, правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $m \to +\infty$.

Рассмотрим теперь интеграл

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left\langle \int\limits_0^t ds\, |u_m|^q u_m(s), u(t) \right\rangle.$$

Поскольку $u(t) \in \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)) \subset \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{L}^{q+2}(\Omega))$, а

$$\int\limits_0^t ds\, |u_m|^q u_m(s) \in \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{L}^{q'}(\Omega)),$$

$q' = (q+2)/(q+1)$, $|u_m|^q u_m \rightharpoonup |u|^q u$ $*-$слабо в $\mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{L}^{q'}(\Omega))$, то отсюда следует

$$\lim_{m \to +\infty} \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left\langle \int\limits_0^t ds |u_m|^q u_m(s), u(t) \right\rangle = \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left\langle \int\limits_0^t ds |u|^q u(s), u(t) \right\rangle.$$

Пусть

$$\mathbb{X}_m = \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}(u_m) - \mathbb{A}(v), u_m - v \rangle$$

$$\forall\, v \in \mathbb{L}^r(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)),\ \ \mathbb{A}(v) \in \mathbb{L}^{r'}(0,\mathrm{T};\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)),$$
$$r \in (1,\infty),\ \ r' = \frac{r}{r-1}.$$

В силу (8.28) получим

$$\mathbb{X}_m = -\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\ \|\nabla u_m\|_2^2 + \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left\langle \int\limits_0^t ds\, |u_m|^q u_m(s), u_m(t) \right\rangle - \\ - \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \triangle u_{0m} + \triangle_p u_{0m}, u_m\rangle - \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}(u_m), v\rangle - \\ - \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}(v), u_m - v\rangle. \quad (8.29)$$

Из выписанных слагаемых в выражении (8.29) для X_m нам осталось рассмотреть

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \triangle u_{0m} + \triangle_p u_{0m}, u_m\rangle = \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \triangle u_{0m}, u_m\rangle + \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \triangle_p u_{0m}, u_m\rangle. \quad (8.30)$$

Рассмотрим первое слагаемое в (8.30). Последовательность функций u_m равномерно по m ограничено в $\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)) \subset \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{H}_0^1(\Omega))$. С другой стороны, $u_{0m} \to u_0$ сильно в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, а значит, в силу того что $\triangle \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_0^1(\Omega));\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ (см., например, [Лионс, 2]) – множество линейных непрерывных (ограниченных в силу линейности $\triangle$) операторов, действующих из $\mathbb{H}_0^1(\Omega))$ в $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, последовательность $\triangle u_{0m} \to \triangle u_0$ сильно в $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ и справедливо следующее неравенство:

$$|\langle \triangle u_{0m} - \triangle u_0, u_m\rangle| \leqslant C\, \|\triangle u_{0m} - \triangle u_0\|_{-1} \to 0 \ \text{ при } \ m \to +\infty.$$

Поскольку $u_m \to u$ $*-$слабо в $\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{H}_0^1(\Omega))$, а $\triangle u_0 \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, то

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \triangle u_0, u_m\rangle \to \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \triangle u_0, u\rangle \ \text{ при } \ m \to +\infty.$$

И в этом случае

$$\lim_{m\to+\infty} \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \triangle u_{0m}, u_m\rangle = \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \triangle u_0, u\rangle$$

Второе слагаемое в (8.30) является равномерно по m ограниченным

в $\mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$. С другой стороны, $u_{0m}\to u_0$ сильно в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$. В силу того что $\partial/\partial x_i\in\mathcal{L}(\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega);\mathbb{L}^p(\Omega))$, $i=\overline{1,N}$ (см., например, [Лионс, 2]), — последовательность $\partial u_{0m}/\partial x_i\to\partial u_0/\partial x_i$ сильно в $\mathbb{L}^p(\Omega)$ для всех $i=\overline{1,N}$. Справедливо следующее неравенство:

$$\| \,|w|^{p-2}w-|v|^{p-2}v\,\|_{p/(p-1)}\leqslant(p-1)\,\|\,f(w-v)\,\|_{p/(p-1)},$$

где $f=\max(|w|^{p-2},|v|^{p-2})$,

$$\|\,f(w-v)\,\|_{p_1}\leqslant\|\,f\,\|_{q_1p_1}\|\,w-v\,\|_{q_2p_1},\quad p_1=p/(p-2),\quad q_2p_1=p,$$

$$q_2=p-1,\quad q_1=(p-1)/(p-2),\quad q_1p_1=p/(p-2),$$

$$\|\,|w|^{p-2}w-|v|^{p-2}v\,\|_{p/(p-1)}\leqslant(p-1)\,\|\,f\,\|_{p/(p-2)}\|\,w-v\,\|_p,$$

$$\|\,f\,\|_{p/(p-2)}\leqslant 2(\max\{\|\,w\,\|_p,\|\,v\,\|_p\})^{p-2}.$$

Пусть $v=\partial u_{0m}/\partial x_i$ и $w=\partial u_0/\partial x_i$, тогда сразу же получим, что

$$\left|\frac{\partial u_{0m}}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u_{0m}}{\partial x_i}\to\left|\frac{\partial u_0}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u_0}{\partial x_i}\ \text{ сильно в }\ \mathbb{L}^{p'}(\Omega),\ \ p'=\frac{p}{p-1}.$$

Так как $\partial/\partial x_i\in\mathcal{L}(\mathbb{L}^{p'}(\Omega),\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega))$ (см., например, [Лионс, 2]), то последовательность $\triangle_p u_{0m}\to\triangle_p u_0$ сильно в $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$ и справедливо следующее неравенство:

$$|\langle\triangle_p u_{0m}-\triangle_p u_0,u_m\rangle|\leqslant C\,\|\,\triangle_p u_{0m}-\triangle_p u_0\,\|_{-1,p'}\to 0\ \text{ при }\ m\to+\infty.$$

Поскольку $u_m\to u$ $*-$слабо в $\mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^1(\Omega))$, а $\triangle_p u_0\in\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$, то

$$\int_0^{\mathrm{T}}dt\,\langle\triangle_p u_0,u_m\rangle\to\int_0^{\mathrm{T}}dt\,\langle\triangle_p u_0,u\rangle,\ \text{ при }\ m\to+\infty.$$

Значит

$$\lim_{m\to+\infty}\int_0^{\mathrm{T}}dt\,\langle\triangle_p u_{0m},u_m\rangle=\int_0^{\mathrm{T}}dt\,\langle\triangle_p u_0,u\rangle.$$

Таким образом, переходя к верхнему пределу в (8.29) при $m\to+\infty$, получим

$$0\leqslant\limsup_{m\to+\infty}X_m\leqslant-\int_0^{\mathrm{T}}dt\ \|\,\nabla u\,\|_2^2+\int_0^{\mathrm{T}}dt\left\langle\int_0^t ds\,|u|^q u(s),u(t)\right\rangle-$$

$$-\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \triangle u_0 + \triangle_p u_0, u\rangle - \\ -\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \chi, v\rangle - \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \mathbb{A}(v), u-v\rangle.$$

С учетом (8.27) приходим к выводу, что

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \chi, u\rangle = -\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\ \|\nabla u\|_2^2 + \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\left\langle \int\limits_0^t ds\,|u|^q u(s), u(t)\right\rangle - \\ -\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \triangle u_0 + \triangle_p u_0, u\rangle.$$

Отсюда получаем, что

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \chi - \mathbb{A}(v), u-v\rangle = 0\ \ \forall v \in \mathbb{L}^r(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)),$$

$$v = u - \lambda w,\ \ w \in \mathbb{L}^r(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)),\ \ r>1.$$

Стандартным образом (см., например, [Лионс, 1]) приходим к выводу, что

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \chi - \mathbb{A}(u), w\rangle = 0\ \ \forall\, w \in \mathbb{L}^r(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)),$$

$$\chi,\ \ \mathbb{A}(u) \in \mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T};\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)) \subset \mathbb{L}^{r'}(0,\mathrm{T};\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)).$$

Значит, $\chi = -\triangle_p u$.

Докажем теперь, что

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathbb{H}^1(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^2(\Omega)),\ \ i=\overline{1,N}.$$

Пусть

$$\mathbb{A}_i(v) \equiv -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right),\ \ \langle \mathbb{A}_i(v), v\rangle = \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_p^p,\ \ i=\overline{1,N}.$$

В силу того что $u_m \rightharpoonup u$ $*-$слабо в $\mathbb{L}^p(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$, имеем

$$\limsup_{m\to+\infty}\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \mathbb{A}_i(u_m), u_m\rangle \leqslant$$

$$\leqslant -\sum_{j=1,\ j\neq i}^{N}\int_0^{\mathrm{T}} dt\ \left\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|_p^p + \limsup_{m\to+\infty}\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \mathbb{A}(u_m), u_m\rangle,$$

$$\limsup_{m\to+\infty}\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \mathbb{A}(u_m), u_m\rangle \leqslant -\int_0^{\mathrm{T}} dt\ \|\ \nabla u\ \|_2^2 + \int_0^{\mathrm{T}} dt\ \left\langle \int_0^t ds\,|u|^q u(s), u(t)\right\rangle -$$

$$-\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \triangle u_0 + \triangle_p u_0, u\rangle = -\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \triangle_p u, u\rangle = \int_0^{\mathrm{T}} dt\ \sum_{j=1}^{N}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|_p^p.$$

Таким образом, получаем

$$\limsup_{m\to+\infty}\int_0^{\mathrm{T}} dt\ \left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^p \leqslant \int_0^{\mathrm{T}} dt\ \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_p^p. \tag{8.31}$$

С другой стороны, $\dfrac{\partial u_m}{\partial x_i}$ ограничена в $\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^p(\Omega)) \subset \mathbb{L}^p(Q)$, $Q = (0,\mathrm{T})\times\Omega$, поэтому в силу рефлексивности $\mathbb{L}^p(Q)$ (см., например, [Иосида]) можно выделить подпоследовательность, которую мы снова обозначим через u_m, такую, что

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial x_i} \ \text{ слабо в } \mathbb{L}^p(Q),\ \ i=\overline{1,N}. \tag{8.32}$$

Значит, в силу результата работы ([Иосида]) получим

$$\liminf_{m\to+\infty}\int_0^{\mathrm{T}} dt\ \left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^p \geqslant \int_0^{\mathrm{T}} dt\ \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_p^p,\ \ i=\overline{1,N}. \tag{8.33}$$

Из (8.31) и (8.33) следует, что

$$\lim_{m\to+\infty}\int_0^{\mathrm{T}} dt\ \left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^p = \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_p^p,\ \ i=\overline{1,N}. \tag{8.34}$$

Из результата работы [Иосида] и (8.32), (8.34) следует, что

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \to \frac{\partial u}{\partial x_i} \ \text{ сильно в } \mathbb{L}^p(Q),\ \ i=\overline{1,N}, \tag{8.35}$$

что в свою очередь означает [Иосида]

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \to \frac{\partial u}{\partial x_i} \ \text{ почти всюду в } Q\equiv(0,\mathrm{T})\times\Omega,\ \ i=\overline{1,N}. \tag{8.36}$$

Переходя, если это необходимо, к подпоследовательности, имеем

$$\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \rightharpoonup \chi_i \quad *-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^2(\Omega)), \quad i=\overline{1,N}$$

В силу (8.36) и результата работы ([Лионс, 1]) получим

$$\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \rightharpoonup \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u}{\partial x_i} \quad *-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^2(\Omega)).$$

Стало быть,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right) \rightharpoonup \frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \text{ в } \mathcal{D}'(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^2(\Omega)).$$

В силу (8.22) можно выделить такую подпоследовательность, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right) \rightharpoonup \psi \text{ слабо в } \mathbb{L}^2(Q), \quad Q=(0,\mathrm{T})\times\Omega.$$

А это значит, что

$$\psi=\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\in\mathbb{L}^2(Q), \quad Q=(0,\mathrm{T})\times\Omega, \quad i=\overline{1,N}.$$

Итак,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\in\mathbb{L}^2(Q), \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\in\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^2(\Omega)),$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\in\mathbb{H}^1(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^2(\Omega)), \quad i=\overline{1,N}. \tag{8.37}$$

Аналогичным образом при помощи (8.36) доказывается свойство

$$\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \rightharpoonup \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i} \quad *-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^{p'}(\Omega)).$$

Из (8.37) и теорем вложения следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\in\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^{p'}(\Omega)),$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\in\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^{p'}(\Omega)). \tag{8.38}$$

Докажем (8.38).

Введем обозначение: $\psi\equiv|\partial u/\partial x_i|^{(p-2)/2}\partial u/\partial x_i$. В этом случае $|\psi|^\alpha\psi=|\partial u/\partial x_i|^{p-2}\partial u/\partial x_i$ при $\alpha=(p-2)/p$, $i=\overline{1,N}$. Отметим, что $|\psi|^\alpha\psi\in\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^{p'}(\Omega))$. Докажем, что $(|\psi|^\alpha\psi)'_t\in\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^{p'}(\Omega))$.

Действительно,

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left(\int\limits_\Omega dx\, |\psi|^{\alpha p'} |\psi_t'|^{p'} \right)^{2/p'} \leqslant \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left(\int\limits_\Omega dx\, |\psi|^{\alpha p' p_1} \right)^{2/(p' p_1)} \times$$

$$\times \left(\int\limits_\Omega dx\, |\psi_t'|^{p' p_2} \right)^{2/(p' p_2)},$$

где

$$\alpha p' p_1 = 2, \quad p' p_2 = 2, \quad p_1^{-1} + p_2^{-1} = 1, \quad p_1 = \frac{2(p-1)}{p-2}, \quad p_2 = \frac{2(p-1)}{p}.$$

Поскольку $\psi \in \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{L}^2(\Omega))$, $\psi_t' \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{L}^2(\Omega))$, то

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left(\int\limits_\Omega dx\, |\psi|^{\alpha p'} |\psi_t'|^{p'} \right)^{2/p'} \leqslant \sup_{t \in (0,\mathrm{T})} \| \psi \|_2^{2\alpha} \int\limits_Q dx\, dt\, |\psi_t'|^2 < +\infty,$$

$Q = (0, \mathrm{T}) \times \Omega$.

Теперь мы можем перейти к пределу при $m \to +\infty$ в уравнении (8.12). Действительно, возьмем сначала в равенстве (8.12) функцию $\varphi(t) = 1$, тогда получим интегральное равенство

$$\triangle u_m + \triangle_p u_m = \triangle u_{m0} + \triangle_p u_{m0} - \int\limits_0^t ds\, |u_m|^q u_m,$$

понимаемое в смысле $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$ для почти всех $t \in (0, \mathrm{T})$. С учетом полученных ранее результатов мы можем перейти к пределу при $m \to +\infty$ и получить следующее уравнение:

$$\triangle u + \triangle_p u = \triangle u_0 + \triangle_p u_0 - \int\limits_0^t ds\, |u|^q u$$

в смысле $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$ для почти всех $t \in (0, \mathrm{T})$. Из этого равенства вытекает, что

$$\triangle u + \triangle_p u \in \mathbb{H}^1(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)) \cap \mathbb{C}_w^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)).$$

Заметим, что из (8.12) вытекает поточечное равенство

$$\frac{d}{dt} [\triangle u_m + \triangle_p u_m] = -|u_m|^q u_m.$$

Поскольку

$$\triangle u_m + \triangle_p u_m \rightharpoonup \triangle u + \triangle_p u$$

слабо в $\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega))$, то

$$\frac{d}{dt}\left(\triangle u_m+\triangle_p u_m\right)\to\frac{d}{dt}\left(\triangle u+\triangle_p u\right)$$

в смысле $\mathcal{D}'(0,\mathrm{T};\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega))$. С другой стороны,

$$|u_m|^q u_m\rightharpoonup|u|^q u$$

слабо в $\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega))$, и, значит,

$$\frac{d}{dt}\left(\triangle u_m+\triangle_p u_m\right)\rightharpoonup\xi$$

слабо в $\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega))$. Таким образом,

$$\frac{d}{dt}\left(\triangle u_m+\triangle_p u_m\right)\to\frac{d}{dt}\left(\triangle u+\triangle_p u\right)$$

слабо в $\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega))$.

Теперь мы можем перейти к пределу в равенстве (8.12) и получить

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}}dt\,\varphi(t)\left[\frac{d}{dt}\langle\triangle u+\triangle_p u,w_j\rangle+\langle|u|^q u,w_j\rangle\right]=0\ \ \forall\,\varphi(t)\in\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T}).$$

Данная задача в силу §12 Приложения Б эквивалентна задаче

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}}dt\,\left\langle\frac{d}{dt}\left[\triangle u+\triangle_p u\right]+|u|^q u,v\right\rangle=0\ \ \forall\,v\in\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)).$$

Пусть теперь u_1 и u_2 — слабые обобщенные решения в классе гладкости, указанном в формулировке теоремы, следующей задачи:

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}}dt\,\varphi(t)\left[\frac{d}{dt}\langle\triangle u+\triangle_p u,w_j\rangle+\langle|u|^q u,w_j\rangle\right]=0\ \ \forall\,\varphi(t)\in\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T}),$$

соответствующие одной начальной функции $u_0\in\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Возьмем в этой задаче $\varphi=1$, тогда получим равенство для почти всех $t\in(0,\mathrm{T})$:

$$\triangle u+\triangle_p u=\triangle u_0+\triangle_p u-\int\limits_0^t ds\,|u|^q u$$

в смысле $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$. Из этого равенства получим

$$\triangle w+\triangle_p u_1-\triangle_p u_2=-\int\limits_0^t ds\,\left[|u_1|^q u_1-|u_2|^q u_2\right]$$

для почти всех $t \in (0, \mathrm{T})$ в смысле $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$. Скалярно умножая последнее равенство на $w = u_1 - u_2 \in \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$, в силу монотонности $\triangle_p : \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$, получим

$$\| \nabla w \|_2^2 (t) \leqslant \int_0^t ds \int_\Omega dx \, ||u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2| (s) |w|(t) \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \int_0^t ds \, (\| |u_1|^q \|_N + \| |u_2|^q \|_N) \| w \|_r (s) \| w \|_2 (t) \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \| \nabla w \|_2 (t) \int_0^t ds \, (\| |u_1|^q \|_N + \| |u_2|^q \|_N) \| w \|_r (s),$$

где $r = 2N/(N-2)$ при $N \geqslant 3$ и $r \geqslant 2$ при $\mathrm{N} = 1, 2$, тогда имеет место вложение $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^r(\Omega)$ (см., например, [Байокки]). Кроме того, потребуем, чтобы $0 < q \leqslant p/(N-p)$ при $N > p$ и $q > 0$ при $N \leqslant p$. Тогда в силу теорем вложения $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{L}^{qN}(\Omega)$ (см., например, [Байокки]) получаем

$$\| \nabla w \|_2 (t) \leqslant C_3 \int_0^t ds \, \| \nabla w \|_2 (s).$$

В силу леммы Гронуолла–Белмана (см., например, [Демидович]) из последнего неравенства получаем: $u_1(t) = u_2(t)$ почти всюду в $Q = (0, \mathrm{T}) \times \Omega$.

Теорема доказана.

8.2. Разрушение решения задачи. Введем следующие обозначения:

$$\mathrm{E}_m(t) \equiv \frac{1}{2} \| \nabla u_m \|_2^2 + \frac{p-1}{p} \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p, \quad \mathrm{E}_{0m} \equiv \mathrm{E}_m(0),$$

$$\mathrm{E}(t) \equiv \frac{1}{2} \| \nabla u \|_2^2 + \frac{p-1}{p} \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p, \quad \mathrm{E}_0 \equiv \mathrm{E}(0),$$

$$\mathrm{B}_2 \equiv \mathrm{B}_1^{q+2} \left(\frac{p}{p-1} \right)^{(q+2)/p}, \quad \alpha = \frac{q+2}{p},$$

где B_1 — наилучшая постоянная вложения пространств $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1. *Тогда*

1) *если* $p > q+2$, *то* $\mathrm{T}_0 = +\infty$ *и*

$$\left[\mathrm{E}_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\frac{\| u_0 \|_{q+2}^{q+2}}{\mathrm{E}_0^{\alpha}} t\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \leqslant \mathrm{E}(t) \leqslant \left[\mathrm{E}_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\mathrm{B}_2 t\right]^{\frac{1}{1-\alpha}};$$

2) *если* $p = q+2$, *то* $\mathrm{T}_0 = +\infty$ *и*

$$\mathrm{E}_0 \exp\left\{\| u_0 \|_{q+2}^{q+2} \mathrm{E}_0^{-1} t\right\} \leqslant \mathrm{E}(t) \leqslant \mathrm{E}_0 \exp\left\{\mathrm{B}_2 t\right\};$$

3) *если же* $p < q+2$ (*т. е.* $\alpha > 1$,) *то найдется такое* $\mathrm{T}_0 = \mathrm{T}_0(u_0)$, *что*

$$\limsup_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p = +\infty,$$

$$\mathrm{T}_1 \equiv (\alpha-1)^{-1} \mathrm{B}_2^{-1} \mathrm{E}_0^{-\alpha+1} \leqslant \mathrm{T}_0 \leqslant (\alpha-1)^{-1} \| u_0 \|_{q+2}^{-q-2} \mathrm{E}_0 \equiv \mathrm{T}_2.$$

В случаях (1) *и* (2) *неравенства снизу имеют место при дополнительном условии* $q > 0$ *при* $N = 1, 2$ *и* $0 < q < 4/(N-2)$ *при* $N \geqslant 3$. *Наконец, неравенство сверху в случае* (3) *имеет место при таких же условиях на* q.

Доказательство. Пусть u_m — галеркинские приближения, определенные в (8.13). Поскольку $u_{0m} \rightharpoonup u_0$ сильно в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, а последовательность $u_m \rightharpoonup u$ $*-$слабо в $\mathbb{L}^{\infty}(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$, то, переходя в (8.17) и (8.18) к пределу при $m \to +\infty$, с учетом того что $\mathrm{E}(t) \leqslant \liminf\limits_{m \to +\infty} \mathrm{E}_m(t)$ (см. [Иосида]), получим

$$\mathrm{E}(t) \leqslant \left[\mathrm{E}_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\mathrm{B}_2 t\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad \alpha < 1, \tag{8.39}$$

$$\mathrm{E}(t) \leqslant \mathrm{E}_0 \exp\left\{\mathrm{B}_2 t\right\}, \quad \alpha = 1. \tag{8.40}$$

Таким образом, в силу (8.39) и (8.40) мы получили оценки сверху в первом и во втором пунктах теоремы.

Рассмотрим теперь случай $\alpha > 1$.

Поскольку последовательность $u_{0m} \to u_0$ сильно в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, то в силу результата работы ([Канторович]) имеем: $\mathrm{E}_{0m} \to \mathrm{E}_0$. В этом случае из числовой последовательности E_{0m} можно выделить либо монотонно неубывающую, либо монотонно невозрастающую подпоследовательность. Будем искомую подпоследовательность последовательности E_{0m} и соответствующие подпоследовательности последовательностей u_{0m} и u_m обозначать таким же образом.

Рассмотрим неравенство (8.19). Предположим, что E_{0m} — монотонно невозрастающая. Введем обозначение: $\{\mathrm{E}_{0m}^{\{n\}}\}$ — последовательность, полученная из E_{0m} путем вычеркивания первых $n \in \mathbb{N}$ слагаемых. Тогда неравенство (8.19) имеет место равномерно по m для всех $t \in [0, \mathrm{T}_1^{\{n\}})$, где $\mathrm{T}_1^{\{n\}} \equiv (\alpha-1)^{-1} \mathrm{B}_2^{-1} \mathrm{E}_{0n}^{1-\alpha}$. Поскольку $u_m \rightharpoonup u$ $*-$слабо в $\mathbb{L}^{\infty}(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$, то для всех таких t мы можем перейти к пределу

при $m \to +\infty$ в (8.19) и с учетом результата работы [Иосида] получить, что

$$\mathrm{E}(t) \leqslant \mathrm{E}_0 \left[1 - (\alpha - 1)\mathrm{B}_2 \mathrm{E}_0^{\alpha-1} t\right]^{-1/(\alpha-1)} \quad \text{при} \quad t \in [0, \mathrm{T}_1^{\{n\}}). \tag{8.41}$$

В силу произвольности $n \in \mathbb{N}$ и того факта, что $\mathrm{T}_1^{\{n\}} \uparrow \mathrm{T}_1$ при $n \uparrow +\infty$, мы приходим к выводу, что (8.41) имеет место при $t \in [0, \mathrm{T}_1)$ и, кроме того, $\mathrm{T}_0 \geqslant \mathrm{T}_1$. Пусть теперь E_{0m} — монотонно неубывающая последовательность. Тогда, повторяя предыдущие рассуждения, получим, что (8.41) имеет место для всех $t \in [0, \mathrm{T}_1)$ и $\mathrm{T}_0 \geqslant \mathrm{T}_1$.

Для дальнейшего изложения нам необходимо доказать, что для почти всех $t \in [0, \mathrm{T}] \quad \forall\, \mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0) \quad \mathrm{E}_m(t) \to \mathrm{E}(t)$.

С этой целью заметим, что при доказательстве теоремы 1 мы получили (8.35), а значит, в силу вложения $\mathbb{L}^p(Q) \subset \mathbb{L}^2(Q)$, $Q = (0, \mathrm{T}) \times \times \Omega$, $\forall \mathrm{T} \in [0, \mathrm{T}_0)$, имеем

$$\int\limits_0^t ds\, \mathrm{E}_m(s) \to \int\limits_0^t ds\, \mathrm{E}(s) \ \ \forall\, t \ \in [0, \mathrm{T}], \ \ \forall\, \mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0). \tag{8.42}$$

С другой стороны, при выполнении условий $q > 0$ при $N = 1, 2$ и $0 < < q < 4/(N-2)$ при $N \geqslant 3$ имеем компактное вложение $\mathbb{H}^1(Q) \subset \subset \mathbb{L}^{q+2}(Q)$ (см., например, [Байокки]), а последовательность u_m сходится слабо в $\mathbb{H}^1(Q)$. Стало быть, последовательность $u_m \to u$ сильно в $\mathbb{L}^{q+2}(Q)$, $Q = (0, \mathrm{T}) \times \Omega \forall\, \mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0)$. В силу (8.14) правая часть выражения для $\mathrm{E}_m(t)$ сходится для любого $t \in [0, \mathrm{T}]$, $\mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0)$, к некоторой функции $\eta(t)$, и из доказательства теоремы 1 $\mathrm{E}_m(t) \leqslant \mathrm{C} < < +\infty$, где C не зависит ни от m, ни от t, в силу теоремы Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла Лебега (см., например, [Дьяченко]) имеем: $\eta(t) \in \mathbb{L}^1(0, \mathrm{T}) \ \ \forall\, \mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0)$ и

$$\int\limits_0^t \mathrm{E}_m(s) ds \ \to \int\limits_0^t ds\, \eta(s) \ \ \forall\, t \in [0, \mathrm{T}], \ \ \forall\, \mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0). \tag{8.43}$$

Сравнивая (8.42) с (8.43), приходим к выводу, что

$$\int\limits_0^t ds\, [\mathrm{E}(s) - \eta(s)] = 0 \ \ \forall t \in [0, \mathrm{T}], \ \ \forall\, \mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0), \tag{8.44}$$

причем $\mathrm{E}(t) \in \mathbb{L}^1(0, \mathrm{T})$, $\eta(t) \in \mathbb{L}^1(0, \mathrm{T})$, поэтому в силу (8.44) получим

$$\eta(t) = \mathrm{E}(t) \ \text{ для почти всех } \ t \in [0, \mathrm{T}], \ \ \forall\, \mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0).$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что последовательность $\mathrm{E}_m(t)$ при дополнительных условиях на $q > 0$ сходится почти всюду к $\mathrm{E}(t)$ на множестве $t \in [0, \mathrm{T}] \ \ \forall \mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0)$.

В силу (8.15), (8.20), а также поскольку $u_m(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$, имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\parallel \nabla u_m \parallel_2^2 + \frac{p-1}{p}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^p = \parallel u_m \parallel_{q+2}^{q+2}(s), \quad (8.45)$$

$$\parallel \nabla u_m^{'} \parallel_2^2 + (p-1)\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\Omega} dx \left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\left|\frac{\partial u_m^{'}}{\partial x_i}\right|^2 = \frac{1}{q+2}\frac{d}{dt}\parallel u_m \parallel_{q+2}^{q+2}. \quad (8.46)$$

Из (8.45) и (8.46) следует, что $\mathrm{E}_m(t),\ \mathrm{E}_m^{'}(t) \in \mathbb{AC}[0,\mathrm{T}]$. Справедливы следующие неравенства:

$$\left|\int\limits_{\Omega} dx\ \left(\nabla u_m^{'}, \nabla u_m\right)\right|^2 \leqslant \parallel \nabla u_m^{'} \parallel_2^2 \parallel \nabla u_m \parallel_2^2, \quad (8.47)$$

$$\left|\int\limits_{\Omega} dx \left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\frac{\partial u_m^{'}}{\partial x_i}\right| \leqslant \int\limits_{\Omega} dx \left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-1}\left|\frac{\partial u_m^{'}}{\partial x_i}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^{p/2}\left(\int\limits_{\Omega} dx \left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\left|\frac{\partial u_m^{'}}{\partial x_i}\right|^2\right)^{1/2}. \quad (8.48)$$

В силу неравенства Шварца (см., например, [Морен]) имеем

$$\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^{p/2}\left(\int\limits_{\Omega} dx \left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\left|\frac{\partial u_m^{'}}{\partial x_i}\right|^2\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^{p}\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\Omega} dx \left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\left|\frac{\partial u_m^{'}}{\partial x_i}\right|^2\right)^{1/2}. \quad (8.49)$$

В силу (8.45)–(8.49) справедлива цепочка неравенств:

$$\left|\langle u_m, [-\triangle u_m - \triangle_p u_m]_t^{'}\rangle\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left|\langle \nabla u_m^{'}, \nabla u_m\rangle\right|^2 + (p-1)^2\left|\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\Omega} dx \left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\frac{\partial u_m^{'}}{\partial x_i}\right|^2 +$$

$$+ 2(p-1)\left|\left(\nabla u_m^{'}, \nabla u_m\right)\right|\left|\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\Omega} dx \left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\frac{\partial u_m^{'}}{\partial x_i}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \| \nabla u_m' \|_2^2 \| \nabla u_m \|_2^2 + (p-1)^2 \sum_{i=1}^N \| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \|_p^p \sum_{i=1}^N \int\limits_\Omega dx \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left| \frac{\partial u_m'}{\partial x_i} \right|^2 +$$

$$+ 2(p-1) \| \nabla u_m' \|_2 \| \nabla u_m \|_2 \times \left(\sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^N \int\limits_\Omega dx \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-2} \times \right.$$

$$\left. \times \left| \frac{\partial u_m'}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{1/2} \leqslant \left(\| \nabla u_m \|_2^2 + (p-1) \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p \right) \times$$

$$\times \left(\| \nabla u_m' \|_2^2 + (p-1) \sum_{i=1}^N \int\limits_\Omega dx \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left| \frac{\partial u_m'}{\partial x_i} \right|^2 \right) \leqslant$$

$$\leqslant p \left(\| \nabla u_m' \|_2^2 + (p-1) \sum_{i=1}^N \int\limits_\Omega dx \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left| \frac{\partial u_m'}{\partial x_i} \right|^2 \right) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{2} \| \nabla u_m \|_2^2 + \frac{p-1}{p} \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p \right).$$

Из (8.45), (8.46) и предыдущего неравенства получим

$$\frac{d^2 \mathrm{E}_m}{dt^2} \mathrm{E}_m - \alpha \left(\frac{d\mathrm{E}_m}{dt} \right)^2 \geqslant 0, \quad \alpha = \frac{q+2}{p}. \tag{8.50}$$

Теперь рассмотрим три случая: $0 < \alpha < 1$, $\alpha = 1$, $1 < \alpha$. Можем считать, как и ранее, последовательность E_{0m} монотонной и положительной, тогда последовательность $\mathrm{E}_m > 0$ для всех $m \in \mathbb{N}$. В первом случае ($0 < \alpha < 1$) из (8.50) следует

$$\left(\frac{\mathrm{E}_m'}{\mathrm{E}_m^\alpha} \right)' \geqslant 0, \quad \frac{\mathrm{E}_m'}{\mathrm{E}_m^\alpha} \geqslant \frac{\| u_{0m} \|_{q+2}^{q+2}}{\mathrm{E}_{0m}^\alpha},$$

$$\mathrm{E}_m(t) \geqslant \left[\mathrm{E}_{0m}^{1-\alpha} + (1-\alpha) \frac{\| u_{0m} \|_{q+2}^{q+2}}{\mathrm{E}_{0m}^\alpha} t \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{8.51}$$

Рассмотрим теперь второй случай: $\alpha = 1$. Из (8.50) получаем

$$\mathrm{E}_m'' \mathrm{E}_m - \left(\mathrm{E}_m' \right)^2 \geqslant 0, \quad \left(\ln \frac{\mathrm{E}_m'}{\mathrm{E}_m} \right)' \geqslant 0,$$

$$\mathrm{E}_m(t) \geqslant \mathrm{E}_{0m} \exp \left\{ \frac{\| u_{0m} \|_{q+2}^{q+2}}{\mathrm{E}_{0m}} t \right\}. \tag{8.52}$$

Рассмотрим третий случай: $\alpha > 1$. Из (8.50) вытекает

$$\left(\frac{\mathrm{E}_m'}{\mathrm{E}_m^{\alpha}}\right)' \geqslant 0, \quad \frac{\mathrm{E}_m'}{\mathrm{E}_m^{\alpha}} \geqslant \frac{\| u_{0m} \|_{q+2}^{q+2}}{\mathrm{E}_{0m}^{\alpha}},$$

$$\mathrm{E}_m \geqslant \mathrm{E}_{0m}\left[1 - (\alpha-1)\frac{\| u_{0m} \|_{q+2}^{q+2}}{\mathrm{E}_{0m}} t\right]^{-1/(\alpha-1)}. \tag{8.53}$$

В силу сильной сходимости $u_{0m} \to u_0$ в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и из вложения $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$ получаем: $\mathrm{E}_{0m} \to \mathrm{E}_0$ и $\| u_{0m} \|_{q+2} \to \| u_0 \|_{q+2}$. С другой стороны, мы установили, что $\mathrm{E}_m(t) \to \mathrm{E}(t)$ для почти всех $t \in [0, \mathrm{T}_0)$. Поэтому, переходя к пределу при $m \to +\infty$ в неравенствах (8.51) и (8.52), получим

$$\mathrm{E}(t) \geqslant \left[\mathrm{E}_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\frac{\| u_0 \|_{q+2}^{q+2}}{\mathrm{E}_0^{\alpha}} t\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad \text{при } \alpha \in (0,1),$$

$$\mathrm{E}(t) \geqslant \mathrm{E}_0 \exp\{\frac{\| u_0 \|_{q+2}^{q+2}}{\mathrm{E}_0} t\} \qquad \text{при } \alpha = 1.$$

Введем обозначение: $\mathrm{F}_{0m} = \| u_{0m} \|_{q+2}^{q+2} / \mathrm{E}_{0m}$. Без ограничения общности переходом к подпоследовательности мы можем считать последовательность $\mathrm{E}_{0m} > 0$ равномерно по m, поскольку $\mathrm{E}_0 > 0$. В силу сходимости последовательности $\mathrm{F}_{0m} \to \mathrm{F}_0$ при $m \to +\infty$, где $\mathrm{F}_0 \equiv \equiv \| u_0 \|_{q+2}^{q+2} / \mathrm{E}_0$, мы можем выбрать монотонно сходящуюся подпоследовательность, которую мы снова обозначим через F_{0m}. Соотвествующие подпоследовательности последовательностей $\{u_{0m}\}$ и $\{u_m\}$ мы снова будем обозначать $\{u_{0m}\}$ и $\{u_m\}$. Перепишем (8.53) с учетом принятого обозначения:

$$\mathrm{E}_m \geqslant \mathrm{E}_{0m}\left[1 - (\alpha-1)\mathrm{F}_{0m} t\right]^{-1/(\alpha-1)}. \tag{8.54}$$

Пусть последовательность F_{0m} монотонно неубывающая, тогда неравенство (8.54) имеет место равномерно по m для всех $t \in [0, (\alpha-1)^{-1}\mathrm{F}^{-1})$, где $\mathrm{F} = \sup\limits_{m \in \mathbb{N}} \mathrm{F}_{0m}$. Переходя к пределу при $m \to +\infty$, для таких t в неравенстве (8.54) получим

$$\mathrm{E} \geqslant \mathrm{E}_0\left[1 - (\alpha-1)\mathrm{F}_0 t\right]^{-1/(\alpha-1)} \quad \text{при } t \in [0, (\alpha-1)^{-1}\mathrm{F}^{-1}). \tag{8.55}$$

Но $\mathrm{F} = \mathrm{F}_0$, в силу того что последовательность F_{0m} монотонно неубывающая и сходящаяся к $\mathrm{F}_0 \equiv \| u_0 \|_{q+2}^{q+2} / \mathrm{E}_0$. Отсюда и из (8.55) сразу же получаем, что $\mathrm{T}_0 \leqslant (\alpha-1)^{-1} \| u_0 \|_{q+2}^{-q-2} \mathrm{E}_0 \equiv \mathrm{T}_2$.

Пусть теперь последовательность F_{0m} монотонно невозрастающая. Обозначим через $\{\mathrm{F}_{0m}^{\{n\}}\}$ последовательность, полученную из после-

довательности $\{\mathrm{F}_{0m}\}$ путем вычеркивания первых $n \in \mathbb{N}$ слагаемых. Сделаем предположение о том, что

$$\mathrm{T}_0 > (\alpha-1)^{-1} \parallel u_0 \parallel_{q+2}^{-q-2} \mathrm{E}_0 \equiv \mathrm{T}_2, \tag{8.56}$$

и пусть, кроме того, $\mathrm{M} \equiv \sup\limits_{t\in[0,\mathrm{T}_2]} \mathrm{E}(t) < +\infty$. Тогда (8.54) имеет место равномерно по $t \in [0, (\alpha-1)^{-1}\mathrm{F}_{0n}^{-1})$. Переходя к пределу при $m \to +\infty$ в неравенстве (8.54), в силу сделанного предположения относительно T_0 получим следующее неравенство:

$$\mathrm{E}_0 \left[1-(\alpha-1)\mathrm{F}_0 t\right]^{-1/(\alpha-1)} \leqslant \mathrm{M} < +\infty, \quad t \in [0, (\alpha-1)^{-1}\mathrm{F}_{0n}^{-1}). \tag{8.57}$$

Однако в силу того что $\mathrm{F}_{0n} \searrow \mathrm{F}_0$ при $n \to +\infty$, найдутся такие $n \in \mathbb{N}$ и такое $t_n \in (0, (\alpha-1)^{-1}\mathrm{F}_{0n}^{-1})$, что (8.57) не выполнено. Значит, наше предположение (8.56) не выполняется. Отсюда сразу же выводим, что

$$\mathrm{T}_0 \leqslant (\alpha-1)^{-1} \parallel u_0 \parallel_{q+2}^{-q-2} \mathrm{E}_0 \equiv \mathrm{T}_2.$$

Теорема доказана.

§ 9. Об одной задаче для сильно нелинейного уравнения с подчиненной нелинейностью вида (1.2)

Прежде всего приведем вывод задачи, которая будет рассмотрена ниже. Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 1$, — ограниченная область с гладкой границей класса $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0,1]$. Область Ω занимает полупроводник. Принципиальное свойство полупроводников заключается в том, что нестационарные процессы, наблюдаемые в них, описываются системой уравнений квазистационарного поля, уравнения неразрывности и материальных уравнений. Существенным в их описании является явный вид материальных уравнений, связывающих напряженность $\mathbf{E}$ и индукцию $\mathbf{D}$ электрического поля, с одной стороны, и напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ и плотность тока в полупроводнике $\mathbf{J}$ — с другой. Искомая система уравнений в некоторой декартовой системе координат в общем случае имеет вид [Корпусов, 4]

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = -4\pi e n, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \tag{9.1}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \operatorname{div}\mathbf{J} + Q, \quad \mathrm{J_i} = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}\mathrm{E_j}, \quad i,j = \overline{1,3}, \tag{9.2}$$

где $\mathbf{P}$ — вектор поляризации, для некоторых моделей справедливо феноменологическое соотношение вектора поляризации и потенциала электрического поля φ:

$$\operatorname{div}\mathbf{P} = k_1|\varphi|^q\varphi, \quad k_1 > 0. \tag{9.3}$$

Кроме того, относительно тензора проводимости σ_{ij} предположим, что он является нелинейным относительно компонент напряженности электрического поля E_j [Ландау]:

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}|\mathrm{E}_j|^{p-2}, \quad p > 2. \tag{9.4}$$

Наконец, предположим, что в полупроводнике имеются источники тока свободных зарядов, распределение которых в самосогласованном электрическом поле полупроводника имеет вид

$$Q = k_2|\varphi|^{p-2}\varphi, \quad k_2 > 0. \tag{9.5}$$

Из системы уравнений (9.1)–(9.5) вытекает следующее сильно нелинейное уравнение псевдопараболического типа:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle\varphi - 4\pi k_1|\varphi|^q\varphi\right) + 4\pi e\triangle_p\varphi + 4\pi e k_2|\varphi|^{p-2}\varphi = 0. \tag{9.6}$$

В предположении, что полупроводник заземлен и имеется начальное распределение потенциала электрического поля, приходим к задаче для уравнения (9.6) в безразмерных переменных:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle u - |u|^q u\right) + \triangle_p u + \lambda|u|^{p-2}u = 0, \quad p > 2, \quad q \geqslant 0, \quad \lambda > 0, \tag{9.7}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \triangle_p u \equiv \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

9.1. Однозначная слабая разрешимость задачи (9.7). Пусть $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0,1]$, — граница ограниченной области Ω и натуральное число $s \geqslant 2$ таково, что $(s-1)/N \geqslant 1/2 - 1/p$. Рассмотрим следующую задачу на собственные функции и собственные значения:

$$(-1)^s\triangle^s w_k - \lambda_k w_k = 0, \quad \left.\frac{\partial^n w_k}{\partial x_i^n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad n = \overline{1, s-1}. \tag{9.8}$$

В силу определения s справедливо следующее вложение:

$$\mathbb{H}_0^s(\Omega) \to \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega), \quad p > 2.$$

Причем собственные функции задачи (9.8) образуют галеркинский базис в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$.

Дадим определение слабого обобщенного решения.

Определение 14. Слабым обобщенным решением задачи (9.7) назовем решение следующей задачи:

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\varphi(t)\left[\frac{d}{dt}\langle\triangle u, w\rangle_0 - \frac{d}{dt}(|u|^q u, w) + \langle\triangle_p u, w\rangle + \lambda(|u|^{p-2}u, w)\right] = 0$$

$$\forall\,\varphi(t) \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T}), \quad \forall\, w \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega),$$

$$u(0) = u_0 \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega),$$

где символом $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ обозначена скобка двойственности между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скобка двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$. Наконец, символом $(\cdot, \cdot)$ обозначено скалярное произведение в смысле $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

Решение данной задачи будем искать в следующем классе:

$$u \in \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), \quad u' \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}_0^1(\Omega)),$$
$$\triangle_p u \in \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)), \quad \triangle u - |u|^q u \in \mathbb{H}^1(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)).$$

В рассматриваемом классе гладкости наша задача эквивалентна задаче

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt\, \varphi(t) \left\langle \frac{d}{dt}(\triangle u - |u|^q u) + \triangle_p u + \lambda |u|^{p-2} u, w \right\rangle = 0$$

$\forall\, \varphi(t) \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}),\ \forall\, w \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, которая в силу результата Приложения Б эквивалентна задаче

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt \left\langle \frac{d}{dt}(\triangle u - |u|^q u) + \triangle_p u + \lambda |u|^{p-2} u, v \right\rangle = 0 \ \ \forall\, v \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)).$$

Замечание 8. В качестве $w \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ можно взять элементы $w_j \in \mathbb{H}_0^s(\Omega)$, $j = \overline{1, +\infty}$, поскольку их линейные комбинации плотны в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть* $u_0(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$. *Если либо* $N = 1, 2$ *при* $q \geqslant 0$, *либо* $N \geqslant 3$ *при* $0 \leqslant q < 4/(N-2)$ *и* $2 \leqslant p < 2N/(N-2)$, *то тогда найдется такое максимальное* $\mathrm{T}_0 = \mathrm{T}_0(u_0, q, p) > 0$ *и существует функция* $u(x,t) : (0, \mathrm{T}_0) \times \Omega \to \mathbb{R}$ *такая, что для любого* $\mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0)$ *имеют место включения*

$$u \in \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), \quad u' \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}_0^1(\Omega)),$$
$$\triangle u - |u|^q u \in \mathbb{H}^1(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)).$$

В случае $q = 0$ *справедливы следующие свойства функции* u:

$$\langle \triangle u - u, u \rangle_0 \in \mathbb{H}^1(0, \mathrm{T}),$$

для почти всех $t \in (0, \mathrm{T})$ *имеет место равенство*

$$\frac{d}{dt} \langle \triangle u - u, u \rangle_0 = 2 \langle \triangle u' - u', u \rangle_0,$$

где u' — производная по времени,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle u - |u|^q u\right) + \triangle_p u + \lambda |u|^{p-2} u = 0$$

в смысле $\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega))$, $p' = p/(p-1)$,

$$\triangle_p u \equiv \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

Кроме того, $u(0) = u_0$ почти всюду в Ω. При условии $q = 0$ функция $u(x,t)$ единственная.

Доказательство.

Замечание 9. Поскольку в условиях теоремы 1 $u \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$, $u' \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{H}_0^1(\Omega))$, то в силу результата работы ([Лионс, 1]) имеем: $u(x)(t) : [0,\mathrm{T}] \to \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ — сильно непрерывная векторнозначная функция. Стало быть, начальное условие имеет смысл.

Для доказательства локальной разрешимости задачи воспользуемся методом Галеркина в сочетании с методами монотонности и компактности [Лионс, 1].

Будем искать приближенное решение нашей задачи (9.7) в следующем виде:

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\varphi(t)\Big[\langle \triangle u_m', w_j\rangle_0 - ((|u_m|^q u_m)', w_j) + \\ + \langle \triangle_p u_m, w_j\rangle + \lambda(|u_m|^{p-2}u_m, w_j)\Big] = 0, \quad (9.9)$$

$$\forall\, \varphi(t) \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T}),\ \ j = \overline{1,m},$$

где

$$u_m = \sum_{k=1}^{m} c_{mk}(t) w_k,\ \ u_{0m} \equiv u_m(0) = \sum_{k=1}^{m} c_{mk}(0) w_k \to u_0 \text{ в } \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega),$$

$$c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(1)}[0,\mathrm{T}_m],$$

откуда в классе $c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(1)}[0,\mathrm{T}_{m0})$ при некотором $\mathrm{T}_{m0} > 0$ из (9.9) приходим к поточечному уравнению

$$(\nabla u_m', \nabla w_j) + (q+1)\left(|u_m|^q u_m', w_j\right) + \\ + \sum_{i=1}^{N}\left(\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}, \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right) = \\ = \lambda(|u_m|^{p-2}u_m, w_j),\ \ j = \overline{1,m},\ \ \forall\, t \in [0,\mathrm{T}_m]. \quad (9.10)$$

Из (9.10) сразу же получаем

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{N}\left[(\nabla w_k,\nabla w_j)+(q+1)\left(|u_m|^q w_k,w_j\right)\right]c_{mk}^{'}+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\left(\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u_m}{\partial x_i},\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right)=\lambda(|u_m|^{p-2}u_m,w_j).$$

Теперь в качестве базиса в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ выберем собственные функции задачи (9.8). Введем обозначение

$$a_{kj}\equiv(\nabla w_k,\nabla w_j)+(q+1)\left(|u_m|^q w_k,w_j\right).$$

Имеем

$$\sum_{k,j=1,1}^{m,m}a_{kj}\xi_k\xi_j=\parallel\nabla\zeta\parallel_2^2+(q+1)\left(|u_m|^q,\eta^2\right),\eta\equiv\sum_{l=1}^{m}w_k\xi_k,\ \zeta=\sum_{k=1}^{m}\xi_k w_k.$$

Норма $\parallel\nabla\zeta\parallel_2$ обращается в нуль в классе $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $\zeta=\sum\limits_{k=1}^{m}\xi_k w_k=0$. Поскольку $\{w_k\}_{k=1}^{+\infty}$ — базис в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, то $\zeta=0$ тогда и только тогда, когда $\{\xi_k\}_{k=1}^{m}=\mathbf{0}$, поэтому в силу критерия Сильвестра (см., например, [Постников]) получаем: $\det\{a_{kj}\}_{k,j=1,1}^{m,m}>0$. Общие результаты о нелинейных системах обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [Петровский]) гарантируют существование решения задачи (9.10) на некотором интервале $[0,\mathrm{T}_m]$, $\mathrm{T}_m>0$, в смысле $c_{km}\in\mathbb{C}^{(1)}[0,\mathrm{T}_m]$. В дальнейшем мы получим априорные оценки, из которых следует: $\mathrm{T}_m=\mathrm{T}$, где T не завсисит от m. Значит, $c_{km}\in\mathbb{C}^{(1)}[0,\mathrm{T}]$, $u_m\in\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$.

Займемся выводом априорных оценок.

Умножим обе части равенства (9.10) на c_{mj} и просуммируем по $j=\overline{1,m}$, тогда получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\parallel\nabla u_m\parallel_2^2+\frac{q+1}{q+2}\frac{d}{dt}\parallel u_m\parallel_{q+2}^{q+2}+\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^p=\lambda\parallel u_m\parallel_p^p. \quad (9.11)$$

Отметим, что нормы

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_p^p\right)^{1/p},\quad\left(\parallel v\parallel_p^p+\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_p^p\right)^{1/p}$$

эквивалентны на пространстве $v \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ (см., например, [Лионс, 1]). Поэтому сразу же будем рассматривать пространство $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ с нормой

$$\left(\sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{1/p}.$$

Из (9.11) следует

$$\frac{1}{2} \| \nabla u_m \|_2^2 + \frac{q+1}{q+2} \| u_m \|_{q+2}^{q+2} + \int_0^t ds \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p =$$

$$= \frac{1}{2} \| \nabla u_{m0} \|_2^2 + \frac{q+1}{q+2} \| u_{m0} \|_{q+2}^{q+2} + \lambda \int_0^t ds \ \| u_m \|_p^p \, ds, \quad \lambda > 0.$$

В силу условий, сформулированных в теореме относительно p, q, N, и теорем вложения Соболева (см., например, [Байокки]) выполнено вложение $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^p(\Omega)$. Теперь имеем

$$\| u_m \|_p \leqslant \mathrm{B}_1 \| \nabla u_m \|_2,$$

$$\frac{1}{2} \| \nabla u_m \|_2^2 + \frac{q+1}{q+2} \| u_m \|_{q+2}^{q+2} \leqslant \frac{1}{2} \| \nabla u_{m0} \|_2^2 + \frac{q+1}{q+2} \| u_{m0} \|_{q+2}^{q+2} +$$

$$+ \lambda \mathrm{B}_1^p \int_0^t ds \left[\| \nabla u_m \|_2^2 + 2 \frac{q+1}{q+2} \| u_m \|_{q+2}^{q+2} \right]^{p/2}. \quad (9.12)$$

Значит, в силу (9.12)

$$\mathrm{E}_m(t) \leqslant \mathrm{E}_{m0} + \mathrm{B}_2 \int_0^t ds \, \mathrm{E}_m^{p/2}(s), \quad \mathrm{B}_2 = \lambda \mathrm{B}_1^p 2^{p/2}, \quad (9.13)$$

$$\mathrm{E}_m(t) = \frac{1}{2} \| \nabla u_m \|_2^2 + \frac{q+1}{q+2} \| u_m \|_{q+2}^{q+2}.$$

С другой стороны, если $p \leqslant q+2$, то в силу ограниченности Ω имеем

$$\| u_m \|_p \leqslant \mathrm{B}_3 \| u_m \|_{q+2}.$$

Стало быть, в силу (9.12) и (9.13)

$$\frac{1}{2} \| \nabla u_m \|_2^2 + \frac{q+1}{q+2} \| u_m \|_{q+2}^{q+2} \leqslant \frac{1}{2} \| \nabla u_{m0} \|_2^2 + \frac{q+1}{q+2} \| u_{m0} \|_{q+2}^{q+2} +$$

$$+ \lambda \mathrm{B}_3^p \int_0^t ds \left[\frac{q+1}{q+2} \| u_m \|_{q+2}^{q+2} \frac{q+2}{q+1} + \frac{q+2}{q+1} \frac{1}{2} \| \nabla u_m \|_2^2 \right]^{p/(q+2)}, \quad (9.14)$$

$$\mathrm{E}_m(t) \leqslant \mathrm{E}_{m0} + \mathrm{B}_4 \int\limits_0^t ds\, \mathrm{E}_m^{\alpha}(s), \quad \alpha = \frac{p}{q+2}, \quad \mathrm{B}_4 = \lambda \mathrm{B}_3^p \left(\frac{q+2}{q+1}\right)^{p/(q+2)},$$

причем в силу условий на $p > 2$ и $q \geqslant 0$ имеем: $\alpha \in (0, 1]$.

Используя леммы Гронуолла–Беллмана и Бихари (см., например, [Демидович]), из (9.13) и (9.14) получим

$$\mathrm{E}_m(t) \leqslant \left[\mathrm{E}_{m0}^{1-\alpha} + (1-\alpha)\mathrm{B}_4 t\right]^{1/(1-\alpha)} \qquad \text{при } p < q+2, \quad (9.15)$$

$$\mathrm{E}_m(t) \leqslant \mathrm{E}_{m0} \exp\{\mathrm{B}_5 t\}, \ \mathrm{B}_5 = \lambda \mathrm{B}_3^p \frac{q+2}{q+1} \qquad \text{при } p = q+2, \quad (9.16)$$

$$\mathrm{E}_m(t) \leqslant \mathrm{E}_{m0} \left[1 - \left(\frac{p}{2} - 1\right) \mathrm{B}_2 \mathrm{E}_{m0}^{(p-2)/2} t\right]^{-2/(p-2)} \qquad \text{при } p > q+2, \quad (9.17)$$

$\mathrm{B}_2 = \lambda \mathrm{B}_1^p 2^{p/2}$. Умножим теперь уравнение (9.10) на $c_{mj}^{'}$ и просуммируем по $j = \overline{1, m}$, тогда после интегрирования по времени $s \in [0, t]$, получим

$$\int\limits_0^t ds \left[\| \nabla u_m^{'} \|_2^2 + (q+1) \int\limits_\Omega dx\, |u_m|^q (u_m^{'})^2 \right] + \\ + \frac{1}{p} \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p + \lambda \frac{1}{p} \| u_{m0} \|_p^p = \lambda \frac{1}{p} \| u_m \|_p^p + \frac{1}{p} \left\| \frac{\partial u_{m0}}{\partial x_i} \right\|_p^p. \quad (9.18)$$

В силу вложения $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^p(\Omega)$ из (9.18) получим

$$\int\limits_0^t ds \left[\| \nabla u_m^{'} \|_2^2 + (q+1) \int\limits_\Omega dx\, |u_m|^q (u_m^{'})^2 \right] + \frac{1}{p} \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p \leqslant \\ \leqslant C_1 + \mathrm{B}_1^p \frac{\lambda}{p} \| \nabla u_m \|_2^p, \quad (9.19)$$

где $u_{0m} \to u_0$ сильно в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, справедливо следующее неравенство:

$$\sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_{m0}}{\partial x_i} \right\|_p^p \leqslant \mathrm{C}_1,$$

где C_1 не зависит от m. Отсюда и из (9.15)–(9.17) следует существование такого $\mathrm{T}_0 > 0$, что справедливо неравенство

$$\| \nabla u_m \|_2 \leqslant \mathrm{A}(t), \quad t \in [0, \mathrm{T}], \quad \forall\, \mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0),$$

где A не зависит от m. Причем в случаях (9.15) и (9.16) $\mathrm{T}_0 = +\infty$.

Таким образом, из (9.15)–(9.19) следует, что найдется такое максимальное $\mathrm{T}_0 \equiv \mathrm{T}_0(u_0, q, p)$, что для любого $\mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0)$ выполнены следующие включения:

$$\begin{gathered} u_m \ \text{ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), \\ u_m^{'} \ \text{ограничено в } \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{H}_0^1(\Omega)), \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(|u_m|^{q/2}u_m\right) \ \text{ограничено в } \mathbb{L}^2(Q), \ \ Q \equiv \Omega \times (0,\mathrm{T}), \\ |u_m|^q u_m \ \text{ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^{q^{'}}(\Omega)), \ \ q^{'} = \frac{q+2}{q+1}, \\ |u_m|^{p-2}u_m \ \text{ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^{p^{'}}(\Omega)), \ \ p^{'} = \frac{p}{p-1}. \end{gathered} \tag{9.20}$$

В силу (9.20) следует, что $\mathrm{T}_m = \mathrm{T}$, где T не зависит от $m \in \mathbb{N}$. Значит, $u_m = \sum\limits_{k=1}^{m} c_{km}(t) w_k \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$. Из включений (9.20) и результатов ([Лионс, 1]) приходим к выводу, что из последовательности $\{u\}_m$ можно выделить подпоследовательность, которую мы снова обозначим через $\{u\}_m$, такую что

$$\begin{gathered} u_m \rightharpoonup u \ \ *-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), \\ u_m^{'} \rightharpoonup u^{'} \ \text{слабо в } \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{H}_0^1(\Omega)), \\ \triangle u_m \rightharpoonup \triangle u \ \ *-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{H}^{-1}(\Omega)), \\ -\triangle_p u_m \rightharpoonup \chi \ \ *-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^{-1,p^{'}}(\Omega)), \\ |u_m|^q u_m \rightharpoonup w_q \ \ *-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^{q^{'}}(\Omega)), \ \ q^{'} = (q+2)/(q+1), \\ |u_m|^{p-2}u_m \rightharpoonup w_p \ \ *-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^{p^{'}}(\Omega)), \ \ p^{'} = p/(p-1). \end{gathered} \tag{9.21}$$

Здесь следует заметить, что из $(9.21)_2$ вытекает существование слабого предела:

$$u_m^{'} \rightharpoonup u^{'} \ \text{в } \mathcal{D}^{'}(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)),$$

поэтому в силу слабой сходимости в $\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{H}_0^1(\Omega))$,

$$u_m^{'} \rightharpoonup \eta,$$

приходим к выводу, что $\eta(t) = u^{'}(t)$.

Отсюда имеем: $u_m \rightharpoonup u$ слабо в $\mathbb{H}^1(Q)$, $Q = (0,\mathrm{T}) \times \Omega$, тогда в силу компактного вложения $\mathbb{H}^1(Q) \subset\subset \mathbb{L}^2(Q)$ приходим к выводу, что $u_m \to u$ сильно в $\mathbb{L}^2(Q)$, а значит, почти всюду (см., например, [Гаевский]). Тогда в силу леммы 1.3 работы ([Лионс, 1]) получим: $|u_m|^q u_m \rightharpoonup |u|^q u$ $*-$слабо в $\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^{q^{'}}(\Omega))$, $q^{'} = (q+2)/(q+1)$ и, таким образом, $w_q = |u|^q u$, и, наконец,

$|u_m|^{p-2}u_m \rightharpoonup |u|^{p-2}u$ $*-$слабо в $\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^{p'}(\Omega))$, $p' = p/(p-1)$, и, таким образом, $w_p = |u|^{p-2}u$. Из (9.20) следует, что

$$|u_m|^{q/2}u_m \in \mathbb{H}^1(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^2(\Omega)),\ \ u_m \in \mathbb{H}^1(0,\mathrm{T};\mathbb{H}_0^1(\Omega)).$$

Имея в виду, что предел последовательности $-\triangle_p u_m \rightharpoonup \chi$ $*-$слабо в $\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^{1,p'}(\Omega))$, докажем, что $\chi = -\triangle_p u$. Из (9.10) следует, что

$$\langle \triangle u_m', w_j\rangle - \langle (|u_m|^q u_m)', w_j\rangle + \langle \triangle_p u_m, w_j\rangle = \\ = -\lambda\langle |u_m|^{p-2}u_m, w_j\rangle. \quad (9.22)$$

Теперь мы можем перейти к пределу в (9.22) при $m \to +\infty$ и фиксированном j. Рассмотрим каждое слагаемое в (9.22) Из включений (9.20), (9.21) следует, что

$$\begin{gathered}
\langle \triangle u_m', w_j\rangle \rightharpoonup \langle \triangle u', w_j\rangle \ \text{ слабо в } \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T}),\\
-\langle \triangle_p u_m, w_j\rangle \rightharpoonup \langle \chi, w_j\rangle \ *-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T}),\\
\langle |u_m|^{p-2}u_m, w_j\rangle \rightharpoonup \langle |u|^{p-2}u, w_j\rangle \ *-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T}),\\
\langle |u_m|^{q}u_m, w_j\rangle \rightharpoonup \langle |u|^{q}u, w_j\rangle \ *-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T}),\\
\triangle u_{m0} \rightharpoonup \triangle u_0 \ \text{ слабо в } \mathbb{H}^{-1}(\Omega),\\
\triangle u_m(\mathrm{T}) \rightharpoonup \triangle u(\mathrm{T}) \ \text{ слабо в } \mathbb{H}^{-1}(\Omega),\\
|u_{m0}|^q u_{m0} \rightharpoonup |u_0|^q u_0 \ \text{ слабо в } \mathbb{L}^{q'}(\Omega),\\
|u_m|^q u_m(\mathrm{T}) \rightharpoonup |u|^q u(\mathrm{T}) \ \text{ слабо в } \mathbb{L}^{q'}(\Omega),
\end{gathered} \quad (9.23)$$

и, следовательно,

$$\frac{d}{dt}\langle (\triangle u - |u|^q u) - \chi + \lambda|u|^{p-2}u, w_j\rangle = 0.$$

Отсюда в силу (9.23) сразу же получаем

$$\frac{d}{dt}(\triangle u - |u|^q u) - \chi + \lambda|u|^{p-2}u = 0. \quad (9.24)$$

В силу монотонности оператора $\mathbb{A}(v) = -\triangle_p v$ относительно скобок двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle$ между банаховыми пространствами $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$, $p' = p/(p-1)$, справедливо следующее неравенство:

$$\mathbb{X}_\mu \equiv \int_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \mathbb{A}(u_\mu) - \mathbb{A}(v), u_\mu - v\rangle \geqslant 0 \ \ \forall\, v \in \mathbb{L}^p(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)).$$

Согласно (9.10)

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}}\langle\mathbb{A}(u_\mu),u_\mu\rangle\,dt=\lambda\int\limits_0^{\mathrm{T}}dt\ \|\ u_\mu\ \|_p^p+\frac{1}{2}\ \|\ \nabla u_{\mu 0}\ \|_2^2-\frac{1}{2}\ \|\ \nabla u_\mu(\mathrm{T})\ \|_2^2+$$

$$+\frac{q+1}{q+2}\ \|\ u_{\mu 0}\ \|_{q+2}^{q+2}-\frac{q+1}{q+2}\ \|\ u_\mu(\mathrm{T})\ \|_{q+2}^{q+2}.$$

Поскольку $u_\mu\rightharpoonup u$ слабо в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ при почти всех $t\in(0,\mathrm{T})$, то в силу вложений $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)\subset\mathbb{H}_0^1(\Omega)\hookrightarrow\mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$ имеем (см., например, [Иосида])

$$\liminf_{\mu\to+\infty}\|\ \nabla u_\mu(\mathrm{T})\ \|_2\geqslant\|\ \nabla u(\mathrm{T})\ \|_2,$$

$$\liminf_{\mu\to+\infty}\|\ u_\mu(\mathrm{T})\ \|_{q+2}^{q+2}\geqslant\|\ u(\mathrm{T})\ \|_{q+2}^{q+2}.$$

Отсюда

$$\limsup_{\mu\to+\infty}\mathbb{X}_\mu\leqslant\lambda\lim_{\mu\to+\infty}\int\limits_0^{\mathrm{T}}dt\ \|\ u_\mu\ \|_p^p+\frac{1}{2}\ \|\ \nabla u_0\ \|_2^2-\frac{1}{2}\ \|\ \nabla u(\mathrm{T})\ \|_2^2+$$

$$+\frac{q+1}{q+2}\ \|\ u_0\ \|_{q+2}^{q+2}-\frac{q+1}{q+2}\ \|\ u(\mathrm{T})\ \|_{q+2}^{q+2}-\int\limits_0^{\mathrm{T}}dt\,\langle\chi,v\rangle-\int\limits_0^{\mathrm{T}}dt\,\langle\mathbb{A}(v),u-v\rangle.$$

Докажем следующее предельное равенство:

$$\lim_{\mu\to+\infty}\int\limits_0^{\mathrm{T}}dt\,\langle|u_\mu|^{p-2}u_\mu,u_\mu\rangle=\int\limits_0^{\mathrm{T}}dt\ \|\ u\ \|_p^p.$$

Действительно,

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}}dt\,\langle|u_\mu|^{p-2}u_\mu,u_\mu\rangle=\int\limits_0^{\mathrm{T}}dt\,\langle|u_\mu|^{p-2}u_\mu,u_\mu-u\rangle+\int\limits_0^{\mathrm{T}}dt\,\langle|u_\mu|^{p-2}u_\mu,u\rangle.$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое:

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}}dt\ \Big|\langle|u_\mu|^{p-2}u_\mu,u_\mu-u\rangle\Big|\leqslant\int\limits_0^{\mathrm{T}}dt\ \|\ |u_\mu|^{p-2}u_\mu\ \|_{p/(p-1)}\|\ u_\mu-u\ \|_p=$$

$$=\int\limits_0^{\mathrm{T}}dt\ \|\ u_\mu\ \|_p^{p-1}\|\ u_\mu-u\ \|_p\leqslant$$

$$\leqslant\left(\int\limits_0^{\mathrm{T}}dt\ \|\ u_\mu-u\ \|_p^p\right)^{1/p}\left(\int\limits_0^{\mathrm{T}}dt\ \|\ u_\mu\ \|_p^p\right)^{(p-1)/p}\to+0$$

при $\mu \to +\infty$, поскольку $u_\mu \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{H}_0^1(\Omega)) \subset \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^p(\Omega))$ и $u_\mu \to u$ сильно в $\mathbb{L}^p(Q)$, $Q = (0,\mathrm{T}) \times \Omega$. Кроме того, справедливо предельное равенство

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle |u_\mu|^{p-2} u_\mu, u\rangle \to \int_0^{\mathrm{T}} dt\ \| u \|_p^p,$$

поскольку

$$|u_\mu|^{p-2}u_\mu \rightharpoonup |u|^{p-2}u \quad *-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^{p'}(\Omega)),$$
$$u \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^p(\Omega)), \quad p' = p/(p-1).$$

Стало быть,

$$\limsup_{\mu\to+\infty} X_\mu \leqslant \lambda \int_0^{\mathrm{T}} \| u \|_p^p\ dt + \frac{1}{2} \| \nabla u_0 \|_2^2 - \frac{1}{2} \| \nabla u(\mathrm{T}) \|_2^2 +$$
$$+ \frac{q+1}{q+2} \| u_0 \|_{q+2}^{q+2} - \frac{q+1}{q+2} \| u(\mathrm{T}) \|_{q+2}^{q+2} -$$
$$- \int_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \chi, v\rangle - \int_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}(v, u-v)\rangle.$$

Отметим, что $u \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$, $u' \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{H}_0^1(\Omega))$ и в силу условий на p, q, N справедливы вложения

$$\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^{q+2}(\Omega) \cap \mathbb{L}^p(\Omega).$$

Умножим обе части уравнения (9.24) на u и проинтегрируем по частям, что возможно в силу следующих оценок:

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt\, \left|\langle \triangle u', u\rangle\right| \leqslant \left(\int_0^{\mathrm{T}} dt\ \| \triangle u' \|_{-1}^2\right)^{1/2} \left(\int_0^{\mathrm{T}} dt\ \| u \|_{+1}^2\right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{T}^{1/2} \sup_{t\in(0,\mathrm{T})} \| u \|_{+1}^2\,(t) \left(\int_0^{\mathrm{T}} dt\ \| \triangle u' \|_{-1}^2\right)^{1/2},$$

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt\, \left|\langle [|u|^q u]', u\rangle\right| \leqslant (q+1) \int_0^{\mathrm{T}} dt\ \| u' \|_{q+2} \| u \|_{q+2}^{q+1} \leqslant$$

$$\leqslant (q+1)\left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\ \|\ u^{'}\ \|_{q+2}^2\right)^{1/2}\left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\ \|\ u\ \|_{q+2}^{2(q+1)}\right)^{1/2},$$

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\ |\langle \chi, u\rangle| \leqslant \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\ \|\ \chi\ \|_{\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)}\|\ u\ \|_{\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{T}\sup_{t\in(0,\mathrm{T})}\ \|\ \chi\ \|_{\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)}\|\ u\ \|_{\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)},$$

где $\|\cdot\|_+ \equiv \|\cdot\|_{\mathbb{H}_0^1}$, $\|\cdot\|_- \equiv \|\cdot\|_{\mathbb{H}^{-1}}$. Таким образом, из (9.24) получим

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \chi, u\rangle = \lambda\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\ \|\ u\ \|_p^p + \frac{1}{2}\ \|\ \nabla u_0\ \|_2^2 - \frac{1}{2}\ \|\ \nabla u(\mathrm{T})\ \|_2^2 +$$

$$+\frac{q+1}{q+2}\ \|\ u_0\ \|_{q+2}^{q+2} - \frac{q+1}{q+2}\ \|\ u(\mathrm{T})\ \|_{q+2}^{q+2}.$$

С другой стороны, в силу определения $\mathbb{X}_\mu$ получим

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \chi - \mathbb{A}(v), u - v\rangle \geqslant 0\ \ \forall\, v \in \mathbb{L}^p(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)).$$

Положим $v = u - \gamma w$, $\gamma > 0$, $w \in \mathbb{L}^p(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$, тогда

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \chi - \mathbb{A}(u-\gamma w), w\rangle \geqslant 0,$$

устремляя $\gamma \to +0$, получим в силу теоремы Лебега, что

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \chi - \mathbb{A}(u), w\rangle \geqslant 0\ \ \forall\, w \in \mathbb{L}^p(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)).$$

Следовательно, $\chi = -\triangle_p u$.

Теперь мы можем перейти к пределу при $m \to +\infty$ в уравнении (9.9). Действительно,

$$\frac{d}{dt}(\nabla u_m, \nabla w_j) \rightharpoonup \frac{d}{dt}(\nabla u, \nabla w_j)\ \ \text{слабо в}\ \ \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T}),$$

$$\frac{d}{dt}(|u_m|^q u_m, w_j) \rightharpoonup \frac{d}{dt}(|u|^q u, w_j)\ \ \text{слабо в}\ \ \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T}),$$

$$\Big(|u_m|^{p-2}u_m, w_j\Big) \rightharpoonup \Big(|u|^{p-2}u, w_j\Big)\ *-\text{слабо в}\ \ \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T}),$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u_m}{\partial x_i},\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right)\rightharpoonup$$

$$\rightharpoonup\sum_{i=1}^{N}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right)*-\text{слабо в }\mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T}).$$

В результате из (9.9) получим

$$\int_0^{\mathrm{T}}dt\,\varphi(t)[\frac{d}{dt}\langle\triangle u,w\rangle-\frac{d}{dt}\langle|u|^q u,w\rangle+$$

$$+\langle\triangle_p u,w\rangle+\lambda\langle|u|^{p-2}u,w\rangle]=0\quad(9.25)$$

$$\forall\,\varphi(t)\in\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T}),\ \ \forall\,w\in\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega).$$

Теперь заметим, что из (9.9) при $\varphi(t)=1$ вытекает уравнение

$$\triangle u_m-|u_m|^q u_m=\triangle u_{m0}-|u_{m0}|^q u_{m0}-\int_0^t ds\,\left[\triangle_p u_m+\lambda|u_m|^{p-2}u_m\right]$$

для почти всех $t\in(0,\mathrm{T})$ в смысле $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$. Мы можем перейти к пределу в данном равенстве при $m\to+\infty$ и получим, что

$$\triangle u-|u|^q u=\triangle u_0-|u_0|^q u_0-\int_0^t ds\,\left[\triangle_p u+\lambda|u|^{p-2}u\right]$$

в смысле $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$ для почти всех $t\in(0,\mathrm{T})$. Из последнего равенства вытекает, что

$$\triangle u-|u|^q u\in\mathbb{H}^1(0,\mathrm{T};\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)).$$

Таким образом, из (9.25) получаем эквивалентную задачу

$$\int_0^{\mathrm{T}}dt\,\varphi(t)\left\langle\frac{d}{dt}\left[\triangle u-|u|^q u\right]+\triangle_p u+\lambda|u|^{p-2}u,w\right\rangle=0$$

$\forall\varphi(t)\in\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T}),\forall\,w\in\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, которая в свою очередь эквивалентна задаче

$$\int_0^{\mathrm{T}}dt\,\left\langle\frac{d}{dt}\left[\triangle u-|u|^q u\right]+\triangle_p u+\lambda|u|^{p-2}u,v\right\rangle=0\ \ \forall\,v\in\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)).$$

Тем самым разрешимость доказана.

Пусть $q=0$, тогда можно доказать справедливость следующих свойств:

$$\langle\triangle u-u,u\rangle_0\in\mathbb{H}^1(0,\mathrm{T}),$$

и для почти всех $t \in (0, \mathrm{T})$ справедливо соотношение

$$\frac{d}{dt}\langle \triangle u - u, u\rangle_0 \;=\; 2\langle \triangle u^{'} - u^{'}, u\rangle_0.$$

Перейдем к доказательству единственности.

Пусть $u_j(t),\ \ j = 1, 2,$ — два обобщенных решения нижеследующей задачи с $q = 0$ в классах, сформулированных в условиях теоремы 1 с одним и тем же начальным условием $u_0 \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ и $w = u_1 - u_2 \in$ $\in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$:

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left\langle \frac{d}{dt}\left[\triangle u - u\right] + \triangle_p u + \lambda |u|^{p-2}u, v \right\rangle = 0 \ \ \forall\, v \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)).$$

Возьмем в этой задаче $v = w \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$, тогда в силу монотонности оператора $\triangle_p : \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,p^{'}}(\Omega)$ получим неравенство

$$\| \nabla u_1 - \nabla u_2 \|_2^2 + \| u_1 - u_2 \|_2^2 \leqslant$$
$$\leqslant \lambda \int\limits_0^t ds \int\limits_\Omega dx \ \left[|u_1|^{p-2}u_1 - |u_2|^{p-2}u_2 \right] [u_1 - u_2]. \quad (9.26)$$

Из (9.26) получим

$$\| \nabla u_1 - \nabla u_2 \|_2^2 \leqslant 2\lambda(p-1) \int\limits_0^t ds \int\limits_\Omega dx \max\{|u_1|^{p-2}, |u_2|^{p-2}\}|u_1 - u_2|^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2\lambda(p-1) \int\limits_0^t ds \left[\| u_1 \|_p^{p-2} + \| u_2 \|_p^{p-2} \right] \| u_1 - u_2 \|_p^2 \leqslant$$
$$\leqslant C \int\limits_0^t ds \ \| \nabla u_1 - \nabla u_2 \|_2^2 .$$

Отсюда в силу теоремы Гронуолла–Беллмана [Демидович] получим

$$\| \nabla w \|_2 = 0 \ \ \forall\, t \in [0, \mathrm{T}),$$

что и доказывает единственность задачи **A** при условии $q = 0$.

Теорема доказана.

9.2. Разрешимость в любом конечном цилиндре и разрушение за конечное время. Введем обозначения

$$\mathrm{E}_m(t) \equiv \frac{1}{2} \| \nabla u_m \|_2^2 + \frac{q+1}{q+2} \| u_m \|_{q+2}^{q+2}, \quad \mathrm{E}_{m0} = \mathrm{E}_m(0),$$

$$\mathrm{E}(t) \equiv \frac{1}{2} \parallel \nabla u \parallel_2^2 + \frac{q+1}{q+2} \parallel u \parallel_{q+2}^{q+2}, \quad \mathrm{E}_0 = \mathrm{E}(0),$$

$$\mathrm{F}_{m0} \equiv \lambda \parallel u_{m0} \parallel_p^p - \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u_{m0}}{\partial x_i} \right\|_p^p, \ \mathrm{F}_0 \equiv \lambda \parallel u_0 \parallel_p^p - \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \right\|_p^p,$$

$$\mathrm{B}_2 \equiv \lambda \mathrm{B}_1^p 2^{\frac{p}{2}}, \quad \mathrm{B}_4 \equiv \lambda \mathrm{B}_3^p \left(\frac{q+2}{q+1} \right)^{\alpha}, \quad \mathrm{B}_5 \equiv \lambda \mathrm{B}_3^p \frac{q+2}{q+1},$$

$$\alpha \equiv \frac{p}{q+2}, \quad \parallel v \parallel_p \leqslant \mathrm{B}_1 \parallel \nabla v \parallel_2, \quad \parallel w \parallel_p \leqslant \mathrm{B}_3 \parallel w \parallel_{q+2}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 8. *Пусть выполнены все условия теоремы 7 и, кроме того, выполнено дополнительное условие* $\mathrm{F}_0 > 0$ *для справедливости оценок снизу. Тогда существует слабое обобщенное решение задачи* (9.7) *и найдутся такие константы* B_2, B_4 *и* B_5, *что*

1) *если* $q+2 > p$, *то* $\mathrm{T}_0 = +\infty$ *и*

$$\left[\mathrm{E}_0^{1-\alpha} + (1-\alpha) \frac{\mathrm{F}_0}{\mathrm{E}_0^{\alpha}} t \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \leqslant \mathrm{E}(t) \leqslant \left[\mathrm{E}_0^{1-\alpha} + (1-\alpha) \mathrm{B}_4 t \right]^{\frac{1}{1-\alpha}};$$

2) *если* $p = q+2$, *то* $\mathrm{T}_0 = +\infty$ *и*

$$\mathrm{E}_0 \exp\left\{ \frac{\mathrm{F}_0}{\mathrm{E}_0} t \right\} \leqslant \mathrm{E}(t) \leqslant \mathrm{E}_0 \exp\left\{ \mathrm{B}_5 t \right\};$$

3) *если же* $p > q+2$ *(т. е.* $\alpha > 1$*), то*

$$\limsup_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \sum_{i=1}^{N} \parallel \nabla u \parallel_2^2 = +\infty,$$

$$\mathrm{T}_1 \equiv \frac{2}{p-2} \frac{\mathrm{E}_0^{\frac{2}{p-2}}}{\mathrm{B}_2} \leqslant \mathrm{T}_0 \leqslant (\alpha-1)^{-1} \frac{\mathrm{E}_0^{\alpha}}{\mathrm{F}_0} \equiv \mathrm{T}_2.$$

Доказательство.

Нам необходим один вспомогательный результат относительно последовательности $\{u_m\}$ галеркинских приближений. Докажем, что найдется подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$ такая, что

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \to \frac{\partial u}{\partial x_i} \ \text{ сильно в } \ \mathbb{L}^p(Q), \ \ Q \equiv (0, \mathrm{T}) \times \Omega.$$

Обозначим

$$\mathbb{A}_i(v) \equiv -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right),$$

$$\limsup_{m \to +\infty} \int_0^{\mathrm{T}} dt \, \langle \mathbb{A}_i(u_m), u_m \rangle \leqslant$$

$$\leqslant -\sum_{j=1,i\neq j}^{N}\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\left\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|_p^p + \limsup_{m\to+\infty}\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \mathbb{A}(u_m), u_m\rangle.$$

Тогда справедливо неравенство:

$$\limsup_{m\to+\infty}\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \mathbb{A}(u_m), u_m\rangle \leqslant \lambda\int_0^{T} dt\ \|\ u\ \|_p^p + \frac{1}{2}\ \|\ \nabla u_0\ \|_2^2 - \frac{1}{2}\ \|\ \nabla u(\mathrm{T})\ \|_2^2 +$$

$$+\frac{q+1}{q+2}\ \|\ u_0\ \|_{q+2}^{q+2} - \frac{q+1}{q+2}\ \|\ u(\mathrm{T})\ \|_{q+2}^{q+2} =$$

$$= -\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \triangle_p u, u\rangle = \int_0^{\mathrm{T}} dt\,\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_p^p.$$

Значит,

$$\limsup_{m\to+\infty}\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^p \leqslant \int_0^{\mathrm{T}} dt\,\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_p^p. \tag{9.27}$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial x_i}\ \text{ слабо в }\ \mathbb{L}^p(Q),\ \ Q\equiv(0,\mathrm{T})\times\Omega.$$

Значит,

$$\liminf_{m\to+\infty}\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^p \geqslant \int_0^{\mathrm{T}} dt\,\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_p^p. \tag{9.28}$$

Из (9.27) и (9.28) следует

$$\lim_{m\to+\infty}\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^p = \int_0^{\mathrm{T}} dt\,\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_p^p. \tag{9.29}$$

Из (9.29) в свою очередь следует, что найдется такая подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$, что

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\to\frac{\partial u}{\partial x_i}\ \text{ сильно в }\ \mathbb{L}^p(Q),\ \ i=\overline{1,N},\ \ Q\equiv(0,\mathrm{T})\times\Omega. \tag{9.30}$$

Утверждение доказано.

Установим следующие неравенства:

$$\left|\int_\Omega dx\,\langle\nabla u_m, \nabla u_{mt}'\rangle\right|^2 \leqslant \|\ \nabla u_m\ \|_2^2 \|\ \nabla u_{mt}'\ \|_2^2,$$

$$\left|\int_\Omega dx\,|u_m|^q u_m u_{mt}'\right|^2 \leqslant \|\ u_m\ \|_{q+2}^{q+2}\int_\Omega dx\,|u_m|^q (u_{mt}')^2. \tag{9.31}$$

Справедлива также цепочка неравенств

$$\left|\int\limits_\Omega u_m(-\triangle u_m+|u_m|^q u_m)_t' dx\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant |(\nabla u_m,\nabla u_{mt}')|^2+(q+1)^2|(|u_m|^q u_m,u_{mt}')|^2+2(q+1)|(\nabla u_m,\nabla u_{mt}')|\times$$

$$\times|(|u_m|^q u_m,u_{mt}')|\leqslant\|\nabla u_m\|_2^2\|\nabla u_{mt}'\|_2^2+(q+1)^2(|u_m|^q,(u_{mt}')^2)\times$$

$$\times\|u_m\|_{q+2}^{q+2}+2(q+1)\|\nabla u_m\|_2\|\nabla u_{mt}'\|_2\sqrt{(|u_m|^q,(u_{mt}')^2)}\times$$

$$\times\|u_m\|_{q+2}^{(q+2)/2}\leqslant\left(\|\nabla u_{mt}'\|_2^2+(q+1)\int\limits_\Omega dx\,|u_m|^q(u_{mt}')^2\right)\Big[\|\nabla u_m\|_2^2+$$

$$+(q+1)\|u_m\|_{q+2}^{q+2}\Big]\leqslant(q+2)\left[\|\nabla u_{mt}'\|_2^2+(q+1)\int\limits_\Omega dx\,|u_m|^q(u_{mt}')^2\right]\times$$

$$\times\left[\frac{1}{2}\|\nabla u_m\|_2^2+(q+1)/(q+2)\|u_m\|_{q+2}^{q+2}\right]. \quad (9.32)$$

Из равенств (9.11) и (9.18) следуют равенства

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m\|_2^2+\frac{q+1}{q+2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_{q+2}^{q+2}+\sum_{i=1}^N\left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^p=\lambda\|u_m\|_p^p, \quad (9.33)$$

$$\|\nabla u_m'\|_2^2+(q+1)\int\limits_\Omega dx\,|u_m|^q(u_m')^2=$$

$$=\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\left[\lambda\|u_m\|_p^p-\sum_{i=1}^N\left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^p\right]. \quad (9.34)$$

Предположим, что

$$\lambda\|u_0\|_p^p>\sum_{i=1}^N\left\|\frac{\partial u_0}{\partial x_i}\right\|_p^p.$$

Поскольку $u_{m0}\to u_0$ сильно в $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, то найдется такая подпоследовательность последовательности $\{u_{m0}\}$, что

$$\lambda\|u_{m0}\|_p^p>\sum_{i=1}^N\left\|\frac{\partial u_{m0}}{\partial x_i}\right\|_p^p.$$

Из (9.31)–(9.34) получим

$$\mathrm{E}_m\frac{d^2\mathrm{E}_m}{dt^2}-\frac{p}{q+2}\left(\frac{d\mathrm{E}_m}{dt}\right)^2\geqslant 0. \quad (9.35)$$

Пусть u_m — галеркинские приближения, определенные в (9.10).

Поскольку $u_{0m} \rightharpoonup u_0$ сильно в $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, а последовательность $u_m \rightharpoonup u$ $*-$слабо в $\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$, то, переходя в (9.15), (9.16) к пределу при $m \to +\infty$ с учетом того, что $\mathrm{E}(t) \leqslant \varliminf\limits_{m\to+\infty} \mathrm{E}_m(t)$, получим

$$\mathrm{E}(t) \leqslant \left[\mathrm{E}_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\mathrm{B}_4 t\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad \alpha < 1, \tag{9.36}$$

$$\mathrm{E}(t) \leqslant \mathrm{E}_0 \exp\left\{\mathrm{B}_5 t\right\}, \quad \alpha = 1. \tag{9.37}$$

Рассмотрим теперь случай $\alpha > 1$.

Поскольку последовательность $u_{0m} \to u_0$ сильно в $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, то имеем: $\mathrm{E}_{0m} \to \mathrm{E}_0$. В этом случае из числовой последовательности $\{\mathrm{E}_{0m}\}$ можно выделить либо монотонно неубывающую, либо монотонно невозрастающую подпоследовательность. Будем искомую подпоследовательность последовательности $\{\mathrm{E}_{0m}\}$ и соответствующие подпоследовательности последовательностей $\{u_{0m}\}$ и $\{u_m\}$ обозначать таким же образом. Рассмотрим неравенство (9.17). Предположим, что $\{\mathrm{E}_{0m}\}$ — монотонно невозрастающая последовательность. Введем обозначение: $\{\mathrm{E}_{0m}^{\{n\}}\}$ — последовательность, полученная из $\{\mathrm{E}_{0m}\}$ путем вычеркивания первых $n \in \mathbb{N}$ слагаемых, тогда неравенство (9.17) имеет место равномерно по m для всех $t \in [0, \mathrm{T}_1^{\{n\}})$, где $\mathrm{T}_1^{\{n\}} \equiv 2/(p-2)\mathrm{B}_2^{-1}\mathrm{E}_{0n}^{-(p-2)/2}$. Поскольку $u_m \rightharpoonup u$ $*-$слабо в $\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$, то для всех таких t мы можем перейти к пределу при $m \to +\infty$ в (9.17) и получить, что

$$\mathrm{E}(t) \leqslant \mathrm{E}_0\left[1 - \left(\frac{p}{2} - 1\right)\mathrm{B}_2\mathrm{E}_0^{(p-2)/2}t\right]^{-2/(p-2)} \quad \text{при} \quad p > q+2, \tag{9.38}$$

где $\mathrm{B}_2 = \lambda \mathrm{B}_1^p 2^{p/2}$.

В силу произвольности $n \in \mathbb{N}$ и того факта, что $\mathrm{T}_1^{\{n\}} \uparrow \mathrm{T}_1$ при $n \uparrow +\infty$, мы приходим к выводу, что (9.29) имеет место при $t \in [0, \mathrm{T}_1)$ и, кроме того, $\mathrm{T}_0 \geqslant \mathrm{T}_1$. Пусть теперь $\{\mathrm{E}_{0m}\}$ — монотонно неубывающая последовательность. Тогда, повторяя предыдущие рассуждения, получим, что (9.38) имеет место для всех $t \in [0, \mathrm{T}_1)$ и $\mathrm{T}_0 \geqslant \mathrm{T}_1$. Итак, оценки (9.36)–(9.38) получены для всех возможных значений α.

Для дальнейшего изложения нам необходимо доказать, что для почти всех $t \in [0,\mathrm{T}]$, $\forall\, \mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0)$, $\mathrm{E}_m(t) \to \mathrm{E}(t)$.

С этой целью заметим, что ранее мы получили (9.30), а значит, в силу вложения $\mathbb{L}^p(Q) \subset \mathbb{L}^2(Q)$, $Q = (0,\mathrm{T}) \times \Omega$ $\forall\, \mathrm{T} \in [0, \mathrm{T}_0)$, имеем

$$\int\limits_0^t ds\, \mathrm{E}_m(s) \to \int\limits_0^t ds\, \mathrm{E}(s) \;\; \forall\, t \in [0,\mathrm{T}], \;\; \forall\, \mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0). \tag{9.39}$$

С другой стороны, при выполнении условий $q > 0$, $p > 2$ при $N = 1, 2$ и $0 < q < 4/(N-2)$, $p < 2N/(N-2)$ при $N \geqslant 3$ имеем компактное вложение: $\mathbb{H}^1(Q) \subset \mathbb{L}^{q+2}(Q)$ и $\mathbb{H}^1(Q) \subset \mathbb{L}^p(Q)$, а последовательность u_m сходится слабо в $\mathbb{H}^1(Q)$. Стало быть, последовательность $u_m \to u$

сильно в $\mathbb{L}^{q+2}(Q) \cap \mathbb{L}^p(\Omega)$, $Q = (0,\mathrm{T}) \times \Omega$, $\forall\, \mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}_0)$. Поскольку правая часть выражения для $\mathrm{E}_m(t)$ сходится для любого $t \in [0,\mathrm{T}]$, $\mathrm{T} \in \in (0,T_0)$, к некоторой функции $\eta(t)$ и из доказательства теоремы 7 следует, что $\mathrm{E}_m(t) \leqslant \mathrm{C} < +\infty$, где C не зависит ни от m, ни от t, то в силу теоремы Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла Лебега имеем: $\eta(t) \in \mathbb{L}^1(0,\mathrm{T})\ \forall\, \mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}_0)$ и

$$\int\limits_0^t \mathrm{E}_m(s)ds \to \int\limits_0^t ds\eta(s)\ \ \forall\, t\ \in [0,\mathrm{T}],\ \ \forall\, \mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}_0). \tag{9.40}$$

Сравнивая (9.39) с (9.40), приходим к выводу, что

$$\int\limits_0^t ds\,[\mathrm{E}(s) - \eta(s)] = 0\ \ \forall\, t \in (0,\mathrm{T}),\ \ \forall\, \mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}_0), \tag{9.41}$$

причем $\mathrm{E}(t) \in \mathbb{L}^1(0,\mathrm{T})$, $\eta(t) \in \mathbb{L}^1(0,\mathrm{T})$, поэтому в силу (9.41) получим, что

$$\eta(t) = \mathrm{E}(t),\ \ \text{для почти всех}\ \ t \in (0,\mathrm{T}),\ \ \forall\, \mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}_0).$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что последовательность $\mathrm{E}_m(t)$ при условиях на $q > 0$ и $p > 2$ сходится почти всюду к $\mathrm{E}(t)$ на множестве $t \in (0,\mathrm{T})\ \forall\, \mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}_0)$.

Теперь рассмотрим обыкновенное дифференциальное неравенство (9.35) в трех случаях: $0 < \alpha < 1$, $\alpha = 1$, $1 < \alpha$. Без ограничения общности мы можем считать, как и ранее, последовательность E_{0m} монотонной и положительной, тогда последовательность $\mathrm{E}_m > 0$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Пусть, кроме того, $\mathrm{F}_0 > 0$. Тогда найдется подпоследовательность последовательности F_{0m} такая, что $\mathrm{F}_{m0} > 0$. В первом случае $(0 < \alpha < 1)$ из (9.35) следует

$$\left(\frac{\mathrm{E}_m'}{\mathrm{E}_m^\alpha}\right)' \geqslant 0,\ \ \frac{\mathrm{E}_m'}{\mathrm{E}_m^\alpha} \geqslant \frac{\mathrm{F}_{m0}}{\mathrm{E}_{m0}^\alpha},\ \ \mathrm{E}_m(t) \geqslant \left[\mathrm{E}_{m0}^{1-\alpha} + (1-\alpha)\frac{\mathrm{F}_{m0}}{\mathrm{E}_{m0}^\alpha}t\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{9.42}$$

Рассмотрим теперь второй случай: $\alpha = 1$. Из (9.35) получаем

$$\mathrm{E}_m''\mathrm{E}_m - \left(\mathrm{E}_m'\right)^2 \geqslant 0,\ \ \left(\ln\frac{\mathrm{E}_m'}{\mathrm{E}_m}\right)' \geqslant 0,$$

$$\mathrm{E}_m(t) \geqslant \mathrm{E}_{0m}\exp\left\{\frac{\mathrm{F}_{m0}}{\mathrm{E}_{0m}}t\right\}. \tag{9.43}$$

Рассмотрим третий случай: $\alpha > 1$. Из (9.35) вытекает

$$\left(\frac{\mathrm{E}_m'}{\mathrm{E}_m^\alpha}\right)' \geqslant 0,\ \ \frac{\mathrm{E}_m'}{\mathrm{E}_m^\alpha} \geqslant \frac{\mathrm{F}_{m0}}{\mathrm{E}_{m0}^\alpha},$$

$$\mathrm{E}_m \geqslant \mathrm{E}_{0m}\left[1-(\alpha-1)\frac{\mathrm{F}_{m0}}{\mathrm{E}_{0m}^{\alpha}}t\right]^{-1/(\alpha-1)}. \tag{9.44}$$

В силу сильной сходимости $u_{0m}\to u_0$ в $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и из вложения $\mathbb{H}_0^1(\Omega)\subset \mathbb{L}^{q+2}(\Omega)\cap\mathbb{L}^p(\Omega)$, получаем $\mathrm{E}_{0m}\to\mathrm{E}_0$ и $\| u_{0m}\|_{q+2}\to\| u_0\|_{q+2}$. С другой стороны, мы установили, что $\mathrm{E}_m(t)\to\mathrm{E}(t)$ для почти всех $t\in(0,\mathrm{T}_0)$. Поэтому, переходя к пределу при $m\to+\infty$ в неравенствах (9.42) и (9.43), получим

$$\mathrm{E}(t)\geqslant\left[\mathrm{E}_0^{1-\alpha}+(1-\alpha)\frac{\mathrm{F}_0}{\mathrm{E}_0^{\alpha}}t\right]^{\frac{1}{1-\alpha}},\quad \alpha\in(0,1),$$

$$\mathrm{E}(t)\geqslant\mathrm{E}_0\exp\left\{\frac{\mathrm{F}_0}{\mathrm{E}_0}t\right\},\quad \alpha=1.$$

Введем обозначение: $\mathrm{K}_{m0}=\mathrm{F}_{m0}/\mathrm{E}_{m0}^{\alpha}$. Без ограничения общности переходом к подпоследовательности мы можем считать последовательность $\mathrm{E}_{m0}>0$ равномерно по m, поскольку $\mathrm{E}_0>0$. В силу сходимости последовательности $\mathrm{K}_{m0}\to\mathrm{K}_0$ при $m\to+\infty$ мы можем выбрать монотонно сходящуюся подпоследовательность, которую мы снова обозначим через K_{m0}. Соответствующие подпоследовательности последовательностей $\{u_{0m}\}$ и $\{u_m\}$ мы снова будем обозначать $\{u_{0m}\}$ и $\{u_m\}$. Перепишем (9.44) с учетом принятого обозначения:

$$\mathrm{E}_m\geqslant\mathrm{E}_{m0}\left[1-(\alpha-1)\mathrm{K}_{m0}t\right]^{-1/(\alpha-1)}. \tag{9.45}$$

Пусть последовательность $\{\mathrm{K}_{m0}\}$ монотонно неубывающая, тогда неравенство (9.45) имеет место равномерно по m для всех $t\in[0,(\alpha-1)^{-1}\mathrm{K}^{-1})$, где $\mathrm{K}=\sup\limits_{m\in\mathbb{N}}\mathrm{K}_{m0}$. Переходя к пределу при $m\to+\infty$ для таких t в неравенстве (9.45) получим

$$\mathrm{E}\geqslant\mathrm{E}_0\left[1-(\alpha-1)\mathrm{K}_0t\right]^{-1/(\alpha-1)}\ \text{ при }\ t\in[0,(\alpha-1)^{-1}\mathrm{K}^{-1}). \tag{9.46}$$

Но $\mathrm{K}=\mathrm{K}_0$ и, в силу того что последовательность K_{0m} монотонно неубывающая и сходящаяся к $\mathrm{K}_0\equiv\mathrm{F}_0/\mathrm{E}_0^{\alpha}$, мы сразу же получаем, что $\mathrm{T}_0\leqslant(\alpha-1)^{-1}\mathrm{F}_0/\mathrm{E}_0^{\alpha}\equiv\mathrm{T}_2$.

Пусть теперь последовательность $\{\mathrm{K}_{m0}\}$ монотонно невозрастающая. Обозначим через $\{\mathrm{K}_{m0}^{\{n\}}\}$ последовательность, полученную из последовательности $\{\mathrm{K}_{m0}\}$ путем вычеркивания первых $n\in\mathbb{N}$ слагаемых. Сделаем предположение о том, что

$$\mathrm{T}_0>(\alpha-1)^{-1}\frac{\mathrm{F}_0}{\mathrm{E}_0^{\alpha}}\equiv\mathrm{T}_2, \tag{9.47}$$

и пусть, кроме того, $\mathrm{M}\equiv\sup\limits_{t\in(0,\mathrm{T}_2)}\mathrm{E}(t)<+\infty$. Тогда (9.45) имеет место равномерно по $t\in[0,(\alpha-1)^{-1}\mathrm{K}_{0n}^{-1})$. Переходя к пределу при $m\to+\infty$

в неравенстве (9.45), получим в силу сделанного предположения относительно T_0 следующее неравенство:

$$\mathrm{E}_0\,[1-(\alpha-1)\mathrm{K}_0 t]^{-1/(\alpha-1)} \leqslant \mathrm{M} < +\infty \qquad (9.48)$$
$$\text{при } t \in [0, (\alpha-1)^{-1}\mathrm{K}_{0n}^{-1}).$$

Однако в силу того что $\mathrm{K}_{0n} \searrow \mathrm{K}_0$ при $n \to +\infty$, найдутся такое $n \in \mathbb{N}$ и такое $t_n \in (0, (\alpha-1)^{-1}\mathrm{K}_{0n}^{-1})$, что (9.48) потеряет смысл. Значит, наше предположение (9.47) не выполняется. Отсюда сразу же выводим, что при $\alpha > 1$

$$\mathrm{T}_0 \leqslant (\alpha-1)^{-1}\frac{\mathrm{E}_0^{\alpha}}{\mathrm{F}_0} \equiv \mathrm{T}_2. \qquad (9.49)$$

Последний результат означает, что при $\alpha > 1$ происходит разрушение решения за конечное время T_0, для которого получена явная оценка сверху (9.49) через данные задачи.

Теорема доказана.

9.3. Скорость разрушения решения. В случае $q = 0$ можно получить оптимальные двусторонние оценки на скорость разрушения решения.

Теорема 9. *Пусть выполнены все условия теоремы* 7 *и, кроме того,* $q = 0$ *и* $F_0 > 0$. *Тогда найдется такое* $\mathrm{T}_0 > 0$, *что*

$$\frac{[(p-2)\mathrm{c}_1]^{-2/(p-2)}}{(\mathrm{T}_0-t)^{2/(p-2)}} \leqslant \| \nabla u \|_2^2 + \| u \|_2^2 \leqslant \frac{[(p-2)\mathrm{c}_2]^{-2/(p-2)}}{(\mathrm{T}_0-t)^{2/(p-2)}}, \qquad (9.50)$$

где

$$\mathrm{c}_1 = \lambda \mathrm{B}_1^p, \quad \mathrm{c}_2 = \frac{\lambda \| u_0 \|_p^p - \sum\limits_{i=1}^{N} \left\| \dfrac{\partial u_0}{\partial x_i} \right\|_p^p}{[\| \nabla u_0 \|_2^2 + \| u_0 \|_2^2]^{p/2}}, \qquad (9.51)$$

B_1 – *наилучшая постоянная вложения* $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ *в* $\mathbb{L}^p(\Omega)$.

Доказательство.

Введем обозначения

$$\mathrm{U}_m(s,x) \equiv \frac{u_m(s\gamma_m + t^*, x)}{\mathrm{M}_m(t^*)}, \quad \gamma_m \equiv \frac{1}{\mathrm{M}^{q_1}(t^*)}, \quad q_1 = p-2,$$
$$\mathrm{M}_m(t^*) \equiv \sqrt{\| \nabla u_m \|_2^2 + \| u_m \|_2^2},$$

где t^* — фиксированный момент времени из интервала $[0, \mathrm{T}_0)$. Нетрудно убедиться, что введенная функция $\mathrm{U}_m(s,x)$ является решением следущей задачи:

$$\left(\nabla \frac{\partial \mathrm{U}_m}{\partial s}, \nabla w_j\right) + \left(\frac{\partial \mathrm{U}_m}{\partial s}, w_j\right) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} \left(\left| \frac{\partial \mathrm{U}_m}{\partial x_i} \right|^{q_1} \frac{\partial \mathrm{U}_m}{\partial x_i}, \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) = \lambda \left(|\mathrm{U}_m|^{q_1} \mathrm{U}_m, w_j \right), \quad j = \overline{1,m}, \qquad (9.52)$$

$$\mathrm{U}_m\left(-\frac{t^*}{\gamma_m}\right)\equiv \mathrm{U}_{m0},\quad \mathrm{U}_{m0}\equiv\frac{u_{m0}}{\mathrm{M}_m(t^*)}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_{mk}}{\mathrm{M}_m(t^*)}w_k,$$

$$u_{m0}=\sum_{k=1}^{m}\alpha_{mk}w_k\to u_0\ -\ \text{сильно в}\ \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega).$$

Докажем, что найдутся такие $c_{1m},\ c_{2m}\in(0,+\infty)$, что

$$0<c_{2m}\leqslant\frac{d}{ds}\left[\|\nabla \mathrm{U}_m\|_2^2+\|\mathrm{U}_m\|_2^2\right]^{1/2}\Bigg|_{s=0}\leqslant c_{1m}<+\infty. \tag{9.53}$$

Отметим, что для задачи (9.52) справедливо энергетическое равенство (9.33), из которого следует

$$\frac{d}{ds}\left[\|\nabla \mathrm{U}_m\|_2^2+\|\mathrm{U}_m\|_2^2\right]^{1/2}\Bigg|_{s=0}\leqslant$$

$$\leqslant\lambda\|U_m\|_p^p\Big|_{s=0}\leqslant\lambda\mathrm{B}_1^p\left[\|\nabla \mathrm{U}_m\|_2^2+\|\mathrm{U}_m\|_2^2\right]^{p/2}\Bigg|_{s=0}=\lambda\mathrm{B}_1^p\equiv c_{1m},$$

$$\mathrm{B}_1:\ \|v\|_p\leqslant\|\nabla v\|_2,$$

$$\frac{d}{ds}\left[\|\nabla \mathrm{U}_m\|_2^2+\|\mathrm{U}_m\|_2^2\right]^{1/2}\Bigg|_{s=0}\leqslant c_{1m}. \tag{9.54}$$

Пусть теперь

$$\varphi_m\equiv\|\nabla \mathrm{U}_m\|_2^2+\|\mathrm{U}_m\|_2^2.$$

Для функции $\varphi_m(s)$ справедливо неравенство вида (9.35):

$$\varphi_m\frac{d^2\varphi_m}{ds^2}-\alpha\left(\frac{d\varphi_m}{ds}\right)^2\geqslant 0,\quad \alpha\equiv\frac{p}{2}. \tag{9.55}$$

Интегрируя дифференциальное неравенство (9.55) по $s\in(-t^*/\gamma,t)$, получим

$$\frac{d\varphi_m}{ds}\frac{1}{\varphi_m^{\alpha}}\Bigg|_{t=s}\geqslant 2\frac{\lambda\|u_{m0}\|_p^p-\sum\limits_{i=1}^{N}\left\|\dfrac{\partial u_{m0}}{\partial x_i}\right\|_p^p}{\left[\|\nabla u_{m0}\|_2^2+\|u_{m0}\|_2^2\right]^{p/2}}. \tag{9.56}$$

Теперь воспользуемся тем, что по условию теоремы 8

$$\lambda\|u_0\|_p^p-\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u_0}{\partial x_i}\right\|_p^p>0,$$

поэтому найдется такая подпоследовательность последовательности $\{u_{m0}\}$, что

$$\lambda\|u_{m0}\|_p^p-\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u_{m0}}{\partial x_i}\right\|_p^p>0.$$

Из (9.56) следует неравенство

$$\frac{d}{ds}\left[\| \nabla \mathrm{U}_m \|_2^2 + \| \mathrm{U}_m \|_2^2\right]^{1/2} \geqslant \frac{\lambda \| u_{m0} \|_p^p - \sum\limits_{i=1}^{N} \left\| \dfrac{\partial u_{m0}}{\partial x_i} \right\|_p^p}{\left[\| \nabla u_{m0} \|_2^2 + \| u_{m0} \|_2^2\right]^{p/2}} \equiv c_{2m} > 0.$$

Тем самым неравенство (9.53) в силу (9.54) доказано. Неравенство (9.53) эквивалентно следующему неравенству:

$$0 < c_{2m} \leqslant \frac{1}{\mathrm{M}_m(t^*)^{p-1}} \frac{d\mathrm{M}_m(t^*)}{dt^*} \leqslant c_{1m} < +\infty, \quad p > 2, \tag{9.57}$$

где

$$c_{2m} \equiv \frac{\lambda \| u_{m0} \|_p^p - \sum\limits_{i=1}^{N} \left\| \dfrac{\partial u_{m0}}{\partial x_i} \right\|_p^p}{\left[\| \nabla u_{m0} \|_2^2 + \| u_{m0} \|_2^2\right]^{p/2}},$$

$$c_{1m} \equiv \lambda \mathrm{B}_1^p, \quad \mathrm{B}_1 : \| v \|_p \leqslant \| \nabla v \|_2 .$$

Интегрируя (9.57) по t^* в пределах от t до T_{m0} :

$$\limsup_{t^* \uparrow \mathrm{T}_{m0}} \mathrm{M}_m(t^*) = +\infty,$$

получим

$$[(p-2)c_{1m}]^{-1/(p-2)} \leqslant \mathrm{M}_m(t)(\mathrm{T}_{m0} - t)^{1/(p-2)} \leqslant \\ \leqslant [(p-2)c_{2m}]^{-1/(p-2)} \tag{9.58}$$

при $t \in [0, \mathrm{T}_{m0})$. Причем справедливы следующие оценки снизу и сверху на время разрушения T_{m0}:

$$\mathrm{A}_{1m} \leqslant \mathrm{T}_{m0} \leqslant \mathrm{A}_{2m},$$

где

$$\mathrm{A}_{1m} \equiv \frac{1}{(p-2)\lambda \mathrm{B}_1^p \left[\| \nabla u_{m0} \|_2^2 + \| u_{m0} \|_2^2\right]^{(p-2)/2}},$$

$$\mathrm{A}_{2m} \equiv \frac{\| \nabla u_{m0} \|_2^2 + \| u_{m0} \|_2^2}{(p-2)\left[\lambda \| u_{m0} \|_p^p - \sum\limits_{i=1}^{N} \left\| \dfrac{\partial u_{m0}}{\partial x_i} \right\|_p^p\right]}.$$

Нетрудно доказать, что найдутся такие постоянные $0 < \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2 < +\infty$, не зависящие от $m \in \mathbb{N}$, что

$$0 < \mathrm{A}_1 \leqslant \mathrm{T}_{m0} \leqslant \mathrm{A}_2 < +\infty.$$

Пусть $\mathrm{T}_0 \equiv \liminf\limits_{m\to+\infty} \mathrm{T}_{m0}$. Тогда найдется такая подпоследовательность последовательности $\{\mathrm{T}_{m0}\}$, что либо $\mathrm{T}_{m0} \uparrow \mathrm{T}_0$, либо $\mathrm{T}_{m0} \downarrow \mathrm{T}_0$.

Рассмотрим сначала случай $\mathrm{T}_{m0} \uparrow \mathrm{T}_0$. Тогда для любого фиксированного $\overline{m} \in \mathbb{N}$ можно перейти к пределу при $m \to +\infty$ в неравенстве (9.58) равномерно по $t \in [0, \mathrm{T}_{\overline{m}0}]$, и получим

$$[(p-2)c_1]^{-1/(p-2)} \leqslant \mathrm{M}(t)[\mathrm{T}_0 - t]^{1/(p-2)} \leqslant [(p-2)c_2]^{-1/(p-2)} \qquad (9.59)$$

при $\forall\, t \in [0, \mathrm{T}_{\overline{m}0})$, где

$$c_1 \equiv \lambda \mathrm{B}_1^p, \quad c_2 \equiv \frac{\lambda \parallel u_0 \parallel_p^p - \sum\limits_{i=1}^{N} \left\| \dfrac{\partial u_0}{\partial x_i} \right\|_p^p}{\left[\parallel \nabla u_0 \parallel_2^2 + \parallel u_0 \parallel_2^2\right]^{p/2}}.$$

Рассмотрим теперь случай $\mathrm{T}_{m0} \downarrow \mathrm{T}_0$. Тогда мы можем перейти к пределу при $m \to +\infty$ в неравенстве (9.58) равномерно по $t \in [0, \mathrm{T}_0)$ и снова получим (9.59). Стало быть, справедливо (9.50) с постоянными (9.51).

Теорема доказана.

Замечание 10. Отметим, что используемая нами техника без существенных изменений переносится на случай, когда под $\triangle_p$, $p > 2$, понимается оператор $\triangle_p v \equiv \mathrm{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v)$. Кроме того, с точки зрения физики полупроводников естественным является значение $p = 4$, и соответствующее уравнение имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle u - |u|^q u\right) + \mathrm{div}(|\nabla u|^2 \nabla u) + \lambda u^3 = 0, \quad \lambda > 0.$$

Отметим также, что используемое нами в теоремах 2, 3 в части результатов о «разрушении» дополнительное условие на λ,

$$F_0 \equiv \lambda \parallel u_0 \parallel_p^p - \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \right\|_p^p > 0,$$

является в известном смысле оптимальным, поскольку решения следующей задачи на собственные функции и собственные значения являются, очевидно, стационарными, а значит, глобальными во времени решениями задачи

$$\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \lambda |u|^{p-2} u = 0, \quad u \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega), \quad p > 2, \qquad (9.60)$$

и для начальных функций $u_0 \neq 0$ на множестве положительной меры, удовлетворяющих задаче (9.60) при некотором $\lambda > 0$ имеет место очевидное равенство $F_0 = 0$. По поводу задачи (9.60) см. [Pokhogaev, 1; Lindqvist], а также библиографию к этим работам.

§ 10. Об одной задаче для полулинейного уравнения вида (1.2)

Целью данного параграфа является изучение вопроса о разрушении за конечное время классического решения начально-краевой задачи для полулинейного уравнения составного типа:

$$\triangle \frac{\partial u}{\partial t} + u|u|^q = 0, \quad \text{в } \Omega \times (0, \mathrm{T}], \quad q > 0, \tag{10.1}$$

$$u(x,t) = 0, \quad \text{на } \partial\Omega \times [0, \mathrm{T}), \tag{10.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{10.3}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geqslant 2)$ — ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ класса $A^{(1,\lambda)}$, $\triangle \equiv \partial^2_{x_1} + ... + \partial^2_{x_N}$ — оператор Лапласа.

10.1. Разрушение классического решения задачи. Будем искать классическое решение задачи (10.1)–(10.3) в следующем классе действительных функций:

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{(0,1)}(\overline{\Omega} \times [0, \mathrm{T}]), \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}^{(2,0)}(\Omega \times (0, \mathrm{T})). \tag{10.4}$$

Отметим, что на данном классе функций $u(x,t)$ операторы $\triangle$ и $\frac{\partial}{\partial t}$, вообще говоря, не коммутируют, хотя оператор $\triangle \frac{\partial}{\partial t}$ определен в классическом смысле. Кроме того, из принадлежности $u(x,t)$ классу $\mathbb{C}^{(0,1)}(\overline{\Omega} \times [0, \mathrm{T}])$ с необходимостью следует принадлежность $u_0(x) \in \in \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})$ и следующее условие:

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in [0, T).$$

Обозначим через $-G(x,y)$ функцию Грина первой краевой задачи для оператора Лапласа в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ класса $\mathrm{A}^{(1,\lambda)}$. В классе функций (10.4) задача (10.1)–(10.3) эквивалентна задаче Коши для интегродифференциального уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y)(u|u|^q)(y,t), \tag{10.5}$$

$$u(x,0) = u_0(x),$$

которая в свою очередь эквивалентна следующему интегральному уравнению:

$$u(x,t) = u_0(x) + \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} dy\, d\tau\, G(x,y)(u|u|^q)(y,\tau). \tag{10.6}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 13. *Если* $u(x,t) \neq 0$ — *решение задачи* (10.1)–(10.3) *класса* (10.4), *причем* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}[[0,\mathrm{T}];\mathbb{H}_0^1(\Omega)]$, *то оно разрушается за конечное время.*

Доказательство. Умножим обе части уравнения (10.1) на $u(x,t)$ и проинтегрируем по области Ω, с учетом граничного условия (10.2) получим

$$\frac{d}{dt} \parallel \nabla u \parallel_2^2 (t) = 2 \parallel u \parallel_{q+2}^{q+2} (t). \tag{10.7}$$

Теперь, умножив обе части уравнения (10.1) на $u_t(x,t)$ и проинтегрировав по области Ω, с учетом граничного условия (10.2) в рассматриваемом классе функций получим

$$\parallel \nabla u_t \parallel_2^2 (t) = \frac{1}{q+2} \frac{d}{dt} \parallel u \parallel_{q+2}^{q+2} (t). \tag{10.8}$$

С другой стороны, в силу неравенства Коши–Буняковского справедливо неравенство:

$$\parallel \nabla u_t \parallel_2^2 \parallel \nabla u \parallel_2^2 \geqslant | < \nabla u_t, \nabla u > |^2,$$

из которого в силу равенств (10.7)–(10.8) для функции $\varphi(t) = \parallel \nabla u \parallel_2^2$ следует неравенство:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}\varphi - \frac{q+2}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \geqslant 0. \tag{10.9}$$

Из неравенства (10.9) получим следующие неравенства:

$$\frac{\varphi''}{\varphi^\alpha} - \alpha\frac{(\varphi')^2}{\varphi^{\alpha+1}} \geqslant 0, \quad \alpha = \frac{q+2}{2},$$

$$\left(\frac{\varphi'}{\varphi^\alpha}\right)' \geqslant 0, \quad \frac{\varphi'}{\varphi^\alpha} \geqslant \frac{2 \parallel u_0 \parallel_{q+2}^{q+2}}{\parallel \nabla u_0 \parallel_2^{q+2}},$$

$$\frac{1}{\varphi_0^{q/2}} - \frac{1}{\varphi^{q/2}(t)} \geqslant q\frac{\parallel u_0 \parallel_{q+2}^{q+2}}{\parallel \nabla u_0 \parallel_2^{q+2}} t.$$

Из последнего неравенства непосредственно следует, что классическое решение в рассматриваемом классе не существует глобально во времени.

Лемма доказана.

Перейдем к доказательству несуществования глобального во времени решения задачи (10.1)–(10.3).

Теорема 10. *Для любой функции* $u_0(x) \in \mathbb{C}^{(0,\alpha)}(\Omega) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})$, $\alpha \in (0,1)$, *не равной тождественно нулю, существует* $\mathrm{T}_{u_0} > 0$ *такое,*

что существует единственное решение задачи (10.1)–(10.3) *класса* (10.4) *с* $\mathrm{T} = \mathrm{T}_{u_0}$, *причем если*

$$u_0(x) \in \mathbb{C}^{(0,\alpha)}(\Omega) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{H}_0^1(\Omega), \tag{10.10}$$

то $\mathrm{T}_{u_0} < +\infty$ *и справедливо соотношение*

$$\lim_{\mathrm{T} \nearrow \mathrm{T}_{u_0}} \sup_{\overline{\Omega} \times [0,\mathrm{T}]} |u(x,t)| = +\infty. \tag{10.11}$$

Доказательство.

Рассмотрим банахово пространство $\mathbb{B} \equiv \mathbb{C}(\overline{\Omega} \times [0,\mathrm{T}])$ с нормой

$$\| \cdot \| = \sup_{\overline{\Omega} \times [0,\mathrm{T}]} |\cdot|$$

и следующую реккурентную последовательность:

$$\begin{gathered} u_{k+1}(x,t) = u_0(x) + \widehat{A}(u_k), \quad k \geqslant 1, \\ u_1(x,t) = u_0(x), \end{gathered} \tag{10.12}$$

где

$$\widehat{A}(u) \equiv \int_0^t \int_\Omega dy\, d\tau\, G(x,y)(u|u|^q)(y,\tau).$$

Отметим, что

$$\| \widehat{A}(u) \| \leqslant c\mathrm{T} \| u \|^{q+1}, \quad c = \sup_{x \in \Omega} \int_\Omega dy\, G(x,y).$$

Кроме того, точно так же как в [Лионс], можно показать, что если $\| u \| \leqslant \mathrm{M}$ и $\| v \| \leqslant \mathrm{M}$, то

$$\| \widehat{A}(u) - \widehat{A}(v) \| \leqslant (q+1)\mathrm{M}^q c\mathrm{T} \| u - v \|. \tag{10.13}$$

Оценим теперь по норме $u_{k+1}(x,t)$, воспользовавшись реккурентной последовательностью (10.12):

$$\| u_{k+1} \| \leqslant \| u_0 \| + Tc \| u_k \|^{q+1}.$$

Пусть $\gamma_1 = \| u_0 \|$ и $\gamma_{k+1} = \gamma_1 + c\mathrm{T}\gamma_k^{q+1}$, $k \geqslant 1$, тогда по индукции нетрудно доказать, что $\| u_k \| \leqslant \gamma_k$. Пусть

$$\mathrm{T} < q^q (q+1)^{-q-1} \| u_0 \|^{-q} c^{-1}, \tag{10.14}$$

тогда реккурентно заданная последовательность $\{\gamma_k\}$ строго ограничена величиной $M = q^{-1}(q+1) \| u_0 \|$. Поскольку $u_{k+2} - u_{k+1} = \widehat{A}(u_{k+1}) - \widehat{A}(u_k)$, то в силу (10.13) получаем

$$\| u_{k+2} - u_{k+1} \| \leqslant r \| u_{k+1} - u_k \|,$$

где

$$r = c\,(q+1)\,\mathrm{T}\left(\frac{q+1}{q}\right)^{q} \parallel u_0 \parallel^{q} < 1$$

в силу выбора T. Значит,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \parallel u_{k+1} - u_k \parallel < +\infty.$$

Отсюда следует сходимость последовательности $\{u_k(x,t)\}$ в банаховом пространстве $\mathbb{C}(\overline{\Omega}\times[0,\mathrm{T}])$. Обозначим предел последовательности через $u(x,t)\in\mathbb{C}(\overline{\Omega}\times[0,\mathrm{T}])$. Из неравенства (10.13) вытекает сходимость в $\mathbb{B}$ последовательности $\{\widehat{A}(u_k)\}$ к функции $\widehat{A}(u)$. Отсюда заключаем, что $u(x,t)$ — решение интегрального уравнения (10.6) в классе $\mathbb{C}(\overline{\Omega}\times[0,\mathrm{T}])$ с T, удовлетворяющим условию (10.14).

Докажем теперь, что $u(x,t)\in\mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}^{(0,\alpha)}(\Omega))$. Действительно при $N\geqslant 2$ имеем

$$G(x,y) = g(x,y) + \Gamma(x-y),$$

$$\Gamma(x-y) = \begin{cases} \frac{1}{N(2-N)\omega_N}|x-y|^{2-N}, & \text{если } N>2,\\ \frac{1}{2\pi}\log|x-y|, & \text{если } N=2, \end{cases}$$

а $g(x,y)$ — гармоническая в Ω функция, непрерывная вплоть до границы, d — диаметр области Ω , K — компакт. Отсюда получим

$$|[u]_{\alpha;\mathrm{K}}|_{\infty} \leqslant [u_0]_{\alpha;\mathrm{K}} + Td^{1-\alpha} \parallel u \parallel^{q+1} \sup_{x\in\mathrm{K}} \int\limits_{\Omega} dy\,[|\nabla g(x,y)| + |\nabla\Gamma(x-y)|] \leqslant$$

$$\leqslant [u_0]_{\alpha;\mathrm{K}} + C(\mathrm{K})\mathrm{T}d^{1-\alpha} \parallel u \parallel^{q+1} \quad \forall\,\mathrm{K}\subset\Omega.$$

Так как $u(x,t)\in\mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}^{(0,\alpha)}(\Omega)\cap\mathbb{C}_0(\overline{\Omega}))$, то правая часть интегрального уравнения (10.6) принадлежит классу (10.4) с некоторым T, удовлетворяющим условию (10.12), стало быть $u(x,t)$ также принадлежит классу (10.4).

Обозначим $u_{\mathrm{T}_1}(x) = u(x,\mathrm{T}_1)\in\mathbb{C}(\overline{\Omega})$ и рассмотрим вспомогательную задачу (10.5) при $t\geqslant \mathrm{T}_1 = \mathrm{T}$, в которой функция $u_0(x)$ заменена на функцию $u_{\mathrm{T}_1}(x)$. Воспользовавшись приведенной выше схемой, мы в результате получим монотонно возрастающую последовательность $\{\mathrm{T}_n\}$, причем для любого наперед заданного $n\in\mathbb{N}$ решение интегрального уравнения (10.6) существует и принадлежит классу (10.4) с $\mathrm{T}=\mathrm{T}_n$. Поскольку монотонная последовательность имеет либо конечный, либо бесконечный предел, то обозначим предел последовательности $\{\mathrm{T}_n\}$ через T_{u_0}. Переходим к доказательству единственности решения интегрального уравнения (10.6) при $t\in[0,\mathrm{T}_{u_0})$.

Пусть $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ — два решения интегрального уравнения (10.6), принадлежащие банахову пространству $\mathbb{B}$ на некотором сегменте $[0,\mathrm{T}_0]$ $(\mathrm{T}_0>0)$ и соответствующие начальной функции $u_0(x)\in$ $\in \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})$. Их разность $v(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$v(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_\Omega dy\,d\tau\,G(x,y)[(u_1|u_1|^q)(y,\tau)-(u_2|u_2|^q)(y,\tau)]. \qquad (10.15)$$

Введем функцию

$$\mathrm{M}[u](\mathrm{T})\equiv\sup_{\Omega\times[0,\mathrm{T}]}|u(x,t)|. \qquad (10.16)$$

Поскольку $\mathrm{L}(\mathrm{T}_0)\equiv\max\{\mathrm{M}[u_1](\mathrm{T}_0),\mathrm{M}[u_2](\mathrm{T}_0)\}<+\infty$ и, кроме того, $\mathrm{L}(\mathrm{T})\leqslant\mathrm{L}(\mathrm{T}_0)$ при $\mathrm{T}\leqslant\mathrm{T}_0$, что следует из определения функции $\mathrm{M}[u](\mathrm{T})$ (10.16), в силу (10.13) из интегрального уравнения (10.15) получаем

$$\mathrm{M}[v](\mathrm{T})\leqslant(q+1)\,c\,\mathrm{T}\,\mathrm{L}(\mathrm{T}_0)^q\mathrm{M}[v](\mathrm{T})\ \text{при}\quad \mathrm{T}\in(0,\mathrm{T}_0).$$

Из последнего неравенства получаем, что $\mathrm{M}[v](\mathrm{T})\equiv 0$ при $0<\mathrm{T}<((q+1)c\mathrm{L}(\mathrm{T}_0)^q)^{-1}$. Таким образом, $v(x,t)\equiv 0$ при $t\in(0,((q+1)c\mathrm{L}(\mathrm{T}_0)^q)^{-1})$. Далее, применяя алгоритм продолжения решения так же, как при доказательстве разрешимости, приходим к выводу, что $v(x,t)\equiv 0$ при $t\in[0,\mathrm{T}_{u_0})$.

Докажем теперь несуществование глобального во времени решения задачи (10.1)–(10.3) в классе (10.4) при условии (10.10), а также соотношение (10.11).

Пусть функция $u_0(x)$, не равная тождественно нулю, принадлежит классу (10.8). Предположим, что монотонная последовательность $\{\mathrm{T}_n\}$ имеет бесконечный предел. В силу принадлежности начальной функции $u_0(x)$ классу (10.8) из интегрального уравнения (10.6) получим, что решение искомой задачи $u(x,t)$ удовлетворяет всем условиям леммы 13. Стало быть, $\mathrm{T}_{u_0}<+\infty$.

Для доказательства соотношения (10.11) заметим, что функция $\mathrm{M}[u](\mathrm{T})$ — монотонно неубывающая функция, определенная на множестве $\mathrm{T}\in[0,\mathrm{T}_{u_0})$. Стало быть, при $\mathrm{T}\nearrow\mathrm{T}_{u_0}$ она имеет либо конечный, либо бесконечный предел. Предположим, что она имеет конечный предел, тогда решение интегрального уравнения (2.3) из $\mathbb{B}$ можно продолжить за $t>\mathrm{T}_{u_0}$. Полученное противоречие означает, что справедливо соотношение (10.9).

Теорема доказана.

Замечание 11. В случае знакопостоянных начальных функций $u_0(x)\in\mathbb{C}^{(0,\alpha)}(\Omega)\cap\mathbb{C}_0(\overline{\Omega})$ особенно просто можно доказать несуществование глобального решения, воспользовавшись техникой, впервые предложенной в работе [Kaplan]. Пусть $\psi_1(x)$ — собственная функция, соответствующая первому собственному значению λ_1 первой краевой

задачи для оператора Лапласа в области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ класса $A^{(1,\lambda)}$. Нормируем $\psi_1(x)$ на единицу:

$$\int\limits_{\Omega} dx\, \psi_1(x) = 1.$$

Пусть для определенности функция $u_0(x) \geqslant 0$ и не равна тождественно нулю (случай неположительной $u_0(x)$ рассматривается аналогично), а $u(x,t)$ соответствующее решение интегрального уравнения (10.6) класса (10.4), которое существует и единственно по теореме 10 на интервале $[0, \mathrm{T}_{u_0})$. Заметим, что из вида соответствующей реккурентной последовательности $\{u_k(x,t)\}$ (10.10) следует, что $u(x,t) \geqslant 0$.

Введем следующую функцию:

$$Y(t) \equiv \int\limits_{\Omega} u(x,t)\psi_1(x)\, dx. \tag{10.17}$$

Умножим обе части уравнения (10.5) на функцию $\psi_1(x,t)$ и проинтегрируем по области Ω, воспользовавшись тем, что $-G(x,y)$ — функция Грина первой краевой задачи для оператора Лапласа в Ω, и неотрицательностью $u(x,t)$:

$$\frac{dY(t)}{dt} = \frac{1}{\lambda_1} \int\limits_{\Omega} dy \psi_1(y) u^{q+1}(y,t). \tag{10.18}$$

Используя теперь интегральное неравенство Йенссена [Зорич] для выпуклых вниз функций ($q > 0$), а также условие нормировки $\psi_1(x) \geqslant$ $\geqslant 0$, с учетом определения (10.17) из (10.18) получим обыкновенное дифференциальное неравенство

$$\frac{dY(t)}{dt} \geqslant \frac{1}{\lambda_1} Y(t)^{q+1}, \quad q > 0. \tag{10.19}$$

Интегрируя (10.19) по $t \in [0, \mathrm{T}]$, $\mathrm{T} < \mathrm{T}_{u_0}$, в результате получим

$$Y(\mathrm{T}) \geqslant \left(Y_0^{-q} - \frac{q+1}{\lambda_1} \mathrm{T} \right)^{-1/q}, \quad \mathrm{T} \in [0, \mathrm{T}_{u_0}).$$

Отсюда сразу же следует, что $\mathrm{T}_{u_0} < +\infty$.

Докажем теперь признак сравнения.

Лемма 14. *Пусть функции $u_{01}(x)$ и $u_{02}(x)$ принадлежат классу $\mathbb{C}_0(\overline{\Omega})$, причем $u_{01}(x) \geqslant u_{02}(x)$. Тогда соответствующие решения интегрального уравнения* (10.6) *удовлетворяют неравенству $u_1(x,t) \geqslant$ $\geqslant u_2(x,t)$ на множестве $\Omega \times [0, \min[\mathrm{T}_{01}, \mathrm{T}_{02}])$, где T_{01} и T_{02} — соответствующие времена «существования» в смысле теоремы* 10.

Доказательство.

Пусть $\{u_{1k}(x,t)\}$ и $\{u_{2k}(x,t)\}$ — реккурентные последовательности, определенные (10.10), и соответствующии начальным функциям

$u_{01}(x)$ и $u_{02}(x)$, сходятся к решениям интегрального уравнения (10.6) $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ в банаховом пространстве $\mathbb{B}$ на некотором сегменте $[0,\mathrm{T}]$. В силу того $u_{01}(x) \geqslant u_{02}(x)$, а также в силу положительности $G(x,y)$ в $\Omega \times \Omega$ и монотонности функции z^q, следует: $u_1(x,t) \geqslant u_2(x,t)$ при $(x,t) \in \Omega \times [0,\mathrm{T})$. Применяя далее алгоритм продолжения по t, получим требуемое неравенство на интервале существования обоих решений.

Лемма доказана.

Перейдем к рассмотрению специфического характера разрушения решения задачи (10.1)–(10.3). Рассмотрим вспомогательную стационарную задачу о собственных колебаниях:

$$\triangle f_\mu(x) + q\mu f_\mu^{q+1}(x) = 0, \quad (q > 1), \tag{10.20а}$$

$$f_\mu(x)\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{10.20б}$$

Отметим, что задача (10.20) в общем случае исследована в работе [Похожаев, 3]. В частности, при $N \geqslant 3$ и $0 < q < 4/(N-2)$, при $N = 2$ и $q > 0$ имеют место теоремы 1 и 3 работы [Похожаев, 3].

Теорема 1 [Похожаев, 3]. *Пусть $N > 2$ и существует функция $v(x) \in \mathbb{H}_0^1(G)$, для которой*

$$\int\limits_{\bar{G}} F(v)\,dx = \mu \neq 0,$$

где $F(u) = \int\limits_0^u f(t)\,dt$. Пусть функция $f(u)$ из $\mathbb{C}_{(0,\alpha)}$ удовлетворяет условию

$$|f(u)| \leqslant A + B|u|^m, \quad m < (N+2)/(N-2),$$

где A и B — любые постоянные. Тогда краевая задача

$$\triangle u + \lambda f(u) = 0, \quad u\big|_\Gamma = 0$$

имеет собственную функцию

$$\varphi(x) \in \mathbb{C}_2(G) \cap \mathbb{C}_0(\overline{G}), \quad \int\limits_G F(\varphi)\,dx = \mu \neq 0.$$

Теорема 3 [Похожаев, 3]. *Пусть $N = 2$ и существует функция $v(x) \in \mathbb{H}_0^1(G)$, для которой $\int\limits_G F(v)\,dx = \mu \neq 0$. Пусть функция $f(u)$ из $\mathbb{C}_{(0,\alpha)}$ удовлетворяет условию $|f(u)| \leqslant A + B|u|^b \exp(c|u|^a)$, где $a < 2$; A, B, b, c — любые постоянные. Тогда краевая задача*

$$\triangle u + \lambda f(u) = 0, \quad u\big|_\Gamma = 0$$

имеет собственную функцию $\varphi(x) \in \mathbb{C}_2(G) \cap \mathbb{C}_0(\overline{G})$ и $\int\limits_G F(\varphi)\,dx = \mu$.

Вернемся к рассмотрению задачи (10.20). Собственная функция $\psi_1(x)$, соответствующая первому собственному значению первой краевой задачи для оператора Лапласа в $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(\partial\Omega \in A^{(1,\lambda)})$, принадлежит $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, и справедливо неравенство

$$\mu = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} |\psi_1(x)|^{q+1}\, dx > 0.$$

Итак, $\mu > 0$ и существует решение задачи (10.20) $f_\mu(x) \in \mathbb{C}^2(\Omega) \cap$ $\cap\, \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})$, причем $f_\mu(x) \geqslant 0$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 11. *Пусть* $N = 2$ *и* $q > 0$ *или* $N \geqslant 3$ *и* $0 < q < 4/(N-2)$, *тогда если для некоторых* $\mu_1 > 0$ *и* $\mu_2 > 0$ *выполняется неравенство* $f_{\mu_1}(x) \leqslant u_0(x) \leqslant f_{\mu_2}(x)$, $u_0(x) \in \mathbb{C}^{(0,\alpha)}(\Omega) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})$, *то* $\mu_2 \leqslant \mathrm{T}_{u_0} \leqslant \mu_1$ *и справедливы следующие неравенства:*

$$u(x,t) \geqslant \left(\frac{\mu_1}{\mu_1 - t}\right)^{1/q} f_{\mu_1}(x), \quad t \in [0, \mathrm{T}_{u_0}),$$

$$u(x,t) \leqslant \left(\frac{\mu_2}{\mu_2 - t}\right)^{1/q} f_{\mu_2}(x), \quad t \in [0, \mu_2),$$

где $f_\mu(x)$ *— решение задачи* (10.20), $u(x,t)$ *— решение интегрального уравнения* (10.6), *соответствующее* $u_0(x)$, T_{u_0} *— время существования решения в смысле теоремы* 10.

Доказательство.

В силу теоремы 10 решение задачи (10.1)–(10.3) с начальной функцией $f_\mu(x)$ единственно. С другой стороны, непосредственной проверкой можно убедиться, что решение имеет вид

$$u_\mu(x,t) = \left(\frac{\mu}{\mu - t}\right)^{1/q} f_\mu(x).$$

Теперь, воспользовавшись результатом леммы 2, приходим к утверждению теоремы 11.

Теорема доказана.

Теорема 12. *Пусть* $u_0(x) \in \mathbb{C}^{(0,\alpha)}(\Omega) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, *тогда если* $N = 2$ *и* $q > 0$ *или* $N \geqslant 3$ *и* $0 < q < 4/(N-2)$, *то существует* $\mathrm{T}_0 = \mathrm{T}_0(u_0) > 0$ *такое, что*

$$\frac{[qB_1^{q+2}(q,\Omega)]^{-1/q}}{(\mathrm{T}_0 - t)^{1/q}} \leqslant \| \nabla u \|_2 \leqslant \frac{B_2(q,u_0)}{(\mathrm{T}_0 - t)^{1/q}}, \tag{10.21}$$

$B_1(q,\Omega)$ *— константа вложения* $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ *в* $\mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$,

$$B_2(q,u_0) \equiv \left[q \frac{\| u_0 \|_{q+2}^{q+2}}{\| \nabla u_0 \|_2^{q+2}}\right]^{-1/q},$$

причем

$$\lim_{\mathrm{T}\nearrow\mathrm{T}_0}\sup_{\Omega\times[0,\mathrm{T}]}|u(x,t)|=+\infty.$$

Доказательство.

Для доказательства теоремы воспользуемся техникой работы [Rossi]. Введем вспомагательную функцию

$$v_\gamma(s,x)=\frac{1}{\mathrm{M}(t^\star)}u(s\gamma+t^\star,x),\ \gamma=\frac{1}{\mathrm{M}(t^\star)^q},\ \mathrm{M}(t^\star)=\|\nabla u\|_2(t^\star). \tag{10.22}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что $v_\gamma(s,x)$ в силу (10.22) удовлетворяет всем условиям следующей задачи:

$$\begin{gathered}\triangle\frac{\partial v_\gamma}{\partial s}+v_\gamma|v_\gamma|^q=0,\\ v_\gamma(s,x)\Big|_{\partial\Omega}=0,\\ v_\gamma(-\frac{t^\star}{\gamma},x)=\frac{1}{\mathrm{M}(t^\star)}u_0(x).\end{gathered} \tag{10.23}$$

Докажем, что существуют $c_1,c_2>0$ такие, что

$$0<c_2\leqslant\frac{d}{ds}\|\nabla v_\gamma\|(0)\leqslant c_1<+\infty. \tag{10.24}$$

Получим сначала оценку сверху. С этой целью умножим первое уравнение системы (10.23) на v_γ и проинтегрируем по области Ω получившееся уравнение с учетом граничного условия. В результате получим

$$\frac{d}{ds}\|\nabla v_\gamma\|_2^2(s)=2\|v_\gamma\|_{q+2}^{q+2}(s)\leqslant 2[B_1(q,\Omega)]^{q+2}\|\nabla v_\gamma\|_2^{q+2}(s).$$

Отсюда при $s=0$ имеем

$$\frac{d}{ds}\|\nabla v_\gamma\|(0)\leqslant[B_1(q,\Omega)]^{q+2}=c_1,$$

$B_1(q,\Omega)$ — константа наилучшего вложения $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ в $\mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$ при $N\leqslant 2$ или $0<q<4/(N-2)$ и $N\geqslant 3$.

Докажем теперь оценку снизу. Пусть $\varphi_\gamma(s)=\|\nabla v_\gamma\|_2^2$. Тогда справедливо следующее неравенство [см. лемму 13]:

$$\frac{d^2\varphi_\gamma(s)}{ds^2}\varphi_\gamma(s)-\frac{q+2}{2}\left(\frac{d\varphi_\gamma(s)}{ds}\right)^2\geqslant 0,$$

из которого получаем

$$\frac{\varphi_\gamma'(s)}{\varphi_\gamma(s)^\alpha}\geqslant\frac{\varphi_\gamma'(s)}{\varphi_\gamma(s)^\alpha}\Big|_{s=-t^\star/\gamma}=2\frac{\|u_0\|_{q+2}^{q+2}}{\|\nabla u_0\|_2^{q+2}},\quad\alpha=\frac{q+2}{2}.$$

Отсюда при $s = 0$, а также из равенства $\varphi_\gamma(0) = 1$ приходим к выводу, что

$$\frac{d}{ds} \parallel \nabla v_\gamma \parallel (0) \geqslant \frac{\parallel u_0 \parallel_{q+2}^{q+2}}{\parallel \nabla u_0 \parallel_2^{q+2}} = c_2 > 0.$$

Тем самым неравенство (10.24) доказано.

Неравенство (10.24) эквивалентно следующему неравенству:

$$0 < c_2 \leqslant \frac{\mathrm{M}'(t^\star)}{\mathrm{M}(t^\star)^{q+1}} \leqslant c_1 < +\infty,$$

откуда, интегрируя по $t^\star$ в пределах от t до T_0 :

$$\overline{\lim_{t \nearrow \mathrm{T}_0}} \mathrm{M}(t) = +\infty,$$

получим

$$[qc_1]^{-1/q} \leqslant \mathrm{M}(t)(\mathrm{T}_0 - t)^{1/q} \leqslant [qc_2]^{-1/q}.$$

Последнее утверждение теоремы 12 следует из структуры интегрального уравнения (10.5).

Теорема доказана.

Заметим, что соотношение (10.21) позволяет получить оценку для T_0 — времени существования решения:

$$\frac{1}{qB_1^{q+2} \parallel \nabla u_0 \parallel_2^q} \leqslant \mathrm{T}_0 \leqslant \frac{\parallel \nabla u_0 \parallel_2^2}{q \parallel u_0 \parallel_2^{q+2}}.$$

§ 11. О достаточных условиях разрушения обобщенного уравнения Буссинеска с источниками и нелинейной диссипацией

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о разрушении решения следующей начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\triangle u - u) + \triangle(|u|^{q_1} u) + |u|^{q_2} u = 0, \quad q_1, q_2 > 0, \tag{11.1}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \tag{11.2}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$, $\delta \in (0,1]$.

Вопрос о разрушении классического решения задачи (11.1)–(11.2) при условии $q_2 > q_1$ в случае, когда Ω — шар положительного радиуса, был рассмотрен в работе [Кожанов, 2]. При этом для доказательства разрушения гладкого решения использовался признак сравнения. При этом, как будет видно из дальнейшего изложения, в случае $q_1 = q_2$ мы можем без изменения техники рассмотреть уравнение (11.1) с произвольными положительными постоянными коэффициентами.

В этом параграфе мы докажем, что ослабленное решение задачи (11.1)–(11.2) разрушается за конечное время в случае $q_1 = q_2$.

11.1. Локальная разрешимость сильного обобщенного решения задачи. Пусть

$$\mathbb{A} \equiv -\triangle + \mathbb{I} : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega).$$

Для оператора $\mathbb{A}$ существует липшиц-непрерывный обратный оператор с постоянной Липшица, равной 1. Действительно, справедливы следующие соотношения:

$$\langle \mathbb{A}u_1 - \mathbb{A}u_2, u_1 - u_2 \rangle = \| \nabla u_1 - \nabla u_2 \|_2^2 + \\ + \| u_1 - u_2 \|_2^2 \geqslant \| u_1 - u_2 \|_{+1}^2, \quad (11.3)$$

где символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначена скобка двойственности между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$. Из (11.3) вытекает, что

$$\| \mathbb{A}^{-1} z_1 - \mathbb{A}^{-1} z_2 \|_{+1} \leqslant \| z_1 - z_2 \|_{-1} \quad \forall \ z_1, z_2 \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega).$$

Дадим определение сильного обобщенного решения задачи (11.1), (11.2).

Определение 15. Сильным обобщенным решением задачи (11.1)–(11.2) называется решение класса $\mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$, удовлетворяющее условиям

$$\langle \triangle u' - u' + \triangle(|u|^{q_1} u) + |u|^{q_2} u, w \rangle = 0 \quad (11.4)$$
$$\forall\, w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \ \ \forall\, t \in [0, \mathrm{T}],$$
$$u(0) = u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad (11.5)$$

где символом u' обозначена классическая производная по времени, а символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скобка двойственности между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$.

Определение 16. Ослабленным решением задачи (11.1)–(11.2) называется сильное обобщенное решение класса $\mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega}))$.

Будем искать решение задачи (11.1)–(11.2) в «ослабленном» смысле, т. е. в классе $\mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega}))$.

В сильном обобщенном смысле из (11.4)–(11.5) приходим к следующей абстрактной задаче Коши для операторного уравнения:

$$\mathbb{A}u' + \mathbb{A}f_1(u) = f(u), \ \ u(0) = u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad (11.6)$$

где

$$f_1(u) \equiv |u|^{q_1} u, \ \ f(u) \equiv |u|^{q_1} u + |u|^{q_2} u.$$

Так как мы ищем решение уравнения (11.6) в «ослабленном» смысле, то справедливы включения

$$u' \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})) \subset \mathbb{C}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{H}_0^1(\Omega)),$$

$$|u|^{q_i}u \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\,\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})\cap\mathbb{C}_0(\overline{\Omega}))\subset\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\,\mathbb{H}^1_0(\Omega))\subset$$
$$\subset\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\,\mathbb{H}^{-1}(\Omega)),\quad i=1,2.$$

Отсюда и из (11.6) приходим к следующему эквивалентному уравнению:

$$u^{'}+f_1(u)=\mathbb{A}^{-1}f(u), \tag{11.7}$$

решение которого ищем в классе $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})\cap\mathbb{C}_0(\overline{\Omega}))$. Заметим теперь, что сужение области определения оператора $\mathbb{A}^{-1}:\mathbb{H}^{-1}(\Omega)\to\mathbb{H}^1_0(\Omega)$ до класса $v(x)\in\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})$ совпадает с интегральным оператором

$$\mathbb{A}^{-1}v=\int\limits_{\Omega}dy\,G(x,y)v(y),$$

где $G(x,y)$ — функция Грина первой краевой задачи для оператора $-\triangle+\mathrm{I}$ в области Ω. Таким образом, из (11.7) в ослабленном смысле приходим к следующему интегральному уравнению:

$$u=u_0-\int\limits_0^t ds\,f_1(u)(s)+\int\limits_0^t ds\int\limits_{\Omega}dy\,G(x,y)f(u)\equiv\mathbb{H}(u). \tag{11.8}$$

Теорема 13. *Пусть* $1\leqslant q_1<+\infty$, $0<q_2<+\infty$. *Тогда для любого* $u_0\in\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})\cap\mathbb{C}_0(\overline{\Omega})$ *найдется такое максимальное* $\mathrm{T}_0>0$, *что существует единственное ослабленное решение задачи* (11.1)–(11.2), *причем либо* $\mathrm{T}_0=+\infty$, *либо* $\mathrm{T}_0<+\infty$ *и в последнем случае имеет место предельное равенство*

$$\limsup_{t\uparrow\mathrm{T}_0}\sup_{x\in\Omega}|\nabla_x u|=+\infty.$$

Доказательство.

Воспользуемся теперь методом сжимающих отображений для доказательства локальной во времени разрешимости данного уравнения в классе $\mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T};\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})\cap\mathbb{C}_0(\overline{\Omega}))$. С этой целью введем замкнутое выпуклое ограниченное подмножество банахова пространства $\mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T};\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})\cap\mathbb{C}_0(\overline{\Omega}))$:

$$\mathbb{B}_{\mathbb{R}}\equiv\Bigg\{u\in\mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T};\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})\cap\mathbb{C}_0(\overline{\Omega})):$$
$$:\|\,u\,\|_{\mathrm{T}}\equiv\operatorname*{ess.sup}_{t\in(0,\mathrm{T})}\sup_{x\in\Omega}|\nabla_x u(x,t)|\leqslant\mathbb{R}\Bigg\}.$$

Введем обозначение

$$\|\,v\,\|=\sup_{x\in\Omega}|\nabla_x v(x)|.$$

Докажем, что оператор $\mathbb{H}(u)$, опредеделенный формулой (11.8), действует из $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ в $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ и является сжимающим на $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$. Действительно,

$$\| \mathbb{H}(u) \|_{\mathrm{T}} \leqslant \| u_0 \| + \mathrm{T}\mu_1(\mathrm{R}) \| u \|_{\mathrm{T}} + \mathrm{T}\left[\mu_1(\mathrm{R}) + \mu_2(\mathrm{R})\right] \| u \|_{\mathrm{T}},$$

где

$$\mu_i(\mathrm{R}) = \mathrm{C}\mathrm{R}^{q_i}, \quad i = 1, 2, \quad \mathrm{R} = \| u \|_{\mathrm{T}} .$$

Докажем теперь, что оператор $\mathbb{H}(u)$ сжимающий на $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$. Действительно,

$$\| \mathbb{H}(u_1) - \mathbb{H}(u_2) \|_{\mathrm{T}} \leqslant \mathrm{T}\left[\mu_1(\mathrm{R}) + \mu_2(\mathrm{R}))\right] \| u_1 - u_2 \|_{\mathrm{T}} .$$

Поэтому при достаточно малом $\mathrm{T} > 0$ и большом $\mathrm{R} > 0$ и при условии

$$\mathrm{T} \leqslant \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_1(\mathrm{R}) + \mu_2(\mathrm{R})}$$

получим, что

$$\| \mathbb{H}(u_1) - \mathbb{H}(u_2) \|_{\mathrm{T}} \leqslant \frac{1}{2} \| u_1 - u_2 \|_{\mathrm{T}} .$$

Используя стандартный алгоритм продолжения решения во времени, получим существование такого максимального $\mathrm{T}_0 > 0$, что решение класса $\mathbb{L}^{\infty}(0, \mathrm{T}; \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega}))$ единственное для любого $\mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0)$, причем либо $\mathrm{T}_0 = +\infty$, либо $\mathrm{T}_0 < +\infty$ и в последнем случае имеем

$$\limsup_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \| u \| = +\infty.$$

Используя свойства сглаживания во времени оператора $\mathbb{H}(u)$, получим

$$\mathbb{H}(u) : \mathbb{L}^{\infty}(0, \mathrm{T}; \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})) \to \mathbb{AC}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})),$$
$$\mathbb{H}(u) : \mathbb{AC}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})) \to \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega}))$$

для любого $\mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0)$.

Теорема доказана.

11.2. Разрушение решения задачи. С учетом результатов предыдущего пункта задача (11.1)–(11.2) в ослабленном смысле эквивалентна следующей абстрактной задаче Коши:

$$\frac{du}{dt} + |u|^{q_1} u = \int_{\Omega} dy\, G(x, y) f(u), \quad u_0 = u(0) \in \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega}), \quad (11.9)$$

где $f(u) \equiv |u|^{q_1} u + |u|^{q_2} u$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 14. *Пусть* $q \equiv q_1 = q_2 \geqslant 1$, *тогда для любого* $u_0 \in \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})$ *при условии*

$$2 \int_{\Omega} \int_{\Omega} dx\, dy\, G(x, y)(|u_0|^q u_0)(x)(|u_0|^q u_0)(y) > \| u_0 \|_{2q+2}^{2q+2}$$

время $0 < T_0 \leqslant T_2$ *и имеет место предельное равенство*

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \| u \|_{q+2} = +\infty,$$

где

$$T_2 \equiv \frac{1}{\alpha - 1} \frac{\Phi(0)}{\Phi'(0)}, \quad \alpha \equiv \frac{2q+2}{q+2},$$

$$\Phi(0) = \frac{1}{q+2} \| u_0 \|_{q+2}^{q+2},$$

$$\Phi'(0) \equiv 2 \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega dx\, dy\, G(x,y)(|u_0|^q u_0)(y)(|u_0|^q u_0) - \| u_0 \|_{2q+2}^{2q+2}.$$

При условии $\lambda_1 \geqslant 1$, *где* λ_1 — *первое собственное значение оператора Лапласа в ограниченной области* Ω *с гладкой границей, справедлива оценка*

$$\| u \|_{q+2} \leqslant \| u_0 \|_{q+2}.$$

Доказательство.

Умножим уравнение (11.9) на $|u|^q u$ и проинтегрируем обе части полученного равенства по области Ω, тогда получим первое энергетическое равенство

$$\frac{1}{q+2} \frac{d}{dt} \| u \|_{q+2}^{q+2} + \| u \|_{2q+2}^{2q+2} = 2 \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega dx\, dy\, G(x,y)(|u|^q u)(x,t)(|u|^q u)(y,t) \equiv F(t). \quad (11.10)$$

Теперь умножим обе части равенства (11.9) на функцию $(|u|^q u)'$ и после интегрирования по области Ω получим второе энергетическое равенство

$$(q+1) \int\limits_\Omega dx |u|^q (u')^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| u \|_{2q+2}^{2q+2} = \frac{1}{2} F'(t). \quad (11.11)$$

Введем функционал, имеющий смысл энергии:

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{q+2} \| u \|_{q+2}^{q+2}. \quad (11.12)$$

Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\left(\Phi'\right)^2 = \left(\int\limits_\Omega dx\, |u|^q u u' \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega} dx\,|u|^q (u')^2 \int\limits_{\Omega} dx\,|u|^{q+2} \leqslant \frac{q+2}{q+1} \mathrm{J}\Phi(t), \quad (11.13)$$

где

$$\mathrm{J} \equiv (q+1) \int\limits_{\Omega} dx\,|u|^q (u')^2. \quad (11.14)$$

Теперь получим оценку сверху на величину J. С этой целью воспользуемся энергетическими равенствами (11.10) и (11.11). Тогда получим

$$\mathrm{J} = \frac{1}{2}\Phi''. \quad (11.15)$$

Из (11.12)–(11.15) вытекает неравенство

$$\Phi\Phi'' - \alpha(\Phi')^2 \geqslant 0, \;\; \alpha \equiv \frac{2q+2}{q+2} > 1. \quad (11.16)$$

Потребуем выполнения условия $\Phi'(0) > 0$, которое с учетом (11.10) примет следующий вид:

$$2 \int\limits_{\Omega} \int\limits_{\Omega} dx\,dy\,G(x,y)(|u_0|^q u_0)(y)(|u_0|^q u_0) > \| u_0 \|^{2q+2}_{2q+2}. \quad (11.17)$$

Приведем пример начальных функций, удовлетворяющих данному неравенству. Заметим, что поскольку $u_0 \in \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})$, мы можем представить $|u_0|^q u_0 \in \mathbb{H}^1_0(\Omega)$ в виде разложения в ряд по собственным функциям следующей задачи:

$$\triangle\varphi_k + \lambda_k \varphi_k = 0, \;\; \varphi_k \in \mathbb{H}^1_0(\Omega), \;\; \int\limits_{\Omega} dx\,\varphi_k(x)\varphi_l(x) = \delta_{kl}, \quad (11.18)$$

$$v_0 \equiv |u_0|^q u_0 = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \varphi_k(x), \;\; \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k^2 < +\infty. \quad (11.19)$$

После подстановки выражения (11.19) для функции $v_0 = |u_0|^q u_0$ в условие (11.17) с учетом (11.18) приходим к следующему эквивалентному неравенству:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{1+\lambda_k} \alpha_k^2 > \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k^2. \quad (11.20)$$

Пусть все коэффициенты α_k равны нулю при $k > m \in \mathbb{N}$, а коэффициент $\alpha_m \neq 0$. Потребуем теперь, чтобы $\lambda_m < 1$, тогда с учетом (11.20) приходим к выводу, что

$$u_0 = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \varphi_k(x) \left| \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \varphi_k(x) \right|^{-q/(1+q)} \quad (11.21)$$

удовлетворяет условию (11.17).

Интегрируя уравнение (11.16), с учетом условия (11.17), мы приходим к выводу о справедливости неравенства

$$\Phi(t) \geqslant \frac{1}{\left[\Phi_0^{1-\alpha} - (\alpha-1)\Psi_0 t\right]^{1/(\alpha-1)}}, \quad \Psi_0 \equiv \frac{\Phi'(0)}{\Phi^{\alpha}(0)}. \tag{11.22}$$

Из (11.22) вытекает следующая оценка сверху на время существования решения: $\mathrm{T}_0 \leqslant \mathrm{T}_2$, где

$$\mathrm{T}_2 \equiv \frac{1}{\alpha-1}\frac{\Phi(0)}{\Phi'(0)}. \tag{11.23}$$

Таким образом, в силу (11.21) и (11.23) приходим к первому утверждению теоремы.

Отметим теперь один любопытный факт. Для любых начальных функций $u_0 \in \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})$ и $\lambda_1 \geqslant 1$ имеет место неравенство

$$\| u \|_{q+2} \leqslant \| u_0 \|_{q+2}$$

на интервале $[0, \mathrm{T}_0)$ существования ослабленного решения. Действительно, рассмотрим первое энергетическое равенство (11.10), которое перепишем в виде

$$\frac{d\Phi}{dt} = 2\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} dx\, dy\, G(x,y)(|u|^q u)(x,t)(|u|^q u)(y,t) - \| u \|_{2q+2}^{2q+2}. \tag{11.24}$$

Так как $u \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}_0); \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega}))$, то для любого $t \in [0,\mathrm{T}_0)$ имеем $v \equiv |u|^q u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, и, значит,

$$v = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k(t)\varphi_k(x), \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k^2(t) < +\infty, \tag{11.25}$$

где φ_k определены в (11.18). После подстановки (11.25) в (11.24) получим

$$\frac{d\Phi}{dt} \equiv \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{1+\lambda_k} - 1\right) \alpha_k^2(t).$$

Потребуем теперь выполнения условия $\lambda_1 \geqslant 1$. Тогда для всех $t \in [0,\mathrm{T}_0)$ имеем:

$$\| u \|_{q+2} \leqslant \| u_0 \|_{q+2}.$$

Теорема доказана.

§ 12. О достаточном условии разрушения решения начально-краевой задачи для сильно нелинейного уравнения псевдопараболического типа

В данном параграфе мы рассмотрим следующую начально-краевую задачу, описывающую квазистационарные процессы в полупроводниках при наличии отрицательной дифференциальной проводимости, сильной пространственной дисперсии и нелинейной анизотропной зависимости диэлектрической проводимости от электрического поля:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle^2 u - \triangle u - \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^{p_j-2}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\right) + \\ + \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0, \quad (12.1)$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \;\; u(x,0) = u_0(x), \quad (12.2)$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_N) \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 1$, причем $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{4,\delta}$, $\delta \in (0,1]$, $p_j \geqslant 2$, $p > 2$.

Отметим, что данная задача не удовлетворяет введенным ранее условиям на операторные коэффициенты, поскольку в уравнении (12.1) под знаком производной по времени, вообще говоря, находится сумма монотонных однородных нелинейных операторов *не являющихся операторами типа нормы*. Поэтому, к сожалению, используемая техника не позволяет получить *необходимые и достаточные* условия разрушения решения, за исключением только лишь простейшего случая, когда $p_j = \overline{p} > 2$ для всех $j = \overline{1,N}$.

12.1. Локальная разрешимость задачи в сильном обобщенном смысле. Дадим определение сильного обобщенного решения.

Определение 17. Сильным обобщенным решением задачи (12.1)–(12.2) называется решение класса $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}_0^2(\Omega))$, удовлетворяющее условиям

$$\langle \mathbb{D}(u), w\rangle = 0 \;\; \forall\, w \in \mathbb{H}_0^2(\Omega), \;\; \forall\, t \in [0,\mathrm{T}], \;\; u(0) = u_0 \in \mathbb{H}_0^2(\Omega), \quad (12.3)$$

$$\mathbb{D}(u) \equiv \frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle^2 u - \triangle u - \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^{p_j-2}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\right) + \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u),$$

где через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначены скобки двойственности между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^2(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-2}(\Omega)$.

Введем обозначение: $\overline{p} = \max\limits_{j=\overline{1,N}} p_j$, $\widetilde{p} = \max\{p, \overline{p}\}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 15. *Пусть* $u_0(x) \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$. *Предположим, кроме того, что либо* $N \leqslant 2$, *либо* $\widetilde{p} \leqslant 2N(N-2)^{-1}$ *при* $N \geqslant 3$. *Тогда найдет-*

ся такое максимальное $\mathrm{T}_0 = \mathrm{T}_0(u_0) > 0$, *что существует единственное сильное обобщенное решение задачи* (12.1)–(12.2) *класса* $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{H}_0^2(\Omega))$. *Причем либо* $\mathrm{T}_0 = +\infty$, *либо* $\mathrm{T}_0 < +\infty$, *и в последнем случае выполнено предельное равенство*

$$\limsup_{t\uparrow \mathrm{T}_0} \| \triangle u \|_2 = +\infty. \tag{12.4}$$

Доказательство. Введем обозначения

$$\mathbb{A}_0 u \equiv \triangle^2 u - \triangle u : \mathbb{H}_0^2(\Omega) \to \mathbb{H}^{-2}(\Omega), \tag{12.5}$$

$$\mathbb{A}_j(u) \equiv -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^{p_j-2}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) : \mathbb{H}_0^2(\Omega) \subset$$
$$\subset \mathbb{W}_0^{1,p_j}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,p_j'}(\Omega) \subset \mathbb{H}^{-2}(\Omega), \tag{12.6}$$

$$\mathbb{F}(u) \equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) : \mathbb{H}_0^2(\Omega) \subset$$
$$\subset \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega) \subset \mathbb{H}^{-2}(\Omega), \quad p' = \frac{p}{p-1}. \tag{12.7}$$

Через $\|\cdot\|_{+2}$ обозначим норму гильбертова пространства $\mathbb{H}_0^2(\Omega)$, а через $\|\cdot\|_{-2}$ — норму гильбертова пространства $\mathbb{H}^{-2}(\Omega)$.

С учетом введенных обозначений (12.5)–(12.7) задача (12.3) примет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbb{A}_0 u + \sum_{j=1}^{N}\mathbb{A}_j(u)\right) = \mathbb{F}(u), \quad u(0) = u_0 \in \mathbb{H}_0^2(\Omega). \tag{12.8}$$

Введем оператор

$$\mathbb{A}(u) = \mathbb{A}_0 u + \sum_{j=1}^{N}\mathbb{A}_j(u) : \mathbb{H}_0^2(\Omega) \to \mathbb{H}^{-2}(\Omega). \tag{12.9}$$

Заметим, что

$$\langle \mathbb{A}(u_1) - \mathbb{A}(u_2), u_1 - u_2\rangle = \| \triangle u_1 - \triangle u_2 \|_2^2 + \| \nabla u_1 - \nabla u_2 \|_2^2 +$$
$$+ \sum_{j=1}^{N}\int\limits_{\Omega} dx \left(\left|\frac{\partial u_1}{\partial x_j}\right|^{p_j-2}\frac{\partial u_1}{\partial x_j} - \left|\frac{\partial u_2}{\partial x_j}\right|^{p_j-2}\frac{\partial u_2}{\partial x_j}, \frac{\partial u_1}{\partial x_j} - \frac{\partial u_2}{\partial x_j}\right).$$

Значит, оператор $\mathbb{A}(\cdot)$, определенный соотношением (12.9), имеет липшиц-непрерывный обратный оператор с постоянной Липшица, равной единице. Аналогичным образом доказывается, что оператор

$$\mathbb{A}_0 : \mathbb{H}_0^2(\Omega) \to \mathbb{H}^{-2}(\Omega)$$

имеет липшиц-непрерывный обратный с постоянной Липшица, равной единице.

Рассмотрим теперь оператор

$$\mathbb{A}_j(u) \equiv -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^{p_j-2}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) : \mathbb{W}_0^{1,p_j}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,p_j'}(\Omega), \quad j=\overline{1,N}$$

в случае $p_j > 2$. Производная Фреше оператора $\mathbb{A}_j(u)$ имеет вид

$$\mathbb{A}_j'(u)h = -(p_j-1)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^{p_j-2}\frac{\partial h}{\partial x_j}\right). \tag{12.10}$$

Докажем теперь, что производная Фреше $\mathbb{A}_j'(\cdot)$ является сильно непрерывным и ограниченным отображением $\mathbb{H}_0^2(\Omega) \to \mathcal{L}(\mathbb{H}_0^2(\Omega), \mathbb{H}^{-2}(\Omega))$. Действительно, в силу (12.10) имеем

$$\| \mathbb{A}_j'(u) - \mathbb{A}_j'(u_n) \|_{\mathbb{H}_0^2(\Omega)\to\mathbb{H}^{-2}(\Omega)} = \sup_{\|h\|_{+2}=1} \| \mathbb{A}_j'(u)h - \mathbb{A}_j'(u_n)h \|_{-2} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C} \sup_{\|h\|_{+2}=1} \| \mathbb{A}_j'(u)h - \mathbb{A}_j'(u_n)h \|_{\mathbb{W}^{-1,p_j'}(\Omega)} = \mathrm{C} \sup_{\|h\|_{+2}=1} \mathbb{J}_{nj}(h), \tag{12.11}$$

$$\mathbb{J}_{n,j}(h) = (p_j-1)\left(\int\limits_\Omega dx \left|\frac{\partial h}{\partial x_j}\right|^{p_j'} \left|\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^{p_j-2} - \left|\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\right|^{p_j-2}\right|^{p_j'}\right)^{1/p_j'}. \tag{12.12}$$

Из (12.12) получаем оценку сверху на величину $\mathbb{J}_{n,j}(h)$:

$$\mathbb{J}_{n,j}(h) \leqslant (p_j-1)\left(\int\limits_\Omega dx \left|\frac{\partial h}{\partial x_j}\right|^{p_j}\right)^{1/p_j} \times$$

$$\times \left(\int\limits_\Omega dx \left|\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\right|^{p_j-2} - \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^{p_j-2}\right|^{p_j/(p_j-2)}\right)^{(p_j-2)/p_j}. \tag{12.13}$$

Рассмотрим операторы

$$f_j = \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^{p_j-2}. \tag{12.14}$$

Операторы (12.14) порождены каратеодориевыми функциями, причем операторы Немыцкого (12.14), как несложно убедиться, действуют из $\mathbb{L}^{p_j}(\Omega)$ в $\mathbb{L}^{p_j/(p_j-2)}(\Omega)$ при $p_j > 2$. Значит, по теореме Вайнберга–Немыцкого оператор

$$f_j : \mathbb{L}^{p_j}(\Omega) \to \mathbb{L}^{p_j/(p_j-2)}(\Omega)$$

ограниченный и сильно непрерывный, т. е.

$$\int\limits_{\Omega} dx \left| \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \right|^{p_j-2} - \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^{p_j-2} \right|^{p_j/(p_j-2)} \to +0,$$

как только $u_n \to u$ сильно в $\mathbb{H}_0^2(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{1,p_j}(\Omega)$. Стало быть, в силу (12.11)–(12.13) приходим к выводу, что

$$\| \mathbb{A}_j^{'}(u) - \mathbb{A}_j^{'}(u_n) \|_{\mathbb{H}_0^2(\Omega) \to \mathbb{H}^{-2}(\Omega)} \to +0,$$

как только $u_n \to u$ сильно в $\mathbb{H}_0^2(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{1,p_j}(\Omega)$.

Пусть теперь $p_j = 2$, тогда

$$\mathbb{A}_j(u) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$$

и производная Фреше имеет вид

$$\mathbb{A}_j^{'}(u)h = \mathbb{A}_j(h) = -\frac{\partial^2 h}{\partial x_j^2},$$

и поскольку она не зависит от $u \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$, то, очевидно, операторы являются сильно непрерывными и ограниченными по $u \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$.

Рассмотрим теперь оператор $\mathbb{F}(u)$. Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\| \mathbb{F}(v_1) - \mathbb{F}(v_2) \|_{-2} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C} \left(\int\limits_{\Omega} dx \left| |\nabla v_1|^{p-2} \nabla v_1 - |\nabla v_2|^{p-2} \nabla v_2 \right|^{p/(p-1)} \right)^{p/(p-1)} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C}\mu(\overline{\mathrm{R}}) \| \nabla v_1 - \nabla v_2 \|_p,$$

где $\overline{\mathrm{R}} = \max\{\| \nabla v_1 \|_p, \| \nabla v_2 \|_p\}$, $\mu(\overline{\mathrm{R}}) = \mathrm{C}\mathrm{R}^{p-2}$, $p > 2$. Значит,

$$\| \mathbb{F}(v_1) - \mathbb{F}(v_2) \|_{-2} \leqslant \mu(\mathrm{R}) \| v_1 - v_2 \|_{+2},$$

где $\mu(\mathrm{R}) = \mathrm{C}\mathrm{R}^{p-2}$, $\mathrm{R} = \max\{\| v_1 \|_{+2}, \| v_2 \|_{+2}\}$. Рассмотрим теперь задачу (12.8). Будем искать v в классе $\mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{H}^{-2}(\Omega))$. В силу доказанных ранее свойств для оператора

$$\mathbb{A} : \mathbb{H}_0^2(\Omega) \to \mathbb{H}^{-2}(\Omega)$$

существует липшиц-непрерывный оператор $\mathbb{A}^{-1} : \mathbb{H}^{-2}(\Omega) \to \mathbb{H}_0^2(\Omega)$. Таким образом, $u = \mathbb{A}^{-1}(v)$, и задача (12.8) эквивалентна задаче

$$\frac{dv}{dt} = \mathbb{F}(\mathbb{A}^{-1}(v)), \quad v(0) = v_0 = \mathbb{A}(u_0) \in \mathbb{H}^{-2}(\Omega). \tag{12.15}$$

В классе $v \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}^{-2}(\Omega))$ из (12.15) приходим к следующему интегральному уравнению:

$$v(t) = v_0 + \int\limits_0^t ds\,\mathbb{Q}(v)(s), \quad \mathbb{Q}(v) = \mathbb{F}(\mathbb{A}^{-1}(v)). \tag{12.16}$$

Будем искать решения интегрального уравнения (12.16) в классе

$$v \in \mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T};\mathbb{H}^{-2}(\Omega))$$

при достаточно малом $\mathrm{T} > 0$. Воспользуемся методом сжимающих отображений. С этой целью введем замкнутое выпуклое ограниченное подмножество $\mathbb{B}_{\mathrm{R}}$ банахова пространства $\mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T};\mathbb{H}^{-2}(\Omega))$:

$$\mathbb{B}_{\mathrm{R}} \equiv \left\{ v \in \mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T};\mathbb{H}^{-2}(\Omega)) : \| v \|_{\mathrm{T}} \equiv \operatorname*{ess.sup}_{t\in(0,\mathrm{T})} \| v \|_{-2} \leqslant \mathrm{R} \right\}. \tag{12.17}$$

Докажем, что оператор

$$\mathbb{H}(v) = v_0 + \int\limits_0^t ds\,\mathbb{Q}(v) \tag{12.18}$$

действует из $\mathbb{B}_{\mathrm{R}}$ в $\mathbb{B}_{\mathrm{R}}$ и является сжимающим на $\mathbb{B}_{\mathrm{R}}$ при достаточно малом $\mathrm{T} > 0$ и достаточно большом $\mathrm{R} > 0$.

Итак, пусть $\| v_0 \|_{-2} \leqslant \mathrm{R}/2$, тогда

$$\| \mathbb{H}(v) \|_{\mathrm{T}} \leqslant \mathrm{R}/2 + \mathrm{T} \| v \|_{\mathrm{T}}\, \mu(\mathrm{R}),$$

где $\mu(\mathrm{R}) = \mathrm{C}\mathrm{R}^{p-2}$, $\mathrm{R} \geqslant \| v \|_T$, значит,

$$\| \mathbb{H}(v) \|_{\mathrm{T}} \leqslant \mathrm{R}$$

при условии $\mathrm{T} \leqslant (2\mu(\mathrm{R}))^{-1}$. Докажем теперь сжимаемость оператора $\mathbb{H}(v)$, определенного формулой (12.18), на множестве $\mathbb{B}_{\mathrm{R}}$, определенном соотношением (12.17). Действительно,

$$\| \mathbb{H}(v_1) - \mathbb{H}(v_2) \|_{\mathrm{T}} \leqslant \mathrm{T} \| \mathbb{Q}(v_1) - \mathbb{Q}(v_2) \|_{\mathrm{T}} \leqslant \mathrm{T}\mu(\mathrm{R}) \| v_1 - v_2 \|_{\mathrm{T}},$$

$\mathrm{R} = \max\{\| v_1 \|_{\mathrm{T}}, \| v_2 \|_{\mathrm{T}}\}$ при условии $\mathrm{T} < 1/[2\mu(\mathrm{R})]$. Стало быть, оператор $\mathbb{H}$ является сжимающим на $\mathbb{B}_{\mathrm{R}}$ при достаточно большом $\mathrm{R} > 0$ и достаточно малом $\mathrm{T} > 0$. Значит, существует единственное решение интегрального уравнения (12.16) класса $\mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T};\mathbb{H}^{-2}(\Omega))$. Используя стандартный алгоритм продолжения решения интегрального уравнения (12.16) во времени, получим, что найдется такое $\mathrm{T}_0 > 0$, что либо $\mathrm{T}_0 = +\infty$, либо $\mathrm{T}_0 < +\infty$, и в последнем случае имеет место предельное равенство

$$\limsup_{t\uparrow \mathrm{T}_0} \| v \|_{-2} = +\infty. \tag{12.19}$$

Отметим теперь, что из явного вида оператора $\mathbb{H}(v)$ следует, что

$$\mathbb{H}(v) : \mathbb{L}^{\infty}(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}^{-2}(\Omega)) \to \mathbb{AC}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{H}^{-2}(\Omega)),$$
$$\mathbb{H}(v) : \mathbb{AC}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{H}^{-2}(\Omega)) \to \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{H}^{-2}(\Omega)).$$

Значит, существует единственное решение задачи (12.15) класса $\mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}^{-2}(\Omega))$, причем либо $\mathrm{T}_0 = +\infty$, либо $\mathrm{T}_0 < +\infty$, и в последнем случае имеет место предельное равенство (12.19).

Рассмотрим теперь уравнение

$$\mathbb{A}(u) = v \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{H}^{-2}(\Omega)). \tag{12.20}$$

В силу свойств оператора $\mathbb{A}$ имеем

$$u = \mathbb{A}^{-1}(v). \tag{12.21}$$

Причем в силу (12.21) справедливы следующие неравенства:

$$\| u(t) - u(t_0) \|_{+2} \leqslant \| \mathbb{A}^{-1}(v)(t) - \mathbb{A}^{-1}(v)(t_0) \|_{+2} \leqslant$$
$$\leqslant \| v(t) - v(t_0) \|_{-2} \to +0$$

при $t \to t_0$, $t, t_0 \in [0, \mathrm{T}_0)$. Значит, $u(x, t) \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}_0^2(\Omega))$. Докажем теперь, что на самом деле функция u из (12.21) принадлежит классу $\mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}_0^2(\Omega))$. Действительно, в силу дифференцируемости по Фреше оператора $\mathbb{A}$ в классе $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}_0^2(\Omega))$ из (12.20) с необходимостью получаем, что

$$\mathbb{A}_u^{'}(u)u^{'} = v^{'} \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}^{-2}(\Omega)). \tag{12.22}$$

Выпишем подробнее уравнение (12.22):

$$\left[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_{1,u}^{'}(u)\right] u^{'} = v^{'}, \;\; \mathbb{A}_{1,u}^{'}(u) = \sum_{j=1}^{N} \mathbb{A}_j^{'}(u). \tag{12.23}$$

Уравнение (12.23) в силу свойств оператора $\mathbb{A}_0$ эквивалентно уравнению

$$\left[\mathrm{I} + \mathbb{A}_0^{-1}\mathbb{A}_{1,u}^{'}(u)\right] u^{'} = \mathbb{A}_0^{-1}v^{'}. \tag{12.24}$$

Докажем теперь, что линейный при фиксированном $u \in \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}_0^2(\Omega))$ оператор

$$\mathbb{C} = \mathrm{I} + \mathbb{A}_0^{-1}\mathbb{A}_{1,u}^{'}(u) \tag{12.25}$$

обратим и ограничен. Действительно, ограниченность вытекает из свойств оператора $\mathbb{A}_0$, имеющего липшиц-непрерывный обратный, а оператор $\mathbb{A}_{1,u}^{'}$ ограничен, как оператор $\mathbb{H}_0^2(\Omega) \to \mathcal{L}(\mathbb{H}_0^2(\Omega); \mathbb{H}^{-2}(\Omega))$. Докажем теперь, что оператор $\mathbb{C}$, определенный в (12.25), обратим. С этой целью рассмотрим уравнение

$$\mathbb{C}w = 0. \tag{12.26}$$

Подействуем на обе части последнего уравнения оператором $\mathbb{A}_0$, тогда получим

$$\left[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_{1,u}^{'}(u)\right] w = 0.$$

Докажем, что оператор $\mathbb{E} = \mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_{1,u}^{'}(u)$ обратим. Действительно, имеем

$$\langle \mathbb{E}w_1 - \mathbb{E}w_2, w_1 - w_2\rangle = \| \triangle w_1 - \triangle w_2 \|_2^2 + \| \nabla w_1 - \nabla w_2 \|_2^2 + \\ + \sum_{j=1}^{N}(p_j - 1)\int\limits_{\Omega} dx \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^{p_j-2}\left|\frac{\partial w_1}{\partial x_j} - \frac{\partial w_2}{\partial x_j}\right|^2 \geqslant \| w_1 - w_2 \|_{+2}^2 .$$

Значит, оператор $\mathbb{E}$ имеет липшиц-непрерывный обратный с постоянной Липшица, равной единице. Стало быть, уравнение (12.26) имеет только тривиальное решение $w = 0$ в классе $\mathbb{H}_0^2(\Omega)$.

Значит, из (12.23) и (12.24) получим

$$u^{'} = \widehat{\mathbb{C}}^{-1}\mathbb{A}_0^{-1}v^{'}. \tag{12.27}$$

Нам осталось доказать, что $u^{'} = \widehat{\mathbb{C}}^{-1}\mathbb{A}_0^{-1}v^{'} \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}_0^2(\Omega))$ при фиксированном $u \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}_0^2(\Omega))$. Действительно, в силу (12.27) справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\| u^{'}(t) - u^{'}(t_0) \|_{+2} \leqslant \| \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0)\mathbb{A}_0^{-1}[v^{'}(t) - v^{'}(t_0)] \|_{+2} + \\ + \| (\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) - \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t))\mathbb{A}_0^{-1}v^{'}(t_0) \|_{+2} \leqslant \\ \leqslant \mathrm{C} \| v^{'}(t) - v^{'}(t_0) \|_{-2} + \mathrm{C} \| \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) - \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t) \|_{\mathbb{H}_0^2(\Omega).\to\mathbb{H}_0^2(\Omega)} . \tag{12.28}$$

Отметим, что линейный при фиксированном $u \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}_0^2(\Omega))$ оператор $\widehat{\mathbb{C}}$ является непрерывным, а значит, в силу теоремы Банаха об обратном отображении, оператор $\widehat{\mathbb{C}}^{-1}$ является линейным непрерывным и, следовательно, в силу линейности ограниченным. Стало быть, мы можем воспользоваться спектральным представлением для линейного ограниченного оператора $\widehat{\mathbb{C}}^{-1} : \mathbb{H}_0^2(\Omega) \to \mathbb{H}_0^2(\Omega)$.

Прежде всего введем резольвенту оператора $\widehat{\mathbb{C}}$:

$$\mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}) = \left(\lambda\mathbb{I} - \widehat{\mathbb{C}}\right)^{-1}.$$

Пусть Γ — окружность $|\lambda| = r$ с достаточно большим радиусом, большим чем

$$\sup_{t\in[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]} \| \widehat{\mathbb{C}} \|_{\mathbb{H}_0^2(\Omega)\to\mathbb{H}_0^2(\Omega)} .$$

Введенная величина определена корректно, поскольку при указанных $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \subset [0, \mathrm{T}_0)$ имеет место неравенство

$$\sup_{t\in[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]} \| u \|_{+2} < +\infty.$$

Теперь мы можем воспользоваться спектральным представлением для операторов $\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t)$ и $\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0)$ с одним и тем же введенным ранее контуром Γ:

$$\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}d\lambda\,\lambda^{-1}\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t)),\;\;\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}d\lambda\,\lambda^{-1}\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0)).$$

Очевидно, имеем

$$\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t)-\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}d\lambda\,\lambda^{-1}\left[\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t))-\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0))\right].$$

Теперь воспользуемся известным представлением для резольвент операторов:

$$\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t))-\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0))=\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0))\sum_{n=1}^{+\infty}[(\widehat{\mathbb{C}}(t)-\widehat{\mathbb{C}}(t_0))\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0)]^n$$

при условии

$$\|\,\widehat{\mathbb{C}}(t_0)-\widehat{\mathbb{C}}(t)\,\|_{\mathbb{H}_0^2(\Omega)\to\mathbb{H}_0^2(\Omega)}\|\,\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0))\,\|_{\mathbb{H}_0^2(\Omega)\to\mathbb{H}_0^2(\Omega)}\leqslant\delta<1.$$

Справедлива следующее неравенство:

$$\|\,\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t))-\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0))\,\|_{\mathbb{H}_0^2(\Omega)\to\mathbb{H}_0^2(\Omega)}\leqslant\|\,\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0))\,\|_{\mathbb{H}_0^2(\Omega)\to\mathbb{H}_0^2(\Omega)}\times$$
$$\times\sum_{n=1}^{+\infty}\|\,\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0))\,\|^n_{\mathbb{H}_0^2(\Omega)\to\mathbb{H}_0^2(\Omega)}\|\,\widehat{\mathbb{C}}(t)-\widehat{\mathbb{C}}(t_0)\,\|^n_{\mathbb{H}_0^2(\Omega)\to\mathbb{H}_0^2(\Omega)}.$$

Теперь заметим, что

$$\widehat{\mathbb{C}}(t)-\widehat{\mathbb{C}}(t_0)=\mathbb{A}_0^{-1}\left[\mathbb{A}_{1,u}^{'}(u(t))-\mathbb{A}_{1,u}^{'}(u(t_0))\right].$$

В силу непрерывности производных Фреше $\mathbb{A}_{1,u}^{'}$ по $u\in\mathbb{H}_0^2(\Omega)$ и того факта, что $u\in\mathbb{C}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{H}_0^2(\Omega))$, имеем

$$\|\,\widehat{\mathbb{C}}(t)-\widehat{\mathbb{C}}(t_0)\,\|_{\mathbb{H}_0^2(\Omega)\to\mathbb{H}_0^2(\Omega)}\leqslant$$
$$\leqslant\|\,\mathbb{A}_{1,u}^{'}(u(t))-\mathbb{A}_{1,u}^{'}(u(t_0))\,\|_{\mathbb{H}_0^2(\Omega)\to\mathbb{H}^{-2}(\Omega)}\to+0,$$

$$\|\,\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t))-\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0))\,\|_{\mathbb{H}_0^2(\Omega)\to\mathbb{H}_0^2(\Omega)}\to 0,$$
$$\|\,\widehat{\mathbb{C}}(t)^{-1}-\widehat{\mathbb{C}}(t_0)^{-1}\,\|_{\mathbb{H}_0^2(\Omega)\to\mathbb{H}_0^2(\Omega)}\to+0$$

при $t\to t_0$.

Значит, в силу (12.28) имеем: $u\in\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{H}_0^2(\Omega))$.

Теорема доказана.

12.2. Разрушение сильного обобщенного решения задачи (12.1)–(12.2) и разрешимость в любом конечном цилиндре. В предыдущем пункте мы доказали однозначную разрешимость задачи (12.1)–(12.2) в сильном обобщенном смысле. В данном пункте мы получим достаточное условие разрушения сильного обобщенного решения, а также достаточное условие его разрешимости в любом конечном цилиндре.

Введем обозначение

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2} \parallel \triangle u \parallel_2^2 + \frac{1}{2} \parallel \nabla u \parallel_2^2 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{p_j}^{p_j}, \tag{12.29}$$

$$\mathrm{J}(t) \equiv \parallel \triangle u' \parallel_2^2 + \parallel \nabla u' \parallel_2^2 + \sum_{j=1}^{N} (p_j - 1) \int\limits_{\Omega} dx \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^{p_j - 2} \left| \frac{\partial u'}{\partial x_j} \right|^2, \tag{12.30}$$

$$\Phi_0 \equiv \Phi(0),\ \overline{p} = \max_{j=\overline{1,N}} p_j.$$

Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 16. *Пусть выполнены условия теоремы* 15. *Тогда справедливы следующие свойства*:

1) *если* $p_j \geqslant p$ *для всех* $j = \overline{1, N}$, *то* $\mathrm{T}_0 = +\infty$;

2) *если* $\alpha = p/\overline{p} > 1$, *то* $\mathrm{T}_0 \in [\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2]$,

где

$$\mathrm{T}_1 = \mathrm{C}_2^{-1} \frac{2}{p-2} \Phi_0^{1-p/2}, \quad \mathrm{T}_2 = \frac{1}{\alpha - 1} \frac{\Phi_0}{\parallel \nabla u_0 \parallel_p^p}, \quad \mathrm{C}_2 = \mathrm{C}_1^p 2^{p/2},$$

C_1 — *константа наилучшего вложения* $\mathbb{H}_0^2(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$:

$$\parallel \nabla v \parallel_p \leqslant \mathrm{C}_1 \parallel \triangle v \parallel_2$$

для всех $v \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Возьмем в качестве w в задаче (12.3) функцию $u \in \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}_0^2(\Omega))$, тогда после интегрирования по частям получим первое энергетическое равенство

$$\frac{d}{dt} \Phi(t) = \parallel \nabla u \parallel_p^p . \tag{12.31}$$

Теперь в качестве w в задаче (12.3) возьмем функцию $u' \in \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}_0^2(\Omega))$, тогда после интегрирования по частям получим второе энергетическое равенство

$$\mathrm{J} = \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \parallel \nabla u \parallel_p^p . \tag{12.32}$$

Справедливы следующие вспомогательные оценки:

$$\left|\int\limits_\Omega dx \triangle u' \triangle u\right| \leqslant \| \triangle u' \|_2 \| \triangle u \|_2, \quad \left|\int\limits_\Omega dx \, (\nabla u', \nabla u)\right| \leqslant \| \nabla u' \|_2 \| \nabla u \|_2,$$

$$\left|\int\limits_\Omega dx \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^{p_j-2} \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u'}{\partial x_j}\right| \leqslant \left(\int\limits_\Omega dx \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^{p_j-2}\left|\frac{\partial u'}{\partial x_j}\right|^2\right)^{1/2} \times$$

$$\times \left(\int\limits_\Omega dx \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^{p_j}\right)^{1/2}. \quad (12.33)$$

Справедливо следующее соотношение:

$$\left(\Phi'\right)^2 = \left(\int\limits_\Omega dx \triangle u' \triangle u + \int\limits_\Omega dx \, (\nabla u', \nabla u) + \int\limits_\Omega dx \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^{p_j-2} \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u'}{\partial x_j}\right)^2.$$

Отсюда в силу (12.33) получим неравенство

$$\left(\Phi'\right)^2 \leqslant \overline{p}\Phi(t)\mathrm{J}. \quad (12.34)$$

В силу (12.31), (12.32) и (12.34) получим обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка:

$$\Phi\Phi'' - \alpha\left(\Phi'\right)^2 \geqslant 0, \quad \alpha = \frac{p}{\overline{p}}. \quad (12.35)$$

Рассмотрим три случая: $\alpha > 1$, $\alpha = 1$, $\alpha \in (0,1)$. Из (12.31) вытекает, что при условии $\Phi_0 > 0$ имеет место неравенство $\Phi(t) > 0$ на интервале $[0, \mathrm{T}_0)$. Рассмотрим первый случай: $\alpha > 1$. Тогда из (12.35) получим неравенство снизу

$$\Phi(t) \geqslant \frac{1}{\left[\Phi_0^{1-\alpha} - (\alpha-1) \| \nabla u_0 \|_p^p \, \Phi_0^{-\alpha} t\right]^{1/(\alpha-1)}}. \quad (12.36)$$

Отсюда сразу же приходим к выводу, что

$$\mathrm{T}_0 \leqslant \mathrm{T}_2 = \frac{1}{\alpha-1}\frac{\Phi_0}{\| \nabla u_0 \|_p^p}. \quad (12.37)$$

В случае $\alpha = 1$ из (12.35) получим неравенство снизу

$$\Phi(t) \geqslant \Phi_0 \exp\left\{\frac{\| \nabla u_0 \|_p^p}{\Phi_0} t\right\}. \quad (12.38)$$

Рассмотрим теперь случай $\alpha \in (0,1)$. Тогда из (12.35) получаем

$$\Phi(t) \geqslant \Phi_0 \left[1 + (1-\alpha)\frac{\| \nabla u_0 \|_p^p}{\Phi_0} t\right]^{1/(1-\alpha)}. \tag{12.39}$$

В силу (12.36) и (12.37) приходим ко второму утверждению теоремы. А неравенства (12.38) и (12.39) дают оценку снизу на скорость роста функции $\Phi(t)$.

Пусть теперь $p_j \geqslant p$ для всех $j = \overline{1,N}$. Из первого энергетического равенства получим, что

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 + C(p) \int\limits_0^t ds \sum_{j=1}^N \int\limits_\Omega dx \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^p. \tag{12.40}$$

Кроме того, справедливы следующие оценки:

$$\| v_j \|_p \leqslant \mathrm{C}_j \| v_j \|_{p_j}, \quad j = \overline{1,N}, \quad v_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

Тогда из (12.40) получим неравенство

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 + \int\limits_0^t ds \sum_{j=1}^N C(p)\mathrm{C}_j^p \left(\frac{p_j}{p_j - 1}\right)^{p/p_j} \Phi^{p/p_j}.$$

Итак, получим следующее интегральное неравенство:

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 + \int\limits_0^t ds \sum_{j=1}^N \mathrm{A}_j \Phi^{\alpha_j}, \tag{12.41}$$

где

$$\mathrm{A}_j = C(p)\mathrm{C}_j^p \left(\frac{p_j}{p_j - 1}\right)^{p/p_j}, \quad \alpha_j = \frac{p}{p_j}.$$

Рассмотрим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\Psi}{dt} = \sum_{j=1}^N \mathrm{A}_j \Psi^{\alpha_j}, \quad \Psi(0) = \Phi_0, \quad \Psi > 0, \tag{12.42}$$

где

$$\mathrm{A}_j = C(p)\mathrm{C}_j^p \left(\frac{p_j}{p_j - 1}\right)^{p/p_j}, \quad \alpha_j = \frac{p}{p_j}.$$

Можно доказать, что имеет место неравенство $\Phi(t) \leqslant \Psi(t)$ на интервале $[0, \mathrm{T}_0)$.

Пусть $\Phi_0 \geqslant 1$, тогда из (12.42) вытекает следующее равенство:

$$\int\limits_{\Phi_0}^{\Psi(t)} ds\, \frac{1}{\mathrm{A}_{j^*} s^{\overline{\alpha}} + \sum\limits_{j \neq j^*} \mathrm{A}_j s^{\alpha_j}} = t, \tag{12.43}$$

где $\overline{\alpha} = \max\limits_{j=\overline{1,N}} \alpha_j = \alpha_{j^*}$, причем $\Psi(t) \geqslant \Phi_0$. Из (12.43) приходим к следующему неравенству ($s \geqslant 1$, $\overline{\alpha} \geqslant \alpha_j$):

$$\int\limits_{\Phi_0}^{\Psi(t)} ds\, s^{-\overline{\alpha}} \leqslant \sum_{j=1}^{N} \mathrm{A}_j t. \tag{12.44}$$

Рассмотрим два случая: $\overline{\alpha} = 1$ и $\overline{\alpha} \in (0,1)$. В первом случае мы получим из (12.44) и (12.41) следующее неравенство:

$$\Phi(t) \leqslant \Psi(t) \leqslant \Phi_0 \exp\{\mathrm{A}t\}, \quad \mathrm{A} = \sum_{j=1}^{N} \mathrm{A}_j. \tag{12.45}$$

В случае $\overline{\alpha} \in (0,1)$ из (12.44) и (12.41) получим

$$\Phi(t) \leqslant \Psi(t) \leqslant \left[\Phi_0^{1-\overline{\alpha}} + (\overline{\alpha} - 1) \sum_{j=1}^{N} \mathrm{A}_j t \right]^{1/(1-\overline{\alpha})}. \tag{12.46}$$

Пусть теперь $0 < \Phi_0 < 1$, тогда из (12.38) и (12.39) вытекает, что за конечное время $\mathrm{T}_{00} > 0$ имеем: $\Phi_{00} \equiv \Phi(\mathrm{T}_{00}) \geqslant 1$. Из первого энергетического неравенства приходим к выводу, что $\Phi(t) \geqslant \Phi(\mathrm{T}_{00}) \geqslant 1$. Тем самым приходим к следующим неравенствам:

$$\Phi(t) \leqslant \Psi(t) \leqslant \Phi_{00} \exp\{\mathrm{A}(t - \mathrm{T}_{00})\}, \quad \mathrm{A} = \sum_{j=1}^{N} \mathrm{A}_j, \tag{12.47}$$

при $\overline{\alpha} = 1$ и при $t \geqslant \mathrm{T}_{00}$. А при $\overline{\alpha} \in (0,1)$ приходим к выводу, что

$$\Phi(t) \leqslant \Psi(t) \leqslant \left[\Phi_{00}^{1-\overline{\alpha}} + (\overline{\alpha} - 1) \sum_{j=1}^{N} \mathrm{A}_j (t - \mathrm{T}_{00}) \right]^{1/(1-\overline{\alpha})} \tag{12.48}$$

при $t \geqslant \mathrm{T}_{00}$. Таким образом, из (12.45)–(12.48) получаем первое утверждение теоремы.

Получим теперь оценку снизу на время разрушения решения. Действительно, из первого энергетического равенства (12.31) получим

интегральное неравенство

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 + \int\limits_0^t ds \ \| \nabla u \|_p^p \, (s). \tag{12.49}$$

Теперь заметим, что имеет место вложение $\mathbb{H}_0^2(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ с наилучшей постоянной вложения C_1:

$$\| \nabla v \|_p \leqslant \mathrm{C}_1 \| \triangle v \|_2 \, .$$

Тогда с учетом определения $\Phi(t)$ из (12.49) получим

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 + \mathrm{C}_2 \int\limits_0^t ds \, \Phi^{p/2}(s), \tag{12.50}$$

где $\mathrm{C}_2 = \mathrm{C}_1^p 2^{p/2}$. Из (12.50) в силу леммы Гронуолла–Белмана–Бихари [45] получим оценку сверху

$$\Phi(t) \leqslant \frac{1}{\left[\Phi_0^{1-p/2} - \mathrm{C}_2(p-2)2^{-1}t\right]^{2/(p-2)}}. \tag{12.51}$$

Из (12.51) получим следующую оценку снизу на время разрушения решения:

$$\mathrm{T}_0 \geqslant \mathrm{T}_1 = \mathrm{C}_2^{-1} \frac{2}{p-2} \Phi_0^{1-p/2}.$$

Теорема доказана.

12.3. Физическая интерпретация. Из результата теоремы 16 следует, что если «главную» роль играет слагаемое $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, т. е. $p > p_j$ для всех $j = \overline{1, N}$, то имеет место разрушение решения задачи (12.1)–(12.2). В ситуации, когда $p_j \geqslant p$ для всех $j = \overline{1, N}$, имеет место разрешимость в любом конечном цилиндре $Q = (0, \mathrm{T}) \times \Omega$. Тем самым изучен вопрос о возникновении пробоя в полупроводнике в рамках данной модели.

Глава 5

РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЙ СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ИЛИ УРАВНЕНИЙ С ЛИНЕЙНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

Рассматриваются две абстрактные задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с нелинейными операторными коэффициентами. В качестве приложений приведены примеры сильно нелинейных уравнений псевдопараболического типа в ограниченных областях с гладкой границей. Для данных задач получены достаточные условия, близкие к необходимым, разрушения решений за конечное время и глобальной разрешимости. В частности, при некоторых условиях на нелинейные операторы доказана разрешимость задачи в любом конечном цилиндре, а при других условиях доказано разрушение решения задачи за конечное время при некоторых условиях на норму начальной функции в некотором банаховом пространстве, имеющих смысл достаточно большой величины начальной функциии. Приведены задачи для уравнений псевдопараболического типа — волновые или с линейной диссипацией. Результаты главы опубликованы в работе [Корпусов, 15].

§ 1. Постановка задач

Целью настоящего исследования является получение оптимальных результатов типа теорем существования–несуществования для классов сильно нелинейных уравнений соболевского типа, в абстрактной постановке — задач Коши для уравнений с операторными коэффициентами в банаховых пространствах:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbb{A}_0 u + \sum_{j=1}^{N} \mathbb{A}_j(u)\right) + \mathbb{L}u = \mathbb{F}(u), \quad u(0) = u_0, \tag{1.1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbb{A}_0 u + \sum_{j=1}^{N} \mathbb{A}_j(u)\right) + \mathbb{DP}(u) = \mathbb{F}(u), \quad u(0) = u_0, \tag{1.2}$$

а также оценок снизу и сверху на времена разрушения решений задач (1.1), (1.2).

Под оптимальными результатами мы понимаем такие, что при определенных входных параметрах задачи имеет место разрушение решений, а при других условиях — глобальная разрешимость. В этой связи мы намеренно сузили класс рассматриваемых уравнений соболевского типа до класса, для которого мы можем получить оптимальные результаты. И, кроме того, мы рассматриваем лишь такие задачи, для которых может быть доказана единственность решения, понимаемого в том или ином смысле.

Приведем примеры некоторых модельных трехмерных сильно нелинейных уравнений соболевского типа, вывод которых содержится в первой главе:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle u+\sum_{j=1}^{N}\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p_j-2}\nabla u\right)\right)-u+|u|^{q}u=0, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle u-|u|^{q_1}u\right)+\triangle u+|u|^{q}u=0, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle u+\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)-|u|^{q_1}u\right)-u+|u|^{q}u=0, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\triangle^2 u+\triangle u+\operatorname{div}(|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u)\right)+ \\ +\triangle u-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p_2-2}\nabla u)=0, \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle u+\sum_{j=1}^{N}\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p_j-2}\nabla u\right)\right)+u\frac{\partial u}{\partial x_1}+u^3=0, \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle u-|u|^{q_1}u\right)+\frac{\partial |u|^{q_2+1}}{\partial x_1}+|u|^{2q_2}u=0, \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\triangle^2 u+\triangle u+\operatorname{div}(|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u)\right)+ \\ +u\frac{\partial u}{\partial x_1}-\operatorname{div}(|\nabla u|^{2}\nabla u)=0, \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\triangle^2 u+\triangle u\right)-\operatorname{div}(|\nabla u|^{2}\nabla u)+ \\ +\beta_1\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)+\beta_2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\beta_3\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)=0, \tag{1.10}$$

где $\beta_1+\beta_2+\beta_3=0$, $|\beta_1|+|\beta_2|+|\beta_3|>0$, $p_j>2$, $q_1,\ q,\ q_2\geqslant 0$, $p_1,\ p_2,\ p>2$, $\beta\in[0,1)$.

§ 2. Первоначальные определения и условия

В дальнейшем будем считать выполненными все условия (V), (A), (A_0), (F) из §2 четвертой главы.

Пусть оператор $\mathbb{L}$ определен на пространстве $\mathbb{W}_1$ со значениями в $\mathbb{W}_1^*$:

$$\mathbb{L} : \mathbb{W}_1 \to \mathbb{W}_1^*, \quad i = \overline{1, N}.$$

Причем область значения оператора $\mathbb{L}_1$ совпадает с банаховым пространством $\mathbb{W}_1^*$.

Предположим, что в дополнение к условиям §2 четвертой главы выполнены следующие условия.

Условия (L).

1. $(\mathbb{L}u - \mathbb{L}v, u - v)_1 \geqslant d_1 \mid u - v \mid_1^2$ для любых $u,\ v \in \mathbb{W}_1,\ d_1 > 0$.
2. Оператор $\mathbb{L}$ симметричен.
3. Оператор $\mathbb{L} : \mathbb{W}_1 \to \mathbb{W}_1^*$ удовлетворяет условию: $\mid \mathbb{L}u \mid_1^* \leqslant \mathrm{D}_1 \mid u \mid_1$, $\mathrm{D}_1 > 0$ — постоянная.
4. $(\mathbb{L}u, u)_1^{1/2}$ — полунорма на $\mathbb{W}_1$.

Условия (DP).

1. Оператор $\mathbb{D} : \mathbb{W}_3 \to \mathbb{W}_4 \subseteq \mathbb{V}_0^*$ является линейным и ограниченным.
2. Оператор $\mathbb{P}(u) : \mathbb{V}_0 \subseteq \mathbb{W}_2 \to \mathbb{W}_3$ является ограниченно липшицнепрерывным:

$$|\mathbb{P}(u_1) - \mathbb{P}(u_2)|_3 \leqslant \mu_2(\mathrm{R})|u_1 - u_2|_2,$$

   где $\mu_2(\mathrm{R})$ — непрерывная возрастающая функция.
3. Справедливо неравенство сверху

$$|\mathbb{P}(u)|_3 \leqslant \mathrm{B}_2 |u|_2^{(q+2)/2}.$$

4. Для любого $u \in \mathbb{V}_0$ имеет место равенство

$$\langle \mathbb{D}\mathbb{P}(u), u \rangle_0 = 0.$$

Из условия (L) вытекает, что величина $(\mathbb{L}u, u)_1^{1/2}$ является нормой на пространстве $\mathbb{W}_1$.

Для дальнейшего изложения нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Утверждение 1. Для любых $u, v \in \mathbb{V}_0 \subset \mathbb{W}_0 \subseteq \mathbb{W}_2$ при дополнительном условии $\left|(\mathbb{F}(v), v)_0\right| \geqslant c > 0$ на единичной сфере $|v|_0 = 1$ справедливо неравенство

$$|\langle \mathbb{D}\mathbb{P}(u), v \rangle_0| \leqslant \mathrm{C} \langle \mathbb{A}_0 v, v \rangle_0^{1/2} \left|(\mathbb{F}(u), u)_0\right|^{1/2}, \quad \mathrm{C} > 0. \tag{2.1}$$

Доказательство.

Далее через C мы будем обозначать различные постоянные. Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$|\langle \mathbb{D}\mathbb{P}(u), v \rangle_0| \leqslant \| \mathbb{D}\mathbb{P}(u) \|_0^* \| v \|_0 \leqslant \mathrm{C} \langle \mathbb{A}_0 v, v \rangle_0^{1/2} \mid \mathbb{D}\mathbb{P}(u) \mid_4 \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C}\langle \mathbb{A}_0 v, v\rangle_0^{1/2} \mid \mathbb{P}(u) \mid_3 \leqslant \mathrm{C}\langle \mathbb{A}_0 v, v\rangle_0^{1/2} \mid u \mid_2^{(q+2)/2} \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{C}\langle \mathbb{A}_0 v, v\rangle_0^{1/2} \mid u \mid_0^{(q+2)/2} \leqslant \mathrm{C}\langle \mathbb{A}_0 v, v\rangle_0^{1/2} \left|(\mathbb{F}(u), u)_0\right|^{1/2}.$$

Утверждение доказано.

Без ограничения общности будем считать в (2.1) постоянную $\mathrm{C} = 1$.

§ 3. Однозначная разрешимость задачи (1.1) в слабом обобщенном смысле и разрушение ее решения

Определение 1. Слабым обобщенным решением абстрактной задачи Коши (1.1) назовем решение, удовлетворяющее условиям

$$\int_0^{\mathrm{T}} \varphi(t) \left[\frac{d}{dt} \sum_{j=0}^{N} \langle \mathbb{A}_j(u), w\rangle_j - (\mathbb{F}(u), w)_0 + (\mathbb{L}u, w)_1 \right] dt = 0 \qquad (3.1)$$
$$\forall\, w \in \mathbb{V},\ \forall\, \varphi \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}),$$
$$u(0) = u_0 \in \mathbb{V}.$$

Решение задачи (3.1) ищется в классе

$$u(t) \in \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}), \quad u'(t) \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_0),$$
$$\mathbb{L}u \in \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_1^*), \quad \mathbb{F}(u) \in \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_0^*),$$

$$\mathbb{A}_j(u) \in \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_j^*),\ j = \overline{0, N},\ \ \frac{d}{dt}\mathbb{A}(u) = \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^{N} \mathbb{A}_j(u) \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}^*),$$

и, кроме того,

$$\mathbb{A}(u) = \sum_{j=0}^{N} \mathbb{A}_j(u) \in \mathbb{C}_w^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}^*),$$

т.е. $\mathbb{A}(u)$ является сильно абсолютно непрерывной и слабо дифференцируемой на сегменте $[0, \mathrm{T}]$. Поэтому в силу свойств (A), (A_0) и (F), а также условий нижеследующей теоремы 1 получаем, что

$$\mathbb{A}(u) = \sum_{j=0}^{N} \mathbb{A}_j(u) \in \mathbb{H}^1(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}^*),\ \ \mathbb{F}(u) \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}^*),$$

$$\mathbb{A}(u) = \sum_{j=0}^{N} \mathbb{A}_j(u) \in \mathbb{C}_w^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}^*).$$

Тем самым задача (3.1) в силу условий (V) и условий нижеследующей теоремы 1 эквивалентна задаче

$$\int_0^{\mathrm{T}} \varphi(t) \left[\frac{d}{dt} \sum_{j=0}^{N} \langle \mathbb{A}_j(u), w \rangle + \langle \mathbb{L}u, w \rangle - \langle \mathbb{F}(u), w \rangle \right] dt = 0,$$
$$u(0) = u_0 \in \mathbb{V} \quad \forall\, w \in \mathbb{V},\ \forall\, \varphi(t) \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}),$$

где символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначена скобка двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}^*$.

Используя §12 Приложения Б, приходим к выводу, что задача (3.1) эквивалентна следующей задаче:

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt \left[\left\langle \frac{d}{dt} \mathbb{A}(u), v \right\rangle + \langle \mathbb{L}u, v \rangle - \langle \mathbb{F}(u), v \rangle \right] = 0 \quad \forall\, v \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}),$$
$$u(0) = u_0 \in \mathbb{V}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* A, A_0, F, L. *Предположим, что* $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$ *и* $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_1$, *т. е. оператор вложения вполне непрерывен. Потребуем, кроме того, чтобы* $\mathbb{V}_0 \subset \mathbb{W}_1$ *и* $\mathbb{V}_0 \subseteq \mathbb{W}_0$. *Кроме того, предположим, что либо* $2 < \overline{p} < q + 2$, *либо* $\overline{p} \geqslant q + 2$ *и в последнем случае* $\mathbb{V}_{j^*} \subseteq \mathbb{W}_0$, *где*

$$\overline{p} = \max_{j \in \overline{1,N}} p_j, \quad j^* \in \overline{1, N}, \quad p_{j^*} = \overline{p}.$$

Тогда для любого $u_0 \in \mathbb{V}$ *найдется такое максимальное* $\mathrm{T}_0 \equiv \mathrm{T}_{u_0} > 0$, *что задача Коши* (1.1) *имеет единственное решение в классе*

$$u(t) \in \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}), \quad u'(t) \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_0) \ \ \forall\, \mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0),$$
$$\mathbb{A}(u) = \sum_{j=0}^{N} \mathbb{A}_j(u) \in \mathbb{H}^1(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}^*) \cap \mathbb{C}_w^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}^*).$$

Причем справедливы следующие оценки для положительно определенной в силу условий $(\mathrm{A})_0$ 2 *и* (A) 3 *функции, имеющей смысл кинетической энергии,*

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j,$$

в трех случаях относительно возможных значений величины

$$\alpha \equiv \frac{q+2}{\overline{p}}, \quad \overline{p} \equiv \max_{j=\overline{1,N}} p_j \ :$$

1) *если* $\alpha = 1$, *то* $\mathrm{T}_0 = +\infty$ *и*

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 \exp\{\mathrm{C}_2 t\};$$

2) *если* $\alpha \in (0,1)$, *то* $\mathrm{T}_0 = +\infty$ *и*

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 \left[1 + (1-\alpha)\mathrm{C}_2 \Phi_0^{\alpha-1} t\right]^{1/(1-\alpha)};$$

3) *если* $\alpha > 1$ *и выполнены следующие неравенства*:

$$(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > (\mathbb{L}u_0, u_0)_1 + \frac{q\sqrt{2\overline{p}}}{q+2-\overline{p}}\Phi_0, \quad (\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > \frac{q+2}{2}(\mathbb{L}u_0, u_0)_1,$$

то найдется такое $\mathrm{T}_0 > 0$, *что*

$$\lim_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \Phi(t) = +\infty, \quad \mathrm{T}_1 \leqslant \mathrm{T}_0 \leqslant \mathrm{T}_2,$$

где

$$\mathrm{T}_1 = \frac{2}{q}\Phi_0^{-q/2}\overline{\mathrm{B}}^{-1}, \quad \mathrm{T}_2 = \Phi_0^{1-\alpha_1}\mathrm{A}_0^{-1}, \quad \mathrm{C}_2 \equiv \mathrm{BC}_{j^*}^{q+2} 2^{\alpha},$$

$$|v|_0 \leqslant \mathrm{C}_{j^*}\langle \mathbb{A}_{j^*} v, v\rangle_{j^*}^{1/p_{j^*}},$$

$$\Phi_0 \equiv \Phi(0), \quad \alpha_1 \equiv \frac{\overline{p}+q+2}{2\overline{p}},$$

$$\mathrm{A}_0^2 \equiv (\alpha_1 - 1)^2 \Phi_0^{-2\alpha_1}\left[(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 - (\mathbb{L}u_0, u_0)_1\right]^2 - (\alpha_1 - 1)\beta\Phi_0^{2-2\alpha_1},$$

$$\beta \equiv \frac{q^2}{q+2-\overline{p}} \ \textit{в случае} \ q+2 > \overline{p} \equiv \max_{j=\overline{1,N}} p_j, \quad \overline{\mathrm{B}} \equiv \mathrm{BC}_1^{q+2} 2^{(q+2)/2},$$

где C_1 — *константа наилучшего вложения* $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$, B — *константа из условия* (F)4.

Доказательство.

Замечание 2. Из принадлежности решения классу

$$u(t) \in \mathbb{L}^{\infty}(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}), \quad u'(t) \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_0)$$

следует, что после возможного изменения на множестве нулевой меры Лебега отображение $u(t) : [0, \mathrm{T}] \to \mathbb{V}_0$ непрерывно. Стало быть, имеет смысл начальное условие $u(0) = u_0$.

Шаг 1. *«Галеркинские» приближения.*

В силу сепарабельности $\mathbb{V}$ найдется счетная всюду плотная в $\mathbb{V}$ линейно независимая система функций $\{w_i\}_{i=1}^m$. Будем доказывать разрешимость задачи (3.1) методом Галеркина в сочетании с методами монотонности и компактности [Лионс, 1]. Сначала рассмотрим следующую конечномерную аппроксимацию задачи (3.1):

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt\, \varphi(t) \left[\frac{d}{dt}\langle \mathbb{A}_0 u_m, w_k\rangle_0 + \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N}\langle \mathbb{A}_j(u_m), w_k\rangle_j +\right.$$

$$+ (\mathbb{L}u_m, w_k)_1 - (\mathbb{F}(u_m), w_k)_0 \Big] = 0, \quad k = \overline{1,m}, \quad (3.2)$$

$$\forall \ \varphi(t) \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T}),$$

$$u_m = \sum_{i=1}^{m} c_{mi}(t) w_i, \ u_{m0} = \sum_{i=1}^{m} c_{mi}(0) w_i, \ c_{mi}(0) = \alpha_{mi},$$

$$u_{m0} \to u_0 \text{ сильно в } \mathbb{V}.$$

Из (3.2) получим, что в классе $c_{mk} \in \mathbb{C}^{(1)}[0,\mathrm{T}_m]$ справедливо поточечное равенство

$$\sum_{i=1}^{m} c_{mi}^{'} \left[\langle \mathbb{A}_0 w_i, w_k \rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \langle \mathbb{A}_{j,u_m}^{'}(u_m) w_i, w_k \rangle_j \right] +$$

$$+ (\mathbb{L}u_m, w_k)_1 = (\mathbb{F}(u_m), w_k)_0, \quad k = \overline{1,m}. \quad (3.3)$$

Введем обозначение

$$a_{ik} \equiv \langle \mathbb{A}_0 w_i, w_k \rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \langle \mathbb{A}_{j,u_m}^{'}(u_m) w_i, w_k \rangle_j.$$

Очевидно,

$$\sum_{i,k=1,1}^{m,m} a_{ik} \xi_i \xi_k = \langle \mathbb{A}_0 \eta, \eta \rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \langle \mathbb{A}_{j,u_m}^{'}(u_m) \eta, \eta \rangle_j \geqslant$$

$$\geqslant \langle \mathbb{A}_0 \eta, \eta \rangle_0, \quad \eta = \sum_{i=1}^{m} \xi_i w_i,$$

поскольку $\mathbb{A}_0$ — положительно определенный оператор, а значит $\langle \mathbb{A}_0 \eta, \eta \rangle_0 \geqslant 0$, причем равенство $\langle \mathbb{A}_0 \eta, \eta \rangle_0 = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $\eta = 0$. С другой стороны,

$$\eta \equiv \sum_{i=1}^{m} \xi_i w_i,$$

и в силу линейной независимости системы функций $\{w_i\}_{i=1}^{m}$ в $\mathbb{V}$ приходим к выводу, что $\eta = 0$ тогда и только тогда, когда $\{\xi_i\}_{i=1}^{m} = \mathbf{0}$. Отсюда и из [Постников] получим, что $\det\{a_{ik}\}_{i,k=1,1}^{m,m} > 0$.

Докажем теперь, что функционалы $f_j \equiv \langle \mathbb{A}_{j,u_m}^{'}(u_m) w_i, w_k \rangle_j$ являются непрерывными по совокупности переменных $c_{mi}, \ i = \overline{1,m}$. Действительно, пусть $\overline{c}_{m1}, ..., \overline{c}_{mm}$ — некоторая точка эвклидова пространства $\mathbb{R}^m$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Справедливо следующее неравенство:

$$|f_j(\overline{c}_{m1},...,\overline{c}_{mm}) - f_j(c_{m1},...,c_{mm})| \leqslant$$
$$\leqslant |f_j(\overline{c}_{m1},...,\overline{c}_{mm}) - f_j(c_{m1},\overline{c}_{m2},...,\overline{c}_{mm})| +$$
$$+ |f_j(c_{m1},\overline{c}_{m2},...,\overline{c}_{mm}) - f_j(c_{m1},c_{m2},\overline{c}_{m3},...,\overline{c}_{mm})| +$$
$$+ |f_j(c_{m1},c_{m2},\overline{c}_{m3},...,\overline{c}_{mm}) - f_j(c_{m1},c_{m2},c_{m3},...,\overline{c}_{mm})| + ...$$
$$... + \left|f_j(c_{m1},c_{m2},...,c_{(m-1)m},\overline{c}_{mm}) - f_j(c_{m1},...,c_{mm})\right|. \quad (3.4)$$

В силу условия (A) 2 найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что каждое из слагаемых в правой части неравенства (3.4) при условии

$$\sum_{k=1}^{m} |\overline{c}_{mk} - c_{mk}| \leqslant \delta(\varepsilon)$$

меньше величины $\varepsilon/(m+1)$. Докажем теперь липшиц-непрерывность функционалов $f_{0k} = (\mathbb{F}(u_m), w_k)_0$ по совокупности переменных $\{c_{mi}\}_{i=1}^m$. Пусть

$$u_j = \sum_{i=1}^{m} c_{mi}^j w_i, \quad j = 1,2.$$

В силу условия (F) 1 справедлива цепочка неравенств

$$\left|(\mathbb{F}(u_1) - \mathbb{F}(u_2), w_k)_0\right| \leqslant |\ \mathbb{F}(u_1) - \mathbb{F}(u_2)\ |_0^*|\ w\ |_0 \leqslant$$
$$\leqslant B\ |\ u_1 - u_2\ |_0 \leqslant B_1 \sum_{l=1}^{m} |c_{ml}^1 - c_{ml}^2|.$$

Тем самым функциии $f_{0k} = f_{0k}(c_{m1},...,c_{mm})$ являются липшиц-непрерывными и тем более непрерывными по совокупности переменных. Стало быть, система обыкновенных дифференциальных уравнений (3.3) является системой типа Коши–Ковалевской и удовлетворяет условиям, гарантирующим ее разрешимость на некотором сегменте $[0, \mathrm{T}_m]$, $\mathrm{T}_m > 0$, в классе $c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^1([0,\mathrm{T}_m])$, $k = \overline{1,m}$ (см., например, [Петровский]).

Шаг 2. *Априорные оценки.*

Справедлива следующая лемма

Лемма 1. *Найдется такое* $\mathrm{T} > 0$, *не зависящее от* $m \in \mathbb{N}$, *что для последовательности* $\{u_m\}$ *галеркинских приближений справедливы следующие свойства равномерно по* $m \in \mathbb{N}$:

$$u_m \ \textit{ограничено в}\ \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{V});$$
$$u_m' \ \textit{ограничено в}\ \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0);$$
$$\mathbb{A}_0 u_m \ \textit{ограничено в}\ \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0^*);$$
$$\mathbb{A}_j(u_m) \ \textit{ограничено в}\ \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_j^*);$$
$$\mathbb{F}(u_m) \ \textit{ограничено в}\ \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^*);$$
$$\mathbb{L}u_m \ \textit{ограничено в}\ \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_1^*).$$

Доказательство.

Умножим обе части равенства (3.3) на $c_{mk}(t)$ и просуммируем по $k=\overline{1,m}$, тогда получим

$$\langle \mathbb{A}_0 u_m^{'}, u_m\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N}\langle \mathbb{A}_{j,u_m}^{'}(u_m)u_m^{'}, u_m\rangle_j + \\ + (\mathbb{L}u_m, u_m)_1 = (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0 . \quad (3.5)$$

С другой стороны, в силу того что

$$u_m = \sum_{k=1}^{N} c_{mk}(t) w_k \in \mathbb{C}^1([0,\mathrm{T}_m];\mathbb{V}),$$

а также в силу условия (A) 2 и 4 справедлива цепочка равенств

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j = p_j \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_{mt}^{'}\rangle_j,$$
$$\langle (\mathbb{A}_j(u_m))_t^{'}, u_m\rangle_j + \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_{mt}^{'}\rangle_j = p_j \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_{mt}^{'}\rangle_j,$$
$$\langle (\mathbb{A}_j(u_m))_t^{'}, u_m\rangle_j = (p_j-1)\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_{mt}^{'}\rangle_j = \frac{p_j-1}{p_j}\frac{d}{dt}\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j.$$

Докажем равенства

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j = p_j \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_{mt}^{'}\rangle_j.$$

Действительно, имеем

$$\mathbb{J}_{mj}(t) \equiv \int_0^1 ds\, \langle \mathbb{A}_j(su_m), u_m\rangle_j = \frac{1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j,$$

$$\frac{d\mathbb{J}_{mj}(t)}{dt} = \int_0^1 ds\, \left[s\langle \mathbb{A}_{su_m}^{'}(su_m)u_m^{'}, u_m\rangle_j + \langle \mathbb{A}_j(su_m), u_m^{'}\rangle_j \right] =$$
$$= \int_0^1 ds\, \left[s\frac{d}{ds}\langle \mathbb{A}_j(su_m), u_m^{'}\rangle_j + \langle \mathbb{A}_j(su_m), u_m^{'}\rangle_j \right] =$$
$$= \int_0^1 ds\, \frac{d}{ds}\left[s\langle \mathbb{A}_j(su_m), u_m^{'}\rangle \right] = \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m^{'}\rangle_j.$$

Здесь мы воспользовались тем, что производные Фреше операторов $\mathbb{A}_j$ в силу условий (A) симметричны. Отсюда и из (3.5) получим

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N}\frac{p_j-1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j\right] + \\ + (\mathbb{L}u_m, u_m)_1 = (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0 . \quad (3.6)$$

Из (3.6) интегрированием обеих частей по $t \in (0, \mathrm{T}_m)$ получим

$$\frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N}\frac{p_j-1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j = \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, u_{m0}\rangle_0 + \\ + \sum_{j=1}^{N}\frac{p_j-1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_{m0}), u_{m0}\rangle_j + \int_0^t ds\,[(\mathbb{F}(u_m), u_m)_0 - (\mathbb{L}u_m, u_m)_1]. \quad (3.7)$$

В силу условия (A) 4 в банаховом пространстве $\mathbb{V}_0$ можно выбрать норму, эквивалентную исходной:

$$\| v \|_0 = \langle \mathbb{A}_0 v, v\rangle_0^{1/2}. \quad (3.8)$$

С другой стороны, $\mathbb{V}_0 \hookrightarrow \mathbb{W}_0$ и $\left|(\mathbb{F}(u_m), u_m)_0\right| \leqslant \mathrm{B} \mid u_m \mid_0^{q+2}$. Из (3.7) в силу (3.8) получим, что

$$\frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N}\frac{p_j-1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, u_{m0}\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N}\frac{p_j-1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_{m0}), u_{m0}\rangle_j + \mathrm{B}\mathrm{C}_1{}^{q+2}2^{(q+2)/2} \times \\ \times \int_0^t ds\left(\frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N}\frac{p_j-1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j\right)^{(q+2)/2}. \quad (3.9)$$

Выведем теперь вторую априорную оценку. Умножим (3.3) на $c_{mk}^{'}$ и просуммируем по $k = \overline{1, m}$, в результате интегрирования обеих частей полученного равенства по $t \in (0, \mathrm{T}_m)$ получим

$$\int_0^t ds\left[\langle \mathbb{A}_0 u_m^{'}, u_m^{'}\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N}\langle (\mathbb{A}_j(u_m))^{'} u_m^{'}\rangle_j\right] + \\ + \frac{1}{q+2}(\mathbb{F}(u_{m0}), u_{m0})_0 - \frac{1}{2}(\mathbb{L}u_{m0}, u_{m0})_1 = \\ = \frac{1}{q+2}(\mathbb{F}(u_m), u_m)_0 - \frac{1}{2}(\mathbb{L}u_m, u_m)_1 . \quad (3.10)$$

Если

$$\frac{1}{q+2}\,(\mathbb{F}(u_0),u_0)_0-\frac{1}{2}\,(\mathbb{L}u_0,u_0)_1>0, \tag{3.11}$$

то найдется такая подпоследовательность последовательности $\{u_{m0}\}$, что

$$\frac{1}{q+2}\,(\mathbb{F}(u_{m0}),u_{m0})_0-\frac{1}{2}\,(\mathbb{L}u_{m0},u_{m0})_1>0.$$

В силу условия положительной определенности оператора $\mathbb{L}$ имеем: $(\mathbb{F}(u_{m0}),u_{m0})_0\geqslant 0$.

Отсюда и из (3.10), (3.11) вытекает

$$(\mathbb{F}(u_m),u_m)_0-(\mathbb{L}u_m,u_m)_1>0. \tag{3.12}$$

Введем обозначение

$$\Phi_m\equiv\frac{1}{2}\langle\mathbb{A}_0u_m,u_m\rangle_0+\sum_{j=1}^{N}\frac{p_j-1}{p_j}\langle\mathbb{A}_j(u_m),u_m\rangle_j, \tag{3.13}$$

$$\Phi_{m0}\equiv\Phi_m(0).$$

Из (3.6) с учетом (3.13) получим, что $\Phi_m^{'}(t)>0$.

Из (3.9) и (3.13) получим

$$\Phi_m\leqslant\Phi_{m0}+\overline{\mathrm{B}}\int\limits_0^t ds\,\Phi_m^{(q+2)/2}(s), \tag{3.14}$$

где

$$\overline{\mathrm{B}}\equiv \mathrm{B}\mathrm{C}_1^{q+2}2^{(q+2)/2},$$

C_1 — константа наилучшего вложения $\mathbb{V}\hookrightarrow\mathbb{W}_0$, B — константа из условия (F) 4. Из (3.14) и теоремы Бихари (см., например, [Демидович]) следует

$$\Phi_m\leqslant\frac{\Phi_{m0}}{\left[1-\frac{q}{2}\Phi_{m0}^{q/2}\overline{\mathrm{B}}t\right]^{2/q}}. \tag{3.15}$$

Поскольку $u_{m0}\to u_0$ сильно в $\mathbb{V}$, то $\Phi_{m0}\leqslant\mathrm{C}_0$ и C_0 не зависит от $m\in\mathbb{N}$. Далее возможны два случая для некоторой подпоследовательности последовательности $\{u_m\}$: либо $\Phi_{m0}\downarrow\Phi_0$, либо $\Phi_{m0}\uparrow\Phi_0$.

Рассмотрим сначала случай $\Phi_{m0}\uparrow\Phi_0$. Тогда справедливы неравенства

$$1-\frac{q}{2}\overline{\mathrm{B}}\Phi_{m0}^{q/2}t\geqslant 1-\frac{q}{2}\overline{\mathrm{B}}\Phi_0^{q/2}t\quad\forall\,t\in(0,\mathrm{T}_1),\quad \mathrm{T}_1=\overline{\mathrm{B}}^{-1}\frac{2}{q}\Phi_0^{-q/2},$$

$$\Phi_m\leqslant\mathrm{C}_1\quad\forall\,t\in(0,\mathrm{T}_1),\quad \mathrm{T}_1=\overline{\mathrm{B}}^{-1}\frac{2}{q}\Phi_0^{-q/2}, \tag{3.16}$$

где C_1 не зависит от $m\in\mathbb{N}$.

Рассмотрим теперь случай $\Phi_{m0} \downarrow \Phi_0$. Тогда для любого $\overline{m} < m$ имеем

$$\Phi_{\overline{m}0} > \Phi_{m0}, \;\; 1 - \overline{\mathrm{B}}\frac{q}{2}\Phi_{m0}^{q/2}t \geqslant 1 - \overline{\mathrm{B}}\frac{q}{2}\Phi_{\overline{m}0}^{q/2}t.$$

И для любого $t \in [0, \overline{\mathrm{B}}^{-1}\frac{2}{q}\Phi_{\overline{m}0}^{-q/2})$ получим

$$\Phi_m \leqslant \frac{\mathrm{C}_0}{\left[1 - \frac{q}{2}\Phi_{\overline{m}0}^{q/2}\overline{\mathrm{B}}t\right]^{2/q}}.$$

Стало быть, для любого фиксированного T из интервала $\mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_1)$ найдется такое $\overline{m} \in \mathbb{N}$, что будет иметь место неравенство (3.15).

В силу того что найдется такое $p_{j^*} = \max\limits_{j=\overline{1,N}} p_j > 2$ и $p_{j^*} \geqslant q+2$, что $\mathbb{V}_{j^*} \subset \mathbb{W}_0$, справедливо следующее неравенство:

$$|\, v \,|_0 \leqslant \mathrm{C}_{j^*}\langle \mathbb{A}_{j^*}(v), v\rangle_{j^*}^{1/p_{j^*}}. \tag{3.17}$$

Из (3.17) сразу же получаем, что

$$|\, v \,|_0^{q+2} \leqslant \mathrm{C}_{j^*}^{q+2}\left(\frac{p_{j^*}}{p_{j^*}-1}\right)^{(q+2)/p_{j^*}} \times \\ \times \left(\frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 v, v\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N}\frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(v), v\rangle_j\right)^{(q+2)/p_{j^*}}. \tag{3.18}$$

С учетом (3.7), (3.13), (3.17) и (3.18) приходим к неравенству

$$\Phi_m \leqslant \Phi_{m0} + \mathrm{B}\mathrm{C}_{j^*}^{q+2}\left(\frac{p_{j^*}}{p_{j^*}-1}\right)^{(q+2)/p_{j^*}}\int_0^t ds\,\Phi_m^{\alpha}(s), \;\; \alpha \equiv \frac{q+2}{p_{j^*}}. \tag{3.19}$$

Рассмотрим два случая: $\alpha < 1$ и $\alpha = 1$. Воспользовавшись теоремами Гронуолла–Белмана–Бихари [Демидович], из (3.19) получим

$$\Phi_m \leqslant \left[\Phi_{m0}^{1-\alpha} + (1-\alpha)\mathrm{C}_2 t\right]^{1/(1-\alpha)}, \;\; \alpha \in (0,1), \tag{3.20}$$

$$\Phi_m \leqslant \Phi_{m0}\exp\{\mathrm{C}_2 t\}, \;\; \alpha = 1, \tag{3.21}$$

где

$$\mathrm{C}_2 \equiv \mathrm{B}\mathrm{C}_{j^*}^{q+2}\left(\frac{p_{j^*}}{p_{j^*}-1}\right)^{(q+2)/p_{j^*}}.$$

В силу того что $u_{m0} \to u_0$ сильно в $\mathbb{V}$, имеем: $\Phi_{m0} \leqslant \mathrm{C}_0$ и не зависит от $m \in \mathbb{N}$. Поэтому получим

$$\Phi_{m0} \leqslant \mathrm{C}_3 \;\; \forall\, \mathrm{T} \geqslant 0, \;\; \forall\, \alpha \in (0,1]. \tag{3.22}$$

Из условий (A) и (3.12), (3.16), (3.22) следует, что

$$|\mathbb{F}(u_m)|_0 \leqslant \mathrm{B} \mid u_m \mid_0^{q+1} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{B}\mathrm{C}_1^{q+2} 2^{(q+2)/2} \left(\frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j \right)^{(q+2)/2} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C}_3 \Phi_m^{(q+2)/2} \leqslant \mathrm{C}_{30},$$

где $0 < \mathrm{C}_{30}(\mathrm{T}) < +\infty$ — постоянная, не зависящая от $m \in \mathbb{N}$, причем неравенство сверху имеет место для любых $\mathrm{T} > 0$ в случае $\alpha_{j^*} \in (0, 1]$ и для любых $\mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_1)$, где T_1 определена в (3.16) в случае $\alpha_{j^*} > 1$. Теперь из (3.10) и условий (A) 2 и $(\mathrm{A})_0$ 2 вытекает, что

$$m_0 \int_0^t ds \parallel u_m^{'} \parallel_0^2 \leqslant \int_0^t ds \, \langle \mathbb{A}_0 u_m^{'}, u_m^{'} \rangle_0 \leqslant C_{40},$$

где $0 < \mathrm{C}_{40} < +\infty$ — постоянная, не зависящая от $m \in \mathbb{N}$, причем неравенство сверху имеет место для любых $\mathrm{T} > 0$ в случае $\alpha_{j^*} \in (0, 1]$ и для любых $\mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_1)$, где T_1 определена в (3.16) в случае $\alpha_{j^*} > 1$.

Итак,

$$u_m \text{ ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}), \quad u_m^{'} \text{ ограничено в } \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_0),$$

$$\mathbb{A}_0 u_m \text{ ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_0^*), \quad \mathbb{A}_j(u_m) \text{ ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_j^*),$$

$$\mathbb{F}(u_m) \text{ ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_0^*), \quad \mathbb{L} u_m \text{ ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_1^*), \tag{3.23}$$

где включения имеют место для любых $\mathrm{T} > 0$ в случае $\alpha \in (0, 1]$ и для любых $\mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_1)$, где T_1 определено в (3.16) в случае $\alpha > 1$.

Лемма доказана.

Стало быть, в силу (3.23) найдется такая подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$, что

$$u_m \rightharpoonup u \ *-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}), \quad u_m^{'} \rightharpoonup u^{'} \text{ слабо в } \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_0). \tag{3.24}$$

Здесь следует заметить, что из $(3.24)_2$ вытекает

$$u_m^{'} \rightharpoonup u^{'} \text{ в } \mathcal{D}^{'}(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_0),$$

поэтому в силу слабой сходимости в $\mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_0)$

$$u_m^{'} \rightharpoonup \eta$$

приходим к выводу, что $\eta(t) = u^{'}(t)$. Из (3.24) и компактного вложения $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$ получим, что для почти всех $t \in (0, \mathrm{T})$ последовательность

$u_m(t) \to u(t)$ сходится сильно в $\mathbb{W}_0$. С другой стороны, в силу условия (F) 1 имеем

$$| \mathbb{F}(u_m) - \mathbb{F}(u) |_0^* \leqslant \mu(\mathrm{R}) \, | u_m - u |_0 \to 0 \ \text{ при } \ m \to +\infty, \qquad (3.25)$$

где $\mathrm{R} = \max\{| u |_0, | u_m |_0\}$. Из (3.25) вытекает сильная сходимость:

$$\mathbb{F}(u_m)(t) \to \mathbb{F}(u)(t) \ \text{ сильно в } \ \mathbb{W}_0^* \ \text{ для почти всех } t \in (0, \mathrm{T}). \qquad (3.26)$$

Отметим теперь, что в силу $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_1$ и слабой в $\mathbb{V}$ сходимости $u_m \rightharpoonup u$ для почти всех $t \in (0, \mathrm{T})$ следует, что для некоторой подпоследовательности последовательности $\{u_m\}$ имеем: $u_m \to u$ сильно в $\mathbb{W}_1$ для почти всех $t \in (0, \mathrm{T})$. Отсюда и из условия (L) 3 следует сильная сходимость $\mathbb{L}u_m \to \mathbb{L}u$ в $\mathbb{W}_1^*$ для почти всех $t \in (0, \mathrm{T})$.

Итак, нужные априорные оценки получены.

Шаг 3. *Метод монотонности.*

Воспользуемся теперь методом монотонности. Напомним, что на шаге 2 мы получили предельные включения (3.24) и (3.26) и, кроме того,

$$\mathbb{A}(u_m) \rightharpoonup \chi \ \ *-\text{слабо в } \ \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}^*), \ \ \mathbb{A}(u) \equiv \sum_{j=0}^{N} \mathbb{A}_j(u). \qquad (3.27)$$

Лемма 2. *Пусть* $\mathbb{A}(u) \equiv \sum\limits_{j=0}^{\mathrm{N}} \mathbb{A}_j(u)$. *Тогда найдется такая подпоследовательность последовательности* $\{u_m\}$, *что*

$$\mathbb{A}(u_m) \rightharpoonup \mathbb{A}(u) \ *-\textit{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}^*)$$

для некоторого $\mathrm{T} > 0$. *Кроме того, для некоторой подпоследовательности последовательности* $\{u_m\}$

$$u_m \to u \ \textit{сильно в } \ \mathbb{L}^{p_j}(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_j), \quad u_m \to u \ \textit{сильно в } \ \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_0).$$

Доказательство.

Перепишем уравнение (3.2) в эквивалентном виде

$$\langle \mathbb{A}(u_m), w_j \rangle = \langle \mathbb{A}(u_{m0}), w_j \rangle + \int_0^t ds \, [(\mathbb{F}(u_m), w_j)_0 - (\mathbb{L}u_m, w_j)_1], \qquad (3.28)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скобки двойственности между сопряженными банаховыми пространствами $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}^*$.

Зафиксируем $j \in \mathbb{N}$ и перейдем к пределу при $m \to +\infty$ в уравнениии (3.28), тогда получим

$$\chi = \int_0^t ds \, [\mathbb{F}(u) - \mathbb{L}u] + \mathbb{A}(u_0). \qquad (3.29)$$

Пусть

$$0 \leqslant \mathbb{X}_\mu \equiv \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}(u_\mu) - \mathbb{A}(v), u_\mu - v\rangle = \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}(u_\mu), u_\mu\rangle - \\ - \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}(u_\mu), v\rangle - \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}(v), u_\mu - v\rangle.$$

Тогда

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}(u_\mu), u_\mu\rangle = \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}(u_{\mu 0}), u_\mu\rangle + \\ + \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \int\limits_0^t ds\, [(\mathbb{F}(u_\mu)(s), u_\mu(t))_0 - (\mathbb{L}u_\mu(s), u_\mu(t))_1].$$

Отсюда получим, что

$$0 \leqslant \limsup_{\mu\to+\infty} \mathbb{X}_\mu \leqslant \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \int\limits_0^t ds\, [(\mathbb{F}(u)(s), u(t))_0 - (\mathbb{L}u(s), u(t))_1] + \\ + \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}(u_0), u\rangle - \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \chi, v\rangle - \\ - \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}(v), u - v\rangle = \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \chi - \mathbb{A}(v), u - v\rangle \geqslant 0. \quad (3.30)$$

Положим теперь $v = u - \lambda w$ для любых $v, w \in \mathbb{L}^r(0, \mathrm{T}; \mathbb{V})$, $\lambda > 0$, $u \in \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}) \subset \mathbb{L}^r(0, \mathrm{T}; \mathbb{V})$, $\chi, \mathbb{A}(v) \in \mathbb{L}^{r'}(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}^*)$, $r > 1$, $r' = r/(r-1)$. В силу (3.30) справедливо следующее неравенство:

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \chi - \mathbb{A}(u - \lambda w), w\rangle \geqslant 0,$$

из которого в силу полунепрерывности каждого из операторов $\mathbb{A}_j(v)$, $j = \overline{0, N}$, получим

$$\chi = \mathbb{A}(u).$$

С другой стороны, в силу (3.29) имеем неравенство

$$\limsup_{\mu\to+\infty}\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle\mathbb{A}_j(u_\mu),u_\mu\rangle_j \leqslant -\liminf_{\mu\to+\infty}\sum_{k=0,k\neq j}^{N}\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle\mathbb{A}_k(u_\mu),u_\mu\rangle_k+$$

$$+\limsup_{\mu\to+\infty}\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle\mathbb{A}(u_\mu),u_\mu\rangle \leqslant$$

$$\leqslant -\sum_{k=0,k\neq j}^{N}\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle\mathbb{A}_k(u),u\rangle_k+\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle\mathbb{A}(u),u\rangle=\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle\mathbb{A}_j(u),u\rangle_j, \quad (3.31)$$

где мы воспользовались тем, что каждый из операторов $\mathbb{A}_j(v)$, $j=\overline{0,N}$, в силу условий (A_0) и (A) порождает нормы рефлексивных банаховых пространств $\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0)$ и $\mathbb{L}^{p_j}(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_j)$, эквивалентные исходным в силу условий (A_0) и (A) по следующим формулам:

$$\left(\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle\mathbb{A}_0u,u\rangle_0\right)^{1/2}, \quad \left(\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle\mathbb{A}_j(u),u\rangle_j\right)^{1/p_j}.$$

Наконец, в силу слабой сходимости $u_\mu \rightharpoonup u$ в $\mathbb{L}^{p_j}(0,\mathrm{T};\mathbb{V})$, $j=\overline{0,N}$, и в силу того что операторы $\mathbb{A}_j(v)$, $j=\overline{0,N}$, по указанным выше правилам порождают нормы рефлексивных банаховых пространств, имеем

$$\liminf_{m\to+\infty}\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle\mathbb{A}_j(u_m),u_m\rangle_j \geqslant \int_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle\mathbb{A}_j(u),u\rangle_j. \quad (3.32)$$

Из (3.31) и (3.32) следует, что

$$\lim_{m\to+\infty}\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle\mathbb{A}_j(u_m),u_m\rangle_j=\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle\mathbb{A}_j(u),u\rangle_j. \quad (3.33)$$

Теперь в силу условий (A) величины

$$\left(\int_0^{\mathrm{T}} dt\langle\mathbb{A}_j(u),u\rangle_j\right)^{1/p_j}, \quad \left(\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle\mathbb{A}_0u,u\rangle_0\right)^{1/2}$$

— это нормы, эквивалентные исходным нормам,

$$\left(\int_0^{\mathrm{T}} dt\ \|\,u\,\|_j^{p_j}\right)^{1/p_j}, \quad \left(\int_0^{\mathrm{T}} dt\ \|\,u\,\|_0^2\right)^{1/2}$$

банаховых пространств $\mathbb{L}^{p_j}(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_j)$. Поэтому из (3.33) следует существование подпоследовательности последовательности $\{u_m\}$ такой, что

$$\left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \mathbb{A}_j(u_m),u_m\rangle_j\right)^{1/p_j} \to \left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\langle \mathbb{A}_j(u),u\rangle_j\right)^{1/p_j}, \quad j=\overline{1,N},$$

$$\left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \mathbb{A}_0u_m,u_m\rangle_0\right)^{1/2} \to \left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \mathbb{A}_0u,u\rangle_0\right)^{1/2}.$$

С другой стороны,

$$u_m \rightharpoonup u \ - \text{ слабо в } \mathbb{L}^{p_j}(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_j), \quad j=\overline{0,N},$$

значит, найдется такая подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$, что $u_m \to u$ сильно в каждом $\mathbb{L}^{p_j}(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_j)$, $j=\overline{0,N}$.

Лемма доказана.

Шаг 4. *Предельный переход и единственность.*

Из предельных выражений (3.24), (3.26) и (3.27) вытекает возможность перехода к пределу при $m\to+\infty$ в уравнении (3.28). В результате указанного предельного перехода получим, что для почти всех $t\in(0,\mathrm{T})$ имеет место равенство

$$\langle \mathbb{A}_0u,v\rangle_0+\sum_{j=1}^{N}\langle \mathbb{A}_j(u),v\rangle_j=\langle \mathbb{A}_0u_0,v\rangle_0+\sum_{j=1}^{N}\langle \mathbb{A}_j(u_0),v\rangle_j+$$
$$+\int\limits_0^t ds\,\left[(\mathbb{F}(u),v)_0(s)-(\mathbb{L}u,v)_1(s)\right]$$

$\forall\, v\in\mathbb{V}$, $u(0)=u_0\in\mathbb{V}$. С другой стороны, $u'\in\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0)$, $u\in\in\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{V}^*)$. Перепишем последнее равенство в следующем виде:

$$\sum_{j=0}^{N}\langle \mathbb{A}_j(u),v\rangle_j=\sum_{j=0}^{N}\langle \mathbb{A}_j(u_0),v\rangle_j+\int\limits_0^t ds\,\left[(\mathbb{F}(u),v)_0(s)-(\mathbb{L}u,v)_1(s)\right]$$

$\forall\, v\in\mathbb{V}$, для почти всех $t\in(0,\mathrm{T})$. Значит, для почти всех $t\in(0,\mathrm{T})$ справедливо равенство в смысле $\mathbb{V}^*$:

$$\mathbb{A}(u)=\sum_{j=0}^{N}\mathbb{A}_j(u)=\sum_{j=0}^{N}\mathbb{A}_j(u_0)+\int\limits_0^t ds\,\left[\mathbb{F}(u)(s)-\mathbb{L}u(s)\right]. \qquad (3.34)$$

Ранее мы доказали, что

$$\mathbb{A}(u) = \sum_{j=0}^{N} \mathbb{A}_j(u) \in \mathbb{L}^{\infty}(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}^*) \subset \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}^*).$$

Кроме того, из (3.34) вытекает

$$\frac{d}{dt} \sum_{j=0}^{N} \mathbb{A}_j(u) \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}^*).$$

Значит, $\mathbb{A}(u) \in \mathbb{H}^1(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}^*)$. Наконец, точно так же, как на шаге 4 доказательства теоремы 1 гл. 4, можно доказать, что

$$\sum_{j=0}^{N} \mathbb{A}_j(u) \in \mathbb{C}_w^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}^*).$$

Теперь рассмотрим уравнение (3.2), которое перепишем в следующем виде:

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt\, \varphi(t) \left[\frac{d}{dt} \left\langle \sum_{j=0}^{N} \mathbb{A}_j(u_m), w \right\rangle - \langle \mathbb{F}(u_m), w \rangle + \langle \mathbb{L}u_m, w \rangle \right] = 0$$

$\forall\ \varphi(t) \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}), \forall\ w \in \mathbb{V}$. В силу результата леммы 1 имеем: $\mathbb{F}(u_m) \rightharpoonup \mathbb{F}(u)$ и $\mathbb{L}u_m \to \mathbb{L}u$ слабо в $\mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}^*)$. Кроме того,

$$\mathbb{A}(u_m) \rightharpoonup \mathbb{A}(u)$$

слабо в $\mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}^*)$. Значит,

$$\frac{d}{dt}\mathbb{A}(u_m) \to \frac{d}{dt}\mathbb{A}(u)$$

в смысле $\mathcal{D}'(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}^*)$. С другой стороны, имеет место поточечное равенство

$$\frac{d}{dt}\mathbb{A}(u_m) = \mathbb{F}(u_m) - \mathbb{L}u_m.$$

Значит,

$$\frac{d}{dt}\mathbb{A}(u_m) \to \psi$$

слабо в $\mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}^*)$ Тем самым

$$\frac{d}{dt}\mathbb{A}(u_m) \to \frac{d}{dt}\mathbb{A}(u)$$

слабо в $\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{V}^*)$. Переходом к пределу при $m\to+\infty$ в уравнении (3.2) получим, что $u(t)$ является решением задачи

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\varphi(t)\left[\frac{d}{dt}\left\langle\sum_{j=0}^{N}\mathbb{A}_j(u),w\right\rangle-\langle\mathbb{F}(u),w\rangle+\langle\mathbb{L}u,w\rangle\right]=0$$

$\forall\,\varphi(t)\in\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T}),\forall\,w\in\mathbb{V}$, которая эквивалентна задаче (3.1).

Пусть теперь u — произвольное решение задачи

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\varphi(t)\left[\left\langle\frac{d}{dt}\sum_{j=0}^{N}\mathbb{A}_j(u),w\right\rangle-\langle\mathbb{F}(u),w\rangle+\langle\mathbb{L}u,w\rangle\right]=0$$

$\forall\,\varphi(t)\in\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T}),\forall\,w\in\mathbb{V}$ класса

$$u\in\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{V}),\ \sum_{j=0}^{N}\mathbb{A}_j(u)\in\mathbb{H}^1(0,\mathrm{T};\mathbb{V}^*)\cap\mathbb{C}_w^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{V}^*),$$
$$\mathbb{L}u,\ \mathbb{F}(u)\in\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{V}^*).$$

Теперь возьмем $\varphi(t)=1\in\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T})$. В указанном классе гладкости при почти всех $t\in(0,\mathrm{T})$ получим уравнение

$$\sum_{j=0}^{N}\langle\mathbb{A}_j(u),w\rangle_j=\sum_{j=0}^{N}\langle\mathbb{A}_j(u_0),w\rangle_j+\int\limits_0^t ds\,\left[(\mathbb{F}(u),w)_0(s)-(\mathbb{L}u,w)_1\right]$$

$\forall\,w\in\mathbb{V}$. Значит,

$$\sum_{j=0}^{N}\mathbb{A}_j(u)=\sum_{j=0}^{N}\mathbb{A}_j(u_0)+\int\limits_0^t ds\,\left[\mathbb{F}(u)(s)-\mathbb{L}u(s)\right]\qquad(3.35)$$

в смысле $\mathbb{V}^*$ для почти всех $t\in(0,\mathrm{T})$. Пусть u_1 и u_2 — два слабых обобщенных решения задачи (3.1) указанного в условиях теоремы 1 класса гладкости с одной и той же начальной функцией $u_0\in\mathbb{V}$. Тогда для разности этих решений $w=u_1-u_2$ в силу (3.35) получим соотношение

$$\langle\mathbb{A}_0w,w\rangle_0+\sum_{j=1}^{N}\langle\mathbb{A}_j(u_1)-\mathbb{A}_j(u_2),w\rangle=$$
$$=\int\limits_0^t ds\,[(\mathbb{F}(u_1)(s)-\mathbb{F}(u_2)(s),w(t))_0-$$
$$-(\mathbb{L}u_1(s)-\mathbb{L}u_2(s),w(t))_1].$$

Отсюда в силу монотонности операторов $\mathbb{A}_j(u)$ и с учетом условия (A_0) 2 и вложений $\mathbb{V}_0 \subseteq \mathbb{W}_0$ и $\mathbb{V}_0 \subseteq \mathbb{W}_1$ приходим к неравенству

$$\| w \|_0^2 (t) \leqslant \mathrm{C} \mid w \mid_0 (t) \int_0^t ds \mid \mathbb{F}(u_1) - \mathbb{F}(u_2) \mid_0^* (s) +$$

$$+ \mathrm{C} \mid w \mid_1 (t) \int_0^t ds \mid \mathbb{L}u_1 - \mathbb{L}u_2 \mid_1^* (s) \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C} \| w \|_0 (t) \int_0^t ds \| w \|_0 (s), \ \mathrm{C} > 0,$$

из которого в силу теоремы Гронуолла–Белмана [Демидович] получаем, что $u_1 = u_2$ почти всюду на множестве $(0, \mathrm{T}) \times \Omega$.

Шаг 5. *Разрушение решений.*

Справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть*

$$\Phi \equiv \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0 + \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u), u\rangle_j, \ \ \alpha \equiv \frac{q+2}{\overline{p}}, \ \ \overline{p} \equiv \max_{j=\overline{1,N}} p_j.$$

Тогда

1) *при* $\alpha \in (0, 1)$ *имеет место неравенство*

$$\Phi \leqslant \Phi_0 \left[1 + (1-\alpha)\mathrm{C}_2 \Phi_0^{\alpha-1} t\right]^{1/(1-\alpha)};$$

2) *при* $\alpha = 1$ *имеет место неравенство*

$$\Phi \leqslant \Phi_0 \exp(\mathrm{C}_2 t);$$

3) *при* $\alpha > 1$ *и в случае выполнения условия*

$$(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > (\mathbb{L}u_0, u_0)_1 + \frac{q\sqrt{2\overline{p}}}{q+2-\overline{p}}\Phi_0,$$

$$(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > \frac{q+2}{2} (\mathbb{L}u_0, u_0)_1,$$

найдется такое $\mathrm{T}_0 \in [\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2]$, *что справедливо соотношение*

$$\lim_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \Phi(t) = +\infty,$$

где

$$\mathrm{T}_1 = \frac{2}{q} \Phi_0^{-q/2} \overline{\mathrm{B}}^{-1}, \ \ \mathrm{T}_2 = \Phi_0^{1-\alpha_1} \mathrm{A}_0^{-1}, \ \ \mathrm{C}_2 \equiv \mathrm{B}\mathrm{C}_{j^*}^{q+2} 2^{\alpha},$$

$$|v|_0 \leqslant \mathrm{C}_{j^*} \langle \mathbb{A}_{j^*} v, v\rangle_{j^*}^{1/p_{j^*}},$$

$$\Phi_0 \equiv \Phi(0), \quad \alpha_1 \equiv \frac{\overline{p}+q+2}{2\overline{p}},$$

$$\mathrm{A}_0^2 \equiv (\alpha_1-1)^2\Phi_0^{-2\alpha_1}\left[(\mathbb{F}(u_0),u_0)_0-(\mathbb{L}u_0,u_0)_1\right]^2-(\alpha_1-1)\beta\Phi_0^{2-2\alpha_1},$$

$$\beta \equiv \frac{q^2}{q+2-\overline{p}} \ \textit{в случае} \ q+2>\overline{p}\equiv\max_{j=\overline{1,N}}p_j, \ \ \overline{\mathrm{B}}\equiv \mathrm{BC}_1^{q+2}2^{(q+2)/2}.$$

Доказательство.

В силу условий (A) 2 справедливо неравенство Шварца [Морен] для производных Фреше $\mathbb{A}_{j,u}^{'}:\mathbb{V}_j\to\mathcal{L}(\mathbb{V}_j;\mathbb{V}_j^*)$ операторов $\mathbb{A}_j:\mathbb{V}_j\to\mathbb{V}_j^*$:

$$\left|\langle(\mathbb{A}_j(u_m))^{'},u_m\rangle_j\right|=\left|\langle\mathbb{A}_{j,u_m}^{'}(u_m)u_m^{'},u_m\rangle_j\right|\leqslant$$

$$\leqslant\langle\mathbb{A}_{j,u_m}^{'}(u_m)u_m^{'},u_m^{'}\rangle_j^{1/2}\langle\mathbb{A}_{j,u_m}^{'}(u_m)u_m,u_m\rangle_j^{1/2}=$$

$$=\langle(\mathbb{A}_j(u_m))^{'},u_m^{'}\rangle_j^{1/2}(p_j-1)^{1/2}\langle\mathbb{A}_j(u_m),u_m\rangle_j^{1/2}, \quad (3.36)$$

$$\left|\langle\mathbb{A}_0u_m^{'},u_m\rangle_0\right|\leqslant\langle\mathbb{A}_0u_m^{'},u_m^{'}\rangle_0^{1/2}\langle\mathbb{A}_0u_m,u_m\rangle_0^{1/2}. \quad (3.37)$$

Здесь мы воспользовались следующим равенством:

$$\mathbb{A}_{j,v}^{'}(v)v=(p_j-1)\mathbb{A}_j(v).$$

Приведем его вывод. Действительно, имеют место следующие равенства:

$$\mathbb{A}_j(\rho v)=\rho^{p_j-1}\mathbb{A}_j(v), \ \ \mathbb{A}_{j,\rho v}^{'}(\rho v)\rho=\rho^{p_j-1}\mathbb{A}_{j,v}^{'}(v),$$

$$\mathbb{A}_{j,\rho v}^{'}(\rho v)=\rho^{p_j-2}\mathbb{A}_{j,v}^{'}(v), \ \ j=\overline{0,N},$$

$$\int_0^1 d\rho\left\langle\frac{d}{d\rho}\mathbb{A}_j(\rho v),w\right\rangle_j=\left\langle\int_0^1 d\rho\,\mathbb{A}_{j,\rho v}^{'}(\rho v)v,w\right\rangle_j \ \ \forall \ \ w\in\mathbb{V}_j, \ \ j=\overline{0,N},$$

$$\langle\mathbb{A}_j(v)-(p_j-1)^{-1}\mathbb{A}_{j,v}^{'}(v)v,w\rangle_j=0 \ \ \forall \ \ w\in\mathbb{V}_j, \ \ j=\overline{0,N}.$$

Значит, имеет место равенство

$$(p_j-1)\mathbb{A}_j(v)=\mathbb{A}_{j,v}^{'}(v)v \ \ \forall \ \ v\in\mathbb{V}_j, \ j=\overline{0,N}.$$

Введем обозначение

$$\Phi_m\equiv\frac{1}{2}\langle\mathbb{A}_0u_m,u_m\rangle_0+\sum_{j=1}^{N}\frac{p_j-1}{p_j}\langle\mathbb{A}_j(u_m),u_m\rangle_j. \quad (3.38)$$

Из (3.36)–(3.38) вытекает

$$\left|\frac{d}{dt}\Phi_m\right|^2 \leqslant \left|\left|\langle \mathbb{A}_0 u_m', u_m\rangle_0\right| + \sum_{j=1}^N \left|\langle (\mathbb{A}_j(u_m))', u_m\rangle_j\right|\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\langle \mathbb{A}_0 u_m', u_m'\rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle (\mathbb{A}_j(u_m))', u_m'\rangle_j\right) \times$$

$$\times \left(\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle_0 + \sum_{j=1}^N (p_j - 1)\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j\right) \leqslant$$

$$\leqslant \overline{p}\left(\langle \mathbb{A}_0 u_m', u_m'\rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle (\mathbb{A}_j(u_m))', u_m'\rangle_j\right) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\overline{p}}\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{\overline{p}}\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j\right) \leqslant$$

$$\leqslant \overline{p}\left(\langle \mathbb{A}_0 u_m', u_m'\rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle (\mathbb{A}_j(u_m))', u_m'\rangle_j\right) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j\right), \quad (3.39)$$

поскольку $\overline{p} \geqslant p_j > 2$, где $\overline{p} = \max\limits_{j=1,N} p_j > 2$. В силу (3.6) и (3.10) имеют место следующие энергетические равенства:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j\right] +$$

$$+ (\mathbb{L}u_m, u_m)_1 = (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0, \quad (3.40)$$

$$\langle \mathbb{A}_0 u_m', u_m'\rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle (\mathbb{A}_j(u_m))' u_m'\rangle_j =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mathbb{L}u_m, u_m)_1 + \frac{1}{q+2}\frac{d}{dt}(\mathbb{F}(u_m), u_m)_0. \quad (3.41)$$

Пусть $q + 2 > \overline{p}$ и выполнено следующее условие:

$$(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > \frac{q+2}{2}(\mathbb{L}u_0, u_0)_1,$$

тогда найдется такая подпоследовательность последовательности $\{u_{m0}\}$, что

$$(\mathbb{F}(u_{m0}), u_{m0})_0 > \frac{q+2}{2}\,(\mathbb{L}u_{m0}, u_{m0})_1\,.$$

Отсюда и из (3.41) следует, что

$$(\mathbb{F}(u_m), u_m)_0 > \frac{q+2}{2}\,(\mathbb{L}u_m, u_m)_1\,,\quad (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0 > (\mathbb{L}u_m, u_m)_1\,.$$

В силу (3.40) получим: $\Phi_m^{'}(t) \geqslant 0$.

Справедливо следующее утверждение:

Утверждение 2. *Пусть выполнены условия* (L) *и* (A_0) *и, кроме того,* $\mathbb{V}_0 \subset \mathbb{W}_1$, *тогда справедливо следующее неравенство*:

$$(\mathbb{L}u, u)_1 \leqslant \mathrm{C}\langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0 \ \ \forall\, u \in \mathbb{V}_0$$

при некотором $\mathrm{C} > 0$.

Доказательство.

Действительно, пусть $u \in \mathbb{V}_0 \subset \mathbb{W}_1$, тогда справедлива следующая цепочка неравенств:

$$(\mathbb{L}u, u)_1 \leqslant \mathrm{D}_1 \mid u \mid_1^2 \leqslant \mathrm{D}_1\mathrm{C}_1 \parallel u \parallel_0^2 \leqslant \mathrm{D}_1\mathrm{C}_1\mathrm{m}_0^{-1}\langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0 = \mathrm{C}\langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0.$$

Утверждение доказано.

Без ограничения общности можно считать постоянную C в утверждении 2 равной 1. Действительно, введем новые операторы

$$\widetilde{\mathbb{L}} \equiv \mathrm{C}^{-1}\mathbb{L},\ \ \widetilde{\mathbb{F}} \equiv \mathrm{C}^{-1}\mathbb{F}$$

и, кроме того, сделаем замену $\widetilde{t} \equiv \mathrm{C}t$. Тогда для введенных операторов будет иметь место утверждение 2 с постоянной $\mathrm{C} = 1$.

Заметим, что в силу утверждения 2 и неравенств Коши и Шварца [Морен] справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbb{A}_0 u_m^{'}, u_m^{'}\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N}\langle (\mathbb{A}_j(u_m))^{'}\, u_m^{'}\rangle_j &\leqslant -\left(\mathbb{L}u_m, u_m^{'}\right)_1 + \\
+ \frac{1}{q+2}\frac{d}{dt}\,(\mathbb{F}(u_m), u_m)_0 &= \frac{1}{q+2}\Phi_m^{''} - \frac{q}{q+2}\left(\mathbb{L}u_m, u_m^{'}\right)_1 \leqslant \\
\leqslant \frac{1}{q+2}\Phi_m^{''} + \frac{q}{q+2}\frac{\varepsilon}{2}(\mathbb{L}u_m^{'}, u_m^{'})_1 + \frac{q}{q+2}\frac{1}{2\varepsilon}(\mathbb{L}u_m, u_m)_1 &\leqslant \\
\leqslant \frac{1}{q+2}\Phi_m^{''} + \frac{q}{q+2}\frac{\varepsilon}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_m^{'}, u_m^{'}\rangle_0 + \frac{q}{q+2}\frac{1}{2\varepsilon}\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle_0 &\leqslant \\
\leqslant \frac{1}{q+2}\Phi_m^{''} + \frac{q}{q+2}\frac{1}{\varepsilon}\Phi_m + \frac{q}{2(q+2)}\varepsilon\langle \mathbb{A}_0 u_m^{'}, u_m^{'}\rangle_0 + & \\
+ \frac{q}{2(q+2)}\varepsilon\sum_{j=1}^{N}\langle (\mathbb{A}_j(u_m))^{'}\, u_m^{'}\rangle_j. &
\end{aligned}$$

Отсюда приходим к выводу, что

$$\left(1-\varepsilon\frac{q}{2(q+2)}\right)\left[\langle\mathbb{A}_0u_m^{'},u_m^{'}\rangle_0+\sum_{j=1}^{N}\langle(\mathbb{A}_j(u_m))^{'}u_m^{'}\rangle_j\right]\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{q+2}\Phi_m^{''}+\frac{q}{q+2}\frac{1}{\varepsilon}\Phi_m\ \ \forall\,\varepsilon\in(0,2(q+2)/q).$$

Из (3.39), (3.41) вытекает обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка (см. [Калантаров, Ладыженская]):

$$\Phi_m^{''}\Phi_m-\alpha_1(\varepsilon)\left(\Phi_m^{'}\right)^2+\beta(\varepsilon)\Phi_m^2\geqslant 0, \tag{3.42}$$

$$\alpha_1(\varepsilon)\equiv\frac{q+2}{\overline{p}}\left(1-\varepsilon\frac{q}{2(q+2)}\right),\quad \beta(\varepsilon)=\frac{q}{\varepsilon},\quad \overline{p}=\max_{j=1,N}p_j>2,$$

из которого следует

$$\frac{1}{1-\alpha_1(\varepsilon)}\left(\Phi_m^{1-\alpha_1(\varepsilon)}\right)^{''}+\beta(\varepsilon)\Phi_m^{1-\alpha_1(\varepsilon)}\geqslant 0.$$

Введем обозначение

$$\mathrm{Z}_m\equiv\Phi_m^{1-\alpha_1(\varepsilon)}.$$

Отметим следующие свойства функции $\mathrm{Z}_m(t)$:

$$\mathrm{Z}_m\geqslant 0,\ \ \mathrm{Z}_m^{'}\equiv(1-\alpha_1(\varepsilon))\Phi_m^{-\alpha_1(\varepsilon)}\Phi_m^{'}\leqslant 0$$

при условии

$$\varepsilon\in\left(0,2\frac{q+2-\overline{p}}{q}\right),\ \ q+2>\overline{p},$$

поскольку, как мы ранее доказали, что $\Phi_m^{'}(t)\geqslant 0$. Действительно, в силу (3.40)

$$\frac{d}{dt}\Phi_m=(\mathbb{F}(u_m),u_m)_0-(\mathbb{L}u_m,u_m)_1,$$

и, кроме того, в силу (3.10)

$$(\mathbb{F}(u_m),u_m)_0-(\mathbb{L}u_m,u_m)_1>0.$$

Справедливы следующие неравенства:

$$\mathrm{Z}_m^{''}\leqslant\gamma(\varepsilon)\mathrm{Z}_m,\ \ \gamma\equiv(\alpha_1(\varepsilon)-1)\beta(\varepsilon),\ \ \mathrm{Z}_m^{''}\mathrm{Z}_m^{'}\geqslant\gamma(\varepsilon)\mathrm{Z}_m\mathrm{Z}_m^{'},$$
$$\left(\left(\mathrm{Z}_m^{'}\right)^2\right)^{'}\geqslant\gamma(\varepsilon)\left(\mathrm{Z}_m^2\right)^{'},\ \ \left(\mathrm{Z}_m^{'}\right)^2\geqslant\mathrm{B}_{m0}+\gamma(\varepsilon)\mathrm{Z}_m^2,$$

$$\mathrm{B}_{m0}\equiv(\alpha_1(\varepsilon)-1)^2\Phi_{m0}^{-2\alpha_1(\varepsilon)}\left[(\mathbb{F}(u_{m0},u_{m0}))_0-(\mathbb{L}u_{m0},u_{m0})_1\right]^2-$$
$$-(\alpha_1(\varepsilon)-1)\beta(\varepsilon)\Phi_{m0}^{2-2\alpha_1(\varepsilon)}.$$

Для дальнейшего изложения нам необходимо изучить условие $\mathrm{B}_{\mathrm{m0}} > 0$ и выбрать $\varepsilon \in (0, 2(q+2-\overline{p})/q)$, $q+2>\overline{p}$, таким образом, чтобы получить оптимальное условие на величину начальной функции u_0. С этой целью перепишем указанное условие в виде

$$\left(\frac{\alpha_1(\varepsilon)-1}{\beta(\varepsilon)}\right)^{1/2}\left[(\mathbb{F}(u_{m0}),u_{m0})_0-(\mathbb{L}u_{m0},u_{m0})_1\right]>\Phi_{m0}.$$

Рассмотрим теперь функцию

$$f(\varepsilon)\equiv\frac{\alpha_1(\varepsilon)-1}{\beta(\varepsilon)}\ \text{ при }\ \varepsilon\in\left(0,2\frac{q+2-\overline{p}}{q}\right),\ \ q+2>\overline{p}.$$

Максимум этой функции достигается в точке

$$\varepsilon_0\equiv\frac{q+2-\overline{p}}{q},\ \ f(\varepsilon_0)=\frac{(q+2-\overline{p})^2}{q^2 2\overline{p}}.$$

Таким образом, условие на начальную функцию u_{m0} примет вид

$$(\mathbb{F}(u_{m0}),u_{m0})_0>(\mathbb{L}u_{m0},u_{m0})_1+\frac{q\sqrt{2\overline{p}}}{q+2-\overline{p}}\Phi_{m0}.$$

Это условие заведомо будет выполнено для некоторой подпоследовательности последовательности $\{u_{m0}\}$ при условии

$$(\mathbb{F}(u_0),u_0)_0>(\mathbb{L}u_0,u_0)_1+\frac{q\sqrt{2\overline{p}}}{q+2-\overline{p}}\Phi_0.$$

Итак, рассмотрим следующее дифференциальное неравенство, полученное нами из (3.42), в котором положим $\varepsilon=\varepsilon_0\equiv(q+2-\overline{p})/q)$,

$$\left(\mathrm{Z}_m^{'}\right)^2\geqslant\mathrm{A}_{m0}^2+\gamma\left(\mathrm{Z}_m\right)^2,\tag{3.43}$$

где

$$\mathrm{A}_{m0}^2\equiv(\alpha_1-1)^2\Phi_{m0}^{-2\alpha_1}\left[(\mathbb{F}(u_{m0}),u_{m0})_0-(\mathbb{L}u_{m0},u_{m0})_1\right]^2-$$
$$-(\alpha_1-1)\beta\Phi_{m0}^{2-2\alpha_1},$$
$$\gamma\equiv(\alpha_1-1)\beta,\ \ \alpha_1=\frac{q+2+\overline{p}}{2\overline{p}},\ \ \beta=\frac{q^2}{q+2-\overline{p}}.$$

Из (3.43), с учетом того что $\mathrm{Z}_m^{'}\leqslant 0$, следует неравенство

$$\mathrm{Z}_m(t)\leqslant\mathrm{Z}_m(0)-\mathrm{A}_{m0}t.\tag{3.44}$$

Из (3.44) вытекает оценка снизу для функции $\Phi_m(t)$:

$$\Phi_m(t)\geqslant\frac{\Psi_{m0}}{\left[\mathrm{T}_{m2}-t\right]^{1/(\alpha_1-1)}},\ \Psi_{m0}=\mathrm{A}_{m0}^{1/(-\alpha_1+1)},\ \mathrm{T}_{m2}=\Phi_{m0}^{1-\alpha_1}\mathrm{A}_{m0}^{-1}.\tag{3.45}$$

Докажем теперь, что $\Phi_m(t) \to \Phi(t)$ для почти всех $t \in (0, \mathrm{T})$, где

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u), u\rangle_j.$$

Во-первых, в силу того что $u_m \to u$ сильно в $\mathbb{L}^{p_j}(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_j)$, имеем

$$\int\limits_0^t ds\, \Phi_m(s) \to \int\limits_0^t ds \Phi(s).$$

С другой стороны, из (3.40) получим

$$\Phi_m = \Phi_{m0} + \int\limits_0^t ds\, [(\mathbb{F}(u_m), u_m)_0(s) - (\mathbb{L}u_m, u_m)_1(s)].$$

По условию $\Phi_{m0} \to \Phi_0$, $u_m(t) \to u(t)$ сильно в $\mathbb{W}_0$ и в $\mathbb{W}_1$ для почти всех $t \in (0, \mathrm{T})$. Поэтому в силу ограниченной липшиц-непрерывности оператора $\mathbb{F}(u) : \mathbb{W}_0 \to \mathbb{W}_0^*$ и липшиц-непрерывности $\mathbb{L} : \mathbb{W}_1 \to \mathbb{W}_1^*$ приходим к выводу, что $\mathbb{F}(u_m) \to \mathbb{F}(u)$ сильно в $\mathbb{W}_0^*$ и $\mathbb{L}u_m \to \mathbb{L}u$ в $\mathbb{W}_1^*$ для почти всех $t \in (0, \mathrm{T})$. С другой стороны, понятно, что $\left|(\mathbb{F}(u_m), u_m)_0\right| \leqslant \mathrm{B} \mid u_m \mid_0^{q+2} \leqslant \mathrm{C} \parallel u_m \parallel_{\mathbb{V}}^{q+2} \leqslant \mathrm{C}$, где C не зависит от $m \in \mathbb{N}$ и от $t \in (0, \mathrm{T})$, а также $(\mathbb{L}u_m, u_m)_1 \leqslant \mathrm{D}_1 \mid u_m \mid_1^2 \leqslant \mathrm{C} \parallel u_m \parallel_{\mathbb{V}}^2 \leqslant \mathrm{C}$, где C не зависит от $m \in \mathbb{N}$ и от $t \in (0, \mathrm{T})$. Поэтому по теореме Лебега [Дьяченко] получим, что для почти всех $t \in (0, \mathrm{T})$

$$\Phi_m \to \eta.$$

И снова по теореме Лебега получим

$$\int\limits_0^t ds\, \Phi_m \to \int\limits_0^t ds\, \eta.$$

Значит,

$$\int\limits_0^t ds\ [\Phi(s) - \eta(s)] = 0 \ \ \forall\, t \in (0, \mathrm{T}).$$

Отсюда сразу же получаем, что

$$\Phi_m(t) \to \Phi(t) \tag{3.46}$$

при почти всех $t \in (0, \mathrm{T})$.

С учетом того что $u_{m0} \to u_0$ сильно в $\mathbb{V}$, имеем при $m \to +\infty$

$$\Phi_{m0} \to \Phi_0 \equiv \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0\rangle_j,$$

$$\Psi_{m0} \to \Psi_0 \equiv \mathrm{A}_0^{1/(1-\alpha_1)}.$$

Из (3.46) переходом к пределу при $m \to +\infty$ в неравенствах (3.20), (3.21) вытекает, что

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 \exp\{\mathrm{C}_2 t\}, \qquad \alpha = \frac{q+2}{\overline{p}} = 1, \tag{3.47}$$

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 \left[1 + (1-\alpha)\mathrm{C}_2 \Phi_0^{\alpha-1} t\right]^{1/(1-\alpha)}, \qquad \alpha < 1, \tag{3.48}$$

где

$$\alpha \equiv \frac{q+2}{\overline{p}}, \mathrm{C}_2 \equiv \mathrm{BC}_{j^*}^{q+2} \left(\frac{\overline{p}}{\overline{p}-1}\right)^{(q+2)/\overline{p}},$$
$$|\, v \,|_0 \leqslant \mathrm{C}_{j^*} \langle \mathbb{A}_{j^*}(v), v \rangle_{j^*}^{1/p_{j^*}}, \overline{p} = \max_{j=1,N} p_j.$$

Таким образом, из (3.47), (3.48) вытекают первые два утверждения леммы.

Рассмотрим теперь неравенства (3.15) и (3.45). Отметим, что при $m \to +\infty$

$$\Psi_{m0} \to \Psi_0 \equiv \mathrm{A}_0^{1/(1-\alpha_1)}, \ \ \mathrm{T}_{2m} \to \mathrm{T}_2 \equiv \Phi_0^{1-\alpha_1} \mathrm{A}_0^{-1},$$
$$\mathrm{T}_{1m} \to \mathrm{T}_1 = (q/2)^{-1} \Phi_0^{-q/2} \overline{\mathrm{B}}^{-1},$$
$$\overline{\mathrm{B}} \equiv \mathrm{BC}_1^{q+2} 2^{(q+2)/2},$$

где C_1 — константа наилучшего вложения $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$, B — константа из условия (F) 4.

Рассмотрим сначала неравенство (3.45).

Без ограничения общности переходом к подпоследовательности мы можем считать последовательность T_{2m} отделенной от нуля $\mathrm{T}_{2m} > 0$ равномерно по m, поскольку $\mathrm{T}_2 > 0$. В силу сходимости последовательности $\mathrm{T}_{2m} \to \mathrm{T}_2$ при $m \to +\infty$ мы можем выбрать монотонно сходящуюся подпоследовательность, которую мы снова обозначим через T_{2m}. Соотвествующие подпоследовательности последовательностей $\{u_{0m}\}$ и $\{u_m\}$ мы снова будем обозначать $\{u_{0m}\}$ и $\{u_m\}$. Пусть последовательность $\mathrm{T}_{2m} \uparrow \mathrm{T}_2$, тогда неравенство (3.45) имеет место равномерно по $t \in [0, \mathrm{T}_{2\overline{m}})$, $m \geqslant \overline{m}$, для некоторого фиксированного $\overline{m} \in \mathbb{N}$. Переходом к пределу при $m \to +\infty$ для таких t в неравенстве (3.45) получим

$$\Phi \geqslant \frac{\Psi_0}{[\mathrm{T}_2 - t]^{1/(\alpha-1)}}, \tag{3.49}$$

при $t \in [0, \mathrm{T}_{2\overline{m}})$. Отсюда в силу произвольности $\overline{m} \in \mathbb{N}$ сразу же получаем, что (3.49) справедливо для всех $t \in [0, \mathrm{T}_2)$ и время разрушения решения задачи (3.1) удовлетворяет оценке сверху: $\mathrm{T}_0 \leqslant \mathrm{T}_2$.

Пусть теперь последовательность $\mathrm{T}_{2m} \downarrow \mathrm{T}_2$. Сделаем предположение о том, что $\mathrm{T}_0 > \mathrm{T}_2$, и пусть, кроме того,

$$M \equiv \sup_{t\in[0,T_2]} \Phi(t) < +\infty.$$

Тогда (3.45) имеет место равномерно по $t \in [0, \mathrm{T}_2)$. Переходом к пределу при $m \to +\infty$ в неравенстве (3.16) получим в силу сделанного предположения относительно T_0 следующее неравенство:

$$\Phi \geqslant \frac{\Psi_0}{[\mathrm{T}_2 - t]^{1/(\alpha-1)}} \leqslant M < +\infty \ \text{ при } \ t \in [0, \mathrm{T}_2).$$

Однако из вида полученного неравенства следует, что наше предположение не выполняется. Отсюда сразу же следует, что $\mathrm{T}_0 \leqslant \mathrm{T}_2$. Аналогичным образом из неравенства (3.15) вытекает, что

$$\Phi(t) \leqslant \frac{\Phi_0}{\left[1 - \frac{q}{2}\Phi_0^{q/2}\overline{\mathrm{B}}t\right]^{2/q}} \quad \forall\, t \in (0, \mathrm{T}_1), \ \ \mathrm{T}_0 \geqslant \mathrm{T}_1.$$

Лемма доказана.

Теорема доказана.

§ 4. Однозначная разрешимость задачи (1.1) в сильном обобщенном смысле и разрушение ее решения

Определение 2. Сильным обобщенным решением задачи (1.1) назовем решение класса $\mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}_0)$, удовлетворяющее условиям

$$\langle (\mathbb{A}_0 u)', v\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \langle (\mathbb{A}_j(u))', v\rangle_j + (\mathbb{L}u, v)_1 = (\mathbb{F}(u), v)_0,$$
$$u(0) = u_0 \in \mathbb{V}_0 \quad \forall \ v \in \mathbb{V}_0,$$

где производная по времени понимается в классическом смысле.

Потребуем, чтобы производная Фреше $\mathbb{A}'_{j,u}(u) : \mathbb{V}_j \to \mathcal{L}(\mathbb{V}_j; \mathbb{V}_j^*)$ оператора $\mathbb{A}_j$ была сильно непрерывной по $u \in \mathbb{V}_j$ и $\mathbb{V}_0 \subseteq \mathbb{V}_j$, $j = \overline{1, N}$. В рассматриваемом классе имеют место включения $\mathbb{A}_0 u \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}_0^*)$, $\mathbb{A}_j(u) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}_j^*)$, $\mathbb{L}u \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{W}_1^*)$, $\mathbb{F}(u) \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{W}_0^*)$, и, следовательно, $\mathbb{A}_0 u$ и $\mathbb{A}_j(u)$ принадлежат классу $\mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}_0^*)$, с другой стороны, $\mathbb{L}u$ и $\mathbb{F}(u)$ принадлежат классу $\mathbb{C}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}_0^*)$. Тем самым задача в силу условий (V) и условий нижеследующей теоремы 2 эквивалентна задаче

$$\langle (\mathbb{A}_0 u)', v\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \langle (\mathbb{A}_j(u))', v\rangle_0 + \langle \mathbb{L}u, v\rangle_0 = \langle \mathbb{F}(u), v\rangle_0,$$

$$u(0) = u_0 \in \mathbb{V}_0 \ \ \forall \ \ v \in \mathbb{V}_0,$$

где производная по времени понимается в классическом смысле, а символ $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ — скобка двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{V}_0$ и $\mathbb{V}_0^*$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (A), (A_0), (F), (L). *Предположим, что* $\mathbb{V}_0 \subseteq \mathbb{V}_j$, $j = \overline{1,N}$, $\mathbb{V}_0 \subseteq \mathbb{W}_0$, $\mathbb{V}_0 \subseteq \mathbb{W}_1$. *Кроме того, предположим, что либо* $2 < \overline{p} < q+2$, *либо* $\overline{p} \geqslant q+2$ *и в последнем случае* $\mathbb{V}_{j^*} \subseteq \mathbb{W}_0$, *где*

$$\overline{p} = \max_{j \in \overline{1,N}} p_j, \ \ j^* \in \overline{1,N}, \ \ p_{j^*} = \overline{p}.$$

Пусть производные Фреше операторов $\mathbb{A}_j : \mathbb{V}_j \to \mathbb{V}_j^*$ *являются сильно непрерывными и ограниченными, т. е.*

$$\mathbb{A}_{j,u}^{'} \in \mathbb{BC}(\mathbb{V}_j; \mathcal{L}\left(\mathbb{V}_j, \mathbb{V}_j^*\right)),$$

и, кроме того, пусть они являются монотонными:

$$\langle \mathbb{A}_{j,u}^{'}(u)u_1 - \mathbb{A}_{j,u}^{'}(u)u_2, u_1 - u_2 \rangle_j \geqslant 0 \ \ \forall \ \ u, u_1, u_2 \in \mathbb{V}_j, \ \ j = \overline{1,N}.$$

Тогда для любого $u_0 \in \mathbb{V}_0$ *найдется такое максимальное* $\mathrm{T}_0 \equiv \mathrm{T}_{u_0} > 0$, *что задача Коши* (1.1) *имеет единственное решение в классе*

$$u(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{V}_0).$$

Причем справедливы следующие свойства времени существования решения $\mathrm{T}_0 > 0$:

1) *если* $\alpha \in (0,1)$, *то* $\mathrm{T}_0 = +\infty$ *и*

$$\Phi(t) \leqslant \left[\Phi_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\mathrm{A}t\right]^{1/(1-\alpha)};$$

2) *если* $\alpha = 1$, *то* $\mathrm{T}_0 = +\infty$ *и*

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 \exp\{\mathrm{A}t\};$$

3) *если* $\alpha > 1$ *и выполнены условия*

$$(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > (\mathbb{L}u_0, u_0)_1 + \frac{q\sqrt{2\overline{p}}}{q+2-\overline{p}}\Phi_0, \ \ (\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > \frac{q+2}{2}(\mathbb{L}u_0, u_0)_1,$$

то найдется такое $\mathrm{T}_0 \in [\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2]$, *что*

$$\lim_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \Phi(t) = +\infty,$$

где

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j, \ \ \Phi_0 \equiv \Phi(0),$$

$$\mathrm{T}_1 \equiv \frac{2}{q}\Phi_0^{-q/2}\overline{\mathrm{B}}^{-1}, \quad \mathrm{T}_2 \equiv \Phi_0^{1-\alpha_1}\mathrm{A}_0^{-1},$$

$$\mathrm{A} \equiv \mathrm{C}_{j^*}^{q+2}\mathrm{M}\left(\frac{\overline{p}}{\overline{p}-1}\right)^{(q+2)/\overline{p}},$$

$$\mathrm{A}_0^2 \equiv (\alpha_1-1)^2\Phi_0^{-2\alpha_1}\left[(\mathbb{F}(u_0),u_0)_0 - (\mathbb{L}u_0,u_0)_1\right]^2 - (\alpha_1-1)\beta\Phi_0^{2-2\alpha_1},$$

$$\overline{\mathrm{B}} = \mathrm{M}\mathrm{C}_1^{q+2}2^{(q+2)/2},$$

$$\alpha_1 = \frac{q+2+\overline{p}}{2\overline{p}}, \quad \gamma = (\alpha_1-1)\beta, \quad \beta = \frac{q^2}{q+2-\overline{p}}.$$

Доказательство.

Шаг 1. *Локальная разрешимость.*

Справедлива следующая лемма.

Лемма 4. *Для любого* $u_0 \in \mathbb{V}_0$ *найдется такое максимальное* $\mathrm{T}_0 > 0$, *что существует единственное решение класса* $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{V}_0)$ *для любого* $\mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}_0)$ *задачи* (1.1).

Доказательство.

Рассмотрим задачу (1.1). Заметим, что для оператора $\mathbb{A}(u) \equiv \mathbb{A}_0 u + \sum\limits_{j=1}^{N}\mathbb{A}_j(u) : \mathbb{V}_0 \to \mathbb{V}_0^*$ справедливо равенство

$$\langle \mathbb{A}(u_1) - \mathbb{A}(u_2), u_1 - u_2\rangle_0 = \langle \mathbb{A}_0u_1 - \mathbb{A}_0u_2, u_1-u_2\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N}\langle \mathbb{A}_j(u_1) - \mathbb{A}_j(u_2), u_1-u_2\rangle_j \geqslant$$

$$\geqslant \langle \mathbb{A}_0u_1 - \mathbb{A}_0u_2, u_1-u_2\rangle_0 = \| u_1-u_2\|_0^2.$$

Стало быть, для оператора $\mathbb{A}$ существует липшиц-непрерывный обратный $\mathbb{A}^{-1} : \mathbb{V}_0^* \to \mathbb{V}_0$ с постоянной Липшица, равной 1. С учетом этого сделаем замену $v = \mathbb{A}(u)$ в уравнении (1.1), тогда уравнение примет следующий эквивалентный вид:

$$\frac{dv}{dt} = \mathbb{F}(\mathbb{A}^{-1}(v)) - \mathbb{L}\mathbb{A}^{-1}(v), \quad v(0) = v_0, \tag{4.1}$$

где $v_0 = \mathbb{A}(u_0)$. Задача (4.1) эквивалентна следующему интегральному уравнению:

$$v(t) = v_0 + \int_0^t ds\,\left[\mathbb{F}(\mathbb{A}^{-1}(v)) - \mathbb{L}\mathbb{A}^{-1}(v)\right](s). \tag{4.2}$$

Воспользуемся методом сжимающих отображений для доказательства локальной разрешимости уравнения (4.2) в классе $v \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{V}_0^*)$.

С этой целью введем замкнутое ограниченное выпуклое подмножество банахова пространства $\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0^*)$:

$$\mathbb{B}_\mathrm{R} = \{v \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0^*) :\| v \|_\mathrm{T} \leqslant \mathrm{R}\},$$

где

$$\| v \|_\mathrm{T}^* = \operatorname*{ess.sup}_{t\in(0,\mathrm{T})} \| v \|_0^* .$$

Докажем, что оператор

$$\mathbb{H}(u) \equiv \int_0^t ds \, \left[\mathbb{F}(\mathbb{A}^{-1}(v)) - \mathbb{L}\mathbb{A}^{-1}(v)\right](s)$$

действует из $\mathbb{B}_\mathrm{R}$ в $\mathbb{B}_\mathrm{R}$ и является сжимающим оператором. Нетрудно доказать, что оператор $\mathbb{H}(v)$ действует из $\mathbb{B}_\mathrm{R}$ в $\mathbb{B}_\mathrm{R}$ при достаточно большом $\mathrm{R} > 0$ и при достаточно малом $\mathrm{T} > 0$. Поэтому исследуем оператор $\mathbb{H}(v) : \mathbb{B}_\mathrm{R} \to \mathbb{B}_\mathrm{R}$ на сжимаемость. Действительно, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\| \mathbb{H}(v_1) - \mathbb{H}(v_2) \|_\mathrm{T}^* \leqslant \mathrm{T}\mu_1(\overline{\mathrm{R}}) \| \mathbb{A}^{-1}(v_1) - \mathbb{A}^{-1}(v_2) \|_\mathrm{T} + \\ + \mathrm{TC} \| \mathbb{A}^{-1}(v_1) - \mathbb{A}^{-1}(v_2) \|_\mathrm{T}, \quad (4.3)$$

где

$$\| \cdot \|_\mathrm{T} \equiv \operatorname*{ess.sup}_{t\in(0,\mathrm{T})} \| \cdot \|_0,$$
$$\overline{\mathrm{R}} = \max\{\| \mathbb{A}^{-1}(v_1) \|_\mathrm{T}, \| \mathbb{A}^{-1}(v_2) \|_\mathrm{T}\}.$$

Из (4.3) в силу свойств оператора $\mathbb{A}^{-1}$ вытекает следующая цепочка неравенств:

$$\| \mathbb{H}(v_1) - \mathbb{H}(v_2) \|_\mathrm{T}^* \leqslant \mathrm{TC}\,[1 + \mu_1(\mathrm{R})] \| v_1 - v_2 \|_\mathrm{T}^* . \quad (4.4)$$

При условии $\mathrm{T} \leqslant 1/2[1 + \mu_1(\mathrm{R})]^{-1}\mathrm{C}^{-1}$ из неравенства (4.4) вытекает сжимаемость оператора $\mathbb{H}(v)$ на множестве $\mathbb{B}_\mathrm{R}$. Значит, существует единственное решение уравнения (4.2) класса $v \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0^*)$. Использоваанием стандартного алгоритма продолжения решений интегральных уравнений во времени приходим к выводу, что найдется такое максимальное $\mathrm{T}_0 > 0$ и существует единственное решение уравнения (4.2) класса $v \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T}_0;\mathbb{V}_0^*)$, причем либо $\mathrm{T}_0 = +\infty$, либо $\mathrm{T}_0 < +\infty$ и в последнем случае имеет место предельное равенство

$$\limsup_{t\to\mathrm{T}_0} \| v \|_0^* = +\infty.$$

Наконец, из уравнения (4.2) в силу сглаживающих свойств оператора $\mathbb{H}(v)$ получим, что $v \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{V}_0^*)$.

Теперь заметим, что имеет место равенство

$$\mathbb{A}(u) \equiv \mathbb{A}_0 u + \sum_{j=1}^{N} \mathbb{A}_j(u) = v(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{V}_0^*). \tag{4.5}$$

Уравнение (4.5) в классе $u \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{V}_0)$ эквивалентно следующему уравнению:

$$u(t) = \mathbb{A}^{-1}(v).$$

Из последнего уравнения следует, что $u(t) \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{V}_0)$. Действительно,

$$\| u(t) - u(t_0) \|_0 \leqslant \| \mathbb{A}^{-1}(v)(t) - \mathbb{A}^{-1}(v)(t_0) \|_0 \leqslant \| v(t) - v(t_0) \|_0^* \to +0$$

при $t \to t_0$. Значит, существует единственное решение уравнения (4.5) класса $u(t) \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{V}_0)$. Докажем теперь, что на самом деле это решение принадлежит классу $u \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{V}_0)$.

Рассмотрим сначала производную Фреше оператора $\mathbb{A}$:

$$\mathbb{A}_u^{'}(u) = \mathbb{A}_0 + \sum_{j=1}^{N} \mathbb{A}_{j,u}^{'}(u). \tag{4.6}$$

В силу условий теоремы и (4.6) имеем

$$\langle \mathbb{A}_u^{'}(u)u_1 - \mathbb{A}_u^{'}(u)u_2, u_1 - u_2 \rangle \geqslant \| u_1 - u_2 \|_0^2$$

для любых $u, u_1, u_2 \in \mathbb{V}_0$. Значит, при любом фиксированном $u \in \in \mathbb{V}_0$ существует липшиц-непрерывный обратный оператор $[\mathbb{A}_u^{'}(u)]^{-1} \in \in \mathcal{L}(\mathbb{V}_0^*; \mathbb{V}_0)$. Теперь рассмотрим следующее уравнение:

$$\mathbb{A}_0 u + \sum_{j=1}^{N} \mathbb{A}_j(u) = v(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{V}_0^*). \tag{4.7}$$

Для дальнейшего изложения нам потребуется доказать, что оператор

$$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{I} + \widehat{\mathbb{B}}, \quad \widehat{\mathbb{B}} = \sum_{j=1}^{N} \mathbb{A}_0^{-1} \mathbb{A}_{j,u}^{'}(u)$$

имеет ограниченный обратный оператор, где $\mathbb{A}_{j,u}^{'}(u)$ — производная Фреше на фиксированном элементе $u \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{V}_0)$ оператора $\mathbb{A}_j$. Действительно, рассмотрим уравнение

$$\left[\mathbb{I} + \widehat{\mathbb{B}}\right] w = 0. \tag{4.8}$$

Докажем, что это уравнение имеет только тривиальное решение. С этой целью подействуем оператором $\mathbb{A}_0$ на обе части этого уравнения, тогда получим

$$\mathbb{A}_u^{'} w = \mathbb{A}_0 w + \sum_{j=1}^{N} \mathbb{A}_{j,u}(u) w = 0 \ \ \forall\, u \in \mathbb{V}_0.$$

Но мы ранее доказали, что для оператора $\mathbb{A}_u^{'}(u)$ определен липшиц-непрерывный обратный оператор $[\mathbb{A}_u^{'}(u)]^{-1}$. Теперь подействуем этим оператором на обе части равенства (4.8). Все операции были эквивалентными, и поэтому приходим к выводу, что $w = 0$ в классе $w \in \mathbb{V}_0$.

В классе $u \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{V}_0)$ уравнение (4.7) эквивалентно следующей задаче:

$$\left[\mathbb{A}_0 + \sum_{j=1}^{N} \mathbb{A}_{j,u}^{'}(u)\right] u^{'} = v^{'} \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{V}_0^*), \ \ u = \mathbb{A}^{-1} v.$$

Подействуем оператором $\mathbb{A}_0^{-1}$ на последнее уравнение и получим

$$\left[\mathbb{I} + \widehat{\mathbb{B}}\right] u^{'} = \mathbb{A}_0^{-1} v^{'}. \tag{4.9}$$

Введем следующий оператор:

$$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{I} + \widehat{\mathbb{B}} : \mathbb{V}_0 \to \mathbb{V}_0^*.$$

Для данного оператора определен обратный линейный ограниченный оператор. Поэтому (4.9) эквивалентно следующему равенству:

$$u^{'} = \widehat{\mathbb{C}}^{-1} \mathbb{A}_0^{-1} v^{'}. \tag{4.10}$$

Нам осталось доказать, что $u^{'} = \widehat{\mathbb{C}}^{-1} \mathbb{A}_0^{-1} v^{'} \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{V}_0)$ при фиксированном $u \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{V}_0)$. Действительно, в силу (4.10) справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \| u^{'}(t) - u^{'}(t_0) \|_0 \leqslant \| \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) \mathbb{A}_0^{-1} [v^{'}(t) - v^{'}(t_0)] \|_0 + \\ + \| (\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) - \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t)) \mathbb{A}_0^{-1} v^{'}(t_0) \|_0 \leqslant \\ \leqslant \mathrm{C} \| v^{'}(t) - v^{'}(t_0) \|_0^* + \mathrm{C} \| \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) - \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t) \|_{\mathbb{V}_0 \to \mathbb{V}_0}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Отметим, что линейный при фиксированном $u \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{V}_0)$ оператор $\widehat{\mathbb{C}}$ является непрерывным, а значит, в силу теоремы Банаха об обратном отображении, оператор $\widehat{\mathbb{C}}^{-1}$ является линейным непрерывным и в силу линейности — ограниченным. Стало быть, мы можем воспользоваться спектральным представлением для линейного ограниченного оператора $\widehat{\mathbb{C}}^{-1} : \mathbb{V}_0 \to \mathbb{V}_0$.

Прежде всего введем резольвенту оператора $\widehat{\mathbb{C}}$:

$$\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}})=\left(\lambda\mathbb{I}-\widehat{\mathbb{C}}\right)^{-1}.$$

Пусть Γ — окружность $|\lambda|=r$ с достаточно большим радиусом, большим чем

$$\sup_{t\in[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]}\|\,\widehat{\mathbb{C}}\,\|_{\mathbb{V}_0\to\mathbb{V}_0}\,.$$

Введенная величина определена корректно, поскольку при указанных $t\in[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]\subset[0,\mathrm{T}_0)$ имеет место неравенство

$$\sup_{t\in[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]}\|\,u\,\|_0<+\infty.$$

Теперь мы можем воспользоваться спектральным представлением для операторов $\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t)$ и $\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0)$ с одним и тем же введенным ранее контуром Γ:

$$\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}d\lambda\,\lambda^{-1}\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t)),\;\;\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}d\lambda\,\lambda^{-1}\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0)).$$

Очевидно, имеем

$$\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t)-\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}d\lambda\,\lambda^{-1}\left[\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t))-\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0))\right].$$

Теперь воспользуемся известным представлением для резольвент операторов:

$$\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t))-\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0))=\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0))\sum_{n=1}^{+\infty}[(\widehat{\mathbb{C}}(t)-\widehat{\mathbb{C}}(t_0))\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0)]^n$$

при условии

$$\|\,\widehat{\mathbb{C}}(t_0)-\widehat{\mathbb{C}}(t)\,\|_{\mathbb{V}_0\to\mathbb{V}_0}\|\,\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0))\,\|_{\mathbb{V}_0\to\mathbb{V}_0}\leqslant\delta<1.$$

Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\|\,\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t))-\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0))\,\|_{\mathbb{V}_0\to\mathbb{V}_0}\leqslant$$
$$\leqslant\|\,\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0))\,\|_{\mathbb{V}_0\to\mathbb{V}_0}\sum_{n=1}^{+\infty}\|\,\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0))\,\|^n_{\mathbb{V}_0\to\mathbb{V}_0}\|\,\widehat{\mathbb{C}}(t))-\widehat{\mathbb{C}}(t_0))\,\|^n_{\mathbb{V}_0\to\mathbb{V}_0}\,.$$

Теперь заметим, что

$$\widehat{\mathbb{C}}(t)-\widehat{\mathbb{C}}(t_0)=\mathbb{A}_0^{-1}\sum_{j=1}^{N}\left[\mathbb{A}_{j,u}(u(t))-\mathbb{A}_{j,u}(u(t_0))\right].$$

В силу непрерывности производных Фреше $\mathbb{A}_{j,u}$ по $u \in \mathbb{V}_0$ и принадлежности u классу $\in \mathbb{C}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{V}_0)$, имеем:

$$\| \widehat{\mathbb{C}}(t) - \widehat{\mathbb{C}}(t_0) \|_{\mathbb{V}_0 \to \mathbb{V}_0} \leqslant \sum_{j=1}^{N} \| \mathbb{A}_{j,u}(u(t)) - \mathbb{A}_{j,u}(u(t_0)) \|_{\mathbb{V}_0 \to \mathbb{V}_0^*} \to +0,$$

$$\| \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t)) - \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0)) \|_{\mathbb{V}_0 \to \mathbb{V}_0} \to 0,$$

$$\| \widehat{\mathbb{C}}(t)^{-1} - \widehat{\mathbb{C}}(t_0)^{-1} \|_{\mathbb{V}_0 \to \mathbb{V}_0} \to +0$$

при $t \to t_0$.

Значит, в силу (4.11) имеем: $u \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{V}_0)$.

Лемма доказана.

Шаг 2. Априорные оценки и разрушение.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 5. *Пусть*

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0 + \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u), u\rangle_j, \quad \alpha \equiv \frac{q+2}{\overline{p}}.$$

Тогда

1) *при* $\alpha \in (0,1)$ *справедливо неравенство*

$$\Phi(t) \leqslant \left[\Phi_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\mathrm{A}t\right]^{1/(1-\alpha)};$$

2) *при* $\alpha = 1$ *справедливо неравенство*

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 \exp(\mathrm{A}t);$$

3) *при* $\alpha > 1$ *и условиях*

$$(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > (\mathbb{L}u_0, u_0)_1 + \frac{q\sqrt{2\overline{p}}}{q+2-\overline{p}}\Phi_0, \quad (\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > \frac{q+2}{2}\,(\mathbb{L}u_0, u_0)_1$$

найдется такое $\mathrm{T}_0 \in [\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2]$, *что*

$$\lim_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \Phi(t) = +\infty,$$

где

$$\mathrm{T}_1 \equiv \frac{2}{q}\Phi_0^{-q/2}\overline{\mathrm{B}}^{-1}, \quad \mathrm{T}_2 \equiv \Phi_0^{1-\alpha_1}\mathrm{A}_0^{-1},$$

$$\mathrm{A} \equiv \mathrm{C}_{j^*}^{q+2}\mathrm{M}\left(\frac{\overline{p}}{\overline{p}-1}\right)^{(q+2)/\overline{p}},$$

$$\mathrm{A}_0^2 \equiv (\alpha_1 - 1)^2\Phi_0^{-2\alpha_1}\left[(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 - (\mathbb{L}u_0, u_0)_1\right]^2 - (\alpha_1 - 1)\beta\Phi_0^{2-2\alpha_1},$$

$$\alpha_1 = \frac{q+2+\overline{p}}{2\overline{p}}, \quad \beta = \frac{q^2}{q+2-\overline{p}}.$$

Доказательство.

Пусть $u \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{V}_0)$ — решение задачи (1.1). Умножим обе части равенства (1.1) на $u(t)$ и на $u_t'(t)$ и интегрированием по частям получим следующие равенства:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u,u\rangle_0+\sum_{j=1}^{N}\frac{p_j-1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u),u\rangle_j\right]=(\mathbb{F}(u),u)_0-(\mathbb{L}u,u)_1\,, \quad (4.12)$$

$$\langle \mathbb{A}_0 u',u'\rangle_0+\sum_{j=1}^{N}\langle (\mathbb{A}_j(u))',u'\rangle_j=$$

$$=\frac{1}{q+2}\frac{d}{dt}(\mathbb{F}(u),u)_0-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mathbb{L}u,u)_1\,. \quad (4.13)$$

Интегрированием уравнения (4.12) по $t\in(0,\mathrm{T})$ получим

$$\Phi(t)=\Phi_0+\int_0^t ds\,[(\mathbb{F}(u),u)_0-(\mathbb{L}u,u)_1], \quad (4.14)$$

где

$$\Phi(t)\equiv\frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u,u\rangle_0+\sum_{j=1}^{N}\frac{p_j-1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u),u\rangle_j\,,\quad \Phi_0=\Phi(0).$$

Так как по условию $\mathbb{V}_0\subset\mathbb{W}_0$, то найдется постоянная $\mathrm{C}_1>0$ такая, что

$$|\,v\,|_0\leqslant \mathrm{C}_1\langle \mathbb{A}_0 v,v\rangle_0^{1/2}.$$

Из (4.14) вытекает неравенство

$$\Phi(t)\leqslant\Phi_0+\mathrm{MC}_1^{q+2}\int_0^t ds\,\langle \mathbb{A}_0 v,v\rangle_0^{(q+2)/2}\leqslant\Phi_0+\overline{\mathrm{B}}\int_0^t ds\,\Phi^{(q+2)/2}(s),$$

$$\overline{\mathrm{B}}\equiv\mathrm{MC}_1^{q+2}2^{(q+2)/2}.$$

По теореме Бихари [Демидович] имеем

$$\Phi(t)\leqslant\frac{\Phi_0}{\left[1-\frac{q}{2}\Phi_0^{q/2}\overline{\mathrm{B}}t\right]^{2/q}}\quad\forall\, t\in[0,\mathrm{T}_1),\quad \mathrm{T}_1\equiv\frac{2}{q}\Phi_0^{-q/2}\overline{\mathrm{B}}^{-1}. \quad (4.15)$$

Стало быть, в случае $\overline{p}<q+2$ из (4.15) имеем: $\mathrm{T}_0\geqslant\mathrm{T}_1$.

Пусть теперь $\overline{p}\geqslant q+2$. Воспользуемся тем, что найдется такое $j^*\in\overline{1,N}$ ($p_{j^*}=\overline{p}$, $p_{j^*}\geqslant q+2$), что $\mathbb{V}_{j^*}\subset\mathbb{W}_0$. Пусть C_{j^*} — константа вложения $\mathbb{V}_{j^*}\subset\mathbb{W}_0$:

$$|\,v\,|_0\leqslant\mathrm{C}_{j^*}\langle \mathbb{A}_{j^*}(v),v\rangle_{j^*}^{1/p_{j^*}},$$

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 + \mathrm{C}_{j^*}^{q+2}\mathrm{M}\int\limits_0^t ds\,\langle \mathbb{A}_{j^*}(v), v\rangle_{j^*}^{(q+2)/p_{j^*}} \leqslant$$

$$\leqslant \Phi_0 + \mathrm{C}_{j^*}^{q+2}\mathrm{M}\left(\frac{\overline{p}}{\overline{p}-1}\right)^{(q+2)/\overline{p}}\int\limits_0^t ds\,\Phi^{(q+2)/\overline{p}}(s).$$

Рассмотрим два случая:

$$\alpha = 1, \quad \alpha \in (0,1),$$

где

$$\alpha \equiv \frac{q+2}{\overline{p}}\,.$$

В первом случае по теореме Гронуолла–Беллмана [Демидович] имеем

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 \exp\{\mathrm{A}t\}, \quad \mathrm{A} \equiv \mathrm{C}_{j^*}^{q+2}\mathrm{M}\left(\frac{\overline{p}}{\overline{p}-1}\right)^{(q+2)/\overline{p}}. \tag{4.16}$$

Во втором случае $\alpha \in (0,1)$ по теореме Бихари получим

$$\Phi(t) \leqslant \left[\Phi_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\mathrm{A}t\right]^{1/(1-\alpha)}. \tag{4.17}$$

Из (4.16) и (4.17) следует, что величина $\mathrm{T}_0 = +\infty$ в случае $\alpha \in (0,1]$.

Теперь из соотношений (4.12) точно так же, как и на шаге 5, выводим следующее обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка, причем $\Phi'(t) \geqslant 0$ (см. [Калантаров, Ладыженская]):

$$\Phi''\Phi - \alpha_1\left(\Phi'\right)^2 + \beta\Phi^2 \geqslant 0, \quad \alpha_1 = \frac{q+2+\overline{p}}{2\overline{p}}, \quad \beta = \frac{q^2}{q+2-\overline{p}}\,. \tag{4.18}$$

Интегрированием дифференциального неравенства (4.18) с учетом (4.12), (4.13) и неравенств

$$(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > (\mathbb{L}u_0, u_0)_1 + \frac{q\sqrt{2\overline{p}}}{q+2-\overline{p}}\Phi_0, \quad (\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > \frac{q+2}{\overline{p}}\,(\mathbb{L}u_0, u_0)_1$$

имеем

$$\Phi \geqslant \frac{\mathrm{A}_0^{1/(1-\alpha_1)}}{[\mathrm{T}_2 - t]^{1/(\alpha_1-1)}} \quad \forall\, t \in [0, \mathrm{T}_2), \quad \mathrm{T}_2 \equiv \Phi_0^{1-\alpha_1}\mathrm{A}_0^{-1}.$$

Теорема доказана.

§ 5. Однозначная разрешимость задачи (1.2) в слабом обобщенном смысле и разрушение ее решения

Определение 3. Слабым обобщенным решением абстрактной задачи Коши (1.1) назовем решение, удовлетворяющее условиям

$$\int_0^{\mathrm{T}} \varphi(t) \left[\frac{d}{dt} \sum_{j=0}^{N} \langle \mathbb{A}_j(u), w \rangle_j - (\mathbb{F}(u), w)_0 + \langle \mathbb{DP}(u), w \rangle_0 \right] dt = 0 \qquad (5.1)$$

$$\forall\, w \in \mathbb{V},\ \forall\, \varphi \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}),$$

$$u(0) = u_0 \in \mathbb{V}. \qquad (5.2)$$

Решение задачи (5.1) ищется в классе

$$u(t) \in \mathbb{L}^{\infty}(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}), \quad u'(t) \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_0),$$
$$\mathbb{DP}(u) \in \mathbb{L}^{\infty}(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_4), \ \ \mathbb{F}(u) \in \mathbb{L}^{\infty}(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_0^*),$$

$$\mathbb{A}_j(u) \in \mathbb{L}^{\infty}(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_j^*), \quad \frac{d}{dt}\mathbb{A}(u) = \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^{N} \mathbb{A}_j(u) \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}^*),$$

и, кроме того,

$$\mathbb{A}(u) = \sum_{j=0}^{N} \mathbb{A}_j(u) \in \mathbb{C}_w^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}^*),$$

т. е. $\mathbb{A}(u)$ является сильно абсолютно непрерывной и слабо дифференцируемой на сегменте $[0, \mathrm{T}]$. Поэтому в силу свойств (A), (A_0) и (F) и условий нижеследующей теоремы 1 получаем, что

$$\mathbb{A}(u) = \sum_{j=0}^{N} \mathbb{A}_j(u) \in \mathbb{H}^1(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}^*), \ \ \mathbb{F}(u) \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}^*),$$

$$\mathbb{A}(u) = \sum_{j=0}^{N} \mathbb{A}_j(u) \in \mathbb{C}_w^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}^*).$$

Тем самым задача (3.1) в силу условий **V** и условий нижеследующей теоремы 1 эквивалентна следующей задаче:

$$\int_0^{\mathrm{T}} \varphi(t) \left[\frac{d}{dt} \sum_{j=0}^{N} \langle \mathbb{A}_j(u), w \rangle + \langle \mathbb{DP}(u), w \rangle - \langle \mathbb{F}(u), w \rangle \right] dt = 0$$

$$\forall\, w \in \mathbb{V},\ \forall\, \varphi(t) \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}),$$

$$u(0) = u_0 \in \mathbb{V},$$

где символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначена скобка двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}^*$.

Используя результат §12 Приложения Б, приходим к выводу, что задача (3.1) эквивалентна следующей задаче:

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt \left[\left\langle \frac{d}{dt}\mathbb{A}(u), v \right\rangle + \langle \mathbb{DP}(u), v \rangle - \langle \mathbb{F}(u), v \rangle \right] = 0$$

$$\forall\, v \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}),$$

$$u(0) = u_0 \in \mathbb{V}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (A), (A_0), (F), (DP). *Предположим, что* $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$, *т. е. оператор вложения вполне непрерывен. Потребуем, кроме того, чтобы* $\mathbb{V}_0 \subset \mathbb{W}_0 \subseteq \mathbb{W}_2$. *Предположим, что либо* $2 < \overline{p} < q + 2$, *либо* $\overline{p} \geqslant q + 2$ *и в последнем случае* $\mathbb{V}_{j^*} \subseteq \mathbb{W}_0$, *где*

$$\overline{p} = \max_{j \in \overline{1,N}} p_j, \quad j^* \in \overline{1,N}, \quad p_{j^*} = \overline{p}.$$

Пусть $(\mathbb{F}(v), v)_0 \geqslant \mathrm{c} > 0$ *для всех* $v \in \mathbb{W}_0$, $|v|_0 = 1$. *Тогда для любого* $u_0 \in \mathbb{V}$ *найдется такое максимальное* $\mathrm{T}_0 \equiv \mathrm{T}_{u_0} > 0$, *что задача Коши* (1.2) *имеет единственное решение в классе*

$$u(t) \in \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}), \quad \frac{d}{dt}u(t) \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_0) \ \ \forall\, \mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0),$$
$$\mathbb{A}(u) \in \mathbb{H}^1(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}^*) \cap \mathbb{C}_w^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}^*).$$

Причем справедливы следующие оценки для положительно определенной в силу условий $(\mathrm{A})_0$ 2 *и* (A) 3 *функции, имеющей смысл кинетической энергии*:

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j,$$

в трех случаях относительно возможных значений величины

$$\alpha \equiv \frac{q+2}{\overline{p}}, \quad p_{j^*} = \overline{p} \equiv \max_{j=\overline{1,N}} p_j,$$

и свойства времени существования решения T_0 :

1) *если* $\alpha = 1$, *то* $\mathrm{T}_0 = +\infty$ *и*

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 \exp\{\mathrm{C}_2 t\};$$

2) *если* $\alpha \in (0,1)$, *то* $\mathrm{T}_0 = +\infty$ *и*

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 \left[1 + (1-\alpha)\mathrm{C}_2 \Phi_0^{\alpha-1} t\right]^{1/(1-\alpha)};$$

3) *если* $\alpha > 1$ *и выполнены следующии условия*:

$$\frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0\rangle_j < \frac{(q+2-\overline{p})^2}{\overline{p}\,(q+2)^2}\,(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0\,,$$

то найдется такое $\mathrm{T}_0 \in [\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2]$, *что справедливо соотношение*

$$\lim_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \Phi(t) = +\infty,$$

где

$$\mathrm{T}_1 = \frac{2}{q}\Phi_0^{-q/2}\overline{\mathrm{B}}^{-1}, \quad \mathrm{T}_2 = -\frac{1}{\gamma}\ln\left(1 - \frac{\gamma}{\alpha_1 - 1}\frac{\Phi_0}{\Phi_1}\right), \quad \mathrm{C}_2 \equiv \mathrm{B}\mathrm{C}_{j^*}^{q+2} 2^{\alpha},$$

$$|v|_0 \leqslant \mathrm{C}_{j^*}\langle \mathbb{A}_{j^*} v, v\rangle_{j^*}^{1/p_{j^*}},$$

$$\Phi_0 \equiv \Phi(0), \quad \alpha_1 \equiv \frac{\overline{p}+q+2}{2\overline{p}}, \quad \Phi_1 = \frac{(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0}{\Phi_0^{\alpha_1}},$$

$$\gamma \equiv \frac{(q+2)^2}{2(q+2-\overline{p})} \quad \textit{в случае} \quad q+2 > \overline{p} \equiv \max_{j=\overline{1,N}} p_j, \quad \overline{\mathrm{B}} \equiv \mathrm{B}\mathrm{C}_1^{q+2} 2^{(q+2)/2},$$

C_1 — *константа наилучшего вложения* $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$, B — *константа из условия* (F)4.

Доказательство.

Замечание 3. В силу принадлежности решения к классу

$$u(t) \in \mathbb{L}^{\infty}(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}), \quad u'(t) \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_0)$$

следует, что после возможного изменения на множестве нулевой меры Лебега отображение $u(t) : [0, \mathrm{T}] \to \mathbb{V}_0$ сильно непрерывно. Стало быть, имеет смысл начальное условие $u(0) = u_0$.

Шаг 1. *«Галеркинские» приближения.*

В силу сепарабельности $\mathbb{V}$ найдется счетная всюду плотная в $\mathbb{V}$ линейно независимая система функций $\{w_i\}_{i=1}^{m}$. Будем доказывать разрешимость задачи (5.1) методом Галеркина в сочетании с методами монотонности и компактности [Лионс, 1]. Сначала рассмотрим следующую конечномерную аппроксимацию задачи (5.1):

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\varphi(t)\left[\frac{d}{dt}\langle \mathbb{A}_0 u_m, w_k\rangle_0 + \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N}\langle \mathbb{A}_j(u_m), w_k\rangle_j + \right.$$

$$\left. + \langle \mathbb{D}\mathbb{P}(u_m), w_k\rangle_0 - (\mathbb{F}(u_m), w_k)_0\right] = 0, \quad (5.2)$$

$$k = \overline{1,m}, \quad \forall\, \varphi(t) \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T}),$$
$$u_m = \sum_{i=1}^{m} c_{mi}(t) w_i, u_{m0} = \sum_{i=1}^{m} c_{mi}(0) w_i, c_{mi}(0) = \alpha_{mi},$$
$$u_{m0} \to u_0 \text{ сильно в } \mathbb{V}.$$

Как и при доказательстве шага 1 теоремы 1 гл. 4, можно доказать, что из (5.2) в классе $c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(1)}[0,\mathrm{T}_{m0})$ при некотором $\mathrm{T}_{m0} > 0$ следует поточечное равенство

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbb{A}_0 u_m, w_k\rangle_0 + \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N}\langle \mathbb{A}_j(u_m), w_k\rangle_j + \\ + \langle \mathbb{DP}(u_m), w_k\rangle_0 = (\mathbb{F}(u_m), w_k)_0. \quad (5.2a)$$

Доказательство локальной разрешимости системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5.2a) в точности повторяет соответствующее доказательство шага 1 теоремы 1.

Стало быть, система обыкновенных дифференциальных уравнений (5.3) является системой типа Коши–Ковалевской и удовлетворяет условиям, гарантирующим ее разрешимость на некотором сегменте $[0,\mathrm{T}_m]$, $\mathrm{T}_m > 0$, в классе $c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^1([0,\mathrm{T}_m])$, $k = \overline{1,m}$ (см., например, [Петровский]).

Шаг 2. *Априорные оценки.*

Справедлива следующая лемма

Лемма 6. *Найдется такое* $\mathrm{T} > 0$, *не зависящее от* $m \in \mathbb{N}$, *что для последовательности* $\{u_m\}$ *галеркинских приближений справедливы следующие свойства равномерно по* $m \in \mathbb{N}$:

$$u_m \text{ ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{V});$$
$$u_m^{'} \text{ ограничено в } \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0);$$
$$\mathbb{A}_0 u_m \text{ ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0^*);$$
$$\mathbb{A}_j(u_m) \text{ ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_j^*);$$
$$\mathbb{F}(u_m) \text{ ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^*);$$
$$\mathbb{DP}(u_m) \text{ ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0^*).$$

Доказательство.

Умножим обе части равенства (5.2) на $c_{mk}(t)$ и просуммируем по $k = \overline{1,m}$, тогда с учетом условия (DP) 4 получим

$$\langle \mathbb{A}_0 u_m^{'}, u_m\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N}\langle \mathbb{A}_{j,u_m}^{'}(u_m) u_m^{'}, u_m\rangle_j = (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0. \quad (5.3)$$

С другой стороны, в силу того что $u_m = \sum\limits_{k=1}^{N} c_{mk}(t) w_k \in \mathbb{C}^1([0, \mathrm{T}_m]; \mathbb{V})$ и условия (A) 2 и 4, справедлива цепочка равенств

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j = p_j \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_{mt}^{'}\rangle_j\,,$$

$$\langle (\mathbb{A}_j(u_m))_t^{'}, u_m\rangle_j + \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_{mt}^{'}\rangle_j = p_j \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_{mt}^{'}\rangle_j\,,$$

$$\langle (\mathbb{A}_j(u_m))_t^{'}, u_m\rangle_j = (p_j - 1)\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_{mt}^{'}\rangle_j = \frac{p_j - 1}{p_j}\frac{d}{dt}\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j\,.$$

Докажем равенства

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j = p_j \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_{mt}^{'}\rangle_j\,.$$

Действительно, имеем

$$\mathbb{J}_{mj}(t) \equiv \int\limits_0^1 ds\, \langle \mathbb{A}_j(su_m), u_m\rangle_j = \frac{1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j\,,$$

$$\frac{d\mathbb{J}_{mj}(t)}{dt} = \int\limits_0^1 ds\, \left[s\langle \mathbb{A}_{su_m}^{'}(su_m)u_m^{'}, u_m\rangle_j + \langle \mathbb{A}_j(su_m), u_m^{'}\rangle_j\right] =$$

$$= \int\limits_0^1 ds\, \left[s\frac{d}{ds}\langle \mathbb{A}_j(su_m), u_m^{'}\rangle_j + \langle \mathbb{A}_j(su_m), u_m^{'}\rangle_j\right] =$$

$$= \int\limits_0^1 ds\, \frac{d}{ds}\left[s\langle \mathbb{A}_j(su_m), u_m^{'}\rangle\right] = \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m^{'}\rangle_j\,.$$

Здесь мы воспользовались тем, что производные Фреше операторов $\mathbb{A}_j$ в силу условий (A) симметричны. Отсюда и из (5.3) получим

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N}\frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j\right] = (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0\,. \quad (5.4)$$

Из (5.4) интегрированием обеих частей по $t \in (0, \mathrm{T}_m)$ получим

$$\frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N}\frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j = \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, u_{m0}\rangle_0 +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N}\frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_{m0}), u_{m0}\rangle_j + \int\limits_0^t ds\, (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0\,. \quad (5.5)$$

В силу условия (A_0) 3 в банаховом пространстве $\mathbb{V}_0$ можно выбрать норму, эквивалентную исходной:

$$\| v \|_0 = \langle \mathbb{A}_0 v, v \rangle_0^{1/2}. \tag{5.6}$$

С другой стороны, $\mathbb{V}_0 \hookrightarrow \mathbb{W}_0$ и $\left|(\mathbb{F}(u_m), u_m)_0\right| \leqslant \mathrm{B} \mid u_m \mid_0^{q+2}$. Из (5.5) с учетом (5.6) получим, что

$$\frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, u_{m0} \rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_{m0}), u_{m0} \rangle_j +$$

$$+ \mathrm{B}\mathrm{C}_1{}^{q+2} 2^{(q+2)/2} \times$$

$$\times \int_0^t ds \left(\frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j \right)^{(q+2)/2}. \tag{5.7}$$

Выведем теперь вторую априорную оценку. Умножим (5.2) на c_{mk}' и просуммируем по $k = \overline{1, m}$. В результате интегрирования обеих частей полученного равенства по $t \in (0, \mathrm{T}_m)$ получим

$$\int_0^t ds \left[\langle \mathbb{A}_0 u_m', u_m' \rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \langle (\mathbb{A}_j(u_m))' u_m' \rangle_j \right] + \frac{1}{q+2} (\mathbb{F}(u_{m0}), u_{m0})_0 =$$

$$= \frac{1}{q+2} (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0 - \int_0^t ds \, \langle \mathbb{D}\mathbb{P}(u_m), u_m' \rangle_0 . \tag{5.8}$$

Из (5.8), утверждения 1 при $\mathrm{C} = 1$ и неравенства Коши следует цепочка неравенств

$$\left| \langle \mathbb{D}\mathbb{P}(u_m), u_m' \rangle_0 \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_m', u_m' \rangle_0 + \frac{1}{2\varepsilon} (\mathbb{F}(u), u)_0 ,$$

$$\left[1 - \frac{\varepsilon}{2}\right] \int_0^t ds \left[\langle \mathbb{A}_0 u_m', u_m' \rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \langle (\mathbb{A}_j(u_m))' u_m' \rangle_j \right] +$$

$$+ \frac{1}{q+2} (\mathbb{F}(u_{m0}), u_{m0})_0 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{q+2} (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0 + \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t ds \, (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0 \quad \forall \quad \varepsilon \in (0, 2). \tag{5.9}$$

Далее, в силу (5.7)–(5.9), в точности повторяя рассуждения леммы 1 шага 2 теоремы 1, получим

$$u_m \text{ ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{V}),\ u_m' \text{ ограничено в } \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0),$$
$$\mathbb{A}_0 u_m \text{ ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0^*),\ \mathbb{A}_j(u_m) \text{ ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_j^*),$$
$$\mathbb{F}(u_m) \text{ ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^*),\ \mathbb{DP}(u_m) \text{ ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0^*), \tag{5.10}$$

где включения имеют место для любых $\mathrm{T} > 0$ в случае $\alpha_{j^*} \in (0,1]$, и для любых $\mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}_1)$, где T_1 определено в (3.16), в случае $\alpha_{j^*} > 1$.

Лемма доказана.

Стало быть, в силу (5.10) найдется такая подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$, что

$$u_m \rightharpoonup u \ \ *-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{V}),\ u_m' \rightharpoonup u' \text{ слабо в } \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0). \tag{5.11}$$

Здесь следует заметить, что из $(5.11)_1$ вытекает

$$u_m' \rightharpoonup u' \text{ в } \mathcal{D}'(0,\mathrm{T};\mathbb{V}),$$

поэтому в силу слабой сходимости

$$u_m' \rightharpoonup \eta$$

в $\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0)$ приходим к выводу, что $\eta(t) = u'(t)$ для почти всех $t \in \in (0,\mathrm{T})$. Из (5.11) и компактного вложения $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$ получим, что для почти всех $t \in (0,\mathrm{T})$ $u_m(t) \to u(t)$ сильно в $\mathbb{W}_0$. С другой стороны, в силу условия (F) 1 имеем

$$|\,\mathbb{F}(u_m) - \mathbb{F}(u)\,|_0^* \leqslant \mu(\mathrm{R})\,|\,u_m - u\,|_0 \to 0 \ \text{ при } \ m \to +\infty, \tag{5.12}$$

где $\mathrm{R} = \max\{|\,u\,|_0, |\,u_m\,|_0\}$. Из (5.12) вытекает сильная сходимость в $\mathbb{W}_0^*$:

$$\mathbb{F}(u_m)(t) \to \mathbb{F}(u)(t) \tag{5.13}$$

для почти всех $t \in (0,\mathrm{T})$. Отметим теперь, что поскольку $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_1$ и $u_m \rightharpoonup u$ слабо в $\mathbb{V}$ для почти всех $t \in (0,\mathrm{T})$, следует, что для некоторой подпоследовательности последовательности $\{u_m\}$ $u_m \to u$ сильно в $\mathbb{W}_1$ для почти всех $t \in (0,\mathrm{T})$. Отсюда и из условия (DP) 3 следует сильная сходимость $\mathbb{DP}(u_m) \to \mathbb{DP}(u)$ в $\mathbb{V}_0^*$ для почти всех $t \in \in (0,\mathrm{T})$.

Шаг 3. *Метод монотонности.*

Воспользуемся теперь методом монотонности. Напомним, что на шаге 2 мы получили предельные включения (5.10) и, кроме того,

$$\mathbb{A}(u_m) \rightharpoonup \chi \ \ *-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{V}^*),\ \mathbb{A}(u) \equiv \sum_{j=0}^{N} \mathbb{A}_j(u). \tag{5.14}$$

Лемма 7. *Пусть* $\mathbb{A}(u) \equiv \sum\limits_{j=0}^{\mathrm{N}} \mathbb{A}_j(u)$. *Тогда найдется такая подпоследовательность последовательности* $\{u_m\}$, *что*

$$\mathbb{A}(u_m) \rightharpoonup \mathbb{A}(u) \ *-\text{слабо в } \mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T};\mathbb{V}^*)$$

для некоторого $\mathrm{T} > 0$. *Кроме того, для некоторой подпоследовательности последовательности* $\{u_m\}$ *имеем*

$$u_m \to u \text{ сильно в } \mathbb{L}^{p_j}(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_j), \quad u_m \to u \text{ сильно в } \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0).$$

Доказательство.

Перепишем уравнение (5.2) в эквивалентном виде

$$\langle \mathbb{A}(u_m), w_j\rangle = \langle \mathbb{A}(u_{m0}), w_j\rangle + \int\limits_0^t ds \Big[\big(\mathbb{F}(u_m), w_j\big)_0 - \langle \mathbb{DP}(u_m), w_j\rangle_0 \Big], \quad (5.15)$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}^*$.

При фиксированном $j \in \mathbb{N}$ перейдем к пределу при $m \to +\infty$ в уравнении (5.15) и получим следующее равенство:

$$\chi = \int\limits_0^t ds\, [\mathbb{F}(u) - \mathbb{DP}(u)] + \mathbb{A}(u_0). \quad (5.16)$$

Пусть

$$0 \leqslant \mathbb{X}_\mu \equiv \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}(u_\mu) - \mathbb{A}(v), u_\mu - v\rangle = \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}(u_\mu), u_\mu\rangle - \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}(u_\mu), v\rangle - \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}(v), u_\mu - v\rangle,$$

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}(u_\mu), u_\mu\rangle = \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}(u_{\mu 0}), u_\mu\rangle + \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \int\limits_0^t ds \Big[\big(\mathbb{F}(u_\mu)(s), u_\mu(t)\big)_0 - \langle \mathbb{DP}(u_\mu)(s), u_\mu(t)\rangle_0 \Big].$$

Отсюда получим, что

$$0 \leqslant \limsup_{\mu\to+\infty} \mathbb{X}_\mu \leqslant \int_0^{\mathrm{T}} dt \int_0^t ds \Big[(\mathbb{F}(u)(s), u(t))_0 - \langle \mathbb{DP}(u)(s), u(t)\rangle_0 \Big] +$$

$$+ \int_0^{\mathrm{T}} dt \, \langle \mathbb{A}(u_0), u\rangle - \int_0^{\mathrm{T}} dt \, \langle \chi, v\rangle -$$

$$- \int_0^{\mathrm{T}} dt \, \langle \mathbb{A}(v), u - v\rangle = \int_0^{\mathrm{T}} dt \, \langle \chi - \mathbb{A}(v), u - v\rangle \geqslant 0. \quad (5.17)$$

Положим теперь $v = u - \lambda w$ для любых $v, w \in \mathbb{L}^r(0, \mathrm{T}; \mathbb{V})$, $\lambda > 0$, $u \in \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}) \subset \mathbb{L}^r(0, \mathrm{T}; \mathbb{V})$, $\chi, \mathbb{A}(v) \in \mathbb{L}^{r'}(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}^*)$, $r > 1$, $r' = r/(r-1)$. В силу (5.17) справедливо следующее неравенство:

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt \, \langle \chi - \mathbb{A}(u - \lambda w), w\rangle \geqslant 0,$$

из которого в силу полунепрерывности каждого из операторов $\mathbb{A}_j(v)$, $j = \overline{0, N}$, получим

$$\chi = \mathbb{A}(u).$$

С другой стороны, в силу (5.16) точно так же, как при доказательстве второй части леммы 2 шага 3 теоремы 1, доказывается, что найдется такая подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$, что $u_m \to u$ сходится сильно в каждом $\mathbb{L}^{p_j}(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_j)$, $j = \overline{0, N}$.

Лемма доказана.

Шаг 4. *Предельный переход и единственность.*

Из предельных выражений (5.11), (5.13), (5.14) вытекает возможность перехода к пределу при $m \to +\infty$ в уравнении (5.15). В результате указанного предельного перехода получим следующее равенство для почти всех $t \in (0, \mathrm{T})$:

$$\langle \mathbb{A}_0 u, v\rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle \mathbb{A}_j(u), v\rangle_j = \langle \mathbb{A}_0 u_0, v\rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle \mathbb{A}_j(u_0), v\rangle_j +$$

$$+ \int_0^t ds \, \left[(\mathbb{F}(u), v)_0 (s) - \langle \mathbb{DP}(u), v\rangle_0(s) \right]$$

$\forall\, v \in \mathbb{V}$, $u(0) = u_0 \in \mathbb{V}$. С другой стороны, $u' \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_0), u \in \in \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}^*)$. Перепишем последнее равенство в следующем виде:

$$\sum_{j=0}^{N}\langle \mathbb{A}_j(u),v\rangle_j=\sum_{j=0}^{N}\langle \mathbb{A}_j(u_0),v\rangle_j+$$

$$+\int\limits_0^t ds\,\left[(\mathbb{F}(u),v)_0(s)-\langle \mathbb{DP}(u),v\rangle_0(s)\right] \quad (5.18)$$

$\forall\, v\in\mathbb{V}$ для почти всех $t\in(0,\mathrm{T})$. Значит, из (5.18) вытекает, что для почти всех $t\in(0,\mathrm{T})$ справедливо равенство в смысле $\mathbb{V}^*$:

$$\mathbb{A}(u)=\sum_{j=0}^{N}\mathbb{A}_j(u)=\sum_{j=0}^{N}\mathbb{A}_j(u_0)+\int\limits_0^t ds\,\left[\mathbb{F}(u)(s)-\mathbb{DP}(u)(s)\right]. \quad (5.19)$$

Ранее мы доказали, что

$$\mathbb{A}(u)=\sum_{j=0}^{N}\mathbb{A}_j(u)\in\mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T};\mathbb{V}^*)\subset\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{V}^*).$$

Кроме того, из (5.19) вытекает

$$\frac{d}{dt}\sum_{j=0}^{N}\mathbb{A}_j(u)\in\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{V}^*).$$

Значит, $\mathbb{A}(u)\in\mathbb{H}^1(0,\mathrm{T};\mathbb{V}^*)$. Наконец, точно так же, как на шаге 4 доказательства теоремы 1 гл. 4, можно доказать, что

$$\sum_{j=0}^{N}\mathbb{A}_j(u)\in\mathbb{C}_w^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{V}^*).$$

Теперь рассмотрим уравнение (5.2), которое перепишем в следующем виде:

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\varphi(t)\left[\frac{d}{dt}\left\langle\sum_{j=0}^{N}\mathbb{A}_j(u_m),w\right\rangle-\langle\mathbb{F}(u_m),w\rangle+\langle\mathbb{DP}(u_m),w\rangle\right]=0$$

$\forall\,\varphi(t)\in\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T})$, $\forall\, w\in\mathbb{V}$. В силу результата леммы 1 имеем: $\mathbb{F}(u_m)\rightharpoonup\mathbb{F}(u)$ и $\mathbb{DP}(u_m)\to\mathbb{DP}(u)$ слабо в $\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{V}^*)$. Причем

$$\mathbb{A}(u_m)\rightharpoonup\mathbb{A}(u)$$

слабо в $\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{V}^*)$. Стало быть,

$$\frac{d}{dt}\mathbb{A}(u_m)\to\frac{d}{dt}\mathbb{A}(u)$$

в смысле $\mathcal{D}'(0,\mathrm{T};\mathbb{V}^*)$. Кроме того, имеет место поточечное равенство

$$\frac{d}{dt}\mathbb{A}(u_m) = \mathbb{F}(u_m) - \mathbb{DP}(u_m).$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\mathbb{A}(u_m) \rightharpoonup \psi$$

слабо в $\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{V}^*)$ Тем самым,

$$\frac{d}{dt}\mathbb{A}(u_m) \rightharpoonup \frac{d}{dt}\mathbb{A}(u)$$

слабо в $\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{V}^*)$. Переходом к пределу при $m \to +\infty$ в уравнении (5.2) получим, что $u(t)$ является решением задачи

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\varphi(t)\left[\frac{d}{dt}\left\langle\sum_{j=0}^{N}\mathbb{A}_j(u), w\right\rangle - \langle\mathbb{F}(u), w\rangle + \langle\mathbb{DP}(u), w\rangle\right] = 0$$

$\forall\,\varphi(t) \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T})$, $\forall\, w \in \mathbb{V}$, которая эквивалентна задаче (5.1).

Доказательство единственности задачи (5.1) проводится по такой же схеме, что и при доказательстве единственности задачи (3.1).

Шаг 5. *Разрушение решений.*

Справедлива следующая лемма.

Лемма 8. *Пусть*

$$\Phi \equiv \frac{1}{2}\langle\mathbb{A}_0 u, u\rangle_0 + \sum_{j=1}^{\mathrm{N}}\frac{p_j-1}{p_j}\langle\mathbb{A}_j(u), u\rangle_j,\quad \alpha \equiv \frac{q+2}{\overline{p}},\quad \overline{p} \equiv \max_{j=\overline{1,N}} p_j,$$
$$(\mathbb{F}(v), v)_0 \geqslant \mathrm{c} > 0,\quad \forall\, v \in \mathbb{W}_0,\quad |v|_0 = 1.$$

Тогда

1) *при* $\alpha \in (0,1)$ *имеет место неравенство*

$$\Phi \leqslant \Phi_0\left[1 + (1-\alpha)\mathrm{C}_2\Phi_0^{\alpha-1}t\right]^{1/(1-\alpha)};$$

2) *при* $\alpha = 1$ *имеет место неравенство*

$$\Phi \leqslant \Phi_0\exp(\mathrm{C}_2 t);$$

3) *при* $\alpha > 1$ *и если выполнено следующее условие*:

$$\frac{1}{2}\langle\mathbb{A}_0 u_0, u_0\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N}\frac{p_j-1}{p_j}\langle\mathbb{A}_j(u_0), u_0\rangle_j < \frac{(q+2-\overline{p})^2}{\overline{p}\,(q+2)^2}\,(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0\,,$$

найдется такое $\mathrm{T}_0 \in [\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2]$, *что справедливо соотношение*

$$\lim_{t\uparrow \mathrm{T}_0}\Phi(t) = +\infty,$$

где

$$T_1 = \frac{2}{q}\Phi_0^{-q/2}\overline{B}^{-1},\ \ T_2 = -\frac{1}{\gamma}\ln\left(1 - \frac{\gamma}{\alpha_1 - 1}\frac{\Phi_0}{\Phi_1}\right),\ \ C_2 \equiv BC_{j^*}^{q+2}\left(\frac{\overline{p}}{\overline{p}-1}\right)^{\alpha},$$

$$|v|_0 \leqslant C_{j^*}\langle \mathbb{A}_{j^*}v, v\rangle_{j^*}^{1/p_{j^*}},$$

$$\Phi_0 \equiv \Phi(0),\ \ \alpha_1 \equiv \frac{\overline{p}+q+2}{2\overline{p}},\ \ \Phi_1 = \frac{(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0}{\Phi_0^{\alpha_1}},$$

$$\gamma \equiv \frac{(q+2)^2}{2(q+2-\overline{p})}\ \ \textit{в случае}\ \ q+2 > \overline{p} \equiv \max_{j=\overline{1,N}} p_j,\ \ \overline{B} \equiv BC_1^{q+2}2^{(q+2)/2}.$$

Доказательство.

В силу условий (A) 2 справедливо неравенство Шварца [Морен] для производных Фреше $\mathbb{A}_{j,u}^{'} : \mathbb{V}_j \to \mathcal{L}(\mathbb{V}_j; \mathbb{V}_j^*)$ операторов $\mathbb{A}_j : \mathbb{V}_j \to \mathbb{V}_j^*$:

$$\left|\langle (\mathbb{A}_j(u_m))^{'}, u_m\rangle_j\right| = \left|\langle \mathbb{A}_{j,u_m}^{'}(u_m)u_m^{'}, u_m\rangle_j\right| \leqslant$$

$$\leqslant \langle \mathbb{A}_{j,u_m}^{'}(u_m)u_m^{'}, u_m^{'}\rangle_j^{1/2}\langle \mathbb{A}_{j,u_m}^{'}(u_m)u_m, u_m\rangle_j^{1/2} =$$

$$= \langle (\mathbb{A}_j(u_m))^{'}, u_m^{'}\rangle_j^{1/2}(p_j-1)^{1/2}\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j^{1/2}, \quad (5.20)$$

$$\left|\langle \mathbb{A}_0 u_m^{'}, u_m\rangle_0\right| \leqslant \langle \mathbb{A}_0 u_m^{'}, u_m^{'}\rangle_0^{1/2}\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle_0^{1/2}. \quad (5.21)$$

Здесь мы воспользовались следующим равенством:

$$\mathbb{A}_{j,v}^{'}(v)v = (p_j - 1)\mathbb{A}_j(v).$$

Приведем его вывод. Действительно, имеют место следующие равенства:

$$\mathbb{A}_j(\rho v) = \rho^{p_j-1}\mathbb{A}_j(v),\ \ \mathbb{A}_{j,\rho v}^{'}(\rho v)\rho = \rho^{p_j-1}\mathbb{A}_{j,v}^{'}(v),$$

$$\mathbb{A}_{j,\rho v}^{'}(\rho v) = \rho^{p_j-2}\mathbb{A}_{j,v}^{'}(v),\ \ j = \overline{0,N},$$

$$\int_0^1 d\rho \left\langle \frac{d}{d\rho}\mathbb{A}_j(\rho v), w\right\rangle_j = \left\langle \int_0^1 d\rho\, \mathbb{A}_{j,\rho v}^{'}(\rho v)v, w\right\rangle_j \ \ \forall\ \ w \in \mathbb{V}_j,\ \ j = \overline{0,N},$$

$$\langle \mathbb{A}_j(v) - (p_j-1)^{-1}\mathbb{A}_{j,v}^{'}(v)v, w\rangle_j = 0\ \ \forall\ \ w \in \mathbb{V}_j,\ \ j = \overline{0,N}.$$

Значит, имеет место операторное равенство

$$(p_j-1)\mathbb{A}_j(v) = \mathbb{A}_{j,v}^{'}(v)v\ \ \forall\ \ v \in \mathbb{V}_j,\ j = \overline{0,N}.$$

Введем обозначение

$$\Phi_m \equiv \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N}\frac{p_j-1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j. \quad (5.22)$$

Из (5.20)–(5.22) вытекает

$$\left|\frac{d}{dt}\Phi_m\right|^2 \leqslant \left|\left|\langle \mathbb{A}_0 u_m', u_m\rangle_0\right| + \sum_{j=1}^N \left|\langle (\mathbb{A}_j(u_m))', u_m\rangle_j\right|\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\langle \mathbb{A}_0 u_m', u_m'\rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle (\mathbb{A}_j(u_m))', u_m'\rangle_j\right) \times$$

$$\times \left(\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle_0 + \sum_{j=1}^N (p_j - 1)\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j\right) \leqslant$$

$$\leqslant \overline{p}\left(\langle \mathbb{A}_0 u_m', u_m'\rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle (\mathbb{A}_j(u_m))', u_m'\rangle_j\right) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\overline{p}}\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{\overline{p}}\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j\right) \leqslant$$

$$\leqslant \overline{p}\left(\langle \mathbb{A}_0 u_m', u_m'\rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle (\mathbb{A}_j(u_m))', u_m'\rangle_j\right) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j\right), \quad (5.23)$$

где $\overline{p} = \max\limits_{j=1,N} p_j > 2$. В силу соотношений (5.4) и (5.8) имеем

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j\right] = (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0, \quad (5.24)$$

$$\langle \mathbb{A}_0 u_m', u_m'\rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle (\mathbb{A}_j(u_m))' u_m'\rangle_j =$$

$$= -\langle \mathbb{D}\mathbb{P}(u_m), u_m'\rangle_0 + \frac{1}{q+2}\frac{d}{dt}(\mathbb{F}(u_m), u_m)_0. \quad (5.25)$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3 [Калантаров, Ладыженская, лемма 1.1]. *Предположим, что* $\Phi(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0, \mathrm{T}_0)$ *при некотором максимальном* $\mathrm{T}_0 > 0$ *в том смысле, что либо* $\mathrm{T}_0 = +\infty$, *либо* $\mathrm{T}_0 < +\infty$ *и тогда*

$$\lim_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \Phi(t) = +\infty, \quad (5.26)$$

причем $\Phi(t) > 0$ *и* $\Phi'(t) > 0$ *при* $t \in [0, \mathrm{T}_0)$. *Пусть, кроме того, при* $t \in [0, \mathrm{T}_0)$ *справедливо обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка*

$$\Phi''\Phi - \alpha_1(\Phi')^2 + \gamma\Phi\Phi' \geqslant 0, \quad t \in [0, \mathrm{T}_0), \quad \alpha_1 > 1, \quad \gamma > 0, \tag{5.27}$$

и справедливо неравенство

$$\Phi_0 < \frac{\alpha_1 - 1}{\gamma}\Phi_1, \quad \Phi_0 \equiv \Phi(0), \quad \Phi_1 \equiv \Phi'(0), \tag{5.28}$$

тогда $\mathrm{T}_0 \leqslant \mathrm{T}_2$

$$\mathrm{T}_2 \equiv -\frac{1}{\gamma}\ln\left(1 - \frac{\gamma}{\alpha_1 - 1}\frac{\Phi_0}{\Phi_1}\right) \tag{5.29}$$

и справедливо предельное равенство (5.26).

Доказательство.

Разделим обе части неравенства (5.27) на функцию $\Phi^{1+\alpha}$ и в результате эквивалентных преобразований получим

$$\left(\frac{\Phi'}{\Phi^{\alpha_1}}\right)' + \gamma\frac{\Phi'}{\Phi^{\alpha_1}} \geqslant 0, \quad \alpha_1 > 1, \quad \gamma > 0,$$

Введем обозначение

$$\Lambda(t) \equiv \frac{\Phi'}{\Phi^{\alpha_1}},$$

тогда для введенной функции будут справедливы неравенства

$$\Lambda'(t) + \gamma\Lambda(t) \geqslant 0, \quad \Lambda(t) \geqslant \Lambda_0\exp(-\gamma t), \quad \frac{\Phi'}{\Phi^{\alpha_1}} \geqslant \Lambda_0\exp(-\gamma t),$$

$$\frac{1}{1-\alpha_1}\left(\Phi^{1-\alpha_1}\right)' \geqslant \Lambda_0\exp(-\gamma t),$$

$$\Phi^{1-\alpha_1} \leqslant \Phi_0^{1-\alpha_1} - \Lambda_0\frac{\alpha_1 - 1}{\gamma}\left[1 - \exp(-\gamma t)\right],$$

$$\Phi \geqslant \frac{1}{\left[\Phi_0^{1-\alpha_1} - \Lambda_0\frac{\alpha_1-1}{\gamma}\left[1 - \exp(-\gamma t)\right]\right]^{1/(\alpha_1-1)}}. \tag{5.30}$$

Потребуем теперь выполнения неравенства (5.28), тогда (5.30) не может быть выполнено для всех $t \in \mathbb{R}^1_+$. Найдется такое $\mathrm{T}_0 \leqslant \mathrm{T}_2$, где T_2 определенно формулой (5.29), что будет иметь место предельное равенство (5.26).

Утверждение доказано.

Заметим, что в силу утверждений 1, 2 и неравенств Коши и Шварца [Морен] справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\langle\mathbb{A}_0 u_m', u_m'\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N}\langle(\mathbb{A}_j(u_m))' u_m'\rangle_j \leqslant \left|\langle\mathbb{D}\mathbb{P}(u_m), u_m'\rangle_0\right| +$$

$$+\frac{1}{q+2}\frac{d}{dt}\left(\mathbb{F}(u_m),u_m\right)_0\leqslant\frac{1}{q+2}\Phi_m^{''}+\langle\mathbb{A}_0u_m^{'},u_m^{'}\rangle_0^{1/2}(\mathbb{F}(u_m),u_m)_0^{1/2}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{q+2}\Phi_m^{''}+\frac{\varepsilon}{2}\langle\mathbb{A}_0u_m^{'},u_m^{'}\rangle_0+\frac{1}{2\varepsilon}\left(\mathbb{F}(u_m),u_m\right)_0\leqslant\frac{1}{q+2}\Phi_m^{''}+\frac{1}{2\varepsilon}\Phi_m^{'}+$$
$$+\frac{\varepsilon}{2}\left[\langle\mathbb{A}_0u_m^{'},u_m^{'}\rangle_0+\sum_{j=1}^{N}\langle\left(\mathbb{A}_j(u_m)\right)^{'}u_m^{'}\rangle_j\right],$$

Отсюда приходим к выводу, что

$$\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left[\langle\mathbb{A}_0u_m^{'},u_m^{'}\rangle_0+\sum_{j=1}^{N}\langle\left(\mathbb{A}_j(u_m)\right)^{'}u_m^{'}\rangle_j\right]\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{q+2}\Phi_m^{''}+\frac{1}{2\varepsilon}\Phi_m^{'}\quad(5.31)$$

$\forall\,\varepsilon\in(0,2)$. Из (5.23)–(5.25) и (5.31) вытекает обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка (см. [Калантаров, Ладыженская]).

$$\Phi_m^{''}\Phi_m-\alpha_1(\varepsilon)\left(\Phi_m^{'}\right)^2+\gamma(\varepsilon)\Phi_m^{'}\Phi_m\geqslant0,\quad(5.32)$$
$$\alpha_1(\varepsilon)\equiv\frac{q+2}{\overline{p}}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right),\ \ \gamma(\varepsilon)=\frac{q+2}{2\varepsilon},\ \ \overline{p}=\max_{j=1,N}p_j>2,$$

из которого в силу утверждения 2 следует, что при условии

$$\Phi_0<\frac{\alpha_1-1}{\gamma}\Phi_1,\ \ \Phi_0\equiv\Phi(0),\ \ \Phi_1\equiv\Phi^{'}(0),\quad(5.33)$$

выполнено следующее неравенство: $\mathrm{T}_0\leqslant\mathrm{T}_2$, где

$$\mathrm{T}_2\equiv-\frac{1}{\gamma}\ln\left(1-\frac{\gamma}{\alpha_1-1}\frac{\Phi_0}{\Phi_1}\right).\quad(5.34)$$

Рассмотрим детально условие (5.33):

$$\frac{1}{2}\langle\mathbb{A}_0u_0,u_0\rangle_0+\sum_{j=1}^{N}\frac{p_j-1}{p_j}\langle\mathbb{A}_j(u_0),u_0\rangle_j<\frac{\alpha_1-1}{\gamma}\left(\mathbb{F}(u_0),u_0\right)_0.\quad(5.35)$$

Найдем максимум функции

$$f(\varepsilon)=\frac{\alpha_1-1}{\gamma}$$

при условии

$$\varepsilon\in\left(0,2\frac{q+2-\overline{p}}{q+2}\right).$$

Из явного вида функции $f(\varepsilon)$ следует, что ее максимум достигается в точке

$$\varepsilon_0 \equiv \frac{q+2-\overline{p}}{q+2}$$

и равен

$$f(\varepsilon) = \frac{(q+2-\overline{p})^2}{\overline{p}\,(q+2)^2}, \quad \alpha_1 = \frac{q+2+\overline{p}}{2\,\overline{p}}, \quad \gamma = \frac{(q+2)^2}{2(q+2-\overline{p})}.$$

Тогда из (5.35) получим оптимальное условие на начальную функцию:

$$\frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, u_{m0}\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_{m0}), u_{m0}\rangle_j < \\ < \frac{(q+2-\overline{p})^2}{\overline{p}\,(q+2)^2} \left(\mathbb{F}(u_{m0}), u_{m0}\right)_0. \quad (5.36)$$

Условие (5.36) будет выполнено для некоторой подпоследовательности последовательности $\{u_{m0}\}$, если мы сразу же потребуем выполнения условия

$$\frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0\rangle_j < \frac{(q+2-\overline{p})^2}{\overline{p}\,(q+2)^2} \left(\mathbb{F}(u_0), u_0\right)_0.$$

Отметим, что в силу условия (5.33) из (5.34) имееем: $\mathrm{T}_2 > 0$.

Из (5.30) вытекает оценка снизу для функции $\Phi_m(t)$:

$$\Phi_m(t) \geqslant \frac{\Psi_{m0}}{\left[\mathrm{T}'_{2m} - \mathrm{Z}(t)\right]^{1/(\alpha_1 - 1)}}, \quad (5.37)$$

где

$$\Psi_{m0} = \left(\Lambda_{m0} \frac{\alpha_1 - 1}{\gamma}\right)^{1/(1-\alpha_1)}, \qquad \mathrm{T}'_{2m} = \Phi_{m0}^{1-\alpha_1} \left(\Lambda_{m0} \frac{\alpha_1 - 1}{\gamma}\right)^{-1},$$
$$\mathrm{Z}(t) \equiv 1 - \exp(-\gamma t), \qquad \Lambda_{m0} = \frac{\left(\mathbb{F}(u_{m0}), u_{m0}\right)_0}{\Phi_{m0}^{\alpha_1}},$$

причем $\mathrm{Z}(+\infty) = 1$, а в силу условия (5.36) $\mathrm{T}'_{2m} < 1$. Докажем теперь, что $\Phi_m(t) \to \Phi(t)$ для почти всех $t \in (0, \mathrm{T})$, где

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u), u\rangle_j.$$

Во-первых, в силу того что $u_m \to u$ сильно в $\mathbb{L}^{p_j}(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_j)$, имеем

$$\int_0^t ds\, \Phi_m(s) \to \int_0^t ds \Phi(s).$$

Во-вторых, из (5.5) получим

$$\Phi_m = \Phi_{m0} + \int\limits_0^t ds\ (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0\,(s).$$

По условию $\Phi_{m0} \to \Phi_0$, $u_m(t) \to u(t)$ сильно в $\mathbb{W}_0$ для почти всех $t \in (0, \mathrm{T})$, поэтому в силу ограниченной липшиц-непрерывности оператора $\mathbb{F}(u) : \mathbb{W}_0 \to \mathbb{W}_0^*$ и ограниченной липшиц-непрерывности $\mathbb{D}(\mathbb{P}(u)) : \mathbb{W}_2 \to \mathbb{W}_4$ приходим к выводу, что $\mathbb{F}(u_m) \to \mathbb{F}(u)$ сильно в $\mathbb{W}_0^*$ и $\mathbb{D}\mathbb{P}(u_m) \to \mathbb{D}\mathbb{P}(u)$ в $\mathbb{W}_4$ для почти всех $t \in (0, \mathrm{T})$. С другой стороны, понятно, что $\left|(\mathbb{F}(u_m), u_m)_0\right| \leqslant \mathrm{B} \mid u_m \mid_0^{q+2} \leqslant \mathrm{C} \parallel u_m \parallel_{\mathbb{V}}^{q+2} \leqslant \mathrm{C}$, где C не зависит от $m \in \mathbb{N}$ и от $t \in (0, \mathrm{T})$. Поэтому по теореме Лебега [Дьяченко] получим, что для почти всех $t \in (0, \mathrm{T})$

$$\Phi_m \to \eta.$$

И снова по теореме Лебега получим

$$\int\limits_0^t ds\, \Phi_m \to \int\limits_0^t ds\, \eta\,.$$

Значит,

$$\int\limits_0^t ds\ [\Phi(s) - \eta(s)] = 0 \quad \forall\, t \in (0, \mathrm{T}),$$

откуда сразу же получаем, что

$$\Phi_m(t) \to \Phi(t) \tag{5.38}$$

для почти всех $t \in (0, \mathrm{T})$.

С учетом того что $u_{m0} \to u_0$ сильно в $\mathbb{V}$, имеем при $m \to +\infty$

$$\Phi_{m0} \to \Phi_0 \equiv \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0\rangle_j,$$

$$\Psi_{m0} \to \Psi_0 \equiv \Lambda_0^{1/(1-\alpha_1)} \left(\frac{\alpha_1 - 1}{\gamma}\right)^{1/(1-\alpha_1)}.$$

Из (5.38) переходом к пределу при $m \to +\infty$ в неравенствах (3.20), (3.21) вытекает, что

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 \exp\{\mathrm{C}_2 t\}, \quad \alpha = 1, \tag{5.39}$$

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 \left[1 + (1-\alpha)\mathrm{C}_2 \Phi_0^{\alpha-1} t\right]^{1/(1-\alpha)}, \quad \alpha < 1, \tag{5.40}$$

где

$$\alpha \equiv \frac{q+2}{\overline{p}}, \quad \mathrm{C}_2 \equiv \mathrm{BC}_{j^*}^{q+2} \left(\frac{\overline{p}}{\overline{p}-1}\right)^{(q+2)/\overline{p}},$$
$$|\, v \,|_0 \leqslant \mathrm{C}_{j^*} \langle \mathbb{A}_{j^*}(v), v \rangle_{j^*}^{1/p_{j^*}}, \quad \overline{p} = \max_{j=1,N} p_j.$$

Из неравенств (5.39) и (5.40) сразу же вытекают первые два утверждения леммы.

Рассмотрим теперь неравенства (3.15) и (5.37). Отметим, что при $m \to +\infty$

$$\Psi_{m0} \to \Psi_0 \equiv \Lambda_0^{1/(1-\alpha_1)} \left(\frac{\alpha_1 - 1}{\gamma}\right)^{1/(1-\alpha_1)}, \mathrm{T}_{2m}^{'} \to \mathrm{T}_2^{'} \equiv \Phi_0^{1-\alpha_1} \Lambda_0^{-1} \frac{\gamma}{\alpha_1 - 1},$$
$$\mathrm{T}_{1m} \to \mathrm{T}_1 = (q/2)^{-1} \Phi_0^{-q/2} \overline{\mathrm{B}}^{-1},$$
$$\overline{\mathrm{B}} \equiv \mathrm{BC}_1^{q+2} 2^{(q+2)/2},$$

где C_1 — константа наилучшего вложения $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$, B — константа из условия (F) 4.

Рассмотрим сначала неравенство (5.37).

Без ограничения общности переходом к подпоследовательности мы можем считать последовательность $\mathrm{T}_{2m}^{'} > 0$ равномерно по m, поскольку $\mathrm{T}_2^{'} > 0$. В силу сходимости последовательности $\mathrm{T}_{2m}^{'} \to \mathrm{T}_2^{'}$ при $m \to +\infty$ мы можем выбрать монотонно сходящуюся подпоследовательность, которую мы снова обозначим через $\mathrm{T}_{2m}^{'}$. Соотвествующие подпоследовательности последовательностей $\{u_{0m}\}$ и $\{u_m\}$ мы снова будем обозначать $\{u_{0m}\}$ и $\{u_m\}$. Пусть последовательность $\mathrm{T}_{2m}^{'} \uparrow \mathrm{T}_2^{'}$, тогда неравенство (5.37) имеет место равномерно по $\mathrm{Z}(t) \in [0, \mathrm{T}_{2\overline{m}}^{'})$, $m \geqslant \overline{m}$, для некоторого фиксированного $\overline{m} \in \mathbb{N}$. Переходом к пределу при $m \to +\infty$ для таких t в неравенстве (5.37), получим

$$\Phi \geqslant \frac{\Psi_0}{\left[\mathrm{T}_2^{'} - \mathrm{Z}(t)\right]^{1/(\alpha_1 - 1)}} \tag{5.41}$$

при $\mathrm{Z}(t) \in [0, \mathrm{T}_{2\overline{m}}^{'})$. Отсюда в силу произвольности $\overline{m} \in \mathbb{N}$ сразу же получаем, что (5.41) справедливо для всех $\mathrm{Z}(t) \in [0, \mathrm{T}_2^{'})$ и время разрушения решения задачи (5.1) удовлетворяет оценке сверху $\mathrm{Z}(\mathrm{T}_0) \leqslant \mathrm{T}_2^{'}$.

Пусть теперь последовательность $\mathrm{T}_{2m}^{'} \downarrow \mathrm{T}_2^{'}$. Сделаем предположение о том, что $\mathrm{Z}(\mathrm{T}_0) > \mathrm{T}_2^{'}$, и пусть, кроме того,

$$M \equiv \sup_{\mathrm{Z}(t) \in [0, \mathrm{T}_2^{'}]} \Phi(t) < +\infty.$$

Тогда (5.41) имеет место равномерно по $\mathrm{Z}(t) \in [0, \mathrm{T}_2^{'})$. Переходом к пределу при $m \to +\infty$ в неравенстве (5.41) получим в силу сделанного

предположения относительно T_0 следующее неравенство:

$$\Phi \geqslant \frac{\Psi_0}{\left[\mathrm{T}_2' - \mathrm{Z}(t)\right]^{1/(\alpha_1-1)}} \leqslant M < +\infty \ \text{ при } \ \mathrm{Z}(t) \in [0, \mathrm{T}_2').$$

Однако из вида полученного неравенства следует, что наше предположение не выполняется. Отсюда сразу же следует, что $\mathrm{Z}(\mathrm{T}_0) \leqslant \mathrm{T}_2'$. Аналогичным образом из неравенства (3.15) вытекает, что

$$\Phi(t) \leqslant \frac{\Phi_0}{\left[1 - \frac{q}{2}\Phi_0^{q/2}\overline{\mathrm{B}}t\right]^{2/q}} \quad \forall\, t \in (0, \mathrm{T}_1), \ \ \mathrm{T}_0 \geqslant \mathrm{T}_1.$$

Теорема доказана.

§ 6. Однозначная разрешимость задачи (1.2) в сильном обобщенном смысле и разрушение ее решения

Определение 4. Сильным обобщенным решением задачи (1.2) назовем решение класса $\mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}_0)$, удовлетворяющее условиям

$$\langle (\mathbb{A}_0 u)', v\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \langle (\mathbb{A}_j(u))', v\rangle_j + \langle \mathbb{D}(\mathbb{P}(u)), v\rangle_0 = (\mathbb{F}(u), v)_0,$$
$$u(0) = u_0 \in \mathbb{V}_0 \ \ \forall \ \ v \in \mathbb{V}_0,$$

где производная по времени понимается в классическом смысле.

Потребуем, чтобы производная Фреше $\mathbb{A}_{j,u}'(u) : \mathbb{V}_j \to \mathcal{L}(\mathbb{V}_j; \mathbb{V}_j^*)$ оператора $\mathbb{A}_j$ была сильно непрерывной по $u \in \mathbb{V}_j$ и, кроме того, имело место вложение $\mathbb{V}_0 \subseteq \mathbb{V}_j, \ \ j = \overline{1, N}$. Отсюда получаем, что в рассматриваемом классе имеют место вложения $\mathbb{A}_0 u \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}_0^*)$, $\mathbb{A}_j(u) \in \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}_j^*)$, $\mathbb{DP}(u) \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{W}_4)$, $\mathbb{F}(u) \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{W}_0^*)$ и $\mathbb{A}_0 u$ и $\mathbb{A}_j(u)$ принадлежат классу $\mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}_0^*)$, а $\mathbb{DP}(u)$ и $\mathbb{F}(u)$ принадлежат классу $\mathbb{C}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}_0^*)$. Тем самым задача в силу условий V и условий нижеследующей теоремы 4 эквивалентна задаче

$$\langle (\mathbb{A}_0 u)', v\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \langle (\mathbb{A}_j(u))', v\rangle_0 + \langle \mathbb{DP}(u), v\rangle_0 = \langle \mathbb{F}(u), v\rangle_0,$$
$$u(0) = u_0 \in \mathbb{V}_0 \ \ \forall \ \ v \in \mathbb{V}_0,$$

где производная по времени понимается в классическом смысле, а символом $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ обозначена скобка двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{V}_0$ и $\mathbb{V}_0^*$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (A), (A_0), (F), (DP). *Предположим, что* $\mathbb{V}_0 \subseteq \mathbb{V}_j, \ \ j = \overline{1, N}, \ \ \mathbb{V}_0 \subseteq \mathbb{W}_0 \subseteq \mathbb{W}_2$ *Кроме того,*

предположим, что либо $2 < \overline{p} < q+2$, *либо* $\overline{p} \geqslant q+2$ *и в последнем случае* $\mathbb{V}_{j^*} \subseteq \mathbb{W}_0$, *где*

$$\overline{p} = \max_{j \in \overline{1,N}} p_j, \quad j^* \in \overline{1,N}, \quad p_{j^*} = \overline{p}.$$

Пусть производные Фреше операторов $\mathbb{A}_j : \mathbb{V}_j \to \mathbb{V}_j^*$

$$\mathbb{A}_{j,u}^{'}(\cdot) \in \mathbb{BC}(\mathbb{V}_j; \mathcal{L}\left(\mathbb{V}_j, \mathbb{V}_j^*\right)),$$

т. е. являются непрерывными органиченными, и, кроме того, пусть они являются монотонными в том смысле, что

$$\langle \mathbb{A}_{j,u}^{'}(u)u_1 - \mathbb{A}_{j,u}^{'}(u)u_2, u_1 - u_2\rangle_j \geqslant 0 \ \ \forall \ \ u, u_1, u_2 \in \mathbb{V}_j, \quad j = \overline{1,N}.$$

Пусть, кроме того, $(\mathbb{F}(v), v)_0 \geqslant \mathrm{c} > 0$ *для всех* $v \in \mathbb{W}_0$, $|v|_0 = 1$.

Тогда для любого $u_0 \in \mathbb{V}_0$ *найдется такое максимальное* $\mathrm{T}_0 \equiv \equiv \mathrm{T}_{u_0} > 0$, *что задача Коши* (1.2) *имеет единственное решение в классе*

$$u(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{V}_0).$$

Причем справедливы следующие результаты:

1) *если* $\alpha \in (0,1)$, *тогда* $\mathrm{T}_0 = +\infty$ *и*

$$\Phi(t) \leqslant \left[\Phi_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\mathrm{A}t\right]^{1/(1-\alpha)};$$

2) *если* $\alpha = 1$, *тогда* $\mathrm{T}_0 = +\infty$ *и*

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 \exp\{\mathrm{A}t\};$$

3) *если* $\alpha > 1$ *и выполнено условие*

$$\frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0\rangle_j < \frac{(q+2-\overline{p})^2}{\overline{p}(q+2)^2}\left(\mathbb{F}(u_0), u_0\right)_0,$$

то найдется такое $\mathrm{T}_0 \in [\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2]$, *что будет справедливо соотношение*

$$\lim_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \Phi(t) = +\infty,$$

где

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u), u\rangle_j, \quad \mathrm{A} \equiv \mathrm{C}_{j^*}^{q+2}\mathrm{M}\left(\frac{\overline{p}}{\overline{p}-1}\right)^{(q+2)/\overline{p}},$$

$$\mathrm{T}_1 \equiv \frac{2}{q}\Phi_0^{-q/2}\overline{\mathrm{B}}^{-1}, \quad \mathrm{T}_2 = -\frac{1}{\gamma}\ln\left(1 - \frac{\gamma}{\alpha_1 - 1}\frac{\Phi_0}{\Phi_1}\right),$$

$$|v|_0 \leqslant \mathrm{C}_{j^*}\langle \mathbb{A}_{j^*} v, v\rangle_{j^*}^{1/p_{j^*}},$$

$$\Phi_0 \equiv \Phi(0), \quad \alpha_1 \equiv \frac{\overline{p}+q+2}{2\overline{p}}, \quad \Phi_1 = \frac{(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0}{\Phi_0^{\alpha_1}}, \quad \overline{\mathrm{B}} \equiv \mathrm{MC}_1^{q+2}2^{(q+2)/2},$$

$$\gamma \equiv \frac{(q+2)^2}{2(q+2-\overline{p})} \ \textit{в случае} \ q+2 > \overline{p} \equiv \max_{j=\overline{1,N}} p_j,$$

C_1 — *константа наилучшего вложения* $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$, B — *константа из условия* (F) 4.

Доказательство.

Шаг 1. *Локальная разрешимость.*

Справедлива следующая лемма.

Лемма 9. *Для любого* $u_0 \in \mathbb{V}_0$ *найдется такое максимальное* $\mathrm{T}_0 > 0$, *что существует единственное решение класса* $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{V}_0)$ *для любого* $\mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}_0)$ *задачи* (1.2).

Доказательство.

Доказательство в точности повторяет доказательство леммы 4 данной главы.

Лемма доказана.

Шаг 2. *Априорные оценки и разрушение.*

Справедлива следующая лемма.

Лемма 10. *Пусть*

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0 + \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u), u\rangle_j, \ \ \alpha \equiv \frac{q+2}{\overline{p}},$$
$$(\mathbb{F}(v), v)_0 \geqslant \mathrm{c} > 0 \ \ \forall\, v \in \mathbb{W}_0, \ \ |v|_0 = 1.$$

Тогда

1) *если* $\alpha \in (0,1)$, *то* $\mathrm{T}_0 = +\infty$ *и справедливо неравенство*

$$\Phi(t) \leqslant \left[\Phi_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\mathrm{A}t\right]^{1/(1-\alpha)};$$

2) *если* $\alpha = 1$, *то* $\mathrm{T}_0 = +\infty$ *и справедливо неравенство*

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 \exp(\mathrm{A}t);$$

3) *если* $\alpha > 1$ *и выполнено условие*

$$\frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0\rangle_j < \frac{(q+2-\overline{p})^2}{2\overline{p}(q+2)^2}\,(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0\,,$$

то $\mathrm{T}_0 \in [\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2]$, *причем справедливо соотношение*

$$\lim_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \Phi(t) = +\infty,$$

где

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u), u\rangle_j, \ \ \mathrm{A} \equiv \mathrm{C}_{j^*}^{q+2}\mathrm{M}\left(\frac{\overline{p}}{\overline{p}-1}\right)^{(q+2)/\overline{p}},$$
$$\mathrm{T}_1 \equiv \frac{2}{q}\Phi_0^{-q/2}\overline{\mathrm{B}}^{-1}, \ \ \mathrm{T}_2 = -\frac{1}{\gamma}\ln\left(1 - \frac{\gamma}{\alpha_1 - 1}\frac{\Phi_0}{\Phi_1}\right),$$

$$\Phi_0 \equiv \Phi(0),\ \ \alpha_1 \equiv \frac{\overline{p}+q+2}{2\overline{p}},\ \ \Phi_1 = \frac{(\mathbb{F}(u_0),u_0)_0}{\Phi_0^{\alpha_1}},\ \ ,\overline{\mathrm{B}} \equiv \mathrm{M}\mathrm{C}_1^{q+2}2^{(q+2)/2},$$

$$|v|_0 \leqslant \mathrm{C}_{j^*}\langle \mathbb{A}_{j^*}v,v\rangle_{j^*}^{1/p_{j^*}},\ \gamma \equiv \frac{(q+2)^2}{2(q+2-\overline{p})}\ \ \textit{при}\ \ q+2>\overline{p}\equiv \max_{j=\overline{1,N}} p_j,$$

C_1 — *константа наилучшего вложения* $\mathbb{V}\hookrightarrow\mathbb{W}_0$, B — *константа из условия* (F) 4.

Доказательство.

Пусть $u\in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{V}_0)$ решение задачи (1.2). Тогда умножим обе части равенства (1.2) на $u(t)$ и на $u^{'}(t)$ и после интегрирования по частям получим следующие равенства:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0u,u\rangle_0+\sum_{j=1}^{N}\frac{p_j-1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u),u\rangle_j\right]=(\mathbb{F}(u),u)_0\,, \tag{6.1}$$

$$\langle \mathbb{A}_0u^{'},u^{'}\rangle_0+\sum_{j=1}^{N}\langle (\mathbb{A}_j(u))^{'},u^{'}\rangle_j=$$

$$=\frac{1}{q+2}\frac{d}{dt}(\mathbb{F}(u),u)_0-\langle \mathbb{D}\mathbb{P}(u),u^{'}\rangle_0. \tag{6.2}$$

Интегрированием уравнения (6.1) по $t\in(0,\mathrm{T})$ получим

$$\Phi(t)=\Phi_0+\int\limits_0^t ds\ (\mathbb{F}(u),u)_0\ , \tag{6.3}$$

где

$$\Phi(t)\equiv\frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0u,u\rangle_0+\sum_{j=1}^{N}\frac{p_j-1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u),u\rangle_j\,,\ \ \Phi_0=\Phi(0).$$

Так как по условию $\mathbb{V}_0\subset\mathbb{W}_0$, то найдется постоянная $\mathrm{C}_1>0$ такая, что

$$|\ v\ |_0\leqslant \mathrm{C}_1\langle \mathbb{A}_0v,v\rangle_0^{1/2},$$

и из (6.3) вытекает неравенство

$$\Phi(t)\leqslant\Phi_0+\mathrm{M}\mathrm{C}_1^{q+2}\int\limits_0^t ds\,\langle \mathbb{A}_0v,v\rangle_0^{(q+2)/2}\leqslant\Phi_0+\overline{\mathrm{B}}\int\limits_0^t ds\,\Phi^{(q+2)/2}(s),$$

$$\overline{\mathrm{B}}\equiv\mathrm{M}\mathrm{C}_1^{q+2}2^{(q+2)/2}.$$

По теореме Бихари [Демидович] имеем

$$\Phi(t)\leqslant\frac{\Phi_0}{\left[1-\frac{q}{2}\Phi_0^{q/2}\overline{\mathrm{B}}t\right]^{2/q}}\ \ \forall\, t\in[0,\mathrm{T}_1),\ \ \mathrm{T}_1\equiv\frac{2}{q}\Phi_0^{-q/2}\overline{\mathrm{B}}^{-1}. \tag{6.4}$$

Стало быть, в случае $\overline{p}<q+2$, из (6.4) получаем: $\mathrm{T}_0\geqslant\mathrm{T}_1$.

Пусть теперь $\overline{p} \geqslant q+2$. Воспользуемся тем, что найдется такое $j^* \in \overline{1,N}$ $(p_{j^*} = \overline{p})$, что $p_{j^*} \geqslant q+2$ и $\mathbb{V}_{j^*} \subset \mathbb{W}_0$. Пусть C_{j^*} — константа вложения $\mathbb{V}_{j^*} \subset \mathbb{W}_0$:

$$| v |_0 \leqslant \mathrm{C}_{j^*} \langle \mathbb{A}_{j^*}(v), v \rangle_{j^*}^{1/p_{j^*}},$$

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 + \mathrm{C}_{j^*}^{q+2}\mathrm{M} \int\limits_0^t ds\, \langle \mathbb{A}_{j^*}(v), v \rangle_{j^*}^{(q+2)/p_{j^*}} \leqslant$$

$$\leqslant \Phi_0 + \mathrm{C}_{j^*}^{q+2}\mathrm{M} \left(\frac{\overline{p}}{\overline{p}-1} \right)^{(q+2)/\overline{p}} \int\limits_0^t ds\, \Phi^{(q+2)/\overline{p}}(s).$$

Рассмотрим два случая:

$$\alpha = 1, \quad \alpha \in (0,1).$$

В первом случае по теореме Гронуолла–Беллмана [Демидович] имеем:

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 \exp\{\mathrm{A}t\}, \quad \mathrm{A} \equiv \mathrm{C}_{j^*}^{q+2}\mathrm{M} \left(\frac{\overline{p}}{\overline{p}-1} \right)^{(q+2)/\overline{p}}. \tag{6.5}$$

Во втором случае $\alpha \in (0,1)$ по теореме Бихари [Демидович] получим

$$\Phi(t) \leqslant \left[\Phi_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\mathrm{A}t \right]^{1/(1-\alpha)}. \tag{6.6}$$

Из (6.5), (6.6) следует, что величина $\mathrm{T}_0 = +\infty$ в случае $\alpha \in (0,1]$.

Теперь из соотношений (6.1), (6.2) точно так же, как и на шаге 5, выводим следующее обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка (см. [Калантаров, Ладыженская])

$$\Phi'' \Phi - \alpha_1 (\Phi')^2 + \gamma \Phi \Phi' \geqslant 0, \quad t \in [0, \mathrm{T}_0), \quad \alpha = \frac{q+2}{\overline{p}} > 1, \quad \gamma > 0, \tag{6.7}$$

где

$$\alpha_1 \equiv \frac{\overline{p}+q+2}{2\overline{p}}, \quad \gamma \equiv \frac{(q+2)^2}{2(q+2-\overline{p})}.$$

Потребуем выполнения условия

$$\frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0 \rangle_j < \frac{(q+2-\overline{p})^2}{\overline{p}\,(q+2)^2} \left(\mathbb{F}(u_0), u_0 \right)_0. \tag{6.8}$$

Из условия $\left(\mathbb{F}(u), u \right)_0 \geqslant 0$ для всех $u \in \mathbb{W}_0$ и полученного ранее равенства (6.1)

$$\Phi'(t) = \left(\mathbb{F}(u), u \right)_0$$

получим: $\Phi'(t) \geqslant 0$.

Тогда из утверждения 3 с учетом (6.7) вытекает следующее неравенство:

$$\Phi(t) \geqslant \frac{\Psi_0}{\left[\mathrm{T}_2' - \mathrm{Z}(t)\right]^{1/(\alpha_1-1)}}, \tag{6.9}$$

где

$$\Psi_0 = \left(\Gamma_0 \frac{\alpha_1 - 1}{\gamma}\right)^{1/(1-\alpha_1)}, \quad \mathrm{T}_2' = \Phi_0^{1-\alpha_1}\left(\Gamma_0 \frac{\alpha_1 - 1}{\gamma}\right)^{-1},$$

$$\mathrm{Z}(t) \equiv 1 - \exp(-\gamma t), \quad \Gamma_0 = \frac{(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0}{\Phi_0^{\alpha_1}},$$

причем $\mathrm{Z}(+\infty) = 1$, а в силу условия (6.8) $\mathrm{T}_2^{'} < 1$. Из (6.9) сразу же получаем, что $\mathrm{Z}(\mathrm{T}_0) < \mathrm{T}_2^{'}$.

Лемма, а тем самым и теорема, доказаны.

Теорема доказана.

§ 7. Примеры

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые начально-краевые задачи для уравнений (1.3)–(1.11). В данных примерах используются стандартные теоремы вложения Соболева, которые можно найти, например, в [Демиденко].

Во всех примерах $\mathbb{H} = \mathbb{L}^2(\Omega)$.

Пример 1.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle u + \sum_{j=1}^{n} \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p_j-2}\nabla u\right)\right) - u + |u|^q u = 0,$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \;\; u(x,0) = u_0(x),$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей класса $\mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0,1]$, а операторные коэффициенты имеют вид

$$\mathbb{A}_0 u \equiv -\triangle u : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$

$$\mathbb{A}_j(u) \equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p_j-2}\nabla u) : \mathbb{W}_0^{1,p_j}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,p_j^{'}}(\Omega),$$

$$\mathbb{F}(u) \equiv |u|^q u : \mathbb{L}^{q+2}(\Omega) \to \mathbb{L}^{q^{'}}(\Omega), \;\; \mathbb{L}u \equiv u : \mathbb{L}^2(\Omega) \to \mathbb{L}^2(\Omega),$$

$$p_j > 2, \;\; q_1 > 0, \;\; p_j^{'} \equiv \frac{p_j}{p_j - 1}, \;\; q^{'} \equiv \frac{q+2}{q+1},$$

$$\mathbb{V}_0 \equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad \mathbb{V}_j \equiv \mathbb{W}_0^{1,p_j}(\Omega), \quad \mathbb{W}_0 \equiv \mathbb{L}^{q+2}(\Omega), \quad \mathbb{W}_1 \equiv \mathbb{L}^2(\Omega),$$

$$\mathbb{V}_0^* \equiv \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \quad \mathbb{V}_j^* \equiv \mathbb{W}^{-1,p_j^{'}}(\Omega), \quad \mathbb{W}_0^* \equiv \mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\Omega), \quad \mathbb{W}_1^* \equiv \mathbb{L}^2(\Omega),$$

$$\mathbb{V} \equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega) \bigcap \left(\bigcap_{j=1}^{n} \mathbb{W}_0^{1,p_j}(\Omega)\right).$$

Вложение $\mathbb{V}_0 \equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{W}_0 \equiv \mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$ имеет место при следующих условиях:

$$0 < q \leqslant \frac{4}{N-2}, \ \text{при} \ N \geqslant 3; \ \ 0 < q < +\infty \ \text{при} \ N = 1, 2.$$

Наконец, вложение $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$ справедливо при условиях

$$\bigcap_{j=1}^{n} \mathbb{W}_0^{1,p_j}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^{q+2}(\Omega),$$

что в свою очередь справедливо при условиях

$$0 < q < +\infty \ \text{при} \ N \leqslant \overline{p} \equiv \max_{j=\overline{1,n}} p_j; \ \ 2 < q+2 < \frac{N\overline{p}}{N-\overline{p}} \ \text{при} \ N > \overline{p}.$$

Кроме того, $\mathbb{W}_0 \equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{W}_1 \equiv \mathbb{L}^2(\Omega)$. Потребуем выполнения следующих условий на начальные функции $u_0 \in \mathbb{V}$:

$$(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > (\mathbb{L}u_0, u_0)_1 + \frac{q\sqrt{2\overline{p}}}{q+2-\overline{p}}\Phi_0, \ \ (\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > \frac{q+2}{2}(\mathbb{L}u_0, u_0)_1$$

при условии $\overline{p} < q+2$.

Можно проверить, что операторные коффициенты удовлетворяют всем условиям теоремы 1.

Пример 2.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle u + \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) - |u|^{q_1}u\right) - u + |u|^q u = 0,$$
$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \ \ u(x,0) = u_0(x),$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей класса $\mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0,1]$, а операторные коэффициенты имеют вид

$$\mathbb{A}_0 u \equiv -\triangle u : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \qquad \mathbb{L}u \equiv u : \mathbb{L}^2(\Omega) \to \mathbb{L}^2(\Omega),$$
$$\mathbb{A}_2(u) \equiv |u|^{p_2-2}u : \mathbb{L}^{p_2}(\Omega) \to \mathbb{L}^{p_2'}(\Omega), \quad \mathbb{F}(u) \equiv |u|^q u : \mathbb{L}^{q+2}(\Omega) \to \mathbb{L}^{q'}(\Omega),$$
$$\mathbb{A}_1(u) \equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u) : \mathbb{W}_0^{1,p_1}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,p_1'}(\Omega),$$

$$p_1 \equiv p > 2, \ \ p_2 \equiv q_1 + 2, \ \ q_1 > 0, \ \ p_1' \equiv \frac{p_1}{p_1-1}, \ \ p_2' \equiv \frac{p_2}{p_2-1}, \ \ q' \equiv \frac{q+2}{q+1},$$
$$\mathbb{V}_0 \equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad \mathbb{V}_1 \equiv \mathbb{W}_0^{1,p_1}(\Omega), \quad \mathbb{V}_2 \equiv \mathbb{L}^{p_2}(\Omega), \quad \mathbb{W}_0 \equiv \mathbb{L}^{q+2}(\Omega),$$
$$\mathbb{V}_0^* \equiv \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \quad \mathbb{V}_1^* \equiv \mathbb{W}^{-1,p_1'}(\Omega), \quad \mathbb{V}_2^* \equiv \mathbb{L}^{p_2'}(\Omega), \quad \mathbb{W}_0^* \equiv \mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\Omega),$$

$$\mathbb{W}_1 \equiv \mathbb{L}^2(\Omega), \quad \mathbb{W}_1^* \equiv \mathbb{L}^2(\Omega),$$

$$\mathbb{V} \equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega) \bigcap \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \bigcap \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega).$$

Вложение $\mathbb{V}_0 \equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{W}_0 \equiv \mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$ справедливо при условиях

$$0 < q \leqslant \frac{4}{N-2}, \ \text{при} \ N \geqslant 3; \ \ 0 < q < +\infty \ \text{при} \ N = 1, 2.$$

Наконец, имеет место вложение $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$, в том случае если

$$\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^{q+2}(\Omega),$$

которое справедливо при условиях

$$0 < q < +\infty \ \text{при} \ N \leqslant p; \ \ 2 < q+2 < \frac{Np}{N-p} \ \text{при} \ N > p.$$

Кроме того, $\mathbb{V}_0 \hookrightarrow \mathbb{W}_1$. Если $p \geqslant q_1 + 2$, то в силу установленных выше условий имеем: $\mathbb{V}_1 \subset \mathbb{W}_0$. Если же $q_1 + 2 > p$, то при условии $q_1 + 2 \geqslant q + 2$ имеем: $\mathbb{V}_2 \subset \mathbb{W}_0$. Наконец, $u_0 \in \mathbb{V}$. Потребуем выполнения следующих условий на начальные функции $u_0 \in \mathbb{V}$:

$$(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > (\mathbb{L}u_0, u_0)_1 + \frac{q\sqrt{2\overline{p}}}{q+2-\overline{p}}\Phi_0, \ \ (\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > \frac{q+2}{2}(\mathbb{L}u_0, u_0)_1$$

при условии $\overline{p} < q + 2$. Можно проверить, что операторные коэффициенты и соответствующие банаховы пространства удовлетворяют всем условиям теоремы 1.

Пример 3.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\triangle^2 u + \triangle u + \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\right) + \triangle u - \operatorname{div}(|\nabla u|^q \nabla u) = 0,$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \ \ u(0,x) = u_0(x),$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$ класса $\mathbb{C}^{(4,\delta)}$, $\delta \in (0,1]$, а операторные коэффициенты имеют вид

$$\mathbb{A}_0 u \equiv \triangle^2 u - \triangle u : \mathbb{H}_0^2(\Omega) \to \mathbb{H}^{-2}(\Omega),$$

$$\mathbb{F}(u) \equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^q \nabla u) : \mathbb{W}_0^{1,q+2}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,q'}(\Omega),$$

$$\mathbb{A}_1(u) \equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) : \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega),$$

$$\mathbb{L}u = -\triangle u : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$

$$\mathbb{V}_0 \equiv \mathbb{H}_0^2(\Omega), \quad \mathbb{W}_0 \equiv \mathbb{W}_0^{1,q+2}(\Omega), \quad \mathbb{W}_1 \equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad \mathbb{V}_1 \equiv \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega),$$

$$\mathbb{V}_0^* \equiv \mathbb{H}^{-2}(\Omega), \quad \mathbb{W}_0^* \equiv \mathbb{W}^{-1,q'}(\Omega), \quad \mathbb{W}_1^* \equiv \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \quad \mathbb{V}_1^* \equiv \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega),$$

$$\mathbb{V} \equiv \mathbb{H}_0^2(\Omega) \bigcap \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega), \quad q' \equiv \frac{q+2}{q+1}, \ \ p' = \frac{p}{p-1}.$$

Вложение $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$ выполнено когда

$$0 < q \leqslant \frac{4}{N-2}, \ \text{при} \ N \geqslant 3; \ \ 0 < q < +\infty \ \text{при} \ N = 1, 2.$$

Вложение $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_1$ очевидно, поскольку $\mathbb{H}_0^2(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{H}_0^1(\Omega)$. Также имеет место вложение $\mathbb{V}_1 \subset \mathbb{W}_0$ при условии $p \geqslant q+2$.

Потребуем теперь выполнения условия на начальную функцию $u_0 \in \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$:

$$(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > (\mathbb{L}u_0, u_0)_1 + \frac{q\sqrt{2\overline{p}}}{q+2-\overline{p}}\Phi_0, \quad (\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > \frac{q+2}{2}(\mathbb{L}u_0, u_0)_1$$

при условии $\overline{p} = p < q+2$.

Таким образом, выполнены все условия теоремы 1.

Пример 4.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle u - |u|^{p_1-2}u\right) + \triangle u + |u|^q u = 0,$$
$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x),$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей класса $\mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0,1]$, а операторные коэффициенты имеют вид

$$\mathbb{A}_0 u \equiv -\triangle u : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \qquad \mathbb{A}_1(u) \equiv |u|^{p_1-2}u : \mathbb{L}^{p_1}(\Omega) \to \mathbb{L}^{p_1'}(\Omega),$$
$$\mathbb{F}(u) \equiv |u|^q u : \mathbb{L}^{q+2}(\Omega) \to \mathbb{L}^{q'}(\Omega), \qquad \mathbb{L}u \equiv -\triangle u : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$

$$\mathbb{V}_0 \equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad \mathbb{V}_1 \equiv \mathbb{L}^{p_1}(\Omega), \quad \mathbb{W}_0 \equiv \mathbb{L}^{q+2}(\Omega), \quad \mathbb{W}_1 \equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega),$$
$$\mathbb{V}_0^* \equiv \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \quad \mathbb{V}_1^* \equiv \mathbb{L}^{p_1'}(\Omega), \quad \mathbb{W}_0^* \equiv \mathbb{L}^{q'}(\Omega), \quad \mathbb{W}_1^* \equiv \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$

$$p_1 = q_1 + 2, \quad q_1 > 0, \quad p_1' \equiv \frac{p_1}{p_1-1}, \quad q' \equiv \frac{q+2}{q+1}, \quad q > 0.$$

Вложение $\mathbb{V}_0 \subset \mathbb{W}_0$ имеет место при условии

$$0 < q \leqslant \frac{4}{N-2}, \text{ при } N \geqslant 3; \ 0 < q < +\infty, \text{ при } N = 1, 2.$$

Это означает, что

$$\mathbb{V} \equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega) \bigcap \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{W}_0 \equiv \mathbb{L}^{q+2}(\Omega).$$

Кроме того, $\mathbb{V}_0 = \mathbb{W}_1$. Потребуем, чтобы

$$(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > (\mathbb{L}u_0, u_0)_1 + \frac{q\sqrt{2\overline{p}}}{q+2-\overline{p}}\Phi_0, \quad (\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > \frac{q+2}{\overline{p}}(\mathbb{L}u_0, u_0)_1$$

при условии $\overline{p} = p_1 < q+2$. Проверим теперь монотонность производной Фреше оператора $\mathbb{A}_1(u) = |u|^{q_1}u$ в указанном в формулировке теоремы 2 смысле. Действительно, производная Фреше имеет вид

$$\mathbb{A}_{1,u}'(u)h \equiv (q_1+1)|u|^{q_1}h : \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega) \to \mathbb{L}^{q_1'}(\Omega), \quad q_1' \equiv \frac{q_1+2}{q_1+1}$$
$$\forall\, h \in \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega),$$

$$\langle \mathbb{A}'_{1,u}(u)u_1 - \mathbb{A}'_{1,u}(u)u_2, u_1 - u_2\rangle_1 = (q_1+1)\rangle\langle |u|^{q_1}u_1 - |u|^{q_1}u_2, u_1 - u_2\rangle_1 =$$
$$= (q_1+1)\int\limits_\Omega dx\ (|u|^{q_1}u_1 - |u|^{q_1}u_2)(u_1 - u_2) \geqslant 0\ \ \forall\, u, u_1, u_2 \in \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega).$$

Докажем теперь, что при условии $\| \nabla u_n - \nabla u \|_2 \to 0$, когда $n \to +\infty$, имеет место сходимость производных Фреше в равномерной операторной топологии $\mathcal{L}(\mathbb{H}^1_0(\Omega), \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$. Действительно,

$$\| \mathbb{A}'_{1,u}(u) - \mathbb{A}'_{1,u}(u_n) \|_{\mathbb{H}^1_0 \to \mathbb{H}^{-1}} = \sup_{\|\nabla h\|_2 = 1} \| \mathbb{A}'_{1,u}(u)h - \mathbb{A}'_{1,u}(u_n)h \|_{-1} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\|\nabla h\|_2 = 1} \| \mathbb{A}'_{1,u}(u)h - \mathbb{A}'_{1,u}(u_n)h \|_{(q_1+2)/(q_1+1)} \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{C} \sup_{\|\nabla h\|_2 = 1} \left(\int\limits_\Omega dx\, |[|u|^{q_1} - |u_n|^{q_1}]h|^{\frac{q_1+2}{q_1+1}} \right)^{(q_1+1)/(q_1+2)}.$$

Рассмотрим отдельно интеграл

$$\mathrm{J}_n = \int\limits_\Omega dx\, |[|u|^{q_1} - |u_n|^{q_1}]h|^{\frac{q_1+2}{q_1+1}} \leqslant \int\limits_\Omega dx\, ||u|^{q_1} - |u_n|^{q_1}|^{\frac{q_1+2}{q_1+1}} |h|^{\frac{q_1+2}{q_1+1}} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int\limits_\Omega dx\, ||u|^{q_1} - |u_n|^{q_1}|^{(q_1+2)/q_1} \right)^{q_1/(q_1+1)} \left(\int\limits_\Omega dx\, |h|^{q_1+2} \right)^{1/(q_1+1)} \leqslant$$
$$\leqslant \| \nabla h \|_2^{(q_1+2)/(q_1+1)} \left(\int\limits_\Omega dx\, ||u|^{q_1} - |u_n|^{q_1}|^{(q_1+2)/q_1} \right)^{q_1/(q_1+1)} \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{C} \left(\int\limits_\Omega dx\, ||u|^{q_1} - |u_n|^{q_1}|^{(q_1+2)/q_1} \right)^{q_1/(q_1+1)} \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{C} \max\{ \| \nabla u \|_2^{(q_1+2)q_1/(q_1+1)}, \| \nabla u_n \|_2^{(q_1+2)q_1/(q_1+1)} \} \leqslant \mathrm{C}.$$

Отметим, что поскольку $\| \nabla u - \nabla u_n \|_2 \to +0$ при $n \to +\infty$ в силу условий на $q > 0$, то $u_n \to u$ сильно в $\mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$. Рассмотрим функцию $f(x,u) = |u|^{q_1} : \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega) \to \mathbb{L}^{\frac{q_1+2}{q_1}}(\Omega)$. Можно проверить, что выполнены все условия теоремы Вайнберга–Немыцкого (см. Приложение Б). По определению непрерывность оператора $\mathrm{f} : \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega) \to \mathbb{L}^{(q_1+2)/q_1}(\Omega)$ означает, что имеет место предельное равенство

$$\lim_{n \to +\infty} \int\limits_\Omega \int dx\ |f(x,u) - f(x,u_n)|^{\frac{q_1+2}{q_1}} = 0$$

при условии сильной сходимости $u_n \to u$ в $\mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$.

Значит, по теореме Вайнберга–Немыцкого (см. Приложение В) имеем: $J_n \to +0$ при $n \to +\infty$ равномерно по h на сфере $\| \nabla h \|_2 = 1$.

Таким образом, выполнены все условия теоремы 2.

Пример 5.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle u + \sum_{j=1}^{n} \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p_j-2}\nabla u\right)\right) + u\frac{\partial u}{\partial x_1} + u^3 = 0,$$
$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x),$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей класса $\mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0,1]$, а операторные коэффициенты имеют вид

$$\mathbb{A}_0 u \equiv -\triangle u : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$
$$\mathbb{A}_j(u) \equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p_j-2}\nabla u) : \mathbb{W}_0^{1,p_j}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,p_j'}(\Omega),$$
$$\mathbb{F}(u) \equiv u^3 : \mathbb{L}^4(\Omega) \to \mathbb{L}^{4/3}(\Omega), \quad \mathbb{P}(u) \equiv u^2 : \mathbb{L}^4(\Omega) \to \mathbb{L}^2(\Omega),$$
$$\mathbb{D}v \equiv \frac{\partial v}{\partial x_1} : \mathbb{L}^2(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \quad p_j > 2,$$
$$\mathbb{V}_0 \equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega), \qquad \mathbb{V}_j \equiv \mathbb{W}_0^{1,p_j}(\Omega), \qquad \mathbb{W}_0 \equiv \mathbb{L}^4(\Omega),$$
$$\mathbb{V}_0^* \equiv \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \qquad \mathbb{V}_j^* \equiv \mathbb{W}^{-1,p_j'}(\Omega), \qquad \mathbb{W}_0^* \equiv \mathbb{L}^{4/3}(\Omega),$$

$$\mathbb{V} \equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega) \bigcap \left(\bigcap_{j=1}^{n} \mathbb{W}_0^{1,p_j}(\Omega)\right).$$

$$\mathbb{W}_2 \equiv \mathbb{L}^4(\Omega), \quad \mathbb{W}_3 \equiv \mathbb{L}^2(\Omega), \quad \mathbb{W}_4 \equiv \mathbb{H}^{-1}(\Omega).$$

Вложение $\mathbb{V}_0 \equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{W}_0 \equiv \mathbb{L}^4(\Omega)$ имеет место при условии $N \leqslant 4$.

Наконец вложение $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0 = \mathbb{W}_2$ справедливо при условиях

$$\bigcap_{j=1}^{n} \mathbb{W}_0^{1,p_j}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^{q+2}(\Omega),$$

что в свою очередь справедливо при условиях

$$N \leqslant \overline{p} \equiv \max_{j=\overline{1,n}} p_j, \quad 4 < \frac{N\overline{p}}{N-\overline{p}} \ \text{ при } \ N > \overline{p}.$$

Потребуем выполнения следующих условий на начальные функции $u_0 \in \mathbb{V}$:

$$\frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0\rangle_j < \frac{(4-\overline{p})^2}{16\overline{p}}\,(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0$$

при условии $\overline{p} < 4$.

Можно проверить, что операторные коффициенты удовлетворяют всем условиям теоремы 3.

Пример 6.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\triangle^2 u+\triangle u+\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\right)+u\frac{\partial u}{\partial x_1}-\operatorname{div}(|\nabla u|^2\nabla u)=0,$$

$$u\big|_{\partial\Omega}=\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega}=0,\quad u(0,x)=u_0(x),$$

где $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$ класса $\mathbb{C}^{(4,\delta)}$, $\delta\in(0,1]$, а операторные коэффициенты имеют вид

$$\mathbb{A}_0 u\equiv\triangle^2 u-\triangle u:\mathbb{H}_0^2(\Omega)\to\mathbb{H}^{-2}(\Omega),$$

$$\mathbb{F}(u)\equiv-\operatorname{div}(|\nabla u|^2\nabla u):\mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega)\to\mathbb{W}^{-1,4/3}(\Omega),$$

$$\mathbb{A}_1(u)\equiv-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u):\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)\to\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega),$$

$$\mathbb{P}(u)=u^2:\mathbb{H}_0^1(\Omega)\subset\mathbb{L}^4(\Omega)\to\mathbb{L}^2(\Omega)),$$

$$\mathbb{D}v=\frac{\partial v}{\partial x_1}:\mathbb{L}^2(\Omega)\to\mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$

$$\begin{array}{lll}\mathbb{V}_0\equiv\mathbb{H}_0^2(\Omega), & \mathbb{W}_0\equiv\mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega), & \mathbb{V}_1\equiv\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega),\\ \mathbb{V}_0^*\equiv\mathbb{H}^{-2}(\Omega), & \mathbb{W}_0^*\equiv\mathbb{W}^{-1,4/3}(\Omega), & \mathbb{V}_1^*\equiv\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega),\\ \mathbb{W}_2\equiv\mathbb{L}^4(\Omega), & \mathbb{W}_3\equiv\mathbb{L}^2(\Omega), & \mathbb{W}_4\equiv\mathbb{H}^{-1}(\Omega),\end{array}$$

$$\mathbb{V}\equiv\mathbb{H}_0^2(\Omega)\bigcap\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega).$$

Вложение $\mathbb{V}\hookrightarrow\mathbb{W}_0\subset\mathbb{W}_1$ имеет место при условии $\mathrm{N}\leqslant 3$.

Потребуем теперь выполнения условия на начальную функцию $u_0\in\in\mathbb{H}_0^2(\Omega)$:

$$\frac{1}{2}\langle\mathbb{A}_0u_0,u_0\rangle_0+\sum_{j=1}^{N}\frac{p_j-1}{p_j}\langle\mathbb{A}_j(u_0),u_0\rangle_j<\frac{(4-\overline{p})^2}{16\overline{p}}\,(\mathbb{F}(u_0),u_0)_0$$

при условии $\overline{p}<4$.

Таким образом, выполнены все условия теоремы 3.

Пример 7.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\triangle^2 u+\triangle u\right)-\operatorname{div}(|\nabla u|^2\nabla u)+$$
$$+\beta_1\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)+\beta_2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\beta_3\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)=0,$$

$$u\big|_{\partial\Omega}=\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega}=0,\quad u(x,0)=u_0(x),$$

где $\beta_1+\beta_2+\beta_3=0$, $|\beta_1|+|\beta_2|+|\beta_3|>0$, $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$ класса $\mathbb{C}^{(4,\delta)}$, $\delta\in(0,1]$, а операторные коэффициенты имеют вид

$$\mathbb{A}_0u\equiv\triangle^2u-\triangle u:\mathbb{H}_0^2(\Omega)\to\mathbb{H}^{-2}(\Omega),$$
$$\mathbb{F}(u)\equiv-\operatorname{div}(|\nabla u|^2\nabla u):\mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega)\to\mathbb{W}^{-1,4/3}(\Omega),$$

$$\mathbb{P}(u)=\beta_1\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_3}\mathbf{e}_1+\beta_2\frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial u}{\partial x_1}\mathbf{e}_2+\beta_3\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}\mathbf{e}_3:\mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega)\to$$
$$\to\mathbb{L}^2(\Omega)\times\mathbb{L}^2(\Omega)\times\mathbb{L}^2(\Omega),$$

$$\mathbb{D}\mathbf{v}\equiv\operatorname{div}(\mathbf{v}):\mathbb{L}^2(\Omega)\times\mathbb{L}^2(\Omega)\times\mathbb{L}^2(\Omega)\to\mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$
$$\mathbb{V}_0\equiv\mathbb{H}_0^2(\Omega),\quad\mathbb{W}_0\equiv\mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega),\quad\mathbb{W}_2\equiv\mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega),$$
$$\mathbb{W}_3\equiv\mathbb{L}^2(\Omega)\times\mathbb{L}^2(\Omega)\times\mathbb{L}^2(\Omega),$$
$$\mathbb{W}_4\equiv\mathbb{H}^{-1}(\Omega),\quad\mathbb{V}_0^*\equiv\mathbb{H}^{-2}(\Omega),\quad\mathbb{W}_0^*\equiv\mathbb{W}^{-1,4/3}(\Omega),$$
$$\mathbb{V}\equiv\mathbb{H}_0^2(\Omega).$$

Кроме того, имеет место вложение $\mathbb{V}\hookrightarrow\mathbb{W}_0\subset\mathbb{W}_1$.

Потребуем теперь выполнения условия на начальную функцию $u_0\in\in\mathbb{H}_0^2(\Omega)$:

$$\frac12\langle\mathbb{A}_0u_0,u_0\rangle_0+\sum_{j=1}^N\frac{p_j-1}{p_j}\langle\mathbb{A}_j(u_0),u_0\rangle_j<\frac{(4-\overline{p})^2}{16\overline{p}}\,(\mathbb{F}(u_0),u_0)_0\,.$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 4.

Пример 8.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle u-|u|^{p_1-2}u\right)+\frac{\partial|u|^{q_2+1}}{\partial x_1}+|u|^{2q_2}u=0,$$
$$u\big|_{\partial\Omega}=0,\quad u(x,0)=u_0(x),$$

где $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$ класса $\mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta\in(0,1]$, а операторные коэффициенты имеют вид

$$\mathbb{A}_0u\equiv-\triangle u:\mathbb{H}_0^1(\Omega)\to\mathbb{H}^{-1}(\Omega),\quad\mathbb{A}_1(u)\equiv|u|^{p_1-2}u:\mathbb{L}^{p_1}(\Omega)\to\mathbb{L}^{p_1'}(\Omega),$$
$$\mathbb{F}(u)\equiv|u|^{2q_2}u:\mathbb{L}^{2q_2+2}(\Omega)\to\mathbb{L}^{q_2''}(\Omega),\quad q_2''=\frac{2q_2+2}{2q_2+1},$$
$$\mathbb{P}(u)\equiv|u|^{q_2+1}:\mathbb{L}_0^{2q_2+2}(\Omega)\to\mathbb{L}^2(\Omega),\quad\mathbb{D}v\equiv\frac{\partial v}{\partial x_1}:\mathbb{L}^2(\Omega)\to\mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$

$$\mathbb{V}_0\equiv\mathbb{H}_0^1(\Omega),\qquad\mathbb{V}_1\equiv\mathbb{L}^{p_1}(\Omega),\qquad\mathbb{W}_0\equiv\mathbb{L}^{2q_2+2}(\Omega),$$
$$\mathbb{V}_0^*\equiv\mathbb{H}^{-1}(\Omega),\qquad\mathbb{V}_1^*\equiv\mathbb{L}^{p_1'}(\Omega),\qquad\mathbb{W}_0^*\equiv\mathbb{L}^{q_2''}(\Omega),$$

$$\mathbb{W}_2 \equiv \mathbb{L}^{2q_2+2}(\Omega), \qquad \mathbb{W}_3 \equiv \mathbb{L}^2(\Omega), \qquad \mathbb{W}_4 \equiv \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$

$$p_1 = q_1 + 2, \;\; q_1 > 0, \;\; p_1^{'} \equiv \frac{p_1}{p_1 - 1}, \;\; q_2^{''} \equiv \frac{2q_2 + 2}{2q_2 + 1}, \;\; q_2 > 0.$$

Вложение $\mathbb{V}_0 \subset \mathbb{W}_0$ имеет место при условии

$$0 < q_2 \leqslant \frac{1}{N-2}, \;\; \text{при} \;\; N \geqslant 3; \;\; 0 < q_2 < +\infty, \;\; \text{при} \;\; N = 1, 2.$$

Это означает, что

$$\mathbb{V} \equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega) \bigcap \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{W}_0 \equiv \mathbb{L}^{q+2}(\Omega).$$

Кроме того, $\mathbb{W}_0 = \mathbb{W}_2$. Потребуем, чтобы

$$\frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0 \rangle_j < \frac{(q + 2 - \overline{p}\,)^2}{\overline{p}\,(q+2)^2} \left(\mathbb{F}(u_0), u_0\right)_0,$$

$q = 2q_2, \;\; \overline{p} = p_1$, при условии $\overline{p} = p_1 < 2q_2 + 2$. Проверим теперь монотонность производной Фреше оператора $\mathbb{A}_1(u) = |u|^{q_1} u$ в указанном в формулировке теоремы 2 смысле. Действительно, производная Фреше имеет вид

$$\mathbb{A}_{1,u}^{'}(u)h \equiv (q_1 + 1)|u|^{q_1} \mathrm{h} : \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega) \to \mathbb{L}^{q_1^{'}}(\Omega), \;\; q_1^{'} \equiv \frac{q_1 + 2}{q_1 + 1},$$
$$\forall\, \mathrm{h} \in \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega),$$

$$\langle \mathbb{A}_{1,u}^{'}(u)u_1 - \mathbb{A}_{1,u}^{'}(u_2)u_2, u_1 - u_2 \rangle_1 = (q_1 + 1)\langle |u|^{q_1} u_1 - |u|^{q_1} u_2, u_1 - u_2 \rangle_1 =$$
$$= (q_1 + 1) \int\limits_{\Omega} dx \; \left(|u|^{q_1} u_1 - |u|^{q_1} u_2\right)(u_1 - u_2) \geqslant 0 \;\; \forall\, u, u_1, u_2 \in \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega),$$

где $q_1 = p_1 - 2$.

Докажем теперь, что при условии $\| \nabla u_n - \nabla u \|_2 \to 0$, когда $n \to +\infty$, имеет место сходимость производных Фреше в равномерной операторной топологии $\mathcal{L}(\mathbb{H}_0^1(\Omega), \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$. Действительно,

$$\| \mathbb{A}_{1,u}^{'}(u) - \mathbb{A}_{1,u}^{'}(u_n) \|_{\mathbb{H}_0^1 \to \mathbb{H}^{-1}} = \sup_{\|\nabla h\|_2 = 1} \| \mathbb{A}_{1,u}^{'}(u)h - \mathbb{A}_{1,u}^{'}(u_n)h \|_{-1} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\|\nabla h\|_2 = 1} \| \mathbb{A}_{1,u}^{'}(u)h - \mathbb{A}_{1,u}^{'}(u_n)h \|_{(q_1+2)/(q_1+1)} \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{C} \sup_{\|\nabla h\|_2 = 1} \left(\int\limits_{\Omega} dx \; |[|u|^{q_1} - |u_n|^{q_1}]h|^{\frac{q_1+2}{q_1+1}} \right)^{(q_1+1)/(q_1+2)}.$$

Рассмотрим отдельно интеграл

$$J_n = \int\limits_\Omega dx\ |[|u|^{q_1} - |u_n|^{q_1}]h|^{\frac{q_1+2}{q_1+1}} \leqslant \int\limits_\Omega dx\ ||u|^{q_1} - |u_n|^{q_1}|^{\frac{q_1+2}{q_1+1}}\ |h|^{\frac{q_1+2}{q_1+1}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_\Omega dx\ ||u|^{q_1} - |u_n|^{q_1}|^{(q_1+2)/q_1}\right)^{q_1/(q_1+1)} \left(\int\limits_\Omega dx\,|h|^{q_1+2}\right)^{1/(q_1+1)} \leqslant$$

$$\leqslant \| \nabla h \|_2^{(q_1+2)/(q_1+1)} \left(\int\limits_\Omega dx\ ||u|^{q_1} - |u_n|^{q_1}|^{(q_1+2)/q_1}\right)^{q_1/(q_1+1)} \leqslant$$

$$\leqslant C \left(\int\limits_\Omega dx\ ||u|^{q_1} - |u_n|^{q_1}|^{(q_1+2)/q_1}\right)^{q_1/(q_1+1)} \leqslant$$

$$\leqslant C \max\{\| \nabla u \|_2^{(q_1+2)q_1/(q_1+1)}, \| \nabla u_n \|_2^{(q_1+2)q_1/(q_1+1)}\} \leqslant C.$$

Отметим, что поскольку $\| \nabla u - \nabla u_n \|_2 \to +0$ при $n \to +\infty$, то при условии $0 < q_1 \leqslant 4/(N-2)$ при $N \geqslant 3$ и $0 < q_1$ при $N = 1, 2$ имеем $u_n \to u$ сильно в $\mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega)$. Рассмотрим функцию

$$f(x,u) = |u|^{q_1} : \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega) \to \mathbb{L}^{\frac{q_1+2}{q_1}}(\Omega).$$

Можно проверить, что выполнены все условия теоремы Вайнберга–Немыцкого (см. Приложение В). По определению непрерывность оператора $f : \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega) \to \mathbb{L}^{(q_1+2)/q_1}(\Omega)$ означает, что имеет место предельное равенство

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_\Omega \int dx\ |f(x,u) - f(x,u_n)|^{\frac{q_1+2}{q_1}} = 0$$

при условии сильной сходимости $u_n \to u$ в $\mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega)$.

Значит, по теореме Вайнберга–Немыцкого (см. Приложение В) имеем: $J_n \to +0$ при $n \to +\infty$ равномерно по h на сфере $\| \nabla h \|_2 = 1$.

Таким образом, выполнены все условия теоремы 4.

§ 8. О некоторых начально-краевых задачах для квазилинейных волновых уравнений вида (1.2)

Целью настоящего исследования является получение достаточных условий разрушения решений следующих первых начально-краевых задач:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\triangle u - u) + u\frac{\partial u}{\partial x_1} + u^3 = 0, \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x); \tag{8.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\triangle^2 u + \triangle u\right) + u\frac{\partial u}{\partial x_1} - \operatorname{div}(|\nabla u|^2 \nabla u) = 0, \tag{8.2}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x);$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\triangle^2 u + \triangle u\right) - \operatorname{div}(|\nabla u|^2 \nabla u) + \\ + \beta_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right) + \beta_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \beta_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = 0, \tag{8.3}$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0, \quad |\beta_1| + |\beta_2| + |\beta_3| > 0,$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x),$$

где поверхностно односвязная ограниченная область $\Omega \in \mathbb{R}^3$ имеет в случае (8.1) гладкую границу класса $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{(2,\delta)}$, а в случаях (8.2) и (8.3) класса $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{(4,\delta)}$, где $\delta \in (0,1]$, $(x_1, x_2, x_3) \in \Omega$.

8.1. Локальная разрешимость в сильном обобщенном смысле задач (8.1)–(8.3). В данном пункте мы докажем локальную во времени разрешимость в сильном обобщенном смысле каждой из задач (8.1)–(8.3).

Введем сначала некоторые обозначения:

$$\mathbb{A}_1 u \equiv -\triangle u : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$

$$\mathbb{A}_2 u \equiv \triangle^2 u - \triangle u : \mathbb{H}_0^2(\Omega) \to \mathbb{H}^{-2}(\Omega), \tag{8.4}$$

$$\mathbb{F}_1(u) \equiv \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x_1} : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^4(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \tag{8.5}$$

$$\mathbb{F}_2(u) \equiv \beta_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right) + \beta_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \\ + \beta_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) : \mathbb{H}_0^2(\Omega) \to \mathbb{H}^{-2}(\Omega), \tag{8.6}$$

$$\mathbb{F}_3(u) \equiv u^3 : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^4(\Omega) \to \mathbb{L}^{4/3}(\Omega) \subset \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \tag{8.7}$$

$$\mathbb{F}_4(u) \equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^2 \nabla u) : \mathbb{H}_0^2(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega) \to \\ \to \mathbb{W}^{-1,4/3}(\Omega) \subset \mathbb{H}^{-2}(\Omega). \tag{8.8}$$

С учетом указанных обозначений (8.4)–(8.8) мы можем представить задачи (8.1)–(8.3) в виде задач Коши для абстрактных дифференциальных уравнений первого порядка с операторными коэффициентами в банаховых пространствах:

$$\mathbb{A}_1 \frac{du}{dt} = \mathbb{F}_3(u) - \mathbb{F}_1(u), \quad u(0) = u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \tag{8.9}$$

$$\mathbb{A}_2 \frac{du}{dt} = \mathbb{F}_4(u) - \mathbb{F}_1(u), \quad u(0) = u_0 \in \mathbb{H}_0^2(\Omega), \tag{8.10}$$

$$\mathbb{A}_2 \frac{du}{dt} = \mathbb{F}_4(u) - \mathbb{F}_2(u), \quad u(0) = u_0 \in \mathbb{H}_0^2(\Omega). \tag{8.11}$$

Введем следующие нормы и скобки двойственности:

$$\| v \|_{+s} \ - \text{норма в } \mathbb{H}_0^s(\Omega), \ \| v \|_{-s}^* \ - \text{норма в } \mathbb{H}^{-s}(\Omega), \ s > 0,$$

$$\| v \|_p \ - \text{норма в } \mathbb{L}^p(\Omega), \ p \in [1, +\infty],$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_s \ - \text{скобки двойственности между } \mathbb{H}_0^s(\Omega) \text{ и } \mathbb{H}^{-s}(\Omega),$$

$$(\cdot, \cdot)_p \ - \text{скобки двойственности между } \mathbb{L}^p(\Omega) \text{ и } \mathbb{L}^{p'}(\Omega), \ p' \equiv \frac{p}{p-1}.$$

Перейдем теперь к следующему абстрактному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка с операторными коэффициентами в банаховом пространстве $\mathbb{V}_0$, к которому сводятся обыкновенные дифференциальные уравнения (8.9)–(8.11):

$$\mathbb{A}\frac{du}{dt} = \mathbb{F}(u), \ \ u(0) = u_0 \in \mathbb{V}_0. \tag{8.12}$$

Относительно операторных коэффициентов предположим следующее

$$\mathbb{A} : \mathbb{V}_0 \to \mathbb{V}_0^*, \ \ \mathbb{F} : \mathbb{V}_0 \to \mathbb{V}_0^*,$$
$$\| \mathbb{A}v_1 - \mathbb{A}v_2 \|_0^* \geqslant \mathrm{m} \| v_1 - v_2 \|_0, \ \ \| \mathbb{F}(v_1) - \mathbb{F}(v_2) \|_0^* \leqslant \mu(\mathrm{R}) \| v_1 - v_2 \|_0,$$

где

$$\| v \|_0 \ - \text{норма в } \mathbb{V}_0, \ \ \| v \|_0^* \ - \text{норма в } \mathbb{V}_0^*,$$

Лемма 11. *Для любой $u_0 \in \mathbb{V}_0$ найдется такое максимальное $\mathrm{T}_0 > 0$, что существует единственное решение задачи* (8.12) *класса $u \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}_0)$ для любого $\mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0)$.*

Доказательство.

Рассмотрим задачу, в классе $\mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}_0)$ эквивалентную (8.12):

$$\begin{gathered} \frac{du}{dt} = \mathbb{G}(u)(t) \quad \forall t \in [0, \mathrm{T}], \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{V}_0, \\ u \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}_0), \end{gathered} \tag{8.13}$$

где оператор $\mathbb{G}(u) = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{F}(u)(t), \ u \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}_0)$. Справедлива цепочка соотношений

$$\lim_{t \to t_0} \| \mathbb{G}(u)(t) - \mathbb{G}(u)(t_0) \|_0 \leqslant \mathrm{m}^{-1} \lim_{t \to t_0} \| \mathbb{F}(u)(t) - \mathbb{F}(u)(t_0) \|_0^* \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{m}^{-1}\mu(\| u(t_0) \|_0) \lim_{t \to t_0} \| u(t) - u(t_0) \|_0 \leqslant \mathrm{C} \lim_{t \to t_0} \| u(t) - u(t_0) \|_0 = 0.$$

Значит, $\mathbb{G} : \mathbb{C}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}_0) \to \mathbb{C}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}_0)$.

Введем следующее множество: $\mathbb{B}_R = \{u(t) \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}_0) : \| u \|_{\mathrm{T}} \leqslant \mathrm{R}\}$, где

$$\| v \|_{\mathrm{T}} \equiv \sup_{t \in [0, \mathrm{T}]} \| v \|_0 .$$

Докажем, что оператор

$$\mathbb{U}(u) \equiv u_0 + \int\limits_0^t ds\, \mathbb{G}(u)(s), \quad t \in [0, \mathrm{T}], \tag{8.14}$$

действует из $\mathbb{B}_\mathrm{R}$ в $\mathbb{B}_\mathrm{R}$ и является сжимающим на $\mathbb{B}_\mathrm{R}$. Действительно, поскольку

$$\mathbb{G} : \mathbb{C}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}_0) \to \mathbb{C}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}_0),$$

то очевидно, что

$$\mathbb{U} : \mathbb{C}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}_0) \to \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}_0).$$

С другой стороны,

$$\| \mathbb{U}(u) \|_\mathrm{T} \leqslant \| u_0 \|_0 + \int\limits_0^\mathrm{T} ds \ \| \mathbb{G}(u) \|_0 (s) \ \leqslant \| u_0 \|_0 + \mathrm{T} \sup_{t \in [0, \mathrm{T}]} \| \mathbb{G}(u) \|_0 (t),$$

$$\| \mathbb{G}(u) \|_0 (t) \ \leqslant \mathrm{m}^{-1} \| \mathbb{F}(u) \|_0^* \leqslant \mathrm{m}^{-1} \mu(\| u \|_0) \| u \|_0 \leqslant \mathrm{m}^{-1} \mu(\mathrm{R}) \| u \|_0 .$$

Поэтому

$$\| \mathbb{U} \|_\mathrm{T} \leqslant \| u_0 \| + \mathrm{m}^{-1} \mu(\mathrm{R}) \mathrm{RT}.$$

Пусть $\| u_0 \|_0 \leqslant \mathrm{R}/2$, $\mathrm{T} < \mathrm{m}_0/(2\mu(\mathrm{R}))$, тогда при достаточно большом $\mathrm{R} > 0$ и малом $\mathrm{T} > 0$

$$\| \mathbb{U} \|_\mathrm{T} \leqslant \mathrm{R}.$$

Таким образом, $\mathbb{U} : \mathbb{B}_\mathrm{R} \to \mathbb{B}_\mathrm{R}$.

Докажем теперь, что оператор $\mathbb{U}$, определенный (8.14), является сжимающим на $\mathbb{B}_\mathrm{R}$. Пусть $u, v \in \mathbb{B}_\mathrm{R}$, тогда имеем

$$\| \mathbb{U}(u) - \mathbb{U}(v) \|_\mathrm{T} \leqslant \int\limits_0^\mathrm{T} dt \ \| \mathbb{G}(u) - \mathbb{G}(v) \|_0 \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{m}^{-1} \int\limits_0^\mathrm{T} dt \ \| \mathbb{F}(u) - \mathbb{F}(v) \|_0^* (t) \leqslant \mathrm{m}^{-1} \mu(\mathrm{R}) \mathrm{T} \| u - v \|_\mathrm{T},$$

из последнего неравенства при $\mathrm{T} < \mathrm{m}/(2\mu(\mathrm{R}))$ получаем

$$\| \mathbb{U}(u) - \mathbb{U}(v) \|_\mathrm{T} < \frac{1}{2} \| u - v \|_\mathrm{T} .$$

Таким образом, оператор $\mathbb{U}$ сжимающий на $\mathbb{B}_\mathrm{R}$. Поэтому в силу теоремы о сжимающем отображении для любой $u_0 \in \mathbb{V}_0$ найдется такое $\mathrm{T} > 0$, что существует единственное решение задачи (8.13) класса $\mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}_0)$.

Используя стандартный алгоритм продолжения решения во времени, получим, что существует единственное решение задачи (8.12) класса $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{V}_0)$. Причем либо $\mathrm{T}_0<+\infty$, и тогда

$$\overline{\lim_{t\uparrow \mathrm{T}_0}} \parallel u \parallel_0 = +\infty,$$

либо $\mathrm{T}_0=+\infty$.

Действительно, рассмотрим норму $\psi(\mathrm{T})\equiv\parallel u(t)\parallel_{\mathrm{T}}$. Как функция T функция $\psi(\mathrm{T})$ является монотонно возрастающей. Стало быть, при $\mathrm{T}\uparrow\mathrm{T}_0$ функция $\psi(\mathrm{T})$ имеет либо конечный, либо бесконечный предел. Предположим, что $\psi(\mathrm{T})$ имеет конечный предел при $\mathrm{T}\uparrow\mathrm{T}_0$. рассмотрим вспомогательное интегральное уравнение вида (8.14):

$$u(x,t)=u(x,\mathrm{T}')+\int\limits_0^t ds\,\mathbb{G}(u)(s).$$

Норма $\parallel\nabla u\parallel_2^2(\mathrm{T}')$ равномерно ограничена по $\mathrm{T}'\in(0,\mathrm{T}_0)$, что позволяет выбрать такое $\mathrm{T}^*\in(0,\mathrm{T}_0)$, что для любого $\mathrm{T}'\in(0,\mathrm{T}_0)$ интегральное уравнение имеет единственное решение класса $u(x,t)\in\in\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}^*];\mathbb{V}_0)$. Пусть $\mathrm{T}'=\mathrm{T}_0-\mathrm{T}^*/2$, обозначим через $v(x,t)$ соответствующее решение последнего интегрального уравнения и определим $\widehat{u}(x,t)$ на сегменте $[0,\mathrm{T}_0+\mathrm{T}^*/2]$:

$$\widehat{u}(x,t)=\{u(x,t),\ t\in[0,\mathrm{T}'];\ \ v(x,t-\mathrm{T}'),\ t\in[\mathrm{T}',\mathrm{T}_0+\mathrm{T}^*/2]\}.$$

По построению $\widehat{u}(x,t)$ является решением задачи (8.14) на отрезке $[0,\mathrm{T}_0+\mathrm{T}^*/2]$ и в силу локальной единственности является продолжением функции $u(x,t)$. Это противоречит максимальности отрезка $[0,\mathrm{T}_0]$. Полученное противоречие доказывает, что

$$\overline{\lim_{\mathrm{T}\uparrow\mathrm{T}_0}} \parallel u(t)\parallel_{\mathrm{T}}=+\infty.$$

Отсюда сразу же получаем, что

$$\lim_{t\uparrow\mathrm{T}_0} \parallel u(t)\parallel_0=+\infty.$$

Таким образом, для любого $u_0\in\mathbb{V}$ найдется такое $T_0>0$, что существует единственное решение задачи (8.12) класса $u(t)\in\in\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{V}_0)$.

Лемма доказана.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Для любых начальных функций $u_0(x)$ из класса $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ для задачи* (8.9), *$u_0(x)$ из класса $\mathbb{H}_0^2(\Omega)$ в случае задач* (8.10), (8.11) *найдутся такие максимальные моменты времени $\mathrm{T}_0>0$, свои для каждой из задач* (8.9)–(8.11), *что существуют единственные решения задач* (8.9)–(8.11) *классов $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{H}_0^1(\Omega))$ для задачи* (8.9), *$\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{H}_0^2(\Omega))$ — для задач* (8.10), (8.11).

Доказательство.

Для доказательства данной теоремы нам нужно доказать коэрцитивность операторов $\mathbb{A}_1 : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ и $\mathbb{A}_2 : \mathbb{H}_0^2(\Omega) \to \mathbb{H}^{-2}(\Omega)$ и ограниченную липшиц-непрерывность операторов $\mathbb{F}_j(u)$, $j = \overline{1,4}$, в соответствующих пространствах.

Начнем с доказательства коэрцитивности операторов $\mathbb{A}_1$ и $\mathbb{A}_2$.

Действительно, справедливы следующие неравенства:

$$\langle \mathbb{A}_1 v_1 - \mathbb{A}_1 v_2, v_1 - v_2 \rangle_1 = \\ = (\nabla v_1 - \nabla v_2, \nabla v_1 - \nabla v_2)_2 \geqslant \| v_1 - v_2 \|_{+1}^2 \quad \forall\ v_1, v_2 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad (8.15)$$

$$\langle \mathbb{A}_2 v_1 - \mathbb{A}_2 v_2, v_1 - v_2 \rangle_2 = \\ = (\nabla v_1 - \nabla v_2, \nabla v_1 - \nabla v_2)_2 + (\triangle v_1 - \triangle v_2, \triangle v_1 - \triangle v_2)_2 = \\ = \| v_1 - v_2 \|_{+1}^2 + \| v_1 - v_2 \|_{+2}^2 \geqslant \| v_1 - v_2 \|_{+2}^2 \quad (8.16)$$

$\forall\ v_1, v_2 \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$. Из полученных неравенств вытекает существование обратных операторов $\mathbb{A}_1^{-1} : \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \to \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, $\mathbb{A}_2^{-1} : \mathbb{H}^{-2}(\Omega) \to \mathbb{H}_0^2(\Omega)$ и липшиц-непрерывность обратных операторов с постоянными Липшица, равными 1.

Теперь докажем ограниченную липшиц-непрерывность каждого из операторов $\mathbb{F}_j(u)$, $j = \overline{1,4}$. Рассмотрим сначала оператор $\mathbb{F}_1(u)$, определенный формулой (8.5):

$$\| \mathbb{F}_1(v_1) - \mathbb{F}_1(v_2) \|_{-1}^* \leqslant \mathrm{C} \| v_1^2 - v_2^2 \|_2 \leqslant \mathrm{C} \left(\int\limits_\Omega dx \left| v_1^2 - v_2^2 \right|^2 \right)^{1/2} \leqslant \\ \leqslant \mathrm{C} \sum_{i=1}^{2} \left(\int\limits_\Omega dx\, v_i^4 \right)^{1/4} \| v_1 - v_2 \|_4 \leqslant \mathrm{RC} \| v_1 - v_2 \|_{+1} \quad (8.17)$$

$\forall\ v_i \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, $\| v_i \|_{+1} \leqslant \mathrm{R}$, и через C обозначим различные постоянные, независящие от R : $\| v \|_{+1} \leqslant \mathrm{R}$. Отсюда сразу же получаем, что

$$\| \mathbb{F}_1(v_1) - \mathbb{F}_1(v_2) \|_{-2}^* \leqslant \mu_1(\mathrm{R}) \| v_1 - v_2 \|_{+2} \quad (8.18)$$

$\forall\ v_i \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$, $\| v_i \|_{+2} \leqslant \mathrm{R}$, $\mu_1(\mathrm{R}) = \mathrm{CR}$ Рассмотрим теперь оператор $\mathbb{F}_2(u)$. Справедливо следующее неравенство:

$$\| \mathbb{F}_2(v_1) - \mathbb{F}_2(v_2) \|_{-2}^* \leqslant \mathrm{C} \left\| \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right\|_{-1}^* + \\ + \mathrm{C} \left\| \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right\|_{-1}^* + \mathrm{C} \left\| \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right\|_{-1}^* = \mathrm{J}_1 + \mathrm{J}_2 + \mathrm{J}_3.$$

Рассмотрим, например, слагаемое J_1, поскольку совершенно понятно, что остальные слагаемые, J_2 и J_3, оцениваются с точностью до обозначений таким же образом. Действительно,

$$\mathrm{J}_1 = \mathrm{C}\left\|\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right\|_{-1}^{*} \leqslant \mathrm{C}\left\|\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\left[\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right]\right\|_{-1}^{*} +$$

$$+ \mathrm{C}\left\|\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\left[\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right]\right\|_{-1}^{*} \leqslant \mathrm{C}\left(\int\limits_{\Omega} dx\left|\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right|^2\left[\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right]^2\right)^{1/2} +$$

$$+ \mathrm{C}\left(\int\limits_{\Omega} dx\left|\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right|^2\left[\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right]^2\right)^{1/2} \leqslant \mathrm{C}\sum_{i=1}^{2} \| \nabla v_i \|_4 \| \nabla v_1 - \nabla v_2 \|_4 \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C}\sum_{i=1}^{2} \| v_i \|_{+2} \| v_1 - v_2 \|_{+2} \leqslant \mathrm{CR} \| v_1 - v_2 \|_{+2}$$

$\forall\ v_i \in \mathbb{H}_0^2(\Omega),\ \| v_i \|_{+2} \leqslant \mathrm{R}$. Таким образом, приходим к выводу, что справедливо следующее неравенство:

$$\| \mathbb{F}_2(v_1) - \mathbb{F}_2(v_2) \|_{-2}^{*} \leqslant \mu_2(\mathrm{R}) \| v_1 - v_2 \|_{+2}, \tag{8.19}$$

где $v_i \in \mathbb{H}_0^2(\Omega),\ \mu_2(\mathrm{R}) = \mathrm{CR},\ \| v_i \|_{+2} \leqslant \mathrm{R}$. Рассмотрим теперь оператор $\mathbb{F}_3(u)$. Справедлива цепочка неравенств

$$\| \mathbb{F}_3(v_1) - \mathbb{F}_3(v_2) \|_{-1}^{*} \leqslant \mathrm{C} \| v_1^3 - v_2^3 \|_{4/3} \leqslant \mathrm{C}\left(\int\limits_{\Omega} dx\,|v_1^3 - v_2^3|^{4/3}\right)^{3/4} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C}\sum_{i=1}^{2}\left(\int\limits_{\Omega} dx\,|v_i|^{8/3}|v_1 - v_2|^{4/3}\right)^{3/4} \leqslant \mathrm{C}\sum_{i=1}^{2}\left(\int\limits_{\Omega} dx\,|v_i|^{r_1 8/3}\right)^{3/(4r_1)} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\Omega} dx\,|v_1 - v_2|^{r_2 4/3}\right)^{3/(4r_2)} \leqslant \mathrm{C}\sum_{i=1}^{2}\left(\int\limits_{\Omega} dx\,|v_i|^4\right)^{1/2}\left(\int\limits_{\Omega} dx\,|v_1 - v_2|^4\right)^{1/4} \leqslant$$

$$\leqslant \mu_3(\mathrm{R}) \| v_1 - v_2 \|_{+1}$$

$\forall\ v_i \in \mathbb{H}_0^1(\Omega),\ \| v_i \|_{+1} \leqslant \mathrm{R},\ \mu_3(\mathrm{R}) = \mathrm{CR}^2$. Отсюда получаем, что

$$\| \mathbb{F}_3(v_1) - \mathbb{F}_3(v_2) \|_{-1}^{*} \leqslant \mu_3(\mathrm{R}) \| v_1 - v_2 \|_{+1} \tag{8.20}$$

$\forall\ v_i \in \mathbb{H}_0^1(\Omega),\ \| v_i \|_{+1} \leqslant \mathrm{R},\ \mu_3(\mathrm{R}) = \mathrm{CR}^2$. Рассмотрим теперь оператор $\mathbb{F}_4(u)$. Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\| \mathbb{F}_4(v_1) - \mathbb{F}_4(v_2) \|^*_{-2} \leqslant \mathrm{C} \left(\int\limits_\Omega dx \left| |\nabla v_1|^2 \nabla v_1 - |\nabla v_2|^2 \nabla v_2 \right|^{4/3} \right)^{3/4} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C} \sum_{i=1}^{2} \left(\int\limits_\Omega dx \, |\nabla v_i|^{8/3} |\nabla v_1 - \nabla v_2|^{4/3} \right)^{3/4} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C} \sum_{i=1}^{2} \left(\int\limits_\Omega dx \, |\nabla v_i|^4 \right)^{1/2} \| v_1 - v_2 \|_4,$$

$$\| \mathbb{F}_4(v_1) - \mathbb{F}_4(v_2) \|^*_{-2} \leqslant \mu_4(\mathrm{R}) \| v_1 - v_2 \|_{+2} \tag{8.21}$$

$\forall \ v_i \in \mathbb{H}^2_0(\Omega), \ \| v_i \|_{+2} \leqslant \mathrm{R}, \ \mu_4(\mathrm{R}) = \mathrm{CR}^2$. Таким образом, мы доказали ограниченную липшиц-непрерывность операторов $\mathbb{F}_j(u), \ j = \overline{1,4}$, в соответствующих гильбертовых пространствах $\mathbb{H}^1_0(\Omega)$ и $\mathbb{H}^2_0(\Omega)$.

Рассмотрим теперь абстрактное обыкновенное дифференциальное уравнение (8.12) первого порядка с операторными коэффициентами в банаховом пространстве $\mathbb{V}_0$. Заметим, что из доказанных свойств (8.15)–(8.21) для операторных коэффициентов задач (8.9)–(8.11) вытекает, что эти задачи можно рассматривать как уравнение (8.12). Таким образом, для задач (8.9)–(8.11) справедлив результат леммы 11.

Теорема доказана.

8.2. Разрушение решений задач. В этом пункте мы докажем, что $\mathrm{T}_0 > 0$ из теоремы 1 конечное. Тем самым мы докажем, что для каждой из задач (8.1)–(8.3) справедливо предельное равенство

$$\lim_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \| u \|_{+s} = +\infty,$$

где $s = 1$ для задачи (8.1) и $s = 2$ для задач (8.2), (8.3).

Справедлива следующая лемма.

Лемма 12 [Калантаров, Ладыженская, лемма 1.1]. *Предположим, что $\Phi(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0, \mathrm{T}_0)$ при некотором максимальном $\mathrm{T}_0 > 0$, в том смысле что либо $\mathrm{T}_0 = +\infty$, либо $\mathrm{T}_0 < +\infty$, и тогда*

$$\lim_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \Phi(t) = +\infty, \tag{8.22}$$

причем $\Phi(t) > 0$ и $\Phi'(t) > 0$ при $t \in [0, \mathrm{T}_0)$. Пусть, кроме того, при $t \in [0, \mathrm{T}_0)$ справедливо обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка

$$\Phi'' \Phi - \alpha (\Phi')^2 + \gamma \Phi \Phi' \geqslant 0, \ \ t \in [0, \mathrm{T}_0), \ \ \alpha > 1, \ \ \gamma > 0, \tag{8.23}$$

и справедливо неравенство

$$\Phi_0 < \frac{\alpha - 1}{\gamma} \Phi_1, \ \ \Phi_0 \equiv \Phi(0), \ \ \Phi_1 \equiv \Phi'(0), \tag{8.24}$$

тогда $T_0 \leqslant T_2$, *где*

$$T_2 \equiv -\frac{1}{\gamma}\ln\left(1-\frac{\gamma}{\alpha-1}\frac{\Phi_0}{\Phi_1}\right), \tag{8.25}$$

и справедливо предельное равенство (8.22).

Доказательство.

Разделим обе части неравенства (8.23) на функцию $\Phi^{1+\alpha}$, в результате эквивалентных преобразований получим

$$\left(\frac{\Phi'}{\Phi^\alpha}\right)' + \gamma\frac{\Phi'}{\Phi^\alpha} \geqslant 0, \quad \alpha > 1, \quad \gamma > 0.$$

Введем обозначение

$$\Lambda(t) \equiv \frac{\Phi'}{\Phi^\alpha},$$

тогда для введенной функции справедливы неравенства

$$\Lambda'(t) + \gamma\Lambda(t) \geqslant 0, \quad \Lambda(t) \geqslant \Lambda_0\exp(-\gamma t), \quad \frac{\Phi'}{\Phi^\alpha} \geqslant \Lambda_0\exp(-\gamma t),$$

$$\frac{1}{1-\alpha}\left(\Phi^{1-\alpha}\right)' \geqslant \Lambda_0\exp(-\gamma t),$$

$$\Phi^{1-\alpha} \leqslant \Phi_0^{1-\alpha} - \Lambda_0\frac{\alpha-1}{\gamma}\left[1-\exp(-\gamma t)\right],$$

$$\Phi \geqslant \frac{1}{\left[\Phi_0^{1-\alpha} - \Lambda_0\frac{\alpha-1}{\gamma}\left[1-\exp(-\gamma t)\right]\right]^{1/(\alpha-1)}}. \tag{8.26}$$

Потребуем теперь выполнения неравенства (8.24), тогда (8.26) не может быть выполнено для всех $t \in \mathbb{R}^1_+$, а именно найдется такое $T_0 \leqslant T_2$, где T_2 определено формулой (8.25), что будет иметь место предельное равенство (8.22).

Лемма доказана.

Теперь докажем основной результат данного параграфа.

Теорема 6. *Пусть выполнены следующие условия для соответствующих задач* (8.1), (8.2) *и* (8.3):

1) $\| u_0 \|_4^4 > \| \nabla u_0 \|_2^2 + \| u_0 \|_2^2$ *для задачи* (8.1);

2) $\| \nabla u_0 \|_4^4 > C_1^4(\Omega)[\| \triangle u_0 \|_2^2 + \| \nabla u_0 \|_2^2]$ *для задачи* (8.2);

3) $\| \nabla u_0 \|_4^4 > 4\beta^2[\| \nabla u_0 \|_2^2 + \| \triangle u_0 \|_2^2]$ *для задачи* (8.3),

где $C_1(\Omega)$ *— константа наилучшего вложения*

$$\| v \|_4 \leqslant C_1(\Omega) \| \nabla v \|_4, \quad \beta \equiv \sum_{i=1}^{3} |\beta_i|.$$

Тогда для любых $u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ *в случае задачи* (8.1) *и для любых* $u_0 \in \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$ *в случае задач* (8.2), (8.3) T_0 *из теоремы* 1 *является ко-*

нечным и тем самым справедливы следующие предельные равенства для всех задач (8.1)–(8.3):

$$\lim_{t\uparrow \mathrm{T}_0} \| u \|_{+s} = +\infty,$$

где $s = 1$ *для задачи* (8.1) *и* $s = 2$ *для задач* (8.2), (8.3). *Причем для времен разрушения решений указанных задач справедливы двусторонние оценки* $\mathrm{T}_1 \leqslant \mathrm{T}_0 \leqslant \mathrm{T}_2$, *где для* T_1 *и* T_2 *справедливы равенства*:

1) *для задачи* (8.1)

$$\mathrm{T}_2 = -\ln\left(1 - \frac{\| \nabla u_0 \|_2^2 + \| u_0 \|_2^2}{\| u_0 \|_4^4}\right),$$
$$\mathrm{T}_1 = \frac{1}{2\mathrm{C}_2^4(\Omega)} \frac{1}{\| \nabla u_0 \|_2^2 + \| u_0 \|_2^2};$$

2) *для задачи* (8.2)

$$\mathrm{T}_2 = -\frac{1}{\mathrm{C}_1^4} \ln\left(1 - \mathrm{C}_1^4 \frac{\| \triangle u_0 \|_2^2 + \| \nabla u_0 \|_2^2}{\| \nabla u_0 \|_4^4}\right),$$
$$\mathrm{T}_1 = \frac{1}{2\mathrm{C}_3^4(\Omega)} \frac{1}{\| \nabla u_0 \|_2^2 + \| \triangle u_0 \|_2^2};$$

3) *для задачи* (8.3)

$$\mathrm{T}_2 = -\frac{1}{4\beta^2} \ln\left(1 - 4\beta^2 \frac{\| \triangle u_0 \|_2^2 + \| \nabla u_0 \|_2^2}{\| \nabla u_0 \|_4^4}\right),$$
$$\mathrm{T}_1 = \frac{1}{2\mathrm{C}_3^4(\Omega)} \frac{1}{\| \nabla u_0 \|_2^2 + \| \triangle u_0 \|_2^2},$$

где $\mathrm{C}_2(\Omega)$ — *наилучшая постоянная вложения* $\| v \|_4 \leqslant \mathrm{C}_2(\Omega) \| \nabla v \|_2$ *для любых* $v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, $\mathrm{C}_3(\Omega)$ — *наилучшая постоянная вложения* $\| \nabla v \|_4 \leqslant \mathrm{C}_3(\Omega) \| \triangle v \|_2$ *для любых* $v \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$.

Доказательство.

Начнем с доказательства результатов теоремы 6 в случае задачи (8.1).

Из теоремы 5 следует, что для задачи (8.1) при условии $u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ найдется такое максимальное $\mathrm{T}_0 > 0$, что существует единственное решение $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}_0^1(\Omega))$ для любого $\mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}_0)$. Поэтому мы можем умножить уравнение (8.1) сначала на $u(x,t)$, а потом на $u'(x,t)$ относительно скобок двойственности между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$. Тогда, интегрируя по частям, получим следующие энергетические равенства:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\| \nabla u \|_2^2 + \| u \|_2^2\right] = \| u \|_4^4, \tag{8.27}$$

$$\| \nabla u' \|_2^2 + \| u' \|_2^2 = -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} dx\, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial t} u^2 + \frac{1}{4}\frac{d}{dt} \| u \|_4^4 . \tag{8.28}$$

Введем обозначение

$$\Phi_1(t) \equiv \| \nabla u \|_2^2 + \| u \|_2^2 . \tag{8.29}$$

Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\left|\frac{d\Phi_1}{dt}\right|^2 &\leqslant \left|\int\limits_{\Omega} dx\, \left[\left(\nabla u', \nabla u\right) + \left(u', u\right)\right]\right|^2 \leqslant \\ &\leqslant \left(\| \nabla u' \|_2^2 + \| u' \|_2^2\right)\left(\| \nabla u \|_2^2 + \| u \|_2^2\right) \leqslant \\ &\leqslant \Phi_1 \left(\| \nabla u' \|_2^2 + \| u' \|_2^2\right). \end{aligned} \tag{8.30}$$

С другой стороны, из (8.27)–(8.29) вытекает

$$\begin{aligned} \| \nabla u' \|_2^2 + \| u' \|_2^2 &\leqslant \frac{1}{8}\Phi_1'' + \frac{1}{4}\varepsilon \| \nabla u' \|_2^2 + \frac{1}{4}\frac{1}{\varepsilon} \| u \|_4^4 \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{8}\Phi_1'' + \frac{\varepsilon}{4}\left[\| \nabla u' \|_2^2 + \| u' \|_2^2\right] + \frac{1}{8\varepsilon}\Phi_1', \\ \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right)\left[\| \nabla u' \|_2^2 + \| u' \|_2^2\right] &\leqslant \frac{1}{8}\Phi_1'' + \frac{1}{8\varepsilon}\Phi_1' \end{aligned} \tag{8.31}$$

для любого $\varepsilon \in (0, 4)$. Из (8.30) и (8.31) вытекают следующие обыкновенные дифференциальные неравенства:

$$\begin{aligned} \frac{4-\varepsilon}{16}\left|\Phi_1'\right|^2 &\leqslant \Phi_1\left(\frac{1}{8}\Phi_1'' + \frac{1}{8\varepsilon}\Phi_1'\right), \\ \frac{4-\varepsilon}{2}\left|\Phi_1'\right|^2 &\leqslant \Phi_1\left(\Phi_1'' + \frac{1}{\varepsilon}\Phi_1'\right), \end{aligned}$$

откуда сразу же получаем, что (см. [Калантаров, Ладыженская])

$$\Phi_1\Phi_1'' - \alpha_1\left(\Phi_1'\right)^2 + \gamma_1\Phi_1\Phi_1' \geqslant 0, \quad \alpha_1 = \frac{4-\varepsilon}{2}, \quad \gamma_1 = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \varepsilon \in (0, 2). \tag{8.32}$$

Мы видим, что функция $\Phi_1(t)$ при дополнительном условии

$$\Phi_{10} < \frac{\alpha_1 - 1}{\gamma_1}\Phi_{11}, \quad \Phi_{10} \equiv \Phi_1(0), \quad \Phi_{11} \equiv \Phi_1'(0) \tag{8.33}$$

удовлетворяет всем условиям леммы 12. Заметим, что неравенство (8.33) содержит переменную величину $\varepsilon \in (0, 2)$. Так что наша задача

заключается в получении оптимального условия (8.33). С этой целью нам необходимо найти максимум функции

$$f_1(\varepsilon) \equiv \frac{\alpha_1 - 1}{\gamma_1} = \frac{(2-\varepsilon)\varepsilon}{2}.$$

Максимум этой функции достигается в точке $\varepsilon_0 = 1$ и имеет в этой точке значение $f_1(\varepsilon_0) = 1/2$. Так что условие (8.33) примет вид

$$\Phi_{10} < \frac{1}{2}\Phi_{11}, \quad \Phi_{10} \equiv \Phi_1(0), \quad \Phi_{11} \equiv \Phi_1^{'}(0), \tag{8.34}$$

откуда с учетом определения $\Phi_1(t)$ приходим к условию 1 теоремы 2. Теперь рассмотрим дифференциальное неравенство (8.32) при $\varepsilon = \varepsilon_0 = 1$. Из (8.32) получим

$$\Phi_1\Phi_1^{''} - \alpha_1\left(\Phi_1^{'}\right)^2 + \gamma_1\Phi_1\Phi_1^{'} \geqslant 0, \quad \alpha_1 = \frac{3}{2}, \quad \gamma_1 = 1. \tag{8.35}$$

Отсюда в силу результата леммы 12 с учетом (8.34) и (8.35) получим, что $\mathrm{T}_0 \leqslant \mathrm{T}_2$, где

$$\mathrm{T}_2 = -\ln\left(1 - \frac{\| \nabla u_0 \|_2^2 + \| u_0 \|_2^2}{\| u_0 \|_4^4}\right).$$

Переходим к рассмотрению задачи (8.2).

Из теоремы 5 следует, что для задачи (8.2) при условии $u_0 \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$ найдется такое максимальное $\mathrm{T}_0 > 0$, что существует единственное решение $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{H}_0^2(\Omega))$. Поэтому мы можем умножить уравнение (8.2) сначала на $u(x,t)$, а потом на $u^{'}(x,t)$ относительно скобок двойственности между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^2(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-2}(\Omega)$. Тогда интегрированием по частям получим следующие энергетические равенства:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\| \nabla u \|_2^2 + \| \triangle u \|_2^2\right] = \| \nabla u \|_4^4, \tag{8.36}$$

$$\| \nabla u^{'} \|_2^2 + \| \triangle u^{'} \|_2^2 = \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\| \nabla u \|_4^4 - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} dx\, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial t}u^2. \tag{8.37}$$

Из равенства (8.37) с учетом (8.36) вытекает следующее неравенство:

$$\begin{aligned}\| \nabla u^{'} \|_2^2 + \| \triangle u^{'} \|_2^2 &\leqslant \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\| \nabla u \|_4^4 + \frac{1}{4}\varepsilon\left[\| \nabla u^{'} \|_2^2 + \| \triangle u^{'} \|_2^2\right] + \\ &+ \frac{1}{4\varepsilon}\| u \|_4^4 \leqslant \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\| \nabla u \|_4^4 + \\ &+ \frac{1}{4}\varepsilon\left[\| \nabla u^{'} \|_2^2 + \| \triangle u \|_2^2\right] + \frac{1}{4\varepsilon}\mathrm{C}_1^4(\Omega)\| \nabla u \|_4^4, \end{aligned} \tag{8.38}$$

где $\varepsilon \in (0,4)$, C_1 — наилучшая постоянная вложения $\| v \|_4 \leqslant C_1(\Omega) \| \nabla v \|_4$. Введем обозначение

$$\Phi_2(t) \equiv \| \nabla u \|_2^2 + \| \triangle u \|_2^2 .$$

Из (8.36)–(8.38) вытекает следующее обыкновенное дифференциальное неравенство для функции $\Phi_2(t)$:

$$\frac{4-\varepsilon}{16}\left(\Phi_2'\right)^2 \leqslant \Phi_2\left[\frac{1}{8}\Phi_2'' + \frac{C_1^4(\Omega)}{8\varepsilon}\Phi_2'\right],$$

из которого вытекает дифференциальное неравенство (см. [Калантаров, Ладыженская])

$$\Phi_2\Phi_2'' - \alpha_2\left(\Phi_2'\right)^2 + \gamma_2\Phi_2\Phi_2' \geqslant 0, \quad \alpha_2 \equiv \frac{4-\varepsilon}{2}, \quad \gamma_2 \equiv \frac{C_1^4(\Omega)}{\varepsilon}. \tag{8.39}$$

Поступая теперь точно так же, как и в случае дифференциального неравенства (8.32), мы приходим к условию леммы 12:

$$\Phi_{20} < \frac{\alpha_2 - 1}{\gamma_2}\Phi_{21}, \quad \Phi_{20} \equiv \Phi_2(0), \quad \Phi_{21} \equiv \Phi_2'(0), \tag{8.40}$$

выбираем ε из условия экстремума функции

$$f_2(\varepsilon) = \frac{\alpha_2 - 1}{\gamma_2} = \frac{(2-\varepsilon)\varepsilon}{2C_1^4},$$

минимум которой достигается в точке $\varepsilon_0 = 1$ и имеет значение

$$f_2(\varepsilon_0) = \frac{1}{2C_1^4(\Omega)}.$$

Из (8.39) при $\varepsilon = 1$ приходим к следующему дифференциальному неравенству (см. [Калантаров, Ладыженская]):

$$\Phi_2\Phi_2'' - \alpha_2\left(\Phi_2'\right)^2 + \gamma_2\Phi_2\Phi_2' \geqslant 0, \quad \alpha_2 \equiv \frac{3}{2}, \quad \gamma_2 \equiv C_1^4(\Omega), \tag{8.41}$$

а условие (8.40) при $\varepsilon = 1$ принимает вид

$$\| \nabla u_0 \|_4^4 > C_1^4(\Omega)[\| \triangle u_0 \|_2^2 + \| \nabla u_0 \|_2^2].$$

Из леммы 12 и (8.41) вытекает условие $T_0 \leqslant T_2$,

$$T_2 = -\frac{1}{C_1^4}\ln\left(1 - C_1^4\frac{\| \triangle u_0 \|_2^2 + \| \nabla u_0 \|_2^2}{\| \nabla u_0 \|_4^4}\right).$$

Рассмотрим теперь задачу (8.3).

Из теоремы 5 следует, что для задачи (8.3) при условии $u_0 \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$ найдется такое максимальное $T_0 > 0$ и существует единственное решение $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{H}_0^2(\Omega))$ для любого $T \in (0,T_0)$. Поэтому мы можем умножить уравнение (8.3) сначала на $u(x,t)$, а потом на $u'(x,t)$ относительно скобок двойственности между гильбертовыми простран-

ствами $\mathbb{H}_0^2(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-2}(\Omega)$. Тогда интегрированием по частям получим следующие энергетические равенства:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\| \nabla u \|_2^2 + \| \triangle u \|_2^2\right] = \| \nabla u \|_4^4, \tag{8.42}$$

$$\| \triangle u' \|_2^2 + \| \nabla u' \|_2^2 = \frac{1}{4}\frac{d}{dt} \| \nabla u \|_4^4 - \beta_1 \int\limits_\Omega dx \, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial t}\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_3} -$$

$$- \beta_2 \int\limits_\Omega dx \, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial t}\frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial u}{\partial x_1} - \beta_3 \int\limits_\Omega dx \, \frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial t}\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}. \tag{8.43}$$

Из (8.42) и (8.43) вытекает следующая цепочка неравенств:

$$\| \triangle u' \|_2^2 + \| \nabla u' \|_2^2 \leqslant \frac{1}{4}\frac{d}{dt} \| \nabla u \|_4^4 + \sum_{i=1}^{3} |\beta_i| \, \| \nabla u' \|_2 \| \nabla u \|_4^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\frac{d}{dt} \| \nabla u \|_4^4 + \sum_{i=1}^{3} |\beta_i| \frac{\varepsilon}{2}\left[\| \nabla u' \|_2^2 + \| \triangle u' \|_2^2\right] +$$

$$+ \frac{1}{2\varepsilon}\sum_{i=1}^{3} |\beta_i| \, \| \nabla u \|_4^4, \tag{8.44}$$

где $\varepsilon \in (0, 2\beta^{-1})$, $\beta = \sum\limits_{i=1}^{3} |\beta_i| > 0$. Введем обозначение

$$\Phi_3(t) \equiv \| \nabla u \|_2^2 + \| \triangle u \|_2^2 .$$

Из (8.42)–(8.44) получим обыкновенное дифференциальное неравенство для функции $\Phi_3(t)$ (см. [Калантаров, Ладыженская]):

$$\Phi_3 \Phi_3'' - \alpha_3 \left(\Phi_3'\right)^2 + \gamma_3 \Phi_3 \Phi_3' \geqslant 0, \quad \alpha_3 = 2 - \varepsilon\beta, \quad \gamma_3 = 2\beta/\varepsilon. \tag{8.45}$$

Точно так же, как и раньше, используя результаты леммы 12, из (8.45) получим оптимальное условие на начальную функцию,

$$\| \nabla u_0 \|_4^4 > 4\beta^2 [\| \nabla u_0 \|_2^2 + \| \triangle u_0 \|_2^2]$$

и оценку сверху на время разрушения $\mathrm{T}_0 \leqslant \mathrm{T}_2$:

$$\mathrm{T}_2 = -\frac{1}{4\beta^2} \ln\left(1 - 4\beta^2 \frac{\| \triangle u_0 \|_2^2 + \| \nabla u_0 \|_2^2}{\| \nabla u_0 \|_4^4}\right).$$

Получим теперь оценки снизу на время разрушения решений задач (8.1)–(8.3).

Для задачи (8.1) справедливо энергетическое равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\| \nabla u \|_2^2 + \| u \|_2^2\right) = \| u \|_4^4,$$

откуда для функции

$$\Phi_1(t) \equiv \| \nabla u \|_2^2 + \| u \|_2^2$$

вытекает неравенство

$$\Phi_1(t) \leqslant \Phi_1(0) + 2\mathrm{C}_2^4(\Omega)\int\limits_0^t ds\, \Phi_1^2(s),$$

где C_2 — наилучшая постоянная вложения $\| v \|_4 \leqslant \mathrm{C}_2(\Omega) \| \nabla v \|_2$ для любых $v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$. Из этого неравенства вытекает

$$\Phi_1(t) \leqslant \frac{\Phi_1(0)}{1 - 2\mathrm{C}_2^4(\Omega)\Phi_1(0)t},$$

и, стало быть, в данном случае

$$\mathrm{T}_1 = \frac{1}{2\mathrm{C}_2^4(\Omega)}\frac{1}{\| \nabla u_0 \|_2^2 + \| u_0 \|_2^2}.$$

Для задач (8.2), (8.3) справедливо энергетическое равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\| \triangle u \|_2^2 + \| \nabla u \|_2^2\right) = \| \nabla u \|_4^4,$$

и тогда для функции

$$\Phi_2(t) \equiv \| \triangle u \|_2^2 + \| \nabla u \|_2^2$$

справедливо неравенство

$$\Phi_2(t) \leqslant \Phi_2(0) + 2\mathrm{C}_3^4(\Omega)\int\limits_0^t ds\, \Phi_2^2(s),$$

где $\mathrm{C}_3(\Omega)$ — наилучшая постоянная вложения $\| \nabla v \|_4 \leqslant \mathrm{C}_3(\Omega) \| \triangle v \|_2$ для любых $v \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$. Отсюда сразу же получаем, что

$$\mathrm{T}_1 = \frac{1}{2\mathrm{C}_3^4(\Omega)}\frac{1}{\| \nabla u_0 \|_2^2 + \| \triangle u_0 \|_2^2}.$$

Теорема доказана.

8.3. Опрокидывание ослабленного решения задачи (8.1). Для доказательства опрокидывания решения задачи (8.1) для трехмерного уравнения типа Бенджамена–Бона–Махони нам необходимо доказать, что существует единственное решение задачи (8.1) класса

$\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}_0^*);\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}))$ при некотором $\mathrm{T}_0^*>0$. Тогда в силу результата §3 мы получим, что $0<\mathrm{T}_0^*\leqslant \mathrm{T}_0\leqslant \mathrm{T}_2<+\infty$, а значит

$$\lim_{\mathrm{T}\uparrow \mathrm{T}_0^*}\sup_{t\in[0,\mathrm{T}],x\in\overline{\Omega}}|\nabla u(x,t)|=+\infty, \tag{8.46}$$

т. е. в некоторый момент времени $\mathrm{T}_0^*>0$ величина

$$\max_{x\in\overline{\Omega}}|\nabla u(x,t)|$$

становится равной бесконечности. В этом пункте под решением задачи (8.1) мы будем понимать так называемое ослабленное решение, т. е. решение некоторого связанного с задачей (8.1) интегрального уравнения, вид которого будет установлен ниже. Причем классическое решение задачи (8.1) является ослабленным, обратное утверждение, очевидно, имеет место не всегда.

Дадим определение ослабленного решения задачи (8.1).

Определение 5. Ослабленным решением задачи (8.1) мы назовем решение класса $u(x,t)\in\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})\bigcap\mathbb{C}_0(\overline{\Omega}))$ при некотором $\mathrm{T}>0$ следующего двойного интерального уравнения:

$$u(x,t)=u_0(x)+\int\limits_0^t ds\int\limits_\Omega dy\,G(x,y)\left[\frac{1}{2}\frac{\partial u^2(y,s)}{\partial y_1}+u^3(y,s)\right] \tag{8.47}$$

$\forall\, t\in[0,\mathrm{T}]$, где $G(x,y)$ — функция Грина первой краевой задачи для оператора $-\triangle+\mathbb{I}$ в области Ω.

Очевидно, получаем, что для существования ослабленного решения необходимо условие на начальную функцию $u_0(x)\in$ $\in\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})\bigcap\mathbb{C}_0(\overline{\Omega})$.

Теперь мы выясним, как связаны сильные обощенные решения задачи (8.1) и ослабленные решения в смысле сформулированного определения. Как мы обнаружили в §2, решение задачи (8.1), понимаемого в сильном обобщенном смысле, эквивалентно решению интегрального операторного уравнения вида

$$u(t)=u_0+\int\limits_0^t ds\,\mathbb{A}^{-1}\mathbb{F}(u)(s),\quad u_0\in\mathbb{H}_0^1(\Omega),$$

где оператор $\mathbb{A}^{-1}:\mathbb{H}^{-1}(\Omega)\to\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ является обратным оператору $-\triangle u+u:\mathbb{H}_0^1(\Omega)\to\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$. Тогда понятно, что сужение оператора $\mathbb{A}^{-1}$ на банахово пространство $\mathbb{C}(\overline{\Omega})$, где Ω имеет гладкую границу $\partial\Omega\in\mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta\in(0,1]$, совпадает с интегральным оператором, ядро которого является функцией Грина $G(x,y)$. Таким образом, мы приходим к выводу, что ослабленное решение задачи (8.1) является сильным обобщенным решением задачи (8.1). Этот результат нам понадобится для доказательства опрокидывания ослабленного решения задачи (8.1).

Теорема 7. *Для любого* $u_0 \in \mathbb{C}^{(1)}(\Omega) \bigcap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})$ *найдется такое* $\mathrm{T}_0^* > 0$, *что существует единственное ослабленное решение класса* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}_0^*); \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \bigcap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega}))$. *Причем либо* $\mathrm{T}_0^* = +\infty$, *либо* $\mathrm{T}_0^* < +\infty$ *и тогда справедливо предельное соотношение* (8.46).

Доказательство.

В силу того что функция Грина для оператора $-\triangle + \mathbb{I}$ имеет вид

$$G(x,y) = \psi(x,y) + \frac{1}{4\pi}\frac{\exp(-|x-y|)}{|x-y|}, \tag{8.48}$$

где $\psi(x,y) \in \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$, справедливо соотношение

$$\sup_{x\in\Omega} \int\limits_{\Omega} |\nabla_y G(x,y)|\, dy = \mathrm{C} < +\infty. \tag{8.49}$$

Поэтому мы можем проинтегрировать по частям интегродифференциальное уравнение (8.47) и получить следующее соотношение:

$$u(x,t) = u_0(x) + \int\limits_0^t ds \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y)u^3(y,s) - \\ - \frac{1}{2}\int\limits_0^t ds \int\limits_{\Omega} dy\, G'_{y_1}(x,y)u^2. \tag{8.50}$$

Введем оператор

$$\mathbb{U}(u) \equiv u_0 + \int\limits_0^t ds \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y)u^3(y,s) - \frac{1}{2}\int\limits_0^t ds \int\limits_{\Omega} dy\, G'_{y_1}(x,y)u^2. \tag{8.51}$$

Докажем, что оператор (8.51) в силу (8.49) действует из $\mathbb{C}(\overline{\mathrm{Q}}_\mathrm{T})$ в $\mathbb{C}(\overline{\mathrm{Q}}_\mathrm{T})$, где $\mathrm{Q}_\mathrm{T} = (0,\mathrm{T}) \times \Omega$ при любом $\mathrm{T} > 0$ и

$$\| v \|_{\mathrm{T},0} = \sup_{t\in[0,\mathrm{T}],x\in\Omega} |v|$$

— норма в $\mathbb{C}(\overline{\mathrm{Q}}_\mathrm{T})$.

Введем обозначения

$$\mathbb{U}_1(u) = \int\limits_0^t ds \int\limits_{\Omega} dy\, G'_{y_1}(x,y)u^2, \quad \mathbb{U}_2(u) = \int\limits_0^t ds \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y)u^3(y,s).$$

Докажем, что каждый из операторов $\mathbb{U}_i(u) : \mathbb{C}(\overline{\mathrm{Q}}_\mathrm{T}) \to \mathbb{C}(\overline{\mathrm{Q}}_\mathrm{T})$, $i = 1,2$.

Рассмотрим сначала оператор $\mathbb{U}_1(u)$. Действительно, в силу (8.48)

$$\psi'_{y_1}(x,y) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}),$$

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\exp(-|x-y|)}{|x-y|}\right)=\frac{1}{4\pi}\frac{x_1-y_1}{|x-y|^3}\exp(-|x-y|)+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\frac{x_1-y_1}{|x-y|^2}\exp(-|x-y|),$$

тогда $\mathbb{U}_1(u)$ можно представить в виде

$$\mathbb{U}_1(u)=\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2+\mathrm{I}_3,$$

где

$$\mathrm{I}_1=\int\limits_0^t ds\int\limits_\Omega dy\,\psi'_{y_1}(x,y)u^2(y,s),$$
$$\mathrm{I}_2=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^t ds\int\limits_\Omega dy\,\frac{\exp(-|x-y|)}{|x-y|^2}\frac{x_1-y_1}{|x-y|}u^2(y,s),$$
$$\mathrm{I}_3=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^t ds\int\limits_\Omega dy\,\frac{\exp(-|x-y|)}{|x-y|}\frac{x_1-y_1}{|x-y|}u^2(y,s).$$

Докажем, что $\mathrm{I}_1(x,t)\in\mathbb{C}(\overline{\mathrm{Q}}_\mathrm{T})$. Действительно, для любых (x,t) и (x_0,t_0) из Q_T справедливо неравенство

$$|\mathrm{I}_1(x,t)-\mathrm{I}_1(x_0,t_0)|\leqslant\left|\int\limits_{t_0}^t ds\int\limits_\Omega dy\,|\psi'_{y_1}(x,y)|u^2\right|+$$
$$+\int\limits_0^{t_0}ds\left|\int\limits_\Omega dy\,\left[\psi'_{y_1}(x,y)-\psi'_{y_1}(x_0,y)\right]u^2\right|,$$

откуда в силу непрерывности $\psi'_{y_1}(x,y)\in\mathbb{C}(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega})$ сразу же получаем, что каждое из слагаемых меньше $\varepsilon/2$ при условии $|x-x_0|+|t-t_0|\leqslant\delta(\varepsilon)$. Значит, $\mathrm{I}_1(x,t)\in\mathbb{C}(\overline{\mathrm{Q}}_\mathrm{T})$.

Докажем теперь, что $\mathrm{I}_2(x,t)\in\mathbb{C}(\overline{\mathrm{Q}}_\mathrm{T})$. Действительно, для любых (x,t) и (x_0,t_0) из $\overline{\mathrm{Q}}_\mathrm{T}$ справедливо неравенство

$$|\mathrm{I}_2(x,t)-\mathrm{I}_2(x_0,t_0)|\leqslant\frac{1}{4\pi}\left|\int\limits_{t_0}^t ds\int\limits_\Omega dy\,\frac{\exp(-|x-y|)}{|x-y|^2}\frac{|x_1-y_1|}{|x-y|}u^2(y,s)\right|+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{t_0}ds\left|\int\limits_\Omega dy\left[\frac{\exp(-|x_0-y|)}{|x_0-y|^2}\frac{x_{10}-y_1}{|x_0-y|}-\right.\right.$$

$$- \frac{\exp(-|x-y|)}{|x-y|^2}\frac{x_1-y_1}{|x-y|}\Bigg] u^2(y,s)\Bigg| = \mathrm{I}_{21} + \mathrm{I}_{22},$$

Рассмотрим отдельно каждое из соотношений I_{21} и I_{22} : I_{21} меньше $\varepsilon/3$ при условии $|x-x_0| + |t-t_0| \leqslant \delta(\varepsilon)$. Рассмотрим теперь I_{22}. С этой целью предположим, что $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{\mathrm{Q}}_{\mathrm{T}})$ и $|u(x,t)| \leqslant \mathrm{M}(\mathrm{T})$. Далее воспользуемся схемой доказательства непрерывности интеграла типа потенциала, изложенной, например, в [Владимиров]. Действительно,

$$|\mathrm{I}_{22}(x,x_0,t,t_0)| \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{M}(\mathrm{T}) \int\limits_0^{t_0} ds \int\limits_{\Omega_\eta(x_0)} dy \left[\frac{\exp(-|x_0-y|)}{|x_0-y|^2} + \frac{\exp(-|x-y|)}{|x-y|^2}\right] +$$

$$+ \mathrm{M}(\mathrm{T}) \int\limits_0^{t_0} ds \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\eta(x_0)} dy \left|\frac{\exp(-|x_0-y|)}{|x_0-y|^2}\frac{x_{10}-y_1}{|x_0-y|} - \right.$$

$$\left. - \frac{\exp(-|x-y|)}{|x-y|^2}\frac{x_1-y_1}{|x-y|}\right|,$$

где $\Omega_\eta(x_0) = \{x \in \Omega : |x-x_0| \leqslant \eta\}$. Первое слагаемое в силу интегрируемой особенности подынтегральной функции меньше $\varepsilon/3$ за счет выбора малого параметра η. Во втором слагаемом подынтегральная функция равномерно непрерывна по (x,y) в области $|x-x_0| \leqslant \eta/2$, $|y-x_0| \geqslant \eta$, $y \in \overline{\Omega}$, и обращается в нуль при $x = x_0$. Поэтому этот интеграл меньше $\varepsilon/3$ при всех $|x-x_0| + |t-t_0| \leqslant \delta(\varepsilon)$ при достаточно малом $\delta(\varepsilon)$. Значит, $\mathrm{I}_2(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{\mathrm{Q}}_{\mathrm{T}})$.

Совершенно понятно, что точно так же доказывается включение $\mathrm{I}_3(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{\mathrm{Q}}_{\mathrm{T}})$. Стало быть, мы доказали, что

$$\mathbb{U}_1(u) : \mathbb{C}(\overline{\mathrm{Q}}_{\mathrm{T}}) \to \mathbb{C}(\overline{\mathrm{Q}}_{\mathrm{T}}).$$

Рассмотрим теперь оператор

$$\mathbb{U}_2(u) = \int\limits_0^t ds \int\limits_\Omega dy\, G(x,y) u^3(y,s).$$

С использованием свойств функции Грина и интегралов типа потенциала мы получим, что

$$\mathbb{U}_2 : \mathbb{C}(\overline{\mathrm{Q}}_{\mathrm{T}}) \to \mathbb{C}(\overline{\mathrm{Q}}_{\mathrm{T}}).$$

Стало быть, оператор $\mathbb{U}(u)(x,t)$, определенный формулой (8.51), действует из $\mathbb{C}(\overline{\mathrm{Q}}_{\mathrm{T}})$ в $\mathbb{C}(\overline{\mathrm{Q}}_{\mathrm{T}})$.

Пусть $\mathbb{B}_{\mathrm{R}}$ — замкнутое ограниченное выпуклое подмножество банахова пространства $\mathbb{C}(\overline{\mathrm{Q}}_{\mathrm{T}})$:

$$\mathbb{B}_{\mathrm{R}} \equiv \left\{ v(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{\mathrm{Q}}_{\mathrm{T}}) :\| v \|_{\mathrm{T}} \equiv \max_{(x,t)\in\overline{\mathrm{Q}}_{\mathrm{T}}} |v(x,t)| \leqslant \mathrm{R} \right\}. \qquad (8.52)$$

Докажем, что при достаточно малом $\mathrm{T} > 0$ и достаточно большом $\mathrm{R} > 0$ оператор $\mathbb{U}$ действует из $\mathbb{B}_{\mathrm{R}}$ в $\mathbb{B}_{\mathrm{R}}$ и является сжимающим на $\mathbb{B}_{\mathrm{R}}$. Действительно,

$$\| \mathbb{U}(u) \|_{\mathrm{T}} \leqslant \| u_0 \|_{\mathrm{T}} + \mathrm{CT} \| u \|_{\mathrm{T}}^3 + \mathrm{CT} \| u \|_{\mathrm{T}}^2 \leqslant \| u_0 \|_{\mathrm{T}} + \mathrm{CT}(\mathrm{R}^3 + \mathrm{R}^2) \leqslant \mathrm{R}$$

при условии $\| u_0 \|_{\mathrm{T}} \leqslant \mathrm{R}/2$ и $0 < \mathrm{T} \leqslant 2^{-1}(\mathrm{CR}^3 + \mathrm{CR}^2)^{-1}$. Тем самым при достаточно малом $\mathrm{T} > 0$ и достаточно большом $\mathrm{R} > 0$ оператор $\mathbb{U}$ действует из $\mathbb{B}_{\mathrm{R}}$ в $\mathbb{B}_{\mathrm{R}}$.

Докажем теперь сжимаемость оператора, определенного на $\mathbb{B}_{\mathrm{R}}$, при достаточно малом $\mathrm{T} > 0$ и достаточно большом $\mathrm{R} > 0$. Действительно,

$$\| \mathbb{U}(u_1) - \mathbb{U}(u_2) \|_{\mathrm{T}} \leqslant \mathrm{T}\left(\mathrm{CR}^2 + \mathrm{CR}\right) \| u_1 - u_2 \|_{\mathrm{T}} \leqslant \frac{1}{2} \| u_1 - u_2 \|_{\mathrm{T}}$$

при условии $0 < \mathrm{T} \leqslant 2^{-1}(\mathrm{CR}^2 + \mathrm{CR})^{-1}$. Значит, оператор $\mathbb{U}(u)$ сжимающий на $\mathbb{B}_{\mathrm{R}}$.

Стало быть, при условии $u_0 \in \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})$ существует единственное решение интегрального уравнения (4.5) класса $\mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}_0(\overline{\Omega}))$.

Теперь предположим, что $u_0 \in \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \bigcap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})$. Докажем, что существует единственное решение интегрального уравнения (8.50) класса $\mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \bigcap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega}))$.

С этой целью рассмотрим банахово пространство $\mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}))$ с нормой

$$\| v \|_{\mathrm{T},1} \equiv \| v \|_{\mathrm{T},0} + \sum_{i=1}^{3} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{\mathrm{T},0}, \quad \| v \|_{\mathrm{T},0} \equiv \max_{(x,t)\in\overline{\mathrm{Q}}_{\mathrm{T}}} |v(x,t)|. \qquad (8.53)$$

Докажем, что оператор

$$\mathbb{U}(u) \equiv u_0 + \int_0^t ds \int_\Omega dy\, G(x,y) \left[\frac{1}{2} \frac{\partial u^2(y,s)}{\partial y_1} + u^3(y,s) \right]$$

действует из $\mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}))$ в $\mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}))$. С этой целью воспользуемся тем, что

$$G(x,y) = \psi(x,y) + \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(-|x-y|)}{|x-y|}$$

и $\psi'_{x_1}(x,y) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$, и представим оператор $\mathbb{U}(u)$ в виде

$$\mathbb{U}(u) = u_0 + \mathbb{U}_1(u) + \mathbb{U}_2(u), \qquad (8.54)$$

где

$$\mathbb{U}_1(u) = \int\limits_0^t ds \int\limits_\Omega dy\, \psi(x,y) \left[u \frac{\partial u}{\partial y_1} + u^3 \right],$$

$$\mathbb{U}_2(u) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^t ds \int\limits_\Omega dy\, \frac{\exp(-|x-y|)}{|x-y|} \left[u \frac{\partial u}{\partial y_1} + u^3 \right].$$

В силу того что $\psi(x,y) \in \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$, оператор $\mathbb{U}_1(u)$ действует из $\mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}))$ в $\mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}))$.

Рассмотрим теперь отдельно оператор $\mathbb{U}_2(u)$. Точно так же, как и ранее, используя теорему о непрерывной дифференцируемости интегралов типа потенциала, приходим к выводу, что и оператор $\mathbb{U}_2(u)$ действует из $\mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}))$ в $\mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}))$.

Введем замкнутое ограниченное выпуклое подмножество банахова пространства $\mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}))$:

$$\mathbb{B}_{1\mathrm{R}} \equiv \left\{ v \in \mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})) : \| v \|_{1,\mathrm{T}} \leqslant \mathrm{R} \right\},$$

где норма определена в (8.53). Докажем, что оператор $\mathbb{U}(u)$ действует из $\mathbb{B}_{1\mathrm{R}}$ в $\mathbb{B}_{1\mathrm{R}}$ и является сжимающим на $\mathbb{B}_{1\mathrm{R}}$ при достаточно малом $\mathrm{T} > 0$ и достаточно большом $\mathrm{R} > 0$. Действительно, в силу (8.54) имеем

$$\| \mathbb{U}(u) \|_{1,\mathrm{T}} \leqslant \| u_0 \|_{1,\mathrm{T}} + \mathrm{CT} \| u \|_{1,\mathrm{T}}^2 + \mathrm{CT} \| u \|_{1,\mathrm{T}}^3 \leqslant$$
$$\leqslant \| u_0 \|_{1,\mathrm{T}} + \mathrm{CTR}^2 + \mathrm{CTR}^3 \leqslant \mathrm{R}$$

при условии $\| u_0 \|_{1,\mathrm{T}} \leqslant \mathrm{R}/2$, $\mathrm{T} \leqslant 2^{-1}(\mathrm{CR}^2 + \mathrm{CR}^3)$.

Докажем теперь сжимаемость оператора $\mathbb{U} : \mathbb{B}_{1\mathrm{R}} \to \mathbb{B}_{1\mathrm{R}}$. Действительно,

$$\| \mathbb{U}(u_1) - \mathbb{U}(u_2) \|_{1,\mathrm{T}} \leqslant \mathrm{CRT} \| u_1 - u_2 \|_{1,\mathrm{T}} + \mathrm{CR}^2\mathrm{T} \| u_1 - u_2 \|_{1,\mathrm{T}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2} \| u_1 - u_2 \|_{1,\mathrm{T}}$$

при условии $\mathrm{T} \leqslant 2^{-1}(\mathrm{CR} + \mathrm{CR}^2)^{-1}$. Значит, оператор $\mathbb{U} : \mathbb{B}_{1\mathrm{R}} \to \mathbb{B}_{1\mathrm{R}}$ является сжимаемым.

Используя стандартный алгоритм продолжения решения интегрального уравнения (8.47) во времени, получим, что существует единственное решение уравнения (8.47) класса $\mathbb{C}([0,\mathrm{T}^*);\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \bigcap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega}))$. Причем либо $\mathrm{T}_0^* = +\infty$, либо $\mathrm{T}_0^* < +\infty$ и тогда справедливо предельное равенство (8.46).

Тем самым существует единственное решение интегрального уравнения (8.47) класса $\mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \bigcap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega}))$. Из вида интегрального уравнения (8.47) легко следует, что на самом деле указанное решение принадлежит классу $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \bigcap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega}))$.

Таким образом, мы доказали существование и единственность ослабленного решения задачи (8.1) в смысле определения 1.

Теорема доказана.

Заметим, что введенная ранее норма на банаховом пространстве $\mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})\bigcap\mathbb{C}_0(\overline{\Omega}))$ для ограниченных областей с гладкой границей эквивалентна следующей норме:

$$\| v \|'_{\mathrm{T}} \equiv \max_{(x,t)\in\overline{\mathrm{Q}}_{\mathrm{T}}} |\nabla v(x,t)|, \quad \mathrm{Q}_{\mathrm{T}} \equiv (0,\mathrm{T})\times\Omega.$$

Поскольку всякое ослабленное решение задачи (8.1) является сильным обобщенным, то в силу результата теоремы 7 при дополнительном условии

$$\| u_0 \|_4^4 > \| \nabla u_0 \|_2^2 + \| u_0 \|_2^2$$

найдется такой момент времени $0 < \mathrm{T}_0 \leqslant \mathrm{T}_2$, что

$$\lim_{t\uparrow \mathrm{T}_0} \| \nabla u \|_2^2 = +\infty,$$

где

$$\mathrm{T}_2 = -\ln\left(1 - \frac{\| \nabla u_0 \|_2^2 + \| u_0 \|_2^2}{\| u_0 \|_4^4}\right).$$

Но это означает, что для момента времени T_0^* имеет место цепочка неравенств $0 < \mathrm{T}_0^* \leqslant \mathrm{T}_0 \leqslant \mathrm{T}_2$, т. е. за конечное время T_0^* ослабленное решение задачи (8.1) опрокинется:

$$\lim_{\mathrm{T}\uparrow \mathrm{T}_0^*} \| u \|'_{\mathrm{T}} = +\infty.$$

Отметим, что исследованию вопросов опрокидывания решений класса волновых уравнений типа Уизема, который включает в себя широкий спектр уравнений математической физики, посвящены работы [Габов; Шишмарев; Наумкин].

§ 9. Об одной начально-краевой задаче для сильно нелинейного уравнения вида (1.1)

Целью настоящего параграфа является доказательство локальной и глобальной разрешимости следующей начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\triangle u - |u|^{q_1}u) + \triangle u + |u|^{q_2}u = 0, \tag{9.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{9.2}$$

где $q_i > 0$, $i = \overline{1,2}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей класса $\mathbb{C}^{(2,\delta)}$ $\delta \in (0,1]$, $N \geqslant 1$.

В зависимости от q_1, q_2, N мы получим результаты о глобальной во времени разрешимости, о разрешимости в конечном цилиндре $\Omega\times$

$\times [0, \mathrm{T}]$ $(0 < \mathrm{T} < +\infty$ фиксированное) и о разрушении решения задачи за конечное время.

9.1. Однозначная разрешимость задачи в слабом смысле. Введем необходимые для дальнейшего изложения определения и предположения, а также получим вспомогательные результаты. Пусть заданы гильбертово пространство $\{\mathbb{H}_0^1(\Omega), \|\cdot\|\}$ и его сопряженное $\{\mathbb{H}^{-1}(\Omega), \|\cdot\|_*\}$. Обозначим скобки двойственности между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и его сопряженным $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (см., например, [Робертсон]). В дальнейшем будем использовать следующие обозначения:

$$\|\cdot\|_{\mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{V})} \equiv \|\cdot\|_{\mathrm{T}}, \quad \|\cdot\|_{\mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{V}^*)} \equiv \|\cdot\|_{\mathrm{T}}^* .$$

Заметим, что оператор $\mathrm{A}' \equiv -\triangle + (q_1+1)|u|^{q_1}\mathrm{I}$ действует из $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ в $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ и является радиально непрерывным (см, например, [Гаевский]). Докажем сначала, что оператор $\mathrm{B}'(u) \equiv (q_1+1)|u|^{q_1}\mathrm{I}$ действует из $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ в $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$. С этой целью докажем, что

$$\mathrm{B}' : \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega) \to \mathcal{L}(\mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega), \mathbb{L}^{(q_1+2)(q_1+1)^{-1}}(\Omega)),$$

где

$$\langle \mathrm{B}'(u)h_1, h_2\rangle = (q_1+1)\langle |u|^{q_1}h_1, h_2\rangle \quad \forall\, u,\ h_1,\ h_2 \in \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega)$$

$$\| \mathrm{B}'(u)h \|_{p_1} = (q_1+1) \| |u|^{q_1}h \|_{p_1} \leqslant c_1 \| |u|^{q_1} \|_{p_2} \| h \|_{p_3},\ \ p_2^{-1} + p_3^{-1} = p_1^{-1},$$

$$p_1 = (q_1+2)(q_1+1)^{-1},\ p_3 = q_1+2,\ p_2^{-1} = q_1/(q_1+2),\ p_2 q_1 = q_1+2$$
$$\forall\, h \in \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega).$$

Отсюда получаем

$$\| \mathrm{B}'(u)h \|_{(q_1+2)(q_1+1)^{-1}} \leqslant c_1 \| u \|_{q_1+2}^{q_1} \| h \|_{q_1+2} .$$

Потребуем дополнительно, чтобы $q_1 > 0$ при $N = 2$ и $0 < q_1 \leqslant 4/(N-2)$ при $N \geqslant 3$; тогда, в силу теоремы вложения Соболева, $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega)$, а значит, $\mathbb{L}^{(q_1+2)(q_1+1)^{-1}}(\Omega) \subset \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$. Поэтому справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\| \mathrm{B}'(u)h \|_* \leqslant c_2 \| \mathrm{B}'(u)h \|_{(q_1+2)/(q_1+1)} \leqslant c_2 c_1 \| u \|_{q_1+2}^{q_1} \| h \|_{q_1+2} \leqslant$$
$$\leqslant c_3 \| u \|^{q_1} \| h \| .$$

Следовательно,

$$\mathrm{B}' : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathcal{L}(\mathbb{H}_0^1(\Omega), \mathbb{H}^{-1}(\Omega)).$$

Таким образом, оператор $\mathrm{A}' \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_0^1(\Omega), \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$ и, очевидно, является

радиально непрерывным. В силу монотонности оператора

$$\mathrm{B}'(u) : \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega) \to \mathbb{L}^{(q_1+2)/(q_1+1)}(\Omega)$$

и того, что при $u,\ h_1,\ h_2 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$

$$\langle \mathrm{B}'(u)h_1 - \mathrm{B}'(u)h_2, h_1 - h_2\rangle = (q_1+1)\langle |u|^{q_1}(h_1-h_2), h_1-h_2\rangle\ ,$$

имеем

$$\langle \mathrm{B}'(u)h_1 - \mathrm{B}'(u)h_2, h_1 - h_2\rangle = \\ = (q_1+1)\langle |u|^{q_1}(h_1-h_2), h_1-h_2\rangle = \\ = (q_1+1)(|u|^{q_1}(h_1-h_2), h_1-h_2) \geqslant 0,$$

где скобки двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle$ между $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ являются скобками двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega)$ и $\mathbb{L}^{(q_1+2)/(q_1+1)}(\Omega)$ для элементов из $\mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega)$ и $\mathbb{L}^{(q_1+2)/(q_1+1)}(\Omega)$, а значит, в точности совпадают со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ в $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

Отсюда получаем

$$\langle \mathrm{A}'h_1 - \mathrm{A}'h_2, h_1 - h_2\rangle \geqslant -\langle \triangle h_1 - \triangle h_2, h_1 - h_2\rangle = \| h_1 - h_2 \|^2, \quad (9.3)$$

т. е. оператор $\mathrm{A}' : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ является сильно монотонным.

Из (9.3) в силу следствия 2.3. из [Гаевский, с. 97] вытекает, что обратный оператор $\mathrm{A}'^{-1} : \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \to \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, причем оператор A'^{-1} является липшиц-непрерывным:

$$\| \mathrm{A}'^{-1}x - \mathrm{A}'^{-1}y \| \leqslant \| x - y \|_* \quad \forall x, y \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega). \quad (9.4)$$

Рассмотрим теперь операторы

$$\mathrm{F}_i u \equiv |u|^{q_i} u, \quad i = 1, 2.$$

Докажем, что оператор $\mathrm{F} : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ является ограниченно липшиц-непрерывным при условии $0 < q_i \leqslant 4/(N-2)$ при $N = 3$ и $0 < q_i$ при $N = 1, 2$. С этой целью заметим, что

$$\| \mathrm{F}_i u - \mathrm{F}_i v \|_* \leqslant \| |u|^{q_i}u - |v|^{q_i}v \|_*\ .$$

Справедливо следующее неравенство:

$$\| |u|^{q_i}u - |v|^{q_i}v \|_{(q_i+2)/(q_i+1)} \leqslant (q_i+1)\ \| f(u-v) \|_{(q_i+2)/(q_i+1)},$$

где $f = \max(|u|^{q_i}, |v|^{q_i})$,

$$\| f(u-v) \|_{p_i} \leqslant \| f \|_{r_{1i}p_i} \| u - v \|_{r_{2i}p_i},$$
$$p_i = (q_i+2)/(q_i+1),\ r_{2i}p_i = q_i + 2,$$
$$r_{2i} = q_i + 1, \quad r_{1i} = (q_i+1)/q_i, \quad r_{1i}p_i = (q_i+2)/q_i,$$
$$\| |u|^{q_i}u - |v|^{q_i}v \|_{(q_i+2)/(q_i+1)} \leqslant (q_i+1)\ \| f \|_{(q_i+2)/q_i} \| u - v \|_{q_i+2},$$
$$\| f \|_{(q_i+2)/q_i} \leqslant 2(\max\{\| u \|_{q_i+2}, \| v \|_{q_i+2}\})^{q_i}.$$

Таким образом,

$$\| |u|^{q_i}u - |v|^{q_i}v \|_* \leqslant \overline{\mu}_i(R) \| u - v \|,$$
$$\overline{\mu}_i(R) = c_1 R^{q_i},\ R = \max\{\| u \|, \| v \|\},$$

и поэтому

$$\| \mathrm{F}_i u - \mathrm{F}_i v \|_* \leqslant \mu_i(R) \| u - v \| . \tag{9.5}$$

Рассмотрим теперь оператор

$$\mathbb{A}(u) = -\triangle u + |u|^{q_1}u : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega).$$

Нетрудно доказать, что данный оператор имеет липшиц-непрерывный обратный с константой Липшица, равной единице. Наконец, оператор $\mathbb{A}_0 u = -\triangle u : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ имеет липшиц-непрерывный обратный с константой Липшица, равной единице.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 8. *Для любого* $u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ $(0 < q_i \leqslant 4/(N-2)$ при $N \geqslant 3,\quad 0 < q_i$ при $N = 1, 2,\ i = 1, 2)$ *найдется такое* $\mathrm{T}_{u_0} > 0$, *что для любого* $0 < \mathrm{T} < \mathrm{T}_{u_0}$ *задача* (9.1), (9.2) *имеет точно одно решение в классе* $\mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$.

Доказательство.

Задача (9.1), (9.2) эквивалентна в классе $v \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$ следуюшей задаче:

$$\frac{dv}{dt} = \mathbb{F}_1(\mathbb{A}^{-1}v) + \mathbb{F}_2(\mathbb{A}^{-1}v),\ \ v(0) = v_0 = \mathbb{A}(u_0) \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega). \tag{9.6}$$

В свою очередь задача (9.6) эквивалентна следующему интегральному уравнению:

$$v(t) = \mathbb{H}(v) \equiv v_0 + \int_0^t ds\ \left[\mathbb{F}_1(\mathbb{A}^{-1}v) + \mathbb{F}_2(\mathbb{A}^{-1}v)\right](s). \tag{9.7}$$

Используя свойства (9.5) операторов, входящих в определение (9.7) оператора $\mathbb{H}(v)$, и метод сжимающих отображений, можно доказать локальную разрешимость в классе $v \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$, причем либо $\mathrm{T}_0 = +\infty$, либо $\mathrm{T}_0 < +\infty$ и в последнем случае имеет место предельное равенство

$$\limsup_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \| v \|_{-1} = +\infty.$$

Теперь рассмотрим уравнение

$$\mathbb{A}(u) = -\triangle u + |u|^{q_1}u = v \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)), \tag{9.8}$$

которое в силу свойств оператора $\mathbb{A}$ эквивалентно следующему:

$$u = \mathbb{A}^{-1}(v). \tag{9.9}$$

Пусть $v_n \to v$ сильно в $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, тогда из (9.9) вытекает, что

$$\| u - u_n \|_{+1} \leqslant \mathrm{C} \| v - v_n \|_{-1} \to +0$$

при $n \to +\infty$. Заметим, что в силу $v \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$ для любого $\mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0)$ имеем

$$\| v(t) - v(t_0) \|_{-1} \to +0$$

при $t \to t_0$, t, $t_0 \in (0, \mathrm{T})$. Значит, из (9.9) вытекает, что $u \in \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$.

Теперь из (9.8) в классе $u \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ следует, что

$$(\mathbb{A}_0 + \mathbb{B}'(u))u' = v' \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)), \quad u = \mathbb{A}^{-1}(v). \tag{9.10}$$

Подействуем на обе части уравнения (9.10) оператором $\mathbb{A}_0^{-1}$, тогда получим эквивалентное уравнение

$$\left[\mathrm{I} + \mathbb{A}_0^{-1}\mathbb{B}'(u)\right] u' = \mathbb{A}_0^{-1} v' \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0; \mathbb{H}_0^1(\Omega)). \tag{9.11}$$

Докажем, что оператор

$$\widehat{\mathbb{C}} \equiv \mathrm{I} + \mathbb{A}_0^{-1}\mathbb{B}'(u) \tag{9.12}$$

обратим при фиксированном $u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$. В силу линейности оператора $\widehat{\mathbb{C}}$ достаточно доказать, что операторное уравнение

$$\widehat{\mathbb{C}} w = 0 \tag{9.13}$$

имеет только тривиальное решение. Действительно, подействуем на обе части уравнения (9.13) оператором $\mathbb{A}_0$, тогда получим уравнение

$$\mathbb{A}'(u)w = \left[\mathbb{A}_0 + \mathbb{B}'(u)\right] w = 0,$$

из которого в силу (9.4) вытекает обратимость оператора $\mathbb{A}'(u)$ при фиксированном $u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$. Отсюда приходим к выводу, что $w = 0$ в классе $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$. Отсюда в силу линейности и непрерывности оператора $\widehat{\mathbb{C}}$, определенного выражением (9.12), в силу теоремы Банаха об обратном операторе приходим к выводу, что оператор $\widehat{\mathbb{C}}^{-1}$ является линейным и ограниченным. Тогда из (9.11) приходим к следующему эквивалентному уравнению:

$$u' = \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(u)\mathbb{A}_0^{-1} v'. \tag{9.14}$$

Нам осталось доказать, что $u' = \widehat{\mathbb{C}}^{-1}\mathbb{A}_0^{-1} v' \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ при фиксированном $u \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}_0^1(\Omega))$. Действительно, в силу (9.14) справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\| u'(t) - u'(t_0) \|_{+1} \leqslant \| \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0)\mathbb{A}_0^{-1}[v'(t) - v'(t_0)] \|_{+1} + \\ + \| (\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) - \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t))\mathbb{A}_0^{-1} v'(t_0) \|_{+1} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C} \parallel v^{'}(t) - v^{'}(t_0) \parallel_{-1} + \mathrm{C} \parallel \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) - \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t) \parallel_{\mathbb{H}_0^1 \to \mathbb{H}_0^1}. \quad (9.15)$$

Отметим, что линейный при фиксированном $u \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ оператор $\widehat{\mathbb{C}}$ является непрерывным, а значит, в силу теоремы Банаха об обратном отображении оператор $\widehat{\mathbb{C}}^{-1}$ является линейным непрерывным и, следовательно, в силу линейности ограниченным. Стало быть, мы можем воспользоваться спектральным представлением для линейного ограниченного оператора $\widehat{\mathbb{C}}^{-1} : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}_0^1(\Omega)$.

Прежде всего введем резольвенту оператора $\widehat{\mathbb{C}}$:

$$\mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}) = \left(\lambda \mathbb{I} - \widehat{\mathbb{C}}\right)^{-1}.$$

Пусть Γ — окружность $|\lambda| = r$ с достаточно большим радиусом, большим чем

$$\sup_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} \parallel \widehat{\mathbb{C}} \parallel_{\mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}_0^1(\Omega)}.$$

Введенная величина определена корректно, поскольку при указанных $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \subset [0, \mathrm{T}_0)$ имеет место неравенство

$$\sup_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} \parallel u \parallel_{+1} < +\infty.$$

Теперь мы можем воспользоваться спектральным представлением для операторов $\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t)$ и $\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0)$ с одним и тем же введенным ранее контуром Γ:

$$\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} d\lambda\, \lambda^{-1} \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t)), \quad \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} d\lambda\, \lambda^{-1} \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0)).$$

Очевидно, имеем

$$\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t) - \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} d\lambda\, \lambda^{-1} \left[\mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t)) - \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0))\right].$$

Теперь воспользуемся известным представлением для резольвент операторов:

$$\mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t)) - \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0)) = \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0)) \sum_{n=1}^{+\infty} [(\widehat{\mathbb{C}}(t) - \widehat{\mathbb{C}}(t_0)) \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0)]^n$$

при условии

$$\parallel \widehat{\mathbb{C}}(t_0) - \widehat{\mathbb{C}}(t) \parallel_{\mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}_0^1(\Omega)} \parallel \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0)) \parallel_{\mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}_0^1(\Omega)} \leqslant \delta < 1.$$

Справедливо следующее неравенство:

$$\parallel \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t)) - \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0)) \parallel_{\mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}_0^1(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant \parallel \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0)) \parallel_{\mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}_0^1(\Omega)} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{+\infty} \| \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0)) \|^n_{\mathbb{H}^1_0(\Omega)\to\mathbb{H}^1_0(\Omega)} \| \widehat{\mathbb{C}}(t)) - \widehat{\mathbb{C}}(t_0)) \|^n_{\mathbb{H}^1_0(\Omega)\to\mathbb{H}^1_0(\Omega)} .$$

Теперь заметим, что

$$\widehat{\mathbb{C}}(t) - \widehat{\mathbb{C}}(t_0) = \mathbb{A}_0^{-1} \left[\mathbb{B}^{'}_u(u(t)) - \mathbb{B}^{'}_u(u(t_0)) \right].$$

Докажем теперь непрерывность производных Фреше $\mathbb{B}^{'}_u(u)$. Пусть $u_n \to u$ сильно в $\mathbb{H}^1_0(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^2(\Omega)$. Значит, $u_n \to u$ сильно в $\mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega)$, и тогда

$$\| \mathbb{B}^{'}_u(u) - \mathbb{B}^{'}_u(u_n) \|_{\mathbb{H}^1_0\to\mathbb{H}^{-1}} = \sup_{\|\nabla h\|_2=1} \| \mathbb{B}^{'}_u(u)h - \mathbb{B}^{'}_u(u_n)h \|_{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|\nabla h\|_2=1} \| \mathbb{B}^{'}_u(u)h - \mathbb{B}^{'}_u(u_n)h \|_{(q_1+2)/(q_1+1)} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C} \sup_{\|\nabla h\|_2=1} \left(\int_\Omega dx \, |[|u|^{q_1} - |u_n|^{q_1}]h|^{\frac{q_1+2}{q_1+1}} \right)^{(q_1+1)/(q_1+2)} .$$

Рассмотрим отдельно интеграл

$$\mathrm{J}_n = \int_\Omega dx \, |[|u|^{q_1} - |u_n|^{q_1}]h|^{\frac{q_1+2}{q_1+1}} \leqslant \int_\Omega dx \, ||u|^{q_1} - |u_n|^{q_1}|^{\frac{q_1+2}{q_1+1}} \, |h|^{\frac{q_1+2}{q_1+1}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_\Omega dx \, ||u|^{q_1} - |u_n|^{q_1}|^{(q_1+2)/q_1} \right)^{q_1/(q_1+1)} \left(\int_\Omega dx \, |h|^{q_1+2} \right)^{1/(q_1+1)} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C} \, \| \nabla h \|_2^{(q_1+2)/(q_1+1)} \left(\int_\Omega dx \, ||u|^{q_1} - |u_n|^{q_1}|^{(q_1+2)/q_1} \right)^{q_1/(q_1+1)} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C} \left(\int_\Omega dx \, ||u|^{q_1} - |u_n|^{q_1}|^{(q_1+2)/q_1} \right)^{q_1/(q_1+1)} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C} \max\{ \| \nabla u \|_2^{(q_1+2)q_1/(q_1+1)}, \| \nabla u_n \|_2^{(q_1+2)q_1/(q_1+1)} \} \leqslant \mathrm{C}.$$

Рассмотрим оператор $f(x,u) = |u|^{q_1} : \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega) \to \mathbb{L}^{(q+2)/q_1}(\Omega)$, для которого выполнены достаточные условия его непрерывности:

$$\mathrm{J}_n \leqslant \mathrm{C} \int_\Omega dx \, ||u|^{q_1} - |u_n|^{q_1}|^{\frac{q_1+2}{q_1}} \to +0$$

при $n \to +\infty$, поскольку последовательность u_n сходится сильно к u в $\mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega)$.

Значит, по теореме Вайнберга–Немыцкого имеем: $J_n \to +0$ при $n \to +\infty$.

Значит,

$$\| \widehat{\mathbb{C}}(t) - \widehat{\mathbb{C}}(t_0) \|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)\to\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \leqslant \| \mathbb{B}_u'(u(t)) - \mathbb{B}_u'(u(t_0)) \|_{\mathbb{H}_0^1\to\mathbb{H}^{-1}(\Omega)} \to +0,$$

$$\| \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t)) - \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0)) \|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)\to\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \to 0,$$

$$\| \widehat{\mathbb{C}}(t)^{-1} - \widehat{\mathbb{C}}(t_0)^{-1} \|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)\to\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \to +0$$

при $t \to t_0$.

Значит, в силу (9.15) имеем: $u \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{V}_0)$.

Теорема доказана.

9.2. Разрушение решения и глобальная разрешимость задачи. Введем обозначения

$$\mathrm{E}(t) \equiv 2^{-1} \| \nabla u \|_2^2 + (q_1+1)/(q_1+2) \| u \|_{q_1+2}^{q_1+2}, \quad \mathrm{E}_0 \equiv \mathrm{E}(0),$$

$$\overline{\mathrm{B}} \equiv \mathrm{C}_1^{q_2+2} \left(\frac{q_1+2}{q_1+1} \right)^{(q_2+2)(q_1+2)^{-1}}, \quad \gamma \equiv \frac{q_2+2}{q_1+2}$$

при условиях $0 < q_i \leqslant 4/(N-2)$ для $N \geqslant 3$ или $q_i > 0$ для $N = 1, 2$. Кроме того, пусть

$$\| u \|_{q_2+2} \leqslant C_1 \| u \|_{q_1+2}$$

при $q_1 \geqslant q_2 > 0$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 9. *Пусть выполнены условия теоремы* 8. *Тогда при условии* $q_1 \geqslant q_2 > 0$ *задача* (9.1), (9.2) *однозначно разрешима в любом конечном цилиндре в классе* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$, *причем справедливы оценки сверху*

$$\mathrm{E}(t) \leqslant \mathrm{E}_0 \exp(\overline{\mathrm{B}} t) \ \textit{при условии} \ q_1 = q_2,$$

$$\mathrm{E}(t) \leqslant \left[\mathrm{E}_0 + (1-\gamma)\overline{\mathrm{B}} t \right]^{1/(1-\gamma)} \ \textit{при условии} \ q_1 > q_2.$$

Наконец, если $0 < q_1 < q_2$ *и выполнены условия*:

$$\| u_0 \|_{q_2+2}^{q_2+2} > \frac{q_2+2}{2} \| \nabla u_0 \|_2^2,$$

$$\| u_0 \|_{q_2+2}^{q_2+2} > \| \nabla u_0 \|_2^2 + \frac{\sqrt{2}\, q_2 (q_1+2)^{1/2}}{q_2 - q_1} \left[\frac{1}{2} \| \nabla u_0 \|_2^2 + \frac{q_1+1}{q_1+2} \| u_0 \|_{q_1+2}^{q_1+2} \right],$$

то найдется такое максимальное T_0, *что для* $u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ *существует единственное сильное обобщенное решение класса* $u(x,t) \in \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ *для любого* $\mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0)$, *причем* $\mathrm{T}_0 < +\infty$ *и справедливо предельное равенство*

$$\lim_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \mathrm{E}(t) = +\infty$$

и следующая оценка сверху на время разрушения решения:

$$\mathrm{T}_0 \leqslant \mathrm{T}_1 = \frac{\mathrm{E}_0^{1-\alpha_1}}{\mathrm{A}}, \quad \mathrm{A} \equiv \left[(1-\alpha_1)^2 \mathrm{E}_0^{-2\alpha_1} (\mathrm{E}_0')^2 - \beta_1(\alpha_1-1)\mathrm{E}_0^{(1-\alpha_1)2}\right]^{1/2},$$

где

$$\mathrm{E}_0' = \| u_0 \|_{q_2+2}^{q_2+2} - \| \nabla u_0 \|_2^2, \quad \beta_1 \equiv \frac{q_2^2}{q_2-q_1}, \quad \alpha_1 = \frac{4+q_1+q_2}{2(q_1+2)}.$$

Доказательство.

Умножим уравнение (9.1) на $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}_0^1(\Omega))$ и, проинтегрировав по области Ω, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \nabla u \|_2^2 + \frac{q_1+1}{q_1+2}\frac{d}{dt} \| u \|_{q_1+2}^{q_1+2} + \| \nabla u \|_2^2 = \| u \|_{q_2+2}^{q_2+2}. \qquad (9.16)$$

Теперь, умножив уравнение (9.1) на $u_t(x,t) \in \mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}_0^1(\Omega))$ и проинтегрировав по области Ω, получим

$$\| \nabla u_t \|_2^2 + (q_1+1)\int\limits_\Omega dx\, |u|^{q_1}(u_t)^2 = \\ = \frac{1}{q_2+2}\frac{d}{dt} \| u \|_{q_2+2}^{q_2+2} - \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \nabla u \|_2^2. \qquad (9.17)$$

Из (9.16) вытекает следующая цепочка неравенств при условии $q_1 \geqslant q_2 > 0$:

$$\mathrm{E}(t) \leqslant \mathrm{E}_0 + \int\limits_0^t ds\ \| u \|_{q_2+2}^{q_2+2}(s) \leqslant \\ \leqslant \mathrm{E}_0 + \mathrm{C}_1^{q_2+2} \int\limits_0^t ds \left(\frac{q_1+2}{q_1+1}\right)^{(q_2+2)(q_1+2)^{-1}} \mathrm{E}^{(q_2+2)(q_1+2)}(s).$$

Из этого интегрального неравенства в силу теоремы Гронуолла–Беллмана–Бихари [Демидович] вытекают неравенства

$$\mathrm{E}(t) \leqslant \mathrm{E}_0 \exp(\overline{\mathrm{B}}t) \ \text{ при условии } \ q_1 = q_2,$$

$$\mathrm{E}(t) \leqslant \left[\mathrm{E}_0^{1-\gamma} + (1-\gamma)\overline{\mathrm{B}}t\right]^{1/(1-\gamma)} \ \text{ при условии } \ q_1 > q_2,$$

где

$$\overline{\mathrm{B}} \equiv \mathrm{C}_1^{q_2+2}\left(\frac{q_1+2}{q_1+1}\right)^{(q_2+2)(q_1+2)^{-1}}, \quad \gamma \equiv \frac{q_2+2}{q_1+2}.$$

Перейдем к доказательству последней части теоремы. Поскольку по условию

$$\| u_0 \|_{q_2+2}^{q_2+2} > \frac{q_2+2}{2} \| \nabla u_0 \|_2^2,$$

то из энергетических равенств (9.16) и (9.17) вытекает, что

$$\| u \|_{q_2+2}^{q_2+2} - \| \nabla u \|_2^2 > 0.$$

Отсюда и из (9.16) следует, что

$$\frac{d\mathrm{E}}{dt} = \| u \|_{q_2+2}^{q_2+2} - \| \nabla u \|_2^2 > 0.$$

Установим следующую цепочку неравенств:

$$\begin{gathered} \left| \int\limits_\Omega dx \, \langle \nabla u, \nabla u_t \rangle \right|^2 \leqslant \| \nabla u \|_2^2 \| \nabla u_t \|_2^2, \\ \left| \int\limits_\Omega dx \, |u|^{q_1} u u_t \right|^2 \leqslant \| u \|_{q_1+2}^{q_1+2} \int\limits_\Omega dx \, |u|^{q_1} (u_t)^2. \end{gathered} \tag{9.18}$$

Справедлива также цепочка неравенств

$$\begin{gathered} \left| \int\limits_\Omega u(-\triangle u + |u|^{q_1} u)_t \, dx \right|^2 \leqslant |(\nabla u, \nabla u_t)|^2 + (q_1+1)^2 |(|u|^{q_1} u, u_t)|^2 + \\ + 2(q_1+1) |(\nabla u, \nabla u_t)| |(|u|^{q_1} u, u_t)| \leqslant \| \nabla u \|_2^2 \| \nabla u_t \|_2^2 + \\ + (q_1+1)^2 (|u|^{q_1}, u_t^2) \| u \|_{q_1+2}^{q_1+2} + 2(q_1+1) \| \nabla u \|_2 \| \nabla u_t \|_2 \sqrt{(|u|^{q_1}, u_t^2)} \times \\ \times \| u \|_{q_1+2}^{(q_1+2)/2} \leqslant \left(\| \nabla u_t \|_2^2 + (q_1+1) \int\limits_\Omega dx \, |u|^{q_1} u_t^2 \right) \Big[\| \nabla u \|_2^2 + \\ + (q_1+1) \| u \|_{q_1+2}^{q_1+2} \Big] \leqslant (q_1+2) \left[\| \nabla u_t \|_2^2 + (q_1+1) \int\limits_\Omega dx \, |u|^{q_1} (u_t)^2 \right] \times \\ \times \left[\frac{1}{2} \| \nabla u \|_2^2 + (q_1+1)/(q_1+2) \| u \|_{q_1+2}^{q_1+2} \right]. \end{gathered} \tag{9.19}$$

Из (9.16)–(9.19) получим

$$(\mathrm{E}')^2 \leqslant (q_1+2) \mathrm{E}(t) \left[\| \nabla u' \|_2^2 + (q_1+1) \int\limits_\Omega dx \, |u|^{q_1} (u')^2 \right].$$

Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{gathered} \| \nabla u' \|_2^2 + (q_1+1) \int\limits_\Omega dx \, |u|^{q_1} (u')^2 = \frac{1}{q_2+2} \frac{d}{dt} \| u \|_{q_2+2}^{q_2+2} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| \nabla u \|_2^2 \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{q_2+2} \mathrm{E}'' - \frac{q_2}{2(q_2+2)} \frac{d}{dt} \| \nabla u \|_2^2 \leqslant \end{gathered}$$

$$\leqslant \frac{1}{q_2+2}\mathrm{E}'' + \frac{q_2}{q_2+2}\left[\frac{\varepsilon}{2}\parallel \nabla u' \parallel_2^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\parallel \nabla u \parallel_2^2\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{q_2+2}\mathrm{E}'' + \frac{\varepsilon q_2}{2(q_2+2)}\left[\parallel \nabla u' \parallel_2^2 + (q_1+1)\int\limits_{\Omega} dx\,|u|^{q_1}(u')^2\right] + \frac{q_2}{q_2+2}\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{E}$$

Отсюда и из (9.16)–(9.19) вытекает следующее обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка (см. [Калантаров, Ладыженская]):

$$\mathrm{E}\mathrm{E}'' - \alpha_1(\mathrm{E}')^2 + \beta_1\mathrm{E}^2 \geqslant 0, \tag{9.20}$$

где

$$\alpha_1 = \frac{q_2+2}{q_1+2}\left[1 - \varepsilon\frac{q_2}{2(q_2+2)}\right], \quad \beta_1 = \frac{q_2}{\varepsilon}, \quad q_2 > q_1.$$

Из (9.20) получим

$$-\frac{1}{\alpha_1 - 1}(\mathrm{E}^{1-\alpha_1})'' + \beta_1\mathrm{E}^{1-\alpha_1} \geqslant 0. \tag{9.21}$$

Введем обозначение: $\mathrm{Z}(t) \equiv \mathrm{E}^{1-\alpha_1}(t)$, причем в силу того что $\mathrm{E}' \geqslant 0$, имеем: $\mathrm{Z}'(t) = (1-\alpha_1)\mathrm{E}^{-\alpha_1}\mathrm{E}' \leqslant 0$. С учетом указанного обозначения из (9.21) получим

$$(\mathrm{Z}')^2 \geqslant (\mathrm{Z}_0')^2 - \gamma_1\mathrm{Z}_0^2 + \gamma_1\mathrm{Z}^2, \quad \gamma_1 = \beta_1(\alpha_1 - 1). \tag{9.22}$$

Потребуем теперь выполнения условия

$$(\mathrm{Z}_0')^2 - \gamma_1\mathrm{Z}_0^2 > 0,$$

которое равносильно условию

$$(1-\alpha_1)^2\mathrm{E}_0^{-2\alpha_1}(\mathrm{E}_0')^2 > \beta_1(\alpha_1 - 1)\mathrm{E}_0^{(1-\alpha_1)2}. \tag{9.23}$$

Из (9.23) с учетом (9.16) получим

$$\frac{\alpha_1 - 1}{\beta_1}(\mathrm{E}_0')^2 > \mathrm{E}_0^2, \tag{9.24}$$

причем $\alpha_1 > 1$ при условии $\varepsilon \in (0, 2(q_2 - q_1)/q_2)$. Введем обозначение

$$f(\varepsilon) = \frac{\alpha_1 - 1}{\beta_1} = \frac{\varepsilon}{q_2}\left[\frac{q_2 - q_1}{q_1 + 2} - \frac{q_2\varepsilon}{2(q_1+2)}\right]. \tag{9.25}$$

Максимум функции (9.25) достигается в точке

$$\varepsilon_0 = \frac{q_2 - q_1}{q_2} \tag{9.26}$$

и равен

$$f(\varepsilon_0) = \frac{(q_2 - q_1)^2}{2q_2^2(q_1+2)}.$$

В точке (9.26) неравенство (9.24) примет оптимальный вид

$$\| u_0 \|_{q_2+2}^{q_2+2} > \| \nabla u_0 \|_2^2 + \frac{\sqrt{2}\, q_2 (q_1+2)^{1/2}}{q_2 - q_1} \left[\frac{1}{2} \| \nabla u_0 \|_2^2 + \frac{q_1+1}{q_1+2} \| u_0 \|_{q_1+2}^{q_1+2} \right].$$

Рассмотрим теперь неравенство (9.22) в точке (9.26). Оно примет вид

$$(\mathrm{Z}')^2 \geqslant \mathrm{A}^2 + \gamma_1 \mathrm{Z}^2, \tag{9.27}$$

где

$$\mathrm{A}^2 \equiv (\mathrm{Z}_0')^2 - \gamma_1 \mathrm{Z}_0^2.$$

Из (9.27) вытекают неравенства

$$-\mathrm{Z}' \geqslant \mathrm{A}, \quad \mathrm{Z} - \mathrm{Z}_0 \leqslant -\mathrm{A}t.$$

Отсюда сразу же получаем последнее утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Замечание 4. Для задачи (9.1), (9.2), понимаемой в сильном обобщенном смысле, в случае достаточно малых начальных данных может быть доказана глобальная во времени разрешимость в классе $\mathbb{C}^{(1)}([0,+\infty];\mathbb{H}_0^1(\Omega))$ при условиях, что

$$0 \leqslant q_i \leqslant \frac{4}{N-2} \ \text{ при } \ N \geqslant 3 \ \text{ и } \ 0 \leqslant q_i \ \text{ при } \ N = 1, 2.$$

Действительно, в сильном обобщенном смысле приходим к следующему уравнению:

$$\frac{dw}{dt} + w = \mathbb{F}(\mathbb{A}^{-1}(w)),$$

где

$$w = \mathbb{A}(u) = -\triangle u + |u|^{q_1} u, \quad \mathbb{F}(u) = |u|^{q_1} u + |u|^{q_2} u.$$

В классе $w \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T};\mathbb{H}^{-1}(\Omega))$ приходим к интегральному уравнению

$$w = \mathbb{H}(w) \equiv w_0 e^{-t} + \int_0^t ds\, e^{-(t-s)} \mathbb{F}(\mathbb{A}^{-1}(w)).$$

Используя метод последовательных приближений в банаховом пространстве $\mathbb{L}^\infty(0,+\infty;\mathbb{H}^{-1}(\Omega))$ при условии, что $\| w_0 \|_{-1} \leqslant \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно мало, можно доказать существование глобального во времени решения интегрального уравнения. Наконец, из свойств сглаживания во времени оператора $\mathbb{H}(v)$ получим

$$\mathbb{H}(v) : \mathbb{L}^\infty(0,+\infty;\mathbb{H}^{-1}(\Omega)) \to \mathbb{AC}([0,+\infty];\mathbb{H}^{-1}(\Omega)),$$
$$\mathbb{H}(v) : \mathbb{AC}([0,+\infty];\mathbb{H}^{-1}(\Omega)) \to \mathbb{C}^{(1)}([0,+\infty];\mathbb{H}^{-1}(\Omega)).$$

Значит приходим к следующему нелинейному операторному уравнению с известной правой частью:

$$\mathbb{A}(u) = w \in \mathbb{C}^{(1)}([0,+\infty];\mathbb{H}^{-1}(\Omega)).$$

Далее точно так же, как и ранее, можно доказать, что

$$u \in \mathbb{C}^{(1)}([0,+\infty];\mathbb{H}_0^1(\Omega)).$$

§ 10. О разрушении решений одного класса квазилинейных волновых диссипативных уравнений псевдопараболического типа с источниками

В этом параграфе мы рассмотрим некоторый класс квазилинейных волновых уравнений псевдопараболического типа с линейной диссипацией, т. е. одновременно учтем наличие нелинейностей конвективного характера и линейной диссипации. А именно, рассмотрим следующую абстрактную задачу Коши:

$$(\mathbb{A}_0+\mathbb{L})\frac{du}{dt}+\mathbb{L}u+\mathbb{DP}(u)=\mathbb{F}(u), \tag{10.1}$$

$$u(0)=u_0. \tag{10.2}$$

10.1. Однозначная локальная разрешимость задачи в сильном смысле и разрушение ее решения. Пусть операторы $\mathbb{L}$, $\mathbb{A}_0$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{P}$, $\mathbb{F}$, банаховы пространства $\mathbb{V}_0$, $\mathbb{W}_1$, $\mathbb{W}_0$, $\mathbb{W}_2$, $\mathbb{W}_3$, $\mathbb{W}_4$ и гильбертово пространство $\mathbb{H}$ определены в §2 настоящей главы и выполнены условия (A_0), (L), (DP), (F).

Далее мы предположим, что выполнены следующие условия.

Условия (V).

1. Пусть банаховы пространства $\mathbb{V}_0$, $\mathbb{W}_1$, непрерывны вложены в $\mathbb{H}$.
2. Для сильного сопряженного к банахову относительно нормы

$$\|\cdot\|=|\cdot|_1+\|\cdot\|_0$$

рефлексивного пространства

$$\mathbb{V}\equiv\mathbb{V}_0\bigcap\mathbb{W}_1$$

справедливо явное выражение

$$\mathbb{V}^*=\mathbb{V}_0^*+\mathbb{W}_1^*.$$

3. Справедливы следующие цепочки непрерывных вложений:

$$\mathbb{V}\subseteq\mathbb{V}_0\subseteq\mathbb{H}\subseteq\mathbb{V}_0^*\subseteq\mathbb{V}^*,\quad i=\overline{0,N},$$
$$\mathbb{V}\subseteq\mathbb{W}_j\subseteq\mathbb{H}\subseteq\mathbb{W}_j^*\subseteq\mathbb{V}^*,\quad j=\overline{0,1}.$$

4. Пространство $\mathbb{V}$ бесконечномерное и сепарабельное.

Замечание 5. Из условия (V) 1 вытекает, что пересечение

$$\mathbb{V}\equiv\mathbb{V}_0\bigcap\mathbb{W}_1,$$

наделенное нормой

$$\|\cdot\|=\|\cdot\|_0+|\cdot|_1,$$

можно сделать банаховым пространством. В последующих пунктах условия (V) под $\mathbb{V}$ понимается именно это банахово пространство.

Обозначим через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}^*$.

Дадим определение сильного обобщенного решения задачи (10.1), (10.2).

Определение 6. Сильным обобщенным решением задачи (10.1), (10.2) мы называем решение класса $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T};\mathbb{V})$, которое удовлетворяет условиям

$$\left(\mathbb{L}\frac{du}{dt},w\right)_1+\left\langle\mathbb{A}_0\frac{du}{dt},w\right\rangle_0+(\mathbb{L}u,w)_1+\langle\mathbb{DP}(u),w\rangle=(\mathbb{F}(u),w)_0 \quad (10.3)$$
$$\forall\, w\in\mathbb{V},\ \ \forall\, t\in[0,\mathrm{T}],\ \ u(0)=u_0\in\mathbb{V},$$

причем производная по времени понимается в классическом смысле.

В рассматриваемом классе имеют место включения $\mathbb{A}_0u\in\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0^*)$, $\mathbb{L}u\in\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T};\mathbb{W}_1^*)$, $\mathbb{DP}(u)\in\mathbb{C}([0,\mathrm{T};\mathbb{V}^*)$, $\mathbb{F}(u)\in\mathbb{C}([0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^*)$, и, следовательно, $\mathbb{A}_0u$ и $\mathbb{L}u$ принадлежат классу $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T};\mathbb{V}^*)$, а $\mathbb{DP}(u)$ и $\mathbb{F}(u)$ принадлежат классу $\mathbb{C}([0,\mathrm{T};\mathbb{V}^*)$. Тем самым задача (10.3) в силу условий (V) и условий нижеследующей теоремы 11 эквивалентна следующей задаче:

$$\langle\mathbb{L}u',w\rangle+\langle\mathbb{A}_0u',w\rangle+\langle\mathbb{L}u,w\rangle+\langle\mathbb{DP}(u),w\rangle=\langle\mathbb{F}(u),w\rangle$$
$$\forall\, w\in\mathbb{V},\ \ \forall\, t\in[0,\mathrm{T}],\ \ u(0)=u_0\in\mathbb{V},$$

а символом $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначена скобка двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}^*$.

Методами, развитыми в предыдущих параграфах, может быть доказан следующий результат.

Теорема 10. *Пусть выполнены условия* (A_0), (L), (DP), (F), *причем* $\mathbb{V}\subseteq\mathbb{W}_0\subseteq\mathbb{W}_2$, $\mathbb{W}_4\subseteq\mathbb{V}^*$, *тогда для любого* $u_0\in\mathbb{V}$ *найдется такое максимальное* $\mathrm{T}_0=\mathrm{T}_0(u_0)>0$, *что существует единственное сильное обобщенное решение задачи* (10.1), (10.2) *класса* $u(t)\in\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{V}_0\cap\mathbb{W}_1)$, *причем либо* $\mathrm{T}_0=+\infty$, *либо* $\mathrm{T}_0<+\infty$ *и в этом случае выполнено предельное равенство*

$$\lim_{t\uparrow\mathrm{T}_0}\|\,u\,\|_{\mathbb{V}_0\cap\mathbb{W}_1}=+\infty. \quad (10.4)$$

Доказательство.

Перепишем уравнение (10.1), понимаемое в сильном обобщенном смысле, в следующем виде:

$$\mathbb{A}\left(\frac{du}{dt}+u\right)=-\mathbb{DP}(u)+\mathbb{F}(u)+\mathbb{A}_0u,$$

где $\mathbb{A}\equiv\mathbb{A}_0+\mathbb{L}$. В классе $u\in\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T};\mathbb{V})$ имеем: $u,\ u'\in\mathbb{C}([0,\mathrm{T};\mathbb{V})$.

Кроме того, $\mathbb{DP}(u)$, $\mathbb{F}(u)$, $\mathbb{A}_0 u \in \mathbb{C}([0,\mathrm{T};\mathbb{V})$. Из условий (A_0) 1 и (L) 1 следует

$$\langle \mathbb{A}u_1 - \mathbb{A}u_2, u_1 - u_2\rangle \geqslant \mathrm{m}_0 \parallel u_1 - u_2 \parallel_0^2 + \mathrm{d}_1 |u_1 - u_2|_1^2, \quad \mathbb{A} \equiv \mathbb{A}_0 + \mathbb{L}.$$

Заметим, что по условию (V) 2 банахово пространство $\mathbb{V}$ наделено следующей нормой:

$$\parallel v \parallel = \parallel v \parallel_0 + |v|_1,$$

которая в силу условий (A_0) и (L) эквивалентна норме

$$\parallel v \parallel = \left(\langle \mathbb{A}_0 v, v\rangle_0 + (\mathbb{L}v, v)_1\right)^{1/2}.$$

Тогда сразу же получим, что оператор $\mathbb{A}$ действует из $\mathbb{V}$ в $\mathbb{V}^*$ и имеет липшиц-непрерывный обратный $\mathbb{A}^{-1} : \mathbb{V}^* \to \mathbb{V}$ с константой Липшица, равной $2^{-1}\min\{\mathrm{m}_0, \mathrm{d}_1\}$. Действительно,

$$\langle \mathbb{A}u_1 - \mathbb{A}u_2, u_1 - u_2\rangle \geqslant 2^{-1}\min\{\mathrm{m}_0, \mathrm{d}_1\} \parallel u_1 - u_2 \parallel^2,$$
$$\parallel \mathbb{A}u_1 - \mathbb{A}u_2 \parallel \geqslant (2^{-1}\min\{\mathrm{m}_0, \mathrm{d}_1\})^{1/2} \parallel u_1 - u_2 \parallel,$$
$$\parallel \mathbb{A}^{-1}z_1 - \mathbb{A}^{-1}z_2 \parallel \leqslant (2^{-1}\min\{\mathrm{m}_0, \mathrm{d}_1\})^{-1/2} \parallel z_1 - z_2 \parallel^* .$$

Рассмотрим теперь операторы $\mathbb{DP}(u)$ и $\mathbb{F}(u)$. Справедливы следующие оценки:

$$\parallel \mathbb{DP}(u_1) - \mathbb{DP}(u_2) \parallel^* \leqslant \mathrm{C}|\mathbb{DP}(u_1) - \mathbb{DP}(u_2)|_4 \leqslant \mathrm{C}|\mathbb{P}(u_1) - \mathbb{P}(u_2)|_3 \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{C}\mu_2(\overline{\mathrm{R}})|u_1 - u_2|_2,$$
$$\parallel \mathbb{DP}(u_1) - \mathbb{DP}(u_2) \parallel^* \leqslant \mathrm{C}\mu_2(\mathrm{R}) \parallel u_1 - u_2 \parallel, \quad \mathrm{R} = \max\{\parallel u_1 \parallel, \parallel u_2 \parallel\}.$$

Таким образом, оператор $\mathbb{DP}(u) : \mathbb{V} \to \mathbb{V}^*$ является ограниченно липшиц-непрерывным.

Рассмотрим теперь оператор $\mathbb{F}(u)$. Справедливы следующие оценки:

$$\parallel \mathbb{F}(u_1) - \mathbb{F}(u_2) \parallel^* \leqslant \mathrm{C}|\mathbb{F}(u_1) - \mathbb{F}(u_2)|_0^* \leqslant \mathrm{C}\mu_1(\mathrm{R}) \parallel u_1 - u_2 \parallel .$$

Таким образом, оператор $\mathbb{F}(u) : \mathbb{V} \to \mathbb{V}^*$ является органиченно липшиц-непрерывным.

С учетом свойств операторов в уравнении (10.1), понимаемом в сильном обобщенном смысле, приходим к уравнению

$$u(t) = \mathbb{H}(u) = u_0 e^{-t} + \int_0^t ds\, e^{-(t-s)} \left[\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A}_0 u + \mathbb{A}^{-1}\mathbb{F}(u) - \mathbb{A}^{-1}\mathbb{DP}(u)\right].$$

Рассмотрим равенство

$$u = \mathbb{H}(u).$$

Введем банахово пространство $\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{V})$ и его выпуклое замкнутое ограниченное подмножество

$$\mathbb{B}_{\mathrm{R}} \equiv \{u \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{V}) : \parallel u \parallel_{\mathrm{T}} = \operatorname*{ess.sup}_{t\in(0,\mathrm{T})} \parallel u \parallel \leqslant \mathrm{R}\}.$$

Докажем теперь, что оператор $\mathbb{H}(v)$ действует из $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ в $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ и является сжимающим на $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$. Действительно,

$$\| \mathbb{H}(u) \|_{\mathrm{T}} \leqslant \| u_0 \| + \mathrm{CT}\{\| u \|_{\mathrm{T}} + \| u \|_T^{q+1} + \| u \|_{\mathrm{T}}^{1+q/2}\}.$$

Потребуем, чтобы $\mathrm{R} > 0$ было настолько велико, чтобы имело место неравенство

$$\| u_0 \| \leqslant \frac{\mathrm{R}}{2},$$

а $\mathrm{T} > 0$ — достаточно мало, чтобы

$$\mathrm{T} \leqslant \frac{1}{2\mathrm{C}} \frac{1}{1 + \mathrm{R}^q + \mathrm{R}^{q/2}}.$$

Тогда $\| \mathbb{H}(u) \| \leqslant \mathrm{R}$.

Докажем теперь сжимаемость оператора $\mathbb{H}(u)$ на $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$. Действительно,

$$\| \mathbb{H}(u_1) - \mathbb{H}(u_2) \|_{\mathrm{T}} \leqslant \mathrm{CT}[1 + \mu_1(\mathrm{R}) + \mu_2(\mathrm{R})] \| u_1 - u_2 \|_{\mathrm{T}},$$

где $\mathrm{R} = \max\{\| u_1 \|_{\mathrm{T}}, \| u_2 \|_{\mathrm{T}}\}$. Пусть выполнено условие

$$\mathrm{T} \leqslant \frac{1}{2\mathrm{C}} \frac{1}{1 + \mu_1(\mathrm{R}) + \mu_2(\mathrm{R})}.$$

Отсюда

$$\| \mathbb{H}(u_1) - \mathbb{H}(u_2) \|_{\mathrm{T}} \leqslant \frac{1}{2} \| u_1 - u_2 \|_{\mathrm{T}} .$$

Стало быть, существует единственное решение интегрального уравнения класса $\mathbb{L}^{\infty}(0, \mathrm{T}; \mathbb{V})$. Заметим, что

$$\mathbb{H}(u) : \mathbb{L}^{\infty}(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}) \to \mathbb{AC}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}),\ \mathbb{H}(u) : \mathbb{AC}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}) \to \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{V}).$$

Используя стандартный алгоритм продолжения решений интегральных уравнений с переменным верхним пределом, получим, что найдется такое максимальное $\mathrm{T}_0 > 0$, что либо $\mathrm{T}_0 = +\infty$, либо $\mathrm{T}_0 < +\infty$ и в последнем случае имеет место предельное равенство (10.4). Стало быть, существует единственное сильное обобщенное решение задачи класса $\mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{V})$.

Теорема доказана.

Перейдем к доказательству основного результата данного параграфа.

Теорема 11. *Пусть* $(\mathbb{F}(v), v)_0 \geqslant c > 0\ \forall\, v \in \mathbb{W}_0,\ |v|_0 = 1$ *и для* $u_0 \in \mathbb{V}$ *выполнено условие*

$$(\mathbb{L}u_0, u_0)_1 + \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0 < \frac{2(\alpha_0 - 1)}{\beta_0} [\langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0 + (\mathbb{F}(u_0), u_0)_0].$$

Пусть, кроме того, $\mathbb{P}(su) = s^{(q+2)/2} \mathbb{P}(u)$ *для всех* $s \in \mathbb{R}^1_+$, *тогда для времени* T_0 *из теоремы* 11 *выполнена оценка сверху*

$$\mathrm{T}_0 \leqslant \mathrm{T}_1,$$

где

$$\mathrm{T}_1 = -\frac{1}{\beta_0}\ln\left(1 - \frac{\beta_0}{2(\alpha_0-1)}\frac{(\mathbb{L}u_0,u_0)_1 + \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0\rangle_0}{\langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0\rangle_0 + (\mathbb{F}(u_0),u_0)_0}\right), \tag{10.5}$$

$$\alpha_0 = \alpha(\overline{\varepsilon}_0), \quad \beta_0 = \beta(\overline{\varepsilon}_0),$$
$$\alpha = \frac{q+2}{2}\left(1 - \varepsilon_0\frac{q+1}{q+2}\right),$$
$$\beta = 2(q+2)\left(\frac{q}{2(q+2)} + \frac{q}{4(q+2)\varepsilon_0} + \frac{\mathrm{C}^2}{4\varepsilon_0}\right),$$

$\overline{\varepsilon}_0$ — *точка максимума функции*

$$f(\varepsilon_0) = \frac{\alpha-1}{\beta}$$

на интервале $\varepsilon_0 \in (0, q(q+1)^{-1})$, C — *постоянная из утверждения* 1.

Доказательство.

Сделаем в уравнении (10.3) подстановку $v(x,t) = e^t u(x,t)$, тогда получим следующее равенство:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbb{A}_0 v + \mathbb{L}v\right) + e^{-qt/2}\mathbb{DP}(v) - e^{-qt}\mathbb{F}(v) - \mathbb{A}_0 v, w\right\rangle = 0 \tag{10.6}$$

$\forall\, w \in \mathbb{V}$. Возьмем в качестве w в равенстве (10.6) функцию $v(x,t)$, тогда после интегрирования по частям получим первое энергетическое равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[(\mathbb{L}v,v)_1 + \langle \mathbb{A}_0 v, v\rangle_0\right] = e^{-qt}(\mathbb{F}(v),v)_0 + \langle \mathbb{A}_0 v, v\rangle_0. \tag{10.7}$$

Теперь в качестве w в уравнении (10.6) возьмем функцию $v'(x,t)$, где символом z' обозначена производная по времени, понимаемая в классическом смысле, и после интегрирования по частям получим второе энергетическое равенство

$$(\mathbb{L}v', v')_1 + \langle \mathbb{A}_0 v', v'\rangle_0 = -e^{-qt/2}\langle \mathbb{DP}(v), v'\rangle + \\ + \frac{e^{-qt}}{q+2}\frac{d}{dt}(\mathbb{F}(v),v)_0 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle \mathbb{A}_0 v, v\rangle_0. \tag{10.8}$$

Введем обозначение

$$\Phi(t) \equiv (\mathbb{L}v,v)_1 + \langle \mathbb{A}_0 v, v\rangle_0. \tag{10.9}$$

С помощью неравенства Коши–Шварца [Морен] для функции $\Phi(t)$ из (10.9) получим следующее дифференциальное неравенство:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2 \leqslant \Phi\left[(\mathbb{L}v', v')_1 + \langle \mathbb{A}_0 v', v'\rangle_0\right]. \tag{10.10}$$

Теперь получим оценку сверху на величину в квадратных скобках неравенства (10.10). Из (10.8) с учетом (10.7) получим цепочку неравенств

$$(\mathbb{L}v', v')_1 + \langle \mathbb{A}_0 v', v' \rangle_0 \leqslant -e^{-qt/2} \langle \mathbb{DP}(v), v' \rangle + \\ + \frac{1}{2(q+2)} e^{-qt} \frac{d}{dt} \left(e^{qt} \frac{d\Phi}{dt} \right) + \frac{q}{2(q+2)} \frac{d}{dt} \langle \mathbb{A}_0 v, v \rangle_0. \quad (10.11)$$

Воспользовавшись неравенством Гёльдера и Коши–Шварца с учетом (10.7) получим

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbb{A}_0 v, v \rangle_0 \leqslant \varepsilon_0 \langle \mathbb{A}_0 v', v' \rangle_0 + \frac{1}{2\varepsilon_0} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (10.12)$$

В силу утверждения 1, в котором вместо $\mathbb{A}_0$ следует подставить $\mathbb{A}_0 + \mathbb{L}$, а вместо $\mathbb{V}_0$ взять $\mathbb{V}$, в результате применения неравенства Гёльдера получим следующее неравенство:

$$\langle \mathbb{DP}(v), v' \rangle \leqslant \frac{\varepsilon(t)}{2} \left[(\mathbb{L}v', v')_1 + \langle \mathbb{A}_0 v', v' \rangle_0 \right] + \frac{\mathrm{C}^2}{2\varepsilon(t)} (\mathbb{F}(v), v)_0. \quad (10.13)$$

Из (10.11) с учетом (10.12), (10.13) получим следующую цепочку неравенств:

$$(\mathbb{L}v', v')_1 + \langle \mathbb{A}_0 v', v' \rangle_0 \leqslant \frac{1}{2(q+2)} e^{-qt} \frac{d}{dt} \left(e^{qt} \frac{d\Phi}{dt} \right) + \\ + \frac{q}{2(q+2)} \varepsilon_0 \left[(\mathbb{L}v', v')_1 + \langle \mathbb{A}_0 v', v' \rangle_0 \right] + \\ + \frac{q}{4(q+2)\varepsilon_0} \frac{d\Phi}{dt} + \frac{\varepsilon(t)}{2} e^{-qt/2} \left[(\mathbb{L}v', v')_1 + \langle \mathbb{A}_0 v', v' \rangle_0 \right] + \\ + \frac{\mathrm{C}^2}{4\varepsilon(t)} e^{qt/2} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (10.14)$$

Теперь из неравенства (10.14) при $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{qt/2}$ вытекает неравенство

$$\left[1 - \varepsilon_0 \frac{q+1}{q+2} \right] \left[(\mathbb{L}v', v')_1 + \langle \mathbb{A}_0 v', v' \rangle_0 \right] \leqslant \frac{1}{2(q+2)} e^{-qt} \frac{d}{dt} \left(e^{qt} \frac{d\Phi}{dt} \right) + \\ + \frac{q}{4(q+2)\varepsilon_0} \frac{d\Phi}{dt} + \frac{\mathrm{C}^2}{4\varepsilon_0} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (10.15)$$

Из (10.10) с учетом (10.15) приходим к следующему обыкновенному дифференциальному неравенству (см. [Калантаров, Ладыженская]):

$$\Phi\Phi'' - \alpha \left(\Phi' \right)^2 + \beta \Phi' \Phi \geqslant 0, \quad (10.16)$$

где

$$\alpha = \frac{q+2}{2} \left(1 - \varepsilon_0 \frac{q+1}{q+2} \right), \quad \beta = 2(q+2) \left(\frac{q}{2(q+2)} + \frac{q}{4(q+2)\varepsilon_0} + \frac{\mathrm{C}^2}{4\varepsilon_0} \right).$$

Уравнение (10.16) нам уже знакомо, и, используя тот факт, что $\Phi' > 0$, в силу (10.9) и (10.7), получим, что при условии

$$\Phi_0 < \frac{\alpha - 1}{\beta}\Phi'(0) \tag{10.17}$$

имеет место оценка $T_0 \leqslant T_1$, где для величины T_1 справедливо равенство вида (10.5). Наконец, воспользовавшись произволом в выборе $\varepsilon_0 \in \in (0, q(q+1)^{-1})$, можно получить оптимальное условие (10.17). В итоге приходим к утверждению теоремы 12.

Теорема доказана.

10.2. Примеры. Приведем некоторые примеры уравнений, удовлетворяющих условиям, введенным в теоремах 11, 12. В этом пункте нам потребуются простейшие теоремы вложения Соболева. Соответствующие результаты можно найти, например, в работе [Демиденко].

Во всех примерах $\mathbb{H} = \mathbb{L}^2(\Omega)$.

Пример 1.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\triangle u - u) + \triangle u + \frac{\partial |u|^{q/2+1}}{\partial x_1} + |u|^q u = 0,$$
$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega),$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \in \mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0,1]$.

В данном случае операторные коэффициенты удовлетворяют условиям

$$\mathbb{A}_0 u \equiv \mathrm{I}u : \mathbb{V}_0 \equiv \mathbb{L}^2(\Omega) \to \mathbb{L}^2(\Omega),$$
$$\mathbb{L}u \equiv -\triangle u : \mathbb{W}_1 \equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{W}_1^* \equiv \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$
$$\mathbb{F}(u) \equiv |u|^q u : \mathbb{W}_0 \equiv \mathbb{L}^{q+2}(\Omega) \to \mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\Omega) \equiv \mathbb{W}_0^*,$$
$$\mathbb{P}(u) \equiv |u|^{1+q/2} : \mathbb{W}_2 \equiv \mathbb{L}^{q+2}(\Omega) \to \mathbb{L}^2(\Omega) \equiv \mathbb{W}_3,$$
$$\mathbb{D}u \equiv \frac{\partial u}{\partial x_1} : \mathbb{L}^2(\Omega) \equiv \mathbb{W}_3 \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \equiv \mathbb{W}_4.$$

Далее имеем

$$\mathbb{V} \equiv \mathbb{V}_0 \cap \mathbb{W}_1 = \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad \mathbb{V} = \mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{W}_2 \equiv \mathbb{L}^{q+2}(\Omega), \quad \mathrm{N} = 3, \quad q \in (0,4],$$
$$\mathbb{W}_4 \equiv \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \quad \mathbb{V}^* \equiv \mathbb{H}^{-1}(\Omega).$$

Пример 2.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\triangle^2 u + \triangle u\right) + \triangle u + \frac{\partial |u|^{q/2+1}}{\partial x_1} - \operatorname{div}(|\nabla u|^q \nabla u) = 0,$$
$$u\big|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x) \in \mathbb{H}_0^2(\Omega),$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \in \mathbb{C}^{(4,\delta)}$, $\delta \in (0,1]$.

Операторные коэффициенты удовлетворяют условиям

$$\mathbb{A}_0 u \equiv \triangle^2 u : \mathbb{V}_0 \equiv \mathbb{H}_0^2(\Omega) \to \mathbb{H}^{-2}(\Omega) \equiv \mathbb{V}_0^*,$$
$$\mathbb{L}u \equiv -\triangle u : \mathbb{W}_1 \equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{W}_1^* \equiv \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$
$$\mathbb{F}(u) \equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^q \nabla u) : \mathbb{W}_0 \equiv \mathbb{W}_0^{1,q+2}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,(q+2)/(q+1)}(\Omega) \equiv \mathbb{W}_0^*,$$
$$\mathbb{P}(u) \equiv u^{1+q/2} : \mathbb{W}_2 \equiv \mathbb{L}^{q+2}(\Omega) \to \mathbb{L}^2(\Omega) \equiv \mathbb{W}_3,$$
$$\mathbb{D}u \equiv \frac{\partial u}{\partial x_1} : \mathbb{L}^2(\Omega) \equiv \mathbb{W}_3 \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \equiv \mathbb{W}_4.$$

Кроме того,

$$\mathbb{V} \equiv \mathbb{V}_0 \cap \mathbb{W}_1 = \mathbb{H}_0^2(\Omega), \quad \mathbb{V} = \mathbb{H}_0^2(\Omega) \subset \mathbb{W}_2 \equiv \mathbb{L}^{q+2}(\Omega), \quad \mathrm{N} = 3,$$
$$\mathbb{W}_4 \equiv \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \subset \mathbb{H}^{-2}(\Omega) \equiv \mathbb{V}^*, \quad \mathbb{V} \equiv \mathbb{H}_0^2(\Omega) \subset \mathbb{W}_0 \equiv \mathbb{W}_0^{1,q+2}(\Omega), \quad \mathrm{N} = 3,$$

$q \in (0,4]$.

Пример 3.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\triangle^2 u + \triangle u\right) + \triangle u + \frac{\partial |u|^{q/2+1}}{\partial x_1} + |u|^q u = 0,$$
$$u\big|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x) \in \mathbb{H}_0^2(\Omega),$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \in \mathbb{C}^{(4,\delta)}$, $\delta \in (0,1]$.

Операторные коэффициенты удовлетворяют условиям

$$\mathbb{A}_0 u \equiv \triangle^2 u : \mathbb{V}_0 \equiv \mathbb{H}_0^2(\Omega) \to \mathbb{H}^{-2}(\Omega) \equiv \mathbb{V}_0^*,$$
$$\mathbb{L}u \equiv -\triangle u : \mathbb{W}_1 \equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{W}_1^* \equiv \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$
$$\mathbb{F}(u) \equiv |u|^q u : \mathbb{W}_0 \equiv \mathbb{L}^{q+2}(\Omega) \to \mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\Omega) \equiv \mathbb{W}_0^*,$$
$$\mathbb{P}(u) \equiv u^{1+q/2} : \mathbb{W}_2 \equiv \mathbb{L}^{q+2}(\Omega) \to \mathbb{L}^2(\Omega) \equiv \mathbb{W}_3,$$
$$\mathbb{D}u \equiv \frac{\partial u}{\partial x_1} : \mathbb{L}^2(\Omega) \equiv \mathbb{W}_3 \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \equiv \mathbb{W}_4,$$
$$\mathbb{V} = \mathbb{H}_0^2(\Omega) \subset \mathbb{W}_0 \equiv \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega), \quad \mathrm{N} = 3,$$
$$\mathbb{V} = \mathbb{H}_0^2(\Omega) \subset \mathbb{L}^{q+2}(\Omega) \equiv \mathbb{W}_2, \quad \mathbb{W}_4 \equiv \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \subset \mathbb{H}^{-2}(\Omega) = \mathbb{V}^*.$$

Пример 4.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\triangle^2 u + \triangle u\right) + \triangle u + \gamma_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right) + \gamma_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) +$$
$$+ \gamma_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) - \operatorname{div}(|\nabla u|^2 \nabla u) = 0,$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x) \in \mathbb{H}_0^2(\Omega),$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \in \mathbb{C}^{(4,\delta)}$, $\delta \in (0,1]$, $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 = 0$, $|\gamma_1|+|\gamma_2|+|\gamma_3| > 0$.

Теперь операторные коэффициенты удовлетворяют условиям

$$\mathbb{A}_0 u \equiv \triangle^2 u : \mathbb{V}_0 \equiv \mathbb{H}_0^2(\Omega) \to \mathbb{H}^{-2}(\Omega) \equiv \mathbb{V}_0^*,$$
$$\mathbb{L}u \equiv -\triangle u : \mathbb{W}_1 \equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{W}_1^* \equiv \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$
$$\mathbb{F}(u) \equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^2 \nabla u) : \mathbb{W}_0 \equiv \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega) \to \mathbb{W}_0^{-1,4/3}(\Omega) \equiv \mathbb{W}_0^*.$$

$$\mathbb{P}(u) \equiv \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_3}\mathbf{e}_1 + \gamma_2 \frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial u}{\partial x_1}\mathbf{e}_2 + \gamma_3 \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}\mathbf{e}_3 : \mathbb{W}_2 \equiv \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega) \to$$
$$\to \mathbb{L}^2(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega) \equiv \mathbb{W}_3,$$
$$\mathbb{D}\mathbf{v} \equiv \operatorname{div}(\mathbf{v}) : \mathbb{L}^2(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega) \equiv \mathbb{W}_3 \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \equiv \mathbb{W}_4.$$

В данном случае имеем

$$\mathbb{V} = \mathbb{H}_0^2(\Omega) \subset \mathbb{W}_0 \equiv \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega), \quad \mathrm{N} = 3,$$
$$\mathbb{V} = \mathbb{H}_0^2(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{1,4} \equiv \mathbb{W}_2, \quad \mathbb{W}_4 \equiv \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \subset \mathbb{H}^{-2}(\Omega) = \mathbb{V}^*, \quad \mathrm{N} = 3.$$

§ 11. О разрушении решения уравнения Осколкова–Бенджамена–Бона–Махони–Бюргерса с кубическим источником

Целью настоящего параграфа является получение достаточных условий глобальной во времени разрешимости и разрушения за конечное время решения первой начально-краевой задачи для трехмерного уравнения Осколкова–Бенджамена–Бона–Махони–Бюргерса в ограниченной области с гладкой границей:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\triangle u - u) + \triangle u + u u_{x_1} + u^3 = 0, \tag{11.1}$$
$$u(x,0) = u_0(x), \tag{11.2}$$
$$u(x,t)\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{11.3}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, Ω — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0,1]$.

Данная задача возникает при исследовании нестационарных процессов в полупроводниках при наличии источников и внешнего постоянного однородного электрического поля. Одномерное модельное уравнение ОББМБ было получено в работах [Benjamin; Осколков]. Исследованию задач для уравнения ОББМБ посвящено достаточно много работ.

По всей видимости, вопрос о разрушении решения уравнения ОББМБ с кубическим источником не рассматривался. Отметим в этой связи классическую работу H. A. Levine [Levine, 1], идеологию которой мы развиваем для доказательства разрушения решения задачи (11.1)–(11.3) при некоторых условиях на начальную функцию. Отметим, что метод работы [Levine, 1] в той форме, в которой он используется, неприменим в случае уравнения (11.1), поскольку уравнение (11.1) содержит конвективную нелинейность uu_{x_1}.

11.1. Однозначная локальная разрешимость задачи. Прежде всего дадим определение сильного обобщенного решения.

Определение 7. Сильным обобщенным решением задачи (11.1)–(11.3) называется решение класса $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T};\mathbb{H}_0^1(\Omega))$, удовлетворяющее условиям

$$\langle \triangle u' - u' + \triangle u + uu_{x_1} + u^3, w\rangle = 0 \ \ \forall\, w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \ \ \forall\, t \in [0,\mathrm{T}], \quad (11.4)$$

$$u(0) = u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad (11.5)$$

где через z' обозначена классическая производная по времени от функции $z(t)$, а символом $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скобка двойственности между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ [Робертсон]. Причем граничное условие (11.3) понимается в смысле принадлежности решения задачи (11.4)–(11.5) к классу $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T};\mathbb{H}_0^1(\Omega))$.

Введем операторы и обозначения:

$$\mathbb{A}u \equiv -\triangle u + u, \ \ \mathbb{F}_1(u) \equiv \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x_1}, \ \ \mathbb{F}_2(u) \equiv u^3.$$

Через $\|\cdot\|_{+1}$ обозначим норму в пространстве $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, через $\|\cdot\|_{-1}$ — норму в $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, через $\|\cdot\|_p$ обозначим норму в $\mathbb{L}^p(\Omega)$, $p \in [1,+\infty]$.

С учетом введенных операторов в сильном обобщенном смысле приходим к абстрактной задаче Коши для операторно-дифференциального уравнения:

$$\mathbb{A}\frac{du}{dt} + \mathbb{A}u = u + \mathbb{F}_1(u) + \mathbb{F}_2(u), \ \ u(0) = u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega). \quad (11.6)$$

Легко проверить, что оператор $\mathbb{A} : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ имеет липшиц-непрерывный обратный:

$$\| \mathbb{A}^{-1}z_1 - \mathbb{A}^{-1}z_2 \|_{-1} \leqslant \| z_1 - z_2 \|_{+1} \ \ \forall\, z_i \in \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Поэтому в сильном обобщенном смысле задача (11.6) эквивалентна абстрактному интегральному уравнению

$$u(t) = u_0 e^{-t} + \int\limits_0^t ds\, e^{-(t-s)}\mathbb{A}^{-1}\left(u + \mathbb{F}_1(u) + \mathbb{F}_2(u)\right). \quad (11.7)$$

При помощи метода сжимающих отображений и сглаживающих свойств оператора в правой части интегрального уравнения (11.7), нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 12. *Для любого* $u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ *найдется такое* $\mathrm{T}_0 = \mathrm{T}_0(u_0) > 0$, *что существует единственное сильное обобщенное решение* $u(t)$ *задачи* (11.1)–(11.3) *из* $\mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}_0^1(\Omega))$, *причем либо* $\mathrm{T}_0 = +\infty$, *либо* $\mathrm{T}_0 < +\infty$ *и в последнем случае справедливо предельное равенство*

$$\lim_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \| u \|_{+1} = +\infty.$$

Доказательство.

Введем оператор

$$\mathbb{H}(u) = u_0 e^{-t} + \int_0^t ds\, e^{-(t-s)} \mathbb{A}^{-1} \left(u + \mathbb{F}_1(u) + \mathbb{F}_2(u) \right).$$

Справедливы следующие оценки:

$$\| \mathbb{F}_1(u_1) - \mathbb{F}_1(u_2) \|_{-1} \leqslant \mathrm{C} \| u_1^2 - u_2^2 \|_2 \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{C} \Big(\int_\Omega dx\, \max\{|u_1|^2, |u_2^2|\} |u_1 - u_2|^2 \Big)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{C} \max\{\| u_1 \|_4, \| u_2 \|_4\} \| u_1 - u_2 \|_4 \leqslant$$
$$\leqslant \mu_1(\mathrm{R}) \| u_1 - u_2 \|_{+1},$$

$\mathrm{R} = \mathrm{C} \max\{\| u_1 \|_{+1}, \| u_2 \|_{+1}\}$.

$$\| \mathbb{F}_2(u_1) - \mathbb{F}_2(u_2) \|_{-1} \leqslant \mathrm{C} \| u_1^3 - u_2^3 \|_{4/3} \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{C} \Big(\int_\Omega dx\, \max\{|u_1|^{8/3}, |u_2|^{8/3}\} |u_1 - u_2|^{4/3} \Big)^{3/4} \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{C} \max\{\| u_1 \|_4^2, \| u_2 \|_4^2\} \| u_1 - u_2 \|_4 \leqslant \mu_2(\mathrm{R}) \| u_1 - u_2 \|_{+1},$$

где $\mathrm{R} = \mathrm{C} \max\{\| u_1 \|_{+1}^2, \| u_2 \|_{+1}^2\}$. Введем замкнутое выпуклое ограниченное подмножество $\mathbb{B}_\mathbb{R}$ банахова пространства $\mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$:

$$\mathbb{B}_\mathbb{R} \equiv \{ u \in \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}_0^1(\Omega)) : \| u \|_\mathrm{T} = \operatorname*{ess.sup}_{t \in (0, \mathrm{T})} \| u \|_{+1} \leqslant \mathrm{R} \}.$$

Докажем, что оператор $\mathbb{H}(u)$ действует из $\mathbb{B}_\mathbb{R}$ в $\mathbb{B}_\mathbb{R}$. Действительно,

$$\| \mathbb{H}(u) \|_\mathrm{T} \leqslant \| u_0 \|_{+1} + \mathrm{CTR}\{1 + \mathrm{R} + \mathrm{R}^2\}.$$

Потребуем теперь, чтобы $\mathrm{R} > 0$ было достаточно велико, так что имеет место неравенство

$$\| u_0 \|_{+1} \leqslant \frac{\mathrm{R}}{2},$$

а $\mathrm{T} > 0$ — достаточно мало, так что имеет место неравенство

$$\mathrm{T} \leqslant \frac{1}{2\mathrm{C}} \frac{1}{1 + \mathrm{R} + \mathrm{R}^2}.$$

Докажем теперь, что оператор $\mathbb{H}(u)$ сжимающий на $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$. Действительно,

$$\| \mathbb{H}(u_1) - \mathbb{H}(u_2) \|_{\mathrm{T}} \leqslant \mathrm{CR}[1 + \mathrm{R} + \mathrm{R}^2] \| u_1 - u_2 \|_{\mathrm{T}} .$$

Тогда при

$$\mathrm{T} \leqslant \frac{1}{2\mathrm{C}} \frac{1}{1 + \mathrm{R} + \mathrm{R}^2}$$

имеем

$$\| \mathbb{H}(u_1) - \mathbb{H}(u_2) \|_{\mathrm{T}} \leqslant \frac{1}{2} \| u_1 - u_2 \|_{\mathrm{T}} .$$

Значит, существует единственное решение интегрального уравнения (11.7) класса $\mathbb{L}^{\infty}(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$. Используя стандартный алгоритм продолжения решений интегральных уравнений с переменным верхним пределом, получим, что найдется такое максимальное $\mathrm{T}_0 > 0$, что либо $\mathrm{T}_0 = +\infty$, либо $\mathrm{T}_0 < +\infty$ и в последнем сдучае имеет место предельное равенство

$$\lim_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \| u \|_{+1} = +\infty.$$

Отметим, что

$$\mathbb{H}(u) : \mathbb{L}^{\infty}(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}_0^1(\Omega)) \to \mathbb{AC}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{H}_0^1(\Omega)),$$
$$\mathbb{H}(u) : \mathbb{AC}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{H}_0^1(\Omega)) \to \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{H}_0^1(\Omega)).$$

Значит,

$$u(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, +\infty); \mathbb{H}_0^1(\Omega)).$$

Теорема доказана.

11.2. Глобальная разрешимость и разрушение решения задачи. Введем обозначения

$$\Psi(t) \equiv \| \nabla u \|_2^2 + \| u \|_2^2, \quad \Psi_0 = \Psi(0),$$

C_1 — наилучшая постоянная вложения $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^2(\Omega)$: $\| z \|_2 \leqslant \mathrm{C}_1 \| z \|_+$, C_2 — наилучшая постоянная вложения $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \subset \mathbb{L}^4(\Omega) : \| z \|_4 \leqslant \mathrm{C}_2 \| z \|_+$ для любых $z \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 13. *Пусть* $u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, *тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если*

$$\| \nabla u_0 \|_2^2 + \| u_0 \|_2^2 < (\sqrt{2} - 1)^2 \left(\| u_0 \|_2^2 + \| u_0 \|_4^4 \right),$$
$$\| \nabla u_0 \|_2^2 + \| u_0 \|_2^2 > \frac{1}{\mathrm{C}_2^4 [1 + \mathrm{C}_1^2]},$$

то $\mathrm{T}_0 \in [\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2]$ *и справедливо предельное равенство*

$$\lim_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \| u \|_{+1} = +\infty,$$

где

$$\mathrm{T}_1 = -\frac{1+\mathrm{C}_1^2}{2} \ln \left(1 - \frac{1}{1+\mathrm{C}_1^2} \frac{1}{\mathrm{C}_2^4} \frac{1}{\Psi_0} \right),$$

$$\mathrm{T}_2 = -\frac{1}{\beta} \ln \left(1 - \frac{1}{(\sqrt{2}-1)^2} \frac{\| u_0 \|_2^2 + \| \nabla u_0 \|_2^2}{\| u_0 \|_2^2 + \| u_0 \|_4^4} \right),$$

$$\alpha = 3 - \sqrt{2}, \quad \beta = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1};$$

2) *если*

$$\Psi_0 \leqslant \frac{1}{[1+\mathrm{C}_1^2]\mathrm{C}_2^4},$$

то $\mathrm{T}_0 = +\infty$, *причем*

$$\Psi(t) \leqslant \frac{1}{[1+\mathrm{C}_1^2]\mathrm{C}_2^4}.$$

Доказательство.

Перейдем к новой функции $v = ue^t$ в задаче (11.4), (11.5). Тогда из уравнения (11.4) получим

$$\langle \triangle v' - v' + e^{-t} v v_{x_1} + e^{-2t} v^3 + v, w \rangle = 0 \ \ \forall \ \ w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega). \tag{11.8}$$

Возьмем в качестве w функцию v, тогда после интегрирования по частям получим первое энергетическое равенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\| \nabla v \|_2^2 + \| v \|_2^2 \right] = \| v \|_2^2 + e^{-2t} \| v \|_4^4 . \tag{11.9}$$

Возьмем теперь $w = v'$, тогда после интегрирования по частям получим второе энергетическое равенство

$$\| \nabla v' \|_2^2 + \| v' \|_2^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| v \|_2^2 + \\ + \frac{1}{4} e^{-2t} \frac{d}{dt} \| v \|_4^4 - \frac{1}{2} e^{-t} \int_\Omega dx \, v^2 v'_{x_1 t}. \tag{11.10}$$

Введем функционал энергии, зависящий от времени $t \in [0, \mathrm{T}_0)$:

$$\Phi(t) \equiv \| \nabla v \|_2^2 (t) + \| v \|_2^2 (t). \tag{11.11}$$

В силу теоремы 1 решение $v(x,t)$ уравнения (11.8) принадлежит классу $\mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}_0^1(\Omega))$. Из энергетических равенств (11.9) и (11.10) следует, что функция $\Phi(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, \mathrm{T}_0))$. При помощи неравенства Коши–

Шварца [Морен] для функции $\Phi(t)$ получим следующее неравенство:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2 \leqslant \Phi\,[\,\|\,\nabla v'\,\|_2^2 + \|\,v'\,\|_2^2]. \tag{11.12}$$

Получим из второго энергетического равенства (11.10) оценку сверху на величину $\|\,\nabla v'\,\|_2^2 + \|\,v'\,\|_2^2$. Используя неравенства Гёльдера, получим

$$\left|\int\limits_\Omega dx\, v^2 v'_{x_1 t}\right| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon(t)\,\|\,\nabla v'\,\|_2^2 + \frac{1}{2\varepsilon(t)}\,\|\,v\,\|_4^4, \tag{11.13}$$

где $\varepsilon(t) > 0$ — некоторая непрерывная на $\mathbb{R}^1_+$ функция. Кроме того, нам потребуется следующее неравенство:

$$\left|\frac{d}{dt}\,\|\,v\,\|_2^2\right| \leqslant \frac{1}{\varepsilon_0}\,\|\,v\,\|_2^2 + \varepsilon_0\,\|\,v'\,\|_2^2, \quad \varepsilon_0 > 0. \tag{11.14}$$

Из неравенства (11.10) с учетом (11.9), (11.11), (11.13), (11.14) вытекает следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}\|\,\nabla v'\,\|_2^2 + \|\,v'\,\|_2^2 &\leqslant \frac{1}{8}e^{-2t}\frac{d}{dt}\left(e^{2t}\frac{d\Phi}{dt}\right) - \frac{1}{4}e^{-2t}\frac{d}{dt}\left(e^{2t}\,\|\,v\,\|_2^2\right) + \\ &+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,\|\,v\,\|_2^2 + \frac{e^{-t}}{4\varepsilon(t)}\,\|\,v\,\|_4^4 + \frac{\varepsilon(t)e^{-t}}{4}\,\|\,\nabla v'\,\|_2^2 \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{8}e^{-2t}\frac{d}{dt}\left(e^{2t}\frac{d\Phi}{dt}\right) + \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\,\|\,v\,\|_2^2 + \frac{e^t}{8\varepsilon(t)}\Phi' + \\ &+ \frac{e^{-t}}{4}\varepsilon(t)\left[\|\,\nabla v'\,\|_2^2 + \|\,v'\,\|_2^2\right]. \end{aligned} \tag{11.15}$$

Из (11.15) с учетом неравенства (11.14), в котором $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^t$, $\varepsilon_0 \in \in (0,1)$, получим неравенство

$$\left[1 - \frac{\varepsilon_0}{2}\right]\left[\|\,\nabla v'\,\|_2^2 + \|\,v'\,\|_2^2\right] \leqslant \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_0}\right)\Phi' + \frac{1}{8}\Phi''. \tag{11.16}$$

Из (11.12) и (11.16) вытекает неравенство (см. [Калантаров, Ладыженская])

$$\Phi\Phi'' - \alpha(\Phi')^2 + \beta\Phi\Phi' \geqslant 0, \tag{11.17}$$

где

$$\alpha \equiv 2 - \varepsilon_0, \quad \beta \equiv 2 + \frac{2}{\varepsilon_0}, \quad \varepsilon_0 \in (0,1).$$

Отметим, что в силу условия $\varepsilon_0 \in (0,1)$ справедливы неравенства $\alpha > > 1$ и $\beta > 0$. Кроме того, в силу (11.9) и условия $\Phi_0 > 0$ следует,

что $\Phi'(t) > 0$ при $t \in [0, T_0)$. С учетом этого неравенства (11.17) легко интегрируется и мы приходим к следующему неравенству:

$$\Phi_0^{1-\alpha} - \Phi^{1-\alpha} \geqslant \frac{\alpha - 1}{\beta} \Lambda \left[1 - e^{-\beta t}\right],$$
$$\Lambda = 2\Phi_0^{-\alpha}[\| u_0 \|_2^2 + \| u_0 \|_4^4], \quad \Phi_0 = \Phi(0). \tag{11.18}$$

Потребуем теперь выполнения неравенства

$$\Phi_0 < \frac{2(\alpha - 1)}{\beta} \left[\| u_0 \|_2^2 + \| u_0 \|_4^4\right]. \tag{11.19}$$

Из неравенств (11.18), (11.19) вытекает следующее неравенство:

$$T_0 \leqslant T_2 \equiv -\frac{1}{\beta} \ln \left(1 - \frac{\beta}{2(\alpha - 1)} \frac{\| u_0 \|_2^2 + \| \nabla u_0 \|_2^2}{\| u_0 \|_2^2 + \| u_0 \|_4^4}\right). \tag{11.20}$$

В силу произвольности $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ получим оптимальное условие (11.19). С этой целью найдем максимум функции $f(\varepsilon_0) = 2(\alpha - 1)\beta^{-1}$, который достигается в точке $\varepsilon_0 = \sqrt{2} - 1$, и функция $f(\varepsilon_0)$ в этой точке принимает значение $f(1/2) = (\sqrt{2} - 1)^2$, при этом $\alpha = 3 - \sqrt{2}$ и $\beta = 2\sqrt{2}/(\sqrt{2} - 1)$. Неравенства (11.19), (11.20) примут следующий вид:

$$\| \nabla u_0 \|_2^2 + \| u_0 \|_2^2 < (\sqrt{2} - 1)^2 \left(\| u_0 \|_2^2 + \| u_0 \|_4^4\right), \tag{11.21}$$

$$T_2 = -\frac{1}{\beta} \ln \left(1 - \frac{1}{(\sqrt{2} - 1)^2} \frac{\| u_0 \|_2^2 + \| \nabla u_0 \|_2^2}{\| u_0 \|_2^2 + \| u_0 \|_4^4}\right). \tag{11.22}$$

Таким образом, из (11.21), (11.22) следует первое утверждение теоремы. Получим теперь оценку снизу на время разрушения решения T_0, а также достаточное условие глобальной во времени разрешимости задачи (11.1)–(11.3) в сильном обобщенном смысле.

С этой целью возьмем в уравнении (11.4) $w = u(x, t)$, тогда после интегрирования по частям получим первое энергетическое равенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\| \nabla u \|_2^2 + \| u \|_2^2\right] + \| \nabla u \|_2^2 = \| u \|_4^4. \tag{11.23}$$

Воспользовавшись вложением $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^2(\Omega)$ с наилучшей константой C_1 и вложением $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^4(\Omega)$ [176] с наилучшей константой C_2, приходим из (11.23) к неравенству

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\| \nabla u \|_2^2 + \| u \|_2^2\right] + C_1^{-2} \| u \|_2^2 \leqslant \| u \|_4^4. \tag{11.24}$$

Из (11.23), (11.24) вытекает следующее неравенство:

$$\frac{1}{2} \left[1 + C_1^2\right] \frac{d\Psi}{dt} + \Psi \leqslant [1 + C_1^2] C_2^4 \Psi^2, \quad \Psi \equiv \| \nabla u \|_2^2 + \| u \|_2^2. \tag{11.25}$$

Неравенство (11.25) легко интегрируется, и мы приходим к оценке

$$\Psi(t) \leqslant \frac{\Psi_0 e^{-at}}{1 - ba^{-1}\Psi_0[1 - e^{-at}]}, \quad \Psi_0 = \Psi(0), \tag{11.26}$$

где

$$a = \frac{2}{1 + \mathrm{C}_1^2}, \quad b = 2\mathrm{C}_2^4.$$

Пусть выполнено неравенство $\Psi_0 \leqslant ab^{-1} = [1 + \mathrm{C}_1^2]^{-1}\mathrm{C}_2^{-4}$, тогда нетрудно убедиться, что из (11.26) вытекает оценка

$$\Psi(t) \leqslant \frac{1}{[1 + \mathrm{C}_1^2]\mathrm{C}_2^4}.$$

Если теперь потребовать выполнения неравенства

$$\Psi_0 > ab^{-1} = \frac{1}{\mathrm{C}_2^4[1 + \mathrm{C}_1^2]},$$

то из (11.26) вытекает оценка снизу на время разрушения решения при условии (11.21):

$$\mathrm{T}_1 = -\frac{1 + \mathrm{C}_1^2}{2} \ln\left(1 - \frac{1}{1 + \mathrm{C}_1^2}\frac{1}{\mathrm{C}_2^4}\frac{1}{\Psi_0}\right).$$

Теорема доказана.

11.3. Физическая интерпретация полученных результатов. Из полученных нами результатов следует, что при достаточно малой начальной энергии, запасенной в полупроводнике, энергия во все последующие моменты времени остается конечной. С другой стороны, при достаточно большой начальной энергии найдется такой момент времени, что энергия системы становится бесконечной, т. е. имеет место пробой в полупроводнике. Полученная качественная картина нестационарных явлений в ограниченных полупроводниках совпадает с наблюдаемыми в эксперименте явлениями [Бонч-Бруевич].

§ 12. Об опрокидывании решения уравнения Осколкова–Бенджамена–Бона–Махони–Бюргерса с псевдолапласианом

Целью настоящего параграфа является получение достаточного условия опрокидывания решения первой начально-краевой задачи для трехмерного уравнения Осколкова–Бенджамена–Бона–Махони–Бюргерса с псевдолапласианом $\triangle_p$, где $p = 4$, в ограниченной области с гладкой границей:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\triangle u - u) + \triangle u + u_{x_1} + uu_{x_1} - \operatorname{div}(|\nabla u|^2 \nabla u) = 0, \tag{12.1}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \tag{12.2}$$

$$u(x,t)\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{12.3}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, Ω — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0,1]$.

Данная задача возникает при исследовании нестационарных процессов в полупроводниках при наличии источников и внешнего постоянного однородного электрического поля.

По всей видимости, вопрос о разрушении решения уравнения ББМБ с кубическим источником не рассматривался, а тем более с 4-лапласианом. Отметим в этой связи классическую работу H. A. Levine [Levine, 1], идеологию которой мы развиваем для доказательства разрушения решения задачи (12.1)–(12.3) при некоторых условиях на начальную функцию. Отметим, что метод работы [Levine, 1] в той форме, в которой он используется, не применим в случае уравнения (12.1), поскольку уравнение (12.1) содержит конвективную нелинейность uu_{x_1}. С другой стороны, уравнение (12.1) не удовлетворяет общим условиям, введенным в нашей работе [Корпусов, 14], поскольку в уравнениии (12.1) одновременно учитываются линейная диссипация $\triangle u$ и конвективная нелинейность uu_{x_1}. Поэтому получение достаточных условий разрушения решения задачи (12.1)–(12.3) представляет несомненный интерес.

12.1. Однозначная локальная разрешимость задачи. Дадим определения сильного обобщенного и ослабленного решений рассматриваемой задачи.

Определение 8. Сильным обобщенным решением задачи (12.1)–(12.3) называется решение класса $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega))$, удовлетворяющее условиям

$$\langle \triangle u' - u' + \triangle u + uu_{x_1} + u_{x_1} - \operatorname{div}(|\nabla u|^2 \nabla u), w\rangle = 0, \tag{12.4}$$

$$u(0) = u_0 \in \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega)\ \forall\ w \in \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega),\ \forall\ t \in [0,\mathrm{T}], \tag{12.5}$$

где через z' обозначена классическая производная по времени, а символом $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скобка двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-1,4/3}(\Omega)$ [Робертсон]. Причем граничное условие (12.3) понимается в смысле принадлежности решения задачи (12.4), (12.5) классу $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega))$.

Определение 9. Ослабленным решением задачи (12.1)–(12.3) называется сильное обобщенное решение в смысле определения 8, принадлежащее классу $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega}))$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 13. *В классах функций* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \cap\, \mathbb{C}_0(\overline{\Omega}))$ *и* $g(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}(\overline{\Omega}))$, *связанных соотношением*

$$u_0(x) = \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y) g_0(y),$$

задача (12.4), (12.5) *эквивалентна следующей задаче:*

$$\langle g^{'} + g - \mathbb{A}^{-1}g - \mathbb{D}_1\mathbb{A}^{-1}g + \mathbb{B}(g), w\rangle = 0 \ \ \forall\, w \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega), \tag{12.6}$$

$$g(x,0) = g_0(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega}) \ \ \forall\, t \in [0,\mathrm{T}] \tag{12.7}$$

где

$$\mathbb{B}(g) \equiv \mathbb{A}^{-1}g\mathbb{D}_1\mathbb{A}^{-1}g - 3|\mathbb{D}\mathbb{A}^{-1}g|^2 g - 3|\mathbb{D}\mathbb{A}^{-1}g|^2\mathbb{A}^{-1}g,$$

$$\mathbb{D}_1 \equiv \frac{\partial}{\partial x_1}, \ \ \mathbb{D} \equiv \mathbf{e}_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3\frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$u(x,t) = \mathbb{A}^{-1}g = \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y)g(y,t),$$

$G(x,y)$ *— функция Грина первой краевой задачи для оператора* $-\triangle + \mathrm{I}$ *в области* Ω.

Доказательство.

Докажем сначала, что при условиях леммы из задачи (12.4), (12.5) вытекает задача (12.6), (12.7).

Рассмотрим оператор

$$\mathbb{A} \equiv \mathrm{I} - \triangle : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega).$$

Этот оператор имеет липшиц-непрерывный обратный:

$$\mathbb{A}^{-1} : \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \to \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

В силу условий леммы функция

$$u(x,t) = \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y)g(y,t)$$

является единственным ослабленным решением задачи

$$\mathbb{A}u = g(y,t)$$

и, стало быть, сильным обобщенным решением.

Действительно, рассмотрим неоднородную задачу для эллиптического оператора $\mathbb{A} \equiv -\triangle + \mathrm{I}$ с параметром $t \in [0,\mathrm{T}]$:

$$\triangle u - u = -\overline{g}, \ \ u\big|_{\partial\Omega} = 0,$$

в слабой постановке

$$(\nabla u, \nabla\eta)_2 + (u,\eta)_2 = \langle\overline{g},\eta\rangle \ \ \forall\, \eta \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \tag{12.8}$$

где $(\cdot,\cdot)_2$ — скалярное произведение в $\mathbb{L}^2(\Omega)$, а $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скобки двойственности между $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$. Пусть $\overline{g} \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}^{(0,h)}(\overline{\Omega})) \subset$

$\subset \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T};\mathbb{H}^{-1}(\Omega))$, тогда задача (12.8) имеет единственное слабое — оно же классическое — решение, имеющее вид

$$u = \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y)\overline{g}(y,t).$$

Пусть теперь в (12.8) $\overline{g} = g \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T};\mathbb{C}(\overline{\Omega}))$. Заметим, что для g из указанного класса определен потенциал

$$u = \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y)g(y,t),$$

принадлежащий классу $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T};\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\Omega))$. Пусть $g_\varepsilon \in$ $\in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T};\mathbb{C}^{(0,h)}(\overline{\Omega}))$, $h \in (0,1]$ сильно в $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T};\mathbb{C}(\overline{\Omega}))$ сходится к $g \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T};\mathbb{C}(\overline{\Omega}))$. Теперь перепишем задачу (12.8) для функций $\overline{g} = g_\varepsilon \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T};\mathbb{C}^{(0,h)}(\overline{\Omega}))$ в эквивалентном виде

$$(\nabla u - \nabla u_\varepsilon, \nabla\eta)_2 + (u_\varepsilon - u, \eta)_2 + (\nabla u_\varepsilon, \nabla\eta)_2 + \\ + (u,\eta)_2 = \langle g_\varepsilon - g, \eta\rangle + \langle g, \eta\rangle,$$

где

$$u = \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y)g(y,t), \quad u_\varepsilon = \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y)g_\varepsilon(y,t).$$

Заметим теперь, что в силу свойств функции Грина $G(x,y)$ имеем

$$\| \nabla u_\varepsilon - \nabla u \|_2 \to +0, \quad \| u_\varepsilon - u \|_2 \to +0, \quad \| g_\varepsilon - g \|_2 \to +0$$

при $\varepsilon \to +0$. Значит, функция

$$u = \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y)g(y,t) = \mathbb{A}^{-1}g$$

является единственным слабым решением задачи (12.8), а в силу гладкости — единственным ослабленным решением задачи (12.8). В рассматриваемых классах гладкости в силу свойств оператора $\mathbb{A} : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ получим, что для $g(x,t)$ справедлива задача (12.6), (12.7).

Пусть теперь g — решение задачи (12.6), (12.7) и

$$u = \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y)g(y,t).$$

Поскольку $g \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T};\mathbb{H}^{-1}(\Omega))$, то из последнего уравнения приходим к равенству $u = \mathbb{A}^{-1}g$, из которого в свою очередь следует: $g = \mathbb{A}u$. После подстановки в уравнение (12.6), (12.7) приходим к задаче (12.4), (12.5).

Лемма доказана.

Замечание 6. Отметим, что если функция $u_0 \in \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})$ истокообразно представима через $g_0 \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$:

$$u_0 = \int\limits_{\Omega} dx\, G(x,y) g_0(x),$$

то указанное представление единственное. Действительно, пусть существуют две функции $g_{01}, g_{02} \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, причем $g_{01}(x) \neq g_{02}(x)$. Тогда, очевидно, имеем

$$\int\limits_{\Omega} dx\, G(x,y) f(y) = 0, \quad f(x) = g_{01}(x) - g_{02}(x).$$

Умножим обе части последнего равенства на собственную функцию φ_k первой краевой задачи для оператора Лапласа в ограниченной области Ω:

$$\triangle \varphi_k + \lambda_k \varphi_k = 0, \quad \varphi_k \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad k \in \mathbb{N},$$

тогда после интегрирования по области Ω получим равенство

$$\int\limits_{\Omega} dx\, \varphi_k(x) f(x) = 0,$$

из которого вытекает равенство

$$\int\limits_{\Omega} dx\, w(x) f(x) = 0 \ \ \forall\, w \in \mathbb{C}_0^{\infty}(\Omega) \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

В силу основной леммы вариационного исчисления и того факта, что $f(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, следует: $f(x) = 0$. Значит, $g_{01}(x) = g_{02}(x)$ при $x \in \Omega$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 14. *Для любой $u_0(x)$, истокообразно представимой через $g_0(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$:*

$$u_0(x) = \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y) g_0(y),$$

где $G(x,y)$ — функция Грина первой краевой задачи для оператора $-\triangle + \mathrm{I}$ в области Ω, найдется такое $\mathrm{T}_0 = \mathrm{T}_0(u_0) > 0$, что существует единственное ослабленное решение $u(x,t)$ задачи (12.1)–(12.3) *класса $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}_0); \mathbb{C}^1(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega}))$, причем либо $\mathrm{T}_0 = +\infty$, либо $\mathrm{T}_0 < +\infty$ и в последнем случае имеет место предельное равенство*

$$\limsup_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \sup_{x \in \Omega} |\nabla_x u(x,t)| = +\infty.$$

Доказательство.

В силу леммы приходим к выводу, что в ослабленном смысле задача (12.4), (12.5) эквивалентна (12.6), (12.7) при условии

$$u_0(x) = \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y) g_0(y) \;\; \forall\, t \in [0, \mathrm{T}].$$

Отсюда сразу же получаем, что

$$u(x,t) = \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y) g(y,t)$$

и каждое слагаемое в первом аргументе скобки двойственности (12.6) принадлежит классу $\mathbb{C}([0,\mathrm{T}] \times \overline{\Omega})$. Кроме того, $\mathbb{C}_0^{\infty}(\overline{\Omega}) \subset \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$. И в силу основной леммы вариационного исчисления получим поточечное равенство

$$g^{'} + g - \mathbb{A}^{-1} g - \mathbb{D}_1 \mathbb{A}^{-1} g + \mathbb{B}(g) = 0. \tag{12.9}$$

Из (12.9) получим следующее интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} g(x,t) = g_0 e^{-t} &+ \int\limits_0^t ds\, e^{-(t-s)} \int\limits_{\Omega} G(x,y) g(y,s)\, dy + \\ &+ \int\limits_0^t ds\, e^{-(t-s)} \int\limits_{\Omega} dy\, G_{x_1}(x,y) g(y,s) + \\ &+ \int\limits_0^t ds\, e^{-(t-s)} \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y) g(y,s) \int\limits_{\Omega} dz\, G_{x_1}(x,z) g(z,s) - \\ &- 3 \int\limits_0^t ds\, e^{-(t-s)} \left| \int\limits_{\Omega} dy\, \nabla_x G(x,y) g(y,s) \right|^2 \int\limits_{\Omega} dz\, G(x,z) g(z,s) - \\ &- 3 \int\limits_0^t ds\, e^{-(t-s)} \left| \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y) g(y,s) \right|^2 g(x,s) \equiv \mathbb{H}(g). \end{aligned} \tag{12.10}$$

При всей видимой сложности интегрального уравнения (12.10) заметим, что методом сжимающих отображений можно доказать его однозначную локальную разрешимость в классе $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}]; \mathbb{C}(\overline{\Omega}))$. Действительно, используя свойства интегралов типа потенциала [Владимиров], нетрудно убедиться в том, что операторы

$$\mathbb{U}_1(g) = \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y) g(y,t), \;\; \mathbb{U}_{2i}(g) = \int\limits_{\Omega} dy\, G_{x_i}(x,y) g(y,t), \;\; i = \overline{1,3},$$

действуют из $\mathbb{C}(\overline{\Omega}\times[0,\mathrm{T}])$ в $\mathbb{C}(\overline{\Omega}\times[0,\mathrm{T}])$ при любых $\mathrm{T}>0$. Кроме того, нетрудно убедиться, что указанные операторы действуют из $\mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T};\mathbb{C}(\overline{\Omega}))$ в $\mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T};\mathbb{C}(\overline{\Omega}))$.

Введем замкнутое выпуклое ограниченное множество $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$, являющееся подмножеством банахова пространства $\mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T};\mathbb{C}(\overline{\Omega}))$:

$$\mathbb{B}_{\mathbb{R}}\equiv\left\{g\in\mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T};\mathbb{C}(\overline{\Omega})):\|\,g\,\|_{\mathrm{T}}=\operatorname*{ess.sup}_{t\in(0,\mathrm{T})}\sup_{x\in\Omega}|g(x,t)|\leqslant\mathbb{R}\right\}.$$

Докажем сначала, что оператор $\mathbb{H}(g)$ действует из $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ в $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$. Действительно, из (12.10) в силу свойств функции Грина $G(x,y)$ вытекает

$$\|\,\mathbb{H}(g)\,\|_{\mathrm{T}}\leqslant\|\,g_0\,\|_{\mathrm{T}}+\mathrm{TC}\left[\|\,g\,\|_{\mathrm{T}}+\|\,g\,\|_{\mathrm{T}}^2+\|\,g\,\|_{\mathrm{T}}^3\right].$$

Пусть $\mathrm{R}>0$ достаточно большое: $\|\,g_0\,\|_{\mathrm{T}}\leqslant\mathrm{R}/2$, тогда при

$$\mathrm{T}\leqslant\frac{1}{2\mathrm{C}}\frac{1}{1+\mathrm{R}+\mathrm{R}^2}$$

имеем

$$\|\,\mathbb{H}(g)\,\|_{\mathrm{T}}\leqslant\mathrm{R}.$$

Докажем теперь сжимаемость оператора $\mathbb{H}(g)$ на $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$. Действительно, имеют место неравенства

$$\|\,\mathbb{H}(g_1)-\mathbb{H}(g_2)\,\|_{\mathrm{T}}\leqslant\mathrm{CT}\left(1+\mathrm{R}+\mathrm{R}^2\right)\|\,g_1-g_2\,\|_{\mathrm{T}}.$$

Потребуем, чтобы

$$\mathrm{T}\leqslant\frac{1}{2\mathrm{C}}\frac{1}{1+\mathrm{R}+\mathrm{R}^2},$$

тогда

$$\|\,\mathbb{H}(g_1)-\mathbb{H}(g_2)\,\|_{\mathrm{T}}\leqslant\frac{1}{2}\|\,g_1-g_2\,\|_{\mathrm{T}}.$$

Значит, оператор $\mathbb{H}(g)$ является сжимающим на $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ при достаточно большом $\mathrm{R}>0$ и достаточно малом $\mathrm{T}>0$.

Используя стандартный алгоритм продолжения во времени решения интегрального уравнения, получим, что найдется такое максимальное $\overline{\mathrm{T}}>0$, что либо $\overline{\mathrm{T}}=+\infty$, либо $\overline{\mathrm{T}}<+\infty$ и в последнем случае имеем

$$\limsup_{\mathrm{T}\uparrow\overline{\mathrm{T}}}\|\,g\,\|_{\mathrm{T}}=+\infty.$$

Докажем теперь, что $\mathrm{T}_0=\overline{\mathrm{T}}$ и в случае $\mathrm{T}_0<+\infty$ справедливо предельное равенство

$$\limsup_{t\uparrow\mathrm{T}_0}\sup_{x\in\Omega}|\nabla u(x,t)|=+\infty,$$

причем T_0 максимально в том смысле, что либо $\mathrm{T}_0=+\infty$, либо $\mathrm{T}_0<+\infty$ и $u(x,t)\in\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})\cap\mathbb{C}_0(\Omega))$. Действительно, до-

кажем теперь, что хотя бы один из следующих интегралов обращается в бесконечность при $t \uparrow \mathrm{T}_0$:

$$\mathrm{I}_1 = \int\limits_\Omega dy\, G(x,y)g(y,t), \quad \mathrm{I}_{k+1} = \int\limits_\Omega dy\, G_{x_k}(x,y)g(y,t), \quad k = \overline{1,3}.$$

Предположим противное:

$$\mathrm{C}_k = \operatorname*{ess.sup}_{t\in(0,\mathrm{T}_0)} \sup_{x\in\Omega} |\mathrm{I}_k| < +\infty, \quad k = \overline{1,3}.$$

Перепишем уравнение (12.10) в следующем виде:

$$g(x,t) + 3\int\limits_0^t ds\, e^{-(t-s)} \left| \int\limits_\Omega dy\, G(x,y)g(y,s) \right|^2 g(x,s) = \mathrm{F}(g),$$

где

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(g) \equiv g_0 e^{-t} &+ \int\limits_0^t ds\, e^{-(t-s)} \int\limits_\Omega dy\, G(x,y)g(y,s) + \\
&+ \int\limits_0^t ds\, e^{-(t-s)} \int\limits_\Omega dy\, G_{x_1}(x,y)g(y,s) + \\
&+ \int\limits_0^t ds\, e^{-(t-s)} \int\limits_\Omega dy\, G(x,y)g(y,s) \int\limits_\Omega dz\, G_{x_1}(x,z)g(z,s) - \\
&- 3\int\limits_0^t ds\, e^{-(t-s)} \left| \int\limits_\Omega dy\, \nabla_x G(x,y)g(y,s) \right|^2 \int\limits_\Omega dz\, G(x,z)g(z,s).
\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь свойства следующего вольтерровского оператора:

$$\mathcal{A} * f \equiv 3\int\limits_0^t ds\, e^{-(t-s)} \left| \int\limits_\Omega dy\, G(x,y)g(y,s) \right|^2 f(s).$$

В силу конечности I_1 приходим к выводу, что

$$\| \, [\mathcal{A}*]^n \, \|_{\mathbb{C}[0,\mathrm{T}]\to\mathbb{C}[0,\mathrm{T}]} \leqslant (3\mathrm{C}_1^2)^n \frac{\mathrm{T}^n}{n!}$$

для всех $\mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0)$. Тогда получим следующее выражение:

$$g(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{[\mathcal{A}*]^n}{n!} \mathrm{F}(g).$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\| g \| (\mathrm{T}) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} (3\mathrm{C}_1^2)^n \frac{\mathrm{T}^n}{n!} \Big[\| g_0 \| + \\ + \mathrm{T} \left(\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_1\mathrm{C}_2 + 3\mathrm{C}_1[\mathrm{C}_2^2 + \mathrm{C}_3^2 + \mathrm{C}_4^2] \right) \Big] \leqslant \mathrm{C}(\mathrm{T}) < +\infty$$

для любого $\mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0)$, где

$$\| v \| = \sup_{x \in \Omega} |v(x)|.$$

С другой стороны,

$$\limsup_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \| g \| (t) = +\infty.$$

Тем самым мы приходим к выводу, что хотя бы один из интегралов I_k, $k = \overline{1,4}$, обращается в бесконечность. Поскольку

$$u(x,t) = \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y) g(y,t),$$

то имеет место предельное равенство

$$\limsup_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \sup_{x \in \Omega} |\nabla_x u(x,t)| = +\infty.$$

Кроме того, $\mathrm{T}_0 = \overline{\mathrm{T}}$.

Заметим, что

$$\mathbb{H}(g) : \mathbb{L}^{\infty}(0, \mathrm{T}; \mathbb{C}(\overline{\Omega})) \to \mathbb{AC}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{C}(\overline{\Omega})),$$
$$\mathbb{H}(g) : \mathbb{AC}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{C}(\overline{\Omega})) \to \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{C}(\overline{\Omega})),$$
$$u(x,t) = \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y) g(y,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})).$$

Наконец используя стандартный алгоритм продолжения решения во времени, приходим к утверждению теоремы.

Теорема доказана.

12.2. Опрокидывание ослабленного решения задачи. Введем обозначения.

$$\Phi(t) \equiv \| \nabla u \|_2^2 + \| u \|_2^2, \quad \Phi_0 = \Phi(0).$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 15. *Пусть* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_{00}); \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$ — *сильное обобщенное решение и выполнено следующее неравенство*:

$$\| \nabla u_0 \|_2^2 + \| u_0 \|_2^2 < \left(\sqrt{5} - 2 \right)^2 \left(\| u_0 \|_2^2 + \| \nabla u_0 \|_4^4 \right),$$

тогда $\mathrm{T}_{00} < +\infty$ *и справедлива оценка сверху*

$$\mathrm{T}_{00} \leqslant \mathrm{T}_1 \equiv -\frac{1}{\beta}\ln\left(1 - \frac{1}{(\sqrt{5}-2)^2}\frac{\| \nabla u_0 \|_2^2 + \| u_0 \|_2^2}{\| u_0 \|_2^2 + \| \nabla u_0 \|_4^4}\right),$$

$$\beta = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}.$$

Доказательство.

Перейдем к новой функции $v = ue^t$ в задаче (12.4), (12.5). Тогда из уравнения (12.4) получим

$$\langle \triangle v' - v' + v_{x_1} + e^{-t} v v_{x_1} + v - e^{-2t}\,\mathrm{div}(|\nabla v|^3 \nabla v), w\rangle = 0 \qquad (12.11)$$

$\forall\, w \in \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega)$. Возьмем $w = v$ в равенстве (12.11), тогда после интегрирования по частям получим первое энергетическое равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\| \nabla v \|_2^2 + \| v \|_2^2\right] = \| v \|_2^2 + e^{-2t} \| \nabla v \|_4^4 . \qquad (12.12)$$

Пусть теперь $w = v'$, тогда после интегрирования по частям (12.11) получим второе энергетическое равенство

$$\| \nabla v' \|_2^2 + \| v' \|_2^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| v \|_2^2 - \int\limits_\Omega dx\, v'_{x_1 t} v -$$

$$- \frac{e^{-t}}{2}\int\limits_\Omega dx\, v^2 v'_{x_1 t} + \frac{e^{-2t}}{4}\frac{d}{dt} \| \nabla v \|_4^4 . \qquad (12.13)$$

Из (12.13) с учетом (12.12) получим следующее неравенство:

$$\| \nabla v' \|_2^2 + \| v' \|_2^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| v \|_2^2 - \int\limits_\Omega v'_{x_1 t} v\, dx - \frac{e^{-t}}{2}\int\limits_\Omega dx\, v^2 v'_{x_1 t} +$$

$$+ \frac{e^{-2t}}{8}\frac{d}{dt}\left(e^{2t}\frac{d\Phi}{dt}\right) - \frac{e^{-2t}}{4}\frac{d}{dt}\left(e^{2t} \| v \|_2^2\right) \leqslant \frac{1}{4}\frac{d}{dt} \| v \|_2^2 - \int\limits_\Omega dx\, v'_{x_1 t} v -$$

$$- \frac{e^{-t}}{2}\int\limits_\Omega dx\, v^2 v'_{x_1 t} + \frac{e^{-2t}}{8}\frac{d}{dt}\left(e^{2t}\frac{d\Phi}{dt}\right). \qquad (12.14)$$

Для дальнейшего изложения нам потребуются вспомогательные оценки

$$\frac{d}{dt} \| v \|_2^2 = 2\int\limits_\Omega dx\, v v' \leqslant \frac{1}{\varepsilon_0} \| v \|_2^2 + \varepsilon_0 \| v' \|_2^2, \qquad (12.15)$$

$$\int\limits_\Omega dx\, v'_{x_1 t} v \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2} \| \nabla v' \|_2^2 + \frac{1}{2\varepsilon_0} \| v \|_2^2, \qquad (12.16)$$

$$\int\limits_{\Omega} dx\, v^2 v'_{x_1 t} \leqslant \frac{\varepsilon(t)}{2} \parallel \nabla v' \parallel_2^2 + \frac{1}{2\varepsilon(t)} \parallel v \parallel_4^4 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon(t)}{2} \parallel \nabla v' \parallel_2^2 + \frac{1}{2\varepsilon(t)} \mathrm{B}^4 \parallel \nabla v \parallel_4^4, \quad (12.17)$$

где B — константа вложения $\mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega) \subset \mathbb{L}^4(\Omega)$: $\parallel w \parallel_4 \leqslant \mathrm{B} \parallel \nabla w \parallel_4$ для любых $w \in \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega)$. Для простоты изложения предположим, что $\mathrm{B} = 1$. Заинтересованный читатель может по предложенной ниже схемы рассмотреть произвольный случай. С учетом (12.12) и (12.15)–(12.17) из (12.14) получим цепочку неравенств

$$\parallel \nabla v' \parallel_2^2 + \parallel v' \parallel_2^2 \leqslant \frac{1}{8\varepsilon_0} \frac{d\Phi}{dt} + \frac{\varepsilon_0}{4} \left[\parallel \nabla v' \parallel_2^2 + \parallel v' \parallel_2^2 \right] + \frac{\varepsilon_0}{2} \Big[\parallel \nabla v' \parallel_2^2 +$$

$$+ \parallel v' \parallel_2^2 \Big] + \frac{1}{4\varepsilon_0} \frac{d\Phi}{dt} + \frac{e^{-t}}{4} \varepsilon(t) \left[\parallel \nabla v' \parallel_2^2 + \parallel v' \parallel_2^2 \right] +$$

$$+ \frac{1}{8\varepsilon(t)} e^t \frac{d\Phi}{dt} + \frac{e^{-2t}}{8} \frac{d}{dt} \left(e^{2t} \frac{d\Phi}{dt} \right). \quad (12.18)$$

Теперь в качестве $\varepsilon(t)$ возьмем величину $\varepsilon_0 e^t$, тогда из (12.18) получим

$$(1 - \varepsilon_0) \left[\parallel \nabla v' \parallel_2^2 + \parallel v' \parallel_2^2 \right] \leqslant \frac{1}{8} \frac{d^2\Phi}{dt^2} + \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2\varepsilon_0} \right] \frac{d\Phi}{dt}. \quad (12.19)$$

В силу неравенства Коши–Шварца [Морен] для величины $\Phi(t) \in \in \mathbb{C}^2[0, \mathrm{T}_{00})$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{4} \left(\frac{d\Phi}{dt} \right)^2 \leqslant \Phi \left[\parallel \nabla v' \parallel_2^2 + \parallel v' \parallel_2^2 \right].$$

Отсюда с учетом (12.19) получим (см. [Калантаров, Ладыженская])

$$\Phi\Phi'' - \alpha(\Phi')^2 + \beta\Phi\Phi' \geqslant 0, \quad (12.20)$$

где

$$\alpha = 2\,(1 - \varepsilon_0)\,, \quad \beta = 2 + \frac{4}{\varepsilon_0}, \quad \varepsilon_0 \in (0, 1/2).$$

Отметим, что в силу условия $\varepsilon_0 \in (0, 1/2)$ имеем: $\alpha > 1$ и $\beta > 0$. Кроме того, в силу (12.12) и определения функции $\Phi(t)$ следует, что $\Phi'(t) > 0$ при $t \in [0, \mathrm{T}_{00})$. С учетом этого неравенство (12.20) легко интегрируется, и при $t \in [0, \mathrm{T}_{00})$ приходим к следующему неравенству:

$$\Phi_0^{1-\alpha} - \Phi^{1-\alpha} \geqslant \frac{\alpha - 1}{\beta} \Lambda \left[1 - e^{-\beta t} \right], \quad (12.21)$$

$$\Lambda = 2\Phi_0^{-\alpha} [\parallel u_0 \parallel_2^2 + \parallel \nabla u_0 \parallel_4^4], \quad \Phi_0 = \Phi(0).$$

Потребуем теперь выполнения неравенства

$$\Phi_0 < \frac{2(\alpha-1)}{\beta}\left[\| u_0 \|_2^2 + \| \nabla u_0 \|_4^4\right]. \qquad (12.22)$$

Из неравенств (12.21), (12.22) вытекает следующее неравенство:

$$\mathrm{T}_{00} \leqslant \mathrm{T}_1 \equiv -\frac{1}{\beta}\ln\left(1 - \frac{\beta}{2(\alpha-1)}\frac{\| u_0 \|_2^2 + \| \nabla u_0 \|_2^2}{\| u_0 \|_2^2 + \| \nabla u_0 \|_4^4}\right). \qquad (12.23)$$

В силу произвольности $\varepsilon_0 \in (0,1)$ получим оптимальное условие вида (12.22). С этой целью найдем максимум функции $f(\varepsilon_0) = 2(\alpha-1)\beta^{-1}$, который достигается в точке $\varepsilon_0 = \sqrt{5}-2$, и функция $f(\varepsilon_0)$ в этой точке принимает значение $f(\varepsilon_0) = (\sqrt{5}-2)^2$, при этом $\alpha = 2(3-\sqrt{5})$ и $\beta = 2\sqrt{5}/(\sqrt{5}-2)$. Неравенства (12.22), (12.23) примут следующий вид:

$$\| \nabla u_0 \|_2^2 + \| u_0 \|_2^2 < \left(\sqrt{5}-2\right)^2\left(\| u_0 \|_2^2 + \| \nabla u_0 \|_4^4\right),$$

$$\mathrm{T}_{00} \leqslant \mathrm{T}_1 \equiv -\frac{1}{\beta}\ln\left(1 - \frac{1}{\left(\sqrt{5}-2\right)^2}\frac{\| \nabla u_0 \|_2^2 + \| u_0 \|_2^2}{\| u_0 \|_2^2 + \| \nabla u_0 \|_4^4}\right).$$

Теорема доказана.

Из результата теоремы 2 следует, что при условии истокообразной представимости функции $u_0(x)$:

$$u_0(x) = \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y) g_0(y), \quad g_0(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega}),$$

ослабленное решение задачи (12.1)–(12.3) за конечное время $\mathrm{T}_0 \leqslant \mathrm{T}_{00} \leqslant \mathrm{T}_2$ удовлетворяет предельному равенству

$$\lim_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \sup_{x \in \Omega} |\nabla_x u(x,t)| = +\infty.$$

12.3. Физическая интерпретация полученных результатов. Из наших результатов вытекает, что при достаточно большой величине начальной энергии за конечное время происходит опрокидывание волн, описываемых уравнением (12.1), т.е. по крайней мере в некоторой точке полупроводника за конечное время величина электрического поля обращается в бесконечность. С физической точки зрения это означает возникновение пробоя в полупроводнике. Данная качественная картина наблюдается в эксперименте [Бонч-Бруевич].

§ 13. О достаточных, близких к необходимым, условиях разрушения решения одной задачи

В этом параграфе мы рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle u + \triangle_{p_1} u\right) + \triangle u - \triangle_{p_2} u = 0, \tag{13.1}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega), \tag{13.2}$$

$$\triangle_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u),$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченая область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0,1]$, $p = \max\{p_1, p_2\}$, $p_1, p_2 > 2$.

Данная задача моделирует эффект отрицательности дифференциальной проводимости в полупроводнике при отсутствии внешнего электрического поля.

К сожалению, к моменту написания книги нам так и не удалось доказать локальную во времени разрешимость задачи в сильном обобщенном смысле. Но мы решили изучить вопрос о разрушении решения задачи (13.1), (13.2) в предположении ее однозначной локальной разрешимости в сильном обобщенном смысле. И это оправдано с физической точки зрения, поскольку уравнение (13.1) является весьма важным с физической точки зрения и базовым при исследовании электрического пробоя в полупроводниках [Бонч-Бруевич]. И, как известно, также и в теории обратных задач, физики полагаются на физическую достоверность рассматриваемых задач, т. е. на их локально корректную постановку.

13.1. Разрушение сильного обобщенного решения. Прежде всего введем понятие сильного обобщенного решения задачи (13.1), (13.2).

Определение 10. Сильным обобщенным решением задачи (13.1), (13.2) называется решение класса $u \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}]; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$, удовлетворяющее условиям

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle u + \triangle_{p_1} u\right) + \triangle u - \triangle_{p_2} u, w \right\rangle = 0 \tag{13.3}$$

$$\forall\, w \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega),\ \forall\, t \in [0,\mathrm{T}],\ \ p = \max\{p_1, p_2\},$$

$$u(0) = u_0 \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega), \tag{13.4}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$.

Определение 11. Ослабленным решением задачи (13.1), (13.2) назовем сильное обобщенное решение класса $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}]; \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \cap\, \mathbb{C}_0(\overline{\Omega}))$.

Введем следующее обозначение:

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} \parallel \nabla u \parallel_2^2 + \frac{p_1 - 1}{p_1} \parallel \nabla u \parallel_{p_1}^{p_1} .$$

Предположим, что выполнена следующая гипотеза.

Гипотеза 1. *Для любого* $u_0 \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ *существует единственное сильное обобщенное решение задачи* (13.3), (13.4) $u \in \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$, *причем либо* $\mathrm{T}_0 = +\infty$, *либо* $\mathrm{T}_0 < +\infty$ *и в последнем случае выполнено предельное равенство*

$$\limsup_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \parallel \nabla u \parallel_p = +\infty. \tag{13.5}$$

Опираясь на высказанную гипотезу докажем следующую теорему.

Теорема 16. *Пусть* $u_0 \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$. *Предположим, что гипотеза* 1 *имеет место, тогда*

1) *если* $p_1 = p_2$, *то* $\mathrm{T}_0 = +\infty$ *и справедлива оценка сверху*

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 e^{\mathrm{C}_2 t};$$

2) *если* $p_1 > p_2$, *то* $\mathrm{T}_0 = +\infty$ *и справедлива оценка сверху*

$$\Phi(t) \leqslant \left[\Phi_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\mathrm{C}_2 t\right]^{1/(1-\alpha)}, \quad \alpha = \frac{p_2}{p_1};$$

3) *если* $p_1 < p_2$ *и выполнены следующие условия*:

$$\parallel \nabla u_0 \parallel_{p_2}^{p_2} > \frac{p_2}{2} \parallel \nabla u_0 \parallel_2^2,$$

$$\parallel \nabla u_0 \parallel_{p_2}^{p_2} > \left[1 + \frac{\gamma}{2}\right] \parallel \nabla u_0 \parallel_2^2 + \gamma \frac{p_1 - 1}{p_1} \parallel \nabla u_0 \parallel_{p_1}^{p_1},$$

то $\mathrm{T}_0 \in (0, \mathrm{T}_1]$ *и выполнено предельное равенство* (13.5), *где*

$$\mathrm{C}_2 = \mathrm{C}_1^{p_2} \left(\frac{p_1}{p_1 - 1}\right)^{p_2/p_1}, \quad \gamma = \frac{(p_2 - 2)\sqrt{2p_1}}{(p_2 - p_1)},$$

$$\mathrm{T}_1 = \frac{\Phi_0^{1+\alpha_1}}{(\alpha_1 - 1)^2 \left[(\Phi'(0))^2 - \frac{\beta}{\alpha_1 - 1}\Phi(0)^2\right]},$$

$$\Phi'(0) = \parallel \nabla u_0 \parallel_{p_2}^{p_2} - \parallel \nabla u_0 \parallel_2^2,$$

$$\Phi_0 = \Phi(0) = \frac{1}{2} \parallel \nabla u_0 \parallel_2^2 + \frac{p_1 - 1}{p_1} \parallel \nabla u_0 \parallel_{p_1}^{p_1},$$

$$\alpha_1 = \frac{p_2 + p_1}{2p_1}, \quad \beta = \frac{(p_2 - 2)^2}{p_2 - p_1},$$

C_1 — *наилучшая постоянная вложения* $\mathbb{W}_0^{1,p_1}(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{1,p_2}(\Omega)$ *при условии* $p_1 \geqslant p_2$.

Доказательство.

Возьмем в качестве w в уравнении (13.3) функцию $u(x,t) \in \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$, тогда после интегрирования по частям получим первое энергетическое равенство

$$\frac{d\Phi}{dt} + \| \nabla u \|_2^2 = \| \nabla u \|_{p_2}^{p_2} . \tag{13.6}$$

Теперь в качестве w возьмем функцию u', тогда после интегрирования по частям получим второе энергетическое равенство

$$\| \nabla u' \|_2^2 + (p_1 - 1) \int\limits_{\Omega} dx \, |\nabla u|^{p_1-2} |\nabla u'|^2 = \frac{1}{p_2} \frac{d}{dt} \| \nabla u \|_{p_2}^{p_2} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| \nabla u \|_2^2 . \tag{13.7}$$

Пусть теперь выполнено условие

$$\frac{1}{2} \| \nabla u_0 \|_2^2 < \frac{1}{p_2} \| \nabla u_0 \|_{p_2}^{p_2}, \tag{13.8}$$

тогда из (13.7)

$$\frac{1}{2} \| \nabla u \|_2^2 < \frac{1}{p_2} \| \nabla u \|_{p_2}^{p_2},$$

откуда в свою очередь имеем

$$\| \nabla u \|_2^2 < \| \nabla u \|_{p_2}^{p_2} .$$

Стало быть, из первого энергетического равенства (13.6) и из (13.8) получим

$$\Phi'(t) > 0, \quad t \in [0, \mathrm{T}_0). \tag{13.9}$$

Наконец, в классе $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$ из (13.6) вытекает $\Phi(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0,\mathrm{T}_0)$.

Рассмотрим теперь величину $(\Phi')^2$:

$$(\Phi')^2(t) \leqslant \left(\int\limits_{\Omega} dx \, (\nabla u', \nabla u) + (p_1 - 1) \int\limits_{\Omega} dx \, |\nabla u|^{p_1-2} (\nabla u', \nabla u) \right)^2 . \tag{13.10}$$

Справедливы следующие оценки:

$$\left| \int\limits_{\Omega} (\nabla u, \nabla u') \, dx \right| \leqslant \| \nabla u' \|_2 \| \nabla u \|_2,$$

$$\left| \int\limits_{\Omega} dx \, |\nabla u|^{p_1-2} (\nabla u', \nabla u) \right| \leqslant \left(\int\limits_{\Omega} dx \, |\nabla u|^{p_1-2} |\nabla u'|^2 \right)^{1/2} \left(\int\limits_{\Omega} dx \, |\nabla u|^{p_1} \right)^{1/2} .$$

С учетом этих оценок и неравенства (13.10) приходим к выводу, что

$$(\Phi')^2 \leqslant \left(\| \nabla u' \|_2 \| \nabla u \|_2 + \right.$$

$$\left. + (p_1-1)^{1/2} \left(\int\limits_\Omega dx\, |\nabla u|^{p_1-2} |\nabla u'|^2 \right)^{1/2} (p_1-1)^{1/2} \left(\int\limits_\Omega dx\, |\nabla u|^{p_1} \right)^{1/2} \right)^2 .$$

Отсюда вытекает цепочка неравенств

$$(\Phi')^2 \leqslant \| \nabla u' \|_2^2 \| \nabla u \|_2^2 +$$

$$+ (p_1-1) \int\limits_\Omega dx\, |\nabla u|^{p_1-2} |\nabla u'|^2 (p_1-1) \int\limits_\Omega dx\, |\nabla u|^{p_1} +$$

$$+ 2 \| \nabla u' \|_2 (p_1-1)^{1/2} \left(\int\limits_\Omega dx\, |\nabla u|^{p_1} \right)^{1/2} \| \nabla u \|_2 (p_1-1)^{1/2} \times$$

$$\times \left(\int\limits_\Omega dx\, |\nabla u|^{p_1-2} |\nabla u'|^2 \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\| \nabla u' \|_2^2 + (p_1-1) \int\limits_\Omega dx\, |\nabla u|^{p_1-2} |\nabla u'|^2 \right) \times$$

$$\times \left(\| \nabla u \|_2^2 + (p_1-1) \int\limits_\Omega dx\, |\nabla u|^{p_1} \right) \leqslant p_1 \Phi(t) \mathrm{J}(t), \quad (13.11)$$

где

$$\mathrm{J} \equiv \| \nabla u' \|_2^2 + (p_1-1) \int\limits_\Omega dx\, |\nabla u|^{p_1-2} |\nabla u'|^2. \quad (13.12)$$

С учетом (13.7) из (13.12) получим

$$\mathrm{J} = \frac{1}{p_2} \frac{d}{dt} \left[\| \nabla u \|_{p_2}^{p_2} - \| \nabla u \|_2^2 \right] - \frac{p_2-2}{2p_2} \frac{d}{dt} \| \nabla u \|_2^2 . \quad (13.13)$$

Воспользуемся теперь следующим неравенством:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| \nabla u \|_2^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \| \nabla u' \|_2^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \| \nabla u \|_2^2,$$

тогда в результате из (13.7), (13.12), (13.13) и определения функции $\Phi(t)$ получим

$$\left[1 - \varepsilon \frac{p_2-2}{2p_2} \right] \mathrm{J} \leqslant \frac{1}{p_2} \Phi''(t) + \frac{p_2-2}{p_2} \frac{1}{\varepsilon} \Phi(t). \quad (13.14)$$

Из (3.11) и (13.14) получим обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка (см. [Калантаров, Ладыженская])

$$\Phi''\Phi - \alpha_1(\Phi')^2 + \beta\Phi^2 \geqslant 0, \tag{13.15}$$

где

$$\alpha_1 = \frac{p_2}{p_1}\left(1 - \varepsilon\frac{p_2-2}{2p_2}\right),$$

$$\beta = \frac{p_2-2}{\varepsilon}, \quad \varepsilon \in (0, 2(p_2-p_1)(p_2-2)^{-1}), \quad p_1 < p_2.$$

Заметим, что при $p_2 > p_1$ имеем: $\alpha > 1, \ \beta > 0$.

Введем новую функцию $\mathrm{Z} = \Phi^{1-\alpha_1}$, $\mathrm{Z}^1 = (1-\alpha_1)\Phi^{-\alpha_1}\Phi' \leqslant 0$ в силу (13.9). Относительно функции Z уравнение (13.15) примет вид

$$\mathrm{Z}'' - (\alpha_1 - 1)\beta\mathrm{Z} \leqslant 0. \tag{13.16}$$

Умножая обе части неравенства (13.16) на функцию Z' с учетом знакопостоянства этой функции после интегрирования получим

$$(\mathrm{Z}')^2 - (\alpha_1 - 1)\beta\mathrm{Z}^2 \geqslant \mathrm{A}^2, \tag{13.17}$$

где

$$\mathrm{A}^2 = (\alpha_1-1)^2\Phi_0^{-2\alpha_1}(\Phi'(0))^2 - (\alpha_1-1)\beta\Phi_0^{2-2\alpha_1} > 0$$

при условии

$$\Phi'(0) > \left(\frac{\beta}{\alpha_1-1}\right)^{1/2}\Phi(0).$$

Тогда из (13.17) приходим к выводу, что

$$-\mathrm{Z}' \geqslant \mathrm{A}, \ \ \mathrm{Z}(t) \leqslant \mathrm{Z}_0 - \mathrm{A}t. \tag{13.18}$$

Из (13.18) вытекает, что функция $\Phi(t)$ за конечное время $\mathrm{T}_0 \in \in (0, \mathrm{T}_1]$, $\mathrm{T}_1 = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{Z}_0$, обращается в бесконечность. Тем самым третий результат теоремы доказан.

Пусть теперь $p_1 \geqslant p_2$. Рассмотрим первое энергетическое равенство (13.6). Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\frac{d\Phi}{dt} \leqslant \| \nabla u \|_{p_2}^{p_2} \leqslant \mathrm{C}_1^{p_2}(\| \nabla u \|_{p_1})^{p_2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{p_1}{p_1-1}\right)^{p_2/p_1} \mathrm{C}_1^{p_2}\Phi^{\vartheta} = \mathrm{C}_2\Phi^{\vartheta}, \tag{13.19}$$

где $\vartheta = \dfrac{p_2}{p_1}$. Из (13.19) легко вытекают следующие оценки:

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 e^{\mathrm{C}_2 t}, \ \ p_2 = p_1,$$

$$\Phi(t) \leqslant \left[\Phi_0^{\frac{p_1-p_2}{p_1}} + \frac{p_1-p_2}{p_1}\mathrm{C}_2 t\right]^{\frac{p_1}{p_1-p_2}}, \ \ p_1 > p_2.$$

Из этих оценок и гипотезы 1 вытекает, что справедливы утверждения 1 и 2 теоремы.

Теорема доказана.

13.2. Глобальная во времени разрешимость задачи. Пусть $-\triangle u = v$ и $v \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}(\overline{\Omega})) \subset \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}^{-1}(\Omega))$. Тогда в сильном обобщенном смысле $u = (-\triangle)^{-1}v$. Заметим, что в классе $\mathbb{C}(\overline{\Omega})$ для оператора $(-\triangle)^{-1}$ справедливо явное представление

$$(-\triangle)^{-1}v = \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y)v(y,t), \tag{13.20}$$

где $G(x,y)$ — функция Грина первой краевой задачи для оператора Лапласа в ограниченной области Ω с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$, $\delta \in (0,1]$. Причем в силу $v \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}(\overline{\Omega}))$ и свойств интегралов типа потенциалов [Владимиров] из (13.20) имеем

$$u(x,t) = \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y)v(y,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})) \tag{13.21}$$

при условии

$$u_0(x) = \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y)v_0(y).$$

Теперь отметим, что для $\triangle_p u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ справедливо следующее выражение:

$$\triangle_p u = (p-1)|\nabla u|^{p-2}\triangle u. \tag{13.22}$$

С учетом (13.21) и (13.22) получим следующее равенство:

$$\triangle_p u = (p-1)\left|\int\limits_{\Omega} dy\, \nabla_x G(x,y)v(y,t)\right|^{p-2} v.$$

Потребуем теперь выполнения условий $p_1, p_2 \geqslant 3$. Тогда в классе $v \in \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}(\overline{\Omega}))$ с учетом (13.21), (13.22) получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned}(\triangle_{p_1}u)' = (p_1-1)v'\left|\int\limits_{\Omega} dy\, \nabla_x G(x,y)v(y,t)\right|^{p_1-2} + \\ + (p_1-2)v\left|\int\limits_{\Omega} dy\, \nabla_x G(x,y)v(y,t)\right|^{p_1-4} \times \\ \times \sum_{i=1}^{3}\left[\int\limits_{\Omega} dy\, G_{x_i}v(y,t)\int\limits_{\Omega} dz\, G_{x_i}(x,z)v'(z,t)\right].\end{aligned} \tag{13.23}$$

Из (13.23) сразу же получаем, что

$$(\triangle_{p_1} u)' \in \mathbb{C}([0,\mathrm{T}]\times\overline{\Omega}), \quad u' \in \mathbb{C}([0,\mathrm{T}]\times\overline{\Omega}),$$
$$\triangle u \in \mathbb{C}([0,\mathrm{T}]\times\overline{\Omega}), \quad \triangle_{p_2} u \in \mathbb{C}([0,\mathrm{T}]\times\overline{\Omega}),$$

так как $\triangle u = -v \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}(\overline{\Omega}))$. Тем самым каждое слагаемое в первом аргументе скобки двойственности определения (11) принадлежит классу $\mathbb{C}([0,\mathrm{T}]\times\overline{\Omega})$. В силу очевидного вложения $\mathbb{C}_0^\infty(\Omega) \subset \subset \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ получим поточечное равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(v + v(p_1-1)\left|\int\limits_\Omega dy\,\nabla_x G(x,y)v(y,t)\right|^{p_1-2}\right) -$$
$$- v(p_2-1)\left|\int\limits_\Omega dy\,\nabla_x G(x,y)v(y,t)\right|^{p_2-2} -$$
$$- v(p_1-1)\left|\int\limits_\Omega dy\,\nabla_x G(x,y)v(y,t)\right|^{p_1-2} = 0, \quad (13.24)$$
$$v(0) = v_0 \in \mathbb{C}(\overline{\Omega}), \quad u_0 = \int\limits_\Omega dy\,G(x,y)v_0(y).$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 17. *Пусть* $p_1, p_2 \geqslant 3$ *и функция* $u_0 \in \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})$ *истокообразно представима через функцию* $v_0(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$:

$$u_0 = \int\limits_\Omega dy\,G(x,y)v_0(y),$$

тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ *таком, что*

$$\sup_{x\in\Omega}|v_0(x)| \leqslant \varepsilon,$$

существует глобальное во времени ослабленное решение задачи (13.1), (13.2).

Доказательство.

Пусть

$$w = v\left[1 + (p_1-1)\left|\int\limits_\Omega dy\,\nabla_x G(x,y)v(y,t)\right|^{p_1-2}\right]. \quad (13.25)$$

Теперь из (13.24) с учетом (13.25) получим уравнение

$$w = v_0 \left[1 + (p_1 - 1) \left| \int\limits_\Omega dy\, \nabla_x G(x,y) v_0(y) \right|^{p_1 - 2} \right] e^{-t} + \int\limits_0^t ds\, e^{-(t-s)} \mathbb{A}(v),$$

где

$$\mathbb{A}(v) \equiv (p_1 - 1) v \left| \int\limits_\Omega dy\, \nabla_x G(x,y) v(y,t) \right|^{p_1 - 2} + \\ + (p_2 - 1) v \left| \int\limits_\Omega dy\, \nabla_x G(x,y) v(y,t) \right|^{p_2 - 2}.$$

Отсюда с учетом (13.25) получим следующее уравнение:

$$v = v_0 \frac{1 + (p_1 - 1) \left| \int\limits_\Omega dy\, \nabla_x G(x,y) v_0(y) \right|^{p_1 - 2}}{1 + (p_1 - 1) \left| \int\limits_\Omega dy\, \nabla_x G(x,y) v(y,t) \right|^{p_1 - 2}} e^{-t} + \\ + \frac{\int\limits_0^t ds\, e^{-(t-s)} \mathbb{A}(v)(s)}{1 + (p_1 - 1) \left| \int\limits_\Omega dy\, \nabla_x G(x,y) v(y,t) \right|^{p_1 - 2}}. \quad (13.26)$$

Перепишем уравнение (13.26) в следующем виде:

$$v(x,t) = v_0 \frac{\mathbb{H}_0(v_0)}{\mathbb{H}_0(v)} e^{-t} + \frac{\int\limits_0^t ds\, e^{-(t-s)} \mathbb{A}(v)}{\mathbb{H}_0(v)} \equiv \mathbb{H}(v), \quad (13.27)$$

где

$$\mathbb{H}_0(v) = 1 + (p_1 - 1) \left| \int\limits_\Omega dy\, \nabla_x G(x,y) v(y,t) \right|^{p_1 - 2}.$$

Для доказательства разрешимости воспользуемся методом последовательных приближений. И с этой целью рассмотрим следующую итерационую схему:

$$v_{n+1} = \mathbb{H}(v_n), \quad v_1 = v_0. \quad (13.28)$$

Введем банахово пространство

$$\mathbb{B} \equiv \{ u \in \mathbb{C}(\overline{Q}_\mathrm{T}) : \| u \| = \sup_{t \geqslant 0,\ x \in \Omega} |v(x,t)| \}.$$

Из итерационной схемы (13.28) вытекает неравенство

$$||| v_{n+1} |||\leqslant \overline{\mathrm{M}}(\mathrm{v}_0) + \mathrm{C}\left[||| v_n |||^{p_1-1} + ||| v_n |||^{p_2-1}\right], \quad p_1, p_2 \geqslant 3, \quad (13.29)$$

где

$$\overline{\mathrm{M}}(v_0) \equiv ||| v_0 ||| + \mathrm{C} ||| v_0 |||^{p_1-1}, \quad p_1 \geqslant 3.$$

Тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ таком, что $||| v_0 |||\leqslant \varepsilon$, из (13.29) вытекает

$$||| v_n |||\leqslant \mathrm{M}(\varepsilon) \to +0, \quad \varepsilon \to +0.$$

Справедливы следующие неравенства:

$$\left|\frac{1}{\mathbb{H}_0(w_1)} - \frac{1}{\mathbb{H}_0(w_2)}\right| \leqslant |\mathbb{H}_0(w_1) - \mathbb{H}_0(w_2)| \leqslant$$

$$\leqslant (p_1-1)(p_1-2)\max\left\{\left|\int\limits_\Omega dy\,|\nabla_x G(x,y)||w_1|\right|^{p_1-3}, \right.$$

$$\left., \left|\int\limits_\Omega dy\,|\nabla_x G(x,y)||w_2|\right|^{p_1-3}\right\} \int\limits_\Omega dy\,|\nabla_x G(x,y)||w_1 - w_2| \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C}\max\{||| w_1 |||^{p_1-3}, ||| w_2 |||^{p_1-3}\}\, ||| w_1 - w_2 |||,$$

$$||| \int\limits_0^t ds\, e^{-(t-s)} \left[\mathbb{A}(w_1) - \mathbb{A}(w_2)\right] |||\leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C}\max\{||| w_1 |||^{p_1-2}, ||| w_2 |||^{p_2-2}\}\, ||| w_1 - w_2 |||\,.$$

Следовательно, получим, что если $||| w_i |||\leqslant \mathrm{M}$, то

$$||| \mathbb{H}(w_1) - \mathbb{H}(w_2) |||\leqslant \mathrm{M}_0(v_0)\mathrm{M}^{p_1-3}\, ||| w_1 - w_2 ||| + \mathrm{C}(\mathrm{M}^{p_1-1} +$$
$$+ \mathrm{M}^{p_2-1})\mathrm{M}^{p_1-3}\, ||| w_1 - w_2 ||| + \mathrm{C}(\mathrm{M}^{p_1-2} + \mathrm{M}^{p_2-2})\, ||| w_1 - w_2 |||\,. \quad (13.30)$$

Поскольку $\mathrm{M}(\varepsilon) \to +0$ при $\varepsilon \to +0$, то при достаточно малом $\varepsilon > 0$ из (13.30) вытекает следующее неравенство:

$$||| v_{n+1} - v_n |||= ||| \mathbb{H}(v_n) - \mathbb{H}(v_{n-1}) |||\leqslant \frac{1}{2}\, ||| v_n - v_{n-1} |||\,. \quad (13.31)$$

Из (13.31) вытекает, что последовательность $\{v_n\}$ сильно в $\mathbb{B}$ сходится к решению уравнения (13.27). Следовательно, существует глобальное во времени решение класса $\mathbb{C}([0,+\infty]\times\overline{\Omega})$.

Докажем теперь, что на самом деле это решение принадлежит классу $\mathbb{C}^{(1)}([0,+\infty];\mathbb{C}(\overline{\Omega}))$.

Пусть теперь

$$w = v\,\mathbb{H}_0(v), \quad (13.32)$$

тогда на основании уравнения (13.27) приходим к выводу, что $w \in \in \mathbb{C}^{(1)}([0,+\infty];\mathbb{C}(\overline{\Omega}))$. В классе $v \in \mathbb{C}^{(1)}([0,+\infty];\mathbb{C}(\overline{\Omega}))$ из (13.32), дифференцируя (13.32) по t, получим эквивалентную задачу

$$(\mathbb{I}+\mathbb{D}(v))\,v' = \frac{1}{1+\mathbb{H}_0(v)}w' \in \mathbb{C}([0,+\infty]\times\overline{\Omega}), \quad v\mathbb{H}_0 v = w, \qquad (13.33)$$

где

$$\mathbb{D}(v)z = (p_1-1)(p_1-2)\frac{v}{1+\mathbb{H}_0(v)}\left|\int\limits_\Omega dy\,\nabla_x G(x,y)v(y,t)\right|^{p_1-3} \times$$
$$\times \sum_{i=1}^{3}\frac{\int\limits_\Omega dy\,G_{x_i}(x,y)v(y,t)}{\left|\int\limits_\Omega dy\,\nabla_x G(x,y)v(y,t)\right|}\int\limits_\Omega dy\,G_{x_i}(x,y)z(y,t),$$

$z(y,t) \in \mathbb{C}([0,+\infty]\times\overline{\Omega})$, $p_1 \geqslant 3$. Для глобального решения v справедливо следующее неравенство:

$$|||\,v\,||| \leqslant |||\,v-v_n\,||| + |||\,v_n\,||| \leqslant \mathrm{M}(\varepsilon) \to +0$$

при $\varepsilon \to +0$. При достаточно большом $n \in \mathbb{N}$ и при достаточно малом $\varepsilon > 0$ в силу определения оператора $\mathbb{D}(v)$ (13.33) получим

$$\|\,\mathbb{D}(v)\,\|_{\mathbb{C}(\overline{Q})\to\mathbb{C}(\overline{Q})} \leqslant q, \quad q = \frac{1}{2}, \quad Q = (0,+\infty)\times\Omega. \qquad (13.34)$$

Введем обозначение

$$\widehat{\mathbb{C}}(v) \equiv \mathbb{I}+\mathbb{D}(v). \qquad (13.35)$$

Из (13.34), (13.35) получим, что для любого $v \in \widehat{\mathbb{C}}(\overline{Q})$ существует обратный оператор $\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(v) \equiv [\mathbb{I}+\widehat{\mathbb{D}}(v)]^{-1}$, который можно записать в виде ряда Неймана.

Нам осталось доказать, что

$$v' = \widehat{\mathbb{C}}^{-1}\frac{1}{1+\mathbb{H}_0(v)}w' \in \mathbb{C}([0,+\infty];\mathbb{C}(\overline{\Omega}))$$

при фиксированном $v \in \mathbb{C}([0,+\infty];\mathbb{C}(\overline{\Omega}))$. Действительно, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$|||\,v'(t)-v'(t_0)\,||| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\left|\left|\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0)\Big[\frac{1}{1+\mathbb{H}_0(v(t))}w'(t)-\frac{1}{1+\mathbb{H}_0(v(t_0))}w'(t_0)\Big]\right|\right|\right| +$$
$$+\left|\left|\left|\Big(\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0)-\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t)\Big)\frac{1}{1+\mathbb{H}_0(v(t_0))}w'(t_0)\right|\right|\right| \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{C}\left|\left|\left|w'(t)-w'(t_0)\right|\right|\right| + \mathrm{C}\left|\left|\left|\mathbb{H}_0(v(t))-\mathbb{H}_0(v(t_0))\right|\right|\right| +$$

$$+ \mathrm{C} \parallel \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) - \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t) \parallel_{\mathbb{C}\to\mathbb{C}} . \quad (13.36)$$

Отметим, что линейный при фиксированном $v \in \mathbb{C}([0,+\infty];\mathbb{C}(\overline{\Omega}))$ оператор $\widehat{\mathbb{C}}$ является непрерывным, а значит, в силу теоремы Банаха об обратном отображении, оператор $\widehat{\mathbb{C}}^{-1}$ является линейным непрерывным и, следовательно, в силу линейности ограниченным. Стало быть, мы можем воспользоваться спектральным представлением для линейного ограниченного оператора $\widehat{\mathbb{C}}^{-1} : \mathbb{C}([0,+\infty];\mathbb{C}(\overline{\Omega})) \to \mathbb{C}([0,+\infty];\mathbb{C}(\overline{\Omega}))$.

Прежде всего введем резольвенту оператора $\widehat{\mathbb{C}}$:

$$\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}) = \left(\lambda\mathbb{I} - \widehat{\mathbb{C}}\right)^{-1}.$$

Пусть Γ — окружность $|\lambda| = r$ с достаточно большим радиусом, большим чем

$$\sup_{t\in[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]} \parallel \widehat{\mathbb{C}} \parallel_{\mathbb{C}([0,+\infty];\mathbb{C}(\overline{\Omega}))\to\mathbb{C}([0,+\infty];\mathbb{C}(\overline{\Omega}))} .$$

Введенная величина определена корректно, поскольку при $t \in [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon] \subset [0,\mathrm{T}_0)$ имеет место неравенство

$$\sup_{t\in[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]} |\!|\!| v |\!|\!| < +\infty.$$

Теперь мы можем воспользоваться спектральным представлением для операторов $\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t)$, $\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0)$ с одним и тем же введенным ранее контуром Γ:

$$\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} d\lambda\, \lambda^{-1}\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t)), \;\; \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} d\lambda\, \lambda^{-1}\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0))$$

Следовательно, имеем

$$\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t) - \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} d\lambda\, \lambda^{-1}\left[\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t)) - \mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0))\right].$$

Теперь воспользуемся известным представлением для резольвент операторов:

$$\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t)) - \mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0)) = \mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0))\sum_{n=1}^{+\infty}[(\widehat{\mathbb{C}}(t) - \widehat{\mathbb{C}}(t_0))\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0)]^n,$$

при условии

$$\parallel \widehat{\mathbb{C}}(t_0) - \widehat{\mathbb{C}}(t) \parallel_{\mathbb{C}([0,+\infty];\mathbb{C}(\overline{\Omega}))\to\mathbb{C}([0,+\infty];\mathbb{C}(\overline{\Omega}))} \times$$
$$\times \parallel \mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0)) \parallel_{\mathbb{C}([0,+\infty];\mathbb{C}(\overline{\Omega}))\to\mathbb{C}([0,+\infty];\mathbb{C}(\overline{\Omega}))} \leqslant \delta < 1.$$

Справедлива следующее неравенство:

$$\parallel \mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t)) - \mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0)) \parallel_{\mathbb{C}([0,+\infty];\mathbb{C}(\overline{\Omega}))\to\mathbb{C}([0,+\infty];\mathbb{C}(\overline{\Omega}))} \leqslant$$

$$\leqslant \| \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0)) \|_{\mathbb{C}([0,+\infty];\mathbb{C}(\overline{\Omega}))\to\mathbb{C}([0,+\infty];\mathbb{C}(\overline{\Omega}))} \times$$
$$\times \sum_{n=1}^{+\infty} \| \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0)) \|^n_{\mathbb{C}([0,+\infty];\mathbb{C}(\overline{\Omega}))\to\mathbb{C}([0,+\infty];\mathbb{C}(\overline{\Omega}))} \times$$
$$\times \| \widehat{\mathbb{C}}(t)) - \widehat{\mathbb{C}}(t_0)) \|^n_{\mathbb{C}([0,+\infty];\mathbb{C}(\overline{\Omega}))\to\mathbb{C}([0,+\infty];\mathbb{C}(\overline{\Omega}))}.$$

Теперь заметим, что

$$\widehat{\mathbb{C}}(t) - \widehat{\mathbb{C}}(t_0) = \widehat{\mathbb{D}}v(t) - \widehat{\mathbb{D}}(v)(t_0).$$

Из явного вида (13.33) оператора $\widehat{\mathbb{D}}(v)$ (поскольку $p_1 \geqslant 3$) и свойств операторов типа потенциала вытекает непрерывность по $v \in \mathbb{C}([0,+\infty] \times \overline{\Omega})$ как оператора

$$\widehat{\mathbb{D}}(\cdot) : \mathbb{C}([0,+\infty] \times \overline{\Omega}) \to \mathcal{L}(\mathbb{C}([0,+\infty] \times \overline{\Omega}); \mathbb{C}([0,+\infty] \times \overline{\Omega})).$$

С другой стороны, $v(t) \in \mathbb{C}([0,+\infty] \times \overline{\Omega})$, поэтому

$$\| \widehat{\mathbb{D}}v(t) - \widehat{\mathbb{D}}(v)(t_0) \|_{\mathbb{C}([0,+\infty];\mathbb{C}(\overline{\Omega}))\to\mathbb{C}([0,+\infty];\mathbb{C}(\overline{\Omega}))} \to +0$$

при условии, что $t \to t_0$.

Значит, в силу (13.36) имеем: $u \in \mathbb{C}^{(1)}([0,+\infty); \mathbb{V}_0)$.

Теорема доказана.

13.3. Физическая интерпретация полученных результатов. Как мы уже отмечали, задача (13.1), (13.2) является модельной задачей, описывающей нестационарные процессы в полупроводнике с отрицательной дифференциальной проводимостью и наличием нелинейной зависимости коэффициента диэлектрической проницаемости. Полученная в теореме 17 качественная картина полностью соответствует экспериментально наблюдаемому в полупроводниках явлению электрического пробоя [Бонч-Бруевич].

§ 14. О достаточных условиях, близких к необходимым, разрушения решения сильно нелинейного обобщенного уравнения Буссинеска

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о достаточных условиях, близких к необходимым, разрушения первой начально-краевой задачи в ограниченной области для сильно нелинейного обобщенного уравнения Буссинеска:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\triangle u - u - |u|^q u) + \triangle u + u(u+\alpha)(u-\beta) = 0, \quad \alpha, \beta > 0, \qquad (14.1)$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x) \in \mathbb{H}^1_0(\Omega), \qquad (14.2)$$

где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$, $\delta \in (0,1]$.

Определение 12. Сильным обобщенным решением задачи (14.1), (14.2) называется решение класса $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}_0^1(\Omega))$, удовлетворяющее условиям

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle u - u - |u|^q u) + \triangle u + u(u+\alpha)(u-\beta), v\right\rangle = 0,\right.$$

$$u(x,0) = u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$$

$\forall\ v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, $\forall\ t \in [0,\mathrm{T}]$, где производная по времени понимается в классическом смысле.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 18. *Для любого* $u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ *при условии* $q \in (0,4]$ *найдется такое* $0 < \mathrm{T}_0$, *что существует единственное сильное обобщенное решение задачи* (14.1), (14.2) *из* $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{H}_0^1(\Omega))$, *причем либо* $\mathrm{T}_0 = +\infty$, *либо* $\mathrm{T}_0 < +\infty$ *и в последнем случае имеем*

$$\limsup_{t\uparrow \mathrm{T}_0} \| \nabla u \|_2 = +\infty. \tag{14.3}$$

Доказательство.

Рассмотрим следующие операторы:

$$\mathbb{A}_0 u \equiv -\triangle u + u : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$
$$\mathbb{L}u \equiv -\triangle u : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$
$$\mathbb{A}_1(u) = |u|^q u : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^{q+2}(\Omega) \to \mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\Omega) \subset \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$
$$\mathbb{F}_m(u) = u^m : \mathbb{L}^{m+1}(\Omega) \to \mathbb{L}^{(m+1)/m}(\Omega), \quad m = \overline{1,3}.$$

Изучим свойства операторов $\mathbb{F}_m(u)$:

$$\| \mathbb{F}_3(u_1) - \mathbb{F}_3(u_2) \|_{-1} \leqslant \mathrm{C} \| \mathbb{F}_3(u_1) - \mathbb{F}_3(u_2) \|_{4/3} \leqslant \mu_3(\overline{\mathrm{R}}) \| u_1 - u_2 \|_4,$$
$$\mu_3(\overline{\mathrm{R}}) = \mathrm{C}\overline{\mathrm{R}}^2,\ \overline{\mathrm{R}} = \max\{\| u_1 \|_4, \| u_2 \|_4\}.$$

Стало быть,

$$\| \mathbb{F}_3(u_1) - \mathbb{F}_3(u_2) \|_{-1} \leqslant \mu_3(\mathrm{R}) \| u_1 - u_2 \|_{+1},\ \ \mathrm{R} = \max\{\| u_1 \|_{+1}, \| u_2 \|_{+1}\}.$$

Аналогичным образом устанавливается, что

$$\| \mathbb{F}_2(u_1) - \mathbb{F}_2(u_2) \|_{-1} \leqslant \mu_2(\mathrm{R}) \| u_1 - u_2 \|_{+1},\ \ \| \mathbb{F}_1(u_1) - \mathbb{F}_1(u_2) \|_{-1} \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{C} \| u_1 - u_2 \|_{+1},$$

где $\mathrm{R} = \max\{\| u_1 \|_{+1}, \| u_2 \|_{+1}\}$. Рассмотрим теперь оператор $\mathbb{A} = \mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_1$:

$$\langle \mathbb{A}(u_1) - \mathbb{A}(u_2), u_1 - u_2 \rangle = \| u_1 - u_2 \|_2^2 + \| \nabla u_1 - \nabla u_2 \|_2^2 +$$
$$+ \int_\Omega dx\, (|u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2)(u_1 - u_2) \geqslant \| u_1 - u_2 \|_{+1}^2 .$$

Значит, существует липшиц-непрерывный обратный оператор $\mathbb{A}^{-1}:\mathbb{H}^{-1}(\Omega)\to\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ с постоянной Липшица, равной 1. Аналогичным образом устанавливается, что для оператора $\mathbb{L}:\mathbb{H}_0^1(\Omega)\to\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ существует липшиц-непрерывный обратный с постоянной Липшица, равной 1.

Сделаем замену функций $w=\mathbb{A}(v)$, тогда, в сильном обобщенном смысле с учетом свойств входящих в уравнение операторов в классе $w\in\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}^{-1}(\Omega))$ получим

$$\frac{dw}{dt}=-\mathbb{L}\mathbb{A}^{-1}(w)+\mathbb{F}_3(\mathbb{A}^{-1}(w))+(\alpha-\beta)\mathbb{F}_2(\mathbb{A}^{-1}(w))-\alpha\beta\mathbb{A}^{-1}(w).$$

В классе $w\in\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}^{-1}(\Omega))$ получим интегральное уравнение

$$w=w_0+\int\limits_0^t ds\left[-\mathbb{L}\mathbb{A}^{-1}(w)+\mathbb{F}_3(\mathbb{A}^{-1}(w))+(\alpha-\beta)\mathbb{F}_2(\mathbb{A}^{-1}(w))-\right.$$
$$\left.-\alpha\beta\mathbb{A}^{-1}(w)\right]\equiv\mathbb{H}(w).$$

Рассмотрим теперь банахово пространство

$$\mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T};\mathbb{H}^{-1}(\Omega))$$

и его замкнутое выпуклое и ограниченное подмножество

$$\mathbb{B}_{\mathbb{R}}\equiv\{w\in\mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T};\mathbb{H}^{-1}(\Omega)):|||\ w\ |||=\operatorname*{ess.sup}_{t\in(0,\mathrm{T})}\|\ w\ \|_{-1}\leqslant\mathrm{R}\}.$$

Докажем, что оператор $\mathbb{H}(w)$ действует из $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ в $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ и является сжимающим на $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$. Действительно,

$$|||\ \mathbb{H}(w)\ |||\leqslant\|\ w_0\ \|_{-1}+\mathrm{CT}\{|||\ w\ |||+|||\ w\ |||^2+|||\ w\ |||^3\}\leqslant\frac{\mathrm{R}}{2}+\frac{\mathrm{R}}{2}=\mathrm{R}$$

при условии

$$\|\ w_0\ \|_{-1}\leqslant\frac{\mathrm{R}}{2},\quad\mathrm{T}\leqslant\frac{1}{2\mathrm{C}}\frac{1}{1+\mathrm{R}+\mathrm{R}^2}.$$

Докажем теперь сжимаемость оператора $\mathbb{H}(w)$ на $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$. Действительно,

$$|||\ \mathbb{H}(w_1)-\mathbb{H}(w_2)\ |||\leqslant\ \mathrm{CT}\left(1+\mathrm{R}+\mathrm{R}^2\right)|||\ w_1-w_2\ |||,$$
$$\mathrm{R}=\max\{|||\ w_1\ |||,|||\ w_2\ |||\},$$

причем при

$$\mathrm{T}\leqslant\frac{1}{2\mathrm{C}}\frac{1}{1+\mathrm{R}+\mathrm{R}^2}$$

имеем

$$|||\ \mathbb{H}(w_1)-\mathbb{H}(w_2)\ |||\leqslant\frac{1}{2}\ |||\ w_1-w_2\ |||\ .$$

Значит, оператор $\mathbb{H}(w)$ сжимающий на $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$. Стало быть, существует единственное решение интегрального уравнения класса $\mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T};\mathbb{H}^{-1}(\Omega))$. Используя стандартный алгоритм продолжения решения интегральных уравнений с переменным верхним пределом во времени, получим, что $u \in \mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T}_0;\mathbb{H}^{-1}(\Omega))$, причем либо $\mathrm{T}_0 = +\infty$, либо $\mathrm{T}_0 < +\infty$ и в последнем случае имеет место предельное равенство

$$\limsup_{t\uparrow \mathrm{T}_0} \| w \|_{-1} = +\infty.$$

Используя сглаживающие по времени свойства оператора $\mathbb{H}(w)$, имеем

$$\mathbb{H}(w) : \mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T};\mathbb{H}^{-1}(\Omega)) \to \mathbb{AC}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}^{-1}(\Omega)),$$
$$\mathbb{H}(w) : \mathbb{AC}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}^{-1}(\Omega)) \to \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}^{-1}(\Omega))$$

$\forall\ \mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}_0)$. Так что приходим к следующему нелинейному уравнению с известной правой частью:

$$\mathbb{A}(v) = w \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}^{-1}(\Omega)),\ \ \mathbb{A}(v) = -\triangle v + v + |v|^q v.$$

В силу установленных ранее свойств операторов $\mathbb{A}_0$ и $\mathbb{A}_1(v)$ имеем: $v = \mathbb{A}^{-1}(w)$, и, кроме того, справедливо неравенство

$$\| v(t) - v(t_0) \|_{+1} = \| \mathbb{A}^{-1}(w)(t) - \mathbb{A}^{-1}(w)(t_0) \|_{+1} \leqslant$$
$$\leqslant \| w(t) - w(t_0) \|_{-1} \to +0,$$

как только $t \to t_0$. Значит, $v(t) \in \mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}^1_0(\Omega))$ для любого $\mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}_0)$ и, кроме того, имеет место предельное равенство (14.3).

Рассмотрим производную Фреше оператора $\mathbb{A}_1(v) = |v|^q v$:

$$\mathbb{A}'_{1,v}(v)h = (q+1)|v|^q h.$$

Теперь изучим свойства оператора

$$\mathbb{A}'_{1,v}(v) : \mathcal{L}\left(\mathbb{L}^{q+2}(\Omega);\mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\Omega)\right) \subset \mathcal{L}\left(\mathbb{H}^1_0(\Omega);\mathbb{H}^{-1}(\Omega)\right)$$

при фиксированном $v \in \mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$. Заметим, что каратеодориева функция $|z|^q$ порождает оператор Немыцкого, действующий из $\mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$ в $\mathbb{L}^{(q+2)/q}(\Omega)$. Значит, в силу свойств операторов Немыцкого [Вайнберг] получим, что как только $z_n \to z$ сильно в $\mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$, то $|z_n|^q \to |z|^q$ сильно в $\mathbb{L}^{(q+2)/q}(\Omega)$, т.е.

$$\int\limits_{\Omega} dx\ \big||z_n(x)|^q - |z(x)|^q\big|^{(q+2)/q} \to +0$$

при $n \to +\infty$. С учетом этого докажем, что

$$\| \mathbb{A}'_{1,v}(v) - \mathbb{A}'_{1,v}(v_n) \|_{\mathbb{H}^1_0 \to \mathbb{H}^{-1}} \to +0$$

при $v_n \to v$ сильно в $\mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$. Действительно,

$$\| \mathbb{A}'_{1,v}(v) - \mathbb{A}'_{1,v}(v_n) \|_{\mathbb{H}^1_0 \to \mathbb{H}^{-1}} = \sup_{\|\nabla h\|_2 = 1} \| \mathbb{A}'_{1,v}(v)h - \mathbb{A}'_{1,v}(v_n)h \|_{-1} \leqslant$$

$$\leqslant (q+1) \sup_{\|h\|_{q+2}=1} \left(\int_\Omega dx \, \big||v|^q - |v_n|^q\big|^{(q+2)/q} \right)^{q/(q+2)} \left(\int_\Omega dx \, |h|^{q+2} \right)^{1/(q+2)} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C} \, \| \, |v|^q - |v_n|^q \, \|_{(q+2)/q} \to +0$$

при $v_n \to v$ сильно в $\mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$.

Рассмотрим сначала производную Фреше оператора $\mathbb{A}$:

$$\mathbb{A}'_v(v) = \mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_{1,v}(v).$$

В силу условий теоремы имеем

$$\langle \mathbb{A}'_v(v)v_1 - \mathbb{A}'_v(v)v_2, v_1 - v_2 \rangle \geqslant \| \, v_1 - v_2 \, \|^2_{+1}$$

для любых $v, v_1, v_2 \in \mathbb{H}^1_0(\Omega)$. Значит, при любом фиксированном $v \in \mathbb{H}^1_0(\Omega)$ существует липшиц-непрерывный обратный оператор $[\mathbb{A}'_v]^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{H}^{-1}(\Omega); \mathbb{H}^1_0(\Omega))$. Теперь рассмотрим следующее уравнение:

$$\mathbb{A}_0 v + \mathbb{A}_1(v) = w(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}^1_0(\Omega)).$$

Для дальнейшего изложения нам потребуется доказать, что оператор

$$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{I} + \widehat{\mathbb{B}}, \;\; \widehat{\mathbb{B}} = \mathbb{A}_0^{-1} \mathbb{A}'_{1,v}(v)$$

имеет ограниченный обратный. $\mathbb{A}'_{1,v}(v)$ — производная Фреше на фиксированном элементе $v \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}^1_0(\Omega))$ оператора $\mathbb{A}_1$. Действительно, расмотрим уравнение

$$\left[\mathbb{I} + \widehat{\mathbb{B}} \right] w = 0.$$

Докажем, что это уравнение имеет только тривиальное решение. С этой целью подействуем оператором $\mathbb{A}_0$ на обе части этого уравнения, тогда получим

$$\mathbb{A}'_u w = \mathbb{A}_0 w + \mathbb{A}_{1,v}(v) w = 0 \;\; \forall \, v \in \mathbb{H}^1_0(\Omega).$$

Но мы ранее доказали, что для оператора $\mathbb{A}'_v$ определен липшиц-непрерывный обратный $[\mathbb{A}'_v]^{-1} : \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \to \mathbb{H}^1_0(\Omega)$. Теперь подействуем этим оператором на обе части последнего равенства. Все операции были эквивалентными, и поэтому приходим к выводу, что $w = 0$.

В классе $v \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}^1_0(\Omega))$ уравнение

$$\mathbb{A}(v) = w$$

эквивалентно следующей задаче:

$$\left[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_{1,v}(v) \right] v' = w' \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}^1_0(\Omega)), \;\; v = \mathbb{A}^{-1}(w).$$

Подействуем оператором $\mathbb{A}_0^{-1}$ на последнее уравнение, тогда получим

$$\left[\mathbb{I} + \widehat{\mathbb{B}}\right] v^{'} = \mathbb{A}_0^{-1} w^{'}.$$

Введем оператор

$$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{I} + \widehat{\mathbb{B}} : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}_0^1(\Omega),$$

для которого, как мы уже доказали, существует линейный ограниченный обратный. Поэтому получим

$$v^{'} = \widehat{\mathbb{C}}^{-1} \mathbb{A}_0^{-1} w^{'}.$$

Нам осталось доказать, что $v^{'} = \widehat{\mathbb{C}}^{-1} \mathbb{A}_0^{-1} w^{'} \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ при фиксированном $u \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}_0^1(\Omega))$. Действительно, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \| v^{'}(t) - v^{'}(t_0) \|_0 \leqslant & \| \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) \mathbb{A}_0^{-1} [w^{'}(t) - w^{'}(t_0)] \|_0 + \\ & + \| (\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) - \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t)) \mathbb{A}_0^{-1} w^{'}(t_0) \|_0 \leqslant \\ & \leqslant \mathrm{C} \| w^{'}(t) - w^{'}(t_0) \|_0^* + \mathrm{C} \| \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) - \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t) \|_{\mathbb{H}_0^1 \to \mathbb{H}_0^1}. \end{aligned}$$

Отметим, что линейный при фиксированном $v \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ оператор $\widehat{\mathbb{C}}$ является непрерывным, а значит, в силу теоремы Банаха об обратном отображении, оператор $\widehat{\mathbb{C}}^{-1}$ является линейным непрерывным и, следовательно, в силу линейности ограниченным. Стало быть, мы можем воспользоваться спектральным представлением для линейного ограниченного оператора $\widehat{\mathbb{C}}^{-1} : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}_0^1(\Omega)$.

Прежде всего введем резольвенту оператора $\widehat{\mathbb{C}}$:

$$\mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}) = \left(\lambda \mathbb{I} - \widehat{\mathbb{C}}\right)^{-1}.$$

Пусть Γ — окружность $|\lambda| = r$ с достаточно большим радиусом, большим чем

$$\sup_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} \| \widehat{\mathbb{C}} \|_{\mathbb{H}_0^1 \to \mathbb{H}_0^1}.$$

Введенная величина определена корректно, поскольку при $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \subset [0, \mathrm{T}_0)$ имеет место неравенство

$$\sup_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} \| u \|_{+1} < +\infty.$$

Теперь мы можем воспользоваться спектральным представлением для операторов $\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t)$, $\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0)$ с одним и тем же введенным ранее контуром Γ:

$$\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} d\lambda \, \lambda^{-1} \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t)), \quad \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} d\lambda \, \lambda^{-1} \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0)).$$

Очевидно, имеем

$$\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t) - \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} d\lambda\, \lambda^{-1}\left[\mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t)) - \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0))\right].$$

Теперь воспользуемся известным представлением для резольвент операторов:

$$\mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t)) - \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0)) = \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0)) \sum_{n=1}^{+\infty} [(\widehat{\mathbb{C}}(t) - \widehat{\mathbb{C}}(t_0))\mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0)]^n$$

при условии

$$\| \widehat{\mathbb{C}}(t_0) - \widehat{\mathbb{C}}(t) \|_{\mathbb{H}_0^1 \to \mathbb{H}_0^1} \| \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0)) \|_{\mathbb{H}_0^1 \to \mathbb{H}_0^1} \leqslant \delta < 1.$$

Справедлива следующее неравенство:

$$\| \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t)) - \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0)) \|_{\mathbb{H}_0^1 \to \mathbb{H}_0^1} \leqslant \| \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0)) \|_{\mathbb{H}_0^1 \to \mathbb{H}_0^1} \times$$
$$\times \sum_{n=1}^{+\infty} \| \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0)) \|^n_{\mathbb{H}_0^1 \to \mathbb{H}_0^1} \| \widehat{\mathbb{C}}(t)) - \widehat{\mathbb{C}}(t_0)) \|^n_{\mathbb{H}_0^1 \to \mathbb{H}_0^1}.$$

Теперь заметим, что

$$\widehat{\mathbb{C}}(t) - \widehat{\mathbb{C}}(t_0) = \mathbb{A}_0^{-1}\left[\mathbb{A}'_{1,u}(u(t)) - \mathbb{A}'_{1,u}(u(t_0))\right].$$

В силу непрерывности производных Фреше $\mathbb{A}_{j,u}$ по $u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и того факта, что $u \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}_0^1(\Omega))$, имеем

$$\| \widehat{\mathbb{C}}(t) - \widehat{\mathbb{C}}(t_0) \|_{\mathbb{V}_0 \to \mathbb{V}_0} \leqslant \| \mathbb{A}'_{1,u}(u(t)) - \mathbb{A}'_{1,u}(u(t_0)) \|_{\mathbb{H}_0^1 \to \mathbb{H}^{-1}} \to +0,$$
$$\| \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t)) - \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0)) \|_{\mathbb{H}_0^1 \to \mathbb{H}_0^1} \to 0,$$
$$\| \widehat{\mathbb{C}}(t)^{-1} - \widehat{\mathbb{C}}(t_0)^{-1} \|_{\mathbb{H}_0^1 \to \mathbb{H}_0^1} \to +0$$

при $t \to t_0$.

Значит, $u \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}_0^1(\Omega))$.

Теорема доказана.

Введем функционал, имеющий смысл энергии:

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} \| \nabla u \|_2^2 + \frac{1}{2} \| u \|_2^2 + \frac{q+1}{q+2} \| u \|_{q+2}^{q+2}. \qquad (14.4)$$

Перейдем к доказательству основного результата данного параграфа.

Теорема 19. *Пусть выполнены все условия теоремы* 18. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если* $q > 2$, *то* $\mathrm{T}_0 = +\infty$ *и выполнено неравенство*

$$\Phi(t) \leqslant \left[\Phi_0^{\frac{q-2}{q+2}} + \frac{q-2}{q+2}\mathrm{D}t\right]^{\frac{q+2}{q-2}};$$

2) *если* $q = 2$, *то* $\mathrm{T}_0 = +\infty$ *и выполнено неравенство*

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 \exp(\mathrm{D}t);$$

3) *если* $0 < q < 2$ *и выполнены условия*

$$\frac{1}{4} \parallel u_0 \parallel_4^4 > \frac{1}{2} \parallel \nabla u_0 \parallel_2^2 + \frac{\alpha\beta}{2} \parallel u_0 \parallel_2^2 - \frac{\alpha - \beta}{3} \int\limits_\Omega dx\, u_0^3,$$

$$\left(\Phi'(0)\right)^2 > \frac{\beta_1}{\alpha_1 - 1}\Phi_0^2 + \frac{2\gamma}{2\alpha_1 - 3 + q/2}\Phi_0^{1+\frac{4-q}{2}},$$

то $\mathrm{T}_0 \in [\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2]$ *и выполнено предельное равенство* (14.3), *где*

$$\mathrm{T}_1 = \mathrm{B}_3^{-1}\Phi_0^{-1}, \quad \mathrm{T}_2 = {\Phi_0}^{1-\alpha_1}\mathrm{A}^{-1},$$

$$\mathrm{A}^2 = (\alpha_1 - 1)^2\Phi_0^{-2\alpha_1}\left[(\Phi'(0))^2 - \frac{\beta_1}{\alpha_1 - 1}\Phi_0^2 - \frac{2\gamma}{2\alpha_1 - 3 + q/2}\Phi_0^{1+\frac{4-q}{2}}\right],$$

$$\alpha_1 = \frac{4}{q+2}\left[1 - \frac{(2-q)^2}{32}\right], \ \beta_1 = \frac{40(1+\alpha^2\beta^2)}{(2-q)^2}, \ \gamma = \frac{20\mathrm{B}_2}{(2-q)^2}, \quad q \in (0,2),$$

$$\mathrm{B}_2 = \frac{|\alpha - \beta|^2\mathrm{B}_1^{4-q}2^{(4-q)/2}}{2(q+1)}, \quad \mathrm{B}_3 = \left(1 + \frac{|\alpha-\beta|^2}{2\alpha\beta}\right)4\mathrm{B}_4^4,$$

$$\mathrm{D} = \left(1 + \frac{|\alpha-\beta|^2}{2\alpha\beta}\right)\left(\frac{q+2}{q+1}\right)^{\frac{4}{q+2}}\mathrm{B}_5^4,$$

$$\Phi_0 = \Phi(0), \quad \Phi'(0) = \parallel u_0 \parallel_4^4 - \parallel \nabla u_0 \parallel_2^2 + (\alpha - \beta)\int\limits_\Omega dx\, u_0^3 - \alpha\beta \parallel u_0 \parallel_2^2,$$

B_1 — *наилучшая постоянная вложения* $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^{4-q}(\Omega)$ *при условии* $q \in (0,2)$, B_4 — *наилучшая постоянная вложения* $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^4(\Omega)$, B_5 — *наилучшая постоянная вложения* $\mathbb{L}^{q+2}(\Omega) \subset \mathbb{L}^4(\Omega)$ *при* $q \geqslant 2$.

Доказательство.

Введем обозначение

$$\mathrm{J} = \parallel \nabla u' \parallel_2^2 + \parallel u' \parallel_2^2 + (q+1)\int\limits_\Omega dx\, |u'|^2|u|^q. \tag{14.5}$$

Нетрудно убедиться, что имеет место следующее неравенство:

$$\left(\Phi'(t)\right)^2 \leqslant (q+2)\mathrm{J}\Phi(t). \tag{14.6}$$

Умножением обеих частей уравнения (14.1) на u относительно скобок двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle$ между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ после интегрирования по частям получим первое энергетическое равенство

$$\frac{d\Phi}{dt} = \parallel u \parallel_4^4 - \parallel \nabla u \parallel_2^2 + (\alpha - \beta)\int\limits_\Omega dx\, u^3 - \alpha\beta \parallel u \parallel_2^2. \tag{14.7}$$

Теперь умножением обеих частей уравнения (14.1) на u' относительно скобок двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle$ между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ после интегрирования по частям получим второе энергетическое равенство

$$\mathrm{J} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\parallel \nabla u \parallel_2^2 + \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\parallel u \parallel_4^4 + \frac{\alpha-\beta}{3}\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega dx\, u^3 - \frac{\alpha\beta}{2}\frac{d}{dt}\parallel u \parallel_2^2 . \tag{14.8}$$

Из (14.8) получим

$$\mathrm{J} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\parallel \nabla u \parallel_2^2 + \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\left(\parallel u \parallel_4^4 + (\alpha-\beta)\int\limits_\Omega dx\, u^3 - \alpha\beta \parallel u \parallel_2^2\right) + \\ + \frac{\alpha-\beta}{12}\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega dx\, u^3 - \frac{\alpha\beta}{4}\frac{d}{dt}\parallel u \parallel_2^2 . \tag{14.9}$$

Справедливы следующие вспомогательные оценки:

$$\left|\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\parallel \nabla u \parallel_2^2\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\parallel \nabla u' \parallel_2^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\parallel \nabla u \parallel_2^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\mathrm{J} + \frac{1}{2\varepsilon}\Phi,$$
$$\left|\frac{\alpha\beta}{4}\frac{d}{dt}\parallel u \parallel_2^2\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\parallel u' \parallel_2^2 + \frac{\alpha^2\beta^2}{4\varepsilon}\parallel u \parallel_2^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\mathrm{J} + \frac{\alpha^2\beta^2}{2\varepsilon}\Phi,$$

$$\left|\frac{\alpha-\beta}{12}\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega dx\, u^3\right| \leqslant \frac{|\alpha-\beta|}{4}\int\limits_\Omega dx\, |u'||u|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|\alpha-\beta|}{4}\left(\int\limits_\Omega dx\, |u'|^2|u|^q\right)^{1/2}\left(\int\limits_\Omega dx\, |u|^{4-q}\right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{8}(q+1)\int\limits_\Omega dx\, |u'|^2|u|^q + \frac{|\alpha-\beta|^2}{8\varepsilon(q+1)}\int\limits_\Omega dx\, |u|^{4-q} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{8}\mathrm{J} + \frac{|\alpha-\beta|^2\mathrm{B}_1^{4-q}2^{(4-q)/2}}{8\varepsilon(q+1)}\Phi^{(4-q)/2}, \quad q\in(0,2).$$

Отсюда и из (14.9) с учетом (14.7), (14.8) вытекает следующее неравенство:

$$\left[1-\frac{5}{8}\varepsilon\right]\mathrm{J} \leqslant \frac{1}{4}\Phi'' + \frac{1+\alpha^2\beta^2}{2\varepsilon}\Phi + \frac{|\alpha-\beta|^2\mathrm{B}_1^{4-q}2^{(4-q)/2}}{8\varepsilon(q+1)}\Phi^{(4-q)/2}. \tag{14.10}$$

Из (14.4)–(14.6) и (14.10) получим обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка

$$\Phi\Phi'' - \alpha_1(\Phi')^2 + \beta_1\Phi^2 + \gamma\Phi^{1+(4-q)/2} \geqslant 0, \tag{14.11}$$

где

$$\alpha_1 = \frac{4}{q+2}\left[1 - \frac{5}{8}\varepsilon\right], \quad \beta_1 = 2\frac{1+\alpha^2\beta^2}{\varepsilon}, \quad \gamma = \frac{|\alpha-\beta|^2 \mathrm{B}_1^{4-q} 2^{(4-q)/2}}{2(q+1)\varepsilon}.$$

Потребуем, чтобы $\alpha_1 > 1$, тогда $\varepsilon \in (0, (4-2q)/5)$, $q \in (0,2)$.

Введем новую функцию

$$\mathrm{Z}(t) = \Phi^{1-\alpha_1}. \tag{14.12}$$

Тогда из (14.11), (14.12) получим

$$\frac{1}{1-\alpha_1}\mathrm{Z}'' + \beta_1\mathrm{Z} + \gamma\mathrm{Z}^{\frac{(4-q)/2-\alpha_1}{1-\alpha_1}} \geqslant 0. \tag{14.13}$$

Потребуем теперь, чтобы

$$\frac{(4-q)/2-\alpha_1}{1-\alpha_1} > -1,$$

тогда получим, что $\varepsilon \in (0, (2-q)^2/10)$, $0 < q < 2$. Отметим, что $(2-q)^2/10 < (4-2q)/5$ при $q \in (0,2)$.

Пусть выполнено условие

$$\frac{1}{4}\parallel u_0 \parallel_4^4 > \frac{1}{2}\parallel \nabla u_0 \parallel_2^2 + \frac{\alpha\beta}{2}\parallel u_0 \parallel_2^2 - \frac{\alpha-\beta}{3}\int\limits_\Omega dx\, u^3.$$

Тогда из (14.7), (14.8) вытекает следующее неравенство:

$$\Phi'(t) \geqslant 0, \quad t \in [0, \mathrm{T}_0).$$

Действительно, из (14.8) имеем

$$\frac{1}{4}\parallel \nabla u \parallel_4^4 > \frac{1}{3}\parallel \nabla u \parallel_2^2 + \frac{\alpha\beta}{3}\parallel u \parallel_2^2 - \frac{\alpha-\beta}{3}\int\limits_\Omega u^3 dx,$$

$$\parallel \nabla u \parallel_4^4 > \frac{3}{4}\parallel \nabla u \parallel_4^4 > \parallel \nabla u \parallel_2^2 + \alpha\beta \parallel u \parallel_2^2 - (\alpha-\beta)\int\limits_\Omega u^3 dx.$$

Стало быть,

$$\mathrm{Z}' = (1-\alpha_1)\Phi^{-\alpha_1}\Phi' \leqslant 0, \quad t \in [0, \mathrm{T}_0).$$

Умножим обе части (14.13) на Z', в результате последующего интегрирования получим неравенство

$$(\mathrm{Z}')^2 \geqslant (\alpha_1 - 1)\beta_1\mathrm{Z}^2 + \frac{2(\alpha_1-1)\gamma}{1+\gamma_1}\mathrm{Z}^{1+\gamma_1} + \mathrm{A}^2,$$

$$\gamma_1 = \frac{\left(\frac{4-q}{2} - \alpha_1\right)}{1-\alpha_1}, \quad (14.14)$$

$$\mathrm{A}^2 = (\alpha_1 - 1)^2 \Phi_0^{-2\alpha_1} \left[(\Phi'(0))^2 - \frac{\beta_1}{\alpha_1 - 1}\Phi_0^2 - \frac{2\gamma}{2\alpha_1 - 3 + q/2}\Phi_0^{1+\frac{4-q}{2}} \right] > 0,$$

причем в силу условия $\varepsilon \in (0, (2-q)^2/10,\ q \in (0,2)$, имеем: $1 + \gamma_1 > 0$. Из (14.14) приходим к выводу, что имеет место неравенство

$$\mathrm{Z} \leqslant \mathrm{Z}_0 - \mathrm{A}t,$$

из которого вытекает, что $\mathrm{T}_0 \leqslant \mathrm{T}_2 = \mathrm{A}^{-1}\Phi_0^{1-\alpha_1}$.

В силу произвольности $\varepsilon \in (0, (2-q)^2/10$ получим оптимальные условия на начальную функцию. Тогда используя те же рассуждения, что и ранее, получим

$$\varepsilon = \frac{(2-q)^2}{20}, \quad q \in (0,2).$$

Выведем теперь оценку снизу на время разрушения решения задачи. Справедливы неравенства, вытекающие из первого энергетического равенства (14.7):

$$\Phi' + \alpha\beta \parallel u \parallel_2^2 \leqslant \parallel u \parallel_4^4 + |\alpha - \beta| \int\limits_\Omega dx\, |u|^3 \leqslant$$

$$\leqslant \parallel u \parallel_4^4 + \frac{\alpha\beta}{2} \parallel u \parallel_2^2 + \frac{|\alpha - \beta|^2}{2\alpha\beta} \parallel u \parallel_4^4 . \quad (14.15)$$

Из (14.15) получим

$$\Phi' \leqslant \mathrm{B}_3\Phi^2, \ \ \mathrm{B}_3 = \left(1 + \frac{|\alpha-\beta|^2}{2\alpha\beta}\right) 4\mathrm{B}_4^4, \ \Phi \leqslant \frac{1}{\Phi_0^{-1} - \mathrm{B}_3 t}.$$

Значит, $\mathrm{T}_1 = \mathrm{B}_3^{-1}\Phi_0^{-1}$, $\mathrm{T}_0 \geqslant \mathrm{T}_1$.

Стало быть, утверждение 3 теоремы доказано.

Докажем теперь утверждения 1 и 2. Действительно, из первого энергетического равенства (14.7) получим

$$\Phi' + \alpha\beta \parallel u \parallel_2^2 \leqslant \parallel u \parallel_4^4 + |\alpha - \beta| \int\limits_\Omega dx\, |u|^3 \leqslant$$

$$\leqslant \parallel u \parallel_4^4 + |\alpha - \beta| \left(\int\limits_\Omega dx\, |u|^2 \right)^{1/2} \left(\int\limits_\Omega dx\, u^4 \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \parallel u \parallel_4^4 + \alpha\beta \frac{1}{2} \parallel u \parallel_2^2 + \frac{|\alpha - \beta|^2}{2\alpha\beta} \parallel u \parallel_4^4 . \quad (14.16)$$

Из (14.16) при условии $q \geqslant 2$ приходим к следующему неравенству:

$$\Phi' \leqslant \mathrm{D}\Phi^{\vartheta}, \quad \vartheta = \frac{4}{q+2}, \quad \mathrm{D} = \left(1 + \frac{|\alpha - \beta|^2}{2\alpha\beta}\right)\left(\frac{q+2}{q+1}\right)^{\frac{4}{q+2}} \mathrm{B}_5^4,$$

где B_5 — наилучшая постоянная вложения $\mathbb{L}^{q+2}(\Omega) \subset \mathbb{L}^4(\Omega)$. Отсюда вытекают оставшиеся утверждения теоремы.

Теорема доказана.

Глава 6

РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЙ СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ ДИССИПАТИВНЫХ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИСТОЧНИКАМИ

Рассматривается абстрактная задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с нелинейными операторными коэффициентами. В качестве приложений приведены примеры сильно нелинейных волновых диссипативных уравнений соболевского типа. Для данной задачи получены достаточные условия, близкие к необходимым, как глобальной разрешимости, так и разрушения за конечное время. В частности, при дополнительных условиях на нелинейные операторы доказана разрешимость задачи в любом конечном цилиндре, а при других условиях доказано разрушение решения задачи за конечное время при некоторых условиях на норму начальной функции, имеющих смысл большой величины начальной функции. Приведены задачи для уравнений соболевского типа, удовлетворяющие введенным условиям.

§ 1. Введение. Постановка задачи

Целью настоящей главы является получение оптимальных результатов типа теорем существования–несуществования для класса сильно нелинейных волновых диссипативных уравнений соболевского типа, в абстрактной постановке — задач Коши для уравнений с операторными коэффициентами в банаховых пространствах:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbb{A}_0 u + \sum_{j=1}^{n} \mathbb{A}_j(u)\right) + \mathbb{L}u + \mathbb{DP}(u) = \mathbb{F}(u), \quad u(0) = u_0, \tag{1.1}$$

и оценок снизу и сверху на время разрушения решений задачи (1.1).

Приведем примеры модельных многомерных сильно нелинейных уравнений соболевского типа (вывод некоторых из них содержится в третьей главе):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle u - u + \sum_{j=1}^{n} \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p_j-2}\nabla u\right)\right) - u + u\frac{\partial u}{\partial x_1} + u^3 = 0, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle u - u - |u|^{q_1}u\right) + \triangle u + \frac{\partial |u|^{q_2+1}}{\partial x_1} + |u|^{2q_2}u = 0, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\triangle^2 u + \triangle u + \operatorname{div}(|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u)\right) + \triangle u + u\frac{\partial u}{\partial x_1} - \operatorname{div}(|\nabla u|^2\nabla u) = 0, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\triangle^2 u + \triangle u + \operatorname{div}(|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u)\right) - \operatorname{div}(|\nabla u|^2\nabla u) + \triangle u + \beta_1\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right) + \beta_2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \beta_3\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = 0, \tag{1.5}$$

где

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0,\ |\beta_1| + |\beta_2| + |\beta_3| > 0,\ p_j > 2,\ q_1,\ q,\ q_2 \geqslant 0,$$
$$p_1,\ p_2,\ p > 2.$$

§ 2. Однозначная разрешимость задачи (1.1) в слабом обобщенном смысле и разрушение ее решения

Мы предполагаем выполненными все условия из §2 четвертой и §2 пятой глав.

Определение 1. Слабым обобщенным решением абстрактной задачи Коши (1.1) назовем решение, удовлетворяющее условиям

$$\int_0^{\mathrm{T}} \varphi(t)\left[\frac{d}{dt}\sum_{j=0}^{N}\langle \mathbb{A}_j(u), w\rangle_j - (\mathbb{F}(u), w)_0 + \langle \mathbb{DP}(u), w\rangle_0 + (\mathbb{L}u, w)_1\right] dt = 0 \tag{2.1}$$

$$\forall\ w \in \mathbb{V},\ \ \forall\, \varphi \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T}),$$
$$u(0) = u_0 \in \mathbb{V}.$$

Решение задачи (2.1) ищется в классе

$$u(t) \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{V}),\quad \frac{du}{dt} \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0),$$
$$\mathbb{L}u \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_1^*),\ \ \mathbb{F}(u) \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^*),$$
$$\mathbb{DP}(u) \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_4),$$
$$\mathbb{A}_j(u) \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_j^*),\ j = \overline{0,N},\ \ \frac{d}{dt}\mathbb{A}(u) = \frac{d}{dt}\sum_{j=0}^{N}\mathbb{A}_j(u) \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{V}^*)$$

и, кроме того,

$$\mathbb{A}(u) = \sum_{j=0}^{N} \mathbb{A}_j(u) \in \mathbb{C}_w^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{V}^*),$$

т. е. $\mathbb{A}(u)$ является, сильно абсолютно непрерывной и слабо дифференцируемой на сегменте $[0,\mathrm{T}]$. Поэтому в силу свойств (A), (A_0), (F), (L), (DP) и условий нижеследующей теоремы 1 получаем, что

$$\mathbb{A}(u) = \sum_{j=0}^{N} \mathbb{A}_j(u) \in \mathbb{H}^1(0,\mathrm{T};\mathbb{V}^*), \quad \mathbb{F}(u) \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{V}^*),$$

$$\mathbb{A}(u) = \sum_{j=0}^{N} \mathbb{A}_j(u) \in \mathbb{C}_w^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{V}^*).$$

Тем самым задача (2.1), в силу условий (V) и условий нижеследующей теоремы 1, эквивалентна следующей задаче:

$$\int_0^{\mathrm{T}} \varphi(t) \left[\frac{d}{dt} \sum_{j=0}^{N} \langle \mathbb{A}_j(u), w\rangle + \langle \mathbb{L}u, w\rangle + \langle \mathbb{DP}(u), w\rangle - \langle \mathbb{F}(u), w\rangle \right] dt = 0$$

$$\forall\ w \in \mathbb{V},\ \ \forall\ \varphi(t) \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T}),$$

$$u(0) = u_0 \in \mathbb{V},$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скобка двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}^*$.

Используя результат §12 Приложения Б, приходим к выводу, что задача (2.1) эквивалентна следующей задаче:

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt \left[\left\langle \frac{d}{dt}\mathbb{A}(u), v \right\rangle + \langle \mathbb{L}u, v\rangle + \langle \mathbb{DP}(u), v\rangle - \langle \mathbb{F}(u), v\rangle \right] = 0$$

$\forall\ v \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{V}),\ \ u(0) = u_0 \in \mathbb{V}.$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (A), (A_0), (F), (L), (DP). *Предположим, что* $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$ *и* $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_1$, *т. е. оператор вложения вполне непрерывен. Потребуем, кроме того, чтобы* $\mathbb{V}_0 \subset \mathbb{W}_1$ *и* $\mathbb{V}_0 \subset \mathbb{W}_0 \subseteq \mathbb{W}_2$. *Предположим, что либо* $\overline{p} < q+2$, *либо* $\overline{p} \geqslant q+2$ *и в последнем случае* $\mathbb{V}_{j^*} \subseteq \mathbb{W}_0$, *где*

$$\overline{p} = \max_{j=1,N} p_j, \quad p_{j^*} = \overline{p}.$$

Пусть $(\mathbb{F}(v), v)_0 \geqslant c > 0$ *для всех* $v \in \mathbb{W}_0,\ \ |v|_0 = 1$. *Тогда для любого* $u_0 \in \mathbb{V}$ *найдется такое максимальное* $\mathrm{T}_0 \equiv \mathrm{T}_{u_0} > 0$, *что задача*

Коши (1.1) *будет иметь единственное решение класса*

$$u(t) \in \mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T};\mathbb{V}), \quad \frac{d}{dt}u(t) \in \mathbb{L}^{2}(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0) \ \ \forall\, \mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}_0),$$
$$\mathbb{A}(u) \in \mathbb{H}^{1}(0,\mathrm{T};\mathbb{V}^*) \cap \mathbb{C}_w^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{V}^*).$$

Причем справедливы следующие оценки для положительно определенной в силу условий $(\mathrm{A}_0)2$ *и* $(\mathrm{A})3$ *функции, имеющей смысл кинетической энергии*:

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u), u\rangle_j\,,$$

а также следующие свойства времени существования решения $\mathrm{T}_0 > 0$ *в трех случаях относительно возможных значений величины*

$$\alpha \equiv \frac{q+2}{\overline{p}}, \ \ \overline{p} \equiv \max_{j=\overline{1,N}} p_j \ :$$

1) *если* $\alpha = 1$, *то* $\mathrm{T}_0 = +\infty$ *и*

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 \exp\{\mathrm{C}_2 t\};$$

2) *если* $\alpha \in (0,1)$, *то* $\mathrm{T}_0 = +\infty$ *и*

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 \left[1 + (1-\alpha)\mathrm{C}_2 \Phi_0^{\alpha-1} t\right]^{1/(1-\alpha)};$$

3) *если* $\alpha > 1$ *и выполнено неравенство*

$$\Phi'(0) > \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha_1 - 1}}\,\Phi(0) + \frac{\beta}{\alpha_1 - 1}\Phi(0),$$

то $\mathrm{T}_0 > 0$ *таково, что*

$$\lim_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \Phi(t) = +\infty, \ \ \mathrm{T}_1 \leqslant \mathrm{T}_0 \leqslant \mathrm{T}_2,$$

где

$$\mathrm{T}_1 = \frac{2}{q}\Phi_0^{-q/2}\overline{\mathrm{B}}^{-1}, \ \ \mathrm{T}_2 = \Phi_0^{1-\alpha_1}\mathrm{A}^{-1}, \ \ \mathrm{C}_2 \equiv \mathrm{B}\mathrm{C}_{j^*}^{q+2} 2^{\alpha},$$
$$|v|_0 \leqslant \mathrm{C}_{j^*}\langle \mathbb{A}_{j^*} v, v\rangle_{j^*}^{1/p_{j^*}},$$
$$\Phi_0 \equiv \Phi(0), \ \ \Phi'(0) \equiv (\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 - (\mathbb{L}u_0, u_0)_1\,,$$
$$\alpha_1 \equiv \frac{\overline{p}+q+2}{2\overline{p}}, \ \ \beta \equiv \frac{(q+2)(q+1)}{q+2-\overline{p}}, \ \ \gamma \equiv \frac{4(q+1)^2}{q+2-\overline{p}},$$
$$q+2 > \overline{p} \equiv \max_{j=\overline{1,n}} p_j,$$
$$\mathrm{A}^2 \equiv (\alpha_1 - 1)^2 \Phi_0^{-2\alpha_1}\left[\left(\Phi'(0) - \frac{\beta}{\alpha_1 - 1}\Phi(0)\right)^2 - \frac{\gamma}{\alpha_1 - 1}\Phi^2(0)\right],$$

$$\overline{\mathrm{B}} = \mathrm{B}2^{(q+2)/2}\mathrm{C}_1^{q+2},$$

C_1 — *константа наилучшего вложения* $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$, B — *константа из условия* (F) 4.

Доказательство.

Замечание 1. В силу принадлежности решения классу

$$u(t) \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{V}), \quad \frac{du}{dt} \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0),$$

следует, что после возможного изменения на множестве нулевой меры Лебега отображение $u(t) : [0,\mathrm{T}] \to \mathbb{V}_0$ сильно непрерывно. Стало быть, имеет смысл начальное условие $u(0) = u_0$.

Шаг 1. *«Галеркинские» приближения.*

В силу сепарабельности $\mathbb{V}$ найдется счетная всюду плотная в $\mathbb{V}$ линейно независимая система функций $\{w_i\}_{i=1}^m$.

Будем доказывать разрешимость задачи (2.1) методом Галеркина в сочетании с методами монотонности и компактности [Лионс, 1].

Сначала рассмотрим следующую конечномерную аппроксимацию задачи (2.1):

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\varphi(t)\left[\frac{d}{dt}\langle \mathbb{A}_0 u_m, w_k\rangle_0 + \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^N \langle \mathbb{A}_j(u_m), w_k\rangle_j + (\mathbb{L}u_m, w_k)_1 + \right.$$
$$\left. + \langle \mathbb{DP}(u_m), w_k\rangle_0 - (\mathbb{F}(u_m), w_k)_0\right] = 0, \quad (2.2)$$

$k = \overline{1,m}$, $\forall\, \varphi(t) \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T})$,

$$u_m = \sum_{i=1}^m c_{mi}(t)w_i, \quad u_{m0} = \sum_{i=1}^m c_{mi}(0)w_i, \quad c_{mi}(0) = \alpha_{mi},$$
$$u_{m0} \to u_0 \ \text{ сильно в } \ \mathbb{V}.$$

Из (2.2) вытекает, что в классе $c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(1)}[0,\mathrm{T}_m]$ справедлива система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных $c_{mk}(t)$, $k = \overline{1,m}$:

$$\sum_{i=1}^m c_{mi}^{'}\left[\langle \mathbb{A}_0 w_i, w_k\rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle \mathbb{A}_{j,u_m}^{'}(u_m)w_i, w_k\rangle_j\right] + \langle \mathbb{DP}(u_m), w_k\rangle_0 +$$
$$+ (\mathbb{L}u_m, w_k)_1 = (\mathbb{F}(u_m), w_k)_0, \quad k = \overline{1,m}. \quad (2.3)$$

Введем обозначение

$$a_{ik} \equiv \langle \mathbb{A}_0 w_i, w_k\rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle \mathbb{A}_{j,u_m}^{'}(u_m)w_i, w_k\rangle_j\,.$$

Очевидно, что

$$\sum_{i,k=1,1}^{m,m} a_{ik}\xi_i\xi_k = \langle \mathbb{A}_0\eta,\eta\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N}\langle \mathbb{A}'_{j,u_m}(u_m)\eta,\eta\rangle_j \geqslant \langle \mathbb{A}_0\eta,\eta\rangle_0,\ \ \eta=\sum_{i=1}^{m}\xi_i w_i,$$

поскольку $\mathbb{A}_0$ — положительно определенный оператор, а значит $\langle \mathbb{A}_0\eta,\eta\rangle_0 \geqslant 0$, причем равенство $\langle \mathbb{A}_0\eta,\eta\rangle_0 = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $\eta = 0$. С другой стороны,

$$\eta \equiv \sum_{i=1}^{m}\xi_i w_i,$$

и в силу линейной независимости системы функций $\{w_i\}_{i=1}^m$ в $\mathbb{V}$ приходим к выводу, что $\eta = 0$ тогда и только тогда, когда $\{\xi_i\}_{i=1}^m = \mathbf{0}$. Отсюда и из [Постников] получим, что $\det\{a_{ik}\}_{i,k=1,1}^{m,m} > 0$.

Докажем теперь, что функционалы $f_j \equiv \langle \mathbb{A}'_{j,u_m}(u_m)w_i, w_k\rangle_j$ являются непрерывными по совокупности переменных $c_{mi},\ \ i=\overline{1,m}$. Действительно, пусть $\overline{c}_{m1},...,\overline{c}_{mm}$ — некоторая точка эвклидова пространства $\mathbb{R}^m$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned}|f_j(\overline{c}_{m1},...,\overline{c}_{mm}) - f_j(c_{m1},...,c_{mm})| \leqslant \\ \leqslant |f_j(\overline{c}_{m1},...,\overline{c}_{mm}) - f_j(c_{m1},\overline{c}_{m2},...,\overline{c}_{mm})| + \\ + |f_j(c_{m1},\overline{c}_{m2},...,\overline{c}_{mm}) - f_j(c_{m1},c_{m2},\overline{c}_{m3},...,\overline{c}_{mm})| + \\ + |f_j(c_{m1},c_{m2},\overline{c}_{m3}...,\overline{c}_{mm}) - f_j(c_{m1},c_{m2},c_{m3},...,\overline{c}_{mm})| + ... \\ ... + \left|f_j(c_{m1},c_{m2},...,c_{(m-1)m},\overline{c}_{mm}) - f_j(c_{m1},...,c_{mm})\right|. \quad (2.4)\end{aligned}$$

В силу условия (A) 2 найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что каждое из слагаемых в правой части неравенства (2.4) при условии

$$\sum_{k=1}^{m}|\overline{c}_{mk} - c_{mk}| \leqslant \delta(\varepsilon)$$

будет меньше величины $\varepsilon/(m+1)$. Докажем теперь, липшиц-непрерывность функционалов $f_{0k} = (\mathbb{F}(u_m), w_k)_0$ по совокупности переменных $\{c_{mi}\}_{i=1}^m$. Пусть

$$u_j = \sum_{i=1}^{m} c^j_{mi} w_j,$$

$j = 1,2$. В силу условия (F) 1 справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned}\left|(\mathbb{F}(u_1) - \mathbb{F}(u_2), w_k)_0\right| \leqslant |\ \mathbb{F}(u_1) - \mathbb{F}(u_2)\ |^*_0|\ w\ |_0 \leqslant \\ \leqslant B\ |\ u_1 - u_2\ |_0 \leqslant B_1\sum_{l=1}^{m}|c^1_{ml} - c^2_{ml}|.\end{aligned}$$

Тем самым функция $f_0 = f_0(c_{m1}, ..., c_{mm})$ является липшиц-непрерывной и тем более непрерывной по совокупности переменных. Рассмотрим теперь функционалы $g_k \equiv \langle \mathbb{DP}(u_m), w_k \rangle_0$ от переменных $(c_{m1}, c_{m2}, ..., c_{mm})$. Точно так же, как и при выводе предыдущего неравенства, в силу условий (DP) докажем липшиц-непрерывность функционалов g_k. Стало быть, система обыкновенных дифференциальных уравнений (2.3) является системой типа Коши–Ковалевской и удовлетворяет условиям, гарантирующим ее разрешимость на некотором сегменте $[0, \mathrm{T}_m]$, $\mathrm{T}_m > 0$, в классе $c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^1([0, \mathrm{T}_m])$, $k = \overline{1, m}$ (см., например, [Петровский]).

Шаг 2. *Априорные оценки.*

Начнем с доказательства следующей леммы.

Лемма 1. *Найдется такое* $\mathrm{T} > 0$, *не зависящее от* $m \in \mathbb{N}$, *что для последовательности* $\{u_m\}$ *«галеркинских» приближений справедливы равномерно по* $m \in \mathbb{N}$ *следующие свойства*:

$$
\begin{gathered}
u_m \ \textit{ограничено в} \ \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}); \\
u_m^{'} \ \textit{ограничено в} \ \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_0); \\
\mathbb{A}_0 u_m \ \textit{ограничено в} \ \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_0^*); \\
\mathbb{A}_j(u_m) \ \textit{ограничено в} \ \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_j^*); \\
\mathbb{F}(u_m) \ \textit{ограничено в} \ \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_0^*); \\
\mathbb{L} u_m \ \textit{ограничено в} \ \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_1^*); \\
\mathbb{DP}(u_m) \ \textit{ограничено в} \ \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_0^*).
\end{gathered}
$$

Доказательство.

Умножим обе части равенства (2.3) на $c_{mk}(t)$ и просуммируем по $k = \overline{1, m}$, тогда получим

$$
\langle \mathbb{A}_0 u_m^{'}, u_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \langle \mathbb{A}_{j, u_m}^{'}(u_m) u_m^{'}, u_m \rangle_j + \\
+ (\mathbb{L} u_m, u_m)_1 = (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0 . \quad (2.5)
$$

С другой стороны, в силу того что $u_m = \sum\limits_{k=1}^{N} c_{mk}(t) w_k \in \mathbb{C}^1([0, \mathrm{T}_m]; \mathbb{V})$, а также в силу условия (**A**) 2 и 4 справедливы равенства

$$
\frac{d}{dt} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j = p_j \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_{mt}^{'} \rangle_j ,
$$

$$
\langle (\mathbb{A}_j(u_m))_t^{'}, u_m \rangle_j + \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_{mt}^{'} \rangle_j = p_j \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_{mt}^{'} \rangle_j ,
$$

$$
\langle (\mathbb{A}_j(u_m))_t^{'}, u_m \rangle_j = (p_j - 1) \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_{mt}^{'} \rangle_j = \frac{p_j - 1}{p_j} \frac{d}{dt} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j .
$$

Докажем равенство

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j = p_j \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_{mt}^{'}\rangle_j \,.$$

Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\mathbb{J}_{mj}(t) \equiv \int\limits_0^1 ds\, \langle \mathbb{A}_j(su_m), u_m\rangle_j = \frac{1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j \,,$$

$$\frac{d\mathbb{J}_{mj}(t)}{dt} = \int\limits_0^1 ds\, \left[s\langle \mathbb{A}_{su_m}^{'}(su_m)u_m^{'}, u_m\rangle_j + \langle \mathbb{A}_j(su_m), u_m^{'}\rangle_j\right] =$$

$$= \int\limits_0^1 ds\, \left[s\frac{d}{ds}\langle \mathbb{A}_j(su_m), u_m^{'}\rangle_j + \langle \mathbb{A}_j(su_m), u_m^{'}\rangle_j\right] =$$

$$= \int\limits_0^1 ds\, \frac{d}{ds}\left[s\langle \mathbb{A}_j(su_m), u_m^{'}\rangle\right] = \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m^{'}\rangle_j.$$

Здесь мы воспользовались тем, что производные Фреше операторов $\mathbb{A}_j$ в силу условий (A) симметричны. Отсюда и из (2.5) получим

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N}\frac{p_j-1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j\right] +$$

$$+ (\mathbb{L}u_m, u_m)_1 = (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0 \,. \quad (2.6)$$

Из (2.6), интегрируя обе части по $t \in (0, \mathrm{T}_m)$, получаем

$$\frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N}\frac{p_j-1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j =$$

$$= \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, u_{m0}\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N}\frac{p_j-1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_{m0}), u_{m0}\rangle_j +$$

$$+ \int\limits_0^t ds\, [(\mathbb{F}(u_m), u_m)_0 - (\mathbb{L}u_m, u_m)_1]. \quad (2.7)$$

В силу условия (A_0) 3 в банаховом пространстве $\mathbb{V}_0$ можно выбрать норму, эквивалентную исходной:

$$\| v \|_0 = \langle \mathbb{A}_0 v, v\rangle_0^{1/2}. \quad (2.8)$$

С другой стороны, $\mathbb{V}_0 \hookrightarrow \mathbb{W}_0$ и $\left|(\mathbb{F}(u_m), u_m)_0\right| \leqslant \mathrm{B} \mid u_m \mid_0^{q+2}$. Из (2.7) в силу (2.8) следует, что

$$\frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, u_{m0}\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_{m0}), u_{m0}\rangle_j + \mathrm{B}2^{(q+2)/2}\mathrm{C}_1{}^{q+2}\times$$

$$\times \int_0^t ds \left(\frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j\right)^{(q+2)/2}. \quad (2.9)$$

Выведем теперь вторую априорную оценку. Умножим (2.3) на $c_{mk}^{'}$ и просуммируем по $k = \overline{1,m}$. В результате интегрирования обеих частей полученного равенства по $t \in (0, \mathrm{T}_m)$ получим

$$\int_0^t ds \left[\langle \mathbb{A}_0 u_m^{'}, u_m^{'}\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N}\langle (\mathbb{A}_j(u_m))^{'} u_m^{'}\rangle_j\right] +$$

$$+ \frac{1}{q+2}(\mathbb{F}(u_{m0}), u_{m0})_0 - \frac{1}{2}(\mathbb{L}u_{m0}, u_{m0})_1 =$$

$$= \frac{1}{q+2}(\mathbb{F}(u_m), u_m)_0 - \frac{1}{2}(\mathbb{L}u_m, u_m)_1 - \int_0^t ds\,\langle \mathbb{D}\mathbb{P}(u_m), u_m^{'}\rangle_0. \quad (2.10)$$

Введем обозначения

$$\Phi_m \equiv \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j, \quad \Phi_{m0} \equiv \Phi_m(0). \quad (2.11)$$

Из (2.9) получим

$$\Phi_m \leqslant \Phi_{m0} + \overline{\mathrm{B}} \int_0^t ds\, \Phi_m^{1+q/2}(s), \quad (2.12)$$

где

$$\overline{\mathrm{B}} \equiv 2^{(q+2)/2}\mathrm{B}\mathrm{C}_1^{q+2},$$

C_1 — константа наилучшего вложения $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$, B — константа из условия (F) 4. Из (2.12) и теоремы Бихари (см., например, [45]) следует

$$\Phi_m \leqslant \frac{\Phi_{m0}}{\left[1 - \frac{q}{2}\Phi_{m0}^{q/2}\overline{\mathrm{B}}t\right]^{2/q}}. \quad (2.13)$$

Поскольку $u_{m0} \to u_0$ сильно в $\mathbb{V}$, то выполнено неравенство $\Phi_{m0} \leqslant \mathrm{C}_0$ и константа C_0 не зависит от $m \in \mathbb{N}$. Далее возможны два случая для некоторой подпоследовательности последовательности $\{u_m\}$: либо $\Phi_{m0} \downarrow \Phi_0$, либо $\Phi_{m0} \uparrow \Phi_0$.

Рассмотрим сначала случай $\Phi_{m0} \uparrow \Phi_0$. Справедливы следующие неравенства:

$$1 - \overline{\mathrm{B}}\Phi_{m0}^{q/2}\frac{q}{2}t \geqslant 1 - \overline{\mathrm{B}}\Phi_0^{q/2}\frac{q}{2}t \ \ \forall\, t \in (0, \mathrm{T}_1), \ \ \mathrm{T}_1 = \overline{\mathrm{B}}^{-1}\frac{2}{q}\Phi_0^{-q/2},$$

$$\Phi_m \leqslant \mathrm{C}_1 \ \ \forall\, t \in (0, \mathrm{T}), \ \ \mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_1), \ \ \mathrm{T}_1 = \overline{\mathrm{B}}^{-1}\frac{2}{q}\Phi_0^{-q/2}, \qquad (2.14)$$

где C_1 не зависит от $m \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим теперь случай $\Phi_{m0} \downarrow \Phi_0$. Для любого $\overline{m} < m$ имеем

$$\Phi_{\overline{m}0} > \Phi_{m0}, \ \ 1 - \frac{q}{2}\overline{\mathrm{B}}\Phi_{m0}^{q/2}t \geqslant 1 - \overline{\mathrm{B}}\frac{q}{2}\Phi_{\overline{m}0}^{q/2}t.$$

И для любого $t \in [0, \overline{\mathrm{B}}^{-1}\frac{2}{q}\Phi_{\overline{m}0}^{-(q+1)})$ из (2.13) получим

$$\Phi_m \leqslant \frac{\mathrm{C}_0}{\left[1 - \frac{q}{2}\Phi_{\overline{m}0}^{q/2}\overline{\mathrm{B}}t\right]^{2/q}}.$$

Стало быть, для любого фиксированного T из интервала $(0, \mathrm{T}_1)$ найдется такое $\overline{m} \in \mathbb{N}$, что будет иметь место неравенство (2.14).

В силу условий теоремы при $\overline{p} \geqslant q + 2$ найдется такое $j^* \in \overline{1, N}$, что $\overline{p} = p_{j^*}$ и выполнено вложение $\mathbb{V}_{j^*} \subseteq \mathbb{W}_0$, причем справедливо следующее неравенство:

$$|\, v \,|_0 \leqslant \mathrm{C}_{j^*}\langle \mathbb{A}_{j^*}(v), v\rangle_{j^*}^{1/p_{j^*}} \ \ \forall\, v \in \mathbb{V}_{j^*}. \qquad (2.15)$$

Из (2.15) сразу же получаем, что

$$|\, v \,|_0^{q+2} \leqslant \mathrm{C}_{j^*}^{q+2}\left(\frac{p_{j^*}}{p_{j^*} - 1}\right)^{(q+2)/p_{j^*}} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 v, v\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N}\frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(v), v\rangle_j\right)^{(q+2)/p_{j^*}}. \qquad (2.16)$$

С учетом (2.7), (2.11), (2.15) и (2.16) приходим к выводу, что

$$\Phi_m \leqslant \Phi_{m0} + \mathrm{B}\mathrm{C}_{j^*}^{q+2}\left(\frac{p_{j^*}}{p_{j^*} - 1}\right)^{(q+2)/p_{j^*}}\int_0^t ds\, \Phi_m^{\alpha}(s), \ \ \alpha \equiv \frac{q+2}{p_{j^*}}. \qquad (2.17)$$

Рассмотрим два случая: $\alpha < 1$ и $\alpha = 1$. Воспользовавшись теоремами Гронуолла–Белмана–Бихари [Демидович], из (2.17) получим

$$\Phi_m \leqslant \left[\Phi_{m0}^{1-\alpha} + (1 - \alpha)\mathrm{C}_2 t\right]^{1/(1-\alpha)}, \ \ \alpha \in (0, 1), \qquad (2.18)$$

$$\Phi_m \leqslant \Phi_{m0} \exp\{C_2 t\}, \quad \alpha = 1, \tag{2.19}$$

где

$$C_2 \equiv BC_{j^*}^{q+2} \left(\frac{p_{j^*}}{p_{j^*} - 1} \right)^{(q+2)/p_{j^*}}.$$

В силу того что $u_{m0} \to u_0$ сильно в $\mathbb{V}$, имеем, что $\Phi_{m0} \leqslant C_0$ и константа C_0 не зависит от $m \in \mathbb{N}$. Поэтому получим

$$\Phi_{m0} \leqslant C_3 \ \ \forall\, T \geqslant 0, \ \ \forall\, \alpha \in (0, 1]. \tag{2.20}$$

Из условия (A) 3 и (2.12), (2.14), (2.20) следует, что

$$|\mathbb{F}(u_m)|_0 \leqslant B \mid u_m \mid_0^{q+1} \leqslant$$

$$\leqslant BC_1^{q+1} 2^{(q+1)/2} \left(\frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j \right)^{(q+1)/2} \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \Phi_m^{(q+1)/2} \leqslant C_{30},$$

где $0 < C_{30} < +\infty$ и постоянная C_{30} не зависит от $m \in \mathbb{N}$ для любого $T > 0$ в случае $\alpha_{j^*} \in (0, 1]$ и для любого $T \in (0, T_1)$, где постоянная T_1 определена формулой (2.16) при $\alpha > 1$. Теперь из (2.10) и условий (A) 2 и (A_0) 2 вытекает, что

$$m_0 \int_0^t ds \ \| u_m' \|_0^2 \leqslant \int_0^t ds \, \langle \mathbb{A}_0 u_m', u_m' \rangle_0 \leqslant C_{40},$$

где $0 < C_{40} < +\infty$ и постоянная C_{40} не зависит от $m \in \mathbb{N}$ для любого $T > 0$ в случае $\alpha_{j^*} \in (0, 1]$ и для любого $T \in (0, T_1)$, где постоянная T_1 определена формулой (2.14) в случае $\alpha > 1$.

Итак,

$$u_m \ \text{ограничено в } \ \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{V}), \quad u_m' \ \text{ограничено в } \ \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{V}_0),$$

$$\mathbb{A}_0 u_m \ \text{ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{V}_0^*), \ \ \mathbb{A}_j(u_m) \ \text{ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{V}_j^*),$$

$$\mathbb{F}(u_m) \ \text{ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^*), \ \ \mathbb{L} u_m \ \text{ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_1^*),$$

$$\mathbb{DP}(u_m) \ \text{ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{V}_0^*), \tag{2.21}$$

где указанные включения имеют место для любого $T > 0$ в случае $\alpha \in (0, 1]$ и для любого $T \in (0, T_1)$, где постоянная T_1 определена формулой (2.14) при $\alpha > 1$.

Лемма доказана.

В силу (2.21) найдется такая подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$, что

$$u_m \rightharpoonup u \ \ *-\text{слабо в } \ \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{V}), \ \ u_m' \rightharpoonup u' \ \ \text{слабо в } \ \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{V}_0). \tag{2.22}$$

Здесь следует заметить, что из $(2.22)_2$ вытекает, что

$$u_m^{'} \rightharpoonup u^{'} \text{ в } \mathcal{D}^{'}(0,\mathrm{T};\mathbb{V}).$$

Поэтому в силу слабой сходимости в $\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0)$ имеем:

$$u_m^{'} \rightharpoonup \eta.$$

Отсюда приходим к выводу, что $\eta(t) = u^{'}(t)$ для почти всех $t \in (0,\mathrm{T})$. Из (2.22) и компактного вложения $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$ получим, что для почти всех $t \in (0,\mathrm{T})$ имеем: $u_m(t) \to u(t)$ сильно в $\mathbb{W}_0$. С другой стороны, в силу условия (F) 1 имеем

$$| \mathbb{F}(u_m) - \mathbb{F}(u) |_0^* \leqslant \mu(\mathrm{R}) \, | u_m - u |_0 \to 0 \text{ при } m \to +\infty, \tag{2.23}$$

где $\mathrm{R} = \max\{| u |_0, | u_m |_0\}$. Из (2.23) вытекает сильная сходимость

$$\mathbb{F}(u_m)(t) \to \mathbb{F}(u)(t) \text{ в } \mathbb{W}_0^* \text{ для почти всех } t \in (0,\mathrm{T}). \tag{2.24}$$

Отметим теперь, что поскольку $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_1$ и $u_m \rightharpoonup u$ слабо в $\mathbb{V}$ для почти всех $t \in (0,\mathrm{T})$, то отсюда следует, что для некоторой подпоследовательности последовательности $\{u_m\}$ имеем: $u_m \to u$ сходится сильно в $\mathbb{W}_1$ для почти всех $t \in (0,\mathrm{T})$. Отсюда и из условия (L) 3 следует сильная сходимость $\mathbb{L}u_m \to \mathbb{L}u$ в $\mathbb{W}_1^*$ для почти всех $t \in (0,\mathrm{T})$. Нетрудно убедиться, что из условий (DP) вытекает сильная сходимость

$$\mathbb{DP}(u_m) \to \mathbb{DP}(u) \text{ в } \mathbb{V}_0^*$$

для почти всех $t \in (0,\mathrm{T})$.

Шаг 3. *Метод монотонности.*

Воспользуемся теперь методом монотонности. Напомним, что на шаге 2 мы получили предельные включения (2.22) и (2.24) и, кроме того,

$$\mathbb{A}(u_m) \rightharpoonup \chi \quad *-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{V}^*), \quad \mathbb{A}(u) \equiv \sum_{j=0}^{N} \mathbb{A}_j(u). \tag{2.25}$$

Для дальнейшего изложения нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть* $\mathbb{A}(u) \equiv \sum\limits_{j=0}^{\mathrm{N}} \mathbb{A}_j(u)$. *Тогда для некоторого* $\mathrm{T} > 0$ *найдется такая подпоследовательность последовательности* $\{u_m\}$, *что*

$$\mathbb{A}(u_m) \rightharpoonup \mathbb{A}(u) \; *-\textit{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{V}^*).$$

Кроме того, для некоторой подпоследовательности последовательности $\{u_m\}$ *имеем:*

$$u_m \to u \text{ сильно в } \mathbb{L}^{p_j}(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_j), \quad u_m \to u \text{ сильно в } \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0).$$

Доказательство.

Перепишем уравнение (2.2) в эквивалентном виде

$$\langle \mathbb{A}(u_m), w_j\rangle = \langle \mathbb{A}(u_{m0}), w_j\rangle + \int\limits_0^t ds \Bigg[(\mathbb{F}(u_m), w_j)_0 - \\ - (\mathbb{L}u_m, w_j)_1 - \langle \mathbb{D}\mathbb{P}(u_m), w_j\rangle_0 \Bigg], \quad (2.26)$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}^*$.

Зафиксируем $j \in \mathbb{N}$ и перейдем в уравнениии (2.26) к пределу при $m \to +\infty$, получим

$$\chi = \int\limits_0^t ds\, [\mathbb{F}(u) - \mathbb{L}u - \mathbb{D}\mathbb{P}(u)] + \mathbb{A}(u_0). \quad (2.27)$$

Пусть

$$0 \leqslant \mathbb{X}_\mu \equiv \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}(u_\mu) - \mathbb{A}(v), u_\mu - v\rangle = \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}(u_\mu), u_\mu\rangle - \\ - \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}(u_\mu), v\rangle - \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}(v), u_\mu - v\rangle,$$

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}(u_\mu), u_\mu\rangle = \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}(u_{\mu 0}), u_\mu\rangle + \\ + \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \int\limits_0^t ds \Bigg[(\mathbb{F}(u_\mu)(s), u_\mu(t))_0 - (\mathbb{L}u_\mu(s), u_\mu(t))_1 - \\ - \langle \mathbb{D}\mathbb{P}(u_\mu)(s), u_\mu(t)\rangle_0 \Bigg].$$

Отсюда получим, что

$$0 \leqslant \limsup_{\mu\to+\infty} \mathbb{X}_\mu \leqslant \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \int\limits_0^t ds\, [(\mathbb{F}(u)(s), u(t))_0 - (\mathbb{L}u(s), u(t))_1 -$$

$$- \langle \mathbb{DP}(u)(s), u(t)\rangle_0] + \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}(u_0), u\rangle - \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \chi, v\rangle -$$

$$- \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}(v), u - v\rangle = \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \chi - \mathbb{A}(v), u - v\rangle \geqslant 0. \quad (2.28)$$

Положим теперь $v = u - \lambda w$ для любых $v, w \in \mathbb{L}^r(0, \mathrm{T}; \mathbb{V})$, $\lambda > 0$, $u \in$ $\in \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}) \subset \mathbb{L}^r(0, \mathrm{T}; \mathbb{V})$, $\chi, \mathbb{A}(v) \in \mathbb{L}^{r'}(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}^*)$, $r > 1$, $r' = \dfrac{r}{r-1}$. В силу (2.28) справедливо следующее неравенство:

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \chi - \mathbb{A}(u - \lambda w), w\rangle \geqslant 0\,,$$

из которого в силу полунепрерывности каждого из операторов $\mathbb{A}_j(v)$, $j = \overline{0, N}$, получим

$$\chi = \mathbb{A}(u).$$

С другой стороны, в силу (2.27)

$$\limsup_{\mu \to +\infty} \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}_j(u_\mu), u_\mu\rangle_j \leqslant$$

$$\leqslant - \liminf_{\mu \to +\infty} \sum_{k=0, k\neq j}^{N} \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}_k(u_\mu), u_\mu\rangle_k + \limsup_{\mu \to +\infty} \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}(u_\mu), u_\mu\rangle \leqslant$$

$$\leqslant - \sum_{k=0, k\neq j}^{N} \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}_k(u), u\rangle_k + \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}(u), u\rangle = \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}_j(u), u\rangle_j\,, \quad (2.29)$$

где мы воспользовались тем, что каждый из операторов $\mathbb{A}_j(v)$, $j = \overline{0, N}$, в силу условий (A_0) 4 и (A) 4 порождает нормы рефлексивных банаховых пространств: $\mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_0)$ и $\mathbb{L}^{p_j}(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_j)$, эквивалентные исходным в силу условий (A_0) 3 и (A) 3, по следующим формулам:

$$\left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0\right)^{1/2}, \quad \left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbb{A}_j(u), u\rangle_j\right)^{1/p_j}.$$

Наконец, в силу слабой сходимости $u_\mu \rightharpoonup u$ в $\mathbb{L}^{p_j}(0, \mathrm{T}; \mathbb{V})$, $j = \overline{0, N}$, и того, что операторы $\mathbb{A}_j(v)$, $j = \overline{0, N}$, по указанным выше правилам

порождают нормы рефлексивных банаховых пространств, имеем

$$\liminf_{m\to+\infty}\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \mathbb{A}_j(u_m),u_m\rangle_j \geqslant \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \mathbb{A}_j(u),u\rangle_j\,. \tag{2.30}$$

Из (2.29) и (2.30) следует, что

$$\lim_{m\to+\infty}\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \mathbb{A}_j(u_m),u_m\rangle_j = \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \mathbb{A}_j(u),u\rangle_j\,. \tag{2.31}$$

Теперь в силу условий (A) 3 имеем

$$\left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \mathbb{A}_j(u),u\rangle_j\right)^{1/p_j}, \quad \left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \mathbb{A}_0u,u\rangle_0\right)^{1/2}$$

— эквивалентные нормы исходным нормам

$$\left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\ \|\ u\ \|_j^{p_j}\right)^{1/p_j}, \quad \left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\ \|\ u\ \|_0^2\right)^{1/2}$$

банаховых пространств $\mathbb{L}^{p_j}(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_j)$. Поэтому из (2.31) следует существование подпоследовательности последовательности $\{u_m\}$ такой, что

$$\left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \mathbb{A}_j(u_m),u_m\rangle_j\right)^{1/p_j} \to \left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\langle \mathbb{A}_j(u),u\rangle_j\right)^{1/p_j}, \quad j=\overline{1,N},$$

$$\left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \mathbb{A}_0u_m,u_m\rangle_0\right)^{1/2} \to \left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \mathbb{A}_0u,u\rangle_0\right)^{1/2}.$$

С другой стороны,

$$u_m \rightharpoonup u \ \text{ слабо в } \mathbb{L}^{p_j}(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_j), \quad j=\overline{0,N},$$

значит, найдется такая подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$, что $u_m\to u$ сильно в каждом $\mathbb{L}^{p_j}(0,\mathrm{T};\mathbb{V}_j)$, $j=\overline{0,N}$.

Лемма доказана.

Шаг 4. *Предельный переход и единственность.*

Из предельных выражений (2.22), (2.24) и (2.25) вытекает возможность перехода к пределу при $m\to+\infty$ в уравнении (2.26). Далее, почти дословно повторяя рассуждения при доказательстве шага 4 теоремы 1 четвертой главы, можно доказать, что $u(t)$ является единственным решением задачи (2.1). Кроме того,

$$\mathbb{A}(u)\in\mathbb{H}^1(0,\mathrm{T};\mathbb{V}^*)\cap\mathbb{C}_w^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{V}^*).$$

Шаг 5. *Разрушение решений.*
Справедлива следующая лемма.
Лемма 3. *Пусть*

$$\Phi \equiv \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0 + \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u), u\rangle_j, \quad \alpha \equiv \frac{q+2}{\overline{p}}, \quad \overline{p} \equiv \max_{j=\overline{1,N}} p_j,$$

и $(\mathbb{F}(v), v)_0 \geqslant c > 0$ *для всех* $v \in \mathbb{W}_0$, $|v|_0 = 1$. *Тогда*
1) *если* $\alpha \in (0,1)$, *то* $\mathrm{T}_0 = +\infty$ *и имеет место неравенство*

$$\Phi \leqslant \Phi_0 \left[1 + (1-\alpha)\mathrm{C}_2 \Phi_0^{\alpha-1} t\right]^{1/(1-\alpha)};$$

2) *если* $\alpha = 1$, *то* $\mathrm{T}_0 = +\infty$ *и имеет место неравенство*

$$\Phi \leqslant \Phi_0 \exp(\mathrm{C}_2 t);$$

3) *если* $\alpha > 1$ *и выполнено условие*

$$\Phi'(0) > \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha_1 - 1}}\,\Phi(0) + \frac{\beta}{\alpha_1 - 1}\Phi_0,$$

то найдется такое $\mathrm{T}_0 \in [\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2]$, *что справедливо предельное равенство*

$$\lim_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \Phi(t) = +\infty,$$

где

$$\mathrm{T}_1 = \frac{2}{q}\Phi_0^{-q/2}\overline{\mathrm{B}}^{-1}, \quad \mathrm{T}_2 = \Phi_0^{1-\alpha}\mathrm{A}^{-1}, \quad \mathrm{C}_2 \equiv \mathrm{B}\mathrm{C}_{j^*}^{q+2}\left(\frac{\overline{p}}{\overline{p}-1}\right)^{\alpha},$$

$$|v|_0 \leqslant \mathrm{C}_{j^*}\langle \mathbb{A}_{j^*} v, v\rangle_{j^*}^{1/p_{j^*}},$$

$$\Phi_0 \equiv \Phi(0), \quad \Phi'(0) \equiv (\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 - (\mathbb{L}u_0, u_0)_1,$$

$$\alpha_1 \equiv \frac{\overline{p}+q+2}{2\overline{p}}, \quad \beta \equiv \frac{(q+2)(q+1)}{q+2-\overline{p}}, \quad \gamma \equiv \frac{4(q+1)^2}{q+2-\overline{p}},$$

$$q+2 > \overline{p} \equiv \max_{j=\overline{1,n}} p_j,$$

$$\mathrm{A}^2 \equiv (\alpha_1 - 1)^2 \Phi_0^{-2\alpha_1}\left[\left(\Phi'(0) - \frac{\beta}{\alpha_1 - 1}\Phi_0\right)^2 - \frac{\gamma}{\alpha_1 - 1}\Phi^2(0)\right],$$

$$\overline{\mathrm{B}} = \mathrm{B}2^{q+2}\mathrm{C}_1^{q+2},$$

C_1 — *константа наилучшего вложения* $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$, B — *константа из условия* (F) 4.

Доказательство.

В силу условий (A) 2 справедливо неравенство Шварца [Морен] для производных Фреше $\mathbb{A}'_{j,u} : \mathbb{V}_j \to \mathcal{L}(\mathbb{V}_j; \mathbb{V}_j^*)$ операторов $\mathbb{A}_j : \mathbb{V}_j \to \mathbb{V}_j^*$:

$$\left|\langle (\mathbb{A}_j(u_m))', u_m\rangle_j\right| = \left|\langle \mathbb{A}'_{j,u_m}(u_m)u'_m, u_m\rangle_j\right| \leqslant$$

$$\leqslant \langle \mathbb{A}'_{j,u_m}(u_m)u'_m, u'_m\rangle_j^{1/2}\langle \mathbb{A}'_{j,u_m}(u_m)u_m, u_m\rangle_j^{1/2} =$$
$$= \langle (\mathbb{A}_j(u_m))', u'_m\rangle_j^{1/2}(p_j-1)^{1/2}\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j^{1/2}, \quad (2.32)$$

$$\left|\langle \mathbb{A}_0 u'_m, u_m\rangle_0\right| \leqslant \langle \mathbb{A}_0 u'_m, u'_m\rangle_0^{1/2}\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle_0^{1/2}. \quad (2.33)$$

Здесь мы воспользовались следующим равенством:

$$\mathbb{A}'_{j,v}(v)v = (p_j-1)\mathbb{A}_j(v).$$

Приведем его вывод. Действительно, имеют место следующие равенства:

$$\mathbb{A}_j(\rho v) = \rho^{p_j-1}\mathbb{A}_j(v), \quad \mathbb{A}'_{j,\rho v}(\rho v)\rho = \rho^{p_j-1}\mathbb{A}'_{j,v}(v),$$
$$\mathbb{A}'_{j,\rho v}(\rho v) = \rho^{p_j-2}\mathbb{A}'_{j,v}(v), \quad j=\overline{0,N},$$
$$\int_0^1 d\rho \left\langle \frac{d}{d\rho}\mathbb{A}_j(\rho v), w\right\rangle_j = \left\langle \int_0^1 d\rho\, \mathbb{A}'_{j,\rho v}(\rho v)v, w\right\rangle_j \ \forall\ w\in\mathbb{V}_j, \quad j=\overline{0,N},$$
$$\langle \mathbb{A}_j(v) - (p_j-1)^{-1}\mathbb{A}'_{j,v}(v)v, w\rangle_j = 0 \ \forall\ w\in\mathbb{V}_j, \quad j=\overline{0,N}.$$

Значит, справедливо операторное равенство

$$(p_j-1)\mathbb{A}_j(v) = \mathbb{A}'_{j,v}(v)v \ \forall\ v\in\mathbb{V}_j,\ j=\overline{0,N}.$$

Введем следующее обозначение:

$$\Phi_m \equiv \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j-1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j. \quad (2.34)$$

Из (2.32)–(2.34) вытекает, что

$$\left|\frac{d}{dt}\Phi_m\right|^2 \leqslant \left|\left|\langle \mathbb{A}_0 u'_m, u_m\rangle_0\right| + \sum_{j=1}^N \left|\langle (\mathbb{A}_j(u_m))', u_m\rangle_j\right|\right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \left(\langle \mathbb{A}_0 u'_m, u'_m\rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle (\mathbb{A}_j(u_m))', u'_m\rangle_j\right)\times$$
$$\times \left(\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m\rangle_0 + \sum_{j=1}^N (p_j-1)\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m\rangle_j\right) \leqslant$$
$$\leqslant \overline{p}\left(\langle \mathbb{A}_0 u'_m, u'_m\rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle (\mathbb{A}_j(u_m))', u'_m\rangle_j\right)\times$$

$$\times \left(\frac{1}{\overline{p}} \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{\overline{p}} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j \right) \leqslant$$

$$\leqslant \overline{p} \left(\langle \mathbb{A}_0 u_m^{'}, u_m^{'} \rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \langle (\mathbb{A}_j(u_m))^{'}, u_m^{'} \rangle_j \right) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j \right), \quad (2.35)$$

где $\overline{p} = \max\limits_{j=1,N} p_j > 2$.

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. *Пусть выполнены условия* (L) *и* (A_0) *и, кроме того,* $\mathbb{V}_0 \subset \mathbb{W}_1$, *тогда справедливо неравенство*

$$(\mathbb{L}u, u)_1 \leqslant \mathrm{C} \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0 \ \ \forall\, u \in \mathbb{V}_0$$

при некотором $\mathrm{C} > 0$.

Доказательство.

Действительно, пусть $u \in \mathbb{V}_0 \subset \mathbb{W}_1$, тогда справедлива следующая цепочка неравенств:

$$(\mathbb{L}u, u)_1 \leqslant \mathrm{D}_1 \mid u \mid_1^2 \leqslant \mathrm{D}_1 \mathrm{C}_1 \parallel u \parallel_0^2 \leqslant \mathrm{D}_1 \mathrm{C}_1 \mathrm{m}_0^{-1} \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0 = \mathrm{C} \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0.$$

Утверждение доказано.

Без ограничения общности можно считать постоянную C в утверждении 2 равной 1. Действительно, введем новые операторы

$$\widetilde{\mathbb{L}} \equiv \mathrm{C}^{-1} \mathbb{L}, \ \ \widetilde{\mathbb{F}} \equiv \mathrm{C}^{-1} \mathbb{F}$$

и, кроме того, сделаем замену $\widetilde{t} \equiv \mathrm{C}t$. Тогда для введенных операторов будет иметь место утверждение 2 с постоянной $\mathrm{C} = 1$.

В силу утверждения 2 и неравенства Гёльдера справедливо следующее неравенство:

$$\left(\mathbb{L}u_m, u_m^{'} \right)_1 \leqslant (\mathbb{L}u_m, u_m)_1^{1/2} \left(\mathbb{L}u_m^{'}, u_m^{'} \right)_1^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon_0}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_m^{'}, u_m^{'} \rangle_0 + \frac{1}{2\varepsilon_0} \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0. \quad (2.36)$$

В силу утверждения 1 и неравенства Гёльдера справедливо следующее неравенство:

$$\langle \mathbb{D}\mathbb{P}(u_m), u_m^{'} \rangle_0 \leqslant \langle \mathbb{A}_0 u_m^{'}, u_m^{'} \rangle_0^{1/2} \left(\mathbb{F}(u_m), u_m \right)_0^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon_0}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_m^{'}, u_m^{'} \rangle_0 + \frac{1}{2\varepsilon_0} \left(\mathbb{F}(u_m), u_m \right)_0. \quad (2.37)$$

Введем следующее обозначение:

$$\mathbb{J}_m \equiv \langle \mathbb{A}_0 u_m^{'}, u_m^{'} \rangle_0 + \sum_{j=1}^{n} \langle \left(\mathbb{A}_j(u_m)\right)^{'}, u_m^{'} \rangle_j \,.$$

Тогда из энергетических равенств (2.6), (2.10) с учетом неравенств (2.36), (2.37) для функции $\mathbb{J}_m$ вытекает цепочка неравенств

$$\begin{aligned}
\mathbb{J}_m \leqslant & -\left(\mathbb{L}u_m, u_m^{'}\right)_1 + \frac{\varepsilon_0}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_m^{'}, u_m^{'}\rangle_0 + \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\mathbb{F}(u_m), u_m\right)_0 + \\
& + \frac{1}{q+2}\Phi_m^{''} + \frac{2}{q+2}\left(\mathbb{L}u_m, u_m^{'}\right)_1 \leqslant \\
\leqslant & -\frac{q}{q+2}\left(\mathbb{L}u_m, u_m^{'}\right)_1 + \frac{\varepsilon_0}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_m^{'}, u_m^{'}\rangle_0 + \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\mathbb{F}(u_m), u_m\right)_0 + \\
& + \frac{1}{q+2}\Phi_m^{''} \leqslant -\frac{q}{q+2}\left(\mathbb{L}u_m, u_m^{'}\right)_1 + \frac{\varepsilon_0}{2}\mathbb{J}_m + \frac{1}{q+2}\Phi_m^{''} + \\
& + \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\mathbb{L}u_m, u_m\right)_1 + \frac{1}{2\varepsilon_0}\Phi_m^{'} \leqslant \frac{1}{q+2}\Phi_m^{''} + \frac{1}{2\varepsilon_0}\Phi_m^{'} + \\
& + \frac{2}{\varepsilon_0}\frac{q+1}{q+2}\Phi_m + \frac{q+1}{q+2}\varepsilon_0 \mathbb{J}_m. \qquad (2.38)
\end{aligned}$$

Из (2.38) вытекает следующее неравенство:

$$\left[1 - \frac{q+1}{q+2}\varepsilon_0\right]\mathbb{J}_m \leqslant \frac{1}{q+2}\Phi_m^{''} + \frac{1}{2\varepsilon_0}\Phi_m^{'} + \frac{2}{\varepsilon_0}\frac{q+1}{q+2}\Phi_m. \qquad (2.39)$$

Из (2.35) и (2.39) вытекает обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка (см. [Кулантаров, Ладыженская])

$$\Phi_m \Phi_m^{''} - \alpha_1 \left(\Phi^{'}\right)^2 + \beta \Phi_m \Phi_m^{'} + \gamma \Phi_m^2 \geqslant 0, \qquad (2.40)$$

где

$$\alpha_1 \equiv \frac{q+2}{\overline{p}}\left[1 - \frac{q+1}{q+2}\varepsilon_0\right], \quad \beta = \frac{q+2}{2\varepsilon_0}, \quad \gamma = \frac{2q+2}{\varepsilon_0}.$$

Потребуем, чтобы $\varepsilon_0 \in (0, (q+2-\overline{p})(q+1)^{-1})$, тогда $\alpha_1 > 1$. Рассмотрим теперь детально неравенство (2.40). Данное неравенство нетрудно привести к следующему линейному дифференциальному неравенству

$$\mathbb{Z}_m^{''} + \beta \mathbb{Z}_m^{'} - \delta \mathbb{Z}_m \leqslant 0, \quad \delta = \gamma(\alpha_1 - 1), \qquad (2.41)$$

относительно новой функции

$$\mathbb{Z}_m = \Phi_m^{1-\alpha_1}. \qquad (2.42)$$

Перейдем теперь к новой функции

$$\mathbb{Y}_m \equiv \mathbb{Z}_m e^{\beta t} \qquad (2.43)$$

в уравнении (2.41), тогда с учетом (2.42) получим следующее неравенство:

$$\mathbb{Y}_m^{''} - \beta \mathbb{Y}_m^{'} - \delta \mathbb{Y}_m \leqslant 0. \tag{2.44}$$

Из (2.43) следует, что

$$\mathbb{Y}_m^{'} = e^{\beta t}(\alpha_1 - 1)\Phi_m^{-\alpha_1}\left(-\Phi_m^{'} + \frac{\beta}{\alpha_1 - 1}\Phi_m\right). \tag{2.45}$$

Потребуем выполнения условий

$$\Phi^{'}(0) > \frac{\beta}{\alpha_1 - 1}\Phi(0), \;\; \Phi(t) \equiv \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u), u\rangle_j \,. \tag{2.46}$$

Тогда, переходя, если нужно, к подпоследовательности, получим, что

$$\Phi_m^{'}(0) > \frac{\beta}{\alpha_1 - 1}\Phi_m(0). \tag{2.47}$$

В силу непрерывной дифференцируемости функции $\mathbb{Y}_m$ из условия (2.47) с учетом (2.45) приходим к выводу, что найдется такой интервал $[0, \mathrm{T}_{3m})$, принадлежащий области определения $\Phi_m(t)$, что $\mathbb{Y}_m^{'} \leqslant 0$. Следовательно, при $t \in [0, \mathrm{T}_{3m}]$ величина $-\beta \mathbb{Y}_m^{'}(t) \geqslant 0$. Отсюда и из неравенства (2.44) получим следующее дифференциальное неравенство:

$$\mathbb{Y}_m^{''} - \delta \mathbb{Y}_m \leqslant 0 \;\text{ при }\; t \in [0, \mathrm{T}_{3m}]. \tag{2.48}$$

Потребуем выполнения следующего неравенства:

$$\Phi^{'}(0) > \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha_1 - 1}}\Phi(0) + \frac{\beta}{\alpha_1 - 1}\Phi(0). \tag{2.49}$$

Тогда, переходя, если нужно, к подпоследовательности, получим неравенство

$$\Phi_m^{'}(0) > \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha_1 - 1}}\Phi_m(0) + \frac{\beta}{\alpha_1 - 1}\Phi_m(0). \tag{2.50}$$

Из неравенства (2.48) вытекает

$$\left(\mathbb{Y}_m^{'}\right)^2 \geqslant \delta \mathbb{Y}_m^2 + \mathbb{A}_m^2, \tag{2.51}$$

причем в силу (2.50) имеем

$$\mathrm{A}_m^2 \equiv (1 - \alpha_1)^2 \Phi_m^{-2\alpha_1}(0)\left[\left(\Phi_m^{'}(0) - \frac{\beta}{\alpha_1 - 1}\Phi_m(0)\right)^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{\delta}{(\alpha_1 - 1)^2}(\Phi_m(0))^2\right] > 0.$$

Из (2.51) получим

$$\mathbb{Y}_m^{'}(t) \leqslant -\mathrm{A}_m \;\; \forall\, t \in [0, \mathrm{T}_{3m}]. \tag{2.52}$$

Из (2.52) вытекает, что на области определения функции $\Phi_m(t)$ величина $\mathbb{Y}_m' < 0$, откуда и из (2.52) имеем

$$\mathbb{Y}_m(t) \leqslant \mathbb{Y}_{m0} - \mathrm{A}_m t.$$

Стало быть, найдется такой момент времени $\mathrm{T}_{m0} \in (0, \mathrm{T}_{2m})$, что

$$\limsup_{t \uparrow \mathrm{T}_{m0}} \Phi_m(t) = +\infty,$$

где $\mathrm{T}_{2m} = \mathbb{Y}_m(0)\mathrm{A}_m^{-1}$.

Рассмотрим отдельно условия (2.46) и (2.49). Заметим, что у нас имеется произвол в выборе $\varepsilon_0 \in (0, (q+2-\overline{p})(q+1)^{-1})$. Теперь в качестве ε_0 выберем точку минимума функций

$$f_1 = \frac{\beta}{\alpha_1 - 1}, \quad f_2 = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha_1 - 1}}.$$

Нетрудно убедиться, что минимум достигается в точке

$$\varepsilon_0 = \frac{q+2-\overline{p}}{2q+2}.$$

Из (2.40) вытекает оценка снизу для функции $\Phi_m(t)$:

$$\Phi_m \geqslant \frac{\Psi_{m0} e^{-\vartheta t}}{[\mathrm{T}_{2m} - t]^{1/(\alpha_1 - 1)}}, \tag{2.53}$$

где

$$\mathrm{T}_{2m} \equiv \Phi_{m0}^{1-\alpha_1}\mathrm{A}_m^{-1}, \quad \Psi_{m0} = \mathrm{A}_m^{1/(1-\alpha_1)}, \quad \vartheta = \frac{\beta}{\alpha_1 - 1}.$$

Докажем теперь, что $\Phi_m(t) \to \Phi(t)$ для почти всех $t \in (0, \mathrm{T})$, где

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u), u\rangle_j .$$

С одной стороны, в силу того что $u_m \to u$ сильно в $\mathbb{L}^{p_j}(0, \mathrm{T}; \mathbb{V}_j)$, имеем

$$\int_0^t ds\, \Phi_m(s) \to \int_0^t ds\, \Phi(s).$$

С другой стороны, из (2.36) получим

$$\Phi_m = \Phi_{m0} + \int_0^t ds\, [(\mathbb{F}(u_m), u_m)_0(s) - (\mathbb{L}u_m, u_m)_1(s)].$$

По условию $\Phi_{m0} \to \Phi_0$, $u_m(t) \to u(t)$ сильно в $\mathbb{W}_0$ и в $\mathbb{W}_1$ для почти всех $t \in (0, \mathrm{T})$, поэтому в силу ограниченной липшиц-непрерывности оператора $\mathbb{F}(u) : \mathbb{W}_0 \to \mathbb{W}_0^*$ и липшиц-непрерывности $\mathbb{L} : \mathbb{W}_1 \to \mathbb{W}_1^*$

приходим к выводу, что $\mathbb{F}(u_m) \to \mathbb{F}(u)$ сильно в $\mathbb{W}_0^*$ и $\mathbb{L}u_m \to \mathbb{L}u$ сильно в $\mathbb{W}_1^*$ для почти всех $t \in (0, \mathrm{T})$. С другой стороны, понятно, что $\left|(\mathbb{F}(u_m), u_m)_0\right| \leqslant \mathrm{B} \mid u_m \mid_0^{q+2} \leqslant \mathrm{C} \parallel u_m \parallel_{\mathbb{V}}^{q+2} \leqslant \mathrm{C}$, где C не зависит от $m \in \mathbb{N}$ и от $t \in (0, \mathrm{T})$, а также $(\mathbb{L}u_m, u_m)_1 \leqslant \mathrm{D}_1 \mid u_m \mid_1^2 \leqslant \mathrm{C} \parallel u_m \parallel_{\mathbb{V}}^2 \leqslant \mathrm{C}$, где C не зависит от $m \in \mathbb{N}$ и от $t \in (0, \mathrm{T})$. Поэтому по теореме Лебега [Дьяченко] получим, что для почти всех $t \in (0, \mathrm{T})$

$$\Phi_m \to \eta.$$

И снова по теореме Лебега получим

$$\int_0^t ds\, \Phi_m \to \int_0^t ds\, \eta.$$

Значит,

$$\int_0^t ds\ [\Phi(s) - \eta(s)] = 0 \ \ \forall\, t \in (0, \mathrm{T})$$

отсюда сразу же получаем, что

$$\Phi_m(t) \to \Phi(t) \tag{2.54}$$

для почти всех $t \in (0, \mathrm{T})$.

С учетом того что $u_{m0} \to u_0$ сильно в $\mathbb{V}$, имеем при $m \to +\infty$

$$\Psi_{m0} \to \Psi_0 \equiv \mathrm{A}_0^{1/(\alpha_1 - 1)},$$

$$\Phi_{m0} \to \Phi_0 \equiv \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0\rangle_j\,.$$

Из (2.54), переходя к пределу при $m \to +\infty$ в неравенствах (2.18), (2.19), получим, что

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 \exp\{\mathrm{C}_2 t\}, \ \ \alpha = 1, \tag{2.55}$$

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 \left[1 + (1 - \alpha)\mathrm{C}_2 \Phi_0^{\alpha - 1} t\right]^{1/(1-\alpha)}, \ \alpha < 1, \tag{2.56}$$

где

$$\alpha \equiv \frac{q+2}{\overline{p}}, \ \ \mathrm{C}_2 \equiv \mathrm{B}\mathrm{C}_{j^*}^{q+2} \left(\frac{\overline{p}}{\overline{p} - 1}\right)^{(q+2)/\overline{p}},$$

$$\mid v \mid_0 \leqslant \mathrm{C}_{j^*} \langle \mathbb{A}_{j^*}(v), v\rangle_{j^*}^{1/p_{j^*}}, \ \ \overline{p} = \max_{j=1,N} p_j.$$

Рассмотрим теперь неравенства (2.13) и (2.53). Отметим, что при $m \to +\infty$

$$\Psi_{m0} \to \Psi_0 \equiv \mathrm{A}^{1/(\alpha_1 - 1)}, \ \ \mathrm{T}_{2m} \to \mathrm{T}_2 \equiv \Phi_0^{1-\alpha_1} \mathrm{A}^{-1},$$

$$\mathrm{T}_{1m} \to \mathrm{T}_1 = \frac{2}{q}\Phi_0^{-q/2)}\overline{\mathrm{B}}^{-1},$$
$$\overline{\mathrm{B}} \equiv \mathrm{B}2^{(q+2)/2}\mathrm{C}_1^{q+2},$$

где C_1 — константа наилучшего вложения $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$, B — константа из условия (F) 4.

Рассмотрим сначала неравенство (2.53).

Без ограничения общности переходом к подпоследовательности мы можем считать последовательность T_{2m} большей нуля равномерно по m, поскольку $\mathrm{T}_2 > 0$. В силу сходимости последовательности $\mathrm{T}_{2m} \to \mathrm{T}_2$ при $m \to +\infty$ мы можем выбрать монотонно сходящуюся подпоследовательность, которую мы снова обозначим через T_{2m}. Соотвествующие подпоследовательности последовательностей $\{u_{0m}\}$ и $\{u_m\}$ мы снова будем обозначать $\{u_{0m}\}$ и $\{u_m\}$. Пусть последовательность $\mathrm{T}_{2m} \uparrow \mathrm{T}_2$, тогда неравенство (2.41) имеет место равномерно по $t \in [0, \mathrm{T}_{2\overline{m}})$, $m \geqslant \overline{m}$ для некторого фиксированного $\overline{m} \in \mathbb{N}$. Переходом к пределу при $m \to +\infty$ для таких t в неравенстве (2.53) получим

$$\Phi \geqslant \frac{\Psi_0 e^{-\vartheta t}}{[\mathrm{T}_2 - t]^{1/(\alpha_1 - 1)}}, \quad \vartheta = \frac{\beta}{\alpha_1 - 1} \tag{2.57}$$

при $t \in [0, \mathrm{T}_{2\overline{m}})$. Отсюда в силу произвольности $\overline{m} \in \mathbb{N}$ сразу же получаем, что (2.57) справедливо для всех $t \in [0, \mathrm{T}_2)$ и время разрушения решения задачи (2.1) удовлетворяет оценке сверху: $\mathrm{T}_0 \leqslant \mathrm{T}_2$.

Пусть теперь последовательность $\mathrm{T}_{2m} \downarrow \mathrm{T}_2$. Сделаем предположение о том, что $\mathrm{T}_0 > \mathrm{T}_2$ и $M \equiv \sup\limits_{t \in [0, T_2]} \Phi(t) < +\infty$. Тогда (2.53) имеет место равномерно по $t \in [0, \mathrm{T}_2)$. Переходом к пределу при $m \to +\infty$ в неравенстве (2.53) получим следующее неравенство:

$$\Phi \geqslant \frac{\Psi_0 e^{-\vartheta t}}{[\mathrm{T}_2 - t]^{1/(\alpha - 1)}} \leqslant M < +\infty \ \text{ при } \ t \in [0, \mathrm{T}_2), \ \ \vartheta = \frac{\beta}{\alpha - 1}.$$

Однако из полученного неравенства следует, что наше предположение не выполняется. Отсюда сразу же вытекает, что $\mathrm{T}_0 \leqslant \mathrm{T}_2$. Аналогичным образом из неравенства (2.13) получаем, что

$$\Phi(t) \leqslant \frac{\Phi_0}{\left[1 - \frac{q}{2}\Phi_0^{q/2}\overline{\mathrm{B}}t\right]^{2/q}} \ \ \forall\, t \in (0, \mathrm{T}_1), \ \ \mathrm{T}_0 \geqslant \mathrm{T}_1.$$

Теорема доказана.

§ 3. Однозначная разрешимость задачи (1.1) в сильном обобщенном смысле и разрушение ее решения

Определение 2. Сильным обобщенным решением задачи (1.1) называется решение класса $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0)$, удовлетворяющее условиям

$$\langle(\mathbb{A}_0u)',v\rangle_0+\sum_{j=1}^{N}\langle(\mathbb{A}_j(u))',v\rangle_j+\langle\mathbb{DP}(u),v\rangle_0+(\mathbb{L}u,v)_1=(\mathbb{F}(u),v)_0$$

$$\forall\ v\in\mathbb{V}_0,\ t\in[0,\mathrm{T}],$$

$$u(0)=u_0\in\mathbb{V}_0,$$

где производная по времени понимается в классическом смысле.

В предположении, что производная Фреше $\mathbb{A}'_{j,u}(u):\mathbb{V}_j\to\mathcal{L}(\mathbb{V}_j;\mathbb{V}_j^*)$, оператора $\mathbb{A}_j$ является сильно непрерывной по $u\in\mathbb{V}_j$ получаем в силу условий нижеследующей теоремы, что в рассматриваемом классе имеют место включения: $\mathbb{A}_0u\in\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0^*)$, $\mathbb{A}_j(u)\in\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T};\mathbb{V}_j^*)$, $\mathbb{DP}(u)\in\mathbb{C}([0,\mathrm{T};\mathbb{W}_4)$, $\mathbb{L}u\in\mathbb{C}([0,\mathrm{T};\mathbb{W}_1^*)$, $\mathbb{F}(u)\in\mathbb{C}([0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^*)$ и $\mathbb{A}_0u$, $\mathbb{A}_j(u)$ принадлежат классу $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0^*)$, а $\mathbb{DP}(u)$, $\mathbb{L}u$, $\mathbb{F}(u)$ принадлежат классу $\mathbb{C}([0,\mathrm{T};\mathbb{V}_0^*)$. Тем самым задача, в силу условий нижеследующей теоремы 2, эквивалентна следующей задаче:

$$\langle(\mathbb{A}_0u)',v\rangle_0+\sum_{j=1}^{N}\langle(\mathbb{A}_j(u))',v\rangle_0+\langle\mathbb{DP}(u),v\rangle_0+\langle\mathbb{L}u,v\rangle_0=\langle\mathbb{F}(u),v\rangle_0$$

$$\forall\ \ v\in\mathbb{V}_0,\ t\in[0,\mathrm{T}],$$

$$u(0)=u_0\in\mathbb{V}_0,$$

где производная по времени понимается в классическом смысле, а через $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ обозначена скобка двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{V}_0$ и $\mathbb{V}_0^*$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (A), (A_0), (F), (L), (DP). *Предположим, что* $\mathbb{V}_0\subseteq\mathbb{V}_j$, $j=\overline{1,N}$, $\mathbb{V}_0\subseteq\mathbb{W}_0\subseteq\mathbb{W}_2$, $\mathbb{V}_0\subseteq\mathbb{W}_1$ *и пусть либо* $\overline{p}<q+2$, *либо* $\overline{p}\geqslant q+2$ *и в последнем случае имеет место вложение* $\mathbb{V}_{j^*}\subseteq\mathbb{W}_0$, *где*

$$\overline{p}=\max_{j=1,N}p_j,\ \ \overline{p}=p_{j^*}.$$

Пусть производные Фреше операторов $\mathbb{A}_j:\mathbb{V}_j\to\mathbb{V}_j^*$

$$\mathbb{A}'_{j,u}(\cdot):\mathbb{V}_j\to\mathcal{L}\left(\mathbb{V}_j,\mathbb{V}_j^*\right)$$

и являются монотонными в том смысле, что

$$\langle\mathbb{A}'_{j,u}(u)u_1-\mathbb{A}'_{j,u}(u)u_2,u_1-u_2\rangle_j\geqslant 0\ \ \forall\ \ u,u_1,u_2\in\mathbb{V}_j,\ \ j=\overline{1,N},$$

и, кроме того, эти производные

$$\mathbb{A}_{j,u}^{'}(\cdot) \in \mathbb{BC}\left(\mathbb{V}_0; \mathcal{L}(\mathbb{V}_0; \mathbb{V}_0^*)\right),$$

т. е. являются непрерывными и ограниченными. Пусть $(\mathbb{F}(v), v)_0 \geqslant \geqslant c > 0$ *для всех* $v \in \mathbb{W}_0$, $|v|_0 = 1$. *Тогда для любого* $u_0 \in \mathbb{V}_0$ *найдется такое максимальное* $\mathrm{T}_0 \equiv \mathrm{T}_{u_0} > 0$, *что задача Коши* (1.1) *имеет единственное решение класса*

$$u(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{V}_0).$$

Причем справедливы следующие результаты для разных значений $\alpha = (q+2)/\overline{p}$, $\overline{p} = \max\limits_{j=\overline{1,n}} p_j$:

1) *если* $\alpha \in (0,1)$, *то* $\mathrm{T}_0 = +\infty$, *и тогда*

$$\Phi(t) \leqslant \left[\Phi_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\overline{\mathrm{A}}t\right]^{1/(1-\alpha)};$$

2) *если* $\alpha = 1$, *то* $\mathrm{T}_0 = +\infty$, *и тогда*

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 \exp\{\overline{\mathrm{A}}t\};$$

3) *если* $\alpha > 1$ *и выполнено условие*

$$\Phi^{'}(0) > \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha_1 - 1}}\,\Phi(0) + \frac{\beta}{\alpha_1 - 1}\Phi_0,$$

то найдется такое $\mathrm{T}_0 \in [\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2]$, *что справедливо соотношение*

$$\limsup_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \Phi(t) = +\infty,$$

где

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u), u\rangle_j, \quad \Phi_0 \equiv \Phi(0),$$

$$\mathrm{T}_1 = \frac{2}{q}\Phi_0^{-q/2}\overline{\mathrm{B}}^{-1}, \quad \mathrm{T}_2 = \Phi_0^{1-\alpha}\mathrm{A}^{-1}, \quad \overline{\mathrm{B}} = \mathrm{B}\mathrm{C}_1^{q+2}2^{(q+2)/2},$$

$$\overline{A} \equiv \mathrm{C}_{j^*}^{q+2}\mathrm{M}2^{(q+2)/\overline{p}}, \quad |v|_0 \leqslant \mathrm{C}_{j^*}\langle \mathbb{A}_{j^*} v, v\rangle_{j^*}^{1/p_{j^*}},$$

$$\Phi_0 \equiv \Phi(0), \quad \Phi^{'}(0) \equiv (\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 - (\mathbb{L}u_0, u_0)_1,$$

$$\alpha_1 \equiv \frac{\overline{p} + q + 2}{2\overline{p}}, \quad \beta \equiv \frac{(q+2)(q+1)}{q+2-\overline{p}}, \quad \gamma \equiv \frac{4(q+1)^2}{q+2-\overline{p}},$$

$$q + 2 > \overline{p} \equiv \max_{j=\overline{1,n}} p_j,$$

$$\mathrm{A}^2 \equiv (\alpha_1 - 1)^2 \Phi_0^{-2\alpha_1}\left[\left(\Phi^{'}(0) - \frac{\beta}{\alpha_1 - 1}\Phi_0\right)^2 - \frac{\gamma}{\alpha_1 - 1}\Phi^2(0)\right],$$

C_1 — *константа наилучшего вложения* $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$, B — *константа из условия* (F) 4.

Доказательство. Доказательство этой теоремы также проведем в несколько этапов.

Шаг 1. *Локальная разрешимость.*

Справедлива следующая лемма.

Лемма 4. *Для любого* $u_0 \in \mathbb{V}_0$ *найдется такое максимальное* $\mathrm{T}_0 > 0$, *что существует единственное решение класса* $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{V}_0)$ *для любого* $\mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}_0)$ *задачи* (1.1).

Доказательство.

Доказательство почти в точности повторяет доказательство леммы 4 четвертой главы.

Лемма доказана.

Шаг 2. *Априорные оценки и разрушение.*

Справедлива следующая лемма.

Лемма 5. *Пусть*

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0 + \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u), u\rangle_j, \quad \alpha \equiv \frac{q+2}{\overline{p}}.$$

Пусть, кроме того, $(\mathbb{F}(v), v)_0 \geqslant c > 0$ *для всех* $v \in \mathbb{W}_0$, $|v|_0 = 1$. *Тогда справедливы следующие результаты для разных значений* $\alpha = (q+2)/\overline{p}$, $\overline{p} = \max\limits_{j=\overline{1,n}} p_j$:

1) *если* $\alpha \in (0,1)$, *то* $\mathrm{T}_0 = +\infty$, *и тогда*

$$\Phi(t) \leqslant \left[\Phi_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\overline{\mathrm{A}}t\right]^{1/(1-\alpha)};$$

2) *если* $\alpha = 1$, *то* $\mathrm{T}_0 = +\infty$, *и тогда*

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 \exp\{\overline{\mathrm{A}}t\};$$

3) *если* $\alpha > 1$ *и выполнено условие*

$$\Phi'(0) > \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha_1 - 1}}\,\Phi(0) + \frac{\beta}{\alpha_1 - 1}\Phi(0),$$

то найдется такое $\mathrm{T}_0 \in [\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2]$, *что справедливо соотношение*

$$\lim_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \Phi(t) = +\infty,$$

где

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u), u\rangle_j, \quad \Phi_0 \equiv \Phi(0),$$

$$\mathrm{T}_1 = \frac{2}{q}\Phi_0^{-q/2}\overline{\mathrm{B}}^{-1}, \quad \mathrm{T}_2 = \Phi_0^{1-\alpha_1}\mathrm{A}^{-1}, \quad \overline{\mathrm{B}} = \mathrm{B}\mathrm{C}_1^{q+2}2^{(q+2)/2},$$

$$\overline{A} \equiv \mathrm{C}_{j^*}^{q+2}\mathrm{M}\left(\frac{\overline{p}}{\overline{p}-1}\right)^{(q+2)/\overline{p}}, \quad |v|_0 \leqslant \mathrm{C}_{j^*}\langle \mathbb{A}_{j^*} v, v\rangle_{j^*}^{1/p_{j^*}},$$

$$\Phi_0 \equiv \Phi(0), \quad \Phi^{'}(0) \equiv (\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 - (\mathbb{L}u_0, u_0)_1,$$
$$\alpha_1 \equiv \frac{\overline{p}+q+2}{2\overline{p}}, \quad \beta \equiv \frac{(q+2)(q+1)}{q+2-\overline{p}}, \quad \gamma \equiv \frac{4(q+1)^2}{q+2-\overline{p}},$$
$$q+2 > \overline{p} \equiv \max_{j=\overline{1,n}} p_j,$$
$$\mathrm{A}^2 \equiv (\alpha_1-1)^2 \Phi_0^{-2\alpha_1} \left[\left(\Phi^{'}(0) - \frac{\beta}{\alpha_1-1}\Phi(0) \right)^2 - \frac{\gamma}{\alpha_1-1}\Phi^2(0) \right],$$

C_1 — *константа наилучшего вложения* $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$, B — *константа из условия* (F) *4.*

Доказательство.

Пусть $u \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{V}_0)$ сильное обобщенное решение задачи (1.1). Тогда умножим обе части равенства (1.1) на $u(t)$ и на $u_t^{'}(t)$, после интегрирования по частям получим следующие равенства:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j-1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u), u\rangle_j \right] = (\mathbb{F}(u), u)_0 - (\mathbb{L}u, u)_1, \quad (3.1)$$

$$\langle \mathbb{A}_0 u^{'}, u^{'}\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \langle (\mathbb{A}_j(u))^{'}, u^{'}\rangle_j = \frac{1}{q+2}\frac{d}{dt}(\mathbb{F}(u), u)_0 -$$
$$- \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mathbb{L}u, u)_1 - \langle \mathbb{D}\mathbb{P}(u), u^{'}\rangle_0. \quad (3.2)$$

Интегрируя уравнение (3.1) по $t \in (0,\mathrm{T})$, получим

$$\Phi(t) = \Phi_0 + \int_0^t ds\,[(\mathbb{F}(u), u)_0 - (\mathbb{L}u, u)_1], \quad (3.3)$$

где

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0 u, u\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j-1}{p_j}\langle \mathbb{A}_j(u), u\rangle_j, \quad \Phi_0 = \Phi(0).$$

Так как по условию $\mathbb{V}_0 \subset \mathbb{W}_0$, то найдется постоянная $\mathrm{C}_1 > 0$ такая, что

$$|\, v\,|_0 \leqslant \mathrm{C}_1 \langle \mathbb{A}_0 v, v\rangle_0^{1/2}$$

и из (3.3) вытекает цепочка неравенств

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 + \mathrm{M}\mathrm{C}_1^{q+2} \int_0^t ds\, \langle \mathbb{A}_0 v, v\rangle_0^{(q+2)/2} \leqslant \Phi_0 + \overline{\mathrm{B}} \int_0^t ds\, \Phi^{(q+2)/2}(s),$$
$$\overline{\mathrm{B}} \equiv \mathrm{M}\mathrm{C}_1^{q+2} 2^{(q+2)/2}.$$

По теореме Бихари [Демидович] имеем

$$\Phi(t) \leqslant \frac{\Phi_0}{\left[1 - \frac{q}{2}\Phi_0^{q/2}\overline{\mathrm{B}}t\right]^{2/q}} \quad \forall t \in [0, \mathrm{T}_1), \quad \mathrm{T}_1 \equiv \frac{2}{q}\Phi_0^{-q/2}\overline{\mathrm{B}}^{-1}. \tag{3.4}$$

Стало быть, в случае $\overline{p} < q+2$ из (3.4) получим: $\mathrm{T}_0 \geqslant \mathrm{T}_1$.

Пусть теперь $\overline{p} \geqslant q+2$. Воспользуемся тем, что найдется такое $j^* \in \overline{1,N}$ и $p_{j^*} = \overline{p}$ с $p_{j^*} \geqslant q+2$ такое, что $\mathbb{V}_{j^*} \subset \mathbb{W}_0$. Пусть C_{j^*} — константа вложения $\mathbb{V}_{j^*} \subset \mathbb{W}_0$:

$$| v |_0 \leqslant \mathrm{C}_{j^*} \langle \mathbb{A}_{j^*}(v), v\rangle_{j^*}^{1/p_{j^*}},$$

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 + \mathrm{C}_{j^*}^{q+2}\mathrm{M}\int\limits_0^t ds\, \langle \mathbb{A}_{j^*}(v), v\rangle_{j^*}^{(q+2)/p_{j^*}} \leqslant$$

$$\leqslant \Phi_0 + \mathrm{C}_{j^*}^{q+2}\mathrm{M}\left(\frac{\overline{p}}{\overline{p}-1}\right)^{(q+2)/\overline{p}} \int\limits_0^t ds\, \Phi^{(q+2)/\overline{p}}(s).$$

Рассмотрим два случая: $\alpha = 1$, $\alpha \in (0,1)$, где

$$\alpha \equiv \frac{q+2}{\overline{p}}.$$

В первом случае имеем по теореме Гронуолла–Белмана [Демидович]

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 \exp\{\overline{\mathrm{A}}t\}, \quad \overline{\mathrm{A}} \equiv \mathrm{C}_{j^*}^{q+2}\mathrm{M}\left(\frac{\overline{p}}{\overline{p}-1}\right)^{(q+2)/\overline{p}}. \tag{3.5}$$

Во-втором случае по теореме Бихари получим

$$\Phi(t) \leqslant \left[\Phi_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\overline{\mathrm{A}}t\right]^{1/(1-\alpha)}. \tag{3.6}$$

Из (3.5), (3.6) следует, что величина $\mathrm{T}_0 = +\infty$ в случае $\alpha \in (0,1]$.

Теперь из соотношений (3.1), (3.2) точно так же, как и на шаге 5 теоремы 1, выводим следующее обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка (см. [Калантаров, Ладыженская]):

$$\Phi''\Phi - \alpha_1\left(\Phi'\right)^2 + \beta\Phi'\Phi + \gamma\Phi^2 \geqslant 0, \tag{3.7}$$

где

$$\alpha_1 \equiv \frac{\overline{p}+q+2}{2\overline{p}}, \quad \beta \equiv \frac{(q+2)(q+1)}{q+2-\overline{p}},$$

$$\gamma \equiv \frac{4(q+1)^2}{q+2-\overline{p}}, \quad q+2 > \overline{p} \equiv \max_{j=\overline{1,n}} p_j.$$

Интегрируя дифференциальное неравенство (3.7) с учетом (3.1) и (3.3) и неравенства

$$\Phi^{'}(0) > \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha_1 - 1}}\,\Phi(0) + \frac{\beta}{\alpha_1 - 1}\Phi_0,$$

получим

$$\Phi \geqslant \frac{e^{\vartheta t}\mathrm{A}^{1/(1-\alpha_1)}}{[\mathrm{T}_2 - t]^{1/(\alpha_1-1)}} \quad \forall\, t \in [0, \mathrm{T}_2), \quad \mathrm{T}_2 \equiv \Phi_0^{1-\alpha_1}\mathrm{A}^{-1}, \quad \vartheta = \frac{\beta}{\alpha_1 - 1}.$$

Таким образом, теорема 2 доказана.

Теорема доказана.

§ 4. Примеры

В данном параграфе мы рассмотрим уравнения (1.2)–(1.5). В примерах используются стандартные теоремы вложения Соболева, которые можно найти, например, в [Демиденко].

Во всех примерах $\mathbb{H} = \mathbb{L}^2(\Omega)$.

Пример 1.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle u - u + \sum_{j=1}^{n} \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p_j-2}\nabla u\right)\right) - u + u\frac{\partial u}{\partial x_1} + u^3 = 0,$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x),$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей класса $\mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0,1]$, а операторные коэффициенты имеют вид

$$\mathbb{A}_0 u \equiv -\triangle u + u : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$

$$\mathbb{A}_j(u) \equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p_j-2}\nabla u) : \mathbb{W}_0^{1,p_j}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,p_j^{'}}(\Omega),$$

$$\mathbb{F}(u) \equiv u^3 : \mathbb{L}^4(\Omega) \to \mathbb{L}^{4/3}(\Omega), \quad \mathbb{P}(u) \equiv u^2 : \mathbb{L}^4(\Omega) \to \mathbb{L}^2(\Omega),$$

$$\mathbb{D}v \equiv \frac{\partial v}{\partial x_1} : \mathbb{L}^2(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \quad p_j > 2,$$

$$\mathbb{L}u = u : \mathbb{W}_1 = \mathbb{L}^2(\Omega) \to \mathbb{L}^2(\Omega) = \mathbb{W}_1^*,$$

$$\mathbb{V}_0 \equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega), \qquad \mathbb{V}_j \equiv \mathbb{W}_0^{1,p_j}(\Omega), \qquad \mathbb{W}_0 \equiv \mathbb{L}^4(\Omega),$$

$$\mathbb{V}_0^* \equiv \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \qquad \mathbb{V}_j^* \equiv \mathbb{W}^{-1,p_j^{'}}(\Omega), \qquad \mathbb{W}_0^* \equiv \mathbb{L}^{4/3}(\Omega),$$

$$\mathbb{W}_2 \equiv \mathbb{L}^4(\Omega), \qquad \mathbb{W}_3 \equiv \mathbb{L}^2(\Omega), \qquad \mathbb{W}_4 \equiv \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$

$$\mathbb{V} \equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega) \bigcap \left(\bigcap_{j=1}^{n} \mathbb{W}_0^{1,p_j}(\Omega)\right).$$

Вложение $\mathbb{V}_0 \equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{W}_0 \equiv \mathbb{L}^4(\Omega)$ имеет место при условии $\mathrm{N} \leqslant 4$.

Наконец, вложение $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0 = \mathbb{W}_2$ справедливо при условиях

$$\bigcap_{j=1}^{n} \mathbb{W}_0^{1,p_j}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^4(\Omega),$$

что в свою очередь справедливо при условиях

$$\mathrm{N} \leqslant \overline{p} \equiv \max_{j=\overline{1,n}} p_j, \quad 4 < \frac{\mathrm{N}\overline{p}}{\mathrm{N}-\overline{p}} \ \text{ при } \ \mathrm{N} > \overline{p}.$$

Потребуем выполнения следующего условия на начальную функцию $u_0 \in \mathbb{V}$:

$$\Phi^{'}(0) > \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha_1 - 1}}\,\Phi(0) + \frac{\beta}{\alpha_1 - 1}\Phi(0),$$

где

$$\Phi(0) = \frac{1}{2} \parallel \nabla u_0 \parallel_2^2 + \sum_{j=1}^{n} \frac{p_j - 1}{p_j} \parallel \nabla u \parallel_{p_j}^{p_j}, \quad \Phi^{'}(0) = \parallel u_0 \parallel_4^4 - \parallel u_0 \parallel_2^2,$$

$$\alpha_1 = \frac{\overline{p}+4}{2\overline{p}}, \quad \beta = \frac{12}{4-\overline{p}}, \quad \gamma = \frac{36}{4-\overline{p}}$$

при условии $\overline{p} < 4$.

Можно проверить, что операторные коффициенты удовлетворяют всем условиям теоремы 1.

Пример 2.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\triangle^2 u + \triangle u + \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\right) + \triangle u + u\frac{\partial u}{\partial x_1} - \operatorname{div}(|\nabla u|^2 \nabla u) = 0,$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(0,x) = u_0(x),$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$ класса $\mathbb{C}^{(4,\delta)}$, $\delta \in (0,1]$, а операторные коэффициенты имеют вид

$$\mathbb{A}_0 u \equiv \triangle^2 u - \triangle u : \mathbb{H}_0^2(\Omega) \to \mathbb{H}^{-2}(\Omega),$$

$$\mathbb{F}(u) \equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^2 \nabla u) : \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,4/3}(\Omega),$$

$$\mathbb{A}_1(u) \equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) : \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,p^{'}}(\Omega),$$

$$\mathbb{P}(u) = u^2 : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^4(\Omega) \to \mathbb{L}^2(\Omega)),$$

$$\mathbb{D}v = \frac{\partial v}{\partial x_1} : \mathbb{L}^2(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$

$$\mathbb{L}u = -\triangle u : \mathbb{W}_1 = \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega) = \mathbb{W}_1^*,$$

$$\mathbb{V}_0 \equiv \mathbb{H}_0^2(\Omega), \qquad \mathbb{W}_0 \equiv \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega), \qquad \mathbb{W}_2 \equiv \mathbb{L}^4(\Omega),$$

$$\mathbb{V}_1 \equiv \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega), \qquad \mathbb{W}_3 \equiv \mathbb{L}^2(\Omega), \qquad \mathbb{W}_4 \equiv \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$

$$\mathbb{V}_0^* \equiv \mathbb{H}^{-2}(\Omega), \qquad \mathbb{W}_0^* \equiv \mathbb{W}^{-1,4/3}(\Omega), \qquad \mathbb{V}_1^* \equiv \mathbb{W}^{-1,p^{'}}(\Omega),$$

$$\mathbb{V} \equiv \mathbb{H}_0^2(\Omega) \bigcap \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega).$$

Вложение $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0 \subset \mathbb{W}_1$ имеет место при условии $N \leqslant 3$ и $p \in (2, 6]$. Также имеют место вложения $\mathbb{V}_0 \hookrightarrow \mathbb{W}_1$, $\mathbb{V}_0 \subseteq \mathbb{W}_0 \subseteq \mathbb{W}_2$.

Потребуем теперь выполнения условия на начальную функцию $u_0 \in \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$:

$$\Phi'(0) > \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha_1 - 1}}\,\Phi(0) + \frac{\beta}{\alpha_1 - 1}\Phi(0),$$

где

$$\alpha_1 = \frac{4+p}{2p}, \quad \beta = \frac{12}{4-p}, \quad \gamma = \frac{36}{4-p},$$

$$\Phi(0) = \frac{1}{2} \parallel \triangle u_0 \parallel_2^2 + \frac{1}{2} \parallel \nabla u_0 \parallel_2^2 + \frac{p-1}{p} \parallel \nabla u_0 \parallel_p^p,$$

$$\Phi'(0) = \parallel \nabla u_0 \parallel_4^4 - \parallel \nabla u_0 \parallel_2^2$$

при условии $p < 4$.

Таким образом, выполнены все условия теоремы 2.

Пример 3.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\triangle^2 u + \triangle u + \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\right) + \triangle u - \operatorname{div}(|\nabla u|^2 \nabla u) + \\ + \beta_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right) + \beta_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \beta_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = 0,$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x),$$

где $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0$, $|\beta_1| + |\beta_2| + |\beta_3| > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$ класса $\mathbb{C}^{(4,\delta)}$, $\delta \in (0, 1]$, а операторные коэффициенты имеют вид

$$\mathbb{A}_1 u = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) : \mathbb{V}_1 = \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{V}_1^* = \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega),$$

$$\mathbb{L}u = -\triangle u : \mathbb{W}_1 = \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{W}_1^* = \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$

$$\mathbb{A}_0 u \equiv \triangle^2 u - \triangle u : \mathbb{H}_0^2(\Omega) \to \mathbb{H}^{-2}(\Omega),$$

$$\mathbb{F}(u) \equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^2 \nabla u) : \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,4/3}(\Omega),$$

$$\mathbb{P}(u) = \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_3}\mathbf{e}_1 + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial u}{\partial x_1}\mathbf{e}_2 + \beta_3 \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}\mathbf{e}_3 : \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega) \to \\ \to \mathbb{L}^2(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega),$$

$$\mathbb{D}\mathbf{v} \equiv \operatorname{div}(\mathbf{v}) : \mathbb{L}^2(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$

$$\mathbb{V}_0 \equiv \mathbb{H}_0^2(\Omega), \quad \mathbb{W}_0 \equiv \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega), \quad \mathbb{W}_2 \equiv \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega),$$

$$\mathbb{W}_3 \equiv \mathbb{L}^2(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega),$$

$$\mathbb{W}_4 \equiv \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \quad \mathbb{V}_0^* \equiv \mathbb{H}^{-2}(\Omega), \quad \mathbb{W}_0^* \equiv \mathbb{W}^{-1,4/3}(\Omega),$$

$$\mathbb{V} \equiv \mathbb{H}_0^2(\Omega)$$

при условии $N \leqslant 3$ и $p \in (2, 6]$. Кроме того, имеют место вложения $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0 \subset \mathbb{W}_1$, $\mathbb{V}_0 \subseteq \mathbb{W}_1$, $\mathbb{V}_0 \subseteq \mathbb{W}_0 \subseteq \mathbb{W}_2$.

Потребуем теперь выполнения условия на начальную функцию $u_0 \in \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$:

$$\Phi'(0) > \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha_1 - 1}}\,\Phi(0) + \frac{\beta}{\alpha_1 - 1}\Phi(0),$$

где

$$\alpha_1 = \frac{4+p}{2p}, \quad \beta = \frac{12}{4-p}, \quad \gamma = \frac{36}{4-p},$$

$$\Phi(0) = \frac{1}{2} \parallel \triangle u_0 \parallel_2^2 + \frac{1}{2} \parallel \nabla u_0 \parallel_2^2 + \frac{p-1}{p} \parallel \nabla u_0 \parallel_p^p,$$

$$\Phi'(0) = \parallel \nabla u_0 \parallel_4^4 - \parallel \nabla u_0 \parallel_2^2$$

при условии $p < 4$.

Таким образом, выполнены все условия теоремы 2.

Пример 4.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle u - u - |u|^{p_1-2}u\right) + \triangle u + \frac{\partial |u|^{q_2+1}}{\partial x_1} + |u|^{2q_2}u = 0,$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x),$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$ класса $\mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0, 1]$, а операторные коэффициенты имеют вид

$$\mathbb{A}_0 u \equiv -\triangle u + u : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \quad \mathbb{A}_1(u) \equiv |u|^{p_1-2}u : \mathbb{L}^{p_1}(\Omega) \to \mathbb{L}^{p_1'}(\Omega),$$

$$\mathbb{F}(u) \equiv |u|^{2q_2}u : \mathbb{L}^{2q_2+2}(\Omega) \to \mathbb{L}^{q_2''}(\Omega), \quad q_2'' = \frac{2q_2+2}{2q_2+1},$$

$$\mathbb{P}(u) \equiv |u|^{q_2+1} : \mathbb{L}_0^{2q_2+2}(\Omega) \to \mathbb{L}^2(\Omega), \quad \mathbb{D}v \equiv \frac{\partial v}{\partial x_1} : \mathbb{L}^2(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$

$$\mathbb{L}u \equiv -\triangle u : \mathbb{W}_1 = \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{W}_1^* = \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{V}_0 \equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega), && \mathbb{V}_1 \equiv \mathbb{L}^{p_1}(\Omega), && \mathbb{W}_0 \equiv \mathbb{L}^{2q_2+2}(\Omega),\\
&\mathbb{W}_2 \equiv \mathbb{L}^{2q_2+2}(\Omega), && \mathbb{W}_3 \equiv \mathbb{L}^2(\Omega), && \mathbb{W}_4 \equiv \mathbb{H}^{-1}(\Omega),\\
&\mathbb{V}_0^* \equiv \mathbb{H}^{-1}(\Omega), && \mathbb{V}_1^* \equiv \mathbb{L}^{p_1'}(\Omega), && \mathbb{W}_0^* \equiv \mathbb{L}^{q_2''}(\Omega),
\end{aligned}$$

$$p_1 = q_1 + 2, \quad q_1 > 0, \quad p_1' \equiv \frac{p_1}{p_1 - 1}, \quad q_2'' \equiv \frac{2q_2+2}{2q_2+1}, \quad q_2 > 0.$$

Вложение $\mathbb{V}_0 \subset \mathbb{W}_0$ имеет место тогда, когда

$$0 < q_2 \leqslant \frac{2}{N-2}, \text{при } N \geqslant 3, \quad 0 < q_2 < +\infty, \text{при } N = 1, 2.$$

Это означает, что

$$\mathbb{V} \equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega) \bigcap \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{W}_0 \equiv \mathbb{L}^{2q_2+2}(\Omega).$$

Кроме того, $\mathbb{W}_0 = \mathbb{W}_2$. Потребуем, чтобы

$$\Phi^{'}(0) > \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha_1 - 1}}\,\Phi(0) + \frac{\beta}{\alpha_1 - 1}\Phi(0),$$

где

$$\Phi^{'}(0) = \| u_0 \|_{2q_2+2}^{2q_2+2} - \| \nabla u_0 \|_2^2,$$

$$\Phi(0) = \frac{1}{2} \| \nabla u_0 \|_2^2 + \frac{1}{2} \| u_0 \|_2^2 + \frac{1}{p_1} \| u_0 \|_{p_1}^{p_1},$$

$$\alpha_1 = \frac{2q_2 + 2 + p_1}{2p_1}, \quad \beta = \frac{2(q_2+1)(2q_2+1)}{2q_2 + 2 - p_1}, \quad \gamma = \frac{4(2q_2+1)^2}{2q_2 + 2 - p_1}$$

при условии $\overline{p} = p_1 < 2q_2 + 2$. Проверим теперь монотонность производной Фреше оператора $\mathbb{A}_1(u) = |u|^{q_1}u$ в указанном в формулировке теоремы 2 смысле. Действительно, производная Фреше имеет вид

$$\mathbb{A}_{1,u}^{'}(h) \equiv (q_1+1)|u|^{q_1}h : \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega) \to \mathbb{L}^{q_1^{'}}(\Omega),$$

$$q_1^{'} \equiv \frac{q_1+2}{q_1+1} \;\; \forall\, h \in \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega),$$

$$\langle \mathbb{A}_{1,u}^{'}(u)u_1 - \mathbb{A}_{1,u}^{'}(u_2)u_2, u_1 - u_2\rangle_1 =$$

$$= (q_1+1)\langle |u|^{q_1}u_1 - |u|^{q_1}u_2, u_1 - u_2\rangle_1 \leqslant$$

$$\leqslant (q_1+1) \int\limits_\Omega dx\, \left(|u|^{q_1}u_1 - |u|^{q_1}u_2\right)(u_1 - u_2) \geqslant 0 \;\; \forall\, u, u_1, u_2 \in \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega),$$

где $q_1 = p_1 - 2$.

Докажем теперь, что при условии $\| \nabla u_n - \nabla u \|_2 \to 0$, когда $n \to +\infty$, имеет место сходимость производных Фреше в равномерной операторной топологии $\mathcal{L}(\mathbb{H}_0^1(\Omega), \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$. Действительно, при условиях $0 < q_1 \leqslant 4/(N-2)$ при $N \geqslant 3$ и $q_1 > 0$ при $N = 1, 2$ имеем

$$\| \mathbb{A}_{1,u}^{'}(u) - \mathbb{A}_{1,u}^{'}(u_n) \|_{\mathbb{H}_0^1 \to \mathbb{H}^{-1}} = \sup_{\|\nabla h\|_2 = 1} \| \mathbb{A}_{1,u}^{'}(u)h - \mathbb{A}_{1,u}^{'}(u_n)h \|_{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|\nabla h\|_2 = 1} \| \mathbb{A}_{1,u}^{'}(u)h - \mathbb{A}_{1,u}^{'}(u_n)h \|_{(q_1+2)/(q_1+1)} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C} \sup_{\|\nabla h\|_2 = 1} \left(\int\limits_\Omega dx\, |[|u|^{q_1} - |u_n|^{q_1}]h|^{\frac{q_1+2}{q_1+1}} \right)^{(q_1+1)/(q_1+2)}.$$

Рассмотрим отдельно интеграл

$$\mathrm{J}_n = \int\limits_\Omega dx\ |[|u|^{q_1} - |u_n|^{q_1}]h|^{\frac{q_1+2}{q_1+1}} \leqslant \int\limits_\Omega dx\ ||u|^{q_1} - |u_n|^{q_1}|^{\frac{q_1+2}{q_1+1}}\,|h|^{\frac{q_1+2}{q_1+1}} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C}\left(\int\limits_\Omega dx\ ||u|^{q_1} - |u_n|^{q_1}|^{(q_1+2)/q_1}\right)^{q_1/(q_1+1)} \left(\int\limits_\Omega dx\,|h|^{q_1+2}\right)^{1/(q_1+1)} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C}\parallel \nabla h \parallel_2^{(q_1+2)/(q_1+1)} \left(\int\limits_\Omega dx\ ||u|^{q_1} - |u_n|^{q_1}|^{(q_1+2)/q_1}\right)^{q_1/(q_1+1)} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C}\left(\int\limits_\Omega dx\ ||u|^{q_1} - |u_n|^{q_1}|^{(q_1+2)/q_1}\right)^{q_1/(q_1+1)} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C}\max\{\parallel \nabla u \parallel_2^{(q_1+2)q_1/(q_1+1)}, \parallel \nabla u_n \parallel_2^{(q_1+2)q_1/(q_1+1)}\} \leqslant \mathrm{C}.$$

Отметим, что поскольку $\parallel \nabla u - \nabla u_n \parallel_2 \to +0$ при $n \to +\infty$, то $u_n \to u$ сильно $\mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega)$ при условиях на $q_1 > 0$. Рассмотрим функцию $f(x,u) = |u|^{q_1} : \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega) \to \mathbb{L}^{\frac{q_1+2}{q_1}}(\Omega)$ для любого фиксированного $h \in \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega)$. Можно проверить, что выполнены все условия теоремы 15 Приложения Б. По определению непрерывность оператора $\mathrm{f} : \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega) \to \mathbb{L}^{(q_1+2)/q_1}(\Omega)$ означает, что имеет место предельное равенство

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_\Omega\int dx\ |f(x,u) - f(x,u_n)|^{\frac{q_1+2}{q_1}} = 0$$

при условии сильной сходимости $u_n \to u$ в $\mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega)$.

Значит, по теореме Вайнберга–Немыцкого (см. Приложение Б) имеем: $\mathrm{J}_n \to +0$ при $n \to +\infty$ равномерно по h из сферы $\parallel \nabla h \parallel_2 = 1$.

Таким образом, выполнены все условия теоремы 2.

§ 5. О разрушении решения волнового уравнения соболевского типа с нелокальным источником

Целью настоящего параграфа является получение достаточных условий разрушения решения следующей начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle u - u - |u|^q u\right) + \triangle u + \frac{\partial u}{\partial x_1} + u\frac{\partial u}{\partial x_1} - \triangle u \int\limits_\Omega dx\,|\nabla u|^2 = 0, \quad (5.1)$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0,\ u(x,0) = u_0(x),$$

где $\mathrm{N} = 3$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, причем Ω — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0,1]$.

Данная задача является математической моделью волновых процессов в полупроводниках во внешнем электрическом поле при учете диссипации и нелокальных источников тока свободных электронов.

5.1. Однозначная локальная разрешимость задачи. Дадим определение сильного обобщенного решения задачи (5.1).

Определение 3. Сильным обобщенным решением задачи (5.1) называется решение класса $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}_0^1(\Omega))$, удовлетворяющее условиям

$$\langle \mathbb{D}(u), w\rangle = 0 \ \ \forall\, w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \ \ \forall\, t \in [0,\mathrm{T}], \tag{5.2}$$

$$u(0) = u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega),$$

$$\mathbb{D}(u) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle u - u - |u|^q u\right) + \triangle u + \frac{\partial u}{\partial x_1} + u\frac{\partial u}{\partial x_1} - \triangle u \int\limits_\Omega dx\, |\nabla u|^2,$$

где через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначена скобка двойственности между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, а производная по времени понимается в классическом смысле.

Теорема 3. *Пусть* $q \in (0,4]$ *и* $u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$. *Тогда найдется такое* $\mathrm{T}_0 > 0$, *что существует единственное сильное обобщенное решение задачи* (5.1), *причем либо* $\mathrm{T}_0 = +\infty$, *либо* $\mathrm{T}_0 < +\infty$ *и в последнем случае имеет место предельное равенство*

$$\limsup_{t\uparrow \mathrm{T}_0} \| \nabla u \|_2 = +\infty.$$

Доказательство.

Введем следующие обозначения: $\|\cdot\|_{+1}$ — норма в $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, $\|\cdot\|_{-1}$ — норма в $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$.

Рассмотрим теперь следующие операторы:

$$\mathbb{A}(u) = -\triangle u + u + |u|^q u, \ \ \mathbb{L}u = -\triangle u,$$

$$\mathbb{F}_1 u = u_{x_1}, \ \ \mathbb{F}_2(u) = u u_{x_1}, \ \ \mathbb{F}_3(u) = \| \nabla u \|_2^2\, (-\triangle u). \tag{5.3}$$

В сильном обобщенном смысле задача (5.2) примет с учетом введенных обозначений (5.3) вид

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbb{A}(u)\right) + \mathbb{L}u = \mathbb{F}_1 u + \mathbb{F}_2(u) + \mathbb{F}_3(u), \ \ u(0) = u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)\,. \tag{5.4}$$

Рассмотрим свойства оператора $\mathbb{A}$:

$$\langle \mathbb{A}(u_1) - \mathbb{A}(u_2), u_1 - u_2\rangle = \| \nabla u_1 - \nabla u_2 \|_2^2 + \| u_1 - u_2 \|_2^2 + \int\limits_\Omega dx\, \left(|u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2\right)(u_1 - u_2) \geqslant \| \nabla u_1 - \nabla u_2 \|_2^2\,.$$

Значит, оператор $\mathbb{A}$ имеет липшиц-непрерывный обратный с постоянной Липшица, равной 1. Оператор $\mathbb{L} : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ имеет липшиц-непрерывный обратный с постоянной Липшица, равной 1:

$$\mathbb{F}_1 u = \frac{\partial u}{\partial x_1} : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{L}^2(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega).$$

Причем оператор $\mathbb{F}_1$ является липшиц-непрерывным. Рассмотрим теперь оператор $\mathbb{F}_2(u) : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$:

$$\| \mathbb{F}_2(u_1) - \mathbb{F}_2(u_2) \|_{-1} \leqslant \mathrm{C} \| u_1^2 - u_2^2 \|_2 \leqslant \mathrm{C}\mu_1(\mathrm{R}) \| u_1 - u_2 \|_{+1}, \quad (5.5)$$
$$\mu_1(\mathrm{R}) = \mathrm{R}, \ \ \mathrm{R} = \max\{\| u_1 \|_+, \| u_2 \|_+\}.$$

Рассмотрим теперь оператор $\mathbb{F}_3(u) = \| \nabla u \|_2^2 \ (-\triangle u) : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$.

$$\| \mathbb{F}_3(u_1) - \mathbb{F}_3(u_2) \|_{-1} \leqslant \mathrm{C} \| \nabla u_1 \|_2^2 \| u_1 - u_2 \|_{+1} +$$
$$+ \mathrm{C} \left| \| \nabla u_1 \|_2^2 - \| \nabla u_2 \|_2^2 \right| \| u_1 \|_+ \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{C}\mu_2(\mathrm{R}) \| u_1 - u_2 \|_{+1}, \quad (5.6)$$

где $\mathrm{R} = \max\{\| u_1 \|_+, \| u_2 \|_+\}$, $\mu_2(\mathrm{R}) = \mathrm{R}^2$. Рассмотрим теперь производную Фреше оператора $\mathbb{A}$:

$$\mathbb{A}_u^{'} = \mathbb{A}_0 + \mathbb{B}(u), \quad (5.7)$$

где

$$\mathbb{A}_0 h = -\triangle h + h, \ \ \mathbb{B}(u)h = (q+1)|u|^q h.$$

В силу (5.7) справедливо неравенство

$$\langle \mathbb{A}^{'}(u)h_1 - \mathbb{A}^{'}(u)h_2, h_1 - h_2 \rangle \geqslant \| \nabla h_1 - \nabla h_2 \|_2^2 .$$

Значит, оператор $\mathbb{A}^{'}(u)$ имеет липшиц-непрерывный обратный с постоянной Липшица, равной 1.

Рассмотрим теперь оператор $\mathbb{B}(u) = (q+1)|u|^q \mathrm{I}$. Докажем, что этот оператор является ограниченным и непрерывным по $u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ в равномерной топологии пространства $\mathcal{L}(\mathbb{H}_0^1(\Omega); \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$:

$$\mathbb{B}(\cdot) : \mathbb{BC}(\mathbb{H}_0^1(\Omega) : \mathcal{L}(\mathbb{H}_0^1(\Omega); \mathbb{H}^{-1}(\Omega))).$$

Действительно, в силу условия $N = 3$ и $q \in (0, 4]$ имеем

$$\| \mathbb{B}(u)h \|_{-1} \leqslant \mathrm{C} \| \mathbb{B}(u)h \|_{\frac{q+2}{q+1}} \leqslant \mathrm{C} \left(\int\limits_\Omega dx \, |u|^{q \frac{q+2}{q+1}} |h|^{\frac{q+2}{q+1}} \right)^{\frac{q+1}{q+2}} \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{C} \left(\int\limits_\Omega dx \, |u|^{q+2} \right)^{\frac{q}{q+2}} \left(\int\limits_\Omega dx \, |h|^{q+2} \right)^{\frac{1}{q+2}} \leqslant \mathrm{C} \| \nabla u \|_2^q \| \nabla h \|_2 . \quad (5.8)$$

Пусть теперь $u_n \to u$ сильно в $\mathbb{H}^1_0(\Omega)$, тогда, очевидно, $u_n \to u$ сильно в $\mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$. Справедливы соотношения

$$\| \mathbb{B}(u_n) - \mathbb{B}(u) \|_{\mathbb{H}^1_0(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega)} = \sup_{\|\nabla h\|_2 = 1} \| \mathbb{B}(u_n)h - \mathbb{B}(u)h \|_{-1},$$

$$\| \mathbb{B}(u_n)h - \mathbb{B}(u)h \|_{-1} \leqslant \mathrm{C} \| \mathbb{B}(u_n)h - \mathbb{B}(u)h \|_{\frac{q+2}{q+1}} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C} \left(\int\limits_\Omega dx\, |h|^{(q+2)/(q+1)} |u_n|^q - |u|^q \big|^{\frac{q+2}{q+1}} \right)^{\frac{q+1}{q+2}} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C} \| h \|_{q+2} \left(\int\limits_\Omega dx\, \big||u_n|^q - |u|^q\big|^{\frac{q+2}{q}} \right)^{\frac{q}{q+2}} \leqslant \mathrm{C} < +\infty,$$

где C не зависит от $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим функцию $f(x,u) = |u|^q : \mathbb{L}^{q+2}(\Omega) \to \mathbb{L}^{\frac{q+2}{q}}(\Omega)$. Можно проверить, что выполнены все условия теоремы Вайнберга–Немыцкого. По определению непрерывность оператора $\mathrm{f} : \mathbb{L}^{q+2}(\Omega) \to \mathbb{L}^{(q+2)/q}(\Omega)$ означает, что имеет место предельное равенство

$$\lim_{n \to +\infty} \int\limits_\Omega \int dx\, |f(x,u) - f(x,u_n)|^{\frac{q+2}{q+1}} = 0$$

при условии сильной сходимости $u_n \to u$ в $\mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$.

Из (5.8) вытекает сильная ограниченность оператора $\mathbb{B}(u) = (q+1)|u|^q \mathrm{I}$. В силу теоремы Вайнберга–Немыцкого (см. Приложение Б) приходим к выводу, что

$$\| \mathbb{B}(u_n) - \mathbb{B}(u) \|_{\mathbb{H}^1_0(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega)} \to +0$$

при $n \to +\infty$.

Введем обозначение

$$v = \mathbb{A}(u). \tag{5.9}$$

Тогда в классе $v \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$ задача (5.4) с учетом (5.9) эквивалентна следующей задаче:

$$\frac{dv}{dt} = -\mathbb{L}\mathbb{A}^{-1}(v) + \mathbb{F}_1\mathbb{A}^{-1}(v) + \mathbb{F}_2(\mathbb{A}^{-1}(v)) + \mathbb{F}_3(\mathbb{A}^{-1}(v)), \tag{5.10}$$

$v(0) = v_0 = \mathbb{A}(u_0) \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$. Задача (5.10) эквивалентна интегральному уравнению

$$v(t) = \mathbb{H}(v), \quad \mathbb{H}(v) = v_0 + \int\limits_0^t ds \Big[- \mathbb{L}\mathbb{A}^{-1}(v) +$$

$$+\mathbb{F}_1\mathbb{A}^{-1}(v)+\mathbb{F}_2(\mathbb{A}^{-1}(v))+\mathbb{F}_3(\mathbb{A}^{-1}(v))\Big](s). \quad (5.11)$$

Рассмотрим замкнутое выпуклое ограниченое подмножество $\mathbb{B}_{\mathrm{R}}$ банахова пространства $\mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T};\mathbb{H}^{-1}(\Omega))$:

$$\mathbb{B}_{\mathbb{R}}\equiv\{v\in\mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T};\mathbb{H}^{-1}(\Omega)):\parallel v\parallel_{\mathrm{T}}=\operatorname*{ess.sup}_{t\in(0,\mathrm{T})}\parallel v\parallel_{-1}\leqslant\mathbb{R}\}.$$

Нетрудно доказать, что в силу свойств (5.5), (5.6) найдется такое $\mathrm{T}>0$, что оператор $\mathbb{H}$ действует из $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ в $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ при достаточно большом R. В силу теоремы о сжимающих отображениях существует единственное решение интегрального уравнения (5.11) класса $\mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T};\mathbb{H}^{-1}(\Omega))$. Используя стандартный алгоритм продолжения решений интегральных уравнений вида (5.11), получим, что найдется такое $\mathrm{T}_0>0$, что либо $\mathrm{T}_0=+\infty$, либо $\mathrm{T}_0<+\infty$ и в последнем случае имеет место предельное равенство

$$\limsup_{t\uparrow\mathrm{T}_0}\parallel v\parallel_{-1}=+\infty.$$

Из свойств сглаживания во времени вытекает, что $v(x,t)\in\in\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{H}^{-1}(\Omega))$ — сильное обобщенное решение задачи (5.10).

Рассмотрим теперь уравнение (5.9):

$$\mathbb{A}(u)=-\triangle u+u+|u|^q u=v. \quad (5.12)$$

Из свойств оператора $\mathbb{A}$ вытекает, что

$$u=\mathbb{A}^{-1}(v). \quad (5.13)$$

Кроме того, справедливо неравенство

$$\parallel u(t)-u(t_0)\parallel_{+1}\leqslant\parallel\mathbb{A}^{-1}(v(t))-\mathbb{A}^{-1}(v(t_0))\parallel_{+1}\leqslant$$
$$\leqslant\parallel v(t)-v(t_0)\parallel_{-1}\to+0$$

при $t\to t_0$. Таким образом, в силу (5.13) имеем: $u\in\mathbb{C}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{H}^1_0(\Omega))$.

В классе $u\in\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{H}^1_0(\Omega))$ задача (5.12) эквивалентна следующей задаче:

$$\mathbb{A}_u^{'}u^{'}=v^{'},\ \ u=\mathbb{A}^{-1}(v). \quad (5.14)$$

Из (5.14) вытекает, что

$$[\mathbb{A}_0+\mathbb{B}(u)]\,u^{'}=v^{'},\ \ \mathbb{A}_0=-\triangle+\mathrm{I}. \quad (5.15)$$

Подействуем на обе части равенства (5.15) оператором $\mathbb{A}_0^{-1}$, получим

$$\left[\mathrm{I}+\mathbb{A}_0^{-1}\mathbb{B}(u)\right]u^{'}=\mathbb{A}_0^{-1}v^{'}. \quad (5.16)$$

Докажем теперь, что оператор

$$\widehat{\mathbb{C}}=\mathrm{I}+\mathbb{A}_0^{-1}\mathbb{B}(u) \quad (5.17)$$

при фиксированном $u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ имеет ограниченный обратный. Действительно, рассмотрим уравнение

$$\widehat{\mathbb{C}} w = 0.$$

Подействуем на обе части последнего уравнения оператором $\mathbb{A}_0$, тогда получим

$$[\mathbb{A}_0 + \mathbb{B}(u)]\, w = 0,$$

откуда в силу обратимости оператора $\mathbb{A}_0 + \mathbb{B}(u)$ приходим к выводу, что $w = 0$ в классе $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$. С другой стороны, операторы $\mathbb{A}_0^{-1}$ и $\mathbb{B}(u)$ являются ограниченными в соответствующих пространствах. Поэтому оператор $\widehat{\mathbb{C}} : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, определенный формулой (5.17), является линейным и ограниченным. Значит, в силу теоремы Банаха об обратном отображении, приходим к выводу, что оператор $\widehat{\mathbb{C}}^{-1}$ — линейный и ограниченный. Значит, из (5.16) получим

$$u' = \widehat{\mathbb{C}}^{-1}\mathbb{A}_0^{-1} v'. \tag{5.18}$$

Нам осталось доказать, что $u' = \widehat{\mathbb{C}}^{-1}\mathbb{A}_0^{-1} v' \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ при фиксированном $u \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}_0^1(\Omega))$. Действительно, в силу (5.18) справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \| u'(t) - u'(t_0) \|_{+1} &\leqslant \| \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0)\mathbb{A}_0^{-1}[v'(t) - v'(t_0)] \|_{+1} + \\ &+ \| (\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) - \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t))\mathbb{A}_0^{-1} v'(t_0) \|_{+1} \leqslant \\ \leqslant \mathrm{C} \| v'(t) - v'(t_0) \|_{-1} &+ \mathrm{C} \| \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) - \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t) \|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}_0^1(\Omega)}. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Отметим, что линейный при фиксированном $u \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ оператор $\widehat{\mathbb{C}}$ является непрерывным, а значит, в силу теоремы Банаха об обратном отображении, оператор $\widehat{\mathbb{C}}^{-1}$ является линейным непрерывным и, следовательно, в силу линейности ограниченным. Стало быть, мы можем воспользоваться спектральным представлением для линейного ограниченного оператора $\widehat{\mathbb{C}}^{-1} : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}_0^1(\Omega)$.

Прежде всего введем резольвенту оператора $\widehat{\mathbb{C}}$:

$$\mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}) = \left(\lambda \mathbb{I} - \widehat{\mathbb{C}}\right)^{-1}.$$

Пусть Γ — окружность $|\lambda| = r$ с достаточно большим радиусом, большим чем

$$\sup_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} \| \widehat{\mathbb{C}} \|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}_0^1(\Omega)}.$$

Введенная величина определена корректно, поскольку при указанных $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \subset [0, \mathrm{T}_0)$ имеет место неравенство

$$\sup_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} \| u \|_{+1} < +\infty.$$

Теперь мы можем воспользоваться спектральным представлением для операторов $\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t)$ и $\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0)$ с одним и тем же введенным ранее контуром Γ:

$$\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}d\lambda\,\lambda^{-1}\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t)),\ \ \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}d\lambda\,\lambda^{-1}\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0)).$$

Отсюда получим

$$\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t)-\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}d\lambda\,\lambda^{-1}\left[\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t))-\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0))\right].$$

Теперь воспользуемся известным представлением для резольвент операторов:

$$\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t))-\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0))=\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0))\sum_{n=1}^{+\infty}[(\widehat{\mathbb{C}}(t)-\widehat{\mathbb{C}}(t_0))\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0)]^n$$

при условии

$$\|\,\widehat{\mathbb{C}}(t_0)-\widehat{\mathbb{C}}(t)\,\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)\to\mathbb{H}_0^1(\Omega)}\|\,\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0))\,\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)\to\mathbb{H}_0^1(\Omega)}\leqslant\delta<1.$$

Справедлива следующее неравенство:

$$\begin{aligned}\|\,\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t))-\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0))\,\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)\to\mathbb{H}_0^1(\Omega)}\leqslant\\ \leqslant\|\,\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0))\,\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)\to\mathbb{H}_0^1(\Omega)}\sum_{n=1}^{+\infty}\|\,\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0))\,\|^n_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)\to\mathbb{H}_0^1(\Omega)}\times\\ \times\|\,\widehat{\mathbb{C}}(t)-\widehat{\mathbb{C}}(t_0)\,\|^n_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)\to\mathbb{H}_0^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Теперь заметим, что

$$\widehat{\mathbb{C}}(t)-\widehat{\mathbb{C}}(t_0)=\mathbb{A}_0^{-1}\left[\mathbb{B}_u(u(t))-\mathbb{B}_u(u(t_0))\right].$$

В силу непрерывности производных Фреше $\mathbb{B}_u$ по $u\in\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и того, что $u\in\mathbb{C}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{H}_0^1(\Omega))$, имеем

$$\begin{gathered}\|\,\widehat{\mathbb{C}}(t)-\widehat{\mathbb{C}}(t_0)\,\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)\to\mathbb{H}_0^1(\Omega)}\leqslant\|\,\mathbb{B}_u(u(t))-\mathbb{B}_u(u(t_0))\,\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)\to\mathbb{H}^{-1}(\Omega)}\to+0,\\ \|\,\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t))-\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0))\,\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)\to\mathbb{H}_0^1(\Omega)}\to 0,\\ \|\,\widehat{\mathbb{C}}(t)^{-1}-\widehat{\mathbb{C}}(t_0)^{-1}\,\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)\to\mathbb{H}_0^1(\Omega)}\to+0\end{gathered}$$

при $t\to t_0$.

Значит, в силу (5.19) имеем: $u\in\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{H}_0^1(\Omega))$.

Теорема доказана.

5.2. Разрушение сильного обобщенного решения задачи. В предыдущем пункте мы доказали локальную во времени разрешимость задачи (5.1) в сильном обобщенном смысле: $u\in$

$\in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{H}_0^1(\Omega))$. Здесь мы докажем, что при некоторых достаточных условиях имеет место неравенство $\mathrm{T}_0 < +\infty$. Тем самым выполнено следующее предельное равенство:

$$\limsup_{t\uparrow \mathrm{T}_0} \| \nabla u \|_2 = +\infty. \tag{5.20}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и условия* $q \in (0,2)$,

$$\Phi'(0) > \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha_1 - 1}}\,\Phi(0) + \frac{\beta}{\alpha_1 - 1}\Phi(0),$$

тогда $\mathrm{T}_0 \in [\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2]$ *и выполнено предельное равенство* (5.20), *где*

$$\alpha_1 = \frac{6+q}{2q+4},\ \ \beta = \frac{8\mathrm{B}^4}{2-q},\ \ \gamma = \frac{16}{2-q}[3+\mathrm{B}^4],$$

$$\Phi'(0) = \| \nabla u_0 \|_2^4 - \| \nabla u_0 \|_2^2,$$

$$\Phi(0) = \frac{1}{2}\| \nabla u_0 \|_2^2 + \frac{1}{2}\| u_0 \|_2^2 + \frac{q+1}{q+2}\| u_0 \|_{q+2}^{q+2},$$

$$\mathrm{T}_2 = \Phi_0^{1-\alpha_1}\mathrm{A}^{-1},\ \ \mathrm{T}_1 = \frac{1}{4\Phi_0},$$

$$\mathrm{A}^2 \equiv (1-\alpha_1)^2\Phi^{-2\alpha_1}(0)\left[\left(\Phi'(0) - \frac{\beta}{\alpha_1 - 1}\Phi(0)\right)^2 - \frac{\gamma}{\alpha - 1}(\Phi(0))^2\right],$$

$$\| v \|_4 \leqslant \mathrm{B}\| \nabla v \|_2 .$$

Доказательство.

Возьмем сначала $w = u(x,t)$ в определении 3, тогда после интегрирования по частям получим первое энергетическое равенство

$$\frac{d\Phi}{dt} + \| \nabla u \|_2^2 = \| \nabla u \|_2^4, \tag{5.21}$$

где

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}\| \nabla u \|_2^2 + \frac{1}{2}\| u \|_2^2 + \frac{q+1}{q+2}\| u \|_{q+2}^{q+2}. \tag{5.22}$$

Пусть теперь $w = u' \in \mathbb{C}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{H}_0^1(\Omega))$, тогда после интегрирования по частям получим второе энергетическое равенство

$$\| \nabla u' \|_2^2 + \| u' \|_2^2 + (q+1)\int\limits_\Omega dx\,|u|^q (u')^2 = \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\| \nabla u \|_2^4 - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\| \nabla u \|_2^2 + \int\limits_\Omega dx\,u' u_{x_1} + \int\limits_\Omega dx\,u u_{x_1} u'. \tag{5.23}$$

Справедливы следующие неравенства:

$$\left|\int\limits_\Omega dx\,(\nabla u',\nabla u)\right| \leqslant \| \nabla u' \|_2 \| \nabla u \|_2, \quad \left|\int\limits_\Omega dx\, u' u\right| \leqslant \| u' \|_2 \| u \|_2, \tag{5.24}$$

$$\left|\int\limits_\Omega dx\,|u|^q u u'\right| \leqslant \left(\int\limits_\Omega dx\,|u|^q (u')^2\right)^{1/2} \left(\int\limits_\Omega dx\,|u|^{q+2}\right)^{1/2}. \tag{5.25}$$

В силу (5.22), (5.24) и (5.25) имеет место цепочка неравенств

$$(\Phi')^2 = \left(\int\limits_\Omega dx\,(\nabla u',\nabla u) + \int\limits_\Omega dx\, u' u + (q+1)\int\limits_\Omega dx\,|u|^q u u'\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \| \nabla u' \|_2^2 \| \nabla u \|_2^2 + \| u' \|_2^2 \| u \|_2^2 +$$

$$+ (q+1)\int\limits_\Omega dx\,|u|^q (u')^2 (q+1)\int\limits_\Omega dx\,|u|^{q+2} + 2 \| \nabla u' \|_2 \| \nabla u \|_2 \| u' \|_2 \| u \|_2 +$$

$$+ 2 \| \nabla u' \|_2 \| \nabla u \|_2 (q+1)\left(\int\limits_\Omega dx\,|u|^q (u')^2\right)^{1/2} (q+1)\left(\int\limits_\Omega dx\,|u|^{q+2}\right)^{1/2} +$$

$$+ 2 \| u' \|_2 \| u \|_2 (q+1)\left(\int\limits_\Omega dx\,|u|^q (u')^2\right)^{1/2} (q+1)\left(\int\limits_\Omega dx\,|u|^{q+2}\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\left(\| \nabla u' \|_2^2 + \| u' \|_2^2 + (q+1)\int\limits_\Omega dx\,|u|^q (u')^2\right) \times$$

$$\times \left(\| \nabla u \|_2^2 + \| u \|_2^2 + (q+1) \| u \|_{q+2}^{q+2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant (q+2)\left(\| \nabla u' \|_2^2 + \| u' \|_2^2 + (q+1)\int\limits_\Omega dx\,|u|^q (u')^2\right) \Phi(t).$$

Стало быть, имеет место неравенство

$$(\Phi')^2 \leqslant (q+2)\Phi\left(\| \nabla u' \|_2^2 + \| u' \|_2^2 + (q+1)\int\limits_\Omega dx\,|u|^q (u')^2\right). \tag{5.26}$$

Введем обозначение

$$\mathrm{J} = \| \nabla u' \|_2^2 + \| u' \|_2^2 + (q+1)\int\limits_\Omega dx\,|u|^q (u')^2. \tag{5.27}$$

Теперь нам необходимо получить оценки сверху для функции $\mathrm{J}(t)$. Из (5.21)–(5.23) и (5.27) вытекает следующая цепочка неравенств:

$$\mathrm{J} \leqslant \frac{1}{4}\left|\frac{d}{dt}\parallel \nabla u \parallel_2^2\right| + \frac{1}{4}\Phi'' + \left|\int\limits_\Omega dx\, u'_{x_1} u\right| + \frac{1}{2}\left|\int\limits_\Omega dx\, u^2 u'_{x_1}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{4}\mathrm{J} + \frac{1}{2\varepsilon}\Phi + \frac{1}{4}\Phi'' + \frac{1}{\varepsilon}\Phi + \frac{\varepsilon}{2}\mathrm{J} + \frac{\varepsilon}{4}\mathrm{J} + \frac{1}{4\varepsilon}\parallel u \parallel_4^4, \quad (5.28)$$

где мы воспользовались следующими неравенствами:

$$\left|\int\limits_\Omega dx\,(\nabla u', \nabla u)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\parallel \nabla u' \parallel_2^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\parallel \nabla u \parallel_2^2,$$

$$\left|\int\limits_\Omega dx\, u' u\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\parallel u' \parallel_2^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\parallel u \parallel_2^2, \quad \left|\int\limits_\Omega dx\, u u'_{x_1}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\parallel \nabla u' \parallel_2^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\parallel u \parallel_2^2,$$

$$\left|\int\limits_\Omega dx\, u^2 u'_{x_1}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\parallel \nabla u' \parallel_2^2 + \frac{1}{\varepsilon 2}\parallel u \parallel_4^4, \quad \varepsilon > 0.$$

В итоге из (5.28) получим

$$[1-\varepsilon]\mathrm{J} \leqslant \frac{1}{2\varepsilon}\left[3 + \mathrm{B}^4\right]\Phi + \frac{\mathrm{B}^4}{4\varepsilon}\Phi' + \frac{1}{4}\Phi'', \quad (5.29)$$

где B — константа наилучшего вложения $\parallel u \parallel_4 \leqslant \mathrm{B} \parallel \nabla u \parallel_2$. Из (5.26) и (5.29) приходим к следующему обыкновенному дифференциальному неравенству второго порядка (см. [Кантаров, Ладыженская]):

$$\Phi\Phi'' - \alpha_1(\Phi')^2 + \beta\Phi'\Phi + \gamma\Phi^2 \geqslant 0, \quad (5.30)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{4}{q+2}(1-\varepsilon), \quad \beta = \frac{\mathrm{B}^4}{\varepsilon},$$

$$\gamma = \frac{2}{\varepsilon}[3 + \mathrm{B}^4], \quad \varepsilon \in \left(0, \frac{2-q}{4}\right) \text{ при } 0 < q < 2.$$

Отметим, что при условии $q \in (0,2)$ имеем: $\alpha_1 > 1$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$.

Неравенство (5.30) нетрудно привести к следующему линейному дифференциальному неравенству:

$$\mathbb{Z}'' + \beta\mathbb{Z}' - \delta\mathbb{Z} \leqslant 0, \quad \delta = \gamma(\alpha_1 - 1), \quad (5.31)$$

относительно новой функции

$$\mathbb{Z} = \Phi^{1-\alpha_1}. \quad (5.32)$$

Перейдем теперь к новой функции

$$\mathbb{Y} \equiv \mathbb{Z}e^{\beta t} \tag{5.33}$$

в уравнении (5.31), тогда получим следующее неравенство:

$$\mathbb{Y}'' - \beta\mathbb{Y}' - \delta\mathbb{Y} \leqslant 0. \tag{5.34}$$

Из (5.32), (5.33) следует, что

$$\mathbb{Y}' = e^{\beta t}(\alpha_1 - 1)\Phi^{-\alpha_1}\left(-\Phi' + \frac{\beta}{\alpha_1 - 1}\Phi\right). \tag{5.35}$$

Потребуем выполнения условия

$$\Phi'(0) > \frac{\beta}{\alpha_1 - 1}\Phi(0). \tag{5.36}$$

В силу непрерывной дифференцируемости функции $\mathbb{Y}$ из условия (5.36) с учетом (5.35) приходим к выводу, что найдется такой интервал $[0, \mathrm{T}_3)$, принадлежащий области определения $\Phi(t)$, что $\mathbb{Y}' < 0$. Следовательно, при $t \in [0, \mathrm{T}_3]$ величина $-\beta\mathbb{Y}'(t) > 0$. Отсюда и из неравенства (5.34) получим следующее дифференциальное неравенство:

$$\mathbb{Y}'' - \delta\mathbb{Y} \leqslant 0 \ \text{ при } \ t \in [0, \mathrm{T}_3]. \tag{5.37}$$

Потребуем выполнения следующего неравенство:

$$\Phi'(0) > \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha_1 - 1}}\Phi(0) + \frac{\beta}{\alpha_1 - 1}\Phi(0). \tag{5.38}$$

Из неравенства (5.37) имеем

$$\left(\mathbb{Y}'\right)^2 \geqslant \delta\mathbb{Y}^2 + \mathbb{A}^2. \tag{5.39}$$

Тогда из (5.39) вытекает неравенство

$$\left(\mathbb{Y}'\right)^2 \geqslant \mathrm{A}^2, \tag{5.40}$$

где в силу (5.38)

$$\mathrm{A}^2 \equiv (1 - \alpha_1)^2\Phi^{-2\alpha_1}(0)\left[\left(\Phi'(0) - \frac{\beta}{\alpha_1 - 1}\Phi(0)\right)^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{\delta}{(\alpha_1 - 1)^2}(\Phi(0))^2\right] > 0.$$

Из (5.40) получим

$$\mathbb{Y}'(t) \leqslant -\mathrm{A} \ \ \forall\, t \in [0, \mathrm{T}_3]. \tag{5.41}$$

Из (5.41) вытекает, что на области определения функции $\Phi(t)$ величина $\mathbb{Y}' < 0$, откуда и из (5.41) имеем

$$\mathbb{Y}(t) \leqslant \mathbb{Y}_0 - \mathrm{A}t.$$

Стало быть, найдется такой момент времени $\mathrm{T}_0 \in (0, \mathrm{T}_2)$, что

$$\limsup_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \Phi(t) = +\infty, \quad \mathrm{T}_2 = \mathbb{Y}(0)\mathrm{A}^{-1}.$$

Получим теперь оценку снизу на время разрушения решения задачи (5.1). Действительно, из первого энергетического равенства (5.21) вытекает цепочка неравенств

$$\frac{d\Phi}{dt} \leqslant \| \nabla u \|_2^4 \leqslant 4 \left(\frac{1}{2} \| \nabla u \|_2^2 \right)^2 \leqslant 4\Phi^2. \tag{5.42}$$

Из (5.42) вытекает неравенство

$$\Phi \leqslant \frac{\Phi_0}{1 - 4\Phi_0 t},$$

из которого получаем оценку $\mathrm{T}_1 \leqslant \mathrm{T}_0$, где $\mathrm{T}_1 = 4^{-1}\Phi_0^{-1}$.

Теорема доказана.

§ 6. Разрушение решения сильно нелинейного уравнения спиновых волн

Целью настоящего параграфа является получение достаточных условий, близких к необходимым, разрушения решения следующей начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\triangle^2 u + \triangle u + \triangle_p u\right) + \triangle u - \triangle_4 u + \\ + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right) + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = 0, \tag{6.1}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_x}\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x) \in \mathbb{H}_0^2(\Omega), \tag{6.2}$$

где $p > 2$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, $|\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| > 0$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, Ω — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{4,\delta}$, $\delta \in (0, 1]$, $\triangle_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $\triangle_4 u = \operatorname{div}(|\nabla u|^2 \nabla u)$. Отметим, что поскольку $N = 3$, то $\mathbb{H}_0^2(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ при условии $p \in (2, 6]$ в силу теоремы вложения Соболева.

Уравнение (6.1) описывает спиновые волны в магнетиках при учете диссипации, сильной пространственной дисперсии и источников магнитных доменов.

6.1. Однозначная локальная разрешимость задачи в сильном обобщенном смысле. Дадим определение сильного обобщенного решения:

Определение 4. Сильным обобщенным решением задачи (6.1) называется решение класса $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}_0^2(\Omega))$, удовлетворяющее условиям

$$\langle \mathbb{D}(u), w\rangle = 0 \ \ \forall\, w \in \mathbb{H}_0^2(\Omega), \ \ u(0) = u_0 \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) \ \ \forall\, t \in [0,\mathrm{T}], \tag{6.3}$$

$$\mathbb{D}(u) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\triangle^2 u + \triangle u + \triangle_p u\right) + \triangle u + \\ + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right) + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) - \triangle_4 u,$$

где через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначены скобки двойственности между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^2(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-2}(\Omega)$.

Теорема 5. *Пусть* $p \in (2,6]$ *и* $u_0 \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$. *Тогда найдется такое* $\mathrm{T}_0 > 0$, *что существует единственное сильное обобщенное решение задачи* (1.1), (1.2) *класса* $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{H}_0^2(\Omega))$, *причем либо* $\mathrm{T}_0 = +\infty$, *либо* $\mathrm{T}_0 < +\infty$ *и в последнем случае имеет место предельное равенство*

$$\limsup_{t\uparrow \mathrm{T}_0} \| \triangle u \|_2 = +\infty.$$

Доказательство.

Введем обозначения

$$\mathbb{A}_0 u \equiv \triangle^2 u - \triangle u : \mathbb{H}_0^2(\Omega) \to \mathbb{H}^{-2}(\Omega), \tag{6.4}$$

$$\mathbb{A}_1(u) \equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) : \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega), \tag{6.5}$$

$$\mathbb{L}u \equiv -\triangle u : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \tag{6.6}$$

$$\mathbb{P}(u) \equiv \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_3}\mathbf{e}_1 + \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial u}{\partial x_1}\mathbf{e}_2 + \alpha_3 \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}\mathbf{e}_3 : \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega) \to \\ \to \mathbb{L}^2(\Omega)\times\mathbb{L}^2(\Omega)\times\mathbb{L}^2(\Omega), \tag{6.7}$$

$$\mathbb{D}\mathbf{z} \equiv \operatorname{div}(\mathbf{z}) : \mathbb{L}^2(\Omega)\times\mathbb{L}^2(\Omega)\times\mathbb{L}^2(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \tag{6.8}$$

$$\mathbb{F}(u) \equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^2\nabla u) : \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,4/3}(\Omega). \tag{6.9}$$

Посредством $\|\cdot\|_{+k}$, $k \in \mathbb{N}$, обозначим норму гильбертова пространства $\mathbb{H}_0^k(\Omega)$, посредством $\|\cdot\|_{-k}$ – норму в $\mathbb{H}^{-k}(\Omega)$.

Заметим, что поскольку $N = 3$, то имеет место вложение $\mathbb{H}_0^2(\Omega) \subset \subset \mathbb{W}_0^{1,r}(\Omega)$ при условии $r \in [2,6]$.

С учетом введенных обозначений (6.4)–(6.9) задача (6.3) примет следующий абстрактный вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbb{A}_0 u + \mathbb{A}_1(u)\right) + \mathbb{L}u + \mathbb{D}\mathbb{P}(u) = \mathbb{F}(u), \ \ u(0) = u_0 \in \mathbb{H}_0^2(\Omega). \tag{6.10}$$

Введем оператор

$$\mathbb{A}(u) \equiv \mathbb{A}_0 u + \mathbb{A}_1(u) : \mathbb{H}_0^2(\Omega) \to \mathbb{H}^{-2}(\Omega). \tag{6.11}$$

Заметим, что в силу (6.11) справедливо соотношение

$$\langle \mathbb{A}(u_1) - \mathbb{A}(u_2), u_1 - u_2 \rangle = \| \triangle u_1 - \triangle u_2 \|_2^2 + \| \nabla u_1 - \nabla u_2 \|_2^2 + \int\limits_\Omega dx \left(|\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2, \nabla u_1 - \nabla u_2 \right) \geqslant \geqslant \| \triangle u_1 - \triangle u_2 \|_2^2 = \| u_1 - u_2 \|_{+2}^2,$$

поскольку оператор $\triangle^2 : \mathbb{H}_0^2(\Omega) \to \mathbb{H}^{-2}(\Omega)$ является изометрическим изморфизмом. Значит, для оператора $\mathbb{A}(\cdot)$ существует липшиц-непрерывный обратный с постоянной Липшица, равной единице. Аналогичным образом доказывается, что оператор $\mathbb{A}_0 : \mathbb{H}_0^2(\Omega) \to \mathbb{H}^{-2}(\Omega)$, имеет липшиц-непрерывный обратный с постоянной Липшица, равной единице.

Рассмотрим теперь оператор

$$\mathbb{A}_1(u) \equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) : \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega).$$

Производная Фреше оператора $\mathbb{A}_1(u)$ имеет вид

$$\mathbb{A}'_{1,u}(u)h = \mathbb{A}_{11}(u)h + \mathbb{A}_{12}(u)h, \quad \mathbb{A}_{11}(u)h = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla h),$$
$$\mathbb{A}_{12}(u)h = -(p-2) \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-4} \nabla u (\nabla u, \nabla h)), \qquad (6.12)$$

где $\mathbb{A}'_{1,u}(\cdot) : \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \to \mathcal{L}(\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega); \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega))$, $p' = p/(p-1)$.

Докажем теперь, что производная Фреше $\mathbb{A}'_{1,u}(\cdot)$ является сильно непрерывным и ограниченным отображением $\mathbb{H}_0^2(\Omega) \to \mathcal{L}(\mathbb{H}_0^2(\Omega); \mathbb{H}^{-2}(\Omega))$. По определению имеем ($p \in (2, 6]$)

$$\| \mathbb{A}_{11}(u) - \mathbb{A}_{11}(u_n) \|_{\mathbb{H}_0^2(\Omega) \to \mathbb{H}^{-2}(\Omega)} = \sup_{\|h\|_{+2}=1} \| \mathbb{A}_{11}(u)h - \mathbb{A}_{11}(u_n)h \|_{-2} \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{C} \sup_{\|h\|_{+2}=1} \| \mathbb{A}_{11}(u)h - \mathbb{A}_{11}(u_n)h \|_{\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)} = \sup_{\|h\|_{+2}=1} \mathbb{J}_n(h), \qquad (6.13)$$

где

$$\mathbb{J}_n(h) = (p-1) \left(\int\limits_\Omega dx \, |\nabla h|^{p'} \, ||\nabla u_n|^{p-2} - |\nabla u|^{p-2}|^{p'} \right)^{1/p'}. \qquad (6.14)$$

Из (6.14) получаем оценку сверху на величину $\mathbb{J}_n(h)$:

$$\mathbb{J}_n(h) \leqslant (p-1) \left(\int\limits_\Omega dx \, |\nabla h|^p \right)^{1/p} \times$$
$$\times \left(\int\limits_\Omega dx \, \left| |\nabla u_n|^{p-2} - |\nabla u|^{p-2} \right|^{p/(p-2)} \right)^{(p-2)/p}. \qquad (6.15)$$

Рассмотрим оператор

$$\mathrm{f} = |\nabla u|^{p-2} = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^{(p-2)/2}, \quad u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}. \tag{6.16}$$

Оператор (6.16) порожден каратеодориевой функцией, причем оператор Немыцкого (6.16), как несложно убедиться, действует из $\mathbb{L}^p(\Omega) \times \times \mathbb{L}^p(\Omega) \times \mathbb{L}^p(\Omega)$ в $\mathbb{L}^{p/(p-2)}(\Omega)$, $p > 2$, $p/(p-2) > 1$. Значит, по теореме Немыцкого–Вайнберга [Вайнберг] оператор

$$\mathrm{f} : \mathbb{L}^p(\Omega) \times \mathbb{L}^p(\Omega) \times \mathbb{L}^p(\Omega) \to \mathbb{L}^{p/(p-2)}(\Omega)$$

является ограниченным и сильно непрерывным, т.е.

$$\int\limits_\Omega dx \left| |\nabla u_n|^{p-2} - |\nabla u|^{p-2} \right|^{p/(p-2)} \to +0,$$

как только $\nabla u_n \to \nabla u$ сильно в $\mathbb{L}^p(\Omega)$. Из (6.15) вытекает, что $\mathbb{J}_n(h) \to +0$ равномерно по h на сфере $\| h \|_{+2} = 1$. Стало быть, в силу (6.12)–(6.16) имеем

$$\| \mathbb{A}_{11}(u) - \mathbb{A}_{11}(u_n) \|_{\mathbb{H}_0^2(\Omega) \to \mathbb{H}^{-2}(\Omega)} \to +0$$

при $n \to +\infty$.

Рассмотрим теперь оператор (6.12)

$$\mathbb{A}_{12}(u)h \equiv -(p-2)\,\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-4}(\nabla u, \nabla h)\nabla u).$$

Введем функции

$$f_{ij}(\overrightarrow{\xi}) = |\overrightarrow{\xi}|^{p-2} \frac{\xi_i}{|\overrightarrow{\xi}|} \frac{\xi_j}{|\overrightarrow{\xi}|}, \quad \overrightarrow{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3, \quad i, j = \overline{1,3},$$

где $\xi_m = u_{x_m}$, $m \in \overline{1,3}$, $h \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ $(p \in (2,6])$. Нетрудно проверить, что операторы Немыцкого, определенные функциями f_{ij}, действуют из $\mathbb{L}^p(\Omega) \times \mathbb{L}^p(\Omega) \times \mathbb{L}^p(\Omega)$ в $\mathbb{L}^{p/(p-2)}(\Omega)$. Тогда справедливо неравенство

$$\| \mathbb{A}_{12}(u) - \mathbb{A}_{12}(u_n) \|_{\mathbb{H}_0^2 \to \mathbb{H}^{-2}} = \sup_{\|h\|_{\mathbb{H}_0^2}=1} \| \mathbb{A}_{12}(u)h - \mathbb{A}_{12}(u_n)h \|_{\mathbb{H}^{-2}} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C} \sum_{i,j=1}^{3} \sup_{\|h\|_{\mathbb{H}_0^2}=1} \left(\int\limits_\Omega dx \left| |\nabla u|^{p-2} \frac{u_{x_i}}{|\nabla u|} \frac{u_{x_j}}{|\nabla u|} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - |\nabla u_n|^{p-2} \frac{u_{nx_i}}{|\nabla u_n|} \frac{u_{nx_j}}{|\nabla u_n|} \right|^{p'} |h_{x_j}|^{p'} \right)^{1/p'} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C} \sum_{i,j=1}^{3} \left(\int\limits_\Omega dx \left| |\nabla u|^{p-2} \frac{u_{x_i}}{|\nabla u|} \frac{u_{x_j}}{|\nabla u|} - \right.\right.$$

$$- |\nabla u_n|^{p-2} \frac{u_{nx_i}}{|\nabla u_n|} \frac{u_{nx_j}}{|\nabla u_n|} \Big|^{p/(p-2)} \Bigg)^{(p-2)/(p-1)} \to +0,$$

как только $\nabla u_n \to \nabla u$ сильно в $\mathbb{L}^p(\Omega)$. Монотонность оператора $\mathbb{A}_{12}$ очевидна.

Стало быть,

$$\| \mathbb{A}'_{1,u}(u) - \mathbb{A}'_{1,u_n}(u_n) \|_{\mathbb{H}_0^2(\Omega) \to \mathbb{H}^{-2}(\Omega)} \to +0, \tag{6.17}$$

как только $u_n \to u$ сильно в $\mathbb{H}_0^2(\Omega)$.

Рассмотрим теперь операторы $\mathbb{DP}(u)$ и $\mathbb{F}(u)$. Для оператора $\mathbb{DP}(u)$ справедливо следующее неравенство:

$$\| \mathbb{DP}(v_1) - \mathbb{DP}(v_2) \|_{-2}^* \leqslant \mathrm{C} \left\| \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right\|_{-1}^* +$$

$$+ \mathrm{C} \left\| \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right\|_{-1}^* + \mathrm{C} \left\| \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right\|_{-1}^* = \mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_2 + \mathrm{K}_3.$$

Рассмотрим, например, слагаемое K_1, поскольку совершенно очевидно, что слагаемые K_2 и K_3 оцениваются с точностью до обозначений таким же образом. Действительно,

$$\mathrm{K}_1 = \mathrm{C} \left\| \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right\|_{-1}^* \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C} \left\| \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \left[\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right] \right\|_{-1}^* + \mathrm{C} \left\| \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \left[\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right] \right\|_{-1}^* \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C} \left(\int\limits_\Omega dx \left| \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right|^2 \left[\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right]^2 \right)^{1/2} + \mathrm{C} \left(\int\limits_\Omega dx \left| \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right|^2 \left[\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right]^2 \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C} \sum_{i=1}^{2} \| \nabla v_i \|_4 \| \nabla v_1 - \nabla v_2 \|_4 \leqslant \mathrm{C} \sum_{i=1}^{2} \| v_i \|_{+2} \| v_1 - v_2 \|_{+2} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{CR} \| v_1 - v_2 \|_{+2}$$

$\forall \ v_i \in \mathbb{H}_0^2(\Omega), \ \| v_i \|_{+2} \leqslant \mathrm{R}$. Таким образом, приходим к выводу, что справедливо следующее неравенство:

$$\| \mathbb{DP}(v_1) - \mathbb{DP}(v_2) \|_{-2}^* \leqslant \mu_1(\mathrm{R}) \| v_1 - v_2 \|_{+2}, \tag{6.18}$$

где $v_i \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$, $\mu_1(\mathrm{R}) = \mathrm{CR}$, $\| v_i \|_{+2} \leqslant \mathrm{R}$. Рассмотрим теперь оператор $\mathbb{F}(u)$. Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\| \mathbb{F}(v_1) - \mathbb{F}(v_2) \|_{-2}^* \leqslant \mathrm{C} \left(\int\limits_\Omega dx \left| |\nabla v_1|^2 \nabla v_1 - |\nabla v_2|^2 \nabla v_2 \right|^{4/3} \right)^{3/4} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C}\sum_{i=1}^{2}\left(\int\limits_{\Omega} dx\,|\nabla v_i|^{8/3}|\nabla v_1-\nabla v_2|^{4/3}\right)^{3/4}\leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C}\sum_{i=1}^{2}\left(\int\limits_{\Omega} dx\,|\nabla v_i|^{4}\right)^{1/2}\|\,v_1-v_2\,\|_4,$$

$$\|\,\mathbb{F}(v_1)-\mathbb{F}(v_2)\,\|^{*}_{-2}\leqslant \mu_2(\mathrm{R})\,\|\,\nabla v_1-\nabla v_2\,\|_{+2} \tag{6.19}$$

$\forall\ v_i\in\mathbb{H}^2_0(\Omega),\ \|\,v_i\,\|_{+2}\leqslant \mathrm{R},\ \mu_2(\mathrm{R})=\mathrm{CR}^2$. Рассмотрим теперь задачу (6.10). Введем обозначение $v=\mathbb{A}(u)$. Будем искать v в классе $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T};\mathbb{H}^{-2}(\Omega))$. В силу доказанных ранее свойств для оператора $\mathbb{A}(\cdot):\mathbb{H}^2_0(\Omega)\to\mathbb{H}^{-2}(\Omega)$ существует липшиц-непрерывный обратный $\mathbb{A}^{-1}(\cdot):\mathbb{H}^{-2}(\Omega)\to\mathbb{H}^2_0(\Omega)$. Таким образом, $u=\mathbb{A}^{-1}(v)$ и задача (6.10) примет эквивалентный вид

$$\frac{dv}{dt}+\mathbb{L}\mathbb{A}^{-1}(v)+\mathbb{D}\mathbb{P}(\mathbb{A}^{-1}(v))=\mathbb{F}(\mathbb{A}^{-1}(v)), \tag{6.20}$$

$$v(0)=v_0=\mathbb{A}(u_0)\in\mathbb{H}^{-2}(\Omega).$$

В классе $v\in\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T};\mathbb{H}^{-2}(\Omega))$ приходим к следующему интегральному уравнению:

$$v(t)=v_0+\int\limits_0^t ds\,\mathbb{Q}(v)(s),\ \ \mathbb{Q}(v)=-\mathbb{L}\mathbb{A}^{-1}(v)-$$

$$-\mathbb{D}\mathbb{P}(\mathbb{A}^{-1}(v))+\mathbb{F}(\mathbb{A}^{-1}(v)). \tag{6.21}$$

Будем искать решения интегрального уравнения (6.21) в классе

$$v\in\mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T};\mathbb{H}^{-2}(\Omega))$$

при достаточно малом $\mathrm{T}>0$. Воспользуемся методом сжимающих отображений. С этой целью введем замкнутое выпуклое ограниченное подмножество $\mathbb{B}_{\mathrm{R}}$ банахова пространства $\mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T};\mathbb{H}^{-2}(\Omega))$:

$$\mathbb{B}_{\mathrm{R}}\equiv\left\{v\in\mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T};\mathbb{H}^{-2}(\Omega)):\|\,v\,\|_{\mathrm{T}}=\operatorname*{ess.sup}_{t\in(0,\mathrm{T})}\|\,v\,\|_{-2}\leqslant\mathrm{R}\right\}. \tag{6.22}$$

Докажем, что оператор

$$\mathbb{H}(v)=v_0+\int\limits_0^t ds\,\mathbb{Q}(v) \tag{6.23}$$

действует из $\mathbb{B}_{\mathrm{R}}$ в $\mathbb{B}_{\mathrm{R}}$ и является сжимающим на $\mathbb{B}_{\mathrm{R}}$ при достаточно малом $\mathrm{T}>0$ и достаточно большом $\mathrm{R}>0$.

Итак, пусть $\| v_0 \|_{-2} \leqslant \mathrm{R}/2$, тогда

$$\| \mathbb{H}(v) \|_{\mathrm{T}} \leqslant \mathrm{R}/2 + \mathrm{T} \| v \|_{\mathrm{T}} [1 + \mu_1(\mathrm{R}) + \mu_2(\mathrm{R})],$$

где $\mu_1(\mathrm{R}) = \mathrm{CR}$, $\mu_2(\mathrm{R}) = \mathrm{CR}^2$, $\mathrm{R} \geqslant \| v \|_T$, значит,

$$\| \mathbb{H}(v) \|_{\mathrm{T}} \leqslant \mathrm{R}$$

при условии $\mathrm{T} \leqslant (2[1 + \mu_1(\mathrm{R}) + \mu_2(\mathrm{R})])^{-1}$. Докажем теперь сжимаемость оператора $\mathbb{H}(v)$ на $\mathbb{B}_{\mathrm{R}}$. Действительно, в силу (6.18)–(6.23)

$$\| \mathbb{H}(v_1) - \mathbb{H}(v_2) \|_{\mathrm{T}} \leqslant \mathrm{T} \| \mathbb{Q}(v_1) - \mathbb{Q}(v_2) \|_{\mathrm{T}} \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{T} [1 + \mu_1(\mathrm{R}) + \mu_2(\mathrm{R})] \| v_1 - v_2 \|_{\mathrm{T}},$$

$\mathrm{R} = \max\{\| v_1 \|_{\mathrm{T}}, \| v_2 \|_{\mathrm{T}}\}$ при условии $\mathrm{T} < 1/[2(1 + \mu_1(\mathrm{R})) + \mu_2(\mathrm{R})]$. Стало быть, оператор $\mathbb{H}$ является сжимающим на $\mathbb{B}_{\mathrm{R}}$ при достаточно большом $\mathrm{R} > 0$ и при достаточно малом $\mathrm{T} > 0$. Значит, существует единственное решение интегрального уравнения (6.21) класса $\mathbb{L}^{\infty}(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}^{-2}(\Omega))$. Используя стандартный алгоритм продолжения решения интегрального уравнения (6.21) во времени, получим, что найдется такое максимальное $\mathrm{T}_0 > 0$, что либо $\mathrm{T}_0 = +\infty$, либо $\mathrm{T}_0 < +\infty$ и в последнем случае имеет место предельное равенство

$$\limsup_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \| v \|_{-2} = +\infty. \tag{6.24}$$

Отметим теперь, что из явного вида оператора $\mathbb{H}(v)$ следует, что

$$\mathbb{H}(v) : \mathbb{L}^{\infty}(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}^{-2}(\Omega)) \to \mathbb{AC}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{H}^{-2}(\Omega)),$$
$$\mathbb{H}(v) : \mathbb{AC}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{H}^{-2}(\Omega)) \to \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{H}^{-2}(\Omega)).$$

Значит, существует единственное решение задачи (6.20) класса $\mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}^{-2}(\Omega))$, причем либо $\mathrm{T}_0 = +\infty$, либо $\mathrm{T}_0 < +\infty$ и в последнем случае имеет место предельное равенство (6.24).

Рассмотрим теперь уравнение

$$\mathbb{A}(u) = v \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{H}^{-2}(\Omega)). \tag{6.25}$$

В силу свойств оператора $\mathbb{A}$ имеем

$$u = \mathbb{A}^{-1}(v). \tag{6.26}$$

Причем справедливы следующие неравенства:

$$\| u(t) - u(t_0) \|_{+2} \leqslant \| \mathbb{A}^{-1}(v)(t) - \mathbb{A}^{-1}(v)(t_0) \|_{+2} \leqslant$$
$$\leqslant \| v(t) - v(t_0) \|_{-2} \to +0$$

при $t \to t_0$, $t, t_0 \in [0, \mathrm{T}_0)$. Значит, $u(x, t) \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}_0^2(\Omega))$. Докажем теперь, что на самом деле u из (6.26) принадлежит классу $\mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}_0^2(\Omega))$. Действительно, в силу дифференцируемости по

Фреше оператора $\mathbb{A}$ в классе $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{H}_0^2(\Omega))$ из (6.25) с необходимостью получаем, что

$$\mathbb{A}_u^{'}(u)u^{'} = v^{'} \in \mathbb{C}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{H}^{-2}(\Omega)). \tag{6.27}$$

Выпишем подробнее уравнение (6.27):

$$\left[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_{1,u}^{'}(u)\right] u^{'} = v^{'}. \tag{6.28}$$

Уравнение (6.28) в силу свойств оператора $\mathbb{A}_0$ эквивалентно следующему уравнению:

$$\left[\mathrm{I} + \mathbb{A}_0^{-1}\mathbb{A}_{1,u}^{'}(u)\right] u^{'} = \mathbb{A}_0^{-1}v^{'}. \tag{6.29}$$

Докажем теперь, что линейный при фиксированном $u \in \in \mathbb{C}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{H}_0^2(\Omega))$ оператор

$$\mathbb{C} = \mathrm{I} + \mathbb{A}_0^{-1}\mathbb{A}_{1,u}^{'}(u) \tag{6.30}$$

ограничен и обратим. Действительно, ограниченность вытекает из свойств оператора $\mathbb{A}_0$, имеющего липшиц-непрерывный обратный, а оператор $\mathbb{A}_{1,u}^{'}(\cdot)$ ограничен как оператор $\mathbb{H}_0^2(\Omega) \to \mathcal{L}(\mathbb{H}_0^2(\Omega);\mathbb{H}^{-2}(\Omega))$. Докажем теперь, что оператор $\mathbb{C}$, определенный в (6.30), обратим. С этой целью рассмотрим уравнение

$$\mathbb{C}w = 0. \tag{6.31}$$

Подействуем на обе части последнего уравнения оператором $\mathbb{A}_0$, тогда получим, что

$$\left[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_{1,u}^{'}(u)\right] w = 0.$$

Докажем, что оператор $\mathbb{E} = \mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_{1,u}^{'}(u)$ обратим. Действительно, имеем

$$\begin{aligned}\langle \mathbb{E}w_1 - \mathbb{E}w_2, w_1 - w_2\rangle = \| \triangle w_1 - \triangle w_2 \|_2^2 + \| \nabla w_1 - \nabla w_2 \|_2^2 + \\ + \int\limits_\Omega dx\, |\nabla u|^{p-2}|\nabla w_1 - \nabla w_2|^2 + \\ + (p-2)\int\limits_\Omega dx\, |\nabla u|^{p-4}|(\nabla w_1 - \nabla w_2, \nabla u)|^2 \geqslant \| w_1 - w_2 \|_{+2}^2 .\end{aligned}$$

Значит, оператор $\mathbb{E}$ имеет липшиц-непрерывный обратный с постоянной Липшица, равной единице. Стало быть, уравнение (6.31) имеет только тривиальное решение $w = 0$ в классе $\mathbb{H}_0^2(\Omega)$.

Значит, из (6.29) получим

$$u^{'} = \widehat{\mathbb{C}}^{-1}\mathbb{A}_0^{-1}v^{'}. \tag{6.32}$$

Нам осталось доказать, что $u^{'} = \widehat{\mathbb{C}}^{-1}\mathbb{A}_0^{-1}v^{'} \in \mathbb{C}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{H}_0^2(\Omega))$ при фиксированном $u \in \mathbb{C}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{H}_0^2(\Omega))$. Действительно, в силу (6.32) справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}\| u^{'}(t) - u^{'}(t_0) \|_{+2} \leqslant \| \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0)\mathbb{A}_0^{-1}[v^{'}(t) - v^{'}(t_0)] \|_{+2} + \\ + \| (\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) - \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t))\mathbb{A}_0^{-1}v^{'}(t_0) \|_{+2} \leqslant \\ \leqslant \mathrm{C} \| v^{'}(t) - v^{'}(t_0) \|_{-2} + \mathrm{C} \| \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) - \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t) \|_{\mathbb{H}_0^2(\Omega)\to\mathbb{H}_0^2(\Omega)}. \quad (6.33)\end{aligned}$$

Отметим, что линейный при фиксированном $u \in \mathbb{C}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{H}_0^2(\Omega))$ оператор $\widehat{\mathbb{C}}$ является непрерывным, а значит, в силу теоремы Банаха об обратном отображении, оператор $\widehat{\mathbb{C}}^{-1}$ является линейным непрерывным и, следовательно, в силу линейности ограниченным. Стало быть, мы можем воспользоваться спектральным представлением для линейного ограниченного оператора $\widehat{\mathbb{C}}^{-1} : \mathbb{H}_0^2(\Omega) \to \mathbb{H}_0^2(\Omega)$.

Прежде всего введем резольвенту оператора $\widehat{\mathbb{C}}$:

$$\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}) = \left(\lambda\mathbb{I} - \widehat{\mathbb{C}}\right)^{-1}.$$

Пусть Γ — окружность $|\lambda| = r$ с достаточно большим радиусом, большим чем

$$\sup_{t\in[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]} \| \widehat{\mathbb{C}} \|_{\mathbb{H}_0^2(\Omega)\to\mathbb{H}_0^2(\Omega)}.$$

Введенная величина определена корректно, поскольку при указанных $t \in [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon] \subset [0,\mathrm{T}_0)$ имеет место неравенство

$$\sup_{t\in[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]} \| u \|_{+2} < +\infty.$$

Теперь мы можем воспользоваться спектральным представлением для операторов $\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t)$ и $\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0)$ с одним и тем же введенным ранее контуром Γ:

$$\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} d\lambda\,\lambda^{-1}\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t)),\ \ \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} d\lambda\,\lambda^{-1}\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0)).$$

Очевидно, имеем

$$\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t) - \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} d\lambda\,\lambda^{-1}\left[\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t)) - \mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0))\right].$$

Теперь воспользуемся известным представлением для резольвент операторов:

$$\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t)) - \mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0)) = \mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0))\sum_{n=1}^{+\infty}[(\widehat{\mathbb{C}}(t) - \widehat{\mathbb{C}}(t_0))\mathbb{R}(\lambda,\widehat{\mathbb{C}}(t_0)]^n$$

при условии

$$\| \widehat{\mathbb{C}}(t_0) - \widehat{\mathbb{C}}(t) \|_{\mathbb{H}_0^2(\Omega)\to\mathbb{H}_0^2(\Omega)} \| \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0)) \|_{\mathbb{H}_0^2(\Omega)\to\mathbb{H}_0^2(\Omega)} \leqslant \delta < 1.$$

Справедлива следующее неравенство:

$$\| \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t)) - \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0)) \|_{\mathbb{H}_0^2(\Omega)\to\mathbb{H}_0^2(\Omega)} \leqslant \| \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0)) \|_{\mathbb{H}_0^2(\Omega)\to\mathbb{H}_0^2(\Omega)} \times$$
$$\times \sum_{n=1}^{+\infty} \| \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0)) \|^n_{\mathbb{H}_0^2(\Omega)\to\mathbb{H}_0^2(\Omega)} \times$$
$$\times \| \widehat{\mathbb{C}}(t) - \widehat{\mathbb{C}}(t_0) \|^n_{\mathbb{H}_0^2(\Omega)\to\mathbb{H}_0^2(\Omega)}.$$

Теперь заметим, что

$$\widehat{\mathbb{C}}(t) - \widehat{\mathbb{C}}(t_0) = \mathbb{A}_0^{-1} \left[\mathbb{A}_{1,u}^{'}(u(t)) - \mathbb{A}_{1,u}^{'}(u(t_0)) \right].$$

Из (6.17) следует непрерывность производных Фреше $\mathbb{A}_{1,u}^{'}(u)$ по $u \in \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$. В силу непрерывности производных Фреше $\mathbb{A}_{1,u}^{'}(u)$ по $u \in \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$ и того, что $u \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}_0^2(\Omega))$, имеем

$$\| \widehat{\mathbb{C}}(t) - \widehat{\mathbb{C}}(t_0) \|_{\mathbb{H}_0^2(\Omega)\to\mathbb{H}_0^2(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant \| \mathbb{A}_{1,u}^{'}(u(t)) - \mathbb{A}_{1,u}^{'}(u(t_0)) \|_{\mathbb{H}_0^2(\Omega)\to\mathbb{H}^{-2}(\Omega)} \to +0,$$

$$\| \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t)) - \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0)) \|_{\mathbb{H}_0^2(\Omega)\to\mathbb{H}_0^2(\Omega)} \to 0,$$
$$\| \widehat{\mathbb{C}}(t)^{-1} - \widehat{\mathbb{C}}(t_0)^{-1} \|_{\mathbb{H}_0^2(\Omega)\to\mathbb{H}_0^2(\Omega)} \to +0$$

при $t \to t_0$.

Значит, в силу (6.33) имеем: $u \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}_0^2(\Omega))$.

Теорема доказана.

6.2. Разрушение сильного обобщенного решения задачи и глобальная разрешимость. В предыдущем пункте мы доказали локальную во времени однозначную разрешимость задачи (6.1), (6.2) в сильном обобщенном смысле: $u \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}_0^2(\Omega))$. Здесь мы докажем, что при некоторых достаточных условиях справедливо неравенство $\mathrm{T}_0 < +\infty$, и тем самым выполнено следующее предельное равенство:

$$\limsup_{t\uparrow \mathrm{T}_0} \| \triangle u \|_2 = +\infty. \tag{6.34}$$

Введем функционал, имеющий смысл энергии:

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2} \| \triangle u \|_2^2 + \frac{1}{2} \| \nabla u \|_2^2 + \frac{p-1}{p} \| \nabla u \|_p^p. \tag{6.35}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы* 5, *тогда*
1) *если* $p \in (4,6]$, *то* $\mathrm{T}_0 = +\infty$ *и справедливо неравенство*

$$\Phi(t) \leqslant \left(\Phi_0^{1-\vartheta} + (1-\vartheta)\mathrm{B}_3 t\right)^{1/(1-\vartheta)}, \quad \vartheta = 4/p;$$

2) *если* $p = 4$, *то* $\mathrm{T}_0 = +\infty$ *и справедливо неравенство*

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 e^{\mathrm{B}_3 t};$$

3) *если* $p \in (2,4)$, *и выполнено условие*

$$\Phi'(0) > \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha-1}}\,\Phi(0) + \frac{\beta}{\alpha-1}\Phi(0),$$

то $\mathrm{T}_0 \in [\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2]$ *и выполнено предельное равенство* (6.34), *где*

$$\alpha = \frac{4+p}{2p}, \quad \gamma = \frac{28}{4-p}\left[1 + 6\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^2\right], \quad \beta = \frac{84}{4-p}\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^2, \quad p \in (2,4).$$

$$\Phi'(0) = \| \nabla u_0 \|_4^4 - \| \nabla u_0 \|_2^2,$$

$$\Phi_0 = \Phi(0) = \frac{1}{2}\| \triangle u_0 \|_2^2 + \frac{1}{2}\| \nabla u_0 \|_2^2 + \frac{p-1}{p}\| \nabla u_0 \|_p^p,$$

$$\mathrm{T}_2 = \Phi_0^{1-\alpha}\mathrm{A}^{-1}, \quad \mathrm{T}_1 = \frac{1}{4\mathrm{B}_1^4\Phi_0},$$

$$\mathrm{A}^2 \equiv (1-\alpha)^2\Phi^{-2\alpha}(0)\left[\left(\Phi'(0) - \frac{\beta}{\alpha-1}\Phi(0)\right)^2 - \frac{\gamma}{\alpha-1}(\Phi(0))^2\right],$$

B_1 — *наилучшая константа вложения* $\mathbb{H}_0^2(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\mathrm{B}_3 = \mathrm{B}_2^4\left(\frac{p}{p-1}\right)^{4/p},$$

B_2 — *наилучшая константа вложения* $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subseteq \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega)$ *при* $p \geqslant 4$.

Доказательство.

Возьмем теперь в качестве w в определении сильного обобщенного решения функцию $u \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{H}_0^2(\Omega))$, тогда для любого $\mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}_0)$ после интегрирования по частям первого энергетического равенства, получим

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\| \triangle u \|_2^2 + \frac{1}{2}\| \nabla u \|_2^2 + \frac{p-1}{p}\| \nabla u \|_p^p\right] + \| \nabla u \|_2^2 = \| \nabla u \|_4^4. \tag{6.36}$$

Теперь в качестве w возьмем функцию $u' \in \mathbb{C}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{H}_0^2(\Omega))$, тогда после интегрирования по частям получим второе энергетическое равенство

$$\| \triangle u' \|_2^2 + \| \nabla u' \|_2^2 + (p-1) \int\limits_\Omega dx\, |\nabla u|^{p-2} |\nabla u'|^2 =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \| \nabla u \|_4^4 - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| \nabla u \|_2^2 + \alpha_1 \int\limits_\Omega dx\, u' \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) +$$

$$+ \alpha_2 \int\limits_\Omega dx\, u' \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \alpha_3 \int\limits_\Omega dx\, u' \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right). \quad (6.37)$$

Теперь заметим, что в классе $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}_0^2(\Omega))$ функционал $\Phi(t)$, определенный в (6.35), в силу первого энергетического равенства (6.36) принадлежит классу $\mathbb{C}^{(2)}[0, \mathrm{T}_0)$.

Получим теперь оценку сверху на величину $(\Phi'(t))^2$:

$$(\Phi')^2 = \left(\int\limits_\Omega dx \triangle u' \triangle u + \int\limits_\Omega dx \left(\nabla u', \nabla u \right) + (p-1) \int\limits_\Omega dx\, |\nabla u|^{p-2} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\nabla u', \nabla u \right) \right)^2 \leqslant \left(\| \triangle u' \|_2 \| \triangle u \|_2 + \| \nabla u' \|_2 \| \nabla u \|_2 + \right.$$

$$\left. + (p-1) \left(\int\limits_\Omega dx\, |\nabla u|^{p-2} |\nabla u'|^2 \right)^{1/2} \| \nabla u \|_p^{p/2} \right)^2 \leqslant \| \triangle u' \|_2^2 \| \triangle u \|_2^2 +$$

$$+ \| \nabla u' \|_2^2 \| \nabla u \|_2^2 + (p-1) \int\limits_\Omega dx\, |\nabla u|^{p-2} |\nabla u'|^2 (p-1) \| \nabla u \|_p^p +$$

$$+ 2 \| \triangle u' \|_2 \| \nabla u \|_2 \| \triangle u \|_2 \| \nabla u' \|_2 + 2 \| \triangle u' \|_2 (p-1)^{1/2} \| \nabla u \|_p^{p/2} \times$$

$$\times \| \triangle u \|_2 (p-1)^{1/2} \left(\int\limits_\Omega dx\, |\nabla u|^{p-2} |\nabla u'|^2 \right)^{1/2} + 2 \| \nabla u' \|_2 (p-1)^{1/2} \times$$

$$\times \| \nabla u \|_p^{p/2} \| \nabla u \|_2 (p-1)^{1/2} \left(\int\limits_\Omega dx\, |\nabla u|^{p-2} |\nabla u'|^2 \right)^{1/2} \leqslant \Big(\| \triangle u \|_2^2 +$$

$$+ \| \nabla u \|_2^2 + (p-1) \| \nabla u \|_p^p \Big) \Big(\| \triangle u' \|_2^2 + \| \nabla u' \|_2^2 + (p-1) \times$$

$$\times \int\limits_\Omega dx\, |\nabla u|^{p-2} |\nabla u'|^2 \Big) \leqslant p \Big(\| \triangle u' \|_2^2 + \| \nabla u' \|_2^2 + (p-1) \int\limits_\Omega dx\, |\nabla u|^{p-2} \times$$

$$\times |\nabla u'|^2 \Big) \left(\frac{1}{p} \| \triangle u \|_2^2 + \frac{1}{p} \| \nabla u \|_2^2 + \frac{p-1}{p} \| \nabla u \|_p^p \right) \leqslant$$

$$\leqslant p \left(\| \triangle u' \|_2^2 + \| \nabla u' \|_2^2 + (p-1) \int\limits_\Omega dx\, |\nabla u|^{p-2} |\nabla u'|^2 \right) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{2} \parallel \triangle u \parallel_2^2 + \frac{1}{2} \parallel \nabla u \parallel_2^2 + \frac{p-1}{p} \parallel \nabla u \parallel_p^p \right).$$

Стало быть, справедливо неравенство

$$(\Phi')^2 \leqslant p\Phi \mathrm{J},$$

$$\mathrm{J} = \parallel \triangle u' \parallel_2^2 + \parallel \nabla u' \parallel_2^2 + (p-1) \int\limits_\Omega dx\, |\nabla u|^{p-2} |\nabla u'|^2. \tag{6.38}$$

Заметим, что функция $\mathrm{J}(t)$ совпадает с правой частью второго энергетического равенства (6.37). Так что теперь наша задача — получить оценку сверху на величину J, используя первое и второе энергетические равенства (6.36), (6.37). Справедливо следующее неравенство:

$$\mathrm{J} \leqslant -\frac{1}{4}\frac{d}{dt} \parallel \nabla u \parallel_2^2 + \frac{1}{4}\Phi'' - \alpha_1 \int\limits_\Omega dx\, \frac{\partial u'}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_3} -$$

$$- \alpha_2 \int\limits_\Omega dx\, \frac{\partial u'}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial u}{\partial x_1} - \alpha_3 \int\limits_\Omega dx\, \frac{\partial u'}{\partial x_3}\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}. \tag{6.39}$$

Справедливы следующие вспомогательные неравенства:

$$\left| \alpha_i \int\limits_\Omega dx\, \frac{\partial u'}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} \right| \leqslant \frac{|\alpha_i|^2}{2\varepsilon} \parallel \nabla u \parallel_4^4 + \frac{\varepsilon}{2} \parallel \nabla u' \parallel_2^2, \tag{6.40}$$

$$\left| \frac{d}{dt} \parallel \nabla u \parallel_2^2 \right| \leqslant \varepsilon \parallel \nabla u' \parallel_2^2 + \frac{1}{\varepsilon} \parallel \nabla u \parallel_2^2. \tag{6.41}$$

Из (6.36) и (6.39)–(6.41) получим цепочку неравенств

$$\mathrm{J} \leqslant \frac{1}{4}\Phi'' + \frac{\varepsilon}{4} \parallel \nabla u' \parallel_2^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \parallel \nabla u \parallel_2^2 + \frac{3\varepsilon}{2} \parallel \nabla u' \parallel_2^2 +$$

$$+ \frac{3}{2\varepsilon} \sum_{i=1}^{3} |\alpha_i|^2 \parallel \nabla u \parallel_4^4 \leqslant \frac{1}{4}\Phi'' + \frac{7\varepsilon}{4}\mathrm{J} + \frac{1}{2\varepsilon}\Phi + \frac{3}{2\varepsilon} \sum_{i=1}^{3} |\alpha_i|^2 [2\Phi + \Phi'']. \tag{6.42}$$

Из (6.42) получим

$$\left[1 - \frac{7}{4}\varepsilon \right] \mathrm{J} \leqslant \frac{1}{4}\Phi'' + \left[\frac{1}{2\varepsilon} + \frac{3}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{3} |\alpha_i|^2 \right] \Phi + \frac{3}{2\varepsilon} \sum_{i=1}^{3} |\alpha_i|^2 \Phi'. \tag{6.43}$$

Из (6.38) и (6.43) вытекает следующее обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка (см. [Калантаров, Ладыженская]):

$$\Phi\Phi'' - \alpha(\Phi')^2 + \beta\Phi\Phi' + \gamma\Phi^2 \geqslant 0, \tag{6.44}$$

где

$$\alpha = \frac{4}{p}\left[1 - \frac{7}{4}\varepsilon\right], \quad \gamma = \frac{2}{\varepsilon} + \frac{12}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{3}|\alpha_i|^2, \quad \beta = \frac{6}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{3}|\alpha_i|^2.$$

Потребуем, чтобы $\varepsilon \in (0, (4-p)/7)$ при $p \in (2,4)$. Нетрудно убедиться в том, что тогда $\alpha > 1$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$. Как и ранее, можно получить явное оптимальное выражение для ε : $\varepsilon = (4-p)/14$.

Неравенство (6.44) нетрудно привести к следующему линейному дифференциальному неравенству:

$$\mathbb{Z}'' + \beta\mathbb{Z}' - \delta\mathbb{Z} \leqslant 0, \quad \delta = \gamma(\alpha - 1), \tag{6.45}$$

относительно новой функции

$$\mathbb{Z} = \Phi^{1-\alpha}. \tag{6.46}$$

Перейдем теперь к новой функции

$$\mathbb{Y} \equiv \mathbb{Z}e^{\beta t} \tag{6.47}$$

в уравнении (6.45), тогда получим следующее неравенство:

$$\mathbb{Y}'' - \beta\mathbb{Y}' - \delta\mathbb{Y} \leqslant 0. \tag{6.48}$$

Из (6.46), (6.47) следует, что

$$\mathbb{Y}' = e^{\beta t}(\alpha - 1)\Phi^{-\alpha}\left(-\Phi' + \frac{\beta}{\alpha - 1}\Phi\right). \tag{6.49}$$

Потребуем выполнения условия

$$\Phi'(0) > \frac{\beta}{\alpha - 1}\Phi(0). \tag{6.50}$$

В силу непрерывной дифференцируемости функции $\mathbb{Y}$ из условия (6.50) с учетом (6.49) приходим к выводу, что найдется такой интервал $[0, \mathrm{T}_3)$, принадлежащий области определения $\Phi(t)$, что $\mathbb{Y}' \leqslant 0$. Следовательно, при $t \in [0, \mathrm{T}_3]$ величина $-\beta\mathbb{Y}'(t) \geqslant 0$. Отсюда и из неравенства (6.48) получим следующее дифференциальное неравенство:

$$\mathbb{Y}'' - \delta\mathbb{Y} \leqslant 0 \ \text{ при } \ t \in [0, \mathrm{T}_3]. \tag{6.51}$$

Потребуем выполнения следующего неравенства:

$$\Phi'(0) > \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha - 1}}\Phi(0) + \frac{\beta}{\alpha - 1}\Phi(0). \tag{6.52}$$

Из неравенства (6.51) вытекает неравенство

$$\left(\mathbb{Y}'\right)^2 \geqslant \delta\mathbb{Y}^2 + \mathbb{A}^2, \tag{6.53}$$

где в силу (6.52)

$$\mathrm{A}^2 \equiv (1-\alpha)^2\Phi^{-2\alpha}(0)\left[\left(\Phi'(0)-\frac{\beta}{\alpha-1}\Phi(0)\right)^2-\frac{\delta}{(1-\alpha)^2}(\Phi(0))^2\right]>0.$$

Из (6.53) получим

$$\mathbb{Y}'(t)\leqslant -\mathrm{A}\quad \forall\, t\in[0,\mathrm{T}_3]. \tag{6.54}$$

Из (6.54) вытекает, что на области определения функции $\Phi(t)$ величина $\mathbb{Y}'<0$, откуда и из (6.54) имеем

$$\mathbb{Y}(t)\leqslant \mathbb{Y}_0-\mathrm{A}t.$$

Стало быть, найдется такой момент времени $\mathrm{T}_0\in(0,\mathrm{T}_2)$, что

$$\limsup_{t\uparrow \mathrm{T}_0}\Phi(t)=+\infty,$$

где $\mathrm{T}_2=\mathbb{Y}(0)\mathrm{A}^{-1}$.

Получим теперь оценку снизу на время разрушения решения задачи (6.1), (6.2).

С этой целью воспользуемся первым энергетическим равенством (6.36). Действительно, из (6.36) имеем

$$\frac{d\Phi}{dt}\leqslant \|\nabla u\|_4^4\leqslant \mathrm{B}_1^4\,\|\triangle u\|_2^4\leqslant 4\mathrm{B}_1^4\Phi^2(t). \tag{6.55}$$

Из (6.55) получим

$$\Phi(t)\leqslant \frac{\Phi_0}{1-4\mathrm{B}_1^4\Phi_0 t}.$$

Стало быть, $\mathrm{T}_0\geqslant \mathrm{T}_1=(4\mathrm{B}_1^4\Phi_0)^{-1}$.

Рассмотрим теперь случай, когда $p\geqslant 4$. Тогда имеем $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)\subseteq \subseteq \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega)$. Пусть $\vartheta=4/p$. Тогда из первого энергетического равенства (6.36) получим цепочку неравенств

$$\frac{d\Phi}{dt}\leqslant \|\nabla u\|_4^4\leqslant \mathrm{B}_2^4\,\|\nabla u\|_p^4\leqslant \mathrm{B}_2^4\left(\frac{p-1}{p}\right)^{4/p}\Phi^{\vartheta},\quad \vartheta=4/p. \tag{6.56}$$

Из (6.56) при $\vartheta\in(0,1)$ получим неравенство

$$\Phi(t)\leqslant \left(\Phi_0^{1-\vartheta}+(1-\vartheta)\mathrm{B}_3 t\right)^{1/(1-\vartheta)},\quad \mathrm{B}_3=\mathrm{B}_2^4\left(\frac{p-1}{p}\right)^{4/p}.$$

Из (6.56) при $\vartheta=1$ получим неравенство

$$\Phi(t)\leqslant \Phi_0 e^{\mathrm{B}_3 t},\quad \mathrm{B}_3=\mathrm{B}_2^4\left(\frac{p-1}{p}\right)^{4/p}.$$

Теорема доказана.

6.3. Физическая интерпретация полученных результатов. Из теоремы 6 вытекает, что при достаточно большой начальной магнитостатической энергии в магнетике возникает лавинный ее рост за конечное время, т.е. в магнетике возникает явление пробоя. Полученное нами качественное описание пробоя вполне согласуется с наблюдаемой картиной [Бонч-Бруевич].

§ 7. Об одной начально-краевой задаче для сильно нелинейного диссипативного уравнения вида (1.1)

Целью настоящего параграфа является получение достаточных условий разрушения решения следующей начально-краевой задачи для одного сильно нелинейного волнового диссипативного уравнения псевдопараболического типа:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle u+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right)-u+u_{x_1}+uu_{x_1}+u^3=0, \quad (7.1)$$

$$u(x,t)\big|_{\partial\Omega}=0, \quad t\geqslant 0, \quad (7.2)$$

$$u(x,0)=u_0(x), \quad x\in\overline{\Omega}, \quad (7.3)$$

где $p>2$, $(x,t)\in Q=\Omega\times(0,\mathrm{T})$, $x=(x_1,x_2,...,x_N)\in\Omega\subset\mathbb{R}^N$.

7.1. Локальная однозначная разрешимость в слабом обобщенном смысле задачи. Пусть $\partial\Omega\in\mathbb{C}^{(2,\delta)}$ — граница ограниченной области Ω, $\delta\in(0,1]$ и натуральное число $s\geqslant 2$ таково, что $(s-1)/N\geqslant$ $\geqslant 1/2-1/p$. Рассмотрим следующую задачу на собственные функции и собственные значения:

$$(-1)^s\triangle^s w_k-\lambda_k w_k=0, \quad \left.\frac{\partial^n w_k}{\partial x_i^n}\right|_{\partial\Omega}=0, \quad n=\overline{1,s-1}. \quad (7.4)$$

В силу определения s справедлива следующая цепочка вложений: $\mathbb{H}_0^s(\Omega)\subset\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)\subset\mathbb{H}_0^1(\Omega)\subset\mathbb{L}^2(\Omega)$, $p>2$. Поскольку собственные функции задачи (7.4) образуют галеркинский базис в $\mathbb{H}_0^s(\Omega)$, то в силу указанных включений собственные функции задачи (2.1) образуют «галеркинский» базис в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$.

Определение 5. Слабым обобщенным решением задачи (7.1)–(7.3) назовем решение следующей задачи:

$$\int_0^{\mathrm{T}}dt\,\varphi(t)\left[\frac{d}{dt}\left(\langle\triangle u,w\rangle_0+\langle\triangle_p u,w\rangle\right)+\right.$$

$$\left.+(u^3,w)-(u,w)+\langle u_{x_1},w\rangle_0+\langle uu_{x_1},w\rangle_0\right]=0,$$

$$u(0) = u_0 \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$$
$$\forall\, \varphi(t) \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T}),\ \forall\, w \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega),$$

где символом $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ обозначена скобка двойственности между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скобка двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$. Наконец, символом $(\cdot,\cdot)$ обозначено скалярное произведение в $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

Решение данной задачи будем искать в следующем классе:

$$u \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)),\quad u' \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{H}_0^1(\Omega)),$$
$$\triangle_p u \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)),$$
$$\triangle u + \triangle_p u \in \mathbb{H}^1(0,\mathrm{T};\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)) \cap \mathbb{C}_w^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)).$$

В рассматриваемом классе гладкости наша задача эквивалентна следующей задаче:

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt\, \varphi(t) \left\langle \frac{d}{dt}(\triangle u + \triangle_p u) - u + u_{x_1} + u u_{x_1} + u^3, w \right\rangle = 0$$
$$\forall\, \varphi(t) \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T}),\ \ \forall\, w \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega),$$

которая в свою очередь, в силу результата §12 Приложения Б эквивалентна следующей задаче:

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt\, \left\langle \frac{d}{dt}(\triangle u + \triangle_p u) - u + u_{x_1} + u u_{x_1} + u^3, v \right\rangle = 0$$
$$\forall\, v \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)).$$

Замечание 2. В качестве $w \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ можно взять элементы $w_j \in \mathbb{H}_0^s(\Omega)$, $j = \overline{1,+\infty}$, поскольку их линейные комбинации плотны в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть* $u_0(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$. *Тогда если* $N \leqslant p$ *либо если* $N > p$ *при* $p \geqslant 4N/(N+4)$, *то найдется такое* $\mathrm{T}_0 = \mathrm{T}_0(u_0, q, p) > 0$ *и существует единственная функция* $u(x,t) : (0,\mathrm{T}_0) \times \Omega \to \mathbb{R}$ *такая, что для любого* $\mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}_0)$ *имеют место включения*

$$u \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)),\quad u' \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{H}_0^1(\Omega)),$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \in \mathbb{L}^2(Q),\quad \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^2(\Omega)),$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^{p'}(\Omega)),\quad \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^{p'}(\Omega)),$$

$\triangle u + \triangle_p u \in \mathbb{H}^1(0,\mathrm{T};\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)) \cap \mathbb{C}_w^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega))$, $p' = p/(p-1)$, *и, кроме того,* $u(0) = u_0$ *почти всюду в* Ω, *причем*

$$\frac{\partial}{\partial t}(\triangle u + \triangle_p u) - u + u_{x_1} + uu_{x_1} + u^3 = 0 \ \text{ в } \ \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)),$$

$$\triangle_p u \equiv \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right),\ p^{-1} + p'^{-1} = 1.$$

Доказательство.

Замечание 2. Поскольку в условиях теоремы 1 $u \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$, $u' \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{H}_0^1(\Omega))$, то в силу результата работы [Лионс, 1] имеем: $u(t) : [0,\mathrm{T}] \to \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ — сильно непрерывная функция.

Для доказательства локальной разрешимости воспользуемся методом Галеркина в сочетании с методами монотонности и компактности [Лионс, 1].

Будем искать приближенное решение нашей задачи (7.1)–(7.3) в виде

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\varphi(t)\left[\frac{d}{dt}\left(\langle\triangle u_m, w\rangle_0 + \langle\triangle_p u_m, w\rangle\right) + \right.$$

$$\left. + (u_m^3, w) - (u_m, w) + \langle u_{mx_1}, w\rangle_0 + \langle u_m u_{mx_1}, w\rangle_0\right] = 0 \quad (7.5)$$

$$\forall\,\varphi(t) \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T}),\ j = \overline{1,m},$$

$$u_m = \sum_{k=1}^{m} c_{mk}(t) w_k,$$

$$u_{0m} \equiv u_m(0) = \sum_{k=1}^{m} c_{mk}(0) w_k \to u_0 \ \text{ сильно в } \ \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega). \quad (7.6)$$

Как и ранее в классе $c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(1)}[0,\mathrm{T}_{m0})$ из задачи (7.5) вытекает поточечное равенство

$$(\nabla u_m', \nabla w_j) + (p-1)\sum_{i=1}^{N}\left(\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u_m'}{\partial x_i}, \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right) +$$

$$- (u_m, w_j) - \left(u_m, \frac{\partial w_j}{\partial x_1}\right) - \frac{1}{2}\left(u_m^2, \frac{\partial w_j}{\partial x_1}\right) = (u_m^2 u_m, w_j), \quad (7.7)$$

$j = \overline{1,m}$. Из (7.7) сразу же получаем

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{N}\left(\left[1+(p-1)\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\right]\frac{\partial w_k}{\partial x_i},\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right)c'_{mk}+$$
$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{N}w_kw_jc_{mk}-\sum_{k=1}^{m}w_k\frac{\partial w_j}{\partial x_1}(c_{mk}+\frac{1}{2}c_{mk}^2)=(|u_m|^qu_m,w_j),\ j=\overline{1,m}.$$

Теперь в качестве галеркинского базиса в $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ выберем собственные функции задачи (7.4). Введем обозначение

$$a_{kj}\equiv\sum_{i=1}^{N}\left(\left[1+(p-1)\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\right]\frac{\partial w_k}{\partial x_i},\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right).$$

Справедливо следующее неравенство:

$$\sum_{k,j=1,1}^{m,m}a_{kj}\xi_k\xi_j=\|\nabla\eta\|_2^2+(p-1)\sum_{i=1}^{N}\left(\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2},\eta_i^2\right)\geqslant\|\nabla\eta\|_2^2,$$
$$\eta_i=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial w_k}{\partial x_i}\xi_k,\quad\eta=\sum_{k=1}^{m}\xi_kw_k.$$

Норма $\|\nabla\eta\|_2^2$ обращается в нуль в классе $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $\eta=\sum\limits_{k=1}^{m}\xi_kw_k=0$. Поскольку $\{w_k\}_{k=1}^{+\infty}$ — галеркинский базис в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, то $\eta=\sum\limits_{k=1}^{m}\xi_kw_k=0$ тогда и только тогда, когда $\{\xi_k\}_{k=1}^{m}=\mathbf{0}$, поэтому в силу критерия Сильвестра (см., например, [Постников]) получаем: $\det\{a_{kj}\}_{k,j=1,1}^{m,m}>0$. Общие результаты о нелинейных системах обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [Петровский]) гарантируют существование решения задачи (7.7) на некотором интервале $[0,t_m]$, $t_m>0$, в смысле $c_{km}\in\mathbb{C}^{(1)}[0,t_m]$. В дальнейшем мы получим априорные оценки, из которых следует $t_m=\mathrm{T}$, где T — не зависит от m. Значит, $c_{km}\in\mathbb{C}^{(1)}[0,\mathrm{T}]$, $u_m\in\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$.

Займемся выводом априорных оценок.

Умножим обе части равенства (7.7) на c_{mj} и просуммируем по $j=\overline{1,m}$, тогда получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m\|_2^2+\frac{p-1}{p}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^p+\|u_m\|_2^2=\|u_m\|_4^4.\qquad(7.8)$$

Отметим, что нормы

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_p^p\right)^{1/p},\quad\left(\|v\|_p^p+\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_p^p\right)^{1/p}$$

эквивалентны на пространстве $v \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ (см., например, [Лионс, 1]). Поэтому сразу же будем рассматривать банахово пространство $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ с нормой

$$\left(\sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_p^p\right)^{1/p}.$$

Из (7.8) следует, что

$$\frac{1}{2} \parallel \nabla u_m \parallel_2^2 + \frac{p-1}{p} \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p \leqslant \frac{1}{2} \parallel \nabla u_{0m} \parallel_2^2 + \frac{p-1}{p} \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u_{0m}}{\partial x_i} \right\|_p^p + \int_0^t ds \parallel u_m \parallel_4^4 (s). \quad (7.9)$$

В силу условий, сформулированных в доказываемой теореме относительно p, N, и теорем вложения Соболева (см., например, [Байокки]) выполнено вложение $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{L}^4(\Omega)$. Теперь имеем

$$\parallel u_m \parallel_4 \leqslant \mathrm{B}_1 \left(\sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p\right)^{1/p},$$

$$\frac{1}{2} \parallel \nabla u_m \parallel_2^2 + \frac{p-1}{p} \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p \leqslant \frac{1}{2} \parallel \nabla u_{0m} \parallel_2^2 + \frac{p-1}{p} \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u_{0m}}{\partial x_i} \right\|_p^p + \mathrm{B}_1^4 \int_0^t ds \left(\sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p\right)^{4/p} (s).$$

Итак, имеем

$$\mathrm{E}_m(t) \leqslant \mathrm{E}_{0m} + \mathrm{B}_2 \int_0^t ds\, \mathrm{E}_m^{\alpha}(s), \quad \alpha = \frac{4}{p}, \quad \mathrm{B}_2 \equiv \mathrm{B}_1^{q+2} \left(\frac{p}{p-1}\right)^{4/p}, \quad (7.10)$$

$$\mathrm{E}_m(t) \equiv \frac{1}{2} \parallel \nabla u_m \parallel_2^2 + \frac{p-1}{p} \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p, \quad \mathrm{E}_{0m} \equiv \mathrm{E}_m(0).$$

С использованием леммы Гронуолла–Беллмана и Бихари (см., например, [Демидович]) из (7.10) получим

$$\mathrm{E}_m(t) \leqslant \left[\mathrm{E}_{0m}^{1-\alpha} + (1-\alpha)\mathrm{B}_2 t)\right]^{1/(1-\alpha)} \quad \text{при } 0 < \alpha < 1, \quad (7.11)$$

$$\mathrm{E}_m(t) \leqslant \mathrm{E}_{0m} \exp\{\mathrm{B}_2 t\} \quad \text{при } \alpha = 1, \quad (7.12)$$

$$\mathrm{E}_m(t) \leqslant \mathrm{E}_{0m} \left[1 - (\alpha-1)\mathrm{B}_2 \mathrm{E}_{0m}^{(\alpha-1)} t\right]^{-1/(\alpha-1)} \quad \text{при } \alpha > 1. \quad (7.13)$$

Умножим теперь уравнение (7.7) на $c_{mj}^{'}$ и просуммируем по $j=\overline{1,m}$, тогда после интегрирования по времени $s\in[0,t]$ получим

$$\int\limits_0^t ds\left[\parallel\nabla u_m^{'}\parallel_2^2(s)+\frac{4(p-1)}{p^2}\sum_{i=1}^N\int\limits_\Omega dx\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)\right)^2\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\parallel u_m\parallel_2^2+\frac{1}{4}\parallel u_{0m}\parallel_4^4+\int\limits_0^t ds\left(u_m+\frac{1}{2}u_m^2\right)\frac{\partial u_m^{'}}{\partial x_1}=$$

$$=\frac{1}{4}\parallel u_m\parallel_4^4+\frac{1}{2}\parallel u_{m0}\parallel_2^2. \quad (7.14)$$

Справедливы вспомогательные оценки

$$\left|\int\limits_\Omega ds\,u_m\frac{\partial u_m^{'}}{\partial x_1}\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\parallel\nabla u_m^{'}\parallel_2^2+\frac{1}{2\varepsilon}\parallel u_m\parallel_2^2,$$

$$\left|\int\limits_\Omega ds\,u_m^2\frac{\partial u_m^{'}}{\partial x_1}\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\parallel\nabla u_m^{'}\parallel_2^2+\frac{1}{2\varepsilon}\parallel u_m\parallel_4^4,$$

$$\parallel u_m\parallel_2\leqslant \mathrm{B}_2\parallel u_m\parallel_4\leqslant \mathrm{B}_3\left(\sum_{i=1}^N\left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^p\right)^{1/p}.$$

В силу условий доказываемой теоремы относительно параметров p, N и в силу теорем вложения Соболева (см., например, [Байокки]), из (7.14) получим

$$\int\limits_0^t ds\left[\left[1-\frac{3\varepsilon}{4}\right]\parallel\nabla u_m^{'}\parallel_2^2(s)+\right.$$

$$\left.+\frac{4(p-1)}{p^2}\sum_{i=1}^N\int\limits_\Omega dx\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)\right)^2\right]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{4}\mathrm{B}_1^4\left(\sum_{i=1}^N\left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^p\right)^{4/p}+\int\limits_0^t ds\left[\frac{\varepsilon}{4}\parallel u_m\parallel_4^4+\frac{\varepsilon}{2}\parallel u_m\parallel_2^2\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\parallel u_{0m}\parallel_2^2,\ \ \varepsilon\in(0,4/3). \quad (7.15)$$

В силу (7.6) имеем: $u_{0m}\to u_0$ сильно в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ и справедливо неравенство $\mathrm{E}_{0m}\leqslant\mathrm{A}$, где A не зависит от m. Отсюда и из (7.11)–(7.13) приходим к выводу, что найдется такое $\mathrm{T}_0>0$ и справедливо неравен-

ство $\mathrm{E}_m(t) \leqslant C$, $t \in [0, \mathrm{T}]$, $\forall\, \mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0)$, где C не зависит ни от m, ни от t.

Таким образом, из (7.11)–(7.15) следует, что найдется такое $\mathrm{T}_0 \equiv \equiv \mathrm{T}_0(u_0, q, p)$, что для любого $\mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0)$ выполнены следующие включения:

$$\begin{gathered} u_m \text{ ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), \\ u_m^{'} \text{ ограничено в } \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right) \text{ ограничено в } \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{L}^2(\Omega)), \\ u_m^3 \text{ ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{L}^{4/3}(\Omega)). \end{gathered} \tag{7.16}$$

Наконец, понятно, что

$$\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \text{ ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{L}^2(\Omega)). \tag{7.17}$$

В силу (7.16), (7.17) имеем: $t_m = \mathrm{T}$, где T — не зависит от $m \in \mathbb{N}$. Значит, $u_m = \sum\limits_{k=1}^{m} c_{km}(t) w_k \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$. Из включений (7.16), (7.17) и результатов ([Лионс, 1], с. 24) приходим к выводу, что из последовательности u_m можно выделить такую подпоследовательность, которую мы снова обозначим через u_m, что

$$\begin{gathered} u_m \rightharpoonup u \quad *-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), \\ u_m^{'} \rightharpoonup u^{'} \text{ слабо в } \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \\ \triangle u_m \rightharpoonup \triangle u \quad *-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)), \\ -\triangle_p u_m \rightharpoonup \chi \quad *-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_0^{-1,p'}(\Omega)), \\ u_m^3 \rightharpoonup w \quad *-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{L}^{4/3}(\Omega)), \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial x_1} \quad *-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{L}^p(\Omega)). \end{gathered} \tag{7.18}$$

Здесь следует заметить, что из $(7.18)_1$ вытекает

$$u_m^{'} \rightharpoonup u^{'} \text{ в } \mathcal{D}^{'}(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)),$$

поэтому в силу слабой сходимости в $\mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ имеем

$$u_m^{'} \rightharpoonup \eta.$$

Стало быть, приходим к выводу, что $\eta(t) = u^{'}(t)$ для почти всех $t \in \in (0, \mathrm{T})$. Отсюда имеем: $u_m \rightharpoonup u$ слабо в $\mathbb{H}^1(Q)$, $Q = (0, \mathrm{T}) \times \Omega$, тогда в силу компактного вложения $\mathbb{H}^1(Q) \subset\subset \mathbb{L}^2(Q)$ приходим к выводу, что $u_m \to u$ сильно в $\mathbb{L}^2(Q)$ и, значит, почти всюду (см., например, [Гаевский]). Тогда в силу леммы 1.3 работы [Лионс, 1] получим: $u_m^3 \rightharpoonup u^3$

$*-$слабо в $\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^{4/3}(\Omega))$. Таким образом, $w=u^3$. Из (7.16), (7.17) следует, что

$$\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\in\mathbb{H}^1(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^2(\Omega)),\quad u_m\in\mathbb{H}^1(0,\mathrm{T};\mathbb{H}^1_0(\Omega)).$$

Имея в виду, что предел последовательности $-\triangle_p u_m\rightharpoonup\chi$ $*-$слабо в $\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{W}^{1,p'}_0(\Omega))$, докажем, что

$$\chi=-\triangle_p u. \tag{7.19}$$

Возьмем в (7.5) функцию $\varphi(t)=1$, тогда получим

$$\Big\langle\triangle u_m+\triangle_p u_m,w_j\Big\rangle+\left\langle\int\limits_0^t ds\,u_m^3(s),w_j\right\rangle-\left\langle\int\limits_0^t ds\,u_m(s),w_j\right\rangle+$$
$$+\left\langle\int\limits_0^t ds\,\frac{\partial(u_m+\frac12u_m^2)}{\partial x_1},w_j\right\rangle=\Big\langle\triangle u_{0m}+\triangle_p u_{0m},w_j\Big\rangle. \tag{7.20}$$

Поскольку $\triangle u_m\rightharpoonup\triangle u$ $*-$слабо в $\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{H}^{-1}(\Omega))$, то

$$\langle\triangle u_m,w_j\rangle\rightharpoonup\langle\triangle u,w_j\rangle$$

$*-$слабо в $\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T})$, $j=\overline{1,m}$. Кроме того, $-\triangle_p u_m\rightharpoonup\chi$ $*-$слабо в $\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega))$, $p'=p/(p-1)$, поэтому $-\langle\triangle_p u_m,w_j\rangle\rightharpoonup\langle\chi,w_j\rangle$ $*-$слабо в $\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T})$, $j=\overline{1,m}$. Наконец,

$$\int\limits_0^t ds\,\langle u_m^3,w_j\rangle=\int\limits_0^t ds\,\langle u_m^3-u^3,w_j\rangle+\int\limits_0^t ds\,\langle u^3,w_j\rangle,\quad j=\overline{1,m}.$$

С другой стороны, u_m^3, $u^3\in\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^{4/3}(\Omega))$. И, кроме того, $u_m^3\rightharpoonup u^3$ $*-$слабо в $\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^{4/3}(\Omega))$, поэтому в силу теоремы Лебега получим

$$\left|\int\limits_0^t ds\,\langle u_m^3-u^3,w_j\rangle\right|\to+0$$

при $m\to+\infty$ для всех $t\in(0,\mathrm{T})$. В силу условия $\mathbb{W}^{1,p}_0(\Omega)\subset\mathbb{L}^4(\Omega)$, получим, что правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $m\to+\infty$.

Поскольку $u_{0m}\to u_0$ сильно в $\mathbb{W}^{1,p}_0(\Omega)\subset\mathbb{H}^1_0(\Omega)$, то имеем: $\langle\triangle u_{0m},w_j\rangle\to\langle\triangle u_0,w_j\rangle$, $\langle\triangle_p u_{0m},w_j\rangle\to\langle\triangle_p u_0,w_j\rangle$, $j=\overline{1,m}$.

Значит, переходя к пределу при $m \to +\infty$ в равенстве (7.20), получим

$$\triangle u - \chi = \triangle u_0 + \triangle_p u_0 + \int\limits_0^t ds\, u - \int\limits_0^t ds \left(u_{x_1} + u u_{x_1} \right) - \int\limits_0^t ds\, u^3(s). \quad (7.21)$$

Введем обозначение: $\mathbb{A}(v) = -\triangle_p v$. Из (7.20) следует

$$\langle \mathbb{A}(u_m), u_m \rangle = \langle \triangle u_m, u_m \rangle + \left\langle \int\limits_0^t ds\, u_m^3(s), u_m(t) \right\rangle +$$

$$+ \left\langle \int\limits_0^t ds\, (u_m - u_{mx_1} - u_m u_{mx_1})(s), u_m(t) \right\rangle - \left\langle \triangle u_{0m} + \triangle_p u_{0m}, u_m \right\rangle =$$

$$= - \parallel \nabla u_m \parallel_2^2 + \left\langle \int\limits_0^t ds\, u_m^3(s), u_m(t) \right\rangle - \left\langle \triangle u_{0m} + \triangle_p u_{0m}, u_m \right\rangle +$$

$$+ \left\langle \int\limits_0^t ds\, u_m(s), u_m(t) \right\rangle + \left\langle \int\limits_0^t ds\, (u_{mx_1}(s) + u_m u_{mx_1}(s)), u_m(t) \right\rangle. \quad (7.22)$$

В силу того что $u_m \rightharpoonup u$ слабо в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ при почти всех $t \in \in (0, \mathrm{T})$, а также в силу результата работы [Канторович], имеем

$$\liminf_{m \to +\infty} \parallel \nabla u_m \parallel_2^2 (t) \geqslant \parallel \nabla u \parallel_2^2 (t).$$

Кроме того, поскольку $u_m \to u$ сильно в $\mathbb{L}^2(Q)$, имеем

$$\left\langle \int\limits_0^t ds\, u_m(s), u_m(t) \right\rangle \to \left\langle \int\limits_0^t ds\, u(s), u(t) \right\rangle, \quad \text{при} \quad m \to +\infty,$$

$$\left\langle \int\limits_0^t ds\, (u_{mx_1}(s) + u_m u_{mx_1}(s)), u_m(t) \right\rangle \to \left\langle \int\limits_0^t ds\, (u_{x_1}(s) + u u_{x_1}(s)), u(t) \right\rangle,$$

при $m \to +\infty$. Кроме того,

$$\int\limits_0^T dt \left\langle \int\limits_0^t ds\, u_m^3(s), u_m(t) \right\rangle = \int\limits_0^T dt \left\langle \int\limits_0^t ds\, u_m^3(s), u_m(t) - u(t) \right\rangle +$$

$$+\int\limits_0^T dt\left\langle \int\limits_0^t ds\, u_m^3(s), u(t)\right\rangle.$$

Ранее нами было доказано, что последовательность $\{u_m\}$ сходится слабо в $\mathbb{H}^1(Q)$, поэтому некоторая подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$ сходится сильно в $\mathbb{L}^4(Q)$. Кроме того, последовательность ограничена в $\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^4(\Omega))$. Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\left|\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \int\limits_0^t ds\, u_m^3(s), u_m(t)-u(t)\rangle\right| \to +0 \ \text{ при } \ m\to+\infty.$$

Действительно,

$$\left|\langle u_m^3(s), u_m(t)-u(t)\rangle\right| \leqslant \left(\int\limits_\Omega dx\,|u_m(s)|^4\right)^{3/4}\left(\int\limits_\Omega dx\,|u_m(t)-u(t)|^4\right)^{1/4},$$

$$\left|\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\left\langle \int\limits_0^t ds\, u_m^3(s), u_m(t)-u(t)\right\rangle\right| \leqslant \mathrm{C(T)}\left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\ \|\, u_m(t)-u(t)\,\|_4^4\right)^{1/4}.$$

Рассмотрим теперь

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\left\langle \int\limits_0^t ds\, u_m^3(s), u(t)\right\rangle.$$

Поскольку $u(t)\in\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))\subset\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^4(\Omega))$, а

$$\int\limits_0^t ds\,|u_m|^q u_m(s)\in\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^{4/3}(\Omega)),$$

$u_m^3\rightharpoonup u^3$ $*-$слабо в $\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^{4/3}(\Omega))$, то отсюда следует, что

$$\lim_{m\to+\infty}\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\left\langle \int\limits_0^t ds\, u_m^3(s), u(t)\right\rangle = \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\left\langle \int\limits_0^t ds\, u^3(s), u(t)\right\rangle.$$

Пусть $$\mathbb{X}_m=\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \mathbb{A}(u_m)-\mathbb{A}(v), u_m-v\rangle,$$

$$\forall v\in\mathbb{L}^r(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))\ \ \mathbb{A}(v)\in\mathbb{L}^{r'}(0,\mathrm{T};\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)),$$
$$r\in(1,\infty),\ \ r'=\frac{r}{r-1}.$$

В силу (7.22) получим

$$\mathbb{X}_m = -\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \parallel \nabla u_m \parallel_2^2 +$$

$$+\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left\langle \int\limits_0^t ds\, u_m^2 u_m(s), u_m(t) \right\rangle - \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left\langle \triangle u_{0m} + \triangle_p u_{0m}, u_m \right\rangle -$$

$$-\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left\langle \int\limits_0^t ds\, u_m(s), u_m(t) \right\rangle - \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left\langle \int\limits_0^t ds\, (u_{mx_1}(s) + u_m u_{mx_1}(s)), u_m(t) \right\rangle -$$

$$-\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left\langle \mathbb{A}(u_m), v \right\rangle - \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left\langle \mathbb{A}(v), u_m - v \right\rangle. \quad (7.23)$$

Из выписанных слагаемых в выражении (7.23) для $\mathbb{X}_m$ нам осталось рассмотреть

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \, \langle \triangle u_{0m} + \triangle_p u_{0m}, u_m \rangle = \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \, \langle \triangle u_{0m}, u_m \rangle + \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \, \langle \triangle_p u_{0m}, u_m \rangle. \quad (7.24)$$

Рассмотрим первое слагаемое в (7.24). Функции u_m равномерно по m ограничены в $\mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)) \subset \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$. С другой стороны, $u_{0m} \to u_0$ сильно в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и в силу того, что $\triangle \in \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_0^1(\Omega)); \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ (см., например, [Лионс, 2]) — множество линейных непрерывных (ограниченных в силу линейности $\triangle$) операторов, действующих из $\mathbb{H}_0^1(\Omega))$ в $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, последовательность $\triangle u_{0m} \to \triangle u_0$ сильно в $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ и справедливо следующее неравенство:

$$|\langle \triangle u_{0m} - \triangle u_0, u_m \rangle| \leqslant C \parallel \triangle u_{0m} - \triangle u_0 \parallel_{-1} \to 0 \ \text{ при } \ m \to +\infty.$$

Поскольку $u_m \to u$ $*$–слабо в $\mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$, а $\triangle u_0 \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, то

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \, \langle \triangle u_0, u_m \rangle \to \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \, \langle \triangle u_0, u \rangle \ \text{ при } \ m \to +\infty.$$

И в этом случае

$$\lim_{m \to +\infty} \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \, \langle \triangle u_{0m}, u_m \rangle = \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \, \langle \triangle u_0, u \rangle .$$

Рассмотрим второе слагаемое в (7.24). Функции u_m равномерно по m ограничены в $\mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$. С другой стороны, $u_{0m} \to u_0$ сильно в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$. В силу того что $\partial/\partial x_i \in \mathcal{L}(\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega); \mathbb{L}^p(\Omega)), \ \ i = \overline{1, N}$ (см., на-

пример, [Лионс, 2]), последовательность $\partial u_{0m}/\partial x_i \to \partial u_0/\partial x_i$ сильно в $\mathbb{L}^p(\Omega)$ для всех $i = \overline{1,N}$. Справедливо следующее неравенство:

$$\| \, |w|^{p-2}w - |v|^{p-2}v \, \|_{p/(p-1)} \leqslant (p-1) \, \| \, f(w-v) \, \|_{p/(p-1)},$$

где $f = \max(|w|^{p-2}, |v|^{p-2})$,

$$\| \, f(w-v) \, \|_{p_1} \leqslant \| \, f \, \|_{q_1 p_1} \| \, w - v \, \|_{q_2 p_1}, \; p_1 = p/(p-2), \; q_2 p_1 = p,$$
$$q_2 = p-1, \; q_1 = (p-1)/p - 2, \; q_1 p_1 = p/(p-2),$$
$$\| \, |w|^{p-2}w - |v|^{p-2}v \, \|_{p/(p-1)} \leqslant (p-1) \, \| \, f \, \|_{p/(p-2)} \| \, w - v \, \|_p,$$
$$\| \, f \, \|_{p/(p-2)} \leqslant 2(\max\{\| \, w \, \|_p, \| \, v \, \|_p\})^{p-2}.$$

Возьмем $v = \partial u_{0m}/\partial x_i$ и $w = \partial u_0/\partial x_i$, тогда сразу же получим, что

$$\left| \frac{\partial u_{0m}}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_{0m}}{\partial x_i} \to \left| \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \;\; \text{сильно в} \;\; \mathbb{L}^{p'}(\Omega), \;\; p' = \frac{p}{p-1}.$$

Так как $\partial/\partial x_i \in \mathcal{L}(\mathbb{L}^{p'}(\Omega), \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega))$ (см., например, [Лионс, 2]), то последовательность $\triangle_p u_{0m} \to \triangle_p u_0$ сильно в $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$ и справедлива следующая цепочка неравенств:

$$|\langle \triangle_p u_{0m} - \triangle_p u_0, u_m \rangle| \leqslant C \, \| \, \triangle_p u_{0m} - \triangle_p u_0 \, \|_{-1,p'} \to 0, \;\; \text{при} \;\; m \to +\infty.$$

Поскольку $u_m \to u$ $*$–слабо в $\mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_0^1(\Omega))$, а $\triangle_p u_0 \in \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$, то

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \, \langle \triangle_p u_0, u_m \rangle \to \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \, \langle \triangle_p u_0, u \rangle \;\; \text{при} \;\; m \to +\infty.$$

Значит,

$$\lim_{m \to +\infty} \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \, \langle \triangle_p u_{0m}, u_m \rangle = \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \, \langle \triangle_p u_0, u \rangle.$$

Таким образом, переходя к верхнему пределу в (7.23) при $m \to +\infty$, получим

$$0 \leqslant \limsup_{m \to +\infty} \mathbb{X}_m \leqslant - \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \;\; \| \, \nabla u \, \|_2^2 + \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left\langle \int\limits_0^t ds \, u^2 u(s), u(t) \right\rangle -$$
$$- \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left\langle \triangle u_0 + \triangle_p u_0, u \right\rangle -$$
$$- \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left\langle \int\limits_0^t ds \, u(s), u(t) \right\rangle - \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left\langle \int\limits_0^t ds \, (u_{x_1}(s) + u u_{x_1}(s)), u(t) \right\rangle -$$

$$-\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\Big\langle \chi, v\Big\rangle - \int_0^{\mathrm{T}} dt\,\Big\langle \mathbb{A}(v), u-v\Big\rangle.$$

С учетом (7.21) приходим к выводу, что

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\Big\langle \chi, u\Big\rangle = -\int_0^{\mathrm{T}} dt\ \|\ \nabla u\ \|_2^2 + \int_0^{\mathrm{T}} dt\,\left\langle \int_0^t ds\, u^2 u(s), u(t)\right\rangle -$$

$$-\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\Big\langle \triangle u_0 + \triangle_p u_0, u\Big\rangle -$$

$$-\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\left\langle \int_0^t ds\, u(s), u(t)\right\rangle - \int_0^{\mathrm{T}} dt\,\left\langle \int_0^t ds\,\Big(u_{x_1}(s) + u u_{x_1}(s)\Big), u(t)\right\rangle.$$

Отсюда получаем, что

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \chi - \mathbb{A}(v), u-v\rangle = 0$$

$$\forall v \in \mathbb{L}^r(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)),\quad v = u - \lambda w,\quad w \in \mathbb{L}^r(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)),\quad r>1.$$

Стандартным образом (см., например, [Лионс, 1]) приходим к выводу, что

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \chi - \mathbb{A}(u), w\rangle = 0\ \ \forall\, w \in \mathbb{L}^r(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)),$$

$$\chi,\ \mathbb{A}(u) \in \mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T};\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)) \subset \mathbb{L}^{r'}(0,\mathrm{T};\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)).$$

Значит, справедливо соотношение (7.19): $\chi = -\triangle_p u$.

Докажем теперь, что

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathbb{H}^1(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^2(\Omega)),\quad i=\overline{1,N}.$$

Пусть

$$\mathbb{A}_i(v) \equiv -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right),\quad \langle \mathbb{A}_i(v), v\rangle = \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_p^p,\quad i=\overline{1,N}.$$

В силу того что $u_m \rightharpoonup u$ слабо в $\mathbb{L}^p(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$, имеем

$$\limsup_{m\to+\infty}\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \mathbb{A}_i(u_m),u_m\rangle \leqslant -\sum_{j=1,\ j\neq i}^{N}\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\left\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|_p^p +$$

$$+\limsup_{m\to+\infty}\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle \mathbb{A}(u_m),u_m\rangle,$$

$$\limsup_{m\to+\infty}\int_0^{\mathrm{T}}\langle \mathbb{A}(u_m),u_m\rangle \leqslant -\int_0^{\mathrm{T}} dt\ \|\nabla u\|_2^2 +$$

$$+\int_0^{\mathrm{T}} dt\left\langle\int_0^t ds\,u^2u(s),u(t)\right\rangle -\int_0^{\mathrm{T}} dt\left\langle \triangle u_0+\triangle_p u_0,u\right\rangle -$$

$$-\int_0^{\mathrm{T}} dt\left\langle\int_0^t ds\,u(s),u(t)\right\rangle -\int_0^{\mathrm{T}} dt\left\langle\int_0^t ds\,(u_{x_1}(s)+uu_{x_1}(s)),u(t)\right\rangle -$$

$$-\int_0^{\mathrm{T}} dt\left\langle \triangle_p u,u\right\rangle =\int_0^{\mathrm{T}} dt\sum_{j=1}^{N}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|_p^p.$$

Таким образом, получаем

$$\limsup_{m\to+\infty}\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^p \leqslant \int_0^{\mathrm{T}} dt\,\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_p^p. \tag{7.25}$$

С другой стороны, $\dfrac{\partial u_m}{\partial x_i}$ ограничено в $\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^p(\Omega))\subset\mathbb{L}^p(Q)$, $Q=$ $=(0,\mathrm{T})\times\Omega$, поэтому в силу рефлексивности $\mathbb{L}^p(Q)$ (см., например, [Иосида]) можно выделить подпоследовательность, которую мы снова обозначим через u_m, такую что

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\rightharpoonup\frac{\partial u}{\partial x_i}\ \text{ слабо в }\ \mathbb{L}^p(Q),\ \ i=\overline{1,N}. \tag{7.26}$$

Значит, в силу результата работы ([Иосида]) получим

$$\liminf_{m\to+\infty}\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^p \geqslant \int_0^{\mathrm{T}} dt\,\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_p^p,\ \ i=\overline{1,N}. \tag{7.27}$$

Из (7.25) и (7.27) следует, что

$$\lim_{m\to+\infty}\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^p = \int_0^{\mathrm{T}} dt\,\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_p^p,\ \ i=\overline{1,N}. \tag{7.28}$$

Из результата работы ([Канторович]) и (7.26), (7.28) следует, что

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \to \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ сильно в } \mathbb{L}^p(Q), \quad i = \overline{1,N}, \tag{7.29}$$

что в свою очередь означает [Дьяченко], что

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \to \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ почти всюду в } Q \equiv (0,\mathrm{T}) \times \Omega, \quad i = \overline{1,N}. \tag{7.30}$$

Переходом к подпоследовательности получим

$$\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \rightharpoonup \chi_i \quad *-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^2(\Omega)), \quad i = \overline{1,N}.$$

В силу (7.30) и результата работы ([Лионс, 1]) получим

$$\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \rightharpoonup \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad *-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^2(\Omega)).$$

Стало быть,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right) \rightharpoonup \frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \text{ в } \mathcal{D}'(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^2(\Omega)).$$

В силу (7.16) можно выделить такую подпоследовательность, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right) \rightharpoonup \psi \text{ слабо в } \mathbb{L}^2(Q), \quad Q = (0,\mathrm{T}) \times \Omega.$$

А это значит, что

$$\psi = \frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \in \mathbb{L}^2(Q), \quad Q = (0,\mathrm{T}) \times \Omega, \quad i = \overline{1,N}.$$

Итак,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \in \mathbb{L}^2(Q), \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^2(\Omega)),$$
$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathbb{H}^1(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^2(\Omega)). \tag{7.31}$$

Аналогичным образом при помощи (7.30) доказывается, что

$$\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \rightharpoonup \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad *-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^{p'}(\Omega)).$$

Из (7.31) и теорем вложения следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^{p'}(\Omega)),$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\in\mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^{p'}(\Omega)). \tag{7.32}$$

Докажем (7.32).

Введем обозначение $\psi\equiv|\partial u/\partial x_i|^{(p-2)/2}\partial u/\partial x_i$, в этом случае $|\psi|^{\alpha}\psi=|\partial u/\partial x_i|^{p-2}\partial u/\partial x_i$ при $\alpha=(p-2)/p$, $i=\overline{1,N}$. Отметим, что $|\psi|^{\alpha}\psi\in\mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^{p'}(\Omega))$. Докажем, что $(|\psi|^{\alpha}\psi)_t'\in\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^{p'}(\Omega))$. Действительно,

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}}dt\left(\int\limits_{\Omega}dx|\psi|^{\alpha p'}|\psi_t'|^{p'}\right)^{2/p'}\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^{\mathrm{T}}dt\left(\int\limits_{\Omega}dx\,|\psi|^{\alpha p' p_1}\right)^{2/(p' p_1)}\left(\int\limits_{\Omega}dx\,|\psi_t'|^{p' p_2}\right)^{2/(p' p_2)},$$

где

$$\alpha p' p_1=2,\ \ p' p_2=2,\ \ p_1^{-1}+p_2^{-1}=1,\ \ p_1=\frac{2(p-1)}{p-2},\ \ p_2=\frac{2(p-1)}{p}.$$

Поскольку $\psi\in\mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^2(\Omega))$, $\psi_t'\in\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^2(\Omega))$, то

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}}dt\left(\int\limits_{\Omega}dx\,|\psi|^{\alpha p'}|\psi_t'|^{p'}\right)^{2/p'}\leqslant\sup_{t\in(0,\mathrm{T})}\|\,\psi\,\|_2^{2\alpha}\int\limits_Q dx\,dt\,|\psi_t'|^2<+\infty.$$

Теперь мы можем перейти к пределу при $m\to+\infty$ в уравнении (7.5). Действительно, возьмем сначала в равенстве (7.5) функцию $\varphi(t)=1$, тогда получим интегральное равенство

$$\triangle u_m+\triangle_p u_m=\triangle u_{m0}+\triangle_p u_{m0}-\int\limits_0^t ds\,\left[u_{mx_1}+u_m u_{mx_1}+u_m^3-u\right],$$

понимаемое в смысле $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$ для почти всех $t\in(0,\mathrm{T})$. С учетом полученных ранее результатов мы можем перейти к пределу при $m\to+\infty$ и получить следующее равенство:

$$\triangle u+\triangle_p u=\triangle u_0+\triangle_p u_0-\int\limits_0^t ds\,\left[u^3+u_{x_1}+uu_{x_1}-u\right]$$

в смысле $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$ для почти всех $t\in(0,\mathrm{T})$. Из этого равенства вытекает, что

$$\triangle u+\triangle_p u\in\mathbb{H}^1(0,\mathrm{T};\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega))\cap\mathbb{C}_w^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)).$$

Заметим, что из (8.12) вытекает поточечное равенство

$$\frac{d}{dt}\left[\triangle u_m + \triangle_p u_m\right] = -u_m^3 - u_{mx_1} - u_m u_{mx_1} + u_m.$$

Поскольку

$$\triangle u_m + \triangle_p u_m \rightharpoonup \triangle u + \triangle_p u$$

слабо в $\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega))$, то

$$\frac{d}{dt}\left(\triangle u_m + \triangle_p u_m\right) \to \frac{d}{dt}\left(\triangle u + \triangle_p u\right)$$

в смысле $\mathcal{D}'(0,\mathrm{T};\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega))$. С другой стороны,

$$u_m^3 \rightharpoonup u^3,\ \ u_{mx_1} \rightharpoonup u_{x_1},\ \ u_m u_{mx_1} \rightharpoonup u u_{x_1},\ \ u_m \rightharpoonup u$$

слабо в $\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega))$, и, значит,

$$\frac{d}{dt}\left(\triangle u_m + \triangle_p u_m\right) \rightharpoonup \xi$$

слабо в $\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega))$. Таким образом,

$$\frac{d}{dt}\left(\triangle u_m + \triangle_p u_m\right) \to \frac{d}{dt}\left(\triangle u + \triangle_p u\right)$$

слабо в $\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega))$.

Теперь мы можем перейти к пределу в равенстве (7.5) и получить, что

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\varphi(t)\left[\frac{d}{dt}\langle\triangle u + \triangle_p u, w_j\rangle + \langle -u + u_{x_1} + u u_{x_1} + u^3, w_j\rangle\right] = 0$$

$\forall\ \varphi(t) \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T}),\ \ j = \overline{1,+\infty}$. Данное соотношение эквивалентно следующему равенству:

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\left\langle \frac{d}{dt}\left[\triangle u + \triangle_p u\right] + u^3 - u + u_{x_1} + u u_{x_1}, v\right\rangle\ \ \forall\ v \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)).$$

Докажем теперь единственность слабого обобщенного решения. Действительно, пусть $u_i,\ i = 1,2$ — это два слабых обобщенных решения следующей задачи:

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\varphi(t)\left[\frac{d}{dt}\left(\langle\triangle u, w\rangle_0 + \langle\triangle_p u, w\rangle\right) + \right.$$

$$\left. + (u^3, w) - (u, w) + \langle u_{x_1}, w\rangle_0 + \langle u u_{x_1}, w\rangle_0\right] = 0$$

$\forall\, \varphi(t) \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T}),\ \forall\, w \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega),$

$$u(0) = u_0 \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega),$$

в классах, сформулированных в условиях теоремы, с одним и тем же начальным условием. Отсюда при $\varphi(t) = 1$ находим

$$\triangle u_i + \triangle_p u_i = \triangle u_0 + \triangle_p u_0 - \int\limits_0^t ds\, u_i^3(s) + \int\limits_0^t ds u_i - \int\limits_0^t ds\, (u_{ix_1} + u_i u_{ix_1}).$$

Отсюда сразу же получим

$$\begin{aligned}
&- \langle \triangle u_1 - \triangle u_2, u_1 - u_2\rangle - \langle \triangle_p u_1 - \triangle_p u_2, u_1 - u_2\rangle = \\
&\qquad = \int\limits_0^t ds \int\limits_\Omega dx\, (u_1^3(s) - u_2^3(s))(u_1(t) - u_2(t)) - \\
&\qquad - \int\limits_0^t ds \int\limits_\Omega dx\, (u_1(s) - u_2(s))(u_1(t) - u_2(t)) + \\
&\qquad + \int\limits_0^t ds \int\limits_\Omega dx\, (u_{1x_1}(s) - u_{2x_1}(s))(u_1(t) - u_2(t)) + \\
&\qquad\qquad + \int\limits_0^t ds \int\limits_\Omega dx\, \frac{1}{2}(u_1^2(s) - u_2^2(s))(u_{1x_1}(t) - u_{2x_1}(t)).
\end{aligned}$$

В силу монотонности оператора $\triangle_p$ и теорем вложения нетрудно получить следующее неравенство:

$$\begin{aligned}
&\| \nabla u_1 - \nabla u_2 \|_2^2 \leqslant \\
&\quad \leqslant 3 \int\limits_0^t ds \int\limits_\Omega dx\, \max\{|u_1|^2(s), |u_2|^2(s)\} |u_1(s) - u_2(s)||u_1(t) - u_2(t)| + \\
&\qquad + \int\limits_0^t ds \int\limits_\Omega dx\, |u_1(s) - u_2(s)||u_1(t) - u_2(t)| + \\
&\qquad + \int\limits_0^t ds \int\limits_\Omega dx\, |\nabla u_1(s) - \nabla u_2(s)||u_1(t) - u_2(t)| + \\
&\quad + \int\limits_0^t ds \int\limits_\Omega dx\, \max\{|u_1(s)|, |u_2(s)|\} |u_1(s) - u_2(s)||\nabla u_1(t) - \nabla u_2(t)| \leqslant
\end{aligned}$$

$$\leqslant \mathrm{C(T)} \parallel \nabla u_1 - \nabla u_2 \parallel_2 (t) \int\limits_0^t ds \parallel \nabla u_1 - \nabla u_2 \parallel_2 (s),$$

из которого вытекает, что $u_1 = u_2$ почти всюду в $(0, \mathrm{T}) \times \Omega$.

Теорема доказана.

7.2. Однозначная разрешимость задачи в любом конечном цилиндре и разрушение ее решения за конечное время. Введем обозначения:

$$\mathrm{E}_m(t) \equiv \frac{1}{2} \parallel \nabla u_m \parallel_2^2 + \frac{p-1}{p} \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p, \quad \mathrm{E}_{0m} \equiv \mathrm{E}_m(0), \quad \alpha = \frac{4}{p},$$

$$\mathrm{E}(t) \equiv \frac{1}{2} \parallel \nabla u \parallel_2^2 + \frac{p-1}{p} \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p, \quad \mathrm{E}_0 \equiv \mathrm{E}(0),$$

$$\mathrm{B}_2 \equiv \mathrm{B}_1^4 \left(\frac{p}{p-1} \right)^{4/p},$$

где B_1 — наилучшая постоянная вложения пространств $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \subset \mathbb{L}^4(\Omega)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1. *Тогда*

1) *если* $p > 4$, *то* $\mathrm{T}_0 = +\infty$ *и имеет место неравенство*

$$\mathrm{E}(t) \leqslant \left[\mathrm{E}_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\mathrm{B}_2 t) \right]^{1/(1-\alpha)}, \quad \alpha = 4/p;$$

2) *если* $p = 4$, *то* $\mathrm{T}_0 = +\infty$ *и имеет место неравенство*

$$\mathrm{E}(t) \leqslant \mathrm{E}_0 \exp\{\mathrm{B}_2 t\};$$

3) *если* $p \in (2, 4)$ *и выполнено неравенство*

$$\mathrm{E}'(0) > \left(\frac{\gamma}{\alpha_1 - 1} \right)^{1/2} \mathrm{E}_0 + \frac{\beta}{\alpha_1 - 1} \mathrm{E}_0,$$

то $\mathrm{T}_0 \in [\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2]$, *где*

$$\mathrm{E}'(0) = \parallel u_0 \parallel_4^4 - \parallel u_0 \parallel_2^2, \quad \mathrm{E}_0 = \mathrm{E}(0) = \frac{1}{2} \parallel \nabla u_0 \parallel_2^2 + \frac{p-1}{p} \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p,$$

$$\alpha_1 = \frac{4+p}{2p}, \quad \beta = \frac{2(\mathrm{B}_3^2 + 3)}{4-p}, \quad \gamma = \frac{16\mathrm{B}_3^2(\mathrm{B}_3^2 + 3)}{4-p}, \quad p \in (2, 4),$$

$$\mathrm{T}_1 = \frac{1}{\alpha - 1} \mathrm{B}_2^{-1} \mathrm{E}_0^{1-\alpha}, \quad \mathrm{B}_2 \equiv \mathrm{B}_1^{q+2} \left(\frac{p}{p-1} \right)^{4/p},$$

$$\mathrm{T}_2 = \mathrm{E}_0^{1-\alpha_1} \mathrm{A}^{-1},$$

$$\mathrm{A}^2 \equiv (1-\alpha_1)^2 \mathrm{E}^{-2\alpha_1}(0) \left[\left(\mathrm{E}'(0) - \frac{\beta}{\alpha_1 - 1} \mathrm{E}_0 \right)^2 - \frac{\gamma}{\alpha_1 - 1} (\mathrm{E}(0))^2 \right],$$

B_3 — *наилучшая постоянная вложения* $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^2(\Omega)$.

Доказательство.

Пусть u_m — галеркинские приближения, определенные в (7.7). Поскольку $u_{0m} \rightharpoonup u_0$ сильно в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, а последовательность $u_m \rightharpoonup u$ слабо в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ для почти всех $t \in (0, \mathrm{T})$, то переходом в (7.11) и (7.12) к пределу при $m \to +\infty$, с учетом того что $\mathrm{E}(t) \leqslant \liminf\limits_{m \to +\infty} \mathrm{E}_m(t)$ (см. [Иосида]), получим

$$\mathrm{E}(t) \leqslant \left[\mathrm{E}_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\mathrm{B}_2 t \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad \text{при } \alpha < 1,$$
$$\mathrm{E}(t) \leqslant \mathrm{E}_0 \exp\left\{ \mathrm{B}_2 t \right\}, \quad \text{при } \alpha = 1.$$

Рассмотрим случай $\alpha > 1$.

Поскольку последовательность $u_{0m} \to u_0$ сильно в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, то в силу результата работы [Канторович] имеем: $\mathrm{E}_{0m} \to \mathrm{E}_0$. В этом случае из числовой последовательности E_{0m} можно выделить либо монотонно неубывающую, либо монотонно невозрастающую подпоследовательность. Будем искомую подпоследовательность последовательности E_{0m} и соответствующие подпоследовательности последовательностей u_{0m} и u_m обозначать так же. Рассмотрим неравенство (7.13). Предположим, что E_{0m} — монотонно невозрастающая последовательность. Введем обозначение: $\{\mathrm{E}_{0m}^{\{n\}}\}$ — последовательность, полученная из E_{0m} путем вычеркивания первых $n \in \mathbb{N}$ слагаемых. Тогда неравенство (7.13) имеет место равномерно по m для всех $t \in [0, \mathrm{T}_1^{\{n\}})$, где $\mathrm{T}_1^{\{N\}} \equiv (\alpha-1)^{-1} \mathrm{B}_2^{-1} \mathrm{E}_{0n}^{1-\alpha}$. Поскольку $u_m \rightharpoonup u$ $*$–слабо в $\mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$ то для всех таких t мы можем перейти к пределу при $m \to +\infty$ в (7.13) и с учетом результата работы [Иосида] получить, что

$$\mathrm{E}(t) \leqslant \mathrm{E}_0 \left[1 - (\alpha-1)\mathrm{B}_2 \mathrm{E}_0^{\alpha-1} t \right]^{-1/(\alpha-1)} \quad \text{при } t \in [0, \mathrm{T}_1^{\{n\}}). \tag{7.33}$$

В силу произвольности $n \in \mathbb{N}$ и того $\mathrm{T}_1^{\{n\}} \uparrow \mathrm{T}_1$ при $n \to +\infty$, мы приходим к выводу, что (7.33) имеет место при $t \in [0, \mathrm{T}_1)$ и, кроме того, $\mathrm{T}_0 \geqslant \mathrm{T}_1$. Пусть теперь E_{0m} — монотонно неубывающая последовательность. Тогда, повторяя предыдущие рассуждения, получим, что (7.33) имеет место для всех $t \in [0, \mathrm{T}_1)$ и $\mathrm{T}_0 \geqslant \mathrm{T}_1$.

Для дальнейшего изложения нам необходимо доказать, что для почти всех $t \in [0, \mathrm{T}] \quad \forall\, \mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0), \quad \mathrm{E}_m(t) \to \mathrm{E}(t)$.

С этой целью заметим, что при доказательстве теоремы 1 мы получили (7.29), а значит, в силу вложения $\mathbb{L}^p(Q) \subset \mathbb{L}^2(Q), \quad Q = (0, \mathrm{T}) \times$

$\times\,\Omega,\ \ \forall\,\mathrm{T}\in[0,\mathrm{T}_0)$ имеем

$$\int\limits_0^t ds\,\mathrm{E}_m(s)\to\int\limits_0^t ds\,\mathrm{E}(s)\ \ \forall\,t\in[0,\mathrm{T}],\ \ \forall\,\mathrm{T}\in(0,\mathrm{T}_0).\tag{7.34}$$

С другой стороны, при выполнении условий теоремы 5 имеет место компактное вложение $\mathbb{H}^1(Q)\subset\mathbb{L}^4(Q)$ (см., например, [Байокки]), а последовательность u_m сходится слабо в $\mathbb{H}^1(Q)$. Стало быть, последовательность $u_m\to u$ сильно в $\mathbb{L}^4(Q),\ \ Q=(0,\mathrm{T})\times\Omega\,\forall\,\mathrm{T}\in(0,\mathrm{T}_0)$. Поскольку правая часть выражения для $\mathrm{E}_m(t)$ сходится для любого $t\in[0,\mathrm{T}],\ \ \mathrm{T}\in(0,\mathrm{T}_0)$ к некоторой функции $\eta(t)$ и из доказательства теоремы 1 следует, что $\mathrm{E}_m(t)\leqslant\mathrm{C}<+\infty$, где C не зависит ни от m, ни от t, то в силу теоремы Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла Лебега (см., например, [Дьяченко]) имеем: $\eta(t)\in\in\mathbb{L}^1(0,\mathrm{T})\ \ \forall\,\mathrm{T}\in(0,\mathrm{T}_0)$ и

$$\int\limits_0^t ds\,\mathrm{E}_m(s)\to\int\limits_0^t ds\,\eta(s)\ \ \forall\,t\in[0,\mathrm{T}],\ \ \forall\,\mathrm{T}\in(0,\mathrm{T}_0).\tag{7.35}$$

При сравнении (7.34) с (7.35) приходим к выводу, что

$$\int\limits_0^t ds\,[\mathrm{E}(s)-\eta(s)]=0\quad\forall\,t\in[0,\mathrm{T}],\ \ \forall\,\mathrm{T}\in(0,\mathrm{T}_0),\tag{7.36}$$

причем $\mathrm{E}(t)\in\mathbb{L}^1(0,\mathrm{T}),\ \ \eta(t)\in\mathbb{L}^1(0,\mathrm{T})$, поэтому получим

$$\eta(t)=\mathrm{E}(t)\quad\forall\,t\in[0,\mathrm{T}],\ \ \forall\,\mathrm{T}\in(0,\mathrm{T}_0).$$

Таким образом, в силу (7.36) мы приходим к выводу, что последовательность $\mathrm{E}_m(t)$ при дополнительных условиях на $q>0$ сходится почти всюду к $\mathrm{E}(t)$ на множестве $t\in[0,\mathrm{T}]\ \ \forall\,\mathrm{T}\in(0,\mathrm{T}_0)$.

В силу (7.9), (7.14), а также поскольку $u_m(t)\in\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T};\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$, имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\parallel\nabla u_m\parallel_2^2+\frac{p-1}{p}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^N\left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^p+\parallel u_m\parallel_2^2=\parallel u_m\parallel_4^4(s),\tag{7.37}$$

$$\parallel\nabla u_m^{'}\parallel_2^2+(p-1)\sum_{i=1}^N\int\limits_\Omega dx\,\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\left|\frac{\partial u_m^{'}}{\partial x_i}\right|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\parallel u_m\parallel_2^2=$$
$$=\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\parallel u_m\parallel_4^4+\int\limits_\Omega dx\,u_{mx_1}^{'}u+\frac{1}{2}\int\limits_\Omega dx\,u_m^2u_{mx_1}^{'}.\tag{7.38}$$

Из (7.37), (7.38) следует, что $\mathrm{E}_m(t)$, $\mathrm{E}_m^{'}(t) \in \mathbb{AC}[0,\mathrm{T}]$. Справедливы следующие неравенства:

$$\left| \int\limits_{\Omega} dx \, \left(\nabla u_m^{'}, \nabla u_m \right) \right|^2 \leqslant \| \nabla u_m^{'} \|_2^2 \| \nabla u_m \|_2^2, \tag{7.39}$$

$$\left| \int\limits_{\Omega} dx \, \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m^{'}}{\partial x_i} \right| \leqslant \int\limits_{\Omega} dx \, \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-1} \left| \frac{\partial u_m^{'}}{\partial x_i} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^{p/2} \left(\int\limits_{\Omega} dx \, \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left| \frac{\partial u_m^{'}}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{1/2}. \tag{7.40}$$

В силу неравенства Шварца (см., например, [Морен]) имеем

$$\sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^{p/2} \left(\int\limits_{\Omega} dx \, \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left| \frac{\partial u_m^{'}}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^{p} \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} dx \, \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left| \frac{\partial u_m^{'}}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{1/2}. \tag{7.41}$$

В силу (7.37)–(7.41) справедлива цепочка неравенств:

$$\left| \langle u_m, [-\triangle u_m - \triangle_p u_m]_t^{'} \rangle \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left| \langle \nabla u_m^{'}, \nabla u_m \rangle \right|^2 + (p-1)^2 \left| \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} dx \, \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m^{'}}{\partial x_i} \right|^2 +$$

$$+ 2(p-1) \left| \left(\nabla u_m^{'}, \nabla u_m \right) \right| \left| \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} dx \, \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m^{'}}{\partial x_i} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \| \nabla u_m^{'} \|_2^2 \| \nabla u_m \|_2^2 + (p-1)^2 \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} dx \, \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left| \frac{\partial u_m^{'}}{\partial x_i} \right|^2 +$$

$$+ 2(p-1) \| \nabla u_m^{'} \|_2 \| \nabla u_m \|_2 \left(\sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^{p} \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} dx \, \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-2} \times \right.$$

$$\left. \times \left| \frac{\partial u_m^{'}}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{1/2} \leqslant \left(\| \nabla u_m \|_2^2 + (p-1) \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^{p} \right) \times$$

$$\times \left(\| \nabla u_m' \|_2^2 + (p-1) \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} dx \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left| \frac{\partial u_m'}{\partial x_i} \right|^2 \right) \leqslant$$

$$\leqslant p \left(\| \nabla u_m' \|_2^2 + (p-1) \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} dx \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left| \frac{\partial u_m'}{\partial x_i} \right|^2 \right) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{2} \| \nabla u_m \|_2^2 + \frac{p-1}{p} \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p \right).$$

Таким образом, мы приходим к неравенству

$$(\mathrm{E}_m')^2 \leqslant p\, \mathrm{E}_m(t) \mathrm{J}_m(t), \tag{7.42}$$

где

$$\mathrm{J}_m(t) = \| \nabla u_m' \|_2^2 + (p-1) \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} dx \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left| \frac{\partial u_m'}{\partial x_i} \right|^2.$$

Воспользуемся теперь равенствами (7.37), (7.38) для получения оценки сверху на величину J_m. Действительно, справедливы следующие неравенства:

$$\mathrm{J}_m = \frac{1}{4}\mathrm{E}_m'' + \frac{1}{4}\frac{d}{dt} \| u_m \|_2^2 + \int\limits_{\Omega} dx\, u'_{mx_1} u + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} dx\, u'_{mx_1} u^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\mathrm{E}_m'' + \frac{\varepsilon}{4}\mathrm{B}_3^2 \mathrm{J}_m + \frac{1}{2\varepsilon}\mathrm{B}_3^2 \mathrm{E}_m + \frac{\varepsilon}{2}\mathrm{J}_m + \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{B}_3^2 \mathrm{E}_m + \frac{\varepsilon}{4}\mathrm{J}_m + \frac{1}{4\varepsilon} \| u_m \|_4^4 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\mathrm{E}_m'' + \frac{\varepsilon}{4}(\mathrm{B}_3^2 + 3)\mathrm{J}_m + \frac{2\mathrm{B}_3^2}{\varepsilon}\mathrm{E}_m + \frac{1}{4\varepsilon}\mathrm{E}_m'. \tag{7.43}$$

Из (7.42), (7.43) получим (см. [Калантаров, Ладыженская])

$$\mathrm{E}_m \mathrm{E}_m'' - \alpha_1 (\mathrm{E}_m')^2 + \beta \mathrm{E}_m' \mathrm{E}_m + \gamma \mathrm{E}_m^2 \geqslant 0,$$

где

$$\alpha_1 = \frac{4+p}{2p}, \quad \beta = \frac{2(\mathrm{B}_3^2 + 3)}{4-p}, \quad \gamma = \frac{16\mathrm{B}_3^2(\mathrm{B}_3^2+3)}{4-p}$$

при $p < 4$. Тогда $\alpha_1 > 1$, $\beta,\ \gamma > 0$.

Рассуждая далее, как и при доказательстве соответствующего места теоремы 4 настоящей главы, приходим к утверждению теоремы.

Теорема доказана.

Глава 7

НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

В этой главе рассматриваются начальные и начально-краевые задачи для некоторых частных уравнений псевдопараболического типа, не удовлетворяющие условиям, сформулированным в предыдущих главах, а также одна задача Коши в $\mathbb{R}^3$. Результаты главы опубликованы в работах [Корпусов, Свешников].

§ 1. Нелинейное нелокальное уравнение псевдопараболического типа

В первом параграфе рассматривается первая начально-краевая задача с однородным условием Дирихле для нелинейного нелокального уравнения псевдопараболического типа с нелокальным слагаемым типа Кирхгоффа. При этом, если следовать терминологии, наследуемой из исследований по классическому волновому уравнению типа Кирхгоффа, — мы рассматриваем вырожденный случай. И, кроме того, мы рассматриваем сингулярный случай. Для рассматриваемой задачи нами доказана однозначная разрешимость в сильном и в слабом обобщенном смыслах. Причем в случае $q \in (-1/2, 0)$ доказан эффект релаксации за конечное время и получены оптимальные оценки снизу и сверху на скорость и некоторые оценки сверху и снизу на время релаксации. В случае $q > 0$ нами изучено асимптотическое поведение решения задачи при больших временах.

Сформулируем теперь задачу, которую будем в дальнейшем исследовать:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\triangle u - u) + \left[\int\limits_{\Omega} dx\,|\nabla u|^2\right]^q \triangle u = 0, \quad q > -1/2, \tag{1.1}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \tag{1.2}$$

где $\Omega \in \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 1$, Ω — поверхностно односвязная ограниченная область, $\partial\Omega \in \mathbb{C}^\infty$. Данная задача является математической моделью, описывающей квазистационарные процессы в полупроводниках в случае нелокальной связи проводимости σ среды и напряженности электрического поля $\mathbf{E}$.

1.1. Глобальная во времени разрешимость задачи. Рассмотрим следующую задачу на собственные функции и собственные значения:

$$\triangle w_j + \lambda_j w_j = 0, \;\; w_j \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \;\; j = \overline{1, +\infty}. \tag{1.3}$$

Справедливо следующее вложение: $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^2(\Omega)$. Собственные функции задачи (1.3) образуют ортогональный базис в $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ относительно скалярного произведения в $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Кроме того, при условии гладкости границы $\partial\Omega \in \mathbb{C}^\infty$ области Ω, имеем: $w_j \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega), \;\; j \in \mathrm{N}$.

Обозначим через $\psi(x)$ произвольную функцию класса $\mathbb{C}_0^{(2)}(\overline{\Omega})$ и такую, что $\psi \geqslant 0$, где $\mathbb{C}_0^{(2)}(\overline{\Omega}) = \{u \in \mathbb{C}^2(\overline{\Omega}) : u\big|_{\partial\Omega} = u_{x_i}\Big|_{\partial\Omega} = u_{x_i x_j}\Big|_{\partial\Omega} = 0\}$, $i, j = \overline{1, \mathrm{N}}$.

Кроме того, обозначим через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скобки двойственности между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$.

Теорема 1. *Пусть* $q \in (-1/2, +\infty)$, $u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \bigcap \mathbb{H}^2(\Omega)$. *Тогда, если либо* $N = 1$, *либо* $q > 0$ *и* $N \geqslant 2$, *то существует единственное глобальное во времени решение задачи* (1.1), (1.2) *класса*

$$u \in \mathbb{L}^\infty(0, +\infty; \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)), \;\; u' \in \mathbb{L}^2(0, +\infty; \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)),$$

если же $N \geqslant 2$ *и* $q \in (-1/2, 0)$, *то найдется такое* $\mathrm{T}_0 \in (0, +\infty)$, *зависящее от начальных условий задачи, что существует единственное решение задачи* (1.1), (1.2) *класса*

$$u \in \mathbb{L}^\infty(0, +\infty; \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \;\; u' \in \mathbb{L}^2(0, +\infty; \mathbb{H}_0^1(\Omega)),$$
$$u \in \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}_0; \mathbb{H}^2(\Omega)), \;\; u' \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}_0; \mathbb{H}^2(\Omega)).$$

Причем справедливы следующие оценки сверху и снизу:

если $q \in (-1/2, 0)$, *то*

$$(c_5 2|q|)^{1/|q|}(\mathrm{T}_0 - t)^{1/|q|} \leqslant \| \nabla u \|_2^2 (t) + \| u \|_2^2 (t) \leqslant$$
$$\leqslant (c_6 2|q|)^{1/|q|}(\mathrm{T}_0 - t)^{1/|q|}$$

$\forall\, t \in [0, \mathrm{T}_0]$, *где*

$$c_6 \equiv \frac{\| \nabla u_0 \|_2^{2(q+1)}}{\left[\| \nabla u_0 \|_2^2 + \| u_0 \|_2^2\right]^{q+1}}, \;\; c_5(\Omega) \equiv c_2(\Omega)/(1 + c_2(\Omega)),$$

$c_2(\Omega)$ — *наилучшая постоянная вложения* $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^2(\Omega)$: $c_2(\Omega) \| v \|_2^2 \leqslant \| \nabla v \|_2^2$,

$$\frac{\| \nabla u_0 \|_2^{2|q|}}{2|q|} \frac{\| \nabla u_0 \|_2^2 + \| u_0 \|_2^2}{\| \nabla u_0 \|_2^2} \leqslant \mathrm{T}_0 \leqslant \frac{\left(\| \nabla u_0 \|_2^2 + \| u_0 \|_2^2\right)^{|q|}}{2|q| c_5(\Omega)},$$

если $q > 0$, *то*

$$c_7 \left[c_{10} + t\right]^{-1/q} \leqslant \| \nabla u \|_2^2 (t) + \| u \|_2^2 (t) \leqslant c_9 \left[c_8 + t\right]^{-1/q},$$

где

$$c_7 \equiv \mathrm{E}_0^{(1+q)/q}(2q)^{-1/q} \parallel \nabla u_0 \parallel_2^{-2(1+q)/q},$$
$$c_8 \equiv \mathrm{E}_0^{-q} c_3^{-1} q^{-1}, \quad c_9 \equiv c_3^{-1/q} q^{-1/q},$$
$$c_{10} \equiv \mathrm{E}_0 (2q)^{-1} \parallel \nabla u_0 \parallel^{-2(1+q)}, \mathrm{E}_0 = \parallel \nabla u_0 \parallel_2^2 + \parallel u_0 \parallel_2^2,$$
$$c_3 \equiv \frac{2^{-q+1} c_2^{1+q}}{c_2^{1+q} + 1}.$$

Наконец, если $u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, *то решение задачи* (1.1), (1.2) *класса* $u \in \mathbb{L}^\infty(0, +\infty; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$, $u' \in \mathbb{L}^2(0, +\infty; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ *единственное.*

Доказательство.

В дальнейшем мы будем доказывать глобальную во времени разрешимость в слабом обобщенном смысле [Лионс, 1].

Определение. Слабым обобщенным решением задачи (1.1), (1.2) назовем функцию $u(x,t)$, почти всюду совпадающую с функцией класса $\mathbb{C}([0,\mathrm{T}]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ при некотором $\mathrm{T} > 0$ и удовлетворяющую условиям

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt \left\langle \frac{\partial}{\partial t} [\triangle u - u] + \parallel \nabla u \parallel_2^{2q} \triangle u, w \right\rangle \varphi(t) = 0$$
$$\forall\, \varphi \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T}),\ \forall\, w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega),\ \ \mathrm{T} > 0,\ q > -1/2,$$

при $\parallel \nabla u_0 \parallel_2 > 0$, или $u(x,t) = 0$ почти всюду в $Q \equiv (0,\mathrm{T}) \times \Omega$ при $\parallel \nabla u_0 \parallel_2 = 0$. Символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначена скобка двойственности между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$.

Отметим, что определение слабого обобщенного решения корректно. Во-первых, заметим, что для величины

$$\mathrm{J} = \parallel \nabla u \parallel_2^{2q} \langle \triangle u, w \rangle, \ \ u, w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \ \ q > -1/2$$

справедливо неравенство

$$|\mathrm{J}| \leqslant \parallel \nabla u \parallel_2^{2q} |(\nabla u, \nabla w)_2| \leqslant \parallel \nabla w \parallel_2 \parallel \nabla u \parallel_2^{2q+1} \to +0$$

при $u \to 0$ сильно в $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$. Во-вторых, возьмем в определении слабого обобщеного решения $w = u$, тогда после интегрирования по частям получим

$$\parallel \nabla u \parallel_2^2 + \parallel u \parallel_2^2 + 2 \int_0^{\mathrm{T}} dt \parallel \nabla u \parallel_2^{2q+1} = \parallel \nabla u_0 \parallel_2^2 + \parallel u_0 \parallel_2^2 .$$

Поэтому если $u_0 = 0$ почти всюду, то $u(x,t) = 0$ почти всюду.

Замечание 1. Поскольку в условиях теоремы 1

$$u \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T}; \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \ \ u' \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T}; \mathbb{H}_0^1(\Omega)),$$

то в силу результата работы [Лионс, 1] имеем: $u(t) : [0, \mathrm{T}] \to \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ — сильно непрерывная функция. И значит, определен след функции $u(x)(t)$ при $t = 0$ и начальное условие (1.2) имеет смысл.

Шаг 1. *Галеркинские приближения и априорные оценки первого порядка.*

Для доказательства локальной разрешимости воспользуемся методом Галеркина в сочетании с методами монотонности и компактности [107].

Будем искать приближенное решение нашей задачи (1.1), (1.2) в виде

$$u_m = \sum_{k=1}^{m} c_{mk}(t) w_k, \quad u_{0m} \equiv u_m(0) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{mk} w_k \to u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)$$

$$\text{сильно в } \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega), \ \alpha_{mk} \equiv c_{mk}(0), \tag{1.4}$$

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt \left\langle \frac{\partial}{\partial t} [\triangle u_m - u_m] + \| \nabla u_m \|_2^{2q} \triangle u_m, w_j \right\rangle \varphi(t) = 0, \tag{1.5}$$

$j = \overline{1, m}, \ \forall\, \varphi \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T})$ для всех $\mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_{m0})$, $\mathrm{T}_{m0} = \mathrm{T}_{m0}(u_{0m})$.

Заметим, что в силу (1.3) имеем: $w_k \in \mathbb{H}^3(G)$ для любой строго внутренней подобласти G области Ω: $\overline{G} \subset \Omega$ с границей $\partial G \in \mathbb{C}^\infty$.

Воспользуемся видом задачи (1.5) для того, чтобы привести ее к несколько другому виду, удобному для вывода априорных оценок второго порядка. Введем обозначение

$$\mathcal{L}[u_m] \equiv \frac{\partial}{\partial t} [\triangle u_m - u_m] + \| \nabla u_m \|_2^{2q} \triangle u_m.$$

В этом случае задача (1.5) примет вид

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt \, \langle \mathcal{L}[u_m], w_j \rangle \varphi(t) = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad \forall\, \varphi(t) \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}), \ \forall\, \mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_{m0}).$$

В силу того что $\{w_j\}$ образуют по определению базис в $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, любую функцию вида $h_{k,i} \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, $i = \overline{1, N}$, $k = \overline{1, m}$, можно с любой наперед заданной точностью приблизить линейными комбинациями w_j. Для любого $m \in \mathbb{N}$ можно указать такое натуральное $N(m)$ и такие $d_{kml,i}$, что будет иметь место неравенство

$$\| \nabla h_{k,i} - \nabla h_{km,i} \|_2 + \| h_{k,i} - h_{km,i} \|_2 \leqslant \frac{1}{2^k}, \quad h_{km,i} = \sum_{l=1}^{N(m)} d_{kml,i} w_l.$$

Теперь умножим обе части равенства (1.5) на $d_{kmj,i}$ и просуммируем по $j = \overline{1, N(m)}$. Затем в качестве функции $\varphi(t)$ возьмем $\overline{c}_{mk}(t) \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T})$

(равномерно по m и k) и просуммируем по $k = \overline{1,m}$. В результате получим

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left\langle \mathcal{L}[u_m], \sum_{k=1}^{m} h_{k,i}\overline{c}_{mk} \right\rangle = \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left\langle \mathcal{L}[u_m], \sum_{k=1}^{m} [h_{k,i} - h_{km,i}]\overline{c}_{mk} \right\rangle \equiv \mathrm{F}_{mi}. \quad (1.6)$$

Причем справедливы следующие оценки на функции F_{mi}:

$$|\mathrm{F}_{mi}| \leqslant \sum_{k=1}^{m} \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, |\overline{c}_{mk}| \left[\| \nabla h_{k,i} - \nabla h_{km,i} \|_2^2 + \| h_{k,i} - h_{km,i} \|_2^2 \right]^{1/2} \times$$

$$\times \left[\| \nabla u_m^{'} \|_2 + \| u_m^{'} \|_2 + \| \nabla u_m \|_2^{2q+1} \right] \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{k=1}^{m} 2^{-k} \left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left[\| \nabla u_m^{'} \|_2 + \| u_m^{'} \|_2 + \| \nabla u_m \|_2^{2q+1} \right]^2 \right)^{1/2} \times$$

$$\times \sup_{k=1,m} \left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, |\overline{c}_{mk}|^2 \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C \left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left[\| \nabla u_m^{'} \|_2 + \| u_m^{'} \|_2 + \| \nabla u_m \|_2^{2q+1} \right]^2 \right)^{1/2}$$

$\forall\, \mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_m)$.

Интегрированием по частям в равенствах (1.5) мы приходим к следующему уравнению:

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \int\limits_{\Omega} dx \left[\left(\nabla u_m^{'}, \nabla w_j \right) + u_m^{'} w_j + \| \nabla u_m \|_2^{2q} \left(\nabla u_m, \nabla w_j \right) \right] \varphi(t) = 0$$

$\forall\, \varphi \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T})$. Отсюда получим, что

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left(\sum_{k=1}^{m} c_{mk}^{'} a_{kj} + f_{mj}(t) \right) \varphi(t) = 0, \quad q > -1/2,$$

где

$$f_{mj}(t) \equiv \sum_{k=1}^{m} \frac{c_{mk}(\nabla w_k, \nabla w_j)}{\left[\sum\limits_{l_1 l_2=1,1}^{m} c_{ml_1} c_{ml_2} (\nabla w_{l_1}, \nabla w_{l_2})\right]^{-q}},$$

$$a_{kj} = (\nabla w_k, \nabla w_j) + (w_k, w_j)\,,$$

$q > -1/2$, причем, используя свойство положительной определенности квадратичной формы, образованной матрицей Грамма в $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ с элементами $(\nabla w_k, \nabla w_j)$, и условия $q > -1/2$, можно доказать непрерывность функций $f_{mj}(t)$ по совокупности переменных c_{mk}, $k = \overline{1,m}$, в окрестности нуля. Наконец, в классе $c_{mk} \in \mathbb{C}^{(1)}[0, \mathrm{T}_{m0}]$ и в силу основной леммы вариационного исчисления приходим к следующему равенству:

$$\sum_{k=1}^{m} a_{kj} \frac{dc_{mk}}{dt} + f_{mj} = 0, \quad c_{mk}(0) = \alpha_{mk}, \quad j = \overline{1,m}, \quad \forall\, t \in [0, \mathrm{T}_{m0}].$$

В силу выбора функций w_j определитель $\det(a_{kj}) \neq 0$. Общие результаты о нелинейных системах обыкновенных дифференциальных уравнений гарантируют существование решения задачи (2.3) на некотором интервале $[0, \mathrm{T}_{m0}]$, $\mathrm{T}_{m0} > 0$, в смысле $c_{mk} \in \mathbb{C}^{(1)}[0, \mathrm{T}_{m0}]$. Значит, $c_{mk} \in \mathbb{C}^{(1)}[0, \mathrm{T}_m]$, $u_m \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_{m0}]; \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega))$.

Займемся выводом априорных оценок. Взяв в равенстве (1.5) функцию $\varphi(t) = c_{mj}(t)$ и суммируя по $j = \overline{1,m}$, приходим к равенству

$$\| \nabla u_m \|_2^2 + \| u_m \|_2^2 + 2 \int_0^t ds \, \| \nabla u_m \|_2^{2(1+q)} = \| \nabla u_{0m} \|_2^2 + \| u_{0m} \|_2^2 \tag{1.7}$$

$\forall\, t \in [0, \mathrm{T}_{m0}]$. Теперь, взяв в качестве $\varphi(t)$ функцию $c_{mj}^{'}$ и суммируя по $j = \overline{1,m}$, получим уравнение

$$\int_0^t \left[\| \nabla u_m^{'} \|_2^2 + \| u_m^{'} \|_2^2\right] ds + \frac{1}{2(1+q)} \| \nabla u_m \|_2^{2(1+q)} = \frac{1}{2(1+q)} \| \nabla u_{0m} \|_2^{2(1+q)}. \tag{1.8}$$

Из уравнений (1.7), (1.8), в силу того что $u_m \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_{m0}]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$, вытекают соответственно следующие дифференциальные равенства:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\| \nabla u_m \|_2^2 + \| u_m \|_2^2\right] + \| \nabla u_m \|_2^{2(q+1)} = 0, \tag{1.9}$$

$$\| \nabla u_m^{'} \|_2^2 + \| u_m^{'} \|_2^2 + \frac{1}{2(1+q)}\frac{d}{dt} \| \nabla u_m \|_2^{2(1+q)} = 0. \tag{1.10}$$

Поскольку по условию

$$u_m(0) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{mk} w_k \to u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \ \text{ сильно в } \mathbb{H}_0^1(\Omega), \ \alpha_{mk} \equiv c_{mk}(0),$$

то правые части равенств (1.7), (1.8) ограничены константами, не зависящими ни от $m \in \mathbb{N}$, ни от t, а это в свою очередь означает, что

$$\begin{gathered} u_m \ \text{ равномерно по } \ m \ \text{ ограничена в } \ \mathbb{L}^\infty(0, +\infty; \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \\ u_m^{'} \ \text{ равномерно по } \ m \ \text{ ограничена в } \ \mathbb{L}^2(0, +\infty; \mathbb{H}_0^1(\Omega)). \end{gathered}$$

Отсюда сразу же получаем, что найдется такая подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$, для которой мы оставим прежнее обозначение $\{u_m\}$, что

$$\begin{gathered} u_m \rightharpoonup u \ \ *-\text{слабо в } \ \mathbb{L}^\infty(0, +\infty; \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \\ u_m^{'} \rightharpoonup u^{'} \ \text{ слабо в } \ \mathbb{L}^2(0, +\infty; \mathbb{H}_0^1(\Omega)). \end{gathered} \tag{1.11}$$

Из (1.11) вытекает, что для некоторой подпоследовательности последовательности $\{u_m\}$

$$\begin{gathered} u_m \to u \ \text{ слабо в } \ \mathbb{H}^1(\mathrm{Q}) \hookrightarrow \mathbb{L}^2(\mathrm{Q}), \\ \mathrm{Q} \equiv (0, \mathrm{T}) \times \Omega \ \text{ и сильно в } \ \mathbb{L}^2(\mathrm{Q}) \ \ \forall\, \mathrm{T} \in (0, +\infty), \end{gathered}$$

а стало быть, найдется подпоследовательность, сходящаяся почти всюду в $\mathrm{Q} \equiv (0, \mathrm{T}) \times \Omega$ к u:

$$u_m \to u \ \text{ п. вс. в } \ \mathrm{Q} \equiv (0, \mathrm{T}) \times \Omega \ \ \forall\, \mathrm{T} \in (0, +\infty).$$

Кроме того, из (1.7), (1.8) в силу выбора базиса $w_j \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$ имеем

$$|c_{mk}|(t) \leqslant C < +\infty, \ \int\limits_0^t ds\, |c_{mk}^{'}|^2(s) \leqslant C < +\infty, \tag{1.12}$$

где постоянная C не зависит от t, k, m.

Кроме того, при $q > 0$ справедливо неравенство

$$\int\limits_0^t ds\, |c_{mk}|^2(s) \leqslant C < +\infty.$$

Шаг 2. *Оценки снизу и сверху на нормы «галеркинских» приближений.*

Лемма 1. *Справедливы следующие оценки сверху и снизу на скорость и время стремления* $\| \nabla u_m \|_2^2 + \| u_m \|_2^2$ *к нулю.*

Если $q \in (-1/2, 0)$, *то найдется такое* $\mathrm{T}_{m0} \in (0, +\infty)$, *что*

$$(c_5 2|q|)^{1/|q|}(\mathrm{T}_{\mathrm{m0}} - t)^{1/|q|} \leqslant \| \nabla u_m \|_2^2 (t) + \| u_m \|_2^2 (t) \leqslant$$
$$\leqslant (c_{6m} 2|q|)^{1/|q|}(\mathrm{T}_{\mathrm{m0}} - t)^{1/|q|}, \quad (1.13)$$

где

$$c_{6m} \equiv \frac{\| \nabla u_{0m} \|_2^{2(q+1)}}{\left[\| \nabla u_{0m} \|_2^2 + \| u_{0m} \|_2^2\right]^{q+1}} \leqslant 1, \quad c_5(\Omega) \equiv c_2(\Omega)/(1 + c_2(\Omega)),$$

$\forall\, t \in [0, \mathrm{T}_{\mathrm{m0}}]$, $c_2(\Omega)$ — *наибольшая постоянная вложения* $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^2(\Omega) : c_2(\Omega) \| v \|_2^2 \leqslant \| \nabla v \|_2^2$,

$$\frac{\| \nabla u_{0m} \|_2^{2|q|}}{2|q|} \frac{\| \nabla u_{0m} \|_2^2 + \| u_{0m} \|_2^2}{\| \nabla u_{0m} \|_2^2} \leqslant \mathrm{T}_{\mathrm{m0}} \leqslant \frac{\left(\| \nabla u_{0m} \|_2^2 + \| u_{0m} \|_2^2\right)^{|q|}}{2|q| c_5(\Omega)}.$$

Если $q > 0$, *то*

$$c_{7m} \left[c_{10m} + t\right]^{-1/q} \leqslant \| \nabla u_m \|_2^2 (t) + \| u_m \|_2^2 (t) \leqslant$$
$$\leqslant c_{9m} \left[c_{8m} + t\right]^{-1/q}, \quad (1.14)$$

где

$$c_{7m} \equiv \mathrm{E}_{0m}^{(1+q)/q}(2q)^{-1/q} \| \nabla u_{0m} \|_2^{-2(1+q)/q}, \quad c_{8m} \equiv \mathrm{E}_{0m}^{-q} c_3^{-1} q^{-1},$$

$$c_{9m} \equiv c_3^{-1/q} q^{-1/q}, \quad c_{10m} \equiv \mathrm{E}_{0m}(2q)^{-1} \| \nabla u_{0m} \|^{-2(1+q)},$$
$$\mathrm{E}_{0m} = \| \nabla u_{0m} \|_2^2 + \| u_{0m} \|_2^2, \quad c_3 \equiv \frac{2^{-q+1} c_2^{1+q}}{c_2^{1+q} + 1}.$$

Доказательство.

Пусть $\| \nabla u_0 \|_2 > 0$, тогда мы можем выбрать такую подпоследовательность u_{m0}, что $\| \nabla u_{m0} \|_2 > 0$. В качестве $\{u_m\}$ возьмем итоговую на данный момент подпоследовательность, которую, как обычно, обозначим также через $\{u_m\}$. В силу (1.11) каждое u_m при $m \in \mathbb{N}$ является глобальным во времени решением задачи (1.5).

Пусть $q \in (-1/2, 0)$. В силу условий на область Ω справедливо вложение $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^2(\Omega) : c_2(\Omega) \| \varphi \|_2^2 \leqslant \| \nabla \varphi \|_2^2$ с некоторой постоянной $c_2(\Omega)$. С учетом данного вложения из уравнения (1.9) получим следующее неравенство:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\| \nabla u_m \|_2^2 + \| u_m \|_2^2\right] + c_2(\Omega) \frac{\| u_m \|_2^2}{\| \nabla u_m \|_2^{-2q}} \leqslant 0. \quad (1.15)$$

Разделим обе части неравенства (1.15) на $c_2(\Omega)$ и сложим получившееся неравенство с уравнением (1.9), в результате получим

$$\frac{1}{2}\left[1+c_2^{-1}(\Omega)\right]\frac{d}{dt}\left[\| \nabla u_m \|_2^2 + \| u_m \|_2^2\right] + \\ + \frac{\| \nabla u_m \|_2^2 + \| u_m \|_2^2}{\| \nabla u_m \|_2^{-2q}} \leqslant 0. \quad (1.16)$$

Из (1.16) в силу отрицательности q вытекает неравенство

$$\frac{1}{2}\left[1+c_2^{-1}(\Omega)\right]\frac{d}{dt}\left[\| \nabla u_m \|_2^2 + \| u_m \|_2^2\right] + \\ + \frac{\| \nabla u_m \|_2^2 + \| u_m \|_2^2}{(\| \nabla u_m \|_2^2 + \| u_m \|_2^2)^{-q}} \leqslant 0. \quad (1.17)$$

Введем обозначения:

$$\mathrm{F}_m(t) \equiv \| \nabla u_m \|_2^2 + \| u_m \|_2^2, \quad c_4(\Omega) = 2c_2(\Omega)/(1+c_2(\Omega)).$$

Тогда из (1.17) получим следующее обыкновенное дифференциальное неравенство первого порядка:

$$\frac{d\mathrm{F}_m}{dt} + c_4(\Omega)\mathrm{F}_m(t)^{1+q} \leqslant 0, \quad (1.18)$$

$\mathrm{F}_{m0} \equiv \mathrm{F}_m(0) = \| \nabla u_{m0} \|_2^2 + \| u_{m0} \|_2^2 > 0$, $q \in (-1/2, 0)$, из которого вытекает неравенство

$$0 \leqslant \mathrm{F}_m(t) \leqslant \left(\mathrm{F}_{m0}^{|q|} - |q| c_4(\Omega) t\right)^{\frac{1}{|q|}}.$$

Анализируя полученное неравенство, приходим к выводу, что поскольку

$$\mathrm{F}_{m0} = \| \nabla u_{m0} \|_2^2 + \| u_{m0} \|_2^2 > 0,$$

то найдется такой момент времени $0 < \mathrm{T}_{m0} \leqslant \mathrm{F}_{m0}^{|q|}|q|^{-1}c_4^{-1}(\Omega)$ и выполнены следующие равенства:

$$\| \nabla u_m \|_2^2 (\mathrm{T}_{m0}) = \| u_m \|_2^2 (\mathrm{T}_{m0}) = 0.$$

Тем самым за конечное время T_{m0} решение u_m задачи (1.5) класса гладкости

$$u_m \in \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \quad u_m' \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \quad \mathrm{T} > 0,$$

обращается в нуль для почти всех $x \in \Omega$. В этом и заключается эффект релаксации за конечное время. Причем каждое решение задачи (1.5) обращается в нуль при почти всех $x \in \Omega$ за некоторое время T_{m0}, различное, вообще говоря, для разных решений. Но если для данного решения u_m время релаксации равно некоторому T_{m0}, то, рассматривая новую задачу (1.5) с начальным условием, равным нулю при $\mathrm{T} = \mathrm{T}_{m0}$, мы получим, что в рассматриваемом обобщенном классе

гладкости единственным решением в силу (1.9) будет тривиальное. Нетрудно убедиться, что сшитое во времени при $\mathrm{T} = \mathrm{T}_{m0}$ решение в силу (1.11) будет удовлетворять указанному выше классу гладкости. Действительно, нам достаточно убедиться, что сшитое таким образом решение $\overline{u}_m$:

$$\overline{u}_m(x,t) = \left\{ \begin{array}{cc} u_m(x,t), & t \in [0, \mathrm{T}_{m0}] \\ 0, & t \geqslant \mathrm{T}_{m0} \end{array} \right\},$$

принадлежит классу

$$\overline{u}_m \in \mathbb{L}^\infty(\mathrm{T}_{m0} - \eta, \mathrm{T}_{m0} + \eta; \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \;\; \overline{u}_m^{'} \in \mathbb{L}^2(\mathrm{T}_{m0} - \eta, \mathrm{T}_{m0} + \eta; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$$

в некоторой окрестности точки $t \in (\mathrm{T}_{m0} - \eta; \mathrm{T}_{m0} + \eta) \; \forall \, \eta \in (0, \mathrm{T}_{m0}/2)$. Из (1.9), (1.10) следует, что

$$\| \nabla \overline{u}_m \|_2^2 \, (t) + \| \overline{u}_m \|_2^2 \, (t) \leqslant \| \nabla u_{m0} \|_2^2 + \| u_{m0} \|_2^2,$$

$$\int\limits_{\mathrm{T}_{m0}-\eta}^{\mathrm{T}_{m0}+\eta} ds \, [\| \nabla \overline{u}_{ms} \|_2^2 \, (s) + \| \overline{u}_{ms} \|_2^2 \, (s)] \leqslant \frac{1}{2(1+q)} \| \nabla u_{m0} \|_2^{2(1+q)},$$

$$t \in (\mathrm{T}_{m0} - \eta, \mathrm{T}_{m0} + \eta).$$

Теперь мы в состоянии получить оптимальные оценки сверху и снизу на время и скорость релаксации галеркинских приближений u_m за конечное время. С этой целью введем обозначения

$$\mathrm{M}_m(t^*) \equiv \left(\| \nabla u_m \|_2^2 \, (t^*) + \| u_m \|_2^2 \, (t^*) \right)^{1/2},$$

$$\gamma \equiv \mathrm{M}_m^{-2q}(t^*), \;\; t^* \in (0, \mathrm{T}_{m0}),$$

$$v_m(s,x) \equiv \frac{1}{\mathrm{M}_m(t^*)} u_m(s\gamma + t^*, x), \;\; \mathrm{E}_m \equiv \sqrt{\| \nabla v_m \|_2^2 \, (s) + \| v_m \|_2^2 \, (s)}.$$

При этом мы будем под u_m понимать какое-либо одно решение задачи (1.5) с фиксированной точкой релаксации $0 < \mathrm{T}_{m0} \leqslant \mathrm{F}_{m0}^{|q|} |q|^{-1} c_4^{-1}(\Omega)$. Разумеется, для разных решений точки релаксации, вообще говоря, различны. Но все получаемые ниже результаты справедливы для всех решений исходной задачи в обобщенном смысле.

Нетрудно проверить, что введенная функция $v_m(s,x)$ удовлетворяет следующей начально-краевой задаче в смысле: $\mathbb{L}^2(-t^*/\gamma, \mathrm{T}_{m0}/\gamma - t^*/\gamma; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$,

$$\frac{\partial}{\partial s}(\triangle v_m - v_m) + \| \nabla v_m \|_2^{2q} \triangle v_m = 0, \tag{1.19}$$

$$v_m(-t^*/\gamma, x) = \frac{u_{m0}}{\mathrm{M}(t^*)}, \;\; q \in (-1, 0),$$

$$v_m(s,x) \in \mathbb{L}^\infty(-t^*/\gamma, \mathrm{T}/\gamma - t^*/\gamma; \mathbb{H}_0^1(\Omega)),$$

$$v_m^{'}(s,x) \in \mathbb{L}^2(-t^*/\gamma, \mathrm{T}/\gamma - t^*/\gamma; \mathbb{H}_0^1(\Omega)) \ \ \forall\, \mathrm{T} > 0$$

для всех $\mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_{m0})$. Докажем, что данное решение задачи (1.19), соответствующее фиксированному решению $u_m(x,t)$ с некоторым временем релаксации t_0, таково, что

$$-c_6 \leqslant \frac{d}{ds}\mathrm{E}_m(v_m)\mid_{s=0} \leqslant -c_5, \ \ c_5, c_6 > 0. \tag{1.20}$$

Заметим, что в рассматриваемом классе гладкости каждое решение задачи (1.19) удовлетворяет энергетическим равенствам (1.9) и (1.10) с заменой $u_m(x,t)$ на $v_m(x,s)$ и t на s в верхних пределах. В этом случае мы сразу же получаем, что для $v_m(x,s)$ справедлива оценка (1.18), из которой вытекает, что

$$\frac{d}{ds}\mathrm{E}_m(v_m)\mid_{s=0} \leqslant -c_5, \ \ c_5(\Omega) \equiv c_2(\Omega)/(1 + c_2(\Omega)), \tag{1.21}$$

где $c_2(\Omega)$ — максимальная постоянная вложения $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^2(\Omega)$: $c_2(\Omega) \parallel v \parallel_2^2 \leqslant \parallel \nabla v \parallel_2^2$. С другой стороны, в силу указанного класса гладкости и неравенства Коши–Буняковского имеет место следующее неравенство:

$$\left| \int\limits_\Omega dx\, [(\nabla v_m^{'}, \nabla v_m) + (v_m^{'}, v_m)] \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant [\parallel \nabla v_m \parallel_2^2 + \parallel v_m \parallel_2^2][\parallel \nabla v_m^{'} \parallel_2^2 + \parallel v_m^{'} \parallel_2^2], \tag{1.22}$$

а также равенство

$$\left| \int\limits_\Omega dx\, [(\nabla v_m^{'}, \nabla v_m) + (v_m^{'}, v_m)] \right|^2 = \frac{1}{4}\left| \frac{d\mathrm{F}_m}{ds} \right|^2, \tag{1.23}$$

$\mathrm{F}_m(s) \equiv \parallel \nabla v_m \parallel_2^2 (s) + \parallel v_m \parallel_2^2 (s)$. В силу (1.22), (1.23) получим

$$\mathrm{F}_m \frac{d^2\mathrm{F}_m}{ds^2} - (q+1)\left| \frac{d\mathrm{F}_m}{ds} \right|^2 \geqslant 0. \tag{1.24}$$

Делением обеих частей равенства (1.24) на $\mathrm{F}_m^{2+q}(s) > 0$ при $s \in [-t^*/\gamma, \mathrm{T}_{m0}/\gamma - t^*/\gamma)$ после несложных преобразований получим неравенство

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\mathrm{F}_m^{q+1}} \frac{d\mathrm{F}_m}{ds} \right) \geqslant 0, \ \ q \in [-1/2, 0). \tag{1.25}$$

Интегрированием дифференциального неравенства (1.25) по $s \in [-t^*/\gamma, t), \ t \in (-t^*/\gamma, \mathrm{T}_{m0}/\gamma - t^*/\gamma)$, получим

$$\frac{1}{\mathrm{F}_m^{q+1}} \frac{d\mathrm{F}_m}{ds}\bigg|_{s=0} \geqslant -\frac{1}{\mathrm{F}_m^{q+1}} \frac{d\mathrm{F}_m}{ds}\bigg|_{s=-t^*/\gamma} =$$

$$= -2\frac{\| \nabla u_{m0} \|_2^{2(q+1)}}{\mathrm{M}_m(t^*)^{2(q+1)}} \frac{\mathrm{M}_m(t^*)^{2(q+1)}}{\left[\| \nabla u_{m0} \|_2^2 + \| u_{m0} \|_2^2\right]^{q+1}} =$$

$$= -2\frac{\| \nabla u_{m0} \|_2^{2(q+1)}}{\left[\| \nabla u_{m0} \|_2^2 + \| u_{m0} \|_2^2\right]^{q+1}} \equiv -2c_{m6}. \quad (1.26)$$

Поскольку $\mathrm{F}_m' = 2\mathrm{E}_m\mathrm{E}_m'$, то из (1.26) вытекает неравенство:

$$\left.\frac{d\mathrm{E}_m}{ds}\right|_{s=0} \geqslant -c_{m6}. \quad (1.27)$$

Из (1.27) и (1.21) приходим к выводу о справедливости (1.20). Нетрудно убедиться, что с учетом определения $\mathrm{E}_m(s)$ соотношение (1.20) эквивалентно следующим дифференциальным неравенствам:

$$-c_{m6} \leqslant \frac{1}{\mathrm{M}_m(t^*)^{1+2q}} \frac{d\mathrm{M}_m(t^*)}{dt^*} \leqslant -c_5, \;\; t^* \in (0, \mathrm{T}_{m0}), \;\; q \in (-1, 0). \quad (1.28)$$

Интегрированием соотношения (1.28) в пределах по $t^* \in (t, \mathrm{T}_{m0})$, $M(\mathrm{T}_{m0}) = 0$ получим следующие неравенства

$$-c_{6m}2|q|(\mathrm{T}_{m0} - t) \leqslant -\mathrm{M}_m^{2|q|}(t) \leqslant -c_5 2|q|(\mathrm{T}_{m0} - t),$$

из которых вытекает нужная оценка (1.13).

Пусть теперь $q > 0$. Обозначим через $c_2(\Omega)$ наилучшую постоянную следующего вложения: $c_2 \| v \|_2 \leqslant \| \nabla u \|_2^2$. Из (1.7) вытекает, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\| \nabla u_m \|_2^2 + \| u_m \|_2^2\right] + c_2^{q+1} \| u_m \|_2^{2(q+1)} \leqslant 0. \quad (1.29)$$

Сложив неравенство (1.29) с (1.9), получим

$$\frac{1}{2}\frac{c_2^{q+1}+1}{c_2^{q+1}}\frac{d}{dt}\left[\| \nabla u_m \|_2^2 + \| u_m \|_2^2\right] +$$

$$+ \| \nabla u_m \|_2^{2(q+1)} + \| u_m \|_2^{2(q+1)} \leqslant 0. \quad (1.30)$$

С другой стороны, для любого $q > 0$ и для любых $z_1, z_2 \geqslant 0$ имеет место очевидное неравенство $z_1^{1+q} + z_2^{1+q} \geqslant 2^{-q}(z_1 + z_2)^{1+q}$. С учетом последнего неравенства и (1.30) приходим к следующему дифференциальному неравенству первого порядка:

$$\frac{d\mathrm{E}_m}{dt} + c_3(\Omega)\mathrm{E}_m^{1+q} \leqslant 0, \;\; c_3 \equiv \frac{2^{-q+1}c_2^{1+q}}{c_2^{1+q}+1},$$

из которого вытекает оценка сверху (1.14). С другой стороны, справедливо дифференциальное неравенство второго порядка (1.24) при $q > 0$, из которого вытекает оценка снизу (1.14).

Лемма доказана.

Шаг 3. *Априорные оценки второго порядка.*

Замечание 2. При выводе априорных оценок второго порядка нам достаточно того, что $w_k \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \bigcap \mathbb{H}^2(\Omega) \bigcap \mathbb{H}^3(G)$, где G — произвольная подобласть области Ω с границей $\partial G \in \mathbb{C}^\infty$.

Рассмотрим задачу (1.6), где в качестве $h_{k,i}$ возьмем функцию

$$h_{k,i} \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\psi \frac{\partial w_k}{\partial x_i}\right) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \;\; 0 \leqslant \psi(x) \in \mathbb{C}_0^{(2)}(\overline{\Omega}), \;\; \psi \frac{\partial w_k}{\partial x_i} \in \mathbb{H}_0^2(\Omega). \tag{1.31}$$

Функция $h_{k,i}$ в силу определения принадлежит классу $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$. Теперь в уравнении (1.6) в качестве $\overline{c}_{mk}$ возьмем $c_{mk} \in \mathbb{C}^{(1)}(0, \mathrm{T}_{m0})$ из равенства (1.4) для некоторого $\mathrm{T}_{m0} > 0$. Справедливы следующие вспомогательные соотношения:

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt \left\langle \triangle u_m', \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\psi \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)\right\rangle = -\int_0^{\mathrm{T}} dt \int_\Omega dx \left(\nabla u_m', \nabla \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\psi \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)\right) =$$

$$= \int_0^{\mathrm{T}} dt \int_\Omega dx \left(\nabla v_{mi}', \nabla(\psi v_{mi})\right) = \int_0^{\mathrm{T}} dt \int_\Omega dx \left(\nabla v_{mi}', \psi \nabla v_{mi}\right) +$$

$$+ \int_0^{\mathrm{T}} dt \int_\Omega dx\, v_{mi} \left(\nabla v_{mi}', \nabla \psi\right) = \frac{1}{2}\int_\Omega dx\, \psi |\nabla v_{mi}|^2 + \int_\Omega dx \, (\nabla v_{mi}, \nabla \psi)\, v_{mi} -$$

$$- \int_0^{\mathrm{T}} dt \int_\Omega dx \, (\nabla v_{mi}, \nabla \psi)\, v_{mi}' - \frac{1}{2}\int_\Omega dx\, \psi |\nabla v_{0mi}|^2 - \int_\Omega dx \, (\nabla v_{0mi}, \nabla \psi)\, v_{0mi}\,.$$

$$- \int_0^{\mathrm{T}} dt \int_\Omega dx\, u_m' \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\psi \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right) =$$

$$= \int_0^{\mathrm{T}} dt \int_\Omega dx\, v_{mi}' \psi v_{mi} = \frac{1}{2}\int_\Omega dt\, |v_{mi}|^2 \psi - \frac{1}{2}\int_\Omega dx\, |v_{0mi}|^2 \psi\,.$$

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt \;\| \nabla u_m \|_2^{2q} \left\langle \triangle u_m, \frac{\partial}{\partial x_i}(\psi v_{mi})\right\rangle =$$

$$= \int_0^{\mathrm{T}} dt \;\| \nabla u_m \|_2^{2q} \left[|\nabla v_{mi}|^2 \psi + (\nabla v_{mi}, \nabla \psi) v_{mi}\right].$$

Таким образом, в силу (1.31) получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega dx\,\psi(x)|\nabla v_{m,i}|^2+\frac{1}{2}\int\limits_\Omega dx\,\psi(x)|v_{m,i}|^2+\int\limits_\Omega dx\ (\nabla v_{m,i},\nabla\psi)\,v_{m,i}=$$
$$=\frac{1}{2}\int\limits_\Omega dx\,\psi(x)|\nabla v_{m0,i}|^2+\frac{1}{2}\int\limits_\Omega dx\,\psi(x)|v_{m0,i}|^2+\int\limits_\Omega dx\,(\nabla v_{m0,i},\nabla\psi)\,v_{m0,i}+$$
$$+\int\limits_0^t ds\,[\int\limits_\Omega dx\,v_{m,i}^{'}\,(\nabla\psi,\nabla v_{m,i})-\parallel\nabla u_m\parallel_2^{2q}\int\limits_\Omega dx\,\psi(x)\,|\nabla v_{m,i}|^2-$$
$$-\parallel\nabla u_m\parallel_2^{2q}\int\limits_\Omega dx\,v_{m,i}\,(\nabla v_{m,i},\nabla\psi)]-\mathrm{F}_{mi},\quad(1.32)$$

где по определению

$$v_{m,i}\equiv\frac{\partial u_m}{\partial x_i},$$

а для функций F_{mi} справедлива оценка, вытекающая из (1.6) в силу (1.12):

$$|\mathrm{F}_{mi}|\leqslant C\left(\int\limits_0^{\mathrm{T}}dt\,\left[\parallel\nabla u_m^{'}\parallel_2+\parallel u_m^{'}\parallel_2+\parallel\nabla u_m\parallel_2^{2q+1}\right]^2\right)^{1/2}.$$

Введем обозначения:

$$\mathrm{I}_{1i}=\int\limits_\Omega dx\,\psi(x)|\nabla v_{m,i}|^2,\ \ \mathrm{I}_{2i}=\int\limits_\Omega dx\,\psi(x)|v_{m,i}|^2,$$
$$\mathrm{I}_{3i}=\int\limits_\Omega dx\,v_{m,i}^{'}\,(\nabla\psi,\nabla v_{m,i}),\ \ \mathrm{I}_{4i}=-\parallel\nabla u_m\parallel_2^{2q}\int\limits_\Omega dx\,\psi(x)\,|\nabla v_{m,i}|^2,$$
$$\mathrm{I}_{5i}=-\parallel\nabla u_m\parallel_2^{2q}\int\limits_\Omega dx\,v_{m,i}\,(\nabla v_{m,i},\nabla\psi),$$
$$\mathrm{I}_{6i}=\int\limits_\Omega dx\ (\nabla v_{m,i},\nabla\psi)\,v_{mi}.$$

Интегрированием по частям в равенствах I_{5i} и I_{6i} получим

$$\mathrm{I}_{5i}=\frac{1}{2}\parallel\nabla u_m\parallel_2^{2q}\int\limits_\Omega dx\,\triangle\psi|v_{m,i}|^2,$$
$$\mathrm{I}_{6i}=-\frac{1}{2}\int\limits_\Omega dx\,\triangle\psi|v_{m,i}|^2.$$

Теперь мы займемся изучением интеграла I_{3i} :

$$\mathrm{I}_{3i} = \int\limits_{\Omega} dx\, v_{m,i}^{'} \left(\nabla\psi, \nabla v_{m,i}\right) = \int\limits_{\Omega} dx\, \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_i \partial t} \left(\nabla\psi, \nabla \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right),$$

$$\mathrm{I}_3 = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{I}_{3i} = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} dx\, \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_i \partial t} \left(\nabla\psi, \nabla \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} dx\, \psi \left(\nabla v_{m,i}^{'}, \nabla v_{m,i}\right) - \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} dx\, \psi \frac{\partial u_m^{'}}{\partial x_i} \triangle \frac{\partial u_m}{\partial x_i} =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} dx\, \psi |\nabla v_{m,i}|^2 + \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} dx\, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial u_m^{'}}{\partial x_i} \triangle u_m +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} dx\, \psi \frac{\partial^2 u_m^{'}}{\partial x_i^2} \triangle u_m = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \left[-\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} dx\, \psi |\nabla v_{m,i}|^2 + \int\limits_{\Omega} dx\, \psi |\triangle u_m|^2 \right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} dx\, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial u_m^{'}}{\partial x_i} \triangle u_m.$$

Теперь просуммируем (1.32) по $i = \overline{1, N}$, тогда с учетом полученных выражений для I_{li}, $l = \overline{1,5}$, $i = \overline{1, N}$, получим

$$2\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} dx\, \psi(x) |\nabla v_{m,i}|^2 + \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} dx\, \psi(x) |v_{m,i}|^2 + \int\limits_{\Omega} dx\, \psi(x) |\triangle u_{m0}|^2 -$$

$$- \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} dx\, \triangle\psi |v_{m,i}|^2 = -2\sum_{i=1}^{N} \mathrm{F}_{mi} + 2\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} dx\, \psi(x) |\nabla v_{0m,i}|^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} dx\, \psi(x) |v_{0m,i}|^2 + \int\limits_{\Omega} dx\, \psi(x) |\triangle u_m|^2 - \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} dx\, \triangle\psi |v_{0m,i}|^2 +$$

$$+ \int\limits_{0}^{t} ds \sum_{i=1}^{N} \Big[2 \int\limits_{\Omega} dx\, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial u_m^{'}}{\partial x_i} \triangle u_m - 2 \parallel \nabla u_m \parallel_2^{2q} \int\limits_{\Omega} dx\, \psi(x) |\nabla v_{m,i}|^2 +$$

$$+ \parallel \nabla u_m \parallel_2^{2q} \int\limits_{\Omega} dx\, \triangle\psi |v_{m,i}|^2 \Big] \quad (1.33)$$

для всех $t \in (0, \mathrm{T}_{m0})$.

Для дальнейшего изложения нам необходимо получить нужную оценку сверху на величину $\parallel \triangle u_m \parallel_2^2$. С этой целью в задаче (1.5)

воспользуемся равенством

$$-\frac{1}{\lambda_j}\triangle w_j = w_j \in \mathbb{L}^2(\Omega).$$

В качестве $\varphi(t) \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T})$ возьмем c_{mj} из (1.4). Тогда суммированием по $j = \overline{1,N}$ получим

$$\| \triangle u_m \|_2^2 + \| \nabla u_m \|_2^2 + 2\int\limits_0^t ds \ \| \nabla u_m \|_2^{2q} \| \triangle u_m \|_2^2 = \\ = \| \triangle u_{m0} \|_2^2 + \| \nabla u_{m0} \|_2^2 . \quad (1.34)$$

Из (1.6), (1.13), (1.14), (1.34) вытекает, что для всех $t \in [0,+\infty)$ имеет место неравенство

$$\| \triangle u_m \|_2^2 (t) + \| \nabla u_m \|_2^2 (t) \leqslant \\ \leqslant \| \triangle u_{m0} \|_2^2 + \| \nabla u_{m0} \|_2^2 \leqslant C(t) < +\infty \quad (1.35)$$

$\forall\, t \in (0,+\infty)$, где постоянная $C(t)$ не зависит от m — это справедливо в силу сильной сходимости $u_{m0} \to u_0$ в $\mathbb{H}^2(\Omega)$.

Введем обозначение

$$\mathrm{Y}_m(t) \equiv \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} dx\, \psi(x) |\nabla v_{m,i}|^2. \quad (1.36)$$

С учетом полученных ранее априорных оценок первого порядка (1.9) и (1.10), оценок (1.6) функций вида $\mathrm{F}_{m,i}$ и оценок (1.33)–(1.36) приходим к следующему интегральному неравенству:

$$\mathrm{Y}_m(t) \leqslant A_1 t + A_2 \int\limits_0^t ds \ \| \nabla u_m \|_2^{2q} (s) + A_3 + \\ + A_4 \int\limits_0^t ds \ \| \nabla u_m \|_2^{2q} (s) \mathrm{Y}_m(s) \quad (1.37)$$

$\forall\, t \in (0, \mathrm{T}_{m0})$, $A_n > 0$, $n = \overline{1,4}$, где T_{m0} — время релаксации решения u_m и постоянные A_n, $n = \overline{1,4}$, вообще говоря, зависят каким-то образом от $\psi(x) \in \mathbb{C}_0^{(2)}(\overline{\Omega})$.

Рассмотрим сначала случай $q \in (-1/2, 0)$.

С учетом нижней оценки (1.13) интегральное уравнение (1.37) примет следующий вид:

$$\mathrm{Y}_m(t) \leqslant A_1 t + \overline{A}_2 \int\limits_0^t ds \, \frac{1}{\mathrm{T}_{m0} - s} + A_3 + \overline{A}_4 \int\limits_0^t ds \, \frac{1}{\mathrm{T}_{m0} - s} \mathrm{Y}_m(s)$$

$\forall\, t \in (0, \mathrm{T}_{m0})$. В силу неравенства Беллмана–Гронуола (см., например, [Демидович]) из последнего неравенства получим

$$\mathrm{Y}_m(t) \leqslant \left(A_1 t + \frac{\overline{A}_2 t}{\mathrm{T}_{m0} - t} + A_3 \right) \exp\left\{ \frac{\overline{A}_4 t}{\mathrm{T}_{m0} - t} \right\} \quad \forall\, t \in (0, \mathrm{T}_{m0}). \tag{1.38}$$

Из (1.13) следует, что последовательность T_{m0} удовлетворяет условиям

$$(2|q|)^{-1}[\| \nabla u_{m0} \|_2^2 + \| u_{m0} \|_2^2]^{|q|} \leqslant \mathrm{T}_{m0} \leqslant$$
$$\leqslant (c_5 2|q|)^{-1}[\| \nabla u_{m0} \|_2^2 + \| u_{m0} \|_2^2]^{|q|}.$$

Тогда

$$\liminf_{m \to +\infty} \mathrm{T}_{m0} = \underline{\mathrm{T}}_0 \geqslant (2|q|)^{-1}[\| \nabla u_{m0} \|_2^2 + \| u_{m0} \|_2^2]^{|q|} > 0.$$

Выберем из T_{m0} последовательность, сходящуюся к $\underline{\mathrm{T}}_0$. Причем можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся монотонно сверху к $\underline{\mathrm{T}}_0$ либо монотонно снизу.

Пусть $\mathrm{T}_{m0} \downarrow \underline{\mathrm{T}}_0$, $0 < \underline{\mathrm{T}}_0 \leqslant \mathrm{T}_{m0}$, $\mathrm{E}_m \leqslant (2|q|)^{1/|q|}(\mathrm{T}_{m0} - t)^{1/|q|}$. Тогда мы можем перейти к пределу при $m \to +\infty$ равномерно по $t \in [0, \underline{\mathrm{T}}_0]$ и получить

$$\mathrm{E} \leqslant \liminf_{m \to +\infty} \mathrm{E}_m \leqslant (2|q|)^{1/|q|}(\underline{\mathrm{T}}_0 - t)^{1/|q|}.$$

Значит, в данном случае $\| \nabla u \|_2 (\underline{\mathrm{T}}_0) = 0$.

Пусть теперь $\mathrm{T}_{m0} \uparrow \underline{\mathrm{T}}_0$, $\mathrm{E}_m \leqslant (2|q|)^{1/|q|}(\mathrm{T}_{m0} - t)^{1/|q|}$. Тогда для любого $\overline{m} \in \mathbb{N}$ можно выделить подпоследовательность из T_{m0}, так что можно перейти к пределу при $m \to +\infty$ равномерно по $t \in [0, \mathrm{T}_{\overline{m}0}]$:

$$\mathrm{E} \leqslant \liminf_{m \to +\infty} \mathrm{E}_m \leqslant (2|q|)^{1/|q|}(\underline{\mathrm{T}}_0 - t)^{1/|q|}.$$

Но в силу произвольности $\overline{m}$ мы получаем, что указанная оценка сверху справедлива равномерно по $t \in [0, \underline{\mathrm{T}}_0]$. Стало быть, можно так выбрать подпоследовательность из последовательности u_m, что

$$\mathrm{T}_{m0} \to \underline{\mathrm{T}}_0 : \ \| \nabla u \|_2 (\underline{\mathrm{T}}_0) = 0.$$

Теперь нам необходимо перейти к пределу при $m \to +\infty$ в правой части неравенства (1.38). С этой целью нам опять необходимо рассмотреть два случая: $\mathrm{T}_{m0} \downarrow \underline{\mathrm{T}}_0$ и $\mathrm{T}_{m0} \uparrow \underline{\mathrm{T}}_0$.

Рассмотрим первый случай. Тогда, очевидно, $\underline{\mathrm{T}}_0 - t \leqslant \mathrm{T}_{m0} - t$, и из (1.38) получим

$$\mathrm{Y}_m(t) \leqslant \left(A_1 t + \frac{\overline{A}_2 t}{\underline{\mathrm{T}}_0 - t} + A_3 \right) \exp\left\{ \frac{\overline{A}_4 t}{\underline{\mathrm{T}}_0 - t} \right\} \tag{1.39}$$

$\forall t \in (0, \underline{\mathrm{T}}_0)$, $\underline{\mathrm{T}}_0 \geqslant \mathrm{T}_0$, где T_0 — время релаксации функции $u \in \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$, причем при условии $\| \nabla u_0 \|_2 > 0$ имеем: $\mathrm{T}_0 > 0$.

Изучим теперь второй случай.

Докажем, что Y_m равномерно по m ограничено с константой $C(t)$:

$$\mathrm{Y}_m(t) \leqslant C(t) < +\infty \ \ \forall\, t \in [0, \underline{\mathrm{T}}_0).$$

Предположим противное: найдется такое $t_m^* \in (0, \underline{\mathrm{T}}_0)$, что

$$\limsup_{t \uparrow t_m^*} \mathrm{Y}_m \to +\infty.$$

Выберем теперь натуральное число $\overline{m}$ таким образом, чтобы $\mathrm{T}_{\overline{m}0} > t^*$, тогда

$$\mathrm{Y}_m(t) \leqslant \left(A_1 t + \frac{\overline{A}_2 t}{\mathrm{T}_{\overline{m}0} - t} + A_3 \right) \exp\left\{ \frac{\overline{A}_4 t}{\mathrm{T}_{\overline{m}0} - t} \right\} \ \forall\, t \in (0, \mathrm{T}_{\overline{m}0}).$$

Теперь достаточно взять $t \in (t^*, \mathrm{T}_{\overline{m}0})$. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Рассмотрим случай $q \in (0, +\infty)$.

Из (1.37) получим

$$\mathrm{Y}_m(t) \leqslant \overline{A}_1 t + A_3 + \overline{A}_4 \int\limits_0^t ds\, \mathrm{Y}_m(s). \tag{1.40}$$

Из (1.40) по теореме Гронуолла–Белмана [Демидович] получим

$$\mathrm{Y}_m(t) \leqslant C(t) < +\infty, \ \ \forall\, t > 0,$$

где $C(t)$ не зависит от $m \in \mathbb{N}$.

В итоге мы получим

$$\mathrm{Y}_m(t) \leqslant C(t) < +\infty \tag{1.41}$$

в случае $t \in (0, \mathrm{T}_0)$ при $q \in (-1/2, 0)$ и $t \in (0, +\infty)$ при $q > 0$, где $C(t)$ не зависит от $m \in \mathbb{N}$.

Теперь мы предложим специальное разбиение единицы в области Ω. Рассмотрим сначала отрезок $[0, 2\varepsilon]$. На этом отрезке выпишем нужное нам разбиение единицы гладкими функциями $\psi_k(x) \in \mathbb{C}_0^1(\Omega)$. Предъявим разбиение единицы:

$$\psi_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\varepsilon, 2\varepsilon]; \\ \cos^2(\pi x/\varepsilon), & x \in [\varepsilon/2, \varepsilon]; \\ 0, & x \in [0, \varepsilon/2], \end{cases} \quad \ldots$$

$$\ldots,\ \psi_k(x) = \begin{cases} 0, & x \in [\varepsilon 2^{-k+2}, 2\varepsilon]; \\ \sin^2(2^{k-2}\pi x/\varepsilon), & x \in [\varepsilon 2^{-k+1}, \varepsilon 2^{-k+2}]; \\ \cos^2(2^{k-1}\pi x/\varepsilon), & x \in [\varepsilon 2^{-k}, \varepsilon 2^{-k+1}]; \\ 0, & [0, \varepsilon 2^{-k}]. \end{cases} . \tag{1.42}$$

Очевидно, что имеют место следующие свойства данного семейства функций:

$$\psi_k(x) \in \mathbb{C}^{(1)}[0, 2\varepsilon], \;\; \psi_k(0) = \psi_k^{'}(0) = 0, \;\; \text{supp}\; \psi_{\mathrm{k}} \subseteq [\varepsilon 2^{-\mathrm{k}}, \varepsilon 2^{-\mathrm{k}+2}],$$
$$\text{supp}\; \psi_1 \subseteq [\varepsilon/2, \varepsilon 2], \; \mathrm{k} > 1.$$

Теперь посмотрим, как, используя указанное разбиение единицы на отрезке $[0, 2\varepsilon]$, построить разбиение единицы в односвязной ограниченной области в случае $N = 2$. Для этого подберем сначала такое достаточно малое $\varepsilon > 0$, чтобы область $\Omega_{2\varepsilon} \subset \Omega$ с границей $\partial\Omega_{2\varepsilon}$, отстоящей по нормали в каждой точке границы $\partial\Omega$ на расстояние 2ε, существовала. Далее по указанному принципу строим области $\Omega_{2^{-k+2}\varepsilon}$. Фиксировав какую-либо точку $x \in \partial\Omega$ и выпустив из данной точки по внутренней нормали к $\partial\Omega$ луч, мы найдем точку пересечения с границей $\partial\Omega_{2\varepsilon}$ области $\Omega_{2\varepsilon}$. Теперь на полученном отрезке строим указанное разбиение единицы (1.42). Пробегая всю границу $x \in \partial\Omega \in \in \mathbb{C}^{\infty}$, мы построим искомое разбиение единицы двумерной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Случай многосвязной области рассматривается с помощью указанного метода около каждой связной компоненты границы $\partial\Omega$ многосвязной области Ω.

Рассмотрим теперь способ распространения данного алгоритма на случай ограниченной области Ω в $\mathbb{R}^N$.

Сначала рассмотрим $N-$мерный шар, вблизи границы которого строим как обычно радиально симметричное разбиение единицы. Отметим далее линии уровня каждой функции из построенного разбиения единицы. Затем гладким в смысле $\mathbb{C}^{\infty}$ образом деформируем границу шара. В этом случае гладким образом деформируются и линии уровня функций из разбиения единицы. Во всяком случае построенное разбиение единицы будет непрерывным, что для наших рассуждений достаточно. Мы предполагаем, что конечно-связная область $\Omega \in \mathbb{R}^N$ $\mathbb{C}^{\infty}-$ морфна $N-$мерному шару с выброшенными из внутренности шарами. В этом случае построение разбиения единицы аналогично построению в односвязной области.

Обозначим через $\varphi_k \in \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})$ функции из построенного на основе $\psi_k(x), \;\; x \in [0, 2\varepsilon]$, разбиения единицы вблизи границы области $\Omega \in \mathbb{R}^N$.

Теперь мы в состоянии получить нужные нам априорные оценки.

Пусть $\varphi_{kl} \in \mathbb{C}_0^{(2)}(\overline{\Omega})$ таковы, что $\| \varphi_k - \varphi_{kl} \|_{\infty} \to 0$ при $l \to +\infty$. Справедливы следующее равенство:

$$\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} dx \; |\nabla v_{m,i}|^2 = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} dx \left[\mathbf{1}(x) - \sum_{k=1}^{\mathrm{K}} \varphi_k(x) + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{\mathrm{K}} (\varphi_k(x) - \varphi_{kl}(x)) + \sum_{k=1}^{\mathrm{K}} \varphi_{kl}(x) \right] |\nabla v_{m,i}|^2 . \quad (1.43)$$

Для любого $\mathrm{K} \in \mathbb{N}$ найдется такое $l_{\mathrm{K}} \in \mathbb{N}$, что имеет место неравенство $\| \sum\limits_{k=1}^{K} (\varphi_k(x) - \varphi_{kl}(x)) \|_\infty \leqslant 1/4$ при $l \geqslant l_{\mathrm{K}}$. Рассмотрим отдельно следующий интеграл:

$$\mathrm{J} \equiv \int\limits_\Omega dx \sum_{i=1}^{N} \left[\mathbf{1}(x) - \sum_{k=1}^{\mathrm{K}} \varphi_k(x) \right] |\nabla v_{m,i}|^2, \quad f_{mi} = \frac{|\nabla v_{m,i}|^2}{\| \nabla v_{m,i} \|_2^2},$$

$$\mathrm{J}_m \equiv \int\limits_\Omega dx \sum_{i=1}^{N} \left[\mathbf{1}(x) - \sum_{k=1}^{\mathrm{K}} \varphi_k(x) \right] f_{mi}.$$

Причем для интеграла J_m выполнены условия теоремы Лебега о предельном по $k \to +\infty$ переходе под знаком интеграла. Действительно,

$$\left| \sum_{i=1}^{N} \left[\mathbf{1}(x) - \sum_{k=1}^{\mathrm{K}} \varphi_k(x) \right] f_{mi} \right| \leqslant \sum_{i=1}^{N} f_{mi}, \quad \| f_{mi} \|_1 = 1,$$

$$g_m = \sum_{i=1}^{N} \left[\mathbf{1}(x) - \sum_{k=1}^{\mathrm{K}} \varphi_k(x) \right] f_{mi} \to 0 \text{ п. вс. в } \Omega \text{ при } \mathrm{K} \to +\infty.$$

Стало быть, в силу (1.43) найдется такое $\mathrm{K} \in \mathbb{N}$, что равномерно по $m \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{J}_m \leqslant \frac{1}{4},$$

или, иначе,

$$\int\limits_\Omega dx \sum_{i=1}^{N} \left[\mathbf{1}(x) - \sum_{k=1}^{\mathrm{K}} \varphi_k(x) \right] |\nabla v_{m,i}|^2 \leqslant \frac{1}{4} \int\limits_\Omega dx \sum_{i=1}^{N} |\nabla v_{m,i}|^2.$$

Из (1.43) получаем

$$\sum_{i=1}^{N} \int\limits_\Omega dx \, |\nabla v_{m,i}|^2 \leqslant \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N} \int\limits_\Omega dx \, |\nabla v_{m,i}|^2 + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N} \int\limits_\Omega dx \, |\nabla v_{m,i}|^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{\mathrm{K}} \int\limits_\Omega dx \, \varphi_{kl}(x) \, |\nabla v_{m,i}|^2,$$

$$\sum_{i=1}^{N} \int\limits_\Omega dx \, |\nabla v_{m,i}|^2 \leqslant 2 \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{\mathrm{K}} \int\limits_\Omega dx \, \varphi_{kl}(x) \, |\nabla v_{m,i}|^2 \leqslant C(t) < +\infty \quad (1.44)$$

при $l = l_{\mathrm{K}}$ и достаточно большом фиксированном $\mathrm{K} \in \mathbb{N}$, $t \in (0, \mathrm{T}_0)$ при $q \in (-1/2, 0)$ и $t \in (0, +\infty)$ при $q > 0$ $C(t)$ не зависит от $m \in \mathbb{N}$.

Выведем теперь априорные оценки второго порядка относительно функции $u_m^{'}$. С этой целью в равенстве (1.6) в качестве $\overline{c}_{mk}$ возьмем $c_{mk}^{'}$ из (1.4), а в качестве $h_{k,i}$ возьмем

$$h_{k,i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\psi \frac{\partial w_k}{\partial x_i}\right) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad \psi \in \mathbb{C}_0^{(2)}(\Omega).$$

В результате интегрирования по частям получим

$$\mathrm{P}_{1,i} + \mathrm{P}_{2,i} + \mathrm{P}_{3,i} = -\mathrm{F}_{3i}, \tag{1.45}$$

где

$$\mathrm{P}_{1,i} = -\int_0^{\mathrm{T}} dt \int_\Omega dx \, \triangle v_{m,i}^{'} v_{m,i}^{'} \psi, \quad \mathrm{P}_{2,i} = \int_0^{\mathrm{T}} dt \int_\Omega dx \, |v_{m,i}^{'}|^2 \psi,$$

$$\mathrm{P}_{3,i} = -\int_0^{\mathrm{T}} dt \, \| \nabla u_m \|_2^{2q} \int_\Omega dx \, \triangle v_{m,i} v_{m,i}^{'} \psi,$$

$$|\mathrm{F}_{3i}| \leqslant C \left(\int_0^{\mathrm{T}} dt \left[\| \nabla u_m^{'} \|_2 + \| u_m^{'} \|_2 + \| \nabla u_m \|_2^{2q+1} \right]^2 \right)^{1/2},$$

$$\mathrm{P}_{1,i} = \int_0^{\mathrm{T}} dt \int_\Omega dx \, \psi |\nabla v_{m,i}^{'}|^2 + \int_0^{\mathrm{T}} dt \int_\Omega dx \, v_{m,i}^{'} \left(\nabla \psi, \nabla v_{m,i}^{'} \right) =$$

$$= \int_0^{\mathrm{T}} dt \int_\Omega dx \, \psi |\nabla v_{m,i}^{'}|^2 - \frac{1}{2} \int_0^{\mathrm{T}} dt \int_\Omega dx \, \triangle \psi |v_{m,i}^{'}|^2,$$

$$\mathrm{P}_{3,i} = -\int_0^{\mathrm{T}} dt \, \| \nabla u_m \|_2^{2q} \int_\Omega dx \, \frac{\partial \triangle u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m^{'}}{\partial x_i} \psi =$$

$$= \int_0^{\mathrm{T}} dt \, \| \nabla u_m \|_2^{2q} \int_\Omega dx \, \triangle u_m \frac{\partial^2 u_m^{'}}{\partial x_i^2} \psi + \int_0^{\mathrm{T}} dt \, \| \nabla u_m \|_2^{2q} \int_\Omega dx \, \triangle u_m \frac{\partial u_m^{'}}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}.$$

Из полученных соотношений в силу (1.45) следует равенство

$$\sum_{i=1}^{N} \int_0^{\mathrm{T}} dt \int_\Omega dx \, \psi |\nabla v_{m,i}^{'}|^2 + \sum_{i=1}^{N} \int_0^{\mathrm{T}} dt \int_\Omega dx \, \psi |v_{m,i}^{'}|^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \sum_{i=1}^{N} \int\limits_\Omega dx\, \triangle\psi |v'_{m,i}|^2 - \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \parallel \nabla u_m \parallel_2^{2q} \int\limits_\Omega dx\, \triangle u_m \triangle u'_m \psi -$$

$$- \sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \parallel \nabla u_m \parallel_2^{2q} \int\limits_\Omega dx\, \triangle u_m \frac{\partial u'_m}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{N} \mathrm{F}_{3,i}.$$

Теперь нам необходимо получить вспомогательную оценку для $\triangle u'_m$ вида (1.34). С этой целью в (1.5) воспользуемся равенством

$$-\triangle w_j = \lambda_j w_j \in \mathbb{L}^2(\Omega),$$

а в качестве $\varphi(t)$ возьмем c'_{mk}, тогда в результате интегрирования по частям и суммирования по $k = \overline{1,m}$ получим

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left(\parallel \triangle u'_m \parallel_2^2 + \parallel \nabla u'_m \parallel_2^2 + \parallel \nabla u_m \parallel_2^{2q} \int\limits_\Omega dx\, \triangle u'_m \triangle u_m \right) = 0.$$

Заметим теперь, что подынтегральное выражение непрерывно на сегменте $[0, \mathrm{T}]$ для всех $\mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_{m0})$. И следовательно, приходим к поточечному равенству

$$\parallel \triangle u'_m \parallel_2^2 + \parallel \nabla u'_m \parallel_2^2 + \parallel \nabla u_m \parallel_2^{2q} \int\limits_\Omega dx\, \triangle u'_m \triangle u_m = 0.$$

С учетом неравенства Гёльдера получим

$$\parallel \triangle u'_m \parallel_2^2 + \parallel \nabla u'_m \parallel_2^2 \leqslant \frac{1}{2} \parallel \triangle u'_m \parallel_2^2 + \frac{1}{2} \parallel \nabla u_m \parallel_2^{4q} \parallel \triangle u_m \parallel_2^2,$$

$$\parallel \triangle u'_m \parallel_2^2 \leqslant \parallel \nabla u_m \parallel_2^{4q} \parallel \triangle u_m \parallel_2^2 .$$

Рассуждая дальше точно так же, как при выводе оценки (1.41), получим

$$\sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \int\limits_\Omega dx\, \psi |\nabla v'_{m,i}|^2 \leqslant C(t) < +\infty, \tag{1.46}$$

$t \in (0, \mathrm{T}_0)$ при $q \in (-1/2, 0)$ и $t \in (0, +\infty)$ при $q > 0$. Далее, используя полученное ранее разбиение единицы, из (1.46) получим

$$\sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \int\limits_\Omega dx\, |\nabla v'_{m,i}|^2 \leqslant C(t) < +\infty, \tag{1.47}$$

$t \in (0, \mathrm{T}_0)$ при $q \in (-1/2, 0)$ и $t \in (0, +\infty)$ при $q > 0$.

Шаг 4. *Предельный переход при* $m \to +\infty$.

Теперь мы в состоянии выполнить предельный переход при $m \to +\infty$ в задаче (1.5). При этом из априорных оценок (1.44), (1.47) следует, что мы можем выделить такую подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$, которую мы снова обозначим через u_m, что

$$\begin{gathered} u_m \rightharpoonup u \ \ *-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0,+\infty;\mathbb{H}_0^1(\Omega)), \\ u_m^{'} \rightharpoonup u^{'} \ \text{ слабо в } \mathbb{L}^2(0,+\infty;\mathbb{H}_0^1(\Omega)), \\ u_m \rightharpoonup u \ \ *-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{H}^2(\Omega)), \\ u_m^{'} \rightharpoonup u^{'} \ \text{ слабо в } \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{H}^2(\Omega)), \end{gathered} \tag{1.48}$$

$$\forall\, \mathrm{T} \in (0,+\infty) \ \text{ при } \ q > 0, \ \ \forall\, \mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}_0) \ \text{ при } \ q \in (-1/2,0),$$

где T_0 — время релаксации предельной функции u. В силу компактного вложения $\mathbb{H}^2(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{H}^1(\Omega)$ и предельных соотношений (1.11), получим

$$u_m \to u \ \text{ сильно в } \ \mathbb{H}_0^1(\Omega) \ \text{ для почти всех } \ t \in (0,\mathrm{T}_{max}), \tag{1.49}$$

где $\mathrm{T}_{max} = +\infty$ при $q > 0$ и $\mathrm{T}_{max} = \mathrm{T}_0$ при $q \in (-1/2,0)$. С учетом полученных предельных соотношений (1.11) и (1.46)–(1.49) можем перейти к пределу при $m \to +\infty$ в задаче

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \varphi(t) \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \left[\triangle u_m - u_m\right] + \| \nabla u_m \|_2^{2q} \triangle u_m, w_j \right\rangle = 0, \ \ j = \overline{1,m}. \tag{1.50}$$

Рассмотрим случай $q \in (-1/2,0)$, поскольку случай $q > 0$ значительно проще.

Действительно, предположим, что $\| \nabla u_0 \|_2 > 0$, тогда, переходя, если это необходимо, к подпоследовательности, получим, что $\| \nabla u_{0m} \|_2 > 0$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$. В силу результата леммы 1 имеем неравенства

$$\begin{gathered} (c_5 2|q|)^{1/|q|} \left(\mathrm{T}_{m0} - t\right)^{1/|q|} \leqslant \\ \leqslant \| \nabla u_m \|_2^2 + \| u_m \|_2^2 \leqslant (c_{6m} 2|q|)^{1/|q|} \left(\mathrm{T}_{m0} - t\right)^{1/|q|}, \end{gathered}$$

т. е. T_{m0} — точное время релаксации функции u_m. Причем для T_{m0} справедливы оценки сверху и снизу:

$$\begin{gathered} \frac{1}{2|q|} \left(\| \nabla u_{m0} \|_2^2 + \| u_{m0} \|_2^2 \right)^{|q|} \leqslant \\ \leqslant \mathrm{T}_{m0} \leqslant \frac{1}{2|q|c_5} \left(\| \nabla u_{m0} \|_2^2 + \| u_{m0} \|_2^2 \right)^{|q|}. \end{gathered} \tag{1.51}$$

Пусть

$$\underline{\mathrm{T}}_0 = \liminf_{m \to +\infty} \mathrm{T}_{m0}.$$

Переходя, если это необходимо, к подпоследовательности, получим, что либо $\mathrm{T}_{m0} \uparrow \underline{\mathrm{T}}_0$, либо $\mathrm{T}_{m0} \downarrow \underline{\mathrm{T}}_0$. В силу того что $u_{m0} \to u_0$ сильно в $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, переходя к пределу в неравенствах (1.51), получим, что

$$\frac{1}{2|q|}\left(\| \nabla u_0 \|_2^2 + \| u_0 \|_2^2\right)^{|q|} \leqslant \underline{\mathrm{T}}_0 \leqslant \frac{1}{2|q|c_5}\left(\| \nabla u_0 \|_2^2 + \| u_0 \|_2^2\right)^{|q|}.$$

С другой стороны, точно так же как при выводе неравенства (1.39), получим неравенство

$$\| \nabla u \|_2^2 \leqslant (2|q|)^{1/|q|}\,(\underline{\mathrm{T}}_0 - t)^{1/|q|}.$$

Кроме того, из (1.11) вытекает, что $u \in \mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}_0^1(\Omega))$. Тогда приходим к выводу, что при $\| \nabla u_0 \|_2 > 0$ справедливо неравенство $0 < \mathrm{T}_0 \leqslant \underline{\mathrm{T}}_0$. Причем $\| \nabla u_m \|_2 > 0$ при $t \in [0, \mathrm{T}_{m0})$.

Рассмотрим два случая: $\mathrm{T}_{m0} \uparrow \underline{\mathrm{T}}_0$ и $\mathrm{T}_{m0} \downarrow \underline{\mathrm{T}}_0$.

Пусть во втором случае $\mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0)$, где T_0 — время релаксации функции u из (1.11), и, значит, $\| \nabla u_m \|_2 > 0$ для всех $t \in (0,\mathrm{T})$ и переходя к пределу в равенстве (1.50), получим

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\varphi(t)\langle \triangle u' - u' + \| \nabla u \|_2^{2q} \triangle u, w_j\rangle = 0 \tag{1.52}$$

$\forall\, \varphi \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T}),\ \forall\, j = \overline{1,+\infty}$, для всех $\mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}_0)$.

Рассмотрим теперь первый случай. Следует различать два подслучая: $\mathrm{T}_0 < \underline{\mathrm{T}}_0$ и $\mathrm{T}_0 = \underline{\mathrm{T}}_0$. В случае $\mathrm{T}_0 < \underline{\mathrm{T}}_0$ мы выбрасывая конечное число членов последовательности T_{m0}, получим, при $m > \overline{m} \in \mathbb{N}$, $\mathrm{T}_{m0} > \mathrm{T}_0$. И тогда для всех $\mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}_0)$, переходя к пределу при $m \to +\infty$ в уравнении (1.50), получим (1.52).

Пусть теперь $\mathrm{T}_0 = \underline{\mathrm{T}}_0$. Фиксируем произвольное $\overline{m} \in \mathbb{N}$. Тогда для всех $m > \overline{m}$ мы можем перейти к пределу при $m \to +\infty$ для всех $\mathrm{T} \in \in (0, \mathrm{T}_{0\overline{m}})$, а в силу произвольности $\overline{m}$ приходим к выводу, что имеет место уравнение (1.52).

Шаг 6. *Единственность.*

Рассмотрим задачу (1.52). По определению семейство функций $\{w_j\}_{j=1}^{+\infty}$ образует базис в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$. Пусть $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{+\infty}$ — какой либо базис в $\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T})$ для всех $\mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}_0)$. Линейные комбинации

$$\sum_{k,j=1}^{m_1,m_2} c_{jk} w_j(x) \varphi_k(t)$$

плотны в гильбертовом пространстве $\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{H}_0^1(\Omega))$, поэтому произвольную функцию $v \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{H}_0^1(\Omega))$ можно приблизить указанными

комбинациями:

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left\| \nabla v - \sum_{k,j=1}^{m_1,m_2} c_{jk} \nabla w_j(x) \varphi_k(t) \right\|_2 \leqslant \varepsilon,$$

со сколь угодно малым $\varepsilon > 0$. Отметим, что для любых $u \in$ $\in \mathbb{L}^{\infty}(0,\mathrm{T};\mathbb{H}_0^1(\Omega))$, $u^{'} \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{H}_0^1(\Omega))$ и для всех $v \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{H}_0^1(\Omega))$ при любом $\mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}_0)$ определен интеграл Лебега

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \, \langle \mathcal{L}[u], v \rangle,$$

где

$$\mathcal{L}[u] = \triangle u^{'} - u^{'} + \| \nabla u \|_2^{2q} \triangle u.$$

Действительно, справедливы следующие неравенства:

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left| \langle \triangle u^{'}, v \rangle \right| \leqslant \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \int\limits_{\Omega} dx \left| (\nabla u^{'}, \nabla v) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \, \| \nabla u^{'} \|_2^2 \right)^{1/2} \left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \, \| \nabla v \|_2^2 \right)^{1/2};$$

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left| \langle u^{'}, v \rangle \right| \leqslant \left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \, \| u^{'} \|_2^2 \right)^{1/2} \left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \, \| v \|_2^2 \right)^{1/2};$$

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \, \| \nabla u \|_2^{2q} \, |\langle \triangle u, v \rangle| \leqslant \left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \, \| \nabla u \|_2^{2(2q+1)} \right)^{1/2} \left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \, \| \nabla v \|_2^2 \right)^{1/2}.$$

Рассмотрим следующее равенство:

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \, \langle \mathcal{L}[u], v \rangle = \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left\langle \mathcal{L}[u], v - \sum_{k,j=1}^{m_1,m_2} c_{jk} w_j(x) \varphi_k(t) \right\rangle. \tag{1.53}$$

Поскольку $\mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}_0)$, то $\| \nabla u \|_2 > 0$ для всех $t \in [0,\mathrm{T}_0)$ при условии $\| \nabla u_0 \|_2 > 0$. Интегрированием по частям нетрудно доказать, что правая часть равенства (1.53) стремится к нулю при $\varepsilon \to +0$. Действительно, справедливы следующие неравенства:

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left| \langle \triangle u^{'}, v - \sum_{k,j=1}^{m_1,m_2} c_{jk} w_j(x) \varphi_k(t) \rangle \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left\| \nabla u^{'} \right\|_2^2 \right)^{1/2} \left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left\| \nabla v - \sum_{k,j=1}^{m_1,m_2} c_{jk} \nabla w_j(x) \varphi_k(t) \right\|_2^2 \right)^{1/2} \leqslant \delta_1(\varepsilon);$$

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left| \langle u^{'}, v - \sum_{k,j=1}^{m_1,m_2} c_{jk} w_j(x) \varphi_k(t) \rangle \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left\| u^{'} \right\|_2^2 \right)^{1/2} \left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left\| \nabla v - \sum_{k,j=1}^{m_1,m_2} c_{jk} \nabla w_j(x) \varphi_k(t) \right\|_2^2 \right)^{1/2} \leqslant \delta_2(\varepsilon);$$

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left\| \nabla u \right\|_2^{2q} \left| \langle \triangle u, v - \sum_{k,j=1}^{m_1,m_2} c_{jk} w_j(x) \varphi_k(t) \rangle \right| \leqslant \left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left\| \nabla u \right\|_2^{2(2q+1)} \right)^{1/2} \times$$

$$\times \left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left\| \nabla v - \sum_{k,j=1}^{m_1,m_2} c_{jk} \nabla w_j(x) \varphi_k(t) \right\|_2^2 \right)^{1/2} \leqslant \delta_3(\varepsilon).$$

Причем $\delta_i(\varepsilon, \mathrm{T}) \to +0$ при $\varepsilon \to +0$ для любого фиксированного $\mathrm{T} \in \in (0, \mathrm{T}_0)$. Поскольку левая часть равенства (1.53) не зависит от ε, то из (1.53) вытекает равенство

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \, \langle \mathcal{L}[u], v \rangle = 0 \quad \forall\, v \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \quad \forall\, \mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0). \tag{1.54}$$

Совершенно очевидно, что из (1.54) вытекает (1.52). Стало быть, задачи (1.52) и (1.54) эквивалентны.

Теперь возьмем в задаче (1.54) в качестве v функцию $u \in \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ и в результате интегрирования по частям получим

$$\| \nabla u \|_2^2 + \| u \|_2^2 + 2 \int\limits_0^t ds \, \| \nabla u \|_2^{2(1+q)} = \| \nabla u_0 \|_2^2 + \| u_0 \|_2^2 \tag{1.55}$$

$\forall\, t \in [0, \mathrm{T}_0]$. Теперь, взяв в качестве v функцию u', получим уравнение

$$\int\limits_0^t ds \left[\| \nabla u' \|_2^2 + \| u' \|_2^2\right] + \frac{1}{2(1+q)} \| \nabla u \|_2^{2(1+q)} = \frac{1}{2(1+q)} \| \nabla u_0 \|_2^{2(1+q)} \tag{1.56}$$

$\forall\, t \in [0, \mathrm{T}_0]$. Из равенств (1.55), (1.56) приходим к следующим уравнениям:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\| \nabla u \|_2^2 + \| u \|_2^2\right] + \| \nabla u \|_2^{2(q+1)} = 0, \tag{1.57}$$

$$\| \nabla u' \|_2^2 + \| u' \|_2^2 + \frac{1}{2(1+q)} \frac{d}{dt} \| \nabla u \|_2^{2(1+q)} = 0. \tag{1.58}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Справедливы следующие оценки сверху и снизу на скорость и время стремления* $\| \nabla u \|_2^2 + \| u \|_2^2$ *к нулю при условии* $\| \nabla u_0 \|_2 > 0$.

Если $q \in [-1/2, 0)$, *то найдется такое* $\mathrm{T}_0 \in (0, +\infty)$, *что*

$$(c_5 2|q|)^{1/|q|} (\mathrm{T}_0 - t)^{1/|q|} \leqslant \| \nabla u \|_2^2 (t) + \| u \|_2^2 (t) \leqslant \\ \leqslant (c_6 2|q|)^{1/|q|} (\mathrm{T}_0 - t)^{1/|q|}, \tag{1.59}$$

где

$$c_6 \equiv \frac{\| \nabla u_0 \|_2^{2(q+1)}}{\left[\| \nabla u_0 \|_2^2 + \| u_0 \|_2^2\right]^{q+1}} \leqslant 1,\ c_5(\Omega) \equiv \frac{c_2(\Omega)}{1 + c_2(\Omega)}, \forall\, t \in [0, \mathrm{T}_0],$$

$c_2(\Omega)$ — *наибольшая постоянная вложения* $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^2(\Omega)$: $c_2(\Omega) \| v \|_2^2 \leqslant \| \nabla v \|_2^2$,

$$\frac{\| \nabla u_0 \|_2^{2|q|}}{2|q|} \frac{\| \nabla u_0 \|_2^2 + \| u_0 \|_2^2}{\| \nabla u_0 \|_2^2} \leqslant \mathrm{T}_0 \leqslant \frac{\left(\| \nabla u_0 \|_2^2 + \| u_0 \|_2^2\right)^{|q|}}{2|q| c_5(\Omega)}.$$

Если $q > 0$, *то*

$$c_7 \left[c_{10} + t\right]^{-1/q} \leqslant \| \nabla u \|_2^2 (t) + \| u \|_2^2 (t) \leqslant c_9 \left[c_8 + t\right]^{-1/q}, \tag{1.60}$$

где

$$c_7 \equiv \mathrm{E}_0^{(1+q)/q} (2q)^{-1/q} \| \nabla u_0 \|_2^{-2(1+q)/q},\ \ c_8 \equiv \mathrm{E}_0^{-q} c_3^{-1} q^{-1},$$
$$c_9 \equiv c_3^{-1/q} q^{-1/q},$$
$$c_{10} \equiv \mathrm{E}_0 (2q)^{-1} \| \nabla u_0 \|^{-2(1+q)}, \mathrm{E}_0 = \| \nabla u_0 \|_2^2 + \| u_0 \|_2^2,$$
$$c_3 \equiv \frac{2^{-q+1} c_2^{1+q}}{c_2^{1+q} + 1}.$$

Доказательство.

Фактически повторяет доказательство леммы 1 с заменой u_m, u_{m0}, T_{m0} на u, u_0, T_0 соответственно и учетом равенств (1.57), (1.58).

Лемма доказана.

Рассмотрим сначала случай $q \in (-1/2, 0)$. Пусть u_l, $l = 1, 2$, — это два решения задачи (1.54), соответствующие u_0, и, кроме того, $w = u_1 - u_2$. Пусть $v = w$, тогда из (1.54) вытекает следующее выражение:

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathcal{L}[u_1] - \mathcal{L}[u_2], w \rangle = 0 \quad \forall\, \mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_{00}),$$

где $\mathrm{T}_{00} = \min\{\mathrm{T}_{01}, \mathrm{T}_{02}\}$, T_{0k} — время релаксации функции u_k, $k = 1, 2$. Интергрированием по частям в последнем равенстве приходим к уравнению

$$\| \nabla w \|_2^2 (\mathrm{T}) + \| w \|_2^2 (\mathrm{T}) = 2 \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \int\limits_\Omega dx \left(\| \nabla u_2 \|_2^{2q} \nabla u_2 - \| \nabla u_1 \|_2^{2q} \nabla u_1, \nabla w \right) \quad \forall\, \mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_{00}).$$

Пусть для определенности $\mathrm{T}_{01} \leqslant \mathrm{T}_{02}$. Справедливо следующее неравенство:

$$\left| r_1^q - r_2^q \right| \leqslant |q| \max\{r_1^{q-1}, r_2^{q-1}\} |r_1 - r_2|.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\left| \| \nabla u_1 \|_2^{2q} - \| \nabla u_2 \|_2^{2q} \right| \leqslant \frac{C}{(\mathrm{T}_{01} - t)^{(1+|q|)/|q|}} \left| \| \nabla u_1 \|_2^2 - \| \nabla u_2 \|_2^2 \right| \leqslant \frac{\mathrm{C}}{(\mathrm{T}_{01} - t)^{(1+|q|)/|q|}} \| \nabla u_2 \|_2 \| \nabla w \|_2 .$$

Справедливо следующее равенство:

$$\| \nabla w \|_2^2 + \| w \|_2^2 = \int\limits_0^t ds \int\limits_\Omega dx \left[\| \nabla u_2 \|_2^{2q} - \| \nabla u_1 \|_2^{2q} \right] (\nabla u_2, \nabla w) + \int\limits_0^t ds\, \| \nabla u_1 \|_2^{2q} \| \nabla w \|_2^2 .$$

Получим оценку сверху на величину

$$\mathrm{K} \equiv \int\limits_{\Omega} dx\,(\nabla w, \nabla u_2)\left(\| \nabla u_1 \|_2^{2q} - \| \nabla u_2 \|_2^{2q}\right).$$

Справедливо следующее неравенство:

$$\left|\| \nabla u_1 \|_2^{2q} - \| \nabla u_2 \|_2^{2q}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{C}\left\{\| \nabla u_1 \|_2^{2(q-1)}, \| \nabla u_2 \|_2^{2(q-1)}\right\}\left|\| \nabla u_1 \|_2^2 - \| \nabla u_2 \|_2^2\right| \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{C}\frac{1}{(\mathrm{T}_{01}-t)^{(1+|q|)/|q|}} \| \nabla u_1 \|_2 \| \nabla w \|_2 .$$

Стало быть,

$$\mathrm{K} \leqslant \mathrm{C}\frac{1}{(\mathrm{T}_{01}-t)^{(1+|q|)/|q|}} \| \nabla w \|_2^2 .$$

Отсюда приходим к выводу, что

$$\| \nabla w \|_2^2 \leqslant C\left(\frac{1}{\mathrm{T}_{01}-\mathrm{T}^*} + \frac{1}{(\mathrm{T}_{01}-\mathrm{T}^*)^{(1+|q|)/|q|}}\right)\int\limits_0^t ds\ \| \nabla w \|_2^2$$

$\forall\, t \in [0, \mathrm{T}^*],\ \forall\, \mathrm{T}^* \in (0, \mathrm{T}_{01})$. В силу неравенства Гронуолла–Беллмана [Демидович] имеем

$$\| \nabla w \|_2^2 = 0 \quad \forall\, t \in [0, \mathrm{T}^*],\ \forall\, \mathrm{T}^* \in (0, \mathrm{T}_{01}).$$

Отсюда сразу же получаем, что $\mathrm{T}_{01} = \mathrm{T}_{02} = \mathrm{T}_0$ и $w = 0$ для всех $t \in [0, +\infty)$.

Рассмотрим теперь случай $q > 0$. Этот случай, очевидно, проще, и единственность доказывается так же, как и в предыдущем случае, с использованием оценки (1.51).

Теорема доказана.

Теорема 2. *Для любого $u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ существует единственное решение задачи* (1.1), (1.2) *класса $u(x,t) \in \mathbb{L}^\infty(0, +\infty; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ и $u'(x,t) \in \mathbb{L}^2(0, +\infty; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$.*

Доказательство.

Нашей задачей на этом шаге является доказательство того факта, что задача (1.1), (1.2) однозначно разрешима в слабом обобщенном смысле в классе

$$u \in \mathbb{L}^\infty(0, +\infty; \mathbb{H}_0^1(\Omega)),\ \ u' \in \mathbb{L}^2(0, +\infty; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$$

при условии $u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$.

Итак, пусть $u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$. Возьмем какую-либо последовательность $u_0^n(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \bigcap \mathbb{H}^2(\Omega)$ такую, что $u_0^n \to u_0$ сильно в $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$. Обозначим через u^n соответствующее u_0^n единственное решение задачи (1.1), (1.2) в слабом обобщенном смысле.

Определение. Слабым обобщенным решением задачи (1.1), (1.2) назовем функцию $u(x,t)$, почти всюду совпадающую с функцией класса $\mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}_0^1(\Omega))$ при некотором $\mathrm{T}>0$ и удовлетворяющую условиям

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\left[\triangle u - u\right] + \parallel \nabla u \parallel_2^{2q} \triangle u, w\right\rangle \varphi(t) = 0 \qquad (1.61)$$

$\forall\,\varphi\in\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T})$, $\forall\, w\in\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, $\mathrm{T}>0$, при $\parallel \nabla u_0 \parallel_2 > 0$, $q>-1/2$, или $u(x,t)=0$ почти всюду в $Q\equiv(0,\mathrm{T})\times\Omega$ при $\parallel \nabla u_0 \parallel_2 = 0$, где символом $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначена скобка двойственности между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, а T_0 — время релаксации решения u.

В качестве v сначала возьмем $v=u^n\in\mathbb{L}^\infty(0,+\infty;\mathbb{H}_0^1(\Omega))$, причем $(u^n)'\in\mathbb{L}^2(0,+\infty;\mathbb{H}_0^1(\Omega))$. После интегрирования по частям получим

$$\parallel \nabla u^n \parallel_2^2 + \parallel u^n \parallel_2^2 + 2\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\, \parallel \nabla u^n \parallel_2^{2(1+q)} = \parallel \nabla u_0^n \parallel_2^2 + \parallel u_0^n \parallel_2^2 . \quad (1.62)$$

Теперь положим $v=(u^n)'$. Тогда после интегрирования по частям получим

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\,\left[\parallel \nabla (u^n)' \parallel_2^2 + \parallel (u^n)' \parallel_2^2\right] + \\ + \frac{1}{2(1+q)} \parallel \nabla u^n \parallel_2^{2(1+q)} = \frac{1}{2(1+q)} \parallel \nabla u_0^n \parallel_2^{2(1+q)} . \quad (1.63)$$

Из (1.62), (1.63) следует, что

$$u^n \text{ ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0,+\infty;\mathbb{H}_0^1(\Omega)),$$
$$(u^n)' \text{ ограничено в } \mathbb{L}^2(0,+\infty;\mathbb{H}_0^1(\Omega)).$$

Тем самым найдется подпоследовательность последовательности $\{u^n\}$, а значит, соответствующая подпоследовательность последовательности $\{u_0^n\}$ такая, что

$$u^n \rightharpoonup u \text{ слабо в } \mathbb{L}^\infty(0,+\infty;\mathbb{H}_0^1(\Omega)),$$
$$(u^n)' \rightharpoonup u' \text{ слабо в } \mathbb{L}^2(0,+\infty;\mathbb{H}_0^1(\Omega)).$$

Для любого $n\in\mathbb{N}$ u^n удовлетворяет оценкам снизу и сверху вида (1.59), (1.60) с заменой u на u^n, u_0 на u_0^n, T_0 на T_{0n}.

Рассмотрим случай $q\in(-1/2,0)$.

Время T_{0n} релаксации решения u^n в силу (1.59) удовлетворяет неравенству

$$(2|q|)^{-1}[\parallel \nabla u_0^n \parallel_2^2 + \parallel u_0^n \parallel_2^2]^{|q|} \leqslant \mathrm{T}_{0n} \leqslant (c_5 2|q|)^{-1}[\parallel \nabla u_0^n \parallel_2^2 + \parallel u_0^n \parallel_2^2]^{|q|}.$$

Тогда

$$\liminf_{n\to+\infty} \mathrm{T}_{0n} = \underline{\mathrm{T}}_0 > (2|q|)^{-1}[\| \nabla u_0 \|_2^2 + \| u_0 \|_2^2]^{|q|} > 0,$$

причем можно выбрать подпоследовательность последовательности $\{\mathrm{T}_{0n}\}$, сходящуюся либо монотонно сверху, либо монотонно снизу. Предположим, что $\mathrm{T}_{0n} \downarrow \underline{\mathrm{T}}_0$, $0 < \underline{\mathrm{T}}_0 < \mathrm{T}_{0n}$, $\mathrm{E}_n \equiv \| \nabla u^n \|_2^2 + \| u^n \|_2^2 \leqslant (2|q|)^{1/|q|}(\mathrm{T}_{0n} - t)^{1/|q|}$. Тогда мы можем перейти к пределу при $n \to +\infty$ равномерно по $t \in [0, \underline{\mathrm{T}}_0]$ и получим

$$\mathrm{E} \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \mathrm{E}_n \leqslant (2|q|)^{1/|q|}(\underline{\mathrm{T}}_0 - t)^{1/|q|}.$$

Значит, в данном случае $\| \nabla u \|_2 (\underline{\mathrm{T}}_0) = 0$.

Пусть теперь $\mathrm{T}_{0n} \uparrow \underline{\mathrm{T}}_0$. Тогда для любого $\overline{n} \in \mathbb{N}$ можно выделить подпоследовательность из последовательности $\{\mathrm{T}_{0n}\}$, так что можно перейти к пределу при $n \to +\infty$ равномерно по $t \in [0, \mathrm{T}_{0\overline{n}}]$:

$$\mathrm{E} \leqslant (2|q|)^{1/|q|}(\underline{\mathrm{T}}_0 - t)^{1/|q|}.$$

Но в силу произвольности $\overline{n}$ получаем, что указанная оценка справедлива равномерно по $t \in [0, \underline{\mathrm{T}}_0]$. Стало быть, и в этом случае $\| \nabla u \|_2^2 (\underline{\mathrm{T}}_0) = 0$.

Пусть n_1, n_2 — некоторые натуральные числа. Тогда из равенства (1.61), записанного отдельно для $n = n_1$ и $n = n_2$, при $\varphi(t) = 1$ и $w = u^{n_1} - u^{n_2}$ следует, что

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt \frac{d}{dt} \left[\| \nabla u^{n_1} - \nabla u^{n_2} \|_2^2 + \| u^{n_1} - u^{n_2} \|_2^2 \right] +$$

$$+ 2 \int_0^{\mathrm{T}} dt \left(\| \nabla u^{n_1} \|_2^{2q} \nabla u^{n_1} - \| \nabla u^{n_2} \|_2^{2q} \nabla u^{n_2}, \nabla u^{n_1} - \nabla u^{n_2} \right) = 0, \tag{1.64}$$

$$\mathrm{I} \equiv \left| \int_0^{\mathrm{T}} dt \left(\| \nabla u^{n_1} \|_2^{2q} \nabla u^{n_1} - \| \nabla u^{n_2} \|_2^{2q} \nabla u^{n_2}, \nabla u^{n_1} - \nabla u^{n_2} \right) \right|,$$

$$\mathrm{I} \leqslant \left| \int_0^{\mathrm{T}} dt \left[\| \nabla u^{n_1} \|_2^{2q} - \| \nabla u^{n_2} \|_2^{2q} \right] (\nabla u^{n_1}, \nabla u^{n_1} - \nabla u^{n_2}) \right| +$$

$$+ \left| \int_0^{\mathrm{T}} dt \, \| \nabla u^{n_2} \|_2^{2q} \| \nabla u^{n_1} - \nabla u^{n_2} \|_2^2 \right| \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C}\left[\frac{1}{(\mathrm{T}_{0\overline{n}}-\mathrm{T})^{(1+|q|)/|q|}}+\frac{1}{\mathrm{T}_{0\overline{n}}-\mathrm{T}}\right]\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\ \|\ \nabla u^{n_1}-\nabla u^{n_2}\ \|_2^2, \quad (1.65)$$

$\mathrm{T}_{0\overline{n}} \equiv \min\{\mathrm{T}_{0n_1}, \mathrm{T}_{0n_2}\}$. Рассмотрим два случая: $\mathrm{T}_{0\overline{n}} \uparrow \underline{\mathrm{T}}_0$ и $\mathrm{T}_{0\overline{n}} \downarrow \underline{\mathrm{T}}_0$. Как мы выяснили ранее, $\underline{\mathrm{T}}_0$ — время релаксации функции $u(x,t)$.

Рассмотрим случай $\mathrm{T}_{0n} \downarrow \underline{\mathrm{T}}_0$. Без ограничения общности будем считать $n_1 < n_2$. Тогда $\mathrm{T}_{0\overline{n}} = \underline{\mathrm{T}}_{n_2}$ и, кроме того, $\mathrm{T}_{0n_2} - \mathrm{T} \geqslant \underline{\mathrm{T}}_0 - \mathrm{T}$. Из (1.65) получим

$$\mathrm{I} \leqslant \mathrm{C}\left[\frac{1}{(\underline{\mathrm{T}}_0-\mathrm{T})^{(1+|q|)/|q|}}+\frac{1}{\underline{\mathrm{T}}_0-\mathrm{T}}\right]\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\ \|\ \nabla u^{n_1}-\nabla u^{n_2}\ \|_2^2\,. \quad (1.66)$$

Рассмотрим теперь случай $\mathrm{T}_{0n} \uparrow \underline{\mathrm{T}}_0$, $\mathrm{T}_{0\overline{n}} = \mathrm{T}_{n_1}$.

$$\mathrm{I} \leqslant C\left[\frac{1}{(\mathrm{T}_{0N}-\mathrm{T})^{(1+|q|)/|q|}}+\frac{1}{\mathrm{T}_{0N}-\mathrm{T}}\right]\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\ \|\ \nabla u^{n_1}-\nabla u^{n_2}\ \|_2^2, \quad (1.67)$$

$\mathrm{T}_{0n_1} - \mathrm{T} \geqslant \mathrm{T}_{0N} - \mathrm{T}$, $n_2 > n_1 \geqslant N$, $\forall\ \mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_{0N})$, $\mathrm{T}_{0N} \uparrow \underline{\mathrm{T}}_0$. Теперь мы рассмотрим равенство (1.64), из которого в силу (1.66), (1.67) получим

$$\|\ \nabla u^{n_1}-\nabla u^{n_2}\ \|_2^2 \leqslant \|\ \nabla u_0^{n_1}-\nabla u_0^{n_2}\ \|_2^2 + \\ + D(\underline{\mathrm{T}}_0, \mathrm{T}_{0N}, \mathrm{T})\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\ \|\ \nabla u^{n_1}-\nabla u^{n_2}\ \|_2^2\,(t) \quad (1.68)$$

$\forall\ \mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_{0N})$, $\mathrm{T}_{0N} \uparrow \underline{\mathrm{T}}_0$. Воспользуемся теперь теоремой Гронуолла–Беллмана [Демидович] и из (1.68) получим

$$\|\ \nabla u^{n_1}-\nabla u^{n_2}\ \|_2^2 \leqslant \|\ \nabla u_0^{n_1}-\nabla u_0^{n_2}\ \|_2^2\ 2\exp\{D(\underline{\mathrm{T}}_0, \mathrm{T}_{0N}, \mathrm{T})\mathrm{T}\}.$$

Фиксируем $\mathrm{T} \in (0, \underline{\mathrm{T}}_0)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что для любых $n_1, n_2 \geqslant N$ имеем

$$\|\ \nabla u^{n_1}-\nabla u^{n_2}\ \| \leqslant \varepsilon.$$

Стало быть, u^n — фундаментальная последовательность в сильной топологии пространства $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ для почти всех $t \in (0, \underline{\mathrm{T}}_0)$. Тогда, очевидно, эта последовательность сходится к $u(x,t)$ сильно в $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ при почти всех $t \in (0, \mathrm{T}_0)$.

Теперь мы можем перейти к пределу при $n \to +\infty$ в равенстве (1.61) и в результате получим

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\ \left\langle \frac{\partial}{\partial t}\triangle u - \frac{\partial}{\partial t}u + \|\ \nabla u\ \|_2^{2q}\ \triangle u, v\right\rangle = 0$$

$\forall\, v \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{H}_0^1(\Omega)),\ \ \forall\, \mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}_0)$. С другой стороны,

$$u \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{H}_0^1(\Omega)),\ \ u' \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{H}_0^1(\Omega)).$$

Так что на самом деле мы доказали глобальную во времени разрешимость в случае $q \in (-1/2, 0)$. Случай же $q > 0$ проще и рассматривается аналогичным образом с использованием оценок (1.60).

Доказательство единственности в точности повторяет доказательство единственности гладкого решения задачи на шаге 6.

Теорема доказана.

1.2. Глобальная во времени разрешимость задачи в сильном обобщенном смысле в случае $q \geqslant 1$. В этом пункте мы изучим вопрос о глобальной во времени разрешимости задачи (1.1), (1.2) в сильном смысле.

Определение. Сильным обобщенным решением задачи **A** называется решение класса $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}_0^1(\Omega))$ следующей задачи:

$$\left\langle \triangle u' - u' + \| \nabla u \|_2^{2q} \triangle u, w \right\rangle = 0,\ \ u(0) = u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega),\ \ \forall\, w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega),$$

где символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначена скобка двойственности между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, а производная по времени понимается в классическом смысле.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $q \geqslant 1$, $u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$. Тогда существует единственное сильное обобщенное решение $u(x,t)$ задачи* **A** *класса* $\mathbb{C}_b^{(1)}([0,+\infty);\mathbb{H}_0^1(\Omega))$.

Доказательство.

Введем обозначения:

$$\mathbb{A}\frac{du}{dt} + \mathbb{B}(u) = 0,\ \ u(0) = u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega),$$
$$\mathbb{A} \equiv \mathrm{I} - \triangle,\ \ \mathbb{B}(u) \equiv - \| \nabla u \|_2^{2q} \triangle u.$$

Справедливо следующее неравенство:

$$\langle \mathbb{A}z_1 - \mathbb{A}z_2, z_1 - z_2 \rangle \geqslant \| \nabla z_1 - \nabla z_2 \|_2^2 \quad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Докажем локальную липшиц-непрерывность оператора $\mathbb{B}(u)$. Имеем

$$\mathbb{B}(u) \equiv - \| \nabla u \|_2^{2q} \triangle u,$$

$$\begin{aligned}
\| \mathbb{B}(u) - \mathbb{B}(v) \|_{-1} &\leqslant \left| \| \nabla u \|_2^{2q} - \| \nabla v \|_2^{2q} \right| \| \triangle u \|_{-1} + \\
&+ \| \nabla v \|_2^{2q} \| \triangle u - \triangle v \|_{-1} \leqslant \\
&\leqslant \mathrm{C} \max\{ \| \nabla v \|_2^{2(q-1)}, \| \nabla u \|_2^{2(q-1)} \} \left| \| \nabla u \|_2^2 - \| \nabla v \|_2^2 \right| \| \nabla u \|_2 + \\
&+ \mathrm{C} \| \nabla v \|_2^{2q} \| \nabla u - \nabla v \|_2 \leqslant
\end{aligned}$$

$$\leqslant \mathrm{C}\max\{\| \nabla v \|_2^{2q}, \| \nabla u \|_2^{2q}\} \| \nabla u - \nabla v \|_2 + \\ + \mathrm{C} \| \nabla v \|_2^{2q} \| \nabla u - \nabla v \|_2 \leqslant \\ \leqslant \mu(\overline{\mathrm{R}}) \| \nabla u - \nabla v \|_2 \leqslant \mu(\mathrm{R}) \| \mathrm{u} - \mathrm{v} \|_{+1},$$

$\mu(\mathrm{R}) = \mathrm{CR}^{2\mathrm{q}}$, $\mathrm{R} = \max\{\| \mathrm{u} \|_{+1}, \| \mathrm{v} \|_{+1}\}$. Стало быть,

$$\| \mathbb{B}(u_1) - \mathbb{B}(u_2) \|_{-1} \leqslant \mu(\mathrm{R}) \| u_1 - u_2 \|_{+1},$$
$$\mu(\mathrm{R}) = \mathrm{CR}^{2q}, \ \| v \|_{+1} \equiv \| \nabla v \|_2,$$
$$\forall\, u_1, u_2 \in \mathbb{B}_\mathrm{R} \equiv \left\{ v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) : \| \nabla v \|_2 \leqslant \mathrm{R} \right\}.$$

Итак, наша задача в сильном обобщенном смысле эквивалентна следующей задаче:

$$\frac{du}{dt} + \mathbb{F}(u)(t) = 0, \ \ u(0) = u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \ \ \mathbb{F}[u](t) \equiv \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}[u](t),$$

которая в свою очередь эквивалентна следующему интегральному уравнению:

$$u(t) = u_0 + \int\limits_0^t ds\, \mathbb{F}[u] \equiv \mathbb{S}[u].$$

Введем замкнутое выпуклое ограниченное подмножество

$$\mathbb{B}_\mathrm{R} \equiv \left\{ v \in \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}_0^1(\Omega)) : \| v \|_\mathrm{T} \equiv \operatorname*{ess.sup}_{t \in (0,\mathrm{T}} \| v \|_{+1} \leqslant \mathrm{R} \right\}.$$

Докажем, что $\mathbb{S}$ действует из $\mathbb{B}_\mathrm{R}$ в $\mathbb{B}_\mathrm{R}$ и является сжимающим на $\mathbb{B}_\mathrm{R}$. Действительно,

$$\| \mathbb{S}[u] \| \leqslant \mathrm{T}\mu(\mathrm{R}) \| u \| \leqslant \frac{1}{2} \| u \|, \ \ \mathrm{T} < \frac{1}{2\mu(\mathrm{R})}.$$

Докажем теперь, что $\mathbb{S} : \mathbb{D}_\mathrm{R} \to \mathbb{D}_\mathrm{R}$ — сжимающий оператор на $\mathbb{D}_\mathrm{R}$. Действительно,

$$\| \mathbb{S}[u] - \mathbb{S}[v] \| \leqslant \mathrm{T}\mu(\mathrm{R}) \| u - v \| \leqslant \frac{1}{2} \| u - v \| \quad \text{при} \ \ \mathrm{T} < \frac{1}{2\mu(\mathrm{R})}.$$

Тем самым существует единственное решение класса $\mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$. Из явного вида интегрального уравнения следует, что на самом деле данное решение принадлежит классу $\mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$. Наконец, из (1.9) следует, что $\| \nabla u \|_2 \leqslant C < +\infty$ при $t \geqslant 0$. Используя стандартный алгоритм продолжения решения интегральных уравнений во времени, приходим к выводу, что решение $u(x,t)$ принадлежит классу $\mathbb{C}_b^{(1)}(0, +\infty; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$.

Теорема доказана.

1.3. Асимптотическое поведение решения задачи (1.1), (1.2) при $t \to +\infty$ в случае $q > 0$. Введем следующие обозначения:

$$\varphi_k \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega), \quad \triangle\varphi_k + \lambda_k\varphi_k = 0, \tag{1.69}$$

$$\varphi_k\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \int\limits_{\Omega} dx\, \varphi_k(x)\varphi_l(x) = \delta_{kl},$$

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k\varphi_k(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \tag{1.70}$$

$$\gamma_k \equiv \mu_0 \frac{2\lambda_k}{1+\lambda_k}, \quad \gamma_{N^*} \equiv \mu_0 \frac{2\lambda_{N^*}}{1+\lambda_{N^*}}, \quad \mu_0 \equiv \frac{1+\lambda_{N^*}}{2q\lambda_{N^*}},$$

$$C_0 \equiv \frac{\mu_0^{1/q}}{\lambda_{N^*}\alpha_{N^*}^2}, \quad A_{N^*} \equiv C_0^{1/(2q)},$$

$$B_{N^*} \equiv \alpha_{N^*}A_{N^*}, \quad \gamma^* \equiv \gamma_{N^{**}} \equiv \frac{1}{q}[1+\alpha^*], \quad \alpha^* \equiv \frac{\lambda_{N^{**}} - \lambda_{N^*}}{\lambda_{N^*}(1+\lambda_{N^{**}})},$$

где N^* и N^{**} — первое и второе натуральные числа, при которых $\alpha_{N^*} \neq 0$ и $\alpha_{N^{**}} \neq 0$ соответственно. Кроме того, предположим, что λ_k занумерованы в порядке возрастания.

Теорема 4. *Пусть $u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, $q > 0$ и $\gamma^* > 1$. Тогда справедливо следующее асимптотическое поведение при больших временах решения задачи* (1.1), (1.2):

$$\left\| u(\cdot,t) - \alpha_{N^*}\varphi_{N^*}(x)\frac{A_{N^*}}{(C_0+t)^{1/(2q)}} \right\|_2^2 \leqslant \frac{K}{(C_0+t)^{\gamma}},$$

$$\gamma \equiv \min\left\{\frac{1+\alpha^*}{q}, \overline{\gamma}\right\}, \quad \overline{\gamma} \equiv \begin{cases} 2+1/q, & \gamma^* > 2, \\ 2-\varepsilon+1/q, & \gamma^* = 2; \\ 2(\gamma^*-1)+1/q, & 1 < \gamma^* < 2, \end{cases} \qquad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Доказательство.

Будем искать единственное в силу теорем 1 и 2 решение в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(t)\varphi_k(x), \quad c_k(t) \in \mathbb{C}^{(1)}[0,+\infty], \quad c_k(0) = \alpha_k.$$

Тогда из (1.1) и (1.2) приходим к следующему представлению решения задачи (1.1), (1.2):

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \exp\left\{-\frac{\lambda_k}{1+\lambda_k}\int\limits_0^t ds\ \|\nabla u\|_2^{2q}\right\}\varphi_k(x). \tag{1.70}$$

Причем ряд сходится равномерно по $t \in (0, +\infty)$ в $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ — это следует из следующего неравенства:

$$\Big\| \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \exp\left\{ -\frac{\lambda_k}{1+\lambda_k} \int_0^t ds \parallel \nabla u \parallel_2^{2q} \right\} \nabla \varphi_k(x) \Big\|_2^2 \leqslant \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \alpha_k^2 < C.$$

В силу (1.70) понятно, что для для нахождения первого члена асимптотики при больших временах достаточно получить первый член асимптотики выражения

$$\Gamma(t) \equiv \int_0^t ds \parallel \nabla u \parallel_2^{2q}. \tag{1.71}$$

$$\parallel \nabla u \parallel_2^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \alpha_k^2 \exp\left\{ -\frac{2\lambda_k}{1+\lambda_k} \int_0^t ds \parallel \nabla u \parallel_2^{2q} \right\}.$$

Из (1.60) вытекает, что общий вид асимптотического поведения величины $\Gamma(t)$ следует искать в виде

$$\Gamma(t) = \mu_0[\ln(t + C_0) - \ln C_0] + f(t)\mu_0, \quad f(0) = 0, \tag{1.72}$$

что следует из (1.71).

Замечание 3. Отметим, что это существенный момент нашего исследования, поскольку без «угадывания» первого члена асимптотики выражения $\Gamma(t)$ дальнейшее лишено смысла.

Очевидно, что $f(t)$ удовлетворяет следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\mu_0 \frac{df}{dt} + \mu_0 \frac{1}{t+C_0} = \left(\sum_{k=N^*+1}^{+\infty} \lambda_k \alpha_k^2 C_0^{\mu_0 \frac{2\lambda_k}{1+\lambda_k}} \frac{1}{(t+C_0)^{\gamma_k}} \exp\{-\gamma_k f(t)\} + \right.$$
$$\left. + \lambda_{N^*} \alpha_{N^*}^2 C_0^{\gamma_{N^*}} \exp\{-\gamma_{N^*} f(t)\} \frac{1}{(t+C_0)^{\gamma_{N^*}}} \right)^q. \tag{1.73}$$

Воспользовавшись определениями (1.69), из (1.73) получим

$$\frac{df}{dt} + \frac{1}{t+C_0} = F(t) + \frac{1}{t+C_0} e^{-f(t)}, \quad f(0) = 0,$$

$$F(t) \equiv \frac{1}{\mu_0} \left(\sum_{k=N^*+1}^{+\infty} \lambda_k \alpha_k^2 C_0^{\mu_0 \frac{2\lambda_k}{1+\lambda_k}} \frac{1}{(t+C_0)^{\gamma_k}} e^{-\gamma_k f(t)} + \right.$$
$$\left. + \mu_0^{1/q} \frac{1}{(t+C_0)^{1/q}} e^{-f(t)/q} \right)^q - \frac{1}{t+C_0} e^{-f(t)}.$$

Справедливы следующие равенства:

$$(t+C_0)\frac{df}{dt}+1=e^{-f}+F(t)(t+C_0),\ \ \tau=\ln(t+C_0),$$
$$(t+C_0)\frac{d}{dt}=\frac{d}{d\tau},\ \ \widetilde{F}(\tau)=e^{\tau}F(\tau),$$
$$u=f,\ \ \frac{du}{d\tau}+1=e^{-u}+F(\tau)e^{\tau},\ \ v=u+\tau,$$
$$e^{v}\frac{dv}{d\tau}=e^{\tau}[1+F(\tau)e^{v}],\ \ v(t)=f(t)+\ln(t+C_0).$$

Отсюда получим следующее соотношение:

$$(t+C_0)\frac{d}{dt}\left[e^{f(t)}(t+C_0)\right]=(t+C_0)\left[1+F(t)e^{f(t)}(t+C_0)\right],$$

из которого в свою очередь вытекает

$$e^{f(t)}(t+C_0)=t+C_0+\int\limits_0^t ds\,F(s)e^{f(s)}(s+C_0).$$

Тем самым приходим к следующему соотношению:

$$f=\ln\left(1+\frac{1}{t+C_0}\int\limits_0^t ds\,(s+C_0)F(s)e^{f(s)}\right),\qquad(1.74)$$

$$\mathrm{D}(t)\equiv F(t)e^{f}=\frac{1}{\mu_0}\left(\sum_{k=N^*+1}^{+\infty}\lambda_k\alpha_k^2C_0^{\mu_0\frac{2\lambda_k}{1+\lambda_k}}\frac{1}{(t+C_0)^{\gamma_k}}e^{-(\gamma_k-1/q)f(t)}+\right.$$
$$\left.+\,\mu_0^{1/q}\frac{1}{(t+C_0)^{1/q}}\right)^q-\frac{1}{t+C_0}.$$

Кроме того, из определения (1.72) следует, что

$$|f(t)|\leqslant\ln(C_1+t),\ \ C_1>1,$$

поэтому в самом худшем случае

$$|\exp\{-(\gamma_k-1/q)f(t)\}|\leqslant(C_1+t)^{\gamma_k-1/q}.$$

Значит,

$$|\mathrm{D}(t)|\leqslant A(t+C_0)^{-1}\quad\text{и}\quad|f|\leqslant\ln\left(1+\frac{A}{t+C_0}\int\limits_0^t ds\,\frac{s+C_0}{s+C_0}\right)\leqslant\overline{A}.$$

Поэтому найдется такая постоянная C_8, не зависящая от t, что

$$|\mathrm{D}(t)| \leqslant C_8 \left[\sum_{k=N^*+1} \lambda_k \alpha_k^2 C_0^{\frac{\mu_0 2\lambda_k}{1+\lambda_k}} \frac{1}{(t+C_0)^{\gamma_k}} \right]^q \leqslant \frac{C}{(t+C_0)^{\gamma^*}}.$$

Тогда из представления (1.74) получим

$$\begin{aligned} |f(t)| &\leqslant C_9 \frac{1}{t+C_0} \int_0^t ds\,(s+C_0) \frac{1}{(s+C_0)^{(1+\alpha^*)/q}} \leqslant \\ &\leqslant C_9 \frac{1}{t+C_0} \int_0^t ds\,(s+C_0)^{1-\gamma^*} \leqslant \\ &\leqslant C_{10} \left\{ \begin{array}{cc} (t+C_0)^{-1}, & \gamma^* > 2; \\ (t+C_0)^{1-\gamma^*}, & \gamma^* < 2; \\ (t+C_0)^{-1} \ln(t+C_0), & \gamma^* = 2. \end{array} \right\} \end{aligned} \tag{1.75}$$

при этом с необходимостью приходим к требованию $\gamma^* > 1$, в противном случае мы получим весьма грубую оценку. Теперь воспользуемся оценкой (1.75), чтобы получить оценку остаточного члена асимптотики при больших временах:

$$\begin{aligned} &\left\| u(\cdot,t) - \alpha_{N^*}\varphi_{N^*}(x) \frac{A_{N^*}}{(C_0+t)^{1/(2q)}} \right\|_2^2 \leqslant \\ &\leqslant \left\| \alpha_{N^*}\varphi_{N^*} \exp\left\{ -\frac{\lambda_{N^*}}{1+\lambda_{N^*}} \int_0^t ds \parallel \nabla u \parallel_2^{2q} \right\} - \right. \\ &\left. - \alpha_{N^*}\varphi_{N^*}(x) \exp\left\{ -\frac{\lambda_{N^*}}{1+\lambda_{N^*}} \mu_0 [\ln(C_0+t) - \ln(C_0)] \right\} \right\|_2^2 + \\ &+ \frac{K}{(t+C_0)^{(1+\alpha^*)/q}} \leqslant \frac{K_1}{(C_0+t)^{1/q}} \left\| \alpha_{N^*}\varphi_{N^*} \exp\{-f(t)/2q\} - 1 \right\|_2^2 \leqslant \\ &\leqslant \frac{K_2}{(t+C_0)^{1/q}} |f(t)|^2 + \frac{K}{(t+C_0)^{(1+\alpha^*)/q}} \leqslant \\ &\leqslant \frac{K}{(t+C_0)^{(1+\alpha^*)/q}} + \frac{K_3}{(C_0+t)^{1/q}} \left\{ \begin{array}{ll} (C_0+t)^{-2}, & \gamma^* > 2, \\ (C_0+t)^{-2} \ln^2(C_0+t), & \gamma^* = 2, \\ (C_0+t)^{2(1-\gamma^*)}, & \gamma^* < 2. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

§ 2. Разрушение решений нелинейных псевдопараболических уравнений с источником вида псевдолапласиана

В данном параграфе рассматриваются начально-краевые задачи для уравнений псевдопараболического типа с источниками вида псевдолапласиана. Для рассматриваемых задач доказана локальная и глобальная однозначная разрешимость в ослабленном смысле. Причем получены достаточные условия разрушения решений за конечное время. Для некоторых задач получены оценки сверху на время разрушения решений.

Целью настоящего параграфа является получение достаточных условий, близких к необходимым, разрушения решений следующих первых начально-краевых задач:

$$\frac{\partial}{\partial t}\triangle u = \triangle_p u, \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad p \geqslant 3, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\triangle u + \triangle u = \triangle_p u, \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad p \geqslant 3, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\triangle u - u) = \triangle_p u, \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad p \geqslant 3, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\triangle u + u u_{x_1} = \triangle_4 u, \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\triangle u - u) + u u_{x_1} = \triangle_4 u, \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \tag{2.5}$$

где поверхностно-односвязная ограниченная область $\Omega \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ имеет гладкую границу класса $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0,1]$, $x \in \Omega$, а нелинейный оператор $\triangle_p$ определен выражением

$$\triangle_p u \equiv \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u), \quad p > 2.$$

Данные задачи описывают квазистационарные процессы в полупроводниках при наличии отрицательной дифференциальной проводимости.

2.1. Разрушение ослабленного решения задачи (2.1). В этом пункте мы докажем однозначную локальную во времени разрешимость задачи и разрушение ее ослабленного решения за конечное время. При этом мы получим оценку сверху на время разрушения решения данной задачи.

Введем некоторые определения.

Определение 1. Сильным обобщенным решением задачи (2.1) назовем решение задачи (2.1) класса $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega))$, удовлетворяющего условиям

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\triangle u - \triangle_p u, w \right\rangle = 0 \ \ \forall\, w \in \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega), \ \ t \in [0,\mathrm{T}], \ \ u(0) = u_0 \in \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega),$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-1,4/3}(\Omega)$.

Определение 2. Ослабленным решением задачи (2.1) назовем сильное обобщенное решение задачи (2.1) класса $u(x,t) \in \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}_0(\overline{\Omega})\bigcap\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}))$.

Проведем редукцию задачи (2.1), решение которой понимается в сильном обобщенном смысле. Заметим, что $-\triangle : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ является непрерывным ограниченным оператором с липшиц-непрерывным обратным $(-\triangle)^{-1} : \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \to \mathbb{H}_0^1(\Omega)$. Введем обозначение

$$-\triangle u \equiv v \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega).$$

Тогда для

$$v \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}(\overline{\Omega})) \subset \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}^{-1}(\Omega)),$$
$$u \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})) \subset \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}_0^1(\Omega))$$

имеем

$$u = (-\triangle)^{-1}v \subset \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})).$$

Действительно, в силу результата §9 приложения Б сужение оператора $(-\triangle)^{-1}$ с класса $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ до класса $\mathbb{C}(\overline{\Omega})$ совпадает с интегральным оператором с ядром, имеющим вид функции Грина первой краевой задачи в области Ω для оператора Лапласа:

$$u = (-\triangle)^{-1}v = \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y)v(y,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})). \quad (2.6)$$

Тогда каждое слагаемое в первом аргументе скобки двойственности из определения 1 принадлежит классу $\mathbb{C}([0,\mathrm{T}] \times \overline{\Omega})$, и в силу очевидного вложения $\mathbb{C}_0^\infty(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ из основной леммы вариационного исчисления получим, что задача (2.1) в силу (2.6) в ослабленном смысле эквивалентна следующей задаче:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = (p-1)v \left| \int\limits_{\Omega} dy\, \nabla_x G(x,y)v(y,t) \right|^{p-2}, \quad v(0) = v_0 \qquad (2.7)$$

при условии истокообразной представимости $u_0(x)$:

$$u_0 = \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y)v_0(y). \qquad (2.8)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Для любого* $u_0 \in \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})$, *истокообразно представимого через* $v_0 \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ (*см.* (2.8)) *существует единственное ослабленное решение задачи* (2.1) *класса* $u(x,t) \in$

$\in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})\cap\mathbb{C}_0(\overline{\Omega}))$, *причем либо* $\mathrm{T}_0=+\infty$, *либо* $\mathrm{T}_0<+\infty$ *и в последнем случае справедливо предельное неравенство*

$$\lim_{t\uparrow \mathrm{T}_0}\sup_{x\in\Omega}|\nabla u(x,t)|=+\infty. \tag{2.9}$$

Доказательство.

В классе $v(x,t)\in\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}(\overline{\Omega}))$ задача (2.7) эквивалентна следующему интегральному уравнению:

$$v(x,t)=v_0(x)+(p-1)\int\limits_0^t ds\, v(x,s)\left|\int\limits_\Omega dy\,\nabla_x G(x,y)v(y,s)\right|^{p-2}, \tag{2.10}$$

$p\geqslant 3$. В силу того что функция Грина для оператора $-\triangle$ имеет вид

$$G(x,y)=\psi(x,y)+\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|},$$

где $\psi(x,y)\in\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega})$, справедливо соотношение

$$\sup_{x\in\Omega}\int\limits_\Omega|\nabla_y G(x,y)|\,dy=\mathrm{C}<+\infty.$$

Введем операторы

$$\mathbb{U}_i(u)=\int\limits_\Omega dy\, G'_{x_i}(x,y)u(y,t),\quad i=\overline{1,N}.$$

Докажем, что $\mathbb{U}_i(u):\mathbb{C}(\overline{\mathrm{Q}}_\mathrm{T})\to\mathbb{C}(\overline{\mathrm{Q}}_\mathrm{T})$. Действительно,

$$\psi'_{y_1}(x,y)\in\mathbb{C}(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}),\quad \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)=\frac{1}{4\pi}\frac{x_i-y_i}{|x-y|^3},$$

тогда $\mathbb{U}_1(u)$ можно представить в виде

$$\mathbb{U}_i(u)=\mathrm{I}_{1i}+\mathrm{I}_{2i},$$

где

$$\mathrm{I}_{1i}=\int\limits_\Omega dy\,\psi'_{y_i}(x,y)v(y,s),\quad \mathrm{I}_{2i}=\frac{1}{4\pi}\int\limits_\Omega dy\,\frac{1}{|x-y|^2}\frac{x_i-y_i}{|x-y|}v(y,s).$$

Докажем, что $\mathrm{I}_{1i}(x,t)\in\mathbb{C}(\overline{\mathrm{Q}}_\mathrm{T})$. Действительно, для любых (x,t) и (x_0,t_0) из Q_T справедливо неравенство

$$|\mathrm{I}_{1i}(x,t)-\mathrm{I}_{1i}(x_0,t_0)|\leqslant\int\limits_\Omega dy\,\left|\psi'_{x_i}(x,y)-\psi'_{x_i}(x_0,y)\right||v(y,t)|+$$

$$+\int\limits_\Omega dy\,|\psi'(x_0,y)||v(y,t)-v(y,t_0)|,$$

откуда в силу непрерывности $\psi'_{y_i}(x,y) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega})$ получаем, что каждое из слагаемых меньше $\varepsilon/2$ при условии $|x-x_0|+|t-t_0| \leqslant \delta(\varepsilon)$. Значит, $\mathrm{I}_{1i}(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{\mathrm{Q}}_\mathrm{T})$.

Докажем теперь, что $\mathrm{I}_{2i}(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{\mathrm{Q}}_\mathrm{T})$. Действительно, для любых (x,t) и (x_0,t_0) из $\overline{\mathrm{Q}}_\mathrm{T}$ справедливо неравенство

$$|\mathrm{I}_{2i}(x,t)-\mathrm{I}_{2i}(x_0,t_0)| \leqslant \frac{1}{4\pi}\left|\int\limits_\Omega dy\,\frac{1}{|x-y|^2}|v(y,t)-v(y,t_0)|\right| +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\left|\int\limits_\Omega dy\,\left[\frac{1}{|x_0-y|^2}\frac{x_{i0}-y_i}{|x_0-y|}-\frac{1}{|x-y|^2}\frac{x_i-y_i}{|x-y|}\right]|v(y,t_0)|\right| = \mathrm{I}_{21i}+\mathrm{I}_{22i}.$$

Рассмотрим отдельно каждое из слагаемых I_{21i} и I_{22i} : I_{21i} может быть сделано меньше $\varepsilon/3$ при условии $|x-x_0|+|t-t_0| \leqslant \delta(\varepsilon)$. Рассмотрим теперь I_{22i}. Предположим, что $v(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{\mathrm{Q}}_\mathrm{T})$ и $|v(x,t)| \leqslant \mathrm{M}(\mathrm{T})$. Далее воспользуемся схемой доказательства непрерывности интегралов типа потенциала, изложенной, например, в [Владимиров]. Действительно,

$$|\mathrm{I}_{22i}(x,x_0,t,t_0)| \leqslant \mathrm{M}(\mathrm{T})\int\limits_{\Omega_\eta(x_0)} dy\,\left[\frac{1}{|x_0-y|^2}+\frac{1}{|x-y|^2}\right] +$$

$$+\,\mathrm{M}(T)\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\eta(x_0)} dy\,\left|\frac{1}{|x_0-y|^2}\frac{x_{i0}-y_i}{|x_0-y|}-\frac{1}{|x-y|^2}\frac{x_i-y_i}{|x-y|}\right|.$$

Первое слагаемое в силу интегрируемой особенности подынтегральной функции меньше $\varepsilon/3$ за счет выбора малого параметра η. Во втором слагаемом подынтегральная функция равномерно непрерывна по (x,y) в области $|x-x_0| \leqslant \eta/2$, $|y-x_0| \geqslant \eta$, $y \in \overline{\Omega}$, и обращается в нуль при $x=x_0$. Поэтому этот интеграл может быть сделан меньше $\varepsilon/3$ при всех $|x-x_0|+|t-t_0| \leqslant \delta(\varepsilon)$ при достаточно малом $\delta(\varepsilon)$. Значит, $\mathrm{I}_{2i}(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{\mathrm{Q}}_\mathrm{T})$.

Стало быть, мы доказали, что

$$\mathbb{U}_i(v) : \mathbb{C}(\overline{\mathrm{Q}}_\mathrm{T}) \to \mathbb{C}(\overline{\mathrm{Q}}_\mathrm{T}), \quad i=\overline{1,N}.$$

Введем банахово пространство

$$\mathbb{B} \equiv \left\{ v(x,t) \in \mathbb{C}([0,\mathrm{T}]\times\overline{\Omega}) :\| v \|_\mathrm{T} \equiv \sup_{(x,t)\in[0,\mathrm{T}]\times\Omega}|v(x,t)| \right\},$$

а также замкнутое выпуклое ограниченное подмножество банахова пространства $\mathbb{B}$:

$$\mathbb{B}_\mathrm{R} \equiv \{ v \in \mathbb{B} :\| v \|_\mathrm{T} \leqslant \mathrm{R} \}.$$

Рассмотрим следующий интегральный оператор:

$$\mathbb{U}(v) \equiv v_0 + (p-1)\int\limits_0^t ds\, v(x,s)\left|\int\limits_\Omega dy\, \nabla_x G(x,y) v(y,s)\right|^{p-2}, \quad p \geqslant 3. \quad (2.11)$$

Докажем, что интегральный оператор (2.11) действует из $\mathbb{B}_\mathrm{R}$ в $\mathbb{B}_\mathrm{R}$ и является сжимающим на $\mathbb{B}_\mathrm{R}$. Действительно, справедливо следующее неравенство:

$$\| \mathbb{U}(v) \|_\mathrm{T} \leqslant \| v_0 \|_\mathrm{T} + (p-1)\mathrm{TC}_1 \| v \|_\mathrm{T}^{p-1},$$
$$\mathrm{C}_1 \equiv \sup_{x\in\Omega}\left|\int\limits_\Omega dy\, |\nabla_x G(x,y)|\right|^{p-2}, \quad p \geqslant 3.$$

Поэтому при $\| v_0 \|_\mathrm{T} \leqslant \mathrm{R}/2$ и $\mathrm{T} \leqslant 1/\left(2(p-1)\mathrm{C}_1\mathrm{R}^{p-2}\right)$ получим

$$\| \mathbb{U}(v) \|_\mathrm{T} \leqslant \mathrm{R}.$$

Докажем теперь, что оператор $\mathbb{U}$ сжимающий на $\mathbb{B}_\mathrm{R}$. Действительно,

$$\| \mathbb{U}(v_1) - \mathbb{U}(v_2) \|_\mathrm{T} \leqslant (p-1)\mathrm{TC}_1\mathrm{R}^{p-2} \| v_1 - v_2 \|_\mathrm{T} + \\ + (p-1)(p-2)\mathrm{TC}_2\mathrm{R}^{p-2} \| v_1 - v_2 \|_\mathrm{T}, \quad p \geqslant 3,$$
$$\mathrm{C}_2 \equiv \sup_{x\in\Omega}\left|\int\limits_\Omega dy\, |\nabla_x G(x,y)|\right|^{p-3}, \quad p \geqslant 3.$$

Стало быть, найдется такое

$$0 < \mathrm{T} < \frac{1}{2\left[(p-1)\mathrm{C}_1\mathrm{R}^{p-2} + (p-1)(p-2)\mathrm{TC}_2\mathrm{R}^{p-2}\right]}, \quad p \geqslant 3,$$

что при достаточно большом $\mathrm{R} > 0$ оператор $\mathbb{U}$ является сжимающим на $\mathbb{B}_\mathrm{R}$. Стало быть, при достаточно малом $\mathrm{T} > 0$ существует единственное решение интегрального уравнения (2.10) в классе $\mathbb{C}([0,\mathrm{T}] \times \overline{\Omega})$. Из вида интегрального уравнения (2.10) следует, что

$$v(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}]; \mathbb{C}(\overline{\Omega}))$$

при условии $v_0(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$. С другой стороны,

$$u(x,t) = \int\limits_\Omega dy\, G(x,y) v(y,t).$$

Поэтому из свойств интегралов типа потенциалов [Владимиров] вытекает, что

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}]; \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})).$$

Теперь, используя стандартный алгоритм продолжения во времени решения интегрального уравнения (2.10), получим, что существует такое максимальное $\mathrm{T}_0 > 0$, что

$$v(x,t) \in \mathbb{C}([0,\mathrm{T}] \times \overline{\Omega}) \ \ \forall\, \mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}_0).$$

Причем либо $\mathrm{T}_0 = +\infty$, либо $\mathrm{T}_0 < +\infty$ и тогда выполнено следующее предельное равенство:

$$\limsup_{t\uparrow \mathrm{T}_0} \sup_{x\in\Omega} |v(x,t)| = +\infty.$$

А значит, $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \bigcap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega}))$ для любого $\mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}_0)$.

Докажем теперь, что если $\mathrm{T}_0 < +\infty$, то имеет место предельное равенство (2.9). Действительно, рассмотрим уравнение (2.10), которое мы перепишем в следующем виде:

$$v(x,t) - (p-1)\int\limits_0^t ds \left|\int\limits_\Omega dy\, \nabla_x G(x,y) v(y,s)\right|^{p-2} v(x,s) = v_0(x).$$

Предположим, что

$$\mathrm{C}_1 \equiv \operatorname*{ess.sup}_{t\in(0,\mathrm{T}_0)} \sup_{x\in\Omega} \left|\int\limits_\Omega dy\, \nabla_x G(x,y) v(y,t)\right| < +\infty.$$

Рассмотрим следующий вольтеровский оператор при фиксированном v:

$$\mathcal{A} * f \equiv (p-1)\int\limits_0^t ds \left|\int\limits_\Omega dy\, \nabla_x G(x,y) v(y,s)\right|^{p-2} f(x,s).$$

Очевидно, что

$$\| \, [\mathcal{A}*]^n \, \|_{\mathbb{C}[0,\mathrm{T}]\to\mathbb{C}[0,\mathrm{T}]} \leqslant (p-1)^n \mathrm{C}_1^{(p-2)n} \frac{\mathrm{T}^n}{n!}.$$

Тогда получим

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} [\mathcal{A}*]^n v_0(x),$$

откуда вытекает неравенство

$$\| \, v \, \| \, (\mathrm{T}) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} ([p-1]\mathrm{C}_1^{p-2})^n \frac{\mathrm{T}^n}{n!} \, \| \, v_0 \, \| \leqslant \mathrm{C}(\mathrm{T}) < +\infty$$

для всех $\mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}_0)$, $\| \, v \, \| \equiv \sup\limits_{x\in\Omega} |v|$. Но

$$\limsup_{\mathrm{T}\uparrow\mathrm{T}_0} \| \, v \, \| \, (\mathrm{T}) = +\infty.$$

Значит, наше предположение неверно. Стало быть,

$$\limsup_{t\uparrow \mathrm{T}_0}\sup_{x\in\Omega}|\nabla_x u(x,t)| = \limsup_{t\uparrow \mathrm{T}_0}\sup_{x\in\Omega}\left|\int\limits_{\Omega} dy\,\nabla_x G(x,y)v(y,t)\right| = +\infty.$$

Таким образом, имеет место предельное равенство (2.9).

Теорема доказана.

Докажем теперь, что для любых $u_0 \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ сильное обобщенное решение, а значит и ослабленное, разрушается за конечное время.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Для любого* $u_0 \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ *сильное обобщенное решение класса* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}_{00});\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$ *разрушается за конечное время* $\mathrm{T}_{00} \in (0,\mathrm{T}_2]$:

$$\lim_{t\uparrow \mathrm{T}_{00}} \| \nabla u \|_p = +\infty.$$

Причем

$$\mathrm{T}_2 = \frac{1}{p-2}\frac{\| \nabla u_0 \|_2^2}{\| \nabla u_0 \|_p^p},$$

и, кроме того, $\mathrm{T}_0 \in (0,\mathrm{T}_{00}]$, *где* T_0 — *время существования ослабленного решения задачи* (2.1).

Доказательство.

Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$ — локальное во времени сильное обобщенное решение задачи (2.1). Умножим обе части уравнения (2.1) скалярно относительно скобок двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$ $(p' = p(p-1)^{-1})$ на $u(x,t)$ и на $u'(x,t)$, тогда после интегрирования по частям получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\| \nabla u \|_2^2 = \| \nabla u \|_p^p, \tag{2.12}$$

$$\| \nabla u' \|_2^2 = \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\| \nabla u \|_p^p. \tag{2.13}$$

Из (2.12), (2.13) и неравенства Коши–Шварца получим обыкновенное дифференциальное неравенство для функции $\Phi(t) \equiv \| \nabla u \|_2^2\,(t)$:

$$\Phi\Phi'' - \alpha(\Phi')^2 \geqslant 0,\ \ \alpha = \frac{p}{2},\ \ p \geqslant 3. \tag{2.14}$$

Интегрируя (2.14), получим

$$\Phi(t) \geqslant \frac{1}{\left[\Phi_0^{1-\alpha} - (\alpha-1)\mathrm{E}_0 t\right]^{1/(\alpha-1)}},\ \ \mathrm{E}_0 \equiv \frac{2\| \nabla u_0 \|_p^p}{\| \nabla u_0 \|_2^p}. \tag{2.15}$$

Поскольку ослабленное решение задачи (2.1) является сильным обобщенным, то, стало быть, время существования ослабленного решения не больше времени сушествования сильного обобщенного.

Теорема доказана.

2.2. Разрушение и глобальная во времени разрешимость задачи (2.2). В этом пункте мы получим достаточное условие разрушения ослабленного решения задачи (2.2) и достаточное условие глобальной во времени разрешимости.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть* $u_0(x) \in \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})$ *истокообразно представимо через* v_0:

$$u_0(x) = \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y) v_0(y),$$

где $G(x,y)$ *— функция Грина первой краевой задачи для оператора* $-\triangle$, *причем предположим, что при достаточно малом* $\delta > 0$ *имеет место неравенство*

$$\| v_0(x) \| \equiv \sup_{x\in\Omega} |v_0| \leqslant \delta.$$

Тогда при достаточно малом $\delta > 0$ *существует единственное ослабленное решение задачи* (2.2) *класса*

$$u(x,t) \in \mathbb{C}_b^{(1)}([0,+\infty]; \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})).$$

Доказательство.

Как и ранее, можно доказать, что в классе ослабленных решений задачи (2.2) она эквивалентна следующей задаче Коши для интегро-дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v = (p-1)v \left| \int\limits_{\Omega} dy\, \nabla_x G(x,y) v(y,t) \right|^{p-2}, \qquad (2.16)$$

$$v(x,0) = v_0(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega}), \quad p \geqslant 3.$$

Причем

$$u(x,t) = \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y) v(y,t).$$

Задача (2.16) в свою очередь эквивалентна в рассматриваемом классе интегральному уравнению

$$v(x,t) = v_0 e^{-t} + (p-1) \int\limits_0^t ds\, e^{-s} v(x,t-s) \times$$

$$\times \left| \int\limits_{\Omega} dy\, \nabla_x G(x,y) v(y,t-s) \right|^{p-2}, \quad p \geqslant 3. \quad (2.17)$$

Рассмотрим банахово пространство

$$\mathbb{B} \equiv \left\{ v(x,t) \in \mathbb{C}([0,+\infty] \times \overline{\Omega}) : \| v \| \equiv \sup_{x \in \Omega, t \geqslant 0} |v(x,t)| < +\infty \right\}.$$

Для доказательства глобальной во времени разрешимости задачи (2.17) воспользуемся методом последовательных приближений. С этой целью рассмотрим следующую итерационную схему:

$$v_{n+1} = v_0 e^{-t} + \mathbb{U}(v_n), \quad v_1 = v_0 e^{-t}, \tag{2.18}$$

где

$$\mathbb{U}(v) = (p-1) \int_0^t ds\, e^{-s} v(x, t-s) \left| \int_\Omega dy\, \nabla_x G(x,y) v(y, t-s) \right|^{p-2}, \tag{2.19}$$

$p \geqslant 3$. Понятно, что $\mathbb{U}$ действует из $\mathbb{B}$ в $\mathbb{B}$. Кроме того, справедлива следующая оценка:

$$\| \mathbb{U}(v) \| \leqslant (p-1) \mathrm{C}_1 \| v \|^{p-1}, \quad \mathrm{C}_1 \equiv \sup_{x \in \Omega} \left| \int_\Omega dy\, |\nabla_x G(x,y)| \right|^{p-2}. \tag{2.20}$$

Пусть v_1 и v_2 такие элементы пространства $\mathbb{B}$ и, кроме того, $\| v_i \| \leqslant \mathrm{M}$, тогда

$$\| \mathbb{U}(v_1) - \mathbb{U}(v_2) \| \leqslant [(p-1)\mathrm{C}_1 \mathrm{M}^{p-2} + (p-1)(p-2)\mathrm{C}_2 \mathrm{M}^{p-2}] \| v_1 - v_2 \|, \tag{2.21}$$

$$\mathrm{C}_2 \equiv \sup_{x \in \Omega} \left| \int_\Omega dy\, |\nabla_x G(x,y)| \right|^{p-3}, \quad p \geqslant 3.$$

Из (2.18)–(2.20) вытекает, что

$$\| v_{n+1} \| \leqslant \| v_0 \| + (p-1)\mathrm{C}_1 \| v_n \|^{p-1}. \tag{2.22}$$

При условии $\| v_0 \| \leqslant \delta$ получим из (2.22), что при достаточно малом $\delta > 0$ найдется такое $\mathrm{M}(\delta)$ и имеет место неравенство

$$\| v_n \| \leqslant \mathrm{M}(\delta),$$

причем $\mathrm{M}(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Тогда из (2.21) при достаточно малом $\delta > 0$ вытекает, что

$$\| \mathbb{U}(v_1) - \mathbb{U}(v_2) \| \leqslant \frac{1}{2} \| v_1 - v_2 \|.$$

Значит, последовательность $\{v_n\}$ сходится к решению интегрального уравнения (2.17) класса $v(x,t) \in \mathbb{C}([0,+\infty] \times \overline{\Omega})$. А из явного вида ин-

тегрального уравнения (2.17) следует, что $v(x,t) \in \mathbb{C}_b^{(1)}([0,+\infty];\mathbb{C}(\overline{\Omega}))$. Что в свою очередь в силу свойств интегралов типа потенциала [Владимиров] дает: $u(x,t) \in \mathbb{C}_b^{(1)}([0,+\infty];\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})\bigcap\mathbb{C}_0(\overline{\Omega}))$. Единственность решения задачи (2.16) доказывается стандартным образом с помощью сведения к интегральному неравенству с последующим применением теоремы Гронуолла–Беллмана [Демидович].

Теорема доказана.

Перейдем теперь к доказательству разрушения сильного обобщенного решения задачи (2.2).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 8. *При любом $u_0(x) \in \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})\bigcap\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})$ найдется такое $\mathrm{T}_0 > 0$, что существует единственное ослабленное решение задачи* (2.2) *класса $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}_0(\overline{\Omega})\bigcap\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}))$ для любого $\mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}_0)$, и при условии*

$$\| \nabla u_0 \|_2^2 < \| \nabla u_0 \|_p^p, \quad p \geqslant 3, \tag{2.23}$$

справедливо предельное равенство

$$\lim_{t\uparrow \mathrm{T}_0} \sup_{x\in\Omega} |\nabla_x u(x,t)| = +\infty$$

и справедлива оценка сверху $\mathrm{T}_0 \leqslant \mathrm{T}_{00} \in (0,\mathrm{T}_2]$, где T_{00} — время существования сильного обобщенного решения задачи,

$$\mathrm{T}_2 = -\frac{1}{p-2}\ln\left(1 - \frac{\| \nabla u_0 \|_2^2}{\| \nabla u_0 \|_p^p}\right). \tag{2.24}$$

Доказательство.

Как и при доказательстве теоремы 4, методом сжимающих отображений нетрудно доказать, что при любом $u_0 \in \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})\bigcap\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})$ при условии, что найдется такое $v_0(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ и справедливо равенство

$$u_0(x) = \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y) v_0(y),$$

найдется такое $\mathrm{T}_0 > 0$, что существует единственное ослабленное решение задачи (2.2) класса $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}_0(\overline{\Omega})\bigcap\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}))$ для любого $\mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}_0)$.

Теперь докажем, что любое локально во времени существующее сильное обобщенное решение задачи (2.2) разрушается за конечное время. Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$ для любого $\mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}_{00})$ сильное обобщенное решение задачи (2.2). Тогда умножим обе части уравнения (2.2) скалярно на $u(x,t)$ и на $u'(x,t)$ относительно скобок двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$

и $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$ и после интегрирования по частям получим следующие равенства для функции $w(x,t) = \exp(t)u(x,t)$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \nabla w \parallel_2^2 = \exp(-(p-2)t) \parallel \nabla w \parallel_p^p, \tag{2.25}$$

$$\parallel \nabla w' \parallel_2^2 = \exp(-(p-2)t)\frac{1}{p}\frac{d}{dt} \parallel \nabla w \parallel_p^p . \tag{2.26}$$

Введем функцию $\Phi(t) \equiv \parallel \nabla w \parallel_2^2$, для которой из (2.25), (2.26), а также из неравенства Коши–Шварца [Морен] вытекает обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка

$$\frac{1}{4}(\Phi')^2 \leqslant \Phi \exp(-(p-2)t)\frac{1}{2p}\frac{d}{dt}\left(\exp((p-2)t)\frac{d}{dt}\Phi\right),$$

из которого в свою очередь вытекает (см. [Калантаров, Ладыженская])

$$\Phi\Phi'' - \frac{p}{2}(\Phi')^2 + (p-2)\Phi\Phi' \geqslant 0, \quad p \geqslant 3. \tag{2.27}$$

Введем обозначение

$$\Lambda(t) \equiv \frac{\Phi'}{\Phi^\alpha}, \quad \alpha \equiv \frac{p}{2}.$$

Тогда, с учетом данного обозначения, из (2.27) получим

$$\Lambda' + (p-2)\Lambda \geqslant 0, \quad \Lambda(t) \geqslant \Lambda(0)e^{-(p-2)t}, \quad \Lambda(0) \equiv \frac{2 \parallel \nabla u_0 \parallel_p^p}{\parallel \nabla u_0 \parallel_2^p}. \tag{2.28}$$

Из (2.28) вытекает

$$\Phi(t) \geqslant \frac{1}{\left[\Phi_0^{1-\alpha} - (\alpha-1)\frac{1}{p-2}\Lambda(0)\left[1 - e^{-(p-2)t}\right]\right]^{1/(\alpha-1)}}, \quad \alpha = \frac{p}{2}. \tag{2.29}$$

Потребуем теперь выполнения условия

$$\Phi_0^{1-\alpha} < \frac{\alpha-1}{p-2}\Lambda(0),$$

тогда из (2.29) получим, что сильное обобщенное решение разрушается за конечное время T_{00}, для которого в силу (2.23) справедлива оценка сверху $T_{00} \in (0, T_2]$, где для времени T_2 выполнено равенство (2.24). Тем самым доказано разрушение за конечное время сильного обобщенного решения задачи (2.2). Стало быть, разрушается и ослабленное решение задачи (2.2).

Теорема доказана.

2.3. Разрушение решения задачи (2.3). В этом пункте мы докажем, что существует единственное ослабленное решение задачи (2.3), которое разрушается за конечное время для любых начальных функций $u_0(x)$ из некоторого класса.

Рассмотрим сначала одномерный случай. Справедлива следующая теорема.

Теорема 9. *Для любого* $u_0(x) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,1]) \bigcap \mathbb{C}_0([0,1])$ *найдется такое максимальное* $\mathrm{T}_0 > 0$, *что существует единственное ослабленное решение задачи* (2.3) *класса* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}_0([0,1]) \cap \cap \mathbb{C}^{(1)}([0,1]))$ *для любого* $\mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}_0)$, *причем* $\mathrm{T}_0 < +\infty$ *и справедливо следующее предельное равенство*:

$$\lim_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \sup_{x \in (0,1)} |u_x(x,t)| = +\infty, \tag{2.30}$$

а также оценка сверху на время разрушения решения:

$$\mathrm{T}_0 \in (0,\mathrm{T}_2], \quad \mathrm{T}_2 = \frac{1}{p-2} \frac{\| u_{0x} \|_2^2 + \| u_0 \|_2^2}{\| u_{0x} \|_p^p}.$$

Доказательство.

Так же как в пункте 2, можно доказать, что в ослабленном смысле задача (2.3) редуцируется к следующему интегродифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\int_0^1 dy\, G_y(x,y) |u_y|^{p-2} u_y, \tag{2.31}$$

где

$$G(x,y) \equiv \frac{1}{\sinh(1)} \left\{ \begin{array}{ll} \sinh(1-y)\sinh(x), & 0 \leqslant x \leqslant y \\ \sinh(y)\sinh(1-x), & y \leqslant x \leqslant 1 \end{array} \right\}.$$

Из (2.31) вытекает следующее интегродифференциальное уравнение:

$$u_{x,t} = \mathrm{K}_2(x) |u_x|^{p-2} u_x + \int_0^1 dy\, \mathrm{K}_1(x,y) |u_y|^{p-2} u_y, \tag{2.32}$$

где

$$\mathrm{K}_1(x,y) \equiv \frac{1}{\sinh(1)} \left\{ \begin{array}{ll} \cosh(y)\cosh(1-x), & 0 \leqslant y \leqslant x \\ \cosh(1-y)\cosh(x), & x \leqslant y \leqslant 1 \end{array} \right\},$$

$$\mathrm{K}_2(x) \equiv -\frac{1}{\sinh(1)} \left[\cosh(1-x)\sinh(x) + \cosh(x)\sinh(1-x) \right].$$

Введем обозначение: $v \equiv u_x$. Тогда из (2.32) вытекает интегральное уравнение

$$v = v_0 + \mathbb{U}_1(v) + \mathbb{U}_2(v), \tag{2.33}$$

где

$$\mathbb{U}_1(v) \equiv \int_0^t ds\, \mathrm{K}_2(x) |v|^{p-2} v, \quad \mathbb{U}_2(v) \equiv \int_0^t ds \int_0^1 dy\, \mathrm{K}_1(x,y) |v|^{p-2} v. \tag{2.34}$$

Введем банахово пространство

$$\mathbb{B} \equiv \left\{ v(x,t) \in \mathbb{C}([0,\mathrm{T}] \times [0,1]) : \| v \|_{\mathrm{T}} \equiv \sup_{(x,t)\in \mathrm{Q_T}} |v(x,t)| \right\},$$

$\mathrm{Q_T} \equiv (0,\mathrm{T}) \times (0,1)$. Для доказательства локальной во времени разрешимости интегрального уравнения (2.33) воспользуемся методом сжимающих отображений.

Нетрудно доказать, что из явного вида функций $\mathrm{K}_1(x,y)$ и $\mathrm{K}_2(x)$ вытекает, что операторы, определенные формулой (2.34), действуют из $\mathbb{B}$ в $\mathbb{B}$. Введем замкнутое выпуклое ограниченное подмножество пространства $\mathbb{B}$:

$$\mathbb{B}_{\mathrm{R}} \equiv \{ v \in \mathbb{B} : \| v \|_{\mathrm{T}} \leqslant \mathrm{R} \}.$$

Докажем, что операторы, определенные формулой (2.34), действуют из $\mathbb{B}_{\mathrm{R}}$ в $\mathbb{B}_{\mathrm{R}}$ и являются сжимающими на $\mathbb{B}_{\mathrm{R}}$ при достаточно малом $\mathrm{T} > 0$ и достаточно большом $\mathrm{R} > 0$. Действительно,

$$\| \mathbb{U}_1(v) \|_{\mathrm{T}} \leqslant \mathrm{TC}_1 \| v \|_{\mathrm{T}}^{p-1}, \quad \| \mathbb{U}_2(v) \|_{\mathrm{T}} \leqslant \mathrm{TC}_2 \| v \|_{\mathrm{T}}^{p-1},$$

$$\mathrm{C}_1 \equiv \sup_{x\in(0,1)} |\mathrm{K}_2(x)|, \quad \mathrm{C}_2 \equiv \sup_{x\in(0,1)} \int\limits_{\Omega} dy\, |\mathrm{K}_1(x,y)|.$$

Отсюда вытекает, что при

$$0 < \mathrm{T} \leqslant \frac{1}{2} \min\{\mathrm{C}_1^{-1}, \mathrm{C}_2^{-1}\} \frac{1}{p-1} \frac{1}{\mathrm{R}^{p-2}}, \quad \mathrm{R} \equiv \| v \|_{\mathrm{T}},$$

операторы $\mathbb{U}_i$ действуют из $\mathbb{B}_{\mathrm{R}}$ в $\mathbb{B}_{\mathrm{R}}$. Докажем теперь, что операторы $\mathbb{U}_i$ являются сжимающими на $\mathbb{B}_{\mathrm{R}}$. Действительно, справедливы следующие оценки:

$$\| \mathbb{U}_i(v_1) - \mathbb{U}_i(v_2) \|_{\mathrm{T}} \leqslant \mathrm{C}_i \mathrm{T}(p-1)\mathrm{R}^{p-2} \| v_1 - v_2 \|_{\mathrm{T}},$$

поэтому при условии

$$0 < \mathrm{T} \leqslant \frac{1}{2} \min\{\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2\} \frac{1}{p-1} \frac{1}{\mathrm{R}^{p-2}}, \quad p > 2,$$

операторы $\mathbb{U}_i$ являются сжимающими на $\mathbb{B}_{\mathrm{R}}$. Отсюда сразу же получаем, что при $v_0 \in \mathbb{B}_{\mathrm{R}}$ при достаточно большом $\mathrm{R} > 0$ и малом $\mathrm{T} > 0$ существует единственное решение интегрального уравнения (2.33) класса $v(x,t) \in \mathbb{C}([0,\mathrm{T}] \times \overline{\Omega})$ для любого $\mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0)$. Причем либо $\mathrm{T}_0 = +\infty$, либо $\mathrm{T}_0 < +\infty$ и тогда

$$\lim_{t\uparrow \mathrm{T}_0} \sup_{x\in\Omega} |v(x,t)| = +\infty.$$

Из уравнения (2.33) следует, что $v(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}([0,1]))$ для любого $\mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}_0)$. Кроме того, из определения $v(x,t) = u_x(x,t)$ и условий $u(0,t) = u(1,t) = 0$ следует, что

$$u(x,t) = \int\limits_0^x dy\, v(y,t), \quad u(x,t) = -\int\limits_x^1 dy\, v(y,t),$$

а значит, существует единственное решение задачи (2.3) класса $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}_0([0,1]) \cap \mathbb{C}^{(1)}([0,1]))$ для любого $\mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}_0)$. Причем либо $\mathrm{T}_0 = +\infty$, либо $\mathrm{T}_0 < +\infty$ и тогда выполнено предельное равенство (2.30).

Докажем теперь, что $\mathrm{T}_0 < +\infty$. Предположим, что $u(x,t)$ является сильным обобщенным решением задачи (2.3) класса $u(x,t) \in \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{W}_0^{1,p}(0,1))$. Умножим скалярно обе части уравнения (2.3) на u и на u' относительно скобок двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{W}_0^{1,p}(0,1)$ и $\mathbb{W}^{-1,p'}(0,1)$. Тогда получим следующие энергетические равенства:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\| u_x \|_2^2 + \| u \|_2^2\right] = \| u_x \|_p^p, \tag{2.35}$$

$$\| u'_{x,t} \|_2^2 + \| u'_t \|_2^2 = \frac{1}{p}\frac{d}{dt} \| u_x \|_p^p . \tag{2.36}$$

Из (2.35), (2.36) и неравенства Коши–Шварца [Морен] получим обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка для функции $\Phi(t) \equiv \| u_x \|_2^2 + \| u \|_2^2$:

$$\Phi\Phi'' - \frac{p}{2}(\Phi')^2 \geqslant 0. \tag{2.37}$$

Интегрируя (2.37), получим

$$\Phi(t) \geqslant \frac{1}{\left[\Phi_0^{1-\alpha} - (\alpha-1)\mathrm{E}_0 t\right]^{1/(\alpha-1)}}, \quad \mathrm{E}_0 \equiv \frac{2 \| \nabla u_0 \|_p^p}{\| \nabla u_0 \|_2^p}. \tag{2.38}$$

Из (2.38) вытекает утверждение теоремы. С другой стороны, поскольку ослабленное решение задачи (2.3) является сильным обобщенным, то, стало быть, время существования ослабленного решения не больше времени существования сильного обобщенного.

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь многомерный случай.

Теорема 10. *Для любой начальной функции* $u_0(x) \in \in \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \bigcap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})$ *такой, что найдется* $v_0 \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ *и справедливо равенство*

$$u_0(x) = \int\limits_\Omega dy\, \Gamma(x,y) v_0(y)$$

существует такое максимальное $\mathrm{T}_0 > 0$, *что найдется единственное ослабленное решение задачи* (2.3) *класса* $u(x,t) \in \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}_0(\overline{\Omega}) \bigcap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}))$ *для любого* $\mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}_0)$, *причем* $\mathrm{T}_0 < +\infty$ *и справедливо следующее предельное равенство*:

$$\lim_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \sup_{x \in \Omega} |\nabla_x u(x,t)| = +\infty, \tag{2.39}$$

а также оценка сверху на время разрушения решения:

$$\mathrm{T}_0 \in (0,\mathrm{T}_2], \quad \mathrm{T}_2 = \frac{1}{p-2} \frac{\| \nabla u_0 \|_2^2 + \| u_0 \|_2^2}{\| \nabla u_0 \|_p^p}, \quad p \geqslant 3, \tag{2.40}$$

где $\Gamma(x,y)$ *— функция Грина первой краевой задачи для оператора* $-\triangle + \mathrm{I}$ *в области* $\Omega \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, $p \geqslant 3$.

Доказательство.

Проведем редукцию задачи (2.3) к эквивалентному в ослабленном смысле интегральному уравнению. Как и в пункте 1, можно показать, что в ослабленном смысле задача (2.3) эквивалентна следующей задаче Коши для интегродифференциального уравнения. Действительно, перепишем уравнение (2.3) в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}(-\triangle u + u) = (p-1)[-\triangle u + u]|\nabla u|^{p-2} - (p-1)u|\nabla u|^{p-2}. \tag{2.41}$$

Определение 3. Сильным обобщенным решением задачи (2.41) назовем решение класса $u \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$, удовлетворяющее условиям

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}(-\triangle u + u) - (p-1)(-\triangle u + u)|\nabla u|^{p-2} + \right.$$
$$\left. + (p-1)u|\nabla u|^{p-2}, w \right\rangle = 0 \tag{2.42}$$
$$\forall\, w \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega), \quad \forall\, t \in [0,\mathrm{T}],$$

где производная по времени понимается в классическом смысле, через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначена скобка двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$.

Определение 4. Ослабленным решением задачи (2.41) назовем сильное обобщенное решение класса $u \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega}))$.

Пусть

$$\mathbb{A}u = -\triangle u + u : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega).$$

Оператор $\mathbb{A}$ имеет липшиц-непрерывный обратный с постоянной Липшица, равной единице. Пусть $v = \mathbb{A}u$. Ищем решения этого уравнения в классе $v \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}(\overline{\Omega}))$. Тогда

$$u = \mathbb{A}^{-1}v = \int\limits_{\Omega} dy\, \Gamma(x,y)v(y,t), \tag{2.43}$$

где $\Gamma(x,y)$ — функция Грина первой краевой задачи для оператора $-\triangle+\mathrm{I}$. После подстановки (2.43) в (2.42) получим, что каждое слагаемое в первом аргументе скобки двойственности принадлежит классу $\mathbb{C}(\overline{\Omega}\times[0,\mathrm{T}])$. Тогда в силу очевидного вложения $\mathbb{C}_0^\infty(\Omega)\subset\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ из (2.42) получим уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t}=(p-1)v\left|\int\limits_\Omega dy\,\nabla_x\Gamma(x,y)v\right|^{p-2}-$$

$$-(p-1)\int\limits_\Omega dy\,\Gamma(x,y)v(y,t)\left|\int\limits_\Omega dy\,\nabla_x\Gamma(x,y)v\right|^{p-2},\quad p\geqslant 3,\quad (2.44)$$

которое дополняется начальным условием и уравнением, связывающим функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$

$$v(x,0)=v_0(x),\quad u(x,t)=\int\limits_\Omega dy\,\Gamma(x,y)v(y,t),\quad t\geqslant 0. \qquad (2.45)$$

Тем самым мы показали, что в ослабленном смысле задачи (2.3) и (2.44), (2.45) эквивалентны. Заметим, что интегродифференциальное уравнение (2.44) близко по своей структуре к интегродифференциальному уравнению (2.10). И почти точным повторением рассуждений, использованных при доказательстве теоремы 4 получим, что существует единственное решение задачи (2.44), (2.45) класса $v(x,t)\in\in\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}_0(\overline{\Omega})\bigcap\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}))$ для любого $\mathrm{T}\in(0,\mathrm{T}_0)$. Причем либо $\mathrm{T}_0=+\infty$, либо $\mathrm{T}_0<+\infty$ и тогда справедливо предельное равенство

$$\lim_{t\uparrow\mathrm{T}_0}\sup_{x\in\Omega}|v(x,t)|=+\infty. \qquad (2.46)$$

Тем самым первая часть теоремы доказана.

Соотношения (2.39) и (2.40) теоремы доказываются точно так же, как и вторая часть теоремы 8, причем из (2.46) вытекает (2.39).

Теорема доказана.

2.4. Опрокидывание ослабленных решений задач (2.4), (2.5). В этом пункте мы докажем, что задачи (2.4), (2.5) однозначно разрешимы в ослабленном смысле и ослабленное решение опрокидывается за конечное время.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 11. *Для любой начальной функции* $u_0\in\in\mathbb{C}_0(\overline{\Omega})\bigcap\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})$, *для которой найдется такое* $v_0(x)\in\mathbb{C}(\overline{\Omega})$, *что справедливо равенство*

$$u_0(x)=\int\limits_\Omega dy\,G(x,y)v_0(y),$$

существует единственное ослабленное решение задачи (2.4) *класса* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}_0(\overline{\Omega})\bigcap\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}))$ *для любого* $\mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}_0)$, *причем если*

$$\mathrm{C}_1^4(\Omega) \parallel \nabla u_0 \parallel_2^2 < \parallel \nabla u_0 \parallel_4^4, \tag{2.47}$$

то справедливо предельное равенство

$$\lim_{t\uparrow \mathrm{T}_0}\sup_{x\in\Omega}|\nabla_x u| = +\infty, \tag{2.48}$$

оценка сверху $\mathrm{T}_0 \in (0,\mathrm{T}_1]$, *где*

$$\mathrm{T}_1 = -\frac{1}{\mathrm{C}_1^4}\ln\left(1 - \mathrm{C}_1^4\frac{\parallel \nabla u_0 \parallel_2^2}{\parallel \nabla u_0 \parallel_4^4}\right),$$

C_1 — *наилучшая константа вложения* $\mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega)$ *в* $\mathbb{L}^4(\Omega)$.

Доказательство.

Как и в пункте 1 можно доказать, что в ослабленном смысле задача (2.4) эквивалентна следующей задаче Коши для интегродифференциального уравнения:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 3v(x,t)\left|\int\limits_\Omega dy\,\nabla_x G(x,y)v(y,t)\right|^2 + \int\limits_\Omega dy\,G_{x_1}(x,y)v(y,t)\int\limits_\Omega dy\,G(x,y)v(y,t), \tag{2.49}$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad u(x,t) = \int\limits_\Omega dy\,G(x,y)v(y,t). \tag{2.50}$$

Отметим, что задача (2.49) близка к уже рассмотренной задаче (2.7). Используя метод сжимающих отображений, как и в случае задачи (2.7), можно доказать, что существует единственное решение задачи (2.49) в классе $v(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}(\overline{\Omega}))$ для любого $\mathrm{T} \in (0,\overline{\mathrm{T}}_0)$, причем либо $\overline{\mathrm{T}}_0 = +\infty$, либо $\overline{\mathrm{T}}_0 < +\infty$ и тогда справедливо предельное равенство

$$\lim_{t\uparrow \overline{\mathrm{T}}_0}\sup_{x\in\Omega}|v(x,t)| = +\infty.$$

Из (2.50) получим, что существует максимальное $\mathrm{T}_0 > 0$ такое, что существует единственное ослабленное решение задачи (2.4) класса $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}_0(\overline{\Omega})\bigcap\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}))$ для любого $\mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}_0)$. Причем либо $\mathrm{T}_0 = +\infty$, либо $\mathrm{T}_0 < +\infty$ и тогда выполнено предельное равенство (2.48).

Теперь докажем, что при условии (2.47) ослабленное решение задачи (2.4) разрушается за конечное время.

Пусть $u(x,t)$ — сильное обобщенное решение задачи (2.4) класса $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega))$. Тогда умножим скалярно уравнение (2.4)

на u и на u' относительно скобок двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-1,4/3}(\Omega)$. После интегрирования по частям получим следующие энергетические равенства:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\parallel \nabla u \parallel_2^2 = \parallel \nabla u \parallel_4^4, \tag{2.51}$$

$$\parallel \nabla u' \parallel_2^2 = \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\parallel \nabla u \parallel_4^4 - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} dy\, u^2 u'_{x_1 t}. \tag{2.52}$$

Из (2.51), (2.52) вытекает следующая цепочка неравенств:

$$\parallel \nabla u' \parallel_2^2 \leqslant \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\parallel \nabla u \parallel_4^4 + \frac{\varepsilon}{4}\parallel \nabla u' \parallel_2^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\parallel u \parallel_4^4 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\parallel \nabla u \parallel_4^4 + \frac{\varepsilon}{4}\parallel \nabla u' \parallel_2^2 + \frac{\mathrm{C}_1^4}{4\varepsilon}\parallel \nabla u \parallel_4^4,$$

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right)\parallel \nabla u' \parallel_2^2 \leqslant \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\parallel \nabla u \parallel_4^4 + \frac{\mathrm{C}_1^4}{4\varepsilon}\parallel \nabla u \parallel_4^4 . \tag{2.53}$$

Из (2.51)–(2.53) и неравенства Коши–Шварца [Морен] для функции $\Phi(t) \equiv \parallel \nabla u \parallel_2^2$ вытекает следующее обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка (см. [Калантаров, Ладыженская]):

$$\Phi\Phi'' - \alpha_1(\Phi')^2 + \beta_1\Phi\Phi' \geqslant 0, \tag{2.54}$$

где

$$\alpha_1 = 2\left[1 - \frac{\varepsilon}{4}\right], \quad \beta_1 = \frac{\mathrm{C}_1^4}{\varepsilon}.$$

Неравенство (2.54) имеет такой же вид, как и неравенство (2.27). Поэтому, интегрируя аналогичным образом, получим

$$\Phi(t) \geqslant \frac{1}{\left[\Phi_0^{1-\alpha_1} - (\alpha_1 - 1)\beta_1^{-1}\Lambda_0\left[1 - \exp(-\beta_1 t)\right]\right]^{1/(\alpha_1 - 1)}}, \tag{2.55}$$

где

$$\Lambda_0 \equiv \frac{\Phi'(0)}{\Phi_0^{\alpha_1}}.$$

Потребуем выполнения условия

$$\Phi_0 < \frac{\alpha_1 - 1}{\beta_1}\Phi'(0),$$

что эквивалентно условию

$$\parallel \nabla u_0 \parallel_2^2 < 2\frac{\alpha_1 - 1}{\beta_1}\parallel \nabla u_0 \parallel_4^4 . \tag{2.56}$$

Рассмотрим функцию

$$f(\varepsilon) \equiv \frac{2\alpha_1 - 2}{\beta_1} = \frac{1}{\mathrm{C}_1^4}\varepsilon\left[2 - \varepsilon\right],$$

максимум которой достигается в точке $\varepsilon = 1$ и равен

$$f(1) = \mathrm{C}_1^{-4}.$$

Значит, условие (2.56) примет вид (2.47). Рассмотрим теперь неравенство (2.55) при $\varepsilon = 1$. В силу условия (2.56) получим, что время разрушения сильного обобщенного решения ограничено сверху временем

$$\mathrm{T}_1 = -\frac{1}{\mathrm{C}_1^4} \ln \left(1 - \mathrm{C}_1^4 \frac{\| \nabla u_0 \|_2^2}{\| \nabla u_0 \|_4^4} \right).$$

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь задачу (2.5). Точно так же, как и при доказательстве теорем 8, 9, можно доказать следующий результат.

Теорема 12. *Для любого* $u_0 \in \mathbb{C}_0(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})$ *существует единственное ослабленное решение задачи* (2.5) *класса* $u(x,t) \in \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}]; \mathbb{C}_0(\overline{\Omega}) \bigcap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}))$ *для любого* $\mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0)$, *причем если*

$$\mathrm{C}_1^4(\Omega) \left(\| \nabla u_0 \|_2^2 + \| u_0 \|_2^2 \right) < \| \nabla u_0 \|_4^4,$$

то справедливо предельное равенство

$$\lim_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \sup_{x \in \Omega} |\nabla u| = +\infty,$$

и оценка сверху $\mathrm{T}_0 \leqslant \mathrm{T}_1$, *где*

$$\mathrm{T}_1 = -\frac{1}{\mathrm{C}_1^4} \ln \left(1 - \mathrm{C}_1^4 \frac{\| \nabla u_0 \|_2^2 + \| u_0 \|_2^2}{\| \nabla u_0 \|_4^4} \right),$$

C_1 — *наилучшая константа вложения* $\mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega)$ *в* $\mathbb{L}^4(\Omega)$.

2.5. Интерпретация полученных результатов. Задачи (2.1)–(2.5) описывают чрезвычайно важные для технических приложений эффекты, связанные с отрицательностью дифференциальной проводимости среды. При этом физически важный случай $p = 4$ отражен в результатах доказанных выше теорем. Таким образом, из доказанной теоремы 4 вытекает, что в случае задачи (2.2) при достаточно малом в некотором смысле начальном возмущении потенциала электрического поля решение существует глобально во времени, с другой стороны, при достаточно большом в некотором смысле начальном распределении потенциала электрического поля в полупроводнике с отрицательной проводимостью происходит лавинный рост свободных электронов, что в конечном итоге приводит к пробою в полупроводнике. Этот лавинный рост концентрации свободных электронов является необходимым условием работы генераторов электромагнитной энергии. Отметим, что при наличии внешнего электрического поля области сильного электрического поля (домены) двигаются в направлении, противоположном электрическому полю. И если скорость распространения электрических доменов достаточно велика, то пробой не успевает произойти, если же

скорость достаточно мала, а начальное распределение велико в некотором смысле, то в полупроводнике произойдет пробой. Эти эффекты содержатся в задачах (2.4) и (2.5). К сожалению, наши результаты имеют нелокальный характер. И, как мы предполагаем основываясь на одном рассмотренном в [Корпусов, 4] примере, реально существуют переменные области сильного и слабого электрического поля, такие что в области со слабым электрическим полем будут эволюционировать оставаясь областями со слабым электрическим полем. С другой стороны, в областях с сильным электрическом полем будет происходить увеличение, и возможно с пробоем, напряженности электрического поля.

§ 3. Разрушение решений псевдопараболических уравнений с быстро растущими нелинейностями

В данном параграфе рассматриваются первые начально-краевые задачи для нелинейных уравнений псевдопараболического типа с быстро растущими нелинейностями. Доказана однозначная разрешимость в классическом и ослабленном смыслах. Причем за конечное время максимум модуля решения по пространственным переменным обращается в бесконечность, т. е. за конечное время образуется сильный разрыв решения рассматриваемых задач. Рассматриваемые задачи возникают в физике полупроводников при учете дебаевской экранировки и учете источников свободных зарядов, распределение которых имеет вид распределения Больцмана или конусного распределения. Далее мы докажем, что решение рассматриваемых задач разрушается за конечное время.

Целью данного параграфа является доказательство разрушения классических решений следующих начально-краевых задач:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\triangle u - u) + e^u = 0, \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad u(x,0) = u_0(x), \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\triangle u - u) + ue^{u^2} = 0, \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad u(x,0) = u_0(x), \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\triangle u - u) = \triangle(ue^{u^2}), \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad u(x,0) = u_0(x), \tag{3.3}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \in \mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0,1]$.

3.1. Локальная разрешимость и разрушение за конечное время решений задач (3.1), (3.2). В этом пункте мы рассмотрим вопрос о разрушении классического решения задач (3.1), (3.2).

Определение 5. Классическим решением задачи (3.1) назовем решение задачи класса $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}^{(2)}(\Omega)\bigcap\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})\bigcap\mathbb{C}_0(\overline{\Omega}))$.

Очевидно, необходимым условием существования классического решения является требование $u_0(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega)\bigcap\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})\bigcap\mathbb{C}_0(\overline{\Omega})$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 13. *Для любых* $u_0(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \bigcap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})$ *найдется такое максимальное* $\mathrm{T}_0 > 0$, *что существует единственное классическое решение задачи* (3.1), *причем* $\mathrm{T}_0 \in [\mathrm{T}_1^*, \mathrm{T}_1]$,

$$\lim_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \sup_{x \in \Omega} |u(x,t)| = +\infty.$$

где

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_1 &\equiv \frac{\int\limits_{\Omega} dx\, \exp\{u_0(x)\}}{\int\limits_{\Omega}\int dx\, dy\, G(x,y) \exp\{u_0(x) + u_0(y)\}}, \\ \mathrm{T}_1^* &= \frac{1}{\mathrm{C}_1(\Omega) \sup\limits_{x \in \Omega} \exp(u_0(x))}, \quad \mathrm{C}_1(\Omega) = \sup_{x \in \Omega} \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y), \end{aligned} \tag{3.4}$$

$G(x,y)$ — *функция Грина первой краевой задачи для оператора* $-\triangle + \mathrm{I}$.

Доказательство. Для классических решений задача (3.1) эквивалентна следующему двойному интегральному уравнению:

$$u(x,t) = u_0(x) + \int\limits_0^t ds \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y) \exp\{u(y,t)\}, \tag{3.5}$$

где $G(x,y)$ — функция Грина первой краевой задачи для оператора $-\triangle + \mathrm{I}$.

Введем следующий оператор:

$$\mathbb{A}(u) \equiv u_0(x) + \int\limits_0^t ds \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y) \exp\{u(y,t)\}.$$

В силу свойств функции Грина имеем, что

$$\mathbb{A}(u) : \mathbb{C}([0,\mathrm{T}]; \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})) \to \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}]; \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \bigcap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})). \tag{3.6}$$

Введем банахово пространство $\mathbb{B} \equiv \mathbb{C}([0,\mathrm{T}]; \mathbb{C}_0(\overline{\Omega}))$ и его замкнутое выпуклое ограниченное подмножество

$$\mathbb{B}_{\mathrm{R}} \equiv \{v(x,t) \in \mathbb{B} : \| v \|_{\mathrm{T}} \equiv \sup_{(x,t) \in Q} |u(x,t)| \leqslant \mathrm{R}\}.$$

Стандартным образом доказывается, что оператор $\mathbb{A}(u)$ действует из $\mathbb{B}_{\mathrm{R}}$ в $\mathbb{B}_{\mathrm{R}}$ и является сжимающим на $\mathbb{B}_{\mathrm{R}}$. Стало быть, найдется такое достаточно малое $\mathrm{T} > 0$, что существует единственное $u(x,t) \in \in \mathbb{C}([0,\mathrm{T}]; \mathbb{C}_0(\overline{\Omega}))$. Теперь, используя известный алгоритм продолжения во времени решения интегрального уравнения (3.5), получим, что найдется такое максимальное $\mathrm{T}_0 > 0$, что существует единственное реше-

ние интегрального уравнения (3.5) для любого $\mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0)$, причем либо $\mathrm{T}_0 = +\infty$, либо $\mathrm{T}_0 < +\infty$ и тогда выполнено предельное равенство

$$\lim_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \sup_{x \in \Omega} |u(x,t)| = +\infty. \tag{3.7}$$

Заметим теперь, что в силу (3.5), (3.6)

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}]; \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})).$$

С другой стороны,

$$\mathbb{A}(u) : \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}]; \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})) \to$$
$$\to \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}]; \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})).$$

Таким образом, первая часть теоремы доказана.

В классическом смысле интегральное уравнение (3.5) эквивалентно следующей задаче Коши для интегродифференциального уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y) \exp(u(y,t)), \quad u(x,0) = u_0(x). \tag{3.8}$$

Умножим обе части уравнения (3.8) на $\exp(u)$ и проинтегрируем по области Ω, тогда получим

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega} dx\, \exp(u) = \int\limits_{\Omega} \int dx\, dy\, G(x,y) \exp(u(y,t) + u(x,t)) \equiv \mathrm{F}(t). \tag{3.9}$$

Теперь умножим обе части уравнения (3.8) на $(\exp(u))'$, тогда получим

$$\int\limits_{\Omega} dx\, \exp(u)(u')^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathbb{F}. \tag{3.10}$$

Справедливо следующее неравенство:

$$\left| \frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega} dx\, \exp(u) \right|^2 \leqslant \int\limits_{\Omega} dx\, \exp(u)(u')^2 \int\limits_{\Omega} dx\, \exp(u). \tag{3.11}$$

Введем обозначение

$$\Phi(t) \equiv \int\limits_{\Omega} dx\, \exp(u). \tag{3.12}$$

Тогда из (3.9)–(3.12) вытекает следующее обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка:

$$\left(\Phi'\right)^2 \leqslant \frac{1}{2} \Phi'' \Phi, \tag{3.13}$$

интегрированием которого с учетом (3.8), (3.9) и (3.13) получим

$$\Phi(t) \geqslant \frac{1}{\Phi_0^{-1} - \mathrm{E}_0 t}, \tag{3.14}$$

где

$$\mathrm{E}_0 \equiv \frac{\int\limits_\Omega \int dx\, dy\, G(x,y) \exp\{u_0(x) + u_0(y)\}}{\Phi_0^2}, \quad \Phi_0 \equiv \Phi(0).$$

Из (3.14) вытекает существование такого $\mathrm{T}_0^* \leqslant \mathrm{T}_1$,

$$\mathrm{T}_1 \equiv \frac{\int\limits_\Omega dx\, \exp\{u_0(x)\}}{\int\limits_\Omega \int dx\, dy\, G(x,y) \exp\{u_0(x) + u_0(y)\}},$$

что

$$\lim_{t \uparrow \mathrm{T}_0^*} \Phi(t) = +\infty. \tag{3.15}$$

Из явного вида функции $\Phi(t)$, определенной равенством (3.12), и предельного равенства (3.15) вытекает, что до момента времени T_0^* найдется такое T_0, большее нуля в силу первой части теоремы, что в некоторой точке $x^* \in \Omega$ модуль решения $|u(x^*, t)|$ обратится в бесконечность.

Умножим теперь уравнения (3.8) на $\exp(u)$, тогда получим

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v \int\limits_\Omega dy\, G(x,y) v, \quad v \equiv \exp(u),$$

откуда сразу же получаем

$$w(t) \leqslant w(0) + \mathrm{C}_1(\Omega) \int\limits_0^t ds\, w^2(s), \quad w(t) = \sup_{x \in \Omega} |\exp(u(x,t))|.$$

Отсюда приходим к выводу о справедливости сотношений (3.4):

$$w(t) \leqslant \frac{w(0)}{1 - \mathrm{C}_1 w(0) t}, \quad t \in (0, \mathrm{T}_1^*),$$

$$\mathrm{T}_1^* = \frac{1}{\mathrm{C}_1(\Omega) \sup\limits_{x \in \Omega} \exp(u_0(x))}, \quad \mathrm{C}_1(\Omega) = \sup_{x \in \Omega} \int\limits_\Omega dy\, G(x,y).$$

Из (3.5), (3.12), (3.14) вытекает, что за конечное время $0 \leqslant \mathrm{T}_{00} < \mathrm{T}_0$ решение становится неотрицательным. Тем самым доказана вторая часть теоремы.

Теорема доказана.

Отметим, что для положительного решения задачи (3.1) может быть применен метод неограниченных коэффициенов Фурье (см., например, [Kaplan]).

Справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть* $u(x,t)$ *— классическое решение задачи* (3.1) *с начальной функцией* $u_0(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega}) \bigcap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})$. *Тогда* $0 < \mathrm{T}_0 \leqslant \mathrm{T}_2$, *где*

$$\mathrm{T}_2 \equiv (\lambda_1 + 1)\exp(-\psi_0), \quad \psi_0 = \int\limits_\Omega dx\, \varphi_1(y) u_0(y),$$

$\varphi_1(y)$ *— первая собственная функция первой краевой задачи для оператора Лапласа,* λ_1 *— первое собственное значение, причем*

$$\int\limits_\Omega dy\, \varphi_1(y) = 1.$$

Доказательство.

Пусть $u(x,t)$ — классическое решение задачи (3.1). Поскольку $u_0(x) \geqslant 0$, то из вида интегрального уравнения (3.5) следует, что $u(x,t) \geqslant 0$. Тогда, умножив обе части уравнения (3.1) на φ_1, после интегрирования по частям получим

$$(\lambda_1 + 1)\frac{d}{dt}\psi = \int\limits_\Omega dx\, \varphi_1(x)\exp(u(y,t)) \geqslant \exp(\psi), \tag{3.16}$$

$\psi(t) \equiv \int\limits_\Omega dx\, \varphi_1(y) u(y,t)$, где мы воспользовались неравенством Ийнсена для выпуклых вниз функций (см., например, [Зорич]). Интегрируя (3.16) получим,

$$\exp(\psi) \geqslant \frac{1}{\exp(-\psi_0) - (\lambda_1 + 1)^{-1} t}. \tag{3.17}$$

Из (3.17) вытекает утверждение леммы.

Лемма доказана.

Теорема 14. *Для любых* $u_0(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \bigcap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})$ *найдется максимальное* $\mathrm{T}_0^* > 0$, *такое что существует единственное классическое решение задачи* (3.2), *причем* $\mathrm{T}_0^* \in [\mathrm{T}_3^*, \mathrm{T}_3]$,

$$\lim_{t \uparrow \mathrm{T}_0^*} \sup_{x \in \Omega} |u(x,t)| = +\infty. \tag{3.18}$$

где

$$\mathrm{T}_3 \equiv \frac{\int\limits_\Omega dx\, \exp\{u_0^2(x)\}}{2\int\limits_\Omega\int dx\, dy\, G(x,y) u_0(x) u_0(y) \exp\{u_0^2(x) + u_0^2(y)\}},$$

$$\mathrm{T}_3^* = \frac{1}{4\mathrm{C}_1(\Omega) \sup\limits_{x \in \Omega} \exp(2u_0^2(x))}, \quad \mathrm{C}_1(\Omega) = \sup_{x \in \Omega} \int\limits_\Omega dy\, G(x,y),$$

$G(x,y)$ *— функция Грина первой краевой задачи для оператора* $-\triangle + \mathrm{I}$.

Доказательство.

В доказательстве нуждается только вторая часть теоремы, поскольку первая часть доказывается так же, как и первая часть теоремы 13. Итак, найдется такое максимальное $T_0^* > 0$, что существует единственное классическое решение задачи (3.2). Докажем теперь, что $T_0^* \leqslant T_3 < +\infty$. С этой целью рассмотрим следующую задачу Коши для интегродифференциального уравнения, эквивалентного задаче (3.2):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y)u(y,t)\exp(u^2(y,t)), \quad u(x,0) = u_0(x). \tag{3.20}$$

Теперь умножим обе части уравнения (3.20) на $u\exp(u^2)$, проинтегрируем по области Ω и получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} dx\, \exp(u^2(x,t)) =$$

$$= F \equiv \int\limits_{\Omega}\int dx\, dy\, G(x,y)\exp(u^2(y,t) + u^2(x,t))u(y,t)u(x,t). \tag{3.21}$$

Умножим обе части уравнения (3.20) на величину $\left(u\exp(u^2)\right)'$ и проинтегрируем по области Ω, тогда получим

$$\int\limits_{\Omega} dx\, [(u')^2\exp(u^2) + 2u^2(u')^2\exp(u^2)] = \frac{1}{2}\frac{dF}{dt}. \tag{3.22}$$

Из (3.22) вытекает неравенство

$$\int\limits_{\Omega} dx\, (u')^2u^2\exp(u^2) \leqslant \frac{1}{4}\frac{dF}{dt}. \tag{3.23}$$

Заметим, что справедливо следующее неравенство:

$$\left|\int\limits_{\Omega} dy\, u\exp(u^2)u'\right|^2 \leqslant \int\limits_{\Omega} dy\, \exp(u^2)\int\limits_{\Omega} dy\, u^2(u')^2\exp(u^2). \tag{3.24}$$

Введем обозначение

$$\Phi(t) \equiv \int\limits_{\Omega} dx\, \exp(u^2). \tag{3.25}$$

Из (3.21) и (3.23)–(3.25) вытекает следующее обыкновеное дифференциальное неравенство второго порядка:

$$\Phi\Phi'' - 2\left(\Phi'\right)^2 \geqslant 0. \tag{3.26}$$

Интегрируя (3.26), получим

$$\Phi \geqslant \frac{1}{\Phi_0^{-1} - \mathrm{E}_0 t}, \tag{3.27}$$

где

$$\Phi_0 = \Phi(0), \quad \mathrm{E}_0 \equiv \frac{2\mathrm{F}(0)}{\Phi_0^2}.$$

Из (3.27) вытекает (3.18), (3.19).

Получим теперь оценку снизу на время разрушения решения задачи (3.2). С этой целью умножим обе части уравнения (3.20) на $u\exp(u^2)$. Тогда получим следующие соотношения:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \exp(u^2)}{\partial t} = u\exp(u^2)\int\limits_\Omega dy\, G(x,y) u\exp(u^2),$$

$$\exp(u^2) \leqslant \exp(u_0^2) + 2\int\limits_0^t ds\,|u|\exp u^2 \int\limits_\Omega dy\, G(x,y)|u|\exp(u^2) \leqslant$$

$$\leqslant \exp(u_0^2) + 2\int\limits_0^t ds\, \exp(3u^2/2)\int\limits_\Omega dy\, G(x,y)\exp(3u^2/2), \tag{3.28}$$

где мы воспользовались тем, что $u \leqslant \exp(u^2/2)$ при $u \geqslant 0$. Из (3.28) вытекает неравенство

$$w \leqslant w_0 + 2\mathrm{C}_1(\Omega)\int\limits_0^t ds\, w^3(s), \quad w(t) \equiv \sup_{x\in\Omega} |\exp(u^2)|, \tag{3.29}$$

$$\mathrm{C}_1(\Omega) = \sup_{x\in\Omega}\int\limits_\Omega dy\, G(x,y).$$

Из (3.29) вытекает следующее неравенство:

$$w \leqslant \frac{w_0}{\left[1 - 4w_0^2\mathrm{C}_1 t\right]^{1/2}}. \tag{3.30}$$

Из (3.30) вытекает оценка снизу на скорость разрушения решения задачи (3.2).

Теорема доказана.

В целях общности рассмотрим задачу, включающую в себя и задачу (3.1):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\triangle u - u) + \psi(u) = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3.31}$$

где функция $\psi(u)$ удовлетворяет условиям:

1. $\psi(s) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}^1)$;

2. $\psi(s) \geqslant 0$ и выпуклая вниз;
3. для данной функции $u_0(x)$ выполнено условие:

$$\Phi_0 \equiv \int\limits_{\Omega} dy\, w_1(y) u_0(y) > 0; \tag{3.32}$$

4. пусть выполнено следующее условие

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{ds}{\psi(s)} < +\infty;$$

5. $\psi(s)$ — монотонно возрастающая функция, где $w_1(x)$ — первая собственная функция первой краевой задачи для оператора $-\triangle + \mathrm{I}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 15. *Для любой функции* $u_0(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap$ $\cap\, \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})$ *найдется такое максимальное* $\mathrm{T}_0^{**} > 0$, *что существует единственное классическое решение задачи* (3.2), *причем* $\mathrm{T}_0^{**} \in$ $\in [\mathrm{T}_4^*, \mathrm{T}_4]$,

$$\lim_{t \uparrow \mathrm{T}_0^{**}} \sup_{x \in \Omega} |u(x,t)| = +\infty, \tag{3.33}$$

где

$$\mathrm{T}_4 \equiv (1 + \lambda_1) \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{ds}{\psi(s)},$$

а $\mathrm{T}_4^* > 0$ — *время существования классического решения следующей задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения*:

$$\frac{d\mathrm{Z}}{dt} = \mathrm{C}_1 \psi(\mathrm{Z}), \quad \mathrm{Z}(0) = \max_{x \in \Omega} |u_0(x)|, \quad \mathrm{C}_1 \equiv \sup_{x \in \Omega} \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y), \tag{3.34}$$

$G(x,y)$ — *функция Грина первой краевой задачи для оператора* $-\triangle + \mathrm{I}$.

Доказательство.

В доказательстве нуждается только вторая часть теоремы. Действительно, результат о существовании и единственности решения задачи (3.31) получается методом сжимающих отображений.

В классическом смысле задача (3.31) эквивалентна задаче Коши для интегродифференциального уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y) \psi(u)(y,t), \quad u(x,0) = u_0(x). \tag{3.35}$$

Умножим обе части на функцию $w_1(x) \geqslant 0$ — первую собственную функцию первой краевой задачи на собственные значения для опера-

тора $-\triangle + \mathrm{I}$. Пусть λ_1 — первое собственное значение первой краевой задачи для оператора Лапласа. Пусть, кроме того,

$$\int\limits_{\Omega} dx w_1(x) = 1.$$

Тогда получим

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{1+\lambda_1}\int\limits_{\Omega} dy\, w_1(y)\psi(u) \geqslant \frac{1}{1+\lambda_1}\psi(\Phi(t)).$$

А из условий (2)–(4) вытекает, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} ds\, \frac{1}{\psi(s)} \geqslant \frac{t}{1+\lambda_1}.$$

Отсюда сразу же получаем предельное равенство (3.33).

Из (3.32), (3.35) и условия (5) вытекает следующее интегральное неравенство:

$$v(t) \leqslant v(0) + \mathrm{C}_1 \int\limits_0^t ds\, \psi(v), \quad v(t) \equiv \sup_{x\in\Omega} |u(x,t)|,$$

из которого в свою очередь вытекает (3.34).

Теорема доказана.

Замечание. Отметим, что в случае $\psi(u) = \exp(u)$ в условии (3) нет необходимости. Поэтому результат теоремы 15 имеет место и в этом случае.

3.2. Локальная разрешимость и разрушение за конечное время решения задачи (3.3). В этом пункте мы расмотрим вопрос локальной разрешимости задачи (3.3) в так называемом ослабленном смысле, а также докажем, что ослабленные решения задачи (3.3) разрушаются за конечные времена.

Определение 6. Ослабленным решением задачи (3.3) назовем сильное обобщенное решение класса

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})).$$

Определение 7. Сильным обобщенным решением задачи (3.3) назовем решение класса $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}_0^1(\Omega))$, удовлетворяющее условиям

$$\left\langle \triangle u' - u' - \triangle(ue^{u^2}), w \right\rangle = 0 \ \ \forall \ \ w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega),$$

$\forall\, t \in [0,\mathrm{T}]$, $u(0) = u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, где оператор $\triangle$, являющийся расширением оператора Лапласа на класс $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, и представляет собой изометрический изоморфизм между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$.

Теперь проведем редукцию задачи (3.3) к эквивалентной задаче в ослабленном смысле. Рассмотрим задачу (3.3). Поскольку для оператора $\mathbb{A} \equiv -\triangle + \mathrm{I} : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ существует липшиц-непрерывный обратный $\mathbb{A}^{-1}$, то в ослабленном смысле задача (3.3) эквивалентна следующей задаче:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ue^{u^2} - \mathbb{A}^{-1}(ue^{u^2}), \quad u(x,0) = u_0(x) \in \mathbb{C}^1(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega}). \tag{3.36}$$

Действительно, в классе

$$u \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T};\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega}))$$

из определения 2 сильного обобщенного решения вытекает равенство

$$\mathbb{A}(u' - ue^{u^2}) + ue^{u^2} = 0,$$

понимаемое в смысле $\mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}^{-1}(\Omega))$, поскольку

$$u' \in \mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})) \subset \mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}_0^1(\Omega)),$$

$$ue^{u^2} \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})) \subset$$

$$\subset \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}_0^1(\Omega)) \subset \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}^{-1}(\Omega)).$$

Поскольку для оператора $\mathbb{A} : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ определен липшиц-непрерывный обратный с постоянной Липшица, равной 1, то приходим к уравнению (3.36).

Заметим, что сужение области определения оператора $\mathbb{A}^{-1}$ на класс $v(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ совпадает с интегральным оператором

$$\mathbb{G}v \equiv \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y)v(y),$$

где $G(x,y)$ — функция Грина первой краевой задачи для оператора $-\triangle + \mathrm{I}$. Поэтому в ослабленном смысле задача (3.36) совпадает со следующей задачей:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ue^{u^2} - \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y)ue^{u^2}, \quad u(x,0) = u_0(x) \in \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega}). \tag{3.37}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 16. *Для любого* $u_0 \in \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})$ *найдется такое максимальное* $\mathrm{T}_0 > 0$, *что существует ослабленное решение задачи* (3.3) *класса*

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega}))$$

для любых $\mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}_0)$. *Причем* $\mathrm{T}_0 \in (0,\mathrm{T}_2]$ *и выполнено условие*

$$\lim_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \sup_{x \in \Omega} |\nabla_x u(x,t)| = +\infty, \tag{3.38}$$

где

$$\mathrm{T}_2 \equiv \frac{1}{2}\frac{\int\limits_\Omega dy\, u_0^2(y)\exp(2u_0^2(y))}{\int\limits_\Omega dy\, u_0^2(y)e^{2u_0^2(y)} - \int\limits_\Omega\int dx\, dy\, G(x,y)u_0(x)u_0(y)e^{u_0^2(x)+u_0^2(y)}}.$$

Доказательство.

Рассмотрим сначала задачу (3.37), которая в ослабленном смысле эквивалентна следующему интегральному уравнению:

$$u(x,t) = u_0(x) + \int\limits_0^t ds\, ue^{u^2} - \int\limits_0^t ds \int\limits_\Omega dy\, G(x,y)ue^{u^2}. \tag{3.39}$$

Для доказательства локальной во времени однозначной разрешимости уравнения (3.39) в классе $\mathbb{C}([0,\mathrm{T};\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})\cap\mathbb{C}_0(\overline{\Omega}))$ нужно воспользоваться методом сжимающих отображений. Заметим, что уравнение (3.39) близко к уравнению (3.6). Поэтому, рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 13, возьмем в качестве банахова пространства в методе сжимающих отображений следующее пространство:

$$\mathbb{B} \equiv \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})\cap\mathbb{C}_0(\overline{\Omega}))$$

с нормой

$$\|\, u\,\|_{\mathrm{T}} \equiv \sup_{x\in\Omega, t\in[0,\mathrm{T}]} |\nabla_x u(x,t)|.$$

В результате получим, что существует единственное локальное во времени решение интегрального уравнения (3.39) класса $\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})\cap\mathbb{C}(\overline{\Omega})$.

Далее, используя стандартный алгоритм продолжения решения задачи (3.39) во времени, получим, что найдется такое максимальное $\mathrm{T}_0 > 0$, что существует единственное решение задачи (3.39) класса

$$u(x,t) \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})\cap\mathbb{C}_0(\overline{\Omega}))$$

для любого $\mathrm{T}\in(0,\mathrm{T}_0)$. Причем либо $\mathrm{T}_0 = +\infty$, либо $\mathrm{T}_0 < +\infty$ и в последнем случае имеет место предельное равенство (3.38). Тем самым первая часть теоремы доказана.

Докажем теперь вторую часть теоремы. С этой целью рассмотрим интегродифференциальное уравнение (3.39). Предположим, что $u(x,t)\in\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T};\mathbb{C}_0(\overline{\Omega})\cap\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}))$ — локально существуюшее ослабленное решение задачи (3.39), которое действительно существует в силу первой части теоремы. Теперь умножим обе части уравнения (3.37) на $u\exp(u^2)$ и проинтегрируем по области Ω. В результате получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega dy\, e^{u^2} = \int\limits_\Omega dx\, u^2\exp(2u^2) -$$

$$-\int\limits_{\Omega}\int dx\,dy\,G(x,y)u(x,t)\exp(u^2(x,t))u(y,t)\exp(u^2(y,t)). \quad (3.40)$$

Умножим обе части равенства (3.37) на $(ue^{u^2})'$ и проинтегрируем по области Ω, тогда получим

$$\int\limits_{\Omega} dx\left[(u')^2e^{u^2}+2(u')^2u^2e^{u^2}\right]=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mathrm{F}, \quad (3.41)$$

где

$$\mathrm{F}\equiv\int\limits_{\Omega} dx\,u^2\exp(2u^2)-$$

$$-\int\limits_{\Omega}\int dx\,dy\,G(x,y)u(x,t)\exp(u^2(x,t))u(y,t)\exp(u^2(y,t)).$$

Рассмотрим более детально условие $\mathrm{F}(0)>0$, при котором из (3.41) вытекает, что $\mathrm{F}(t)>0$. Введем обозначение: $v=u\exp(u^2)$. В силу определения ослабленное решение принадлежит классу $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})\cap$ $\cap\,\mathbb{C}_0(\overline{\Omega}))$, поэтому $v\in\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}_0^1(\Omega))$. Мы можем представить v в виде ряда по собственным функциям первой краевой задачи для оператора Лапласа в области Ω:

$$v=\sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{c}_k(t)w_k,\quad \triangle w_k+\lambda_k w_k=0,\quad w_k\big|_{\partial\Omega}=0,$$
$$\|\,w_k\,\|_2=1,\ (w_{k_1},w_{k_2})_2=\delta_{k_1k_2}.$$

Подставим указанный ряд для v в условие

$$\mathrm{F}\equiv\int\limits_{\Omega} dx\,u^2\exp(2u^2)-$$

$$-\int\limits_{\Omega}\int dx\,dy\,G(x,y)u(x)\exp(u^2(x))u(y)\exp(u^2(y))>0,$$

тогда после ряда очевидных преобразований получим неравенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty}|\mathrm{c}_k(t)|^2-\sum_{k=1}^{+\infty}|\mathrm{c}_k(t)|^2\frac{1}{1+\lambda_k}>0,$$

которое выполняется за исключением тривиального случая, когда $u_0=$ $=0$. Из энергетических равенств (3.40), (3.41) вытекает следующее обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка:

$$\Phi\Phi''-2(\Phi')^2\geqslant 0,\quad \Phi\equiv\int\limits_{\Omega} dx\,\exp(u^2(x,t)),$$

интегрированием которого получим

$$\Phi \geqslant \frac{1}{\Phi_0^{-1} - \mathrm{E}_0 t}, \quad \mathrm{E}_0 \equiv \frac{\Phi'(0)}{\Phi_0^2}. \tag{3.42}$$

Из (3.42) вытекает, что T_2 равно

$$\mathrm{T}_2 \equiv \frac{1}{2} \frac{\int\limits_\Omega dy\, u_0^2(y) \exp(2u_0^2(y))}{\int\limits_\Omega dy\, u_0^2(y) e^{2u_0^2(y)} - \int\limits_\Omega \int dx\, dy\, G(x,y) u_0(x) u_0(y) e^{u_0^2(x)+u_0^2(y)}}.$$

Теорема доказана.

§ 4. Разрушение решения неоднородного нелинейного уравнения псевдопараболического типа

В данном параграфе рассматривается первая начально-краевая задача для нелинейного неоднородного уравнения псевдопараболического типа. Получены достаточные условия разрушения решения рассматриваемой задачи.

Целью настоящего параграфа является доказательство локальной и глобальной разрешимости следующей начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\triangle u - u) + u^3 = f(x), \tag{4.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{4.2}$$

где $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей класса $\mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0,1]$, $N \geqslant 1$. Данная задача описывает квазистационарные процессы в полупроводниках при наличии стационарного распределения источников тока свободных зарядов.

4.1. Однозначная локальная разрешимость задачи. Введем необходимые для дальнейшего определения и предположения, а также получим вспомогательные результаты. Пусть заданы гильбертово пространство $\{\mathbb{H}_0^1(\Omega), \|\cdot\|\}$ и его сопряженное $\{\mathbb{H}^{-1}(\Omega), \|\cdot\|_*\}$ Обозначим скобки двойственности между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и ему сопряженным $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (см., например, [Робертсон]) В дальнейшем будем использовать следующие обозначения:

$$\|\cdot\|_{\mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{V})} \equiv \|\cdot\|_{\mathrm{T}}, \quad \|\cdot\|_{\mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{V}^*)} \equiv \|\cdot\|_{\mathrm{T}}^* .$$

Заметим, что оператор $\mathrm{A} \equiv -\triangle + \mathrm{I}$ действует из $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ в $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ и является радиально непрерывным (см., например, [Гаевский]). Отсюда получаем

$$\langle \mathrm{A}h_1 - \mathrm{A}h_2, h_1 - h_2\rangle \geqslant -\langle \triangle h_1 - \triangle h_2, h_1 - h_2\rangle = \| h_1 - h_2 \|^2, \tag{4.3}$$

т. е. оператор $\mathrm{A} : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ является сильно монотонным.

Из (4.3) вытекает, что для оператора A в силу следствия 2.3. из [Гаевский, с. 97] определен обратный оператор $\mathrm{A}^{-1} : \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \to \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, причем оператор A^{-1} является липшиц-непрерывным:

$$\| \mathrm{A}^{-1}x - \mathrm{A}^{-1}y \| \leqslant \| x - y \|_* \quad \forall x, y \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega). \tag{4.4}$$

Рассмотрим оператор

$$\mathrm{F}(u) \equiv u^3.$$

Докажем, что оператор $\mathrm{F} : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ является ограниченно липшиц-непрерывным. С этой целью заметим, что

$$\| \mathrm{F}(u) - \mathrm{F}(v) \|_* \leqslant \| u^3 - v^3 \|_* .$$

Справедливы следующие неравенства:

$$\| u^3 - v^3 \|_{4/3} \leqslant 3 \| g(u-v) \|_{4/3}, \quad g = \max(|u|^2, |v|^2),$$
$$\| g(u-v) \|_p \leqslant \| g \|_{r_1 p} \| u - v \|_{r_2 p}, \quad p = 4/3, \quad r_2 p = 3,$$
$$r_2 = 3, \quad r_1 = 3/2, \quad r_1 p = 2,$$
$$\| |u|^2 u - |v|^2 v \|_{4/3} \leqslant 3 \| g \|_2 \| u - v \|_4,$$
$$\| g \|_2 \leqslant 2(\max\{\| u \|_4, \| v \|_4\})^2.$$

Таким образом, при условии $\mathrm{N} \leqslant 4$ имеем

$$\| |u|^2 u - |v|^2 v \|_* \leqslant \overline{\mu}(\mathrm{R}) \| u - v \|, \quad \overline{\mu}(\mathrm{R}) = c_1 \mathrm{R}^2, \quad \mathrm{R} = \max\{\| u \|, \| v \|\}.$$

Поэтому

$$\| \mathrm{F}(u) - \mathrm{F}(v) \|_* \leqslant \mu(\mathrm{R}) \| u - v \|, \quad \mu(\mathrm{R}) = c_1 \mathrm{R}^2, \ \ \mathrm{N} \leqslant 4. \tag{4.5}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 17. *Для любого* $u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ $(\mathrm{N} \leqslant 4)$ *и* $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ *найдется такое* $\mathrm{T}_{u_0} > 0$, *что для любого* $0 < \mathrm{T} < \mathrm{T}_{u_0}$ *задача* (4.1)–(4.2) *имеет единственное решение класса* $\mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$.

Доказательство. Рассмотрим эквивалентную (4.1), (4.2) в классе

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$$

задачу

$$\partial u(t)/\partial t = \mathbb{G}(u)(t), \quad u(x,0) = u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \tag{4.6}$$
$$\forall\, t \in [0, \mathrm{T}], \quad u \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{H}_0^1(\Omega)),$$

где $\mathbb{G}(u) = \mathrm{A}^{-1}\left(\mathrm{F}(u)(t)\right) - \mathrm{A}^{-1}f$ в силу (4.4).

Отметим, что из (4.3) и (4.5) следует цепочка неравенств

$$\lim_{t \to t_0} \| \mathbb{G}(u)(t) - \mathbb{G}(u)(t_0) \| \leqslant \lim_{t \to t_0} \| \mathrm{F}(u)(t) - \mathrm{F}(u)(t_0) \|_* \leqslant$$
$$\leqslant \mu(\mathrm{R}) \lim_{t \to t_0} \| u(t) - u(t_0) \| = 0, \ \ \mathrm{R} = \max\{\| u(t_0) \|, \| u(t) \|\}.$$

Значит, $\mathbb{G} : \mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}_0^1(\Omega)) \to \mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}_0^1(\Omega))$.

Введем следующее множество:

$$\mathbb{B}_\mathrm{R} = \{u(t) \in \mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}_0^1(\Omega)) : \| u \|_\mathrm{T} \leqslant \mathrm{R}\}.$$

Докажем, что оператор

$$\mathbb{U}(u) \equiv u_0 + \int\limits_0^t ds\, \mathbb{G}(u)(s), \quad t \in [0,\mathrm{T}],$$

действует из $\mathbb{B}_\mathrm{R}$ в $\mathbb{B}_\mathrm{R}$ и является сжимающим на $\mathbb{B}_\mathrm{R}$. Действительно, поскольку

$$\mathbb{G} : \mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}_0^1(\Omega)) \to \mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}_0^1(\Omega)),$$

то, очевидно,

$$\mathbb{U} : \mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}_0^1(\Omega)) \to \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}_0^1(\Omega)).$$

С другой стороны,

$$\| \mathbb{U}(u) \|_\mathrm{T} \leqslant \| u_0 \| + \int\limits_0^\mathrm{T} ds\ \| \mathbb{G}(u) \|\,(s) \leqslant \| u_0 \| + \mathrm{T} \sup_{t\in[0,\mathrm{T}]} \| \mathbb{G}(u) \|\,(t),$$

$$\| \mathbb{G}(u) \|\,(t) \leqslant c_1 \| u \|^3 + \| f \| .$$

Поэтому

$$\| \mathbb{U} \|_\mathrm{T} \leqslant \| u_0 \| + \mathrm{T}c_1\mathrm{R}^3 + \mathrm{T} \| f \| .$$

Пусть $\| u_0 \| \leqslant \mathrm{R}/3$, и $\mathrm{R} > 0$ выбрано настолько большим, что $\| f \| \leqslant \mathrm{R}/3$ и $\mathrm{T} < 1/(3c_1\mathrm{R}^2)$, тогда при достаточно большом $\mathrm{R} > 0$ и малом $\mathrm{T} > 0$ имеем

$$\| \mathbb{U} \|_\mathrm{T} \leqslant \mathrm{R}.$$

Таким образом, $\mathbb{U} : \mathbb{B}_\mathrm{R} \to \mathbb{B}_\mathrm{R}$.

Докажем теперь, что оператор $\mathbb{U}$ сжимающий на $\mathbb{B}_\mathrm{R}$. Пусть $u, v \in \in \mathbb{B}_\mathrm{R}$, тогда в силу (4.4), (4.5) имеем

$$\| \mathbb{U}(u) - \mathbb{U}(v) \|_\mathrm{T} \leqslant \int\limits_0^\mathrm{T} dt\ \| \mathbb{G}(u) - \mathbb{G}(v) \| \leqslant \int\limits_0^\mathrm{T} dt\ \| \mathrm{F}(u) - \mathrm{F}(v) \|_*\,(t) \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{T}c_1\mathrm{R}^2 \| u - v \|_\mathrm{T} .$$

Из последнего неравенства при $\mathrm{T} < (2c_1\mathrm{R}^2)^{-1}$ получаем

$$\| \mathbb{U}(u) - \mathbb{U}(v) \|_\mathrm{T} < 1/2 \| u - v \|_\mathrm{T} .$$

Таким образом, оператор $\mathbb{U}$ сжимающий на $\mathbb{B}_\mathrm{R}$. Поэтому, в силу теоремы о сжимающем отображении, для любого $u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ найдется такое $\mathrm{T}_{u_0} > 0$, что существует единственное решение задачи (4.6).

Теорема доказана.

4.2. Разрушение сильного обобщенного решения задачи (4.1)–(4.2). Введем обозначения

$$\mathrm{E}(t) \equiv \| \nabla u \|_2^2 + \| u \|_2^2, \quad \mathrm{E}_0 \equiv \mathrm{E}(0).$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 18. *Пусть выполнены условия теоремы* 18. *Предположим, кроме того, что выполнены следующие условия:*

$$\frac{1}{4} \| u_0 \|_4^4 > \int\limits_\Omega dx\, f(x) u_0,$$

$$\| u_0 \|_4^4 > \int\limits_\Omega dx\, f(x) u_0(x) + \frac{1}{\sqrt{3}} \| f \|_2 \left[\| \nabla u_0 \|_2^2 + \| u_0 \|_2^2 \right]^{1/2},$$

тогда $\mathrm{T}_{u_0} \in (0, \mathrm{T}_1]$ *и справедливо предельное равенство*

$$\lim_{t \uparrow \mathrm{T}_{u_0}} \mathrm{E}(t) = +\infty,$$

где

$$\mathrm{T}_1 \equiv \mathrm{Z}_0 \mathrm{A}^{-1}, \quad \mathrm{Z}_0 \equiv \mathrm{E}_0^{1-\alpha_1},$$

$$\mathrm{A} \equiv [(\mathrm{Z}_0')^2 - \frac{2\gamma_1}{\alpha_2 + 1} \mathrm{Z}_0{}^{1+\alpha_2}]^{1/2}, \quad \mathrm{Z}_0' = (1 - \alpha_1) \mathrm{E}_0^{-\alpha_1} \mathrm{E}_0',$$

$$\mathrm{E}_0' \equiv \| u_0 \|_4^4 > \int\limits_\Omega dx\, f(x) u_0,$$

$$\alpha_1 = 5/4, \ \beta_1 = 3 \| f \|_2^2, \ \ \gamma_1 = \frac{3}{4} \| f \|_2^2, \ \ \alpha_2 = 5.$$

Доказательство.

Умножим уравнение (4.1) «скалярно» на u и u_t' относительно скобок двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$ между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$. Тогда с учетом результата теоремы 18 и условия (4.2), интегрируя по частям, получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\| \nabla u \|_2^2 + \| u \|_2^2 \right] = \| u \|_4^4 - \int\limits_\Omega dx\, f(x) u, \tag{4.7}$$

$$\| \nabla u' \|_2^2 + \| u' \|_2^2 = \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \| u \|_4^4 - \int\limits_\Omega dx\, f(x) u'. \tag{4.8}$$

Рассмотрим детально равенство (4.8). С учетом уравнения (4.7) справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\| \nabla u' \|_2^2 + \| u' \|_2^2 \leqslant \frac{1}{8}\mathrm{E}'' + \frac{1}{4}\int\limits_\Omega dx\, f(x)u' - \int\limits_\Omega dx\, f(x)u' \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{8}\mathrm{E}'' + \frac{3}{4}\left[\frac{\varepsilon}{2}\| u' \|_2^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\| f \|_2^2\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{8}\mathrm{E}'' + \frac{3\varepsilon}{8}\left[\| \nabla u' \|_2^2 + \| u' \|_2^2\right] + \frac{3}{8\varepsilon}\| f \|_2^2 . \quad (4.9)$$

Поскольку по условию

$$\frac{1}{4}\| u_0 \|_4^4 > \int\limits_\Omega dx\, f(x)u_0,$$

то из (4.8) получим

$$\frac{1}{4}\| u \|_4^4 > \int\limits_\Omega dx\, f(x)u,$$

а из равенства (4.7) приходим к выводу, что

$$\mathrm{E}'(t) \geqslant 0. \quad (4.10)$$

В силу неравенства Коши–Шварца [Морен] получим следующее неравенство:

$$\frac{1}{4}(\mathrm{E}')^2 \leqslant \mathrm{E}\left[\| \nabla u' \|_2^2 + \| u' \|_2^2\right]. \quad (4.11)$$

Из (4.9) и (4.11) вытекает обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка

$$\frac{1}{4}\left[1 - \frac{3\varepsilon}{8}\right](\mathrm{E}')^2 \leqslant \mathrm{E}\left[\frac{1}{8}\mathrm{E}'' + \frac{3}{8\varepsilon}\| f \|_2^2\right],$$

которое для удобства перепишем в следующем виде:

$$\mathrm{E}\mathrm{E}'' - \alpha_1(\mathrm{E}')^2 + \beta_1\mathrm{E} \geqslant 0, \quad (4.12)$$

где

$$\alpha_1 \equiv 2\left[1 - \frac{3\varepsilon}{8}\right], \quad \beta_1 \equiv \frac{3}{\varepsilon}\| f \|_2^2, \quad \alpha_1 > 1,$$

при $\varepsilon \in (0, 4/3)$. Из (4.12) получим следующее неравенство:

$$\frac{1}{1-\alpha_1}\left(\mathrm{E}^{1-\alpha_1}\right)'' + \beta_1\mathrm{E}^{-\alpha_1} \geqslant 0. \quad (4.13)$$

Введем обозначение

$$\mathrm{Z}(t) \equiv \mathrm{E}^{1-\alpha_1}. \quad (4.14)$$

С учетом обозначения (4.14) из неравенства (4.13) получим

$$-\mathrm{Z}'' + \gamma_1\mathrm{Z}^{\alpha_2} \geqslant 0, \quad (4.15)$$

где

$$\alpha_2 \equiv \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - 1}, \quad \gamma_1 \equiv (\alpha_1 - 1)\beta_1.$$

Отметим, что $\mathrm{Z}' = (1-\alpha_1)\mathrm{E}^{-\alpha_1}\mathrm{E}' \leqslant 0$ в силу (4.10). Теперь умножим обе части неравенства (4.15) на Z', тогда получим неравенство

$$(\mathrm{Z}')^2 \geqslant \mathrm{A}^2 + \frac{2\gamma_1}{\alpha_2+1}\mathrm{Z}^{1+\alpha_2}, \quad \mathrm{A}^2 \equiv (\mathrm{Z}_0')^2 - \frac{2\gamma_1}{\alpha_2+1}{\mathrm{Z}_0}^{1+\alpha_2} > 0. \quad (4.16)$$

Получим теперь оптимальное условие, при котором $\mathrm{A}^2 > 0$. Из (4.16), (4.14), (4.7) получим

$$(1-\alpha_1)^2 4\mathrm{E}_0^{-2\alpha_1}\left[\| u_0 \|_4^4 - \int\limits_\Omega dx\, f(x)u_0\right]^2 > \frac{2(\alpha_1-1)^2\beta_1}{2\alpha_1-1}\mathrm{E}_0^{-2\alpha_1+1}.$$

Отсюда следует

$$4\left[\| u_0 \|_4^4 - \int\limits_\Omega dx\, f(x)u_0\right]^2 > \frac{2\beta_1}{2\alpha_1-1}\mathrm{E}_0. \quad (4.17)$$

Рассмотрим функцию

$$Q(\varepsilon) = \frac{2\beta_1}{2\alpha_1-1} = \frac{2\,\| f \|_2^2}{3\varepsilon(1-\varepsilon/2)}.$$

Минимум этой функции достигается в точке $\varepsilon = 1$. Из (4.17) получим

$$\| u_0 \|_4^4 > \int\limits_\Omega dx\, f(x)u_0(x) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\| f \|_2 \left[\| \nabla u_0 \|_2^2 + \| u_0 \|_2^2\right]^{1/2}. \quad (4.18)$$

Из неравенства (4.16) при $\varepsilon_0 = 1$ получим следующие неравенства:

$$-\mathrm{Z}' \geqslant \mathrm{A}, \quad \mathrm{Z}(t) \leqslant \mathrm{Z}_0 - \mathrm{A}t. \quad (4.19)$$

Из (4.18), (4.19) вытекает утверждение теоремы.

Теорема доказана.

4.3. Разрушение классического решения задачи (4.1)–(4.2). В этом пункте мы докажем, что задача (4.1), (4.2) однозначно разрешима в классическом смысле при некоторых условиях на начальную функцию $u_0(x)$ и функцию $f(x)$. Причем решение существует локально во времени.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 19. *Пусть* $u_0(x) \in \mathbb{C}_0(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}^{(2)}(\Omega)$, $f(x) \in \in \mathbb{C}_0(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})$. *Тогда найдется такое максимальное* T_{00}, *что существует единственное классическое решение задачи* (4.1), (4.2) *класса* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}_0(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}))$ *для любого* $\mathrm{T} \in$

$\in (0, \mathrm{T}_{00})$. *Причем* $\mathrm{T}_{00} \in [\mathrm{T}_2, \mathrm{T}_1]$ *в том случае, если выполнены условия на начальную функцию*

$$\frac{1}{4} \parallel u_0 \parallel_4^4 > \int\limits_\Omega dx\, f(x) u_0,$$

$$\parallel u_0 \parallel_4^4 > \int\limits_\Omega dx\, f(x) u_0(x) + \frac{1}{\sqrt{3}} \parallel f \parallel_2 \left[\parallel \nabla u_0 \parallel_2^2 + \parallel u_0 \parallel_2^2 \right]^{1/2},$$

где величина T_1 *определена в формулировке теоремы* 19, *а величина* T_2 *является первым в порядке возрастания корнем кубического уравнения*

$$\mathrm{T}_2 2\mathrm{C}_1 \left(\sup_{x\in\Omega} |u_0| + \mathrm{T}_2 \mathrm{C}_1 \sup_{x\in\Omega} |f(x)| \right)^2 = 1.$$

При этом справедливо предельное равенство

$$\lim_{t \uparrow \mathrm{T}_{00}} \sup_{x\in\Omega} |u(x,t)| = +\infty. \tag{4.20}$$

Доказательство.

В классическом смысле задача (4.1), (4.2) эквивалентна интегродифференциальному уравнению

$$u(x,t) = u_0(x) - t \int\limits_\Omega dy\, G(x,y) f(y) + \int\limits_0^t ds \int\limits_\Omega dy\, G(x,y) u^3. \tag{4.21}$$

Методом сжимающих отображений нетрудно доказать, что существует единственное решение уравнения (4.21) класса

$$u(x,t) \in \mathbb{C}([0,\mathrm{T}]; \mathbb{C}_0(\overline{\Omega}))$$

для любого $\mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_{00})$. Докажем теперь, что $\mathrm{T}_{00} < +\infty$ и тем самым выполнено предельное равенство (4.20). Действительно, из вида интегрального уравнения (4.21) вытекает, что

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}]; \mathbb{C}_0(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}))$$

для любого $\mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_{00})$. Предположим теперь, что $\mathrm{T}_{00} = +\infty$, но тогда $u(x,t)$ является глобальным во времени сильным обобщенным решением, что противоречит результату теоремы 19. Значит, $\mathrm{T}_{00} < +\infty$ и, более того, $\mathrm{T}_{00} \leqslant \mathrm{T}_1$.

Для получения оценки снизу на время разрушения решения рассмотрим интегральное уравнение (4.21), из которого вытекает следующее интегральное неравенство:

$$w(t) \leqslant v_0(\mathrm{T}) + \mathrm{C}_1 \int\limits_0^t ds\, w^3(s), \tag{4.22}$$

где

$$v_0 \equiv \sup_{x\in\Omega}|u_0| + \mathrm{TC}_1 \sup_{x\in\Omega}|f|, \quad w(t) \equiv \sup_{x\in\Omega}|u(x,t)|, \quad \mathrm{C}_1 = \sup_{x\in\Omega}\int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y).$$

Из (4.22) с учетом теоремы Гронуолла–Беллмана–Бихари [Демидович] вытекает следующая оценка сверху

$$w(t) \leqslant \frac{v_0(\mathrm{T})}{\left[1 - 2\mathrm{C}_1 v_0^2(\mathrm{T})t\right]^{1/2}}, \quad t \in [0,\mathrm{T}]. \tag{4.23}$$

Из (4.23) вытекает оценка снизу на время разрушения решения.

Теорема доказана.

§ 5. Разрушение решения нелинейного нелокального уравнения псевдопараболического типа

В данном параграфе рассматривается первая начально-краевая задача для нелинейного нелокального уравнения псевдопараболического типа. Доказана локальная однозначная разрешимость задачи. Причем при некоторых условиях на нелинейности доказана разрешимость в любом конечном цилиндре. При других условиях доказано разрушение решения за конечное время. Получены двусторонние оценки на время разрушения решения задачи, а также оптимальные двусторонние оценки на скорость разрушения при некоторых условиях на нелинейности.

Целью настоящего параграфа является получение оптимального результата типа теорем существования–несуществования для следующей нелокальной задачи:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle u - |u|^q u\right) - \| \nabla u \|_2^{2p} \triangle u = 0, \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \tag{5.1}$$

где $p > 1$, $q > 0$, причем $\Omega \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$, $\delta \in (0,1]$.

В зависимости от q, p мы получим результаты о глобальной во времени разрешимости, о разрешимости в конечном цилиндре $\Omega \times [0,\mathrm{T}]$ $(0 < \mathrm{T} < +\infty$ фиксированное), о разрушении решения задачи за бесконечное время и о разрушении решения задачи за конечное время.

Данная задача описывает квазистационарные процессы в полупроводниках при наличии нелокальной связи проводимости среды σ и напряженности электрического поля $\mathbf{E}$.

5.1. Однозначная локальная разрешимость задачи. Введем необходимые для дальнейшего изложения определения и предположения, а также получим вспомогательные результаты. Пусть заданы гильбертово пространство $\{\mathbb{H}_0^1(\Omega), \|\cdot\|\}$ и ему сопряженное $\{\mathbb{H}^{-1}(\Omega), \|\cdot\|_*\}$. Обозначим скобки двойственности между гильбер-

товыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и ему сопряженным $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (см., например, [Робертсон]). В дальнейшем будем использовать следующие обозначения:

$$\|\cdot\|_{\mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}_0^1)}\equiv\|\cdot\|_{\mathrm{T}},\quad \|\cdot\|_{\mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}^{-1})}\equiv\|\cdot\|_{\mathrm{T}}^{*}.$$

Заметим, что оператор $\mathrm{A}\equiv-\triangle+(q+1)|u|^q\mathrm{I}$ действует из $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ в $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ при условии $0\leqslant q\leqslant 4/(N-2)$ при $N\geqslant 3$ и $0\leqslant q$ при условии $N=1,2$ и является радиально непрерывным (см., например, [Гаевский]). Докажем сначала, что оператор $\mathrm{B}'(u)\equiv(q+1)|u|^q\mathrm{I}$ действует из $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ в $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$. С этой целью докажем, что

$$\mathrm{B}':\mathbb{L}^{q+2}(\Omega)\to\mathcal{L}(\mathbb{L}^{q+2}(\Omega),\mathbb{L}^{(q+2)(q+1)^{-1}}(\Omega)),$$

где

$$\langle\mathrm{B}'(u)h_1,h_2\rangle=(q+1)\langle|u|^q h_1,h_2\rangle\quad\forall\,u,\ h_1,\ h_2\in\mathbb{L}^{q+2}(\Omega),$$
$$\|\,\mathrm{B}'(u)h\,\|_{p_1}=(q+1)\,\|\,|u|^q h\,\|_{p_1}\leqslant c_1\,\|\,|u|^q\,\|_{p_2}\|\,h\,\|_{p_3},\quad p_2^{-1}+p_3^{-1}=p_1^{-1},$$
$$p_1=(q+2)(q+1)^{-1},\ p_3=q+2,\ p_2^{-1}=q/(q+2),\ p_2q=q+2,$$
$$\forall\,h\in\mathbb{L}^{q+2}(\Omega).$$

Отсюда получаем

$$\|\,\mathrm{B}'(u)h\,\|_{(q+2)(q+1)^{-1}}\leqslant c_1\,\|\,u\,\|_{q+2}^q\|\,h\,\|_{q+2}\,.$$

Потребуем дополнительно, чтобы $q>0$ при $N=2$ и $0<q\leqslant 4/(N-2)$ при $N\geqslant 3$, тогда, в силу теоремы вложения Соболева, $\mathbb{H}_0^1(\Omega)\subset\subset\mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$, а значит, $\mathbb{L}^{(q+2)(q+1)^{-1}}(\Omega)\subset\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$. Поэтому справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\|\,\mathrm{B}'(u)h\,\|_*\leqslant c_2\,\|\,\mathrm{B}'(u)h\,\|_{(q+2)/(q+1)}\leqslant$$
$$\leqslant c_2c_1\,\|\,u\,\|_{q+2}^q\|\,h\,\|_{q+2}\leqslant c_3\,\|\,u\,\|^q\|\,h\,\|\,.$$

Следовательно,

$$\mathrm{B}':\mathbb{H}_0^1(\Omega)\to\mathcal{L}(\mathbb{H}_0^1(\Omega),\mathbb{H}^{-1}(\Omega)).$$

Таким образом, оператор $\mathrm{A}\in\mathcal{L}(\mathbb{H}_0^1(\Omega),\mathbb{H}^{-1}(\Omega))$ и, очевидно, радиально непрерывен. В силу монотонности оператора

$$\mathrm{B}'(u):\mathbb{L}^{q+2}(\Omega)\to\mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\Omega)$$

и того факта, что при $u,\ h_1,\ h_2\in\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ выполнено равенство

$$\langle\mathrm{B}'(u)h_1-\mathrm{B}'(u)h_2,h_1-h_2\rangle=(q+1)\langle|u|^q(h_1-h_2),h_1-h_2\rangle\,,$$

где скобки двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle$ между $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ являются скобками двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$ и $\mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\Omega)$ для элементов из $\mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$ и $\mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\Omega)$, а значит,

в точности совпадают со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ в $\mathbb{L}^2(\Omega)$, имеют место следующие соотношения:

$$\langle \mathrm{B}'(u)h_1 - \mathrm{B}'(u)h_2, h_1 - h_2\rangle = \\ = (q+1)\langle |u|^q(h_1-h_2), h_1-h_2\rangle = (q+1)(|u|^q(h_1-h_2), h_1-h_2) \geqslant 0.$$

Отсюда получаем

$$\langle \mathrm{A}h_1 - \mathrm{A}h_2, h_1-h_2\rangle \geqslant -\langle \triangle h_1 - \triangle h_2, h_1-h_2\rangle = \| h_1-h_2\|^2,$$

т. е. оператор $\mathrm{A}: \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ является сильно монотонным.

Из указанных свойств оператора A в силу следствия 2.3. из [Гаевский] вытекает, что обратный оператор $\mathrm{A}^{-1}: \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \to \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, причем оператор A^{-1} является липшиц-непрерывным:

$$\| \mathrm{A}^{-1}x - \mathrm{A}^{-1}y\| \leqslant \| x-y\|_* \quad \forall x, y \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega). \tag{5.2}$$

Рассмотрим теперь оператор

$$\mathrm{F}u \equiv -\| \nabla u\|_2^{2p} \triangle u.$$

Докажем, что оператор $\mathrm{F}: \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ является ограниченно липшиц-непрерывным. С этой целью заметим, что

$$\| \mathbb{F}(u_1) - \mathbb{F}(u_2)\|_* \leqslant \| \|\nabla u_1\|_2^{2p} \nabla u_1 - \|\nabla u_2\|_2^{2p}\nabla u_2\|_2 \leqslant \\ \leqslant \|\nabla u_1\|_2^{2p} \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_2 + \|\nabla u_2\|_2 \left| \|\nabla u_1\|_2^{2p} - \|\nabla u_2\|_2^{2p}\right| \leqslant \\ \leqslant \|\nabla u_1\|_2^{2p}\|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_2 + \\ + \mathrm{C}_1(\Omega, p)\max\{\|\nabla u_1\|_2^{2p}, \|\nabla u_2\|_2^{2p}\}\|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_2 .$$

Таким образом, приходим к выводу, что

$$\| \mathbb{F}(u_1) - \mathbb{F}(u_2)\|_* \leqslant \mathrm{C}_2 \mathrm{R}^{2p} \| u_1 - u_2\|, \tag{5.3}$$

где $\mathrm{R} = \max\{\|\nabla u_1\|_2, \|\nabla u_2\|_2\}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 20. *Для любой начальной функции* $u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ $0 < q < 4/(N-2)$ *при* $N \geqslant 3$, $0 < q$ *при* $N = 2$ *и* $1 < p$, *найдется такое* $\mathrm{T}_{u_0} > 0$, *что для любого* $0 < \mathrm{T} < \mathrm{T}_{u_0}$ *задача* (5.1) *имеет единственное решение класса* $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$.

Доказательство.

Доказательство в силу (5.2), (5.3) в точности повторяет доказательства теоремы 8 пятой главы.

Теорема доказана.

5.2. Разрушение и глобальная разрешимость решения задачи (5.1). Введем обозначения:

$$\Phi(t) \equiv 2^{-1}\|\nabla u\|_2^2 + (q+1)/(q+2)\|u\|_{q+2}^{q+2}, \quad \Phi_0 \equiv \Phi(0),$$

$$\alpha \equiv \frac{2(p+1)}{q+2}, \quad \Phi'(0) = \| \nabla u_0 \|_2^{2(p+1)},$$

$$\| \nabla u \|_2 \leqslant \mathrm{B}_1 \| u \|_{q+2}, \quad \mathrm{B}_2 = \mathrm{B}_1^{2(p+1)} \left(\frac{q+2}{q+1}\right)^{\alpha}, \quad \mathrm{E}_0 \equiv \frac{\Phi'(0)}{\Phi_0^{\alpha}}.$$

Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 2 1 . *Пусть выполнены условия теоремы* 20, *тогда*

1) *при* $\alpha \in (0,1)$ *справедлива двусторонняя оценка*

$$\left[\Phi_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\mathrm{E}_0 t\right]^{1/(1-\alpha)} \leqslant \Phi(t) \leqslant \left[\Phi_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\mathrm{B}_2 t\right]^{1/(1-\alpha)};$$

2) *при* $\alpha = 1$ *справедлива двусторонняя оценка*

$$\Phi_0 \exp\{\mathrm{E}_0 t\} \leqslant \Phi(t) \leqslant \Phi_0 \exp\{\mathrm{B}_2 t\};$$

3) *при* $\alpha > 1$ *найдется такой момент времени* $\mathrm{T}_0 \in [\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2]$, *что справедливо предельное равенство*

$$\lim_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \Phi(t) = +\infty, \tag{5.4}$$

где

$$\mathrm{T}_1 = \frac{1}{p\, 2^{p+1} \Phi_0^p}, \quad \mathrm{T}_2 = \frac{1}{\alpha - 1} \frac{\Phi_0}{\Phi'(0)}.$$

Кроме того, в случае $\alpha \in (0,1]$ *задача* (5.1) *однозначно разрешима в любом конечном цилиндре* $(0,\mathrm{T}) \times \Omega$.

Д о к а з а т е л ь с т в о .

Умножением уравнения (5.1) на $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ и интегрированием по области Ω получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \nabla u \|_2^2 + \frac{q+1}{q+2}\frac{d}{dt} \| u \|_{q+2}^{q+2} = \| \nabla u \|_2^{2p+2}. \tag{5.5}$$

Теперь умножением уравнения (5.1) на $u_t(x,t) \in \mathbb{C}(0,\mathrm{T}; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ и интегрированием по области Ω получаем

$$\| \nabla u' \|_2^2 + (q+1) \int\limits_{\Omega} dx\, |u|^q (u_t')^2 = \frac{1}{2p+2}\frac{d}{dt} \| \nabla u \|_2^{2p+2}. \tag{5.6}$$

Справедливы следующие неравенства:

$$\left| \int\limits_{\Omega} dx\, \langle \nabla u, \nabla u_t \rangle \right|^2 \leqslant \| \nabla u \|_2^2 \| \nabla u_t \|_2^2, \tag{5.7}$$

$$\left| \int\limits_{\Omega} dx\, |u|^q u u_t \right|^2 \leqslant \| u \|_{q+2}^{q+2} \int\limits_{\Omega} dx\, |u|^q (u_t)^2.$$

Справедлива также цепочка неравенств

$$\left|\int\limits_\Omega dx\, u(-\triangle u+|u|^q u)_t\right|^2 \leqslant |(\nabla u,\nabla u_t)|^2+(q+1)^2|(|u|^q u,u_t)|^2+$$

$$+\,2(q+1)|(\nabla u,\nabla u_t)||(|u|^q u,u_t)|\leqslant \|\nabla u\|_2^2\|\nabla u_t\|_2^2+(q+1)^2(|u|^q,u_t^2)\times$$

$$\times\|u\|_{q+2}^{q+2}+2(q+1)\|\nabla u\|_2\|\nabla u_t\|_2\sqrt{(|u|^q,u_t^2)}\;\|u\|_{q+2}^{(q+2)/2}\leqslant$$

$$\leqslant(\|\nabla u_t\|_2^2+(q+1)\int\limits_\Omega dx\,|u|^q u_t^2)[\|\nabla u\|_2^2+(q+1)\|u\|_{q+2}^{q+2}]\leqslant$$

$$\leqslant(q+2)\left[\|\nabla u_t\|_2^2+(q+1)\int\limits_\Omega dx\,|u|^q(u_t)^2\right]\times$$

$$\times\left[\frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2+(q+1)/(q+2)\|u\|_{q+2}^{q+2}\right]. \quad (5.8)$$

Из (5.5)–(5.8) получим

$$\Phi''(t)\Phi(t)-\alpha(\Phi'(t))^2\geqslant 0,\quad \alpha\equiv\frac{2p+2}{q+2}. \quad (5.9)$$

Рассмотрим три случая: $2p>q$, $2p<q$, $2p=q$. Получим сначала оценки снизу.

Пусть выполнено первое условие: $\alpha\in(0,1)$. Интегрируя (5.9), получим

$$\frac{\Phi'}{\Phi^\alpha}\geqslant\frac{\Phi'(0)}{\Phi_0^\alpha}\equiv \mathrm{E}_0,$$

откуда с учетом (5.5) вытекает следующее неравенство:

$$\Phi(t)\geqslant\frac{1}{\left[\Phi_0^{1-\alpha}-\mathrm{E}_0(\alpha-1)t\right]^{1/(\alpha-1)}}.$$

Отсюда сразу же получаем (5.4) и оценку сверху на время разрушения сильного обобщенного решения задачи (5.1):

$$\mathrm{T}_2\equiv\frac{\Phi_0}{\Phi'(0)}\frac{1}{\alpha-1},$$

$$\Phi_0\equiv\Phi(0)=\frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2+\frac{q+1}{q+2}\|u_0\|_{q+2}^{q+2},\quad \Phi'(0)\equiv\|\nabla u_0\|_2^{2(p+1)}.$$

Рассмотрим теперь второй случай: $\alpha=1$, тогда из (5.9) следует

$$\frac{\Phi'}{\Phi}\geqslant\frac{\Phi'(0)}{\Phi_0}.$$

Интегрированием этого неравенства получим

$$\Phi \geqslant \Phi_0 \exp\left\{\frac{\Phi'(0)}{\Phi_0}t\right\}.$$

Наконец, рассмотрим третий случай: $\alpha > 1$, тогда из (5.9) получим

$$\Phi \geqslant \left(\Phi_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\mathrm{E}_0 t\right)^{1/(1-\alpha)}, \quad \mathrm{E}_0 = \frac{\Phi'(0)}{\Phi_0^{\alpha}}.$$

Получим теперь оценки сверху. Сначала рассмотрим случай $\alpha > 1$, тогда из (5.5) вытекает цепочка неравенств

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 + \int\limits_0^t ds \parallel \nabla u \parallel_2^{2(p+1)} \leqslant \Phi_0 + 2^{p+1}\int\limits_0^t ds\, \Phi^{p+1},$$

из которой получаем оценку снизу на время разрушения решения задачи (5.1):

$$\mathrm{T} \geqslant \mathrm{T}_1 = \frac{1}{p\, 2^{p+1}\Phi_0^p}.$$

Рассмотрим теперь случай $\alpha \in (0, 1]$. Тогда из (5.5) получим

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 + \int\limits_0^t ds \parallel \nabla u \parallel_2^{2(p+1)} (s).$$

Наконец, по условию $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$, причем $\parallel \nabla u \parallel_2 \leqslant \mathrm{B}_1 \parallel u \parallel_{q+2}$. С учетом данного вложения получим

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 + \mathrm{B}_1^{2(p+1)} \left(\frac{q+2}{q+1}\right)^{\alpha} \int\limits_0^t ds\, \Phi^{\alpha}(s). \tag{5.10}$$

Из (5.10) при $\alpha = 1$ получим

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 \exp\{\mathrm{B}_2 t\}, \quad \mathrm{B}_2 \equiv \mathrm{B}_1^{2(p+1)} \left(\frac{q+2}{q+1}\right)^{\alpha}.$$

Наконец, при $\alpha \in (0, 1)$ из (5.10) получим

$$\Phi(t) \leqslant \left[\Phi_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\mathrm{B}_2 t\right]^{1/(1-\alpha)}.$$

Докажем теперь разрешимость задачи (5.1) при $q \geqslant 2p$ в любом конечном цилиндре $\Omega \times [0, \mathrm{T}]$, $\mathrm{T} \in (0, +\infty)$. Предположим, что $\mathrm{T}_{u_0} <$

$< +\infty$. Для произвольного $\mathrm{T}^{'} \in (0, \mathrm{T}_{u_0})$ рассмотрим вспомогательное интегральное уравнение

$$u(x,t) = u(x,\mathrm{T}^{'}) + \int\limits_0^t ds\, G(u)(s). \tag{5.11}$$

Поскольку норма $\| \nabla u \|_2^2 (\mathrm{T}^{'})$ равномерно ограничена по $\mathrm{T}^{'} \in (0, \mathrm{T}_{u_0})$, можно выбрать такое $\mathrm{T}^* \in (0, \mathrm{T}_{u_0})$, что для любого $\mathrm{T}^{'} \in (0, \mathrm{T}_{u_0})$ интегральное уравнение будет иметь единственное решение класса $u(x,t) \in \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}^*]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$. Пусть $\mathrm{T}^{'} = \mathrm{T}_{u_0} - \mathrm{T}^*/2$, обозначим через $v(x,t)$ соответствующее решение интегрального уравнения (5.11) и определим $\widehat{u}(x,t)$ на сегменте $\overline{\Omega} \times [0, \mathrm{T}_{u_0} + \mathrm{T}^*/2]$:

$$\widehat{u}(x,t) = \{u(x,t),\ t \in [0,\mathrm{T}^{'}];\ \ v(x,t-\mathrm{T}^{'}),\ t \in [\mathrm{T}^{'}, \mathrm{T}_{u_0} + \mathrm{T}^*/2]\}.$$

По построению $\widehat{u}(x,t)$ является решением задачи (5.1) на отрезке $[0, \mathrm{T}_{u_0} + \mathrm{T}^*/2]$ и в силу локальной единственности является продолжением функции $u(x,t)$. Это противоречит максимальности отрезка $[0, \mathrm{T}_{u_0}]$. Полученное противоречие доказывает, что $\mathrm{T}_{u_0} = +\infty$.

Теорема доказана.

5.3. Скорость разрушения решения задачи (5.1) при условии $q = 0$. В этом пункте мы получим оптимальные двусторонние оценки на скорость разрушения сильного обобщенного решения задачи (5.1) при условии $q = 0$.

Введем обозначения:

$$\mathrm{M}(t^*) \equiv \sqrt{\| \nabla u \|_2^2 (t^*) + \| u \|_2^2 (t^*)}, \quad \gamma = \frac{1}{\mathrm{M}^{2p}(t^*)}, \tag{5.12}$$

$$\mathrm{E}_0 \equiv \frac{\| \nabla u_0 \|_2^{2p+2}}{\left[\| \nabla u_0 \|_2^2 + \| u_0 \|_2^2\right]^{p+1}}. \tag{5.13}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 22. *Пусть выполнены условия теоремы* 21. *Тогда при условии $q = 0$ справедливы двусторонние оценки на скорость разрушения решения задачи* (5.1):

$$[2p]^{-1/p} \leqslant [\mathrm{T}_0 - t]^{1/p} \left[\| \nabla u \|_2^2 + \| u \|_2^2\right] \leqslant [2p\mathrm{E}_0]^{-1/p}. \tag{5.13}$$

Доказательство.

Введем вспомогательную функцию

$$v_\gamma(s,x) = \frac{1}{\mathrm{M}(t^\star)} u(s\gamma + t^\star, x). \tag{5.14}$$

Непосредственной проверкой с учетом (5.12) и (5.14) можно убедиться, что $v_\gamma(s,x)$ удовлетворяет всем условиям следующей задачи:

$$[\triangle - \mathrm{I}]\frac{\partial v_\gamma}{\partial s} - \| \nabla v_\gamma \|_2^{2p} \triangle v_\gamma = 0,$$
$$v_\gamma(s,x)\Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{5.15}$$
$$v_\gamma\left(-\frac{t^\star}{\gamma}, x\right) = \frac{1}{M(t^\star)}u_0(x).$$

Докажем, что найдутся $c_1, c_2 > 0$ такие, что

$$0 < c_2 \leqslant \frac{d}{ds}\left[\| \nabla v_\gamma \|_2^2 (s) + \| v_\gamma \|_2^2 (s)\right]^{1/2} (s=0) \leqslant c_1 < +\infty. \tag{5.16}$$

Получим сначала оценку сверху. С этой целью умножим первое уравнение системы (5.15) на v_γ и проинтегрируем по области Ω получившееся уравнение с учетом граничного условия, в результате получим

$$\frac{d}{ds}\left[\| \nabla v_\gamma \|_2^2 (s) + \| v_\gamma \|_2^2 (s)\right]\Big|_{s=0} = 2 \| \nabla v_\gamma \|_2^{2p+2} (0) \leqslant 2.$$

Докажем теперь оценку снизу. Пусть $\varphi_\gamma(s) = \| \nabla v_\gamma \|_2^2 + \| v_\gamma \|_2^2$. Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\frac{d^2\varphi_\gamma(s)}{ds^2}\varphi_\gamma(s) - (p+1)\left(\frac{d\varphi_\gamma(s)}{ds}\right)^2 \geqslant 0,$$

из которого получаем

$$\frac{\varphi_\gamma'(s)}{\varphi_\gamma(s)^\alpha} \geqslant \frac{\varphi_\gamma'(s)}{\varphi_\gamma(s)^\alpha}\Big|_{s=-t^\star/\gamma} = \mathrm{E}_0, \quad \mathrm{E}_0 = 2\frac{\| \nabla u_0 \|_2^{2p+2}}{\left[\| \nabla u_0 \|_2^2 + \| u_0 \|_2^2\right]^{p+1}}.$$

Отсюда при $s = 0$ и из равенства $\varphi_\gamma(0) = 1$ приходим к выводу, что

$$\frac{d}{ds}[\| \nabla v_\gamma \|_2^2 + \| v_\gamma \|_2^2]^{1/2}(0) \geqslant \mathrm{E}_0.$$

Тем самым неравенство (5.16) доказано.

Неравенство (5.16) эквивалентно следующему неравенству:

$$0 < \mathrm{E}_0 \leqslant \frac{\mathrm{M}'(t^\star)}{\mathrm{M}(t^\star)^{2p+1}} \leqslant 1 < +\infty.$$

Откуда, интегрируя по $t^\star$ в пределах от t до T_0 :

$$\lim_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \mathrm{M}(t) = +\infty,$$

получим (5.13).

Теорема доказана.

§ 6. О существовании решения уравнения Лапласа с нелинейным динамическим граничным условием

В данном параграфе рассматривается начально-краевая задача для уравнения Лапласа с нелинейным неклассическим динамическим граничным условием. При некоторых условиях на исходные данные доказана глобальная во времени разрешимость. При некоторых других условиях на начальные данные доказано несуществование глобального во времени решения. Причем получен результат Фуджиты о несуществовании глобального во времени положительного решения даже для малых в некотором смысле начальных функций.

Рассмотрим систему уравнений (2.74), (2.75) при условиях $a = r_4 = a_4 = 0$ и $\overline{\lambda} = 1$:

$$\triangle u = 0, \quad x_3 > 0, \quad t > 0, \tag{6.1}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_3} + \frac{\partial u}{\partial x_3} + |u|^q u \right) \Big|_{x_3=0} = 0, \tag{6.2}$$

$$v(x^{'}, 0) = v_0(x^{'}), \quad x^{'} \in \mathbb{R}^2, \tag{6.3}$$

где $v(x^{'}, t) \equiv u(x_3, x^{'}, t)\Big|_{x_3=0}$, $x^{'} \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$. Данная задача описывает квазистационарные процессы на поверхности полупроводника.

6.1. Редукция задачи к системе интегральных уравнений. Решением задачи (6.1)–(6.3) мы будем называть функцию $u(x_3, x^{'}, t)$ из следующего класса.

Определение 8. Класс (K). При некотором $\mathrm{T} > 0$ для любого $t \in [0, \mathrm{T}]$, $u(x_3, x^{'}, t) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^3_+)$, причем $u(x_3, x^{'}, t)$ ограничена в полупространстве $x_3 > 0$, $x^{'} \equiv (x_1, x_2)$. Для любого $x^{'} \in \mathbb{R}^2$ — фиксированного $u(x_3, x^{'}, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}^1_+) \bigcap \mathbb{C}(\overline{\mathbb{R}}_+{}^1))$, $v(x^{'}, t) \equiv u(x_3, x^{'}, t)\Big|_{x_3=0}$, $v(x^{'}, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{W}^{1,\infty}((1 + |x^{'}|^2)^{\beta/(2(q+1))}; \mathbb{R}^2))$, $\beta > 2$. Причем граничное условие (6.2) понимается как поточечный предел при $(x^{'}, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, \mathrm{T}]$ — фиксированном при $x_3 \downarrow +0$. Кроме того, будем предполагать, что

$$v_0(x^{'}) \in \mathbb{W}^{2,\infty}((1 + |x^{'}|^2)^{\alpha/2}; \mathbb{R}^2), \quad \alpha > 2.$$

Теорема 23. *В классе* (K) *задача* (6.1)–(6.3) *эквивалентна системе интегральных уравнений*:

$$u(x^{'}, x_3, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} dy \, \frac{x_3 v_0(y) e^{-t}}{(x_3^2 + |x^{'} - y|^2)^{3/2}} +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t ds\int\limits_{\mathbb{R}^2} dy\,\frac{(|v|^q v)(y,s)e^{-(t-s)}}{\sqrt{x_3^2+|x'-y|^2}},\quad x_3>0, \tag{6.4}$$

$$v(x',t)=v_0(x')e^{-t}+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t ds\int\limits_{\mathbb{R}^2} dy\,\frac{(|v|^q v)(y,s)e^{-(t-s)}}{|x'-y|},\quad t\in[0,\mathrm{T}]. \tag{6.5}$$

Доказательство. Обозначим через $\widehat{u}(\xi)=\widehat{F}[u](\xi)$ преобразование Фурье по переменной $x'\equiv(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ в смысле распределений медленного роста $\mathcal{P}'(\mathbb{R}^2)$. Тогда применением к (6.1) преобразования Фурье по переменным x' получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\widehat{u}(\xi,x_3,t)-|\xi|^2\widehat{u}(\xi,x_3,t)=0,\quad x_3>0,\quad t\in[0,\mathrm{T}].$$

Отсюда вытекает

$$\widehat{u}(\xi,x_3,t)=\widehat{v}(\xi,t)e^{-x_3|\xi|}. \tag{6.6}$$

Из (6.2) получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{v}(\xi,t)+\widehat{v}(\xi,t)=\frac{1}{|\xi|}\widehat{|v|^q v}(\xi,t).$$

Отсюда следует

$$\widehat{v}(\xi,t)=\widehat{v}_0(\xi)e^{-t}+\int\limits_0^t ds\,e^{-(t-s)}\frac{1}{|\xi|}\widehat{|v|^q v}(\xi,s). \tag{6.7}$$

Из (6.6), (6.7) вытекает

$$\widehat{u}(\xi,x_3,t)=\widehat{v}_0(\xi)e^{-t-x_3|\xi|}+\int\limits_0^t ds\,e^{-(t-s)}\frac{1}{|\xi|}e^{-x_3|\xi|}\widehat{|v|^q v}(\xi,s). \tag{6.8}$$

Предположим, что $v_0(x')\in\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)$, $|v|^q v\in\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)$. Заметим, что справедливо одно вспомогательное утверждение, доказательство которого аналогично рассуждениям, приведенным в работе [Владимиров].

Если $f\in\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^2)$, $g\in\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)$, *то преобразование Фурье свертки* $F[f*g]$ *в смысле* $\mathcal{P}'(\mathbb{R}^2)$ *существует и равно* $F[f]F[g]$.

Действительно, $\forall\ w\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$

$$(f*g,w)\equiv(f(x),(g(y),w(x+y))),$$

$$(F[f*g],w)\equiv(f*g,F[w])=(f(x),(g(y),\int\limits_{\mathbb{R}^2}w(\xi)e^{i\langle x+y,\xi\rangle}\,d\xi))=$$

$$= (f(x), \int\limits_{\mathbb{R}^2} (g, e^{i\langle\xi,y\rangle}) e^{i\langle\xi,x\rangle} w(\xi)\, d\xi) = (f, \int\limits_{\mathbb{R}^2} F[g](\xi) w(\xi) e^{i\langle\xi,x\rangle}\, d\xi) =$$

$$= (f, F[F[g]w]) = (F[f], F[g]w) = (F[f]F[g], w).$$

Таким образом, в силу (6.8) любое решение задачи (6.1)–(6.3) может быть представлено в виде

$$u(x', x_3, t) = p_{x_3}(x') * v_0(x') e^{-t} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^t ds\, e^{-(t-s)} \int\limits_{\mathbb{R}^2} dy\, \frac{(|v|^q v)(y,s)}{\sqrt{x_3^2 + |x' - y|^2}}, \quad (6.9)$$

где $t \in [0, \mathrm{T}]$, $x_3 \geqslant \delta > 0$, при некотором фиксированном $\delta > 0$ и

$$p_{x_3}(x') \equiv \frac{1}{2\pi} \frac{x_3}{(x_3^2 + |x'|^2)^{3/2}}.$$

Таким образом, в классе (K) из задачи (6.1)–(6.3) следует интегральное уравнение (6.9). Теперь докажем возможность перехода к пределу при $x_3 \downarrow 0$ в интегральном уравнении (6.9) в классе (K). При этом воспользуемся стандартной техникой, изложенной, например, в [Масленникова].

Рассмотрим каждое слагаемое в правой части равенства (6.9). Воспользуемся очевидным соотношением

$$p_{x_3}(x') * v_0(x') - v_0(x') = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} dz\, \frac{1}{(1+|z|^2)^{3/2}} [v_0(x' - x_3 z) - v_0(x')] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2 \setminus \Pi_A} + \int\limits_{\Pi_A} \right) \frac{dz}{(1+|z|^2)^{3/2}} [v_0(x' - x_3 z) - v_0(x')],$$

где $\Pi_A \equiv [-A, A] \times [-A, A]$. Справедлива следующая оценка:

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^2 \setminus \Pi_A} \frac{dz}{(1+|z|^2)^{3/2}} [v_0(x' - x_3 z) - v_0(x')] \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2M}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2 \setminus \Pi_A} \frac{dz}{(1+|z|^2)^{3/2}} < \varepsilon/2$$

при достаточно большом $A > 0$. Пусть $0 < x_3 < \delta$ и δ выбрано столь малым, что $|(x' - x_3 z) - x'| < 2A\delta = \delta_1$, тогда в силу непрерывности функции $v_0(x')$

$$|v_0(x' - x_3 z) - v_0(x')| < \pi\varepsilon/(A^2)$$

и, наконец, справедливо неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\Pi_A}\frac{dz}{(1+|z|^2)^{3/2}}[v_0(x^{'}-x_3z)-v_0(x^{'})]\right|<\varepsilon/2.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon>0$ найдется такое число $0<A<+\infty$ и $\delta=\delta(\varepsilon,A)$, что

$$|p_{x_3}(x^{'})*v_0(x^{'})-v_0(x^{'})|<\varepsilon \ \text{ при } \ 0<x_3<\delta.$$

Докажем теперь, что

$$\lim_{x_3\downarrow 0}\int\limits_{\mathbb{R}^2}dy\,\frac{(|v|^qv)(y,t)}{\sqrt{x_3^2+|x'-y|^2}}=\int\limits_{\mathbb{R}^2}dy\,\frac{(|v|^qv)(y,t)}{|x'-y|}. \tag{6.10}$$

В силу принадлежности $v(x^{'},t)\in\mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{L}^{\infty}(1+|x^{'}|^2)^{\beta/(2(q+1))};\mathbb{R}^2))$ имеем

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^2}dy\,(|v|^qv)(y,t)\left[\frac{1}{\sqrt{x_3^2+|x'-y|^2}}-\frac{1}{|x'-y|}\right]\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^2}dz\,\frac{1}{|z|}|v|^{1+q}(x^{'}-z,t)\left|\frac{|z|}{\sqrt{x_3^2+|z|^2}}-1\right|\leqslant$$

$$\leqslant C\int\limits_0^{+\infty}d\rho\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\,\frac{1}{(1+|x'|^2+\rho^2-2|x'|\rho\cos(\varphi))^{\beta/2}}\left|\frac{\rho}{\sqrt{x_3^2+\rho^2}}-1\right|,$$

где $\beta>2$. Подынтегральное выражение ограничено сверху функцией

$$f(x,\rho,\varphi)\equiv C(1+|x^{'}|^2+\rho^2-2|x^{'}|\rho\cos(\varphi))^{-\beta/2}.$$

Из приложения А настоящей работы вытекает

$$\int\limits_0^{+\infty}d\rho\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\,|f(x,\rho,\varphi)|\leqslant C<+\infty.$$

Используя теорему Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла Лебега (см., например, [Дьяченко]) получим, что справедливо (6.10).

Теперь мы можем перейти к пределу при $x_3\downarrow 0$ в интегральном уравнении (6.4) и в результате получим

$$v(x^{'},t)=v_0(x^{'})e^{-t}+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t ds\int\limits_{\mathbb{R}^2}dy\,\frac{(|v|^qv)(y,s)e^{-(t-s)}}{|x'-y|}.$$

Таким образом, в классе (K) из системы уравнений (6.1)–(6.3) следует система двух интегральных уравнений (6.4), (6.5).

Докажем теперь обратное утверждение: всякое решение системы интегральных уравнений (6.4), (6.5) в классе (K) является решением задачи (6.1)–(6.3).

С этой целью рассмотрим следующие интегралы:

$$J_1 = p_{x_3}(x') * v_0(x'), \quad J_2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} dy\, \frac{(|v|^q v)(x'-y)}{\sqrt{x_3^2+|y|^2}}.$$

Пусть $x_3 > 0$, тогда

$$\frac{\partial J_1}{\partial x_3} = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} dy\, \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x_3^2+|y|^2}}\right) v_0(x'-y) = \\ = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} dy\, \frac{1}{\sqrt{x_3^2+|y|^2}} \triangle_{2y} v_0(x'-y).$$

Поскольку $v_0(x') \in \mathbb{W}^{2,\infty}((1+|x'|^2)^{\alpha/2};\mathbb{R}^2)$, то справедливо предельное равенство

$$\lim_{x_3\downarrow 0}\frac{\partial J_1}{\partial x_3} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} dy\, \frac{1}{|y|}\triangle_{2y} v_0(x'-y).$$

Рассмотрим теперь интеграл J_2 при $x_3 > 0$. Справедливо следующее равенство:

$$\frac{\partial J_2}{\partial x_3} = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} dy\, \frac{x_3}{(x_3^2+|y|^2)^{3/2}}(|v|^q v)(x'-y,t).$$

Докажем, что

$$\lim_{x_3\downarrow 0}\frac{\partial J_2}{\partial x_3} = -(|v|^q v)(x',t).$$

Действительно, в силу принадлежности $u(x',t)$ классу (K) имеем: $(|v|^q v)(x',t) \in \mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^2))$, и, кроме того, справедливо следующее неравенство:

$$\left|\frac{\partial J_2}{\partial x_3} + (|v|^q v)(x',t)\right| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus\Pi_A} + \int\limits_{\Pi_A}\right)\frac{dz}{(1+|z|^2)^{3/2}}\left|(|v|^q v)(x'-x_3 z,t) - (|v|^q v)(x',t)\right|.$$

Далее нетрудно доказать (см., например, [Масленникова, 1]), что существуют $\forall \varepsilon > 0 \ \exists A > 0, \ \delta(A, \varepsilon) > 0$ такие что для всех $0 < x_3 < \delta$

$$\left| \frac{\partial J_2}{\partial x_3} + (|v|^q v)(x', t) \right| < \varepsilon.$$

Отметим, что при $x_3 > 0$ для функции $u(x', x_3, t)$, определенной из (6.4), справедливы следующие равенства:

$$\frac{\partial u}{\partial x_3}(x', x_3, t) = \frac{1}{2\pi} e^{-t} \int\limits_{\mathbb{R}^2} dy \, \frac{\triangle_{2y} v_0(x' - y)}{\sqrt{x_3^2 + |y|^2}} - \\ - \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^t ds \, e^{-(t-s)} \int\limits_{\mathbb{R}^2} dy \, \frac{x_3 (|v|^q v)(x' - y, s)}{(x_3^2 + |y|^2)^{3/2}}$$

при $x_3 > 0$,

$$\lim_{x_3 \downarrow +0} \frac{\partial u}{\partial x_3}(x', x_3, t) = \frac{e^{-t}}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} dy \, \frac{\triangle_{2y} v_0(x' - y)}{|y|} - \int\limits_0^t ds \, e^{-(t-s)} (|v|^q v)(x', s).$$

Следовательно, для любых $x' \in \mathbb{R}^2$ и $t \geqslant 0$ получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x_3}(x', x_3, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{C}(\mathbb{R}^1_+)), \quad u(x', x_3, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{C}(\overline{\mathbb{R}}_+{}^1)).$$

Кроме того, аналогичным образом получаем, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_3} \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{C}(\mathbb{R}^1_+))$$

для любых фиксированных $x' \in \mathbb{R}^2$ и $t \in [0, \mathrm{T}]$. Причем при $x_3 > 0$ имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_3} + \frac{\partial u}{\partial x_3} = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} dy \, \frac{x_3}{(x_3^2 + |y|^2)^{3/2}} (|v|^q v)(x' - y).$$

Переходя к пределу при $x_3 \downarrow 0$ в последнем равенстве, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_3} + \frac{\partial u}{\partial x_3} + |u|^q u = 0 \quad \text{при} \quad x_3 = 0.$$

Кроме того, при $x_3 > 0$

$$u(x', x_3, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} dy \, \frac{x_3 v_0(y) e^{-t}}{(x_3^2 + |x' - y|^2)^{3/2}} +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t ds\int\limits_{\mathbb{R}^2} dy\,\frac{(|v|^q v)(y,s)e^{-(t-s)}}{\sqrt{x_3^2+|x'-y|^2}}.$$

Очевидно, что функция $u(x',x_3,t)$ бесконечно дифференцируема в области

$$\{x_3>0\}\times\mathbb{R}^2\times[0,\mathrm{T}]$$

и является гармонической по переменным (x',x_3) при $x_3>0$, т. е. удовлетворяет уравнению (6.1).

Таким образом, в классе (K) задача (6.1)–(6.3) эквивалентна системе интегральных уравнений (6.4), (6.5).

Теорема доказана.

6.2. Глобальная во времени разрешимость и разрушение решения задачи. Пусть

$$v_0(x')\in\mathbb{W}^{1,\infty}((1+|x'|^2)^{\beta/(2(q+1))};\mathbb{R}^2)$$

при $2<\beta,\quad 1+q^{-1}<\beta<1+q$.

Теорема 24 (о существовании). *Для любой функции $v_0(x')$, принадлежащей вышеуказанному классу, при условии $q>1$ и при достаточно малой начальной функции $v_0(x')$:*

$$\sup_{x'\in\mathbb{R}^2}[|v_0(x')|+|\nabla v_0(x')|](1+|x'|^2)^{\beta/(2(q+1))}\leqslant\delta,$$

существует единственное решение класса

$$v(x',t)\in\mathbb{C}_b^{(1)}([0,+\infty];\mathbb{W}^{1,\infty}((1+|x'|^2)^{\beta/(2(q+1))};\mathbb{R}^2))$$

интегрального уравнения

$$v(x',t)=v_0(x')e^{-t}+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t ds\int\limits_{\mathbb{R}^2} dy\,\frac{(|v|^q v)(y,s)e^{-(t-s)}}{|x'-y|}. \tag{6.11}$$

Доказательство.

Обозначим $w(x',t)\equiv v(x',t)(1+|x'|^2)^{\beta/(2(q+1))}$, из (6.11) получим, что $w(x',t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$w(x',t)=w_0(x')e^{-t}+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t ds\int\limits_{\mathbb{R}^2} dy\,(|w|^q w)(y,s)e^{-(t-s)}f(x',y), \tag{6.12}$$

$$w_0(x')\equiv v_0(x')(1+|x'|^2)^{\beta/(2(q+1))},\ f(x',y)\equiv\frac{(1+|x'|^2)^{\beta/(2(q+1))}}{|y|(1+|x'-y|^2)^{\beta/2}}.$$

Для доказательства теоремы мы применим метод последовательных приближений, рекуррентно определяя

$$v_1(x',t)\equiv v_0(x')e^{-t},\quad v_{n+1}(x',t)\equiv v_0(x')e^{-t}+A(v_n)(x',t),$$

$$A(v) \equiv \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^t ds\, e^{-(t-s)} \int\limits_{\mathbb{R}^2} dy\, \frac{(|v|^q v)(x' - y, s)}{|y|}.$$

Причем повторный интеграл в определении оператора A понимается в смысле Лебега.

Введем следующие нормы:

$$\| v \|_0 \equiv \sup_{x \in \mathbb{R}^2,\ t \geqslant 0} \left| (1 + |x'|^2)^{\beta/(2(q+1))} v(x', t) \right|,$$
$$\| v \|_1 \equiv \| v \|_0 + \| \nabla v \|_0 . \tag{6.13}$$

Оценим оператор $A(\cdot)$ по норме $\| \cdot \|_1$. Имеем

$$\| A(v) \|_1 \leqslant \| A(v) \|_0 + \| \nabla A(v) \|_0,$$

$$|A(v)|(1 + |x'|^2)^{\beta/(2(q+1))} \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^t ds\, e^{-(t-s)} \int\limits_{\mathbb{R}^2} dy\, f(x', y) |w|^{1+q}(x' - y, s).$$

Рассмотрим отдельно интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} dy\, f(x', y) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} dy\, \frac{(1 + |x'|^2)^{\beta/(2(q+1))}}{|y|(1 + |x' - y|^2)^{\beta/2}} .$$

Используя результат Приложения A, мы можем оценить последний интеграл. Окончательно получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} dy\, f(x', y) \leqslant C(q, \beta) < +\infty$$

при дополнительных условиях $\beta > 2$, $1 + q^{-1} < \beta \leqslant 1 + q$. Отсюда и из (6.13) получаем

$$|A(v)|(1 + |x'|^2)^{\beta/(2(q+1))} \leqslant C(q, \beta) \| v \|_0^{1+q}, \quad \| A(v) \|_0 \leqslant C \| v \|_0^{1+q} .$$

Получим теперь оценку для $\| \nabla A(v) \|_0$:

$$|\nabla A(v)|(1 + |x'|^2)^{\beta/(2(q+1))} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1+q}{2\pi} \int\limits_0^t ds\, e^{-(t-s)} \int\limits_{\mathbb{R}^2} dy\, \frac{(1 + |x'|^2)^{\beta/(2(q+1))}}{|y|} (|v|^q |\nabla v|)(x' - y) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1+q}{2\pi} \int\limits_0^t ds\, e^{-(t-s)} \int\limits_{\mathbb{R}^2} dy\, f(x', y)(|w|^q |\nabla v|)(x' - y) \times$$
$$\times (1 + |x' - y|^2)^{\beta/(2(q+1))} \leqslant C \| v \|_0^q \| \nabla v \|_0,$$

откуда следует, что

$$\| \nabla A(v) \|_0 \leqslant C \| v \|_1^{1+q} .$$

Таким образом,

$$\| A(v) \|_1 \leqslant C \| v \|_1^{1+q} . \tag{6.14}$$

Для введенного нелокального оператора $A(v)$ справедливо следующее вспомогательное утверждение, аналогичное утверждению работы [Лионс], доказанное в ней для нелинейного степенного оператора.

Лемма 4. *Пусть заданы $M > 0$ и $q > 1$. Каковы бы ни были функции z_1 и z_2 такие, что $\| z_i \|_1 \leqslant M$, $i = \overline{1,2}$, справедлива оценка*:

$$\| A(z_1) - A(z_2) \|_1 \leqslant \frac{c_1(1+q)^2 M^q}{2\pi} \| z_1 - z_2 \|_1, \quad c_1 = \sup_{x' \in \mathbb{R}^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} dy\, f(x', y). \tag{6.15}$$

Доказательство.

Введем обозначения:

$$z_{1i} \equiv \frac{\partial z_1}{\partial x_i}, \quad z_{2i} \equiv \frac{\partial z_2}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1,2}, \quad \alpha = \frac{\beta}{q+1}.$$

Справедливы следующие неравенства:

$$||z_1|^q z_{1i} - |z_2|^q z_{2i}| \leqslant |z_{2i}||z_1|^q - |z_2|^q| + |z_1|^q |z_{1i} - z_{2i}| \leqslant \frac{1}{[1+|x'|^2]^{\alpha/2}} \times$$
$$\times [qMM^{q-1} \| z_1 - z_2 \|_0 + M^q \| z_{1i} - z_{2i} \|_0] \leqslant$$
$$\leqslant qM^q \frac{1}{[1+|x'|^2]^{\alpha/2}} [\| z_1 - z_2 \|_0 + \| z_{1i} - z_{2i} \|_0],$$
$$||z_1|^q z_1 - |z_2|^q z_2| \leqslant (1+q) M^q \frac{1}{[1+|x'|^2]^{\alpha/2}} \| z_1 - z_2 \|_0,$$

$$|A(z_1) - A(z_2)|(1+|x'|^2)^{\beta/(2(1+q))} \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^t ds\, e^{-(t-s)} \int\limits_{\mathbb{R}^2} dy\, f(x', y) \times$$
$$\times (1+|x'-y|^2)^{\beta/2} ||z_1|^q z_1 - |z_2|^q z_2| \leqslant \frac{1+q}{2\pi} c_1 M^q \| z_1 - z_2 \|_0,$$
$$\| A(z_1) - A(z_2) \|_0 \leqslant \frac{1+q}{2\pi} c_1 M^q \| z_1 - z_2 \|_0, \quad c_1 = \sup_{x' \in \mathbb{R}^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} dy\, f(x', y).$$

$$|\nabla A(z_1) - \nabla A(z_2)|(1+|x'|^2)^{\beta/(2(1+q))} \leqslant \frac{1+q}{2\pi} \int\limits_0^t ds\, e^{-(t-s)} \int\limits_{\mathbb{R}^2} dy\, f(x', y) \times$$

$$\times (1+|x^{'}-y|^2)^{\beta/2}\sum_{i=1}^{2}||z_1|^q z_{1i}-|z_2|^q z_{2i}| \leqslant \frac{q(1+q)}{2\pi}M^q c_1 \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{2}\Big[\parallel z_1-z_2\parallel_0+\parallel z_{1i}-z_{2i}\parallel_0\Big] \leqslant \frac{q(1+q)}{2\pi}c_1 M^q \parallel z_1-z_2\parallel_1 .$$

$$\parallel \nabla A(z_1)-\nabla A(z_2)\parallel_0 \leqslant \frac{q(1+q)}{2\pi}c_1 M^q \parallel z_1-z_2\parallel_1 .$$

Значит,

$$\parallel A(z_1)-A(z_2)\parallel_1 \leqslant \frac{c_1(1+q)^2 M^q}{2\pi}\parallel z_1-z_2\parallel_1,\quad c_1=\sup_{x^{'}\in\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} dy\, f(x^{'},y).$$

Лемма доказана.

Из итерационной схемы имеем

$$\parallel u_{n+1}\parallel_1 \leqslant \delta + C\parallel u_n\parallel_1^{1+q},\quad \parallel u_0\parallel_1 \leqslant \delta.$$

Отсюда следует (см., например, [Лионс, 1]), что при достаточно малом $\delta>0$ $\parallel u_n\parallel \leqslant M(\delta)\to +0$. Из (6.15) вытекает

$$\parallel u_{n+1}-u_n\parallel_1 = \parallel A(u_n)-A(u_{n-1})\parallel_1 \leqslant \frac{c_1}{2\pi}(1+q)^2 M(\delta)^q \parallel u_n-u_{n-1}\parallel_1 .$$

С другой стороны, при достаточно малом $\delta>0$ получаем

$$\frac{c_1}{2\pi}(1+q)^2 M(\delta)^q < 1/2,\quad \parallel u_{n+1}-u_n\parallel_1 \leqslant 1/2\parallel u_n-u_{n-1}\parallel_1 .$$

Отсюда сразу же следует сильная сходимость рекурентной последовательности:

$$u_n \to u \quad \text{в} \quad \mathbb{L}^\infty(0,+\infty;\mathbb{W}^{1,\infty}((1+|x^{'}|^2)^{\beta/(2(q+1))};\mathbb{R}^2)).$$

Докажем теперь единственность решения уравнения (6.11). Пусть w_1 и w_2 — два решения (3.1), тогда с учетом (6.12) имеем

$$|w_1-w_2|[1+|x^{'}|^2]^{\alpha/(2(1+q))} \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t ds\, e^{-(t-s)}\int\limits_{\mathbb{R}^2} dy\, f(x^{'},y)\times$$

$$\times ||w_1|^q w_1-|w_2|^q w_2|[1+|x^{'}-y|^2]^{\alpha/2} \leqslant \frac{1+q}{2\pi}\int\limits_0^t ds\, e^{-(t-s)}\int\limits_{\mathbb{R}^2} dy\, f(x^{'},y)\times$$

$$\times \max\{|w_1|^q,|w_2|^q\}|w_1-w_2|[1+|x^{'}-y|^2]^{\alpha/2} \leqslant \frac{1+q}{2\pi}c_1 M^q\int\limits_0^t ds\, e^{-(t-s)}\times$$

$$\times \parallel w_1-w_2\parallel_{\mathbb{B}}[1+|x^{'}-y|^2]^{\alpha/(2(1+q))} \leqslant$$

$$\leqslant d\int\limits_0^t ds\ \|\ w_1 - w_2\ \|_{\mathbb{B}}\ [1 + |x^{'} - y|^2]^{\alpha/2(1+q)},$$

где $d = c_1(1+q)M^q/(2\pi)$, $M_i = \sup\limits_{t\geqslant 0,\ x^{'}\in\mathbb{R}^2} |(1+|x^{'}|^2)^{\beta/(2(q+1))}w_i|$, $M = \max\limits_i M_i$.

Таким образом,

$$\|\ w_1 - w_2\ \|_{\mathbb{B}} \leqslant d\int\limits_0^t ds\ \|\ w_1 - w_2\ \|_{\mathbb{B}},\ \ \|\ v\ \|_{\mathbb{B}} \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}^3}[1+|x^{'}|^2]^{\alpha/(2(1+q))}|v(x)|.$$

Значит, существует такое $t_0 > 0$, что $w_1 = w_2$ при $t \in [0, t_0]$. С использованием известного алгоритма продолжения во времени (см., например, [Лионс, 1]) решений интегральных уравнений типа Вольтерра получаем: $w_1 = w_2$ для любого $t \in [0, +\infty]$ и для всех $x^{'} \in \mathbb{R}^2$. Итак, существует единственное решение интегрального уравнения (6.11) класса $\mathbb{L}^\infty(0, +\infty; \mathbb{W}^{1,\infty}((1+|x^{'}|^2)^{\beta/(2(q+1))}; \mathbb{R}^2))$. Докажем, что

$$v(x^{'}, t) \in \mathbb{C}_b^{(1)}([0, +\infty]; \mathbb{W}^{1,\infty}((1+|x^{'}|^2)^{\beta/(2(q+1))}; \mathbb{R}^2)).$$

С этой целью достаточно доказать принадлежность данному классу второго слагаемого в правой части интегрального уравнения (6.11):

$$\psi(x^{'}, t) \equiv \int\limits_0^t ds \int\limits_{\mathbb{R}^2} dy\ \frac{(|v|^q v)(y, s)e^{-(t-s)}}{|x^{'} - y|}.$$

Так как

$$v(x^{'}, t) \in \mathbb{L}^\infty([0, +\infty]; \mathbb{W}^{1,\infty}((1+|x^{'}|^2)^{\beta/(2(q+1))}; \mathbb{R}^2)),$$

то, очевидно,

$$\psi(x^{'}, t) \in \mathbb{AC}([0, +\infty]; \mathbb{W}^{1,\infty}((1+|x^{'}|^2)^{\beta/(2(q+1))}; \mathbb{R}^2)).$$

Стало быть,

$$v(x^{'}, t) \in \mathbb{AC}([0, +\infty]; \mathbb{W}^{1,\infty}((1+|x^{'}|^2)^{\beta/(2(q+1))}; \mathbb{R}^2)),$$

и интеграл по s является собственным интегралом Римана. Отсюда сразу же получаем

$$v(x^{'}, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, +\infty]; \mathbb{W}^{1,\infty}((1+|x^{'}|^2)^{\beta/(2(q+1))}; \mathbb{R}^2)).$$

Из явного вида функции $\psi(x^{'}, t)$ следует, что

$$v(x^{'}, t) \in \mathbb{C}_b^{(1)}([0, +\infty]; \mathbb{W}^{1,\infty}((1+|x^{'}|^2)^{\beta/(2(q+1))}; \mathbb{R}^2)).$$

Теорема доказана.

Из полученных результатов следует и существование $u(x', x_3, t)$ из (6.4) для любого $t \in [0, +\infty]$, и в силу теоремы 24 — глобальная разрешимость задачи (6.1)–(6.3).

Теорема 25 (о несуществовании). *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Пусть функция* $v_0(x') \in \mathbb{L}^{1+q}(\mathbb{R}^2) \cap \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^2)$ *такова, что*

$$0 < \| v_0 \|_{q+2}^{q+2} < \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} dx\, dy\, \frac{(|v_0|^q v_0)(x)(|v_0|^q v_0)(y)}{|x-y|},$$

тогда найдется такое $0 \leqslant \mathrm{T}_0 < +\infty$, *что решение уравнения* (6.11)

$$v(x', t) \notin \mathbb{L}^\infty([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{L}^{1+q}(\mathbb{R}^2) \cap \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^2)).$$

2. *Пусть* $q \in (0, 1/2)$, $v_0(x') \in \mathbb{C}_0(\mathbb{R}^2)$ *и* $v_0 \geqslant 0$, *причем* $v_0 > 0$ *на множестве положительной меры, тогда любое положительное решение интегрального уравнения* (6.11) *таково, что найдется* $0 \leqslant \mathrm{T}_0 < +\infty$ *и*

$$v(x', t) \notin \mathbb{L}^\infty([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{L}^{1+q}(\mathbb{R}^2) \cap \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^2)).$$

Доказательство.

Пусть существует глобальное решение интегрального уравнения (6.11) при условиях, сформулированных либо в (1), либо в (2), класса

$$\mathbb{L}^\infty([0, +\infty); \mathbb{L}^{1+q}(\mathbb{R}^2) \cap \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^2)).$$

Тогда, в силу того что оператор в правой части интегрального уравнения (6.11) является сглаживающим, решение принадлежит классу

$$\mathbb{C}^{(1)}([0, +\infty); \mathbb{L}^{1+q}(\mathbb{R}^2) \cap \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^2)).$$

В этом случае интегральное уравнение (6.11) можно записать в виде следующей задачи Коши для интегродифференциального уравнения:

$$v_t(x', t) + v(x', t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} dy\, \frac{(|v|^q v)(y, t)}{|x' - y|}, \quad v(x', 0) = v_0(x'). \tag{6.16}$$

Введем новую функцию $w = e^t v$, тогда (6.16) примет вид

$$w_t(x', t) = \frac{1}{2\pi} e^{-qt} \int\limits_{\mathbb{R}^2} dy\, \frac{(|w|^q w)(y, t)}{|x' - y|}. \tag{6.17}$$

Пусть выполнены условия утверждения 1. Умножим обе части равенства (6.17) на $(|w|^q w)(x', t)$. Тогда интегрированием по $x' \in \mathbb{R}^2$ получаем следующее уравнение:

$$\frac{1}{q+2}\frac{d}{dt} \parallel w \parallel_{q+2}^{q+2} = \frac{1}{2\pi} e^{-qt} \int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} dx\, dy\, \frac{(|w|^q w)(x,t)(|w|^q w)(y,t)}{|x-y|}. \quad (6.18)$$

Кроме того, справедливо неравенство

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^2} dx\, |w|^q w w_t \right|^2 \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^2} dx\, |w|^q w_t^2 \int\limits_{\mathbb{R}^2} dx\, |w|^{q+2}. \quad (6.19)$$

Умножим обе части (6.17) на функцию $(|w|^q w)_t$, тогда после интегрирования по $x' \in \mathbb{R}^2$ получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} dx\, (|w|^q w)_t w_t = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{-qt}}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} dx\, dy\, \frac{(|w|^q w)(x,t)(|w|^q w)(y,t)}{|x-y|}. \quad (6.20)$$

Из последнего равенства следует

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} dx\, |w|^q w_t^2 = \frac{1}{2(1+q)}\frac{1}{2\pi} e^{-qt}\frac{df}{dt}, \quad (6.21)$$

где

$$f(t) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} dx\, dy\, \frac{(|w|^q w)(x,t)(|w|^q w)(y,t)}{|x-y|}.$$

Введем обозначение: $\varphi \equiv \parallel w \parallel_{q+2}^{q+2}$. Оценки (6.18)–(6.21) приводят к неравенствам

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \leqslant (q+2)^2 \int\limits_{\mathbb{R}^2} dx\, |w|^q w_t^2 \int\limits_{\mathbb{R}^2} dx\, |w|^{q+2} \leqslant \frac{q+2}{2(q+1)} e^{-qt}\frac{d}{dt}\left[e^{qt}\frac{d\varphi}{dt}\right]\varphi.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\varphi''(t)}{\varphi(t)^\alpha} - \alpha\frac{(\varphi'(t))^2}{\varphi(t)^{1+\alpha}} + q\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)^\alpha} \geqslant 0, \quad \alpha \equiv 1+\gamma, \quad \gamma \equiv q/(2+q). \quad (6.22)$$

Из (6.22) следует

$$\left(e^{qt}\frac{\varphi'(t)}{\varphi^\alpha(t)}\right)' \geqslant 0, \quad \frac{\varphi'(t)}{\varphi^\alpha} \geqslant \frac{q+2}{2\pi} e^{-qt} f(0)\varphi(0)^{-\alpha}.$$

Тогда приходим к выводу, что

$$\varphi(0) \geqslant f(0)\frac{1}{2\pi}.$$

Данное неравенство можно привести к следующему виду:

$$\| v_0 \|_{q+2}^{q+2} \geqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} dx\, dy\, \frac{(|v_0|^q v_0)(x)(|v_0|^q v_0)(y)}{|x-y|}.$$

Полученное неравенство противоречит условию 1 теоремы 26. Это противоречие свидетельствует о существовании такого $0 \leqslant \mathrm{T}_0 < +\infty$, что

$$v(x', t) \notin \mathbb{L}^\infty([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{L}^{1+q}(\mathbb{R}^2) \cap \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^2)).$$

Докажем теперь вторую часть теоремы 25.

Пусть выполнены условия 2. Рассмотрим интегродифференциальное уравнение

$$v_t + v \geqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Omega_2(R)} dy\, \frac{1}{|x' - y|} v^{1+q}(y,t) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Omega_2(R)} dy\, \frac{1}{\sqrt{(x_3 - a)^2 + |x' - y|^2}} v^{1+q}(y,t),$$

где $\Omega_2(R) \subseteq \mathbb{R}^2$ — круг радиуса $R > 0$ с центром в начале координат. Продолжим предыдущее неравенство:

$$v_t + v \geqslant 2 \int\limits_{\Omega_2(R)} dy\, G(x', x_3; y, a) v^{1+q}(y,t), \tag{6.23}$$

где $G(x', x_3; y, a)$ — функция Грина первой краевой задачи для уравнения Лапласа в цилиндре $D \equiv [0, l] \times \Omega_2(R) \in \mathbb{R}^3_+$. Пусть

$$\varphi_3 \equiv \sin\left(\frac{\pi}{l} x_3\right) c_2 J_0\left(\frac{r}{R}\mu_1\right), \quad c_2 \equiv \frac{\mu_1^2}{2\pi R^2} \left[\int\limits_0^{\mu_1} dz\, J_0(z) z\right]^{-1},$$

где φ_3 — первая собственная функция первой краевой задачи для оператора Лапласа в цилиндре $D \equiv [0, l] \times \Omega_2(R) \in \mathbb{R}^3_+$, μ_1 — первый корень уравнения $J_0(z) = 0$. Очевидно, что $\varphi_3 > 0$ при $0 \leqslant r < R$, $0 < x_3 < l$, поэтому умножением обеих частей неравенства (6.23) на φ_3 и интегрированием по $(x', x_3) \in D$ получим

$$\frac{df}{dt} + f \geqslant 2 \int\limits_D dx'\, dx_3\, \varphi_3(x', x_3) \int\limits_{\Omega_2(R)} dy\, G(x', x_3; y, a) v^{1+q}(y,t),$$

$$f(t) \equiv \int\limits_D dx'\, dx_3\, v(x', t) \varphi_3(x', x_3) = \frac{2l}{\pi} f_1(t),$$

$$f_1(t) \equiv \int\limits_{\Omega_2(R)} dx^{'}\, v(x^{'},t)\psi_2(x^{'}),$$

$$\psi_2(x^{'}) \equiv \frac{\mu_1^2}{2\pi R^2}\left[\int\limits_0^{\mu_1} dz\, J_0(z)z\right]^{-1} J_0\left(\frac{r}{R}\mu_1\right).$$

Отсюда следует

$$\frac{df_1}{dt} + f_1 \geqslant \frac{\pi}{l\lambda_3}\int\limits_{\Omega_2(R)} dy\,\psi_2(y)v^{1+q}(y,t)\sin\left(\frac{\pi a}{l}\right),\quad \lambda_3 \equiv \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{\mu_1}{R}\right)^2.$$

Положим $a = l/2$ и воспользуемся неравенством Йенссена (см., например, [Зорич]), тогда получим

$$\frac{df_1}{dt} + f_1 \geqslant \frac{\pi}{l\lambda_3} f_1^{1+q}.$$

Справедливы следующие соотношения:

$$f_2(t) \equiv e^t f_1(t),\quad \frac{df_2}{dt} \geqslant \frac{\pi}{l\lambda_3} e^{-qt} f_2^{1+q},\quad f_2(0)^{-q} - f_2(t)^q \geqslant \frac{\pi}{l\lambda_3}\left[1 - e^{-qt}\right],$$

$$f_1(0)^{-q} \geqslant \frac{\pi}{l\lambda_3},\quad \pi^{-1/q} l^{1/q}\left[\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{\mu_1}{R}\right)^2\right]^{1/q} \geqslant f_1(0).$$

Возьмем $l = R$, тогда получим

$$c_2 R^{-1/q} \geqslant \frac{\mu_1^2}{2\pi R^2}\left[\int\limits_0^{\mu_1} dz\, J_0(z)z\right]^{-1} \int\limits_0^{2\pi} ds \int\limits_0^R dr\, r J_0\left(\frac{r}{R}\mu_1\right) v_0(r,s),$$

$$c_2 \equiv \pi^{-1/q}\left[(\pi)^2 + (\mu_1)^2\right]^{1/q}.$$

Предположим, что $\operatorname{supp} v_0(x^{'}) \subset \Omega_2(R_0),\quad R_0 \in (0,\infty)$, тогда справедливы следующие соотношения:

$$\int\limits_0^{2\pi} ds \int\limits_0^R dr\, r J_0\left(\frac{r}{R}\mu_1\right) v_0(r,s) = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R_0} ds\, dr\, r J_0\left(\frac{r}{R}\mu_1\right) v_0(r,s) \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R_0} ds\, dr\, r J_0\left(\frac{r}{R_0}\mu_1\right) v_0(r,s) = J_0\left(\frac{r_1}{R_0}\mu_1\right)\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R_0} dr\, r, v_0(r,s),$$

где

$$R > R_0,\quad b = \frac{r_1}{R}\mu_1 < \mu_1,\quad r_1 = r_1(R_0) \in (0, R_0).$$

В итоге получаем: $R^{-1/q} \geqslant c_3 R^{-2}$, что при достаточно большом $R > R_0 > 0$ при условии $q \in (0, 1/2)$ приводит к противоречию. Полученное противоречие доказывает второе утверждение теоремы.

Теорема доказана.

§ 7. Об условиях глобальной во времени разрешимости задачи Коши для полулинейного псевдопараболического уравнения

Рассматривается задача Коши в $\mathbb{R}^3$ для уравнения псевдопараболического типа, описывающего квазистационарные процессы в униполярном полупроводнике при наличии источника тока свободных зарядов. В зависимости от показателя нелинейности доказаны глобальная во времени разрешимость, глобальная неразрешимость и разрушение решения задачи. Причем получен результат Фуджиты о несуществовании глобального во времени решения даже для малых в некотором смысле начальных функций.

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\triangle u_t' + \triangle u + |u|^q u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \tag{7.1}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^3. \tag{7.2}$$

7.1. Редукция задачи к интегральному уравнению. В этом пункте мы рассмотрим задачу Коши для полулинейного уравнения псевдопараболического типа в $\mathbb{R}^N$.

Определение 9. Класс (K). Будем называть сильным обобщенным решением задачи (7.1), (7.2) функцию $u(x,t) \in \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{W}^{2,\infty}([1 + |x|^2]^{\alpha/(2(1+q))}; \mathbb{R}^3))$, $\alpha > 2$, удовлетворяющую уравнению (7.1) почти всюду. Будем говорить, что в этом случае функция $u(x,t)$ принадлежит классу (K).

Естественно, с необходимостью получаем, что

$$u_0(x) \in \mathbb{W}^{2,\infty}([1 + |x|^2]^{\alpha/[2(1+q)]}; \mathbb{R}^3)\,.$$

Теорема 26. *В классе* (K) *задача* (7.1), (7.2) *эквивалентна интегральному уравнению*

$$u(x,t) = u_0(x)e^{-t} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^t ds \int\limits_{\mathbb{R}^3} dy\, \frac{e^{-(t-s)}}{|x-y|}|u|^q u(y,s)\,. \tag{7.3}$$

Доказательство.

Отметим, что повторный интеграл в правой части интегрального уравнения (7.3) представляет собой тепловой потенциал (см., например, [Фридман]).

Обозначим через $\widehat{u}(\xi) = \widehat{F}[u](\xi)$ преобразование Фурье по переменной $x \in \mathbb{R}^3$ в смысле распределений медленного роста $\mathcal{P}'(\mathbb{R}^3)$ (см.,

например, [Владимиров]). Тогда в силу принадлежности u классу (K) имеем: $u \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{L}^{\infty}(\mathbb{R}^3))$, $|u|^q u \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^3)\cap\mathbb{L}^{\infty}(\mathbb{R}^3))$. В этом случае из (7.1), (7.2) получим следующие равенства в $\mathcal{P}'(\mathbb{R}^3)$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\widehat{u}(\xi,t)}{\partial t}+\widehat{u}(\xi,t)=\frac{1}{|\xi|^2}\widehat{|u|^q u}(\xi,t),\\ \widehat{u}(\xi,t)=\widehat{u_0}(\xi)e^{-t}+\int\limits_0^t ds\,\frac{e^{-(t-s)}}{|\xi|^2}\widehat{|u|^q u}(\xi,s).\end{gathered}\tag{7.4}$$

Заметим, что если $f\in\mathbb{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$, $g\in\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^3)\cap\mathbb{L}^{\infty}(\mathbb{R}^3)$, то $\widehat{F}[f*g]=$ $=\widehat{F}[f]\widehat{F}[g]$ в смысле $\mathcal{P}'(\mathbb{R}^3)$ (см., например, [Владимиров]). Поскольку $|u|^q u\in\mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^3)\cap\mathbb{L}^{\infty}(\mathbb{R}^3))$ и $|x|^{-1}\in\mathbb{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$, то из (7.4) получим

$$u(x,t)=u_0(x)e^{-t}+\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^t ds\int\limits_{\mathbb{R}^3} dy\,\frac{e^{-(t-s)}}{|x-y|}|u|^q u(y,s).$$

Таким образом, каждое решение задачи (7.1) и (7.2) в классе (K) является решением интегрального уравнения (7.3).

Из (7.3) и принадлежности $u(x,t)$ классу (K) следует начальная задача для интегродифференциального уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dy\,\frac{1}{|x-y|}|u|^q u(y,t),\quad u(x,0)=u_0(x).\tag{7.5}$$

Пусть $f(x,t)\equiv(|u|^q u)(x,t)$, $q>0$. В силу того что

$$u(x,t)\in\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{W}^{1,\infty}([1+|x|^2]^{\alpha/(2(1+q))};\mathbb{R}^3)),\quad \alpha>2,$$

нетрудно убедиться, что

$$f(x,t)\in\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{W}^{1,\infty}([1+|x|^2]^{\alpha/2};\mathbb{R}^3)),\quad \alpha>2.$$

Рассмотрим объемный потенциал

$$\mathbf{V}[f](x,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^3} dy\,\frac{1}{|x-y|}f(y,t).\tag{7.6}$$

Пусть $x\in\mathrm{B}_R(0)$ — шар с центром в начале координат и радиусом $R>$ >0. Тогда из (7.6) имеем

$$\mathbf{V}[f](x,t)=\int\limits_{\mathrm{B}_R(0)} dy\,\frac{1}{|x-y|}f(y,t)+\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus\mathrm{B}_R(0)} dy\,\frac{1}{|x-y|}f(y,t)\equiv$$
$$\equiv\mathbf{V}_1[f](x,t)+\mathbf{V}_2[f](x,t).$$

Очевидно, что $\triangle \mathbf{V}_2[f](x,t) = 0$, а из результатов работы [Гилбарг] получаем: $\triangle \mathbf{V}[f](x,t) = -4\pi f(x,t)$.

Таким образом, из (7.5) в силу принадлежности $u(x,t)$ к классу (K) приходим к выводу, что для любого $t \in [0, \mathrm{T}]$ при некотором $\mathrm{T} > 0$ и почти всех $x \in \mathbb{R}^3$ справедливо уравнение (7.1).

Теорема доказана.

7.2. Теоремы существования–несуществования глобального во времени решения интегрального уравнения (7.3). В этом пункте мы получим достаточные условия глобальной во времени разрешимости и достаточные условия разрушения решения за конечное время.

Теорема 27 (о существовании). *Для любой функции* $u_0(x) \in \in \mathbb{W}^{2,\infty}([1+|x|^2]^{\alpha/(2(1+q))}; \mathbb{R}^3)$ *при условии* $3 < \alpha \leqslant 1+q$, $q > 2$, *и при достаточно малой начальной функции* $u_0(x)$:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3}(1+|x|^2)^{\alpha/[2(1+q])}\left[|u_0| + \sum_{i=1}^{3}\left|\frac{\partial u_0}{\partial x_i}\right| + \sum_{i,j=1,1}^{3,3}\left|\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_j}\right|\right] \leqslant \delta, \quad \delta > 0,$$

существует единственное решение класса

$$u(x,t) \in \mathbb{C}_b^{(1)}([0,+\infty]; \mathbb{W}^{2,\infty}([1+|x|^2]^{\alpha/[2(1+q)]}; \mathbb{R}^3))$$

интегрального уравнения (7.3).

Доказательство.

Для доказательства теоремы применим метод последовательных приближений:

$$u_1(x,t) = u_0(x)e^{-t}, \quad u_{n+1}(x,t) = u_0(x)e^{-t} + \mathrm{A}(u_n)(x,t), \tag{7.7}$$

$$\mathrm{A}(u_n) \equiv \frac{1}{4\pi}\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^3} dy\, \frac{e^{-(t-s)}}{|y|}|u_n|^q u_n(x-y,s).$$

Повторный интеграл в определении оператора A понимается в смысле Лебега. Введем следующие нормы:

$$\| v \|_0 \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}^3,\ t\geqslant 0}[1+|x|^2]^{\alpha/[2(1+q)]}|v(x,t)|, \quad \| v \|_1 \equiv \| v \|_0 + \sum_{i=1}^{3}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_0,$$

$$\| v \|_2 \equiv \| v \|_0 + \sum_{i=1}^{3}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_0 + \sum_{i,j=1,1}^{3,3}\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\right\|_0.$$

Для дальнейшего изложения нам потребуется ряд вспомогательных результатов.

1. $\| \mathrm{A}(u) \|_2 \leqslant C \| u \|_2^{1+q}$.

Действительно, из результата леммы 2 мы получим следующее неравенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} dy\,\frac{(1+|x|^2)^{\alpha/(2(1+q))}}{|y|(1+|x-y|^2)^{\alpha/2}} \leqslant \begin{cases} C_1(\varepsilon), & 0 \leqslant |x| < \varepsilon, \\ C_2(\varepsilon)|x|^{\alpha/(1+q)-1}, & |x| \geqslant \varepsilon > 0, \end{cases}$$

при $3 < \alpha \leqslant 1+q$.

В связи с этим справедливы следующие неравенства:

$$|\mathrm{A}(u)|(1+|x|^2)^{\alpha/(2(1+q))} \leqslant C \parallel u \parallel_0^{1+q}, \quad \parallel \mathrm{A}(u) \parallel_0 \leqslant C \parallel u \parallel_0^{1+q},$$
$$\left|\frac{\partial \mathrm{A}(u)}{\partial x_i}\right| (1+|x|^2)^{\alpha/(2(1+q))} \leqslant C \parallel u \parallel_0^{q} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_0 .$$

Отсюда сразу же получаем

$$\sum_{i=1}^{3} \left\| \frac{\partial \mathrm{A}(u)}{\partial x_i} \right\|_0 \leqslant C \parallel u \parallel_0^q \sum_{i=1}^{3} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_0 \leqslant C \left[\parallel u \parallel_0 + \sum_{i=1}^{3} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_0 \right]^q \times$$
$$\times \left[\parallel u \parallel_0 + \sum_{i=1}^{3} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_0 \right] \leqslant C \parallel u \parallel_1^{1+q} .$$

Наконец,

$$\left|\frac{\partial^2 \mathrm{A}(u)}{\partial x_i \partial x_j}\right| (1+|x|^2)^{\alpha/(2(1+q))} \leqslant$$
$$\leqslant C \parallel u \parallel_0^q \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_0 + C \parallel u \parallel_0^{q-1} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_0 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_0 \leqslant C \parallel u \parallel_2^{1+q},$$
$$\sum_{i,j=1,1}^{3,3} \left\| \frac{\partial^2 \mathrm{A}(u)}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_0 \leqslant C \parallel u \parallel_2^{1+q} .$$

Таким образом,

$$\parallel \mathrm{A}(u) \parallel_2 \leqslant C \parallel u \parallel_2^{1+q} . \tag{7.8}$$

Справедлива следующая лемма, аналогичная соответствующей лемме из [Лионс, 1].

Лемма 5. *Пусть $M > 0$ и $q > 2$. Для любых функций $z_1(x)$ и $z_2(x)$ таких, что $\parallel z_k \parallel_2 \leqslant M$, $k = 1, 2$, имеет место оценка*

$$\parallel \mathrm{A}(z_1) - \mathrm{A}(z_2) \parallel_2 \leqslant C M^q \parallel z_1 - z_2 \parallel_2 .$$

Доказательство.

Введем обозначения:

$$z_{1i} \equiv \frac{\partial z_1}{\partial x_i}, \quad z_{2i} \equiv \frac{\partial z_2}{\partial x_i}, \quad z_{1ij} \equiv \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_i \partial x_j}, \quad z_{2ij} \equiv \frac{\partial^2 z_2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Справедливы следующие соотношения:

$$(|z|^q z)_{x_i} = (1+q)|z|^q z_{x_i},$$
$$(|z|^q z)_{x_i x_j} = (1+q)|z|^q z_{x_i x_j} + (1+q)q|z|^{q-2} z z_{x_i} z_{x_j}.$$

Имеют место неравенства

$$||z_1|^q z_{1i} - |z_2|^q z_{2i}| \leqslant |z_1|^q |z_{1i} - z_{2i}| + |z_{2i}|\,||z_1|^q - |z_2|^q| \leqslant$$
$$\leqslant |z_1|^q |z_{1i} - z_{2i}| + |z_{2i}| q \max\{|z_1|^{q-1}, |z_2|^{q-1}\}|z_1 - z_2| \leqslant \frac{1}{(1+|x|^2)^{\alpha/2}} \times$$
$$\times \left[M^q \parallel z_{1i} - z_{2i} \parallel_0 + qMM^{q-1} \parallel z_1 - z_2 \parallel_0\right] \leqslant \frac{1}{(1+|x|^2)^{\alpha/2}} M^q \times$$
$$\times \left[\parallel z_{1i} - z_{2i} \parallel_0 + q \parallel z_1 - z_2 \parallel_0\right],$$

$$||z_1|^q z_{1ij} - |z_2|^q z_{2ij}| \leqslant \frac{1}{(1+|x|^2)^{\alpha/2}} M^q \left[\parallel z_{1ij} - z_{2ij} \parallel_0 + q \parallel z_1 - z_2 \parallel_0\right],$$

$$\Big||z_1|^{q-2} z_1 z_{1i} z_{1j} - |z_2|^{q-2} z_2 z_{2i} z_{2j}\Big| \leqslant ||z_1|^{q-2} z_1 z_{1i} z_{1j} - |z_2|^{q-2} z_2 z_{1i} z_{1j}| +$$
$$+ ||z_2|^{q-2} z_2 z_{1j} z_{1i} - |z_2|^{q-2} z_2 z_{1j} z_{2i}| + ||z_2|^{q-2} z_2 z_{2i} z_{1j} - |z_2|^{q-2} z_2 z_{2i} z_{2j}| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{(1+|x|^2)^{\alpha/2}} \Big[M^2(q-1)M^{q-2} \parallel z_1 - z_2 \parallel_0 + M^{q-1} M \parallel z_{1i} - z_{2i} \parallel_0 +$$
$$+ M^{q-1} M \parallel z_{1j} - z_{2j} \parallel_0 \Big] \leqslant \frac{1}{(1+|x|^2)^{\alpha/2}} M^q \Big[(q-1) \parallel z_1 - z_2 \parallel_0 +$$
$$+ \parallel z_{1i} - z_{2i} \parallel_0 + \parallel z_{1j} - z_{2j} \parallel_0 \Big],$$

$$||z_1|^q z_1 - |z_2|^q z_2| \leqslant (1+q) \max\{|z_1|^q, |z_2|^q\}|z_1 - z_2| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{(1+|x|^2)^{\alpha/2}} M^q (1+q) \parallel z_1 - z_2 \parallel_0 .$$

Отсюда в силу результата леммы 2 имеем

$$|\mathrm{A}(z_1) - \mathrm{A}(z_2)|\,(1+|x|^2)^{\alpha/(2(1+q))} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{4\pi} \int_0^t ds\, e^{-(t-s)} \int_{\mathbb{R}^3} dy\, F(x,y)(1+|x-y|^2)^{\alpha/2} \times$$
$$\times ||z_1|^q z_1 - |z_2|^q z_2|(x-y,s) \leqslant \frac{1+q}{4\pi}\ {}_1M^q \parallel z_1 - z_2 \parallel_0,$$
$$c_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} dy\, F(x,y), \quad F(x,y) \equiv \frac{(1+|x|^2)^{\alpha/(2(1+q))}}{(1+|x-y|^2)^{\alpha/2}|y|};$$

$$\left|\frac{\partial \mathrm{A}(z_1)}{\partial x_i}-\frac{\partial \mathrm{A}(z_2)}{\partial x_i}\right|(1+|x|^2)^{\alpha/(2(1+q))}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1+q}{4\pi}\int\limits_0^t ds\,e^{-(t-s)}\int\limits_{\mathbb{R}^3}dy\,F(x,y)(1+|x-y|^2)^{\alpha/2}||z_1|^q z_{1i}-|z_2|^q z_{2i}|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1+q}{4\pi}c_1 M^q[q\parallel z_1-z_2\parallel_0+\parallel z_{1i}-z_{2i}\parallel_0],$$

$$\left|\frac{\partial^2 \mathrm{A}(z_1)}{\partial x_i\partial x_j}-\frac{\partial^2 \mathrm{A}(z_2)}{\partial x_i\partial x_j}\right|(1+|x|^2)^{\alpha/(2(1+q))}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1+q}{4\pi}\int\limits_0^t ds\,e^{-(t-s)}\int\limits_{\mathbb{R}^3}dy\,F(x,y)(1+|x-y|^2)^{\alpha/2}||z_1|^q z_{1ij}-|z_2|^q z_{2ij}|+$$

$$+\frac{1+q}{4\pi}\int\limits_0^t ds\,e^{-(t-s)}\int\limits_{\mathbb{R}^3}dy\,F(x,y)(1+|x-y|^2)^{\alpha/2}\times$$

$$\times\,||z_1|^{q-2}z_1 z_{1i}z_{1j}-|z_2|^{q-2}z_2 z_{2i}z_{2j}|\leqslant$$

$$\leqslant c_1\frac{1+q}{4\pi}M^q\left[q\parallel z_1-z_2\parallel_0+\parallel z_{1ij}-z_{2ij}\parallel_0\right]+$$

$$+c_1\frac{q(1+q)}{4\pi}M^q\left[(q-1)\parallel z_1-z_2\parallel_0+\parallel z_{1i}-z_{2i}\parallel_0+\parallel z_{1j}-z_{2j}\parallel_0\right].$$

Из полученных оценок вытекает неравенство

$$\parallel \mathrm{A}(z_1)-\mathrm{A}(z_2)\parallel_2\leqslant CM^q\parallel z_1-z_2\parallel_2. \tag{7.9}$$

Лемма доказана.

Перейдем к доказательству непосредственно теоремы 28. Из итерационной схемы (7.7) и оценки (7.8) имеем

$$\parallel u_{n+1}\parallel_2\leqslant\delta+C\parallel u_n\parallel_2^{1+q},\quad \parallel u_0\parallel\leqslant\delta.$$

Отсюда следует (см., например, [Лионс, 1]), что $\parallel u_n\parallel\leqslant M(\delta)\to 0$ при $\delta\to+0$. Из (7.9) следует соотношение

$$\parallel u_{n+1}-u_n\parallel_2=\parallel \mathrm{A}(u_n)-\mathrm{A}(u_{n-1})\parallel_2\leqslant CM^q(\delta)\parallel u_n-u_{n-1}\parallel_2.$$

С другой стороны, при достаточно малом $\delta>0$ получаем $CM^q(\delta)<1/2$, $\parallel u_{n+1}-u_n\parallel_2\leqslant 1/2\parallel u_n-u_{n-1}\parallel_2$. Отсюда сразу вытекает сильная сходимость рекуррентной последовательности $u_n\to u$ в $\mathbb{L}^\infty(0,+\infty;\mathbb{W}^{2,\infty}([1+|x|^2]^{\alpha/(2(1+q))};\mathbb{R}^3))$.

Докажем теперь единственность решения интегрального уравнения (7.3). Пусть w_1 и w_2 — два решения интегрального уравнения (7.3); тогда имеем

$$|w_1 - w_2| \leqslant \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^t ds\, e^{-(t-s)} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dy\, \frac{1}{|y|}||w_1|^q w_1 - |w_2|^q w_2| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1+q}{4\pi}\int\limits_0^t ds\, e^{-(t-s)} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dy\, \frac{F(x,y)}{[1+|x|^2]^{\alpha/[2(1+q)]}} \times$$

$$\times M^q |w_1 - w_2|(1+|x-y|^2)^{\alpha/[2(1+q)]}, \quad (7.10)$$

$$F(x,y) \equiv \frac{(1+|x|^2)^{\alpha/[2(1+q)]}}{|y|(1+|x-y|^2)^{\alpha/2}}.$$

Из (7.10) выводим

$$\| w_1 - w_2 \|'(t) \leqslant C\int\limits_0^t ds\ \| w_1 - w_2 \|'(s),$$

$$\| w \|' \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}^3} (1+|x|^2)^{\alpha/[2(1+q)]}|w|.$$

В силу леммы Гронуолла–Белмана [Демидович] получаем: $w_1 = w_2$ для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,+\infty)$.

Осталось доказать, что

$$u(x,t) \in \mathbb{C}_b^{(1)}([0,+\infty]; \mathbb{W}^{2,\infty}([1+|x|^2]^{\alpha/(2(1+q))}; \mathbb{R}^3)).$$

С этой целью заметим, что тепловой потенциал

$$\mathbf{V}[u](x,t) \equiv \int\limits_0^t ds \int\limits_{\mathbb{R}^3} dy\, \frac{e^{-(t-s)}}{|x-y|}|u|^q u(y,s) \quad (7.11)$$

является сглаживающим по t, и нетрудно убедиться в том, что из условия

$$u(x,t) \in \mathbb{L}^\infty(0,+\infty; \mathbb{W}^{2,\infty}((1+|x|^2)^{\alpha/[2(1+q)]}; \mathbb{R}^3))$$

вытекает

$$\mathbf{V}[u](x,t) \in \mathbb{AC}([0,+\infty]; \mathbb{W}^{2,\infty}((1+|x|^2)^{\alpha/[2(1+q)]}; \mathbb{R}^3)),$$

отсюда и из (7.3) сразу же получаем совокупность включений

$$u(x,t) \in \mathbb{AC}([0,+\infty]; \mathbb{W}^{2,\infty}((1+|x|^2)^{\alpha/[2(1+q)]}; \mathbb{R}^3)),$$

$$\mathbf{V}[u](x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,+\infty]; \mathbb{W}^{2,\infty}((1+|x|^2)^{\alpha/[2(1+q)]}; \mathbb{R}^3)),$$

а из явного вида теплового потенциала (7.11) следует

$$\mathbf{V}[u](x,t) \in \mathbb{C}_b^{(1)}([0,+\infty]; \mathbb{W}^{2,\infty}((1+|x|^2)^{\alpha/[2(1+q)]}; \mathbb{R}^3)).$$

Значит,

$$u(x,t)\in\mathbb{C}_b^{(1)}([0,+\infty];\mathbb{W}^{2,\infty}((1+|x|^2)^{\alpha/[2(1+q)]};\mathbb{R}^3)).$$

Теорема доказана.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 28 (о несуществовании решения).

1) *Пусть функция* $u_0(x)\in\mathbb{L}^{1+q}(\mathbb{R}^3)\subset\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^3)$ *такова, что*

$$0<\|\,u_0\,\|_{q+2}^{q+2}<\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3}dx\,dy\,\frac{(|u_0|^qu_0)(x)(|u_0|^qu_0)(y)}{|x-y|},$$

тогда найдется $0\leqslant \mathrm{T}_0<+\infty$ *такое, что*

$$u(x,t)\notin\mathbb{L}^\infty([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{L}^{1+q}(\mathbb{R}^3)\cap\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^3)).$$

2) *Пусть* $q\in(0,2/3)$, $u_0(x)\in\mathbb{C}_0(\mathbb{R}^3)$ *и* $u_0\geqslant 0$, *причем* $u_0>0$ *на множестве положительной меры. Тогда для любого положительного решения интегрального уравнения* (7.3) *найдется* $0\leqslant\mathrm{T}_0<+\infty$ *такое, что*

$$u(x,t)\notin\mathbb{L}^\infty([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{L}^{1+q}(\mathbb{R}^3)\cap\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^3)).$$

Доказательство.

Пусть существует глобальное решение интегрального уравнения (7.3) при условиях, сформулированных либо в 1, либо в 2, класса

$$\mathbb{L}^\infty([0,+\infty);\mathbb{L}^{1+q}(\mathbb{R}^2)\cap\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^2)).$$

Тогда, в силу того что оператор в правой части интегрального уравнения (7.3) является сглаживающим, решение принадлежит классу

$$\mathbb{C}^{(1)}([0,+\infty);\mathbb{L}^{1+q}(\mathbb{R}^2)\cap\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^2)).$$

В этом случае интегральное уравнение (7.3) можно записать в виде следующей задачи Коши для интегродифференциального уравнения:

$$u_t(x,t)+u(x,t)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3}dy\,\frac{(|u|^qu)(y,t)}{|x-y|},\quad u(x,0)=u_0(x).\tag{7.12}$$

Введем новую функцию $w=e^tu$, тогда (7.12) примет вид

$$w_t(x,t)=\frac{1}{4\pi}e^{-qt}\int\limits_{\mathbb{R}^3}dy\,\frac{(|w|^qw)(y,t)}{|x-y|}.\tag{7.13}$$

Пусть выполнены условия 1 теоремы 28, тогда, умножая обе части (7.13) на $(|w|^qw)(x,t)$ и интегрируя по $x\in\mathbb{R}^3$, получаем

$$\frac{1}{q+2}\frac{d}{dt}\,\|\,w\,\|_{q+2}^{q+2}=\frac{1}{4\pi}e^{-qt}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3}dx\,dy\,\frac{(|w|^qw)(x,t)(|w|^qw)(y,t)}{|x-y|}.\tag{7.14}$$

С другой стороны,

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^3} dx\,|w|^q w w_t\right|^2 \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx\,|w|^q w_t^2 \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx\,|w|^{q+2}. \tag{7.15}$$

Теперь умножим обе части (7.13) на функцию $(|w|^q w)_t$, тогда после интегрирования по $x \in \mathbb{R}^3$ получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} dx\,(|w|^q w)_t w_t = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{-qt}}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dx\,dy\,\frac{(|w|^q w)(x,t)(|w|^q w)(y,t)}{|x-y|}. \tag{7.16}$$

Из последнего равенства следует

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} dx\,|w|^q w_t^2 = \frac{1}{2(1+q)}\frac{1}{4\pi}e^{-qt}\frac{df}{dt}, \tag{7.17}$$

где

$$f(t) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dx\,dy\,\frac{(|w|^q w)(x,t)(|w|^q w)(y,t)}{|x-y|}.$$

Введем обозначение: $\varphi \equiv \| w \|_{q+2}^{q+2}$. Оценки (7.14)–(7.17) приводят к неравенству

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \leqslant (q+2)^2 \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx\,|w|^q w_t^2 \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx\,|w|^{q+2} \leqslant \frac{q+2}{2(q+1)} e^{-qt}\frac{d}{dt}\left[e^{qt}\frac{d\varphi}{dt}\right]\varphi,$$

откуда получаем (см. [Калантаров, Ладыженская])

$$\frac{\varphi''(t)}{\varphi(t)^\alpha} - \alpha\frac{(\varphi'(t))^2}{\varphi(t)^{1+\alpha}} + q\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)^\alpha} \geqslant 0, \quad \alpha \equiv 1+\gamma, \quad \gamma \equiv q/(2+q). \tag{7.18}$$

Из (7.18) следует

$$\left(e^{qt}\frac{\varphi'(t)}{\varphi^\alpha(t)}\right)' \geqslant 0, \quad \frac{\varphi'(t)}{\varphi^\alpha} \geqslant \frac{q+2}{4\pi}e^{-qt}f(0)\varphi(0)^{-\alpha}.$$

Отсюда получим неравенство $\varphi(0) \geqslant f(0)\frac{1}{4\pi}$, которое можно привести к следующему виду:

$$\| u_0 \|_{q+2}^{q+2} \geqslant \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dx\,dy\,\frac{(|u_0|^q u_0)(x)(|u_0|^q u_0)(y)}{|x-y|}.$$

Данное неравенство противоречит условию 1 теоремы 28. Полученное противоречие доказывает существование такого $0 \leqslant \mathrm{T}_0 < +\infty$, что

$$u(x,t) \notin \mathbb{L}^\infty([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{L}^{1+q}(\mathbb{R}^3)\cap\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^3)).$$

Докажем теперь п. 2 теоремы 28.

Из (7.12) в случае положительного решения $u(x,t) \geqslant 0$ следует интегродифференциальное неравенство

$$u_t + u \geqslant \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathrm{B}_R(0)} dy\, \frac{1}{|x-y|} u^{1+q}(y,t),$$

$\mathrm{B}_R(0)$ — шар радиуса $R > 0$ с центром в начале координат. Пусть $G(x,y)$ — функция Грина первой краевой задачи для уравнения Лапласа в шаре $\mathrm{B}_R(0)$. Далее имеем

$$\psi_3(x) \equiv C(R) \frac{1}{\sqrt{r}} \mathrm{J}_{1/2}(\sqrt{\lambda_3}\, r), \quad \lambda_3 \equiv \frac{\pi^2}{R^2}, \quad C(R) \equiv \frac{C}{R^{5/3}},$$

где $\psi_3(x)$ — первая собственная функция оператора Лапласа, соответствующая первому собственному значению λ_3. Известно, что $\psi_3(x) > 0$ при $x \in \mathrm{B}_R(0)$ и $\psi_3(x) = 0$ при $x \in \partial\mathrm{B}_R(0)$. Причем $C(R)$ выбрана так, чтобы выполнялось условие

$$\int\limits_{\mathrm{B}_R(0)} dx\, \psi_3(x) = 1.$$

В силу свойств функции Грина имеем (см., например, [Владимиров]):

$$u_t + u \geqslant \int\limits_{\mathrm{B}_R(0)} dy\, G(x,y) u^{1+q}(y,t). \tag{7.19}$$

Умножим обе части неравенства (7.19) на $\psi_3(x)$, проинтегрируем по $x \in \mathrm{B}_R(0)$, тогда в результате с помощью неравенства Ийенссена (см., например, [Зорич]) получим

$$\frac{df_1}{dt} + f_1 \geqslant \frac{1}{\lambda_3} \int\limits_{\mathrm{B}_R(0)} dy\, \psi_3(y) u^{1+q}(y,t) \geqslant \frac{1}{\lambda_3} f_1^{1+q}(t),$$

где

$$f_1(t) = \int\limits_{\mathrm{B}_R(0)} dy\, \psi_3(y) u(y,t).$$

Из полученного обыкновенного дифференциального неравенства в результате интегрирования следует неравенство

$$\lambda_3^{1/q} \geqslant f_1(0) = \int\limits_{\mathrm{B}_R(0)} dy\, \psi_3(y) u_0(y) =$$

$$= CR^{-5/2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{\pi} d\vartheta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} dr\, r^2 \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda_3}} \sin(\sqrt{\lambda_3}\, r) \geqslant$$

$$\geqslant C\frac{1}{R^{5/2}}R^{1/2}\int\limits_0^{\pi}d\vartheta\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{R}dr\,r\sin\left(\frac{\pi}{R}r\right)u_0(r,\vartheta,\varphi). \quad (7.20)$$

Отметим, что для любого $\lambda\in(0,1)$ найдется такое достаточно малое $x_0(\lambda)>0$, что $\sin x/x\geqslant 1-\lambda$, $x\in[0,x_0(\lambda)]$. Пусть $\operatorname{supp}u_0\subset \mathrm{B}_R(0)$, тогда при достаточно большом $R>R_0$ из (7.20) имеем

$$R^{-2/q}\geqslant R^{-3}\int\limits_0^{\pi}d\vartheta\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{R_0}dr\,r^2u_0(r,\vartheta,\varphi)=CR^{-3}.$$

Значит, $R^3\geqslant CR^{2/q}$. Если $q\in(0,2/3)$, то при достаточно большом $R>$ $>R_0>0$ последнее неравенство не выполняется.

Наконец, справедлива следующая теорема.

Теорема 29. *Для любой функции* u_0 :

$$u_0(x)\in\mathbb{L}^{\infty}((1+|x|^2)^{\alpha/[2(1+q)]};\mathbb{R}^3),$$

$3<\alpha\leqslant 1+q$, $q>2$, *найдется такое* $\mathrm{T}_1=\mathrm{T}_1(u_0)>0$, *что существует единственное решение интегрального уравнения* (7.3):

$$u(x,t)\in\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{L}^{\infty}((1+|x|^2)^{\alpha/[2(1+q)]};\mathbb{R}^3))\quad\forall\,\mathrm{T}\in(0,\mathrm{T}_1),$$

причем, *если*

$$0<\|\,u_0\,\|_{q+2}^{q+2}<\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3}dx\,dy\,\frac{(|u_0|^qu_0)(x)(|u_0|^qu_0)(y)}{|x-y|},$$

то $0<\mathrm{T}_1<+\infty$ *и*

$$\overline{\lim_{t\uparrow\mathrm{T}_1}}\,\|\,u\,\|_{\mathbb{B}}\,(t)=+\infty,\quad \mathbb{B}\equiv\mathbb{L}^{\infty}([1+|x|^2]^{\alpha/(2(1+q))};\mathbb{R}^3).$$

Доказательство.

Введем банахово пространство с нормой

$$\|\,v\,\|_{0,\mathrm{T}}\equiv\sup_{x\in\mathbb{R}^3,t\in[0,\mathrm{T}]}[1+|x|^2]^{\alpha/(2(1+q))}|v(x,t)|.$$

Для доказательства теоремы применим метод последовательных приближений, рекуррентно определяя

$$u_1(x,t)=u_0(x)e^{-t},\quad u_{n+1}=u_0(x)e^{-t}+\mathrm{A}(u_n)(x,t), \quad (7.21)$$

$$\mathrm{A}(u_n)\equiv\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{t}ds\int\limits_{\mathbb{R}^3}dy\,\frac{e^{-(t-s)}}{|y|}|u_n|^qu_n(x-y,s).$$

Повторный интеграл в определении оператора A понимается в смысле Лебега.

Аналогично выводу (7.8) получим

$$\| \mathrm{A}(u) \|_{0,\mathrm{T}} \leqslant C_1 \mathrm{T} \| u \|_{0,\mathrm{T}}^{1+q}, \quad C_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dy\, f(x,y),$$

где

$$f(x,y) = \frac{(1+|x|^2)^{\alpha/[2(1+q)]}}{|y|(1+|x-y|^2)^{\alpha/2}}.$$

Аналогом результата леммы 5 является оценка

$$\| \mathrm{A}(z_1) - \mathrm{A}(z_2) \|_{0,\mathrm{T}} \leqslant (q+1) C_1 M^q \mathrm{T} \| z_1 - z_2 \|_{0,\mathrm{T}}, \tag{7.22}$$

где $\| z_k \|_{0,\mathrm{T}} \leqslant M, \quad k = 1,2.$

Из итерационной схемы (7.21) получим

$$\| u_{n+1} \|_{0,\mathrm{T}} \leqslant \| u_0 \|_{0,\mathrm{T}} + \mathrm{T} C_1 \| u_n \|_{0,\mathrm{T}}^{1+q}. \tag{7.23}$$

Пусть $\gamma_1 = \| u_0 \|_{0,\mathrm{T}}$ и $\gamma_{n+1} = \gamma_1 + C_1 \mathrm{T} \gamma_n^{1+q}$, $n \geqslant 1$, тогда по индукции нетрудно доказать, что $\| u_n \| \leqslant \gamma_n$. Пусть $\mathrm{T} < q^q (1+q)^{-q-1} \| u_0 \|_{0,\mathrm{T}}^{-q} C_1^{-1}$, тогда рекуррентно заданная последовательность $\{\gamma_n\}$ ограничена величиной $M = q^{-1}(1+q) \| u_0 \|_{0,\mathrm{T}}$. Поскольку $u_{n+2} - u_{n+1} = \mathrm{A}(u_{n+1}) - \mathrm{A}(u_n)$, то, исходя из (7.22), (7.23), получаем

$$\| u_{n+2} - u_{n+1} \|_{0,\mathrm{T}} \leqslant r \| u_{n+1} - u_n \|_{0,\mathrm{T}},$$

где $r = C_1(q+1)\mathrm{T}(1+q)^q q^{-q} \| u_0 \|_{0,\mathrm{T}}^q < 1$ в силу выбора T. Отсюда сразу же вытекает сильная сходимость $u_n \to u$ в $\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^\infty((1+|x|^2)^{\alpha/[2(1+q)]};\mathbb{R}^3))$. Из (7.22) вытекает сильная сходимость $\mathrm{A}(u_n)$ к $\mathrm{A}(u)$ в $\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^\infty((1+|x|^2)^{\alpha/[2(1+q)]};\mathbb{R}^3))$. Отсюда заключаем, что построенное $u(x,t)$ есть решение интегрального уравнения (7.3), в котором повторный интеграл в правой части понимается в смысле Лебега. Доказательство того, что $u(x,t) \in \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{L}^\infty((1+|x|^2)^{\alpha/[2(1+q)]};\mathbb{R}^3))$, аналогично доказательству соответствующего места в теореме 28. Доказательство локальной единственности построенного решения почти дословно повторяет доказательство соответствующего места в теореме 28. Пусть теперь выполнено условие

$$0 < \| u_0 \|_{q+2}^{q+2} < \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx\, dy\, \frac{(|u_0|^q u_0)(x)(|u_0|^q u_0)(y)}{|x-y|},$$

тогда в силу п. 1. теоремы 29 найдется такое $\mathrm{T}_0 < +\infty$, что

$$u(x,t) \notin \mathbb{L}^\infty([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{L}^{1+q}(\mathbb{R}^3) \cap \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^3))$$

и тем более

$$u(x,t) \notin \mathbb{L}^\infty([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{L}^\infty((1+|x|^2)^{\alpha/[2(1+q)]};\mathbb{R}^3)).$$

Стало быть, найдется такое максимальное $\mathrm{T}_1 \in (0, \mathrm{T}_0]$, что для любого $\mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_1)$ существует единственное решение интегрального уравнения (7.3), а именно

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{L}^\infty((1+|x|^2)^{\alpha/[2(1+q)]};\mathbb{R}^3)) \quad \forall\, \mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}_1),$$

причем

$$\overline{\lim_{t\uparrow \mathrm{T}_1}} \parallel u \parallel_{\mathbb{B}} (t) = +\infty, \quad \mathbb{B} \equiv \mathbb{L}^\infty([1+|x|^2]^{\alpha/(2(1+q))};\mathbb{R}^3).$$

Предположим, что последнее соотношение не имеет места. Стало быть,

$$\parallel u \parallel_{\mathbb{B}} (t) \leqslant C < +\infty \quad \forall\, t \in (0,\mathrm{T}_1).$$

Тогда рассмотрим вспомогательное интегральное уравнение

$$u(x,t) = u(x,\mathrm{T}')e^{-t} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^t ds \int\limits_{\mathbb{R}^3} dy\, \frac{e^{-(t-s)}}{|x-y|}|u|^q u(y,s)\,.$$

Поскольку норма $\parallel u \parallel_{\mathbb{B}} (\mathrm{T}')$ равномерно ограничена по $\mathrm{T}' \in (0,\mathrm{T}_1)$, то можно выбрать такое $\mathrm{T}^* \in (0,\mathrm{T}_1)$, что для любого $\mathrm{T}' \in (0,\mathrm{T}_1)$ интегральное уравнение имеет единственное решение $u(x,t) \in \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}^*];\mathbb{B})$. Пусть $\mathrm{T}' = \mathrm{T}_1 - \mathrm{T}^*/2$; обозначим через $v(x,t)$ соответствующее решение последнего интегрального уравнения и определим $\widehat{u}(x,t)$ на сегменте $[0, \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}^*/2]$:

$$\widehat{u}(x,t) = \{u(x,t),\ t \in [0,\mathrm{T}'];\ \ v(x,t-\mathrm{T}'),\ t \in [\mathrm{T}', \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}^*/2]\}.$$

По построению $\widehat{u}(x,t)$ является решением задачи (7.1), (7.2) на отрезке $[0, \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}^*/2]$ и в силу локальной единственности является продолжением функции $u(x,t)$. Это противоречит максимальности отрезка $[0, T_1]$. Полученное противоречие доказывает последнее утверждение теоремы.

§ 8. О достаточных условиях разрушения решения уравнения Буссинеска с нелинейным граничным условием Неймана

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу для обобщенного уравнения Буссинеска в ограниченной области с гладкой границей с нелинейным граничным условием Неймана:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\triangle u - u) + \triangle u + |u|^{q_2} u = 0, \tag{8.1}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_x} + |u|^{q_1} u\right)\Big|_\Gamma = 0, \tag{8.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{8.3}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей класса $\Gamma \in \in \mathbb{C}^{2,\delta}$, $\delta \in (0,1]$.

Введем определение сильного обобщенного решения задачи (8.1)–(8.3).

Определение 10. Под сильным обобщенным решением задачи (8.1)–(8.3) мы понимаем решение $u(x,t)$ класса $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}^1(\Omega))$ следующей задачи:

$$\int\limits_\Omega dx\ \left[\sum_{i=1}^N \left(u'_{x_i}\eta_{x_i} + u_{x_i}\eta_{x_i}\right) + u'\eta\right] - \int\limits_\Omega dx\,|u|^{q_2}u\eta + \\ + \int\limits_\Gamma dx\ \left[|u|^{q_1}u + (q_1+1)|u|^{q_1}u'\right]\eta = 0,\ \ u(0) = u_0 \in \mathbb{H}^1(\Omega)$$

$\forall\ \eta \in \mathbb{H}^1(\Omega), \forall\ \ t \in [0,\mathrm{T}]$, где символом z' обозначена производная по времени, понимаемая в классическом смысле.

К моменту написания книги нам не удалось доказать локальную во времени разрешимость в сильном обобщенном смысле. Поэтому мы будем доказывать разрушение сильного обобщенного решения в предположении локальной разрешимости задачи. Пусть выполнена следующая гипотеза.

Гипотеза 1. Пусть $u_0 \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ и выполнены условия

$$q_1 \in \left(0, \frac{2}{N-2}\right),\ \ q_2 \in \left(0, \frac{4}{N-2}\right)\ \ \text{при}\ \ N \geqslant 3,$$

$q_1 > 0,\ \ q_2 > 0$ при $N = 1,2$. Тогда найдется такое максимальное $\mathrm{T}_0 > > 0$, что существует единственное сильное обобщенное решение задачи (8.1)–(8.3) класса $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{H}^1(\Omega))$, причем либо $\mathrm{T}_0 = +\infty$, либо $\mathrm{T}_0 < +\infty$ и в последнем случае имеет место предельное равенство

$$\limsup_{t\uparrow \mathrm{T}_0} \| u \|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} = +\infty. \tag{8.4}$$

Теорема 30. *Пусть выполнена гипотеза, тогда если* $q_1 < q_2$ *и выполнены следующие условия*:

$$\frac{1}{q_2+2} \| u_0 \|^{q_2+2}_{q_2+2} \geqslant \frac{1}{2} \| \nabla u_0 \|^2_2 + \frac{1}{q_1+2} \int\limits_\Gamma dx\,|u_0|^{q_1+2},$$

$$\| u_0 \|^{q_2+2}_{q_2+2} \geqslant \| \nabla u_0 \|^2_2 + \int\limits_\Gamma dx\,|u_0|^{q_1+2} + \\ + \left(\frac{\beta}{\alpha-1}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{2} \| \nabla u_0 \|^2_2 + \frac{1}{2} \| u_0 \|^2_2 + \frac{q_1+1}{q_1+2} \int\limits_\Gamma dx\,|u_0|^{q_1+2}\right),$$

то $T_0 \in [T_1, T_2]$ *и выполнено предельное равенство* (8.4), *где*

$$T_2 = A^{-1}\Phi_0^{1-\alpha}, \quad T_1 = \frac{2}{q_2 B_2}\Phi_0^{-q_2/2},$$

$$\alpha = \frac{q_2+q_1+4}{2(q_1+2)}, \quad \beta = \frac{2}{q_2-q_1}\left[q_2^2 + \frac{|q_1-q_2|^2(q_1+2)}{2(q_1+1)^2}\right], \quad q_2 > q_1,$$

$$\Phi_0 = \Phi(0) = \frac{1}{2}\parallel \nabla u_0 \parallel_2^2 + \frac{1}{2}\parallel u_0 \parallel_2^2 + \frac{q_1+1}{q_1+2}\int\limits_\Gamma dx\,|u_0|^{q_1+2},$$

$$\Phi'(0) = \parallel u_0 \parallel_{q_2+2}^{q_2+2} - \parallel \nabla u_0 \parallel_2^2 - \int\limits_\Gamma dx\,|u_0|^{q_1+2},$$

$$A^2 = (\alpha-1)^2\Phi^{-2\alpha}(\Phi'(0))^2 - (\alpha-1)\beta\Phi_0^{2-2\alpha}, \quad B_2 = \mathbb{B}_1^{q_2+2}2^{(q_2+2)/2},$$

B_1 — *константа наилучшего вложения* $\mathbb{H}^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega)$.

Доказательство.

Возьмем в качестве η функцию $u \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T_0);\mathbb{H}^1(\Omega))$, тогда получим первое энергетическое равенство

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\parallel \nabla u \parallel_2^2 + \frac{1}{2}\parallel u \parallel_2^2 + \frac{q_1+1}{q_1+2}\int\limits_\Gamma dx\,|u|^{q_1+2}\right) + \\ + \parallel \nabla u \parallel_2^2 + \int\limits_\Gamma dx\,|u|^{q_1+2} = \parallel u \parallel_{q_2+2}^{q_2+2}. \quad (8.5)$$

Теперь в качестве η возьмем функцию $u' \in \mathbb{C}([0,T_0);\mathbb{H}^1(\Omega))$. Тогда получим второе энергетическое равенство

$$\parallel \nabla u' \parallel_2^2 + \parallel u' \parallel_2^2 + (q_1+1)\int\limits_\Gamma dx\,|u|^{q_1}(u')^2 = \\ = \frac{1}{q_2+2}\frac{d}{dt}\parallel u \parallel_{q_2+2}^{q_2+2} - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\parallel \nabla u \parallel_2^2 - \frac{1}{q_1+2}\frac{d}{dt}\int\limits_\Gamma dx\,|u|^{q_1+2}. \quad (8.6)$$

Пусть

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2}\parallel \nabla u \parallel_2^2 + \frac{1}{2}\parallel u \parallel_2^2 + \frac{q_1+1}{q_1+2}\int\limits_\Gamma dx\,|u|^{q_1+2}. \quad (8.7)$$

Нетрудно убедиться, что в силу принадлежности решения задачи $u(x,t)$ классу $\mathbb{C}^{(1)}([0,T_0);\mathbb{H}^1(\Omega))$ и в силу условий гипотезы имеем: для любого элемента из $\mathbb{H}^1(\Omega)$ определен след из $\mathbb{L}^{q_1+2}(\Gamma)$ и $\mathbb{H}^1(\Omega) \subset \subset \mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega)$. В этом случае функция $\Phi(t) \in \mathbb{C}^{(1)}[0,T_0)$. Наконец, в силу первого энергетического равенства получим, что

$$\Phi(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0,T_0). \quad (8.8)$$

На данном этапе наших рассуждений нетрудно доказать, что имеет место следующее неравенство:

$$(\Phi')^2 \leqslant (q_1+2)\Phi \mathrm{J}, \quad \mathrm{J} \equiv \| \nabla u' \|_2^2 + \| u' \|_2^2 + (q_1+1)\int\limits_\Gamma dx\,|u|^{q_1}(u')^2. \tag{8.9}$$

Действительно, в силу (8.7), (8.8) имеет место следующая цепочка неравенств:

$$(\Phi')^2 = \left(\int\limits_\Omega dx\,(\nabla u', \nabla u) + \int\limits_\Omega dx\,u'u + (q_1+1)\int\limits_\Gamma dx\,|u|^{q_1}uu'\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \| \nabla u' \|_2^2 \| \nabla u \|_2^2 + \| u' \|_2^2 \| u \|_2^2 + (q_1+1)^2 \int\limits_\Gamma dx\,|u|^{q_1}(u')^2 \int\limits_\Gamma dx\,|u|^{q_1+2} +$$

$$+ 2\| \nabla u' \|_2 \| \nabla u \|_2 \| u' \|_2 \| u \|_2 + 2(q_1+1)\left(\int\limits_\Gamma dx\,|u|^{q_1}|u'|^2\right)^{1/2} \times$$

$$\times \| \nabla u \|_2 \left(\int\limits_\Gamma dx\,|u|^{q_1+2}\right)^{1/2} \| \nabla u' \|_2 + \left(\int\limits_\Gamma dx\,|u|^{q_1}|u'|^2\right)^{1/2} \| u \|_2 \times$$

$$\times 2(q_1+1)\left(\int\limits_\Gamma dx\,|u|^{q_1+2}\right)^{1/2} \| u' \|_2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\| \nabla u \|_2^2 + \| u \|_2^2 + (q_1+1)\int\limits_\Gamma dx\,|u|^{q_1+2}\right) \times$$

$$\times \left(\| \nabla u' \|_2^2 + \| u' \|_2^2 + (q_1+1)\int\limits_\Gamma dx\,|u|^{q_1}(u')^2\right) \leqslant$$

$$\leqslant (q_1+2)\left(\frac{1}{2}\| \nabla u \|_2^2 + \frac{1}{2}\| u \|_2^2 + \frac{q_1+1}{q_1+2}\int\limits_\Gamma dx\,|u|^{q_1+2}\right) \times$$

$$\times \left(\| \nabla u' \|_2^2 + \| u' \|_2^2 + (q_1+1)\int\limits_\Gamma dx\,|u|^{q_1}(u')^2\right) \leqslant$$

$$\leqslant (q_1+2)\Phi \mathrm{J},$$

т. е. имеет место неравенство (8.9).

Из (8.5), (8.6) получим следующую цепочку неравенств:

$$\mathrm{J} \leqslant \frac{1}{q_2+2}\left[\frac{d}{dt}\parallel u\parallel_{q_2+2}^{q_2+2} - \frac{d}{dt}\parallel \nabla u\parallel_2^2 - \frac{d}{dt}\int\limits_\Gamma dx\,|u|^{q_1+2}\right] -$$

$$- \frac{q_2}{2(q_2+2)}\frac{d}{dt}\parallel \nabla u\parallel_2^2 + \frac{q_1-q_2}{(q_1+2)(q_2+2)}\frac{d}{dt}\int\limits_\Gamma dx\,|u|^{q_1+2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{q_2+2}\Phi'' + \frac{q_2}{2(q_2+2)}\left|\frac{d}{dt}\parallel \nabla u\parallel_2^2\right| +$$

$$+ \frac{|q_1-q_2|}{(q_1+2)(q_2+2)}\left|\frac{d}{dt}\int\limits_\Gamma dx\,|u|^{q_1+2}\right|. \quad (8.10)$$

Справедливы следующие вспомогательные неравенства

$$\frac{q_2}{2(q_2+2)}\left|\frac{d}{dt}\parallel \nabla u\parallel_2^2\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\parallel \nabla u'\parallel_2^2 + \left(\frac{q_2}{q_2+2}\right)^2\frac{1}{\varepsilon}\Phi, \quad (8.11)$$

$$\frac{|q_1-q_2|}{(q_1+2)(q_2+2)}\left|\frac{d}{dt}\int\limits_\Gamma dx\,|u|^{q_1+2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2}(q_1+1)\int\limits_\Gamma dx\,|u|^{q_1}(u')^2 + \frac{|q_1-q_2|^2(q_1+2)}{(q_1+1)^2(q_2+2)^2 2\varepsilon}\Phi. \quad (8.12)$$

Из неравенств (8.10)–(8.12) получим неравенство

$$\mathrm{J} \leqslant \frac{1}{q_2+2}\Phi'' + \varepsilon\mathrm{J} + \left(\frac{q_2}{q_2+2}\right)^2\frac{1}{\varepsilon}\Phi + \frac{|q_1-q_2|^2(q_1+2)}{(q_1+1)^2(q_2+2)^2 2\varepsilon}\Phi. \quad (8.13)$$

Из (8.9) и (8.13) получим обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка (см. [Калантаров, Ладыженская])

$$\Phi\Phi'' - \alpha(\Phi')^2 + \beta\Phi^2 \geqslant 0, \quad (8.14)$$

где

$$\alpha = \frac{q_2+2}{q_1+2}[1-\varepsilon], \quad \beta = \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{q_2^2}{q_2+2} + \frac{|q_1-q_2|^2(q_1+2)}{2(q_1+1)^2(q_2+2)}\right].$$

Воспользовавшись произволом в выборе $\varepsilon > 0$, получим условие, при котором $\alpha > 1$, когда $q_2 > q_1$. Действительно, возьмем $\varepsilon \in (0, (q_2-q_1)/(q_2+2))$.

Потребуем теперь выполнения следующего начального условия:

$$\frac{1}{q_2+2}\parallel u_0\parallel_{q_2+2}^{q_2+2} \geqslant \frac{1}{2}\parallel \nabla u_0\parallel_2^2 + \frac{1}{q_1+2}\int\limits_\Gamma dx\,|u_0|^{q_1+2}. \quad (8.15)$$

При выполнении условия (8.15) из второго энергетического равенства (8.6) получим условие

$$\frac{1}{q_2+2}\parallel u\parallel_{q_2+2}^{q_2+2}>\frac{1}{2}\parallel\nabla u\parallel_2^2+\frac{1}{q_1+2}\int\limits_\Gamma dx\,|u|^{q_1+2}. \tag{8.16}$$

В свою очередь из (8.16) и (8.5) получим неравенство

$$\Phi^{'}\geqslant 0. \tag{8.17}$$

В силу (8.14) приходим к следующему неравенству:

$$\mathrm{Z}^{''}-[\alpha-1]\beta\mathrm{Z}\leqslant 0,\ \ \mathrm{Z}=\Phi^{1-\alpha}. \tag{8.18}$$

Поскольку $\mathrm{Z}^{'}=(1-\alpha)\Phi^{-\alpha}\Phi^{'}$, то в силу (8.17) приходим к выводу, что $\mathrm{Z}^{'}\leqslant 0$. Тогда из (8.18) получим

$$(\mathrm{Z}^{'})^2\geqslant \mathrm{A}^2+[\alpha-1]\beta\mathrm{Z}^2, \tag{8.19}$$

где

$$\mathrm{A}^2=(\alpha-1)^2\Phi^{-2\alpha}(\Phi^{'}(0))^2-(\alpha-1)\beta\Phi_0^{2-2\alpha}>0$$

при условии

$$\Phi^{'}(0)>\left(\frac{\beta}{\alpha-1}\right)^{1/2}\Phi(0).$$

Тогда из (8.19) вытекает, что

$$|\mathrm{Z}^{'}|\geqslant \mathrm{A},\ \ \mathrm{Z}\leqslant \mathrm{Z}_0-\mathrm{A}t.$$

Стало быть, для времени T_0 справедлива оценка сверху $\mathrm{T}_0\leqslant \mathrm{T}_2$, где $\mathrm{T}_2=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{Z}_0$.

Теперь получим оценку снизу на время разрушения сильного обобщенного решения задачи (8.1)–(8.3). Действительно, из первого энергетического равенства (8.5) вытекает неравенство

$$\frac{d\Phi}{dt}\leqslant\parallel u\parallel_{q_2+2}^{q_2+2}\leqslant \mathrm{B}_1^{q_2+2}\parallel\nabla u\parallel_2^{q_2+2}\leqslant \mathrm{B}_2\Phi^{\vartheta},\ \ \vartheta=1+q_2/2,$$

где $\mathrm{B}_2=\mathbb{B}_1^{q_2+2}2^{(q_2+2)/2}$, B_1 — константа наилучшего вложения $\mathbb{H}^1(\Omega)\subset\subset\mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega)$. Отсюда следует

$$\Phi(t)\leqslant\frac{\Phi_0}{\left[1-q_2 2^{-1}\Phi_0^{q_2/2}\mathrm{B}_2 t\right]^{2/q_2}}.$$

Теорема доказана.

Часть III

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Глава 8

МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ, НЕРАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ

В этой главе рассматриваются методы численного решения уравнений, неразрешенных относительно производной по времени. Вначале на примере одного линейного уравнения псевдопараболического типа рассматривается возможность применения теории динамических потенциалов для численного решения начально-краевых задач. При этом задача редуцируется к интегральному уравнению, для которого строится эффективный алгоритм численного решения, допускающий проведение расчетов на сгущающихся сетках с контролем точности. Далее рассматриваются некоторые нелинейные уравнения псевдопараболического типа, подробно изученные во второй части книги. При помощи жесткого метода прямых задача сводится либо к решению неявной системы обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности, либо к решению дифференциально-алгебраической системы уравнений. Для решения этих задач используется комплексная схема Розенброка, пригодная для задач с большой жесткостью. Расчеты на сгущающихся сетках позволяют определить время разрушения решения с точностью порядка шага сетки.

§ 1. Численное решение начально-краевых задач для линейных уравнений соболевского типа методом динамических потенциалов. Динамические потенциалы

Одним из наиболее плодотворных методов исследования краевых задач является метод потенциалов. Применение этого метода к изучению уравнений соболевского типа потребовало построения так называемых динамических потенциалов, которые являются аналогами классических объемного потенциала и потенциалов простого и двойного слоя. Динамические потенциалы для уравнения Соболева

$$\Delta u_{tt} + \omega^2 u_{x_3 x_3} = 0$$

были построены и изучены в работах [Капитонов; Сказка]. Теория динамических потенциалов для уравнения гравитационно-гироскопических волн в приближении Буссинеска, ($\beta = 0$)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\Delta_3 u - \beta^2 u\right] + \omega_0^2 \Delta_2 u + \alpha^2\left[u_{x_3 x_3} - \beta^2 u\right] = 0, \tag{1.1}$$

была развита в монографиях [Габов, Свешников, 1986; Габов, Свешников, 1990], а также в работе [Габов, 1984] были построены динамические логарифмический и угловой потенциалы — аналоги соответствующих потенциалов для уравнения Лапласа. Дальнейшее развитие теория динамических потенциалов для уравнения (1.1) получила в работах [Габов, Плетнер, 1987; Плетнер, 1988; Корпусов, 1997]. В 1989 г. С. А. Габов обратил внимание, что нестационарные ионно-звуковые волны в незамагниченной плазме также описываются уравнением соболевского типа [Габов, 1989]:

$$(\Delta u - u)_{tt} + \Delta u = 0. \tag{1.2}$$

Исследованию начально-краевых задач для уравнения (1.2) методом динамических потенциалов посвящена работа [Альшин, 1998].

При математическом моделировании волновых процессов в средах с сильной анизотропной дисперсией (например, ферромагнетиках, ферритах, диэлектриках, плазме во внешних полях и т.п.) возникают векторные системы уравнений в частных производных. Исследования последних лет (см. гл. I) показали, что в ряде случаев такие векторные системы могут быть сведены к одному скалярному дифференциальному уравнению в частных производных высокого порядка, относящемуся к соболевскому типу. Следует ожидать, что для большинства из них также удастся построить теорию динамических потенциалов. Нашей целью является продемонстрировать, что динамические потенциалы могут быть использованы не только для доказательства разрешимости начально-краевых задач, но и для построения эффективного численного метода их решения.

1.1. Динамические потенциалы для одного уравнения. В гл. I получено уравнение, описывающее квазистационарные процессы в полупроводниках, которое в линейном приближении выглядит так:

$$(\Delta u - u)_t + \alpha \Delta u + \beta u = 0. \tag{1.3}$$

Здесь $\alpha \geqslant 0$, а β может иметь любой знак, u имеет смысл потенциала электрического поля. Построим динамические потенциалы простого и двойного слоя для уравнения (1.3) в двумерном случае, т. е.

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

Пусть область $\Omega \in R^2$ ограничена простой замкнутой гладкой кривой Γ ляпуновского типа. Рассмотрим потенциалы

$$V[\nu](x,t) = \int\limits_{\Gamma} \nu(t,s) K_0(|x-y(s)|)\, ds + \\ + \int\limits_0^t \int\limits_{\Gamma} \nu(\tau,s) F(|x-y(s)|, t-\tau)\, ds\, d\tau = \\ = V_1[\nu](x,t) + V_2[\nu](x,t), \quad (1.4)$$

$$W[\mu](x,t) = \int\limits_{\Gamma} \mu(t,s) \frac{\partial}{\partial n_s} K_0(|x-y(s)|)\, ds + \\ + \int\limits_0^t \int\limits_{\Gamma} \mu(\tau,s) \frac{\partial}{\partial n_s} F(|x-y(s)|, t-\tau) ds\, d\tau = \\ = W_1[\mu](x,t) + W_2[\mu](x,t), \quad (1.5)$$

где

$$F(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left\{ K_0\left(\sqrt{\frac{p-\beta}{p+\alpha}}\, x \right) - K_0(x) \right\} \exp(pt)\, dp. \quad (1.6)$$

Отметим, что ветвь корня $\gamma(p) = \sqrt{\frac{p-\beta}{p+\alpha}}$ в формуле (1.6) выбрана так, что $\gamma(p) \to 1$, когда $p \to \infty$ в полуплоскости $\mathrm{Re} p > 0$. Под $K_0(z)$ понимаем главную ветвь соответствующей многозначной функции с разрезом по отрицательной части вещественной оси, $|x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$, $\sigma > \max(-\alpha, \beta)$, n_s — внешняя нормаль к Γ в точке $y(s) = (y_1(s), y_2(s))$, в качестве параметра s выбрана естественная параметризация кривой Γ, т. е. ее длина. Потенциал (1.4) назвается динамическим потенциалом простого слоя, а потенциал (1.5) — динамическим потенциалом двойного слоя для уравнения (1.3).

Прежде чем перейти к изучению поведения потенциала вблизи границы, получим одно представление для функции $F(x,t)$. Справедливо следующее равенство:

$$K_0\left(\sqrt{\frac{p-\beta}{p+\alpha}}\, x \right) - K_0(x) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_0(-i\mu x) \left\{ \frac{\mu}{\mu^2 + \frac{p-\beta}{p+\alpha}} - \frac{\mu}{\mu^2+1} \right\} d\mu. \quad (1.7)$$

Доказательство основано на возможности замкнуть контур интегрирования в верхнюю полуплоскость и вычислении вычетов в полюсах,

попадающих внутрь этого контура. Подставим (1.7) в (1.6) и поменяем порядок интегрирования:

$$F(x,t) =$$
$$= -\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma-i\infty} K_0(-i\mu x)\left\{\frac{\mu}{\mu^2+\frac{p-\beta}{p+\alpha}}-\frac{\mu}{\mu^2+1}\right\}\exp(pt)\,dp\,d\mu =$$
$$= -\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_0(-i\mu x)\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma-i\infty}\frac{(\alpha+\beta)\,\mu\exp(pt)}{(\mu^2+1)^2\left(p-\frac{\beta-\alpha\mu^2}{\mu^2+1}\right)}dp\,d\mu =$$
$$= \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_0(-i\mu x)\frac{(\alpha+\beta)\,\mu\exp\left[\left(\beta-\alpha\mu^2\right)t/\mu^2+1\right]}{(\mu^2+1)^2}\,d\mu.$$

Учитывая, что $K_0(-i\mu x)=\overline{K_0(i\mu x)}$, а также тот факт, что второй сомножитель является нечетной функцией, получаем

$$F(x,t) = \frac{2}{\pi}\mathrm{Im}\int\limits_0^{+\infty} K_0(-i\mu x)\frac{(\alpha+\beta)\,\mu}{(\mu^2+1)^2}\exp\left(\frac{\mu^2}{\mu^2+1}t\right)d\mu =$$
$$= \int\limits_0^{+\infty} J_0(\mu x)\frac{(\alpha+\beta)\,\mu}{(\mu^2+1)^2}\exp\left(\frac{\beta-\alpha\mu^2}{\mu^2+1}t\right)d\mu =$$
$$= \exp(-\alpha t)\int\limits_0^{+\infty} J_0(\mu x)\frac{(\alpha+\beta)\,\mu}{(\mu^2+1)^2}\exp\left(\frac{(\alpha+\beta)\,t}{\mu^2+1}\right)d\mu. \quad (1.8)$$

Выше была учтена связь $K_0(-iz)=\frac{i\pi}{2}H_0^{(1)}(z)$ $(z>0)$ $H_0^{(1)}(z)=$ $=J_0(z)+iN_0(z)$.

Замечание. В формуле (1.8) интеграл сходится равномерно в области $(x,t)\in[0,+\infty)\times[0,T]$, где T — любое фиксированное число, большее нуля, следовательно, $F(x,t)$ — непрерывная функция при $x\geqslant$ $\geqslant 0$ и $t\geqslant 0$.

Преобразуем интеграл в формуле (1.8), представив экспоненту в виде ряда по степеням $(\alpha+\beta)\,t/\left(\mu^2+1\right)$ и воспользовавшись тем, что в данном случае можно поменять порядок суммирования и интегрирования:

$$\int\limits_0^{+\infty} J_0(\mu x)\frac{(\alpha+\beta)\,\mu}{(\mu^2+1)^2}\exp\left(\frac{(\alpha+\beta)\,t}{\mu^2+1}\right)d\mu =$$

$$= \int_0^{+\infty} J_0(\mu x)\,\frac{(\alpha+\beta)\,\mu}{(\mu^2+1)^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\alpha+\beta)^n\,t^n}{n!\,(1+\mu^2)^n}\,d\mu =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n\,(\alpha+\beta)^{n+1}}{n!}\int_0^{+\infty} J_0(\mu x)\,\frac{\mu}{(\mu^2+1)^{2+n}}\,d\mu.$$

Интеграл под знаком суммы можно понимать как преобразование Ганкеля и использовать табличное значение [Диткин, Прудников, 1974]:

$$\int_0^{+\infty} J_0(\mu x)\,\frac{\mu}{(\mu^2+1)^{2+n}}\,d\mu = \frac{x^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}K_{n+1}(x).$$

И окончательно:

$$F(x,t) = \exp(-\alpha t)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}\frac{(\alpha+\beta)^{n+1}\,x^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}K_{n+1}(x). \qquad (1.9)$$

Формула (1.9) полезна в двух отношениях: во-первых, позволяет судить о поведении функции $F(x,t)$ вблизи $x=0$, во-вторых, этот ряд очень быстро сходится и может быть использован для приближенного вычисления $F(x,t)$ с высокой точностью.

Далее нам потребуются аналоги формул (1.8), (1.9) для функции $\dfrac{\partial}{\partial x}F(x,t)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,t) = -\exp(-\alpha t)\int_0^{+\infty} J_1(\mu x)\,\frac{(\alpha+\beta)\,\mu^2}{(\mu^2+1)^2}\exp\left(\frac{(\alpha+\beta)\,t}{\mu^2+1}\right)d\mu. \qquad (1.10)$$

Действуя по схеме, использованной выше при получении формулы (1.9), получим

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial x} = -\exp(-\alpha t)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}\frac{(\alpha+\beta)^{n+1}\,x^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}K_n(x). \qquad (1.11)$$

Замечание. Так как $x^{n+1}K_n(x) \leqslant x2^{n-1}(n-1)!$ при $n \geqslant 1$, то

$$\left|\frac{\partial F(x,t)}{\partial x}\right| \leqslant \exp(-\alpha t)\,(K_0(x)+C(t))\,x. \qquad (1.12)$$

Далее мы будем считать, что $v(t,s) \in \mathbb{C}_0^{(1)}([0,+\infty);\mathbb{C}(\Gamma))$, если $v(t,s) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,+\infty);\mathbb{C}(\Gamma))$ и $v(0,s)=0$.

Лемма 1. *Пусть* $v(t,s) \in \mathbb{C}_0^{(1)}([0,+\infty);\mathbb{C}(\Gamma))$, *тогда для любого* $x \notin \Gamma$ *и* $t \geqslant 0$ *функция* $u(x,t) = V[\nu](x,t)$ *удовлетворяет*

в классическом смысле уравнению (1.3) *и нулевым начальным условиям* $u|_{t=0} = 0$.

Доказательство леммы 1 проводится путем непосредственной проверки.

Замечание. Динамический потенциал простого слоя является непрерывной функцией при любых $x \in \mathbb{R}^2$ и $t \geqslant 0$.

Потенциал (1.4) состоит из двух слагаемых: $V_1[\nu](x,t)$ и $V_2[\nu](x,t)$. Первое представляет собой потенциал простого слоя для уравнения Гельмгольца $\Delta u - u = 0$ с плотностью, непрерывно зависящей от t как от параметра. При сформулированных выше условиях потенциал простого слоя $V_1[\nu](x,t)$ является, как известно, непрерывной функцией пространственных координат. Второе слагаемое — также непрерывная функция, так как $F(x,t)$ — непрерывная функция.

Лемма 2. *Пусть* $\mu(t,s) \in \mathbb{C}_0^{(1)}([0,+\infty);\mathbb{C}(\Gamma))$, *тогда для любого* $x \notin \Gamma$ *и* $t \geqslant 0$ *функция* $u(t,x) = W[\mu](t,x)$ *удовлетворяет в классическом смысле уравнению* (1.3) *и нулевым начальным условиям* $u|_{t=0} = 0$. *А также справедливы предельные формулы*

$$\lim_{x \to y_0 \in \Gamma} W[\mu](t,x) = \overline{W}[\mu](t,y_0) \pm \pi\mu(t,y_0). \tag{1.13}$$

Здесь $\overline{W}[\mu](t,y_0)$ — прямое значение потенциала на границе, знак «$-$» надо брать, если стремление к границе происходит изнутри, а «$+$», если стремление к границе снаружи.

Доказательство первого утверждения в лемме 2 проводится так же, как для леммы 1, т. е. путем подстановки потенциала (1.5) в уравнение (1.3) и непосредственной проверки. Докажем справедливость предельных формул (1.13). Потенциал (1.5) представляет собой сумму двух слагаемых: $W_1[\nu](x,t)$ и $W_2[\nu](x,t)$. Первое — потенциал двойного слоя для уравнения Гельмгольца, он претерпевает разрыв при переходе через границу по формулам, в точности совпадающим с формулой (1.13), следовательно, нужно установить, что второе слагаемое есть непрерывная функция пространственных координат. Преобразуем $W_2[\nu](x,t)$ в формуле (1.5):

$$\begin{aligned} W_2[\mu](x,t) &= \int_0^t \int_\Gamma \mu(\tau,s) \frac{\partial}{\partial n_s} F(|x-y(s)|, t-\tau)\, ds\, d\tau = \\ &= \int_0^t \int_\Gamma \mu(\tau,s) \frac{\partial}{\partial x} F(|x-y(s)|, t-\tau) \frac{\partial |x-y(s)|}{\partial n_s}\, ds\, d\tau = \\ &= \int_0^t \int_\Gamma \mu(\tau,s) \frac{\partial}{\partial x} F(|x-y(s)|, t-\tau) \cos\varphi\, ds\, d\tau. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Здесь φ — угол между внутренней нормалью в точке $y(s)$ и вектором, соединяющим $y(s)$ и x. В силу оценки (1.12) мы можем ядро в выражении (1.14) считать непрерывной функцией, так как при $x = y(s)$ его можно доопределить нулевым предельным значением. Из непрерывности ядра немедленно следует непрерывность $W_2[\mu](x,t)$.

Замечание. В силу линейности уравнения (1.3) любая линейная комбинация потенциалов (1.4), (1.5) также будет удовлетворять уравнению и нулевым начальным условиям.

1.2. Разрешимость задачи Дирихле для одного уравнения. Задача S. Найти непрерывную в $[0,+\infty)\times\overline{\Omega}$ функцию $u(t,x)$, принадлежащую классу $\mathbb{C}\left([0,+\infty);\mathbb{C}^{(2)}(\Omega)\right)\bigcap\mathbb{C}^{(1)}\left((0,+\infty);\mathbb{C}^{(2)}(\Omega)\right)$, удовлетворяющую в $[0,+\infty)\times\Omega$ уравнению

$$(\Delta u - u)_t + \alpha\Delta u + \beta u = 0,$$

нулевому начальному условию $u|_{t=0} = 0$ и условию Дирихле на границе: $u|_\Gamma = f(s,t)$.

Исследование разрешимости задачи S проведем методом, развитым в [Габов, Свешников, 1986; Габов, Свешников, 1990].

Теорема 1. *Пусть* $f(s,t)\in\mathbb{C}_0^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}(\Gamma))$, *тогда задача S разрешима.*

Доказательство. Будем искать решение задачи S в виде динамического потенциала двойного слоя (1.5):

$$u(x,t) = W[\mu](x,t).$$

Тогда в силу леммы 2 $u(x,t)$ будет удовлетворять уравнению и начальным условиям. Граничное условие приводит к интегральному уравнению

$$-\pi\mu(t,\sigma) + \int\limits_\Gamma \mu(t,s)\frac{\partial}{\partial n_s}K_0(|x(\sigma)-y(s)|)\,ds + \\ + \int\limits_0^t\int\limits_\Gamma \mu(\tau,s)\frac{\partial}{\partial n_s}F(|x(\sigma)-y(s)|,t-\tau)\,ds\,d\tau = f(\sigma,t). \quad (1.15)$$

Будем искать решение уравнения (1.15) в виде

$$\mu(t,\sigma) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mu_k(t,\sigma), \quad (1.16)$$

где $\mu_k(\sigma,t)$ определяются из соотношений

$$B[\mu_0](t,\sigma) = -\pi\mu_0(t,\sigma) + \int\limits_\Gamma \mu_0(t,s)\frac{\partial}{\partial n_s}K_0(|x(\sigma)-y(s)|)\,ds = f(\sigma,t),$$

$$-\pi\mu_k(t,\sigma)+\int\limits_\Gamma \mu_k(t,s)\frac{\partial}{\partial n_s}K_0(|x(\sigma)-y(s)|)\,ds=$$

$$=-\int\limits_0^t\int\limits_\Gamma \mu_{k-1}(\tau,s)\frac{\partial}{\partial n_s}F(|x(\sigma)-y(s)|,t-\tau)\,ds\,d\tau,\ k\geqslant 1. \quad (1.17)$$

Последнее уравнение для удобства перепишем в виде

$$B[\mu_k](t,\sigma)=\int\limits_0^t A[\mu_{k-1}](\tau,\sigma)\,d\tau. \quad (1.18)$$

Уравнение (1.17) зависит от переменной t как от параметра. Рассмотрим задачу Дирихле в области Ω для уравнения Гельмгольца:

$$\Delta w-w=0,$$
$$w|_\Gamma=h(\sigma).$$

Если искать решение этой задачи в виде классического потенциала двойного слоя для уравнения Гельмгольца,

$$w(x,t)=\int\limits_\Gamma \mu(s)\frac{\partial}{\partial n_s}K_0(|x-y(s)|)\,ds,$$

то мы приходим к интегральному уравнению

$$B[\mu](\sigma)=h(\sigma).$$

Как следует из известных результатов теории эллиптических краевых задач, при сформулированных выше условиях на Γ и любой непрерывной функции $h(\sigma)$ оно однозначно разрешимо. Тогда по теореме Банаха об обратном операторе существует ограниченный оператор B^{-1}, действующий из $\mathbb{C}(\Gamma)$ в $\mathbb{C}(\Gamma)$. И уравнение (1.17) переходит в

$$\mu_k(t,\sigma)=B^{-1}\int\limits_0^t A[\mu_{k-1}](\tau,\sigma)\,d\tau. \quad (1.19)$$

Пусть $M(T)=\left\|B^{-1}\right\|\sup\limits_{0\leqslant\tau\leqslant T}\|A\|$, тогда

$$\|\mu_k(\sigma,t)\|_{\mathbb{C}(\Gamma)}\leqslant M(T)\int\limits_0^t\|\mu_{k-1}(\sigma,\tau)\|_{\mathbb{C}(\Gamma)}\,d\tau. \quad (1.20)$$

Из уравнения (1.17) следует оценка

$$\|\mu_0(\sigma,t)\|_{\mathbb{C}(\Gamma)}\leqslant\left\|B^{-1}\right\|\sup_{0\leqslant\tau\leqslant T}\|f(\sigma,\tau)\|_{\mathbb{C}(\Gamma)}\equiv q(T). \quad (1.21)$$

В силу (1.21) при $k = 1$ получим

$$\|\mu_1(\sigma, t)\|_{\mathbb{C}(\Gamma)} \leqslant M(T) \int_0^t q(T)\, d\tau = M(T)\, q(T)\, t. \tag{1.22}$$

Из (1.22) и оценки (1.20) для $k = 2$ получим

$$\|\mu_2(\sigma, t)\|_{\mathbb{C}(\Gamma)} \leqslant M(T) \int_0^t M(T)\, q(T)\, \tau\, d\tau = M^2(T)\, q(T)\, t^2 \Big/ 2.$$

Для произвольного k окончательно получаем

$$\|\mu_k(\sigma, t)\|_{\mathbb{C}(\Gamma)} \leqslant M^k(T)\, q(T)\, t^k / k!. \tag{1.23}$$

Отсюда немедленно следует равномерная сходимость ряда (1.16), так как он мажорируется сходящимся числовым рядом

$$\sum_{k=0}^{+\infty} M^k(T)\, q(T)\, T^k / k!.$$

Аналогичные оценки справедливы и для ряда из производных $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}\mu_k(t, \sigma)$. Таким образом, ряд (1.16) определяет функцию $\mu(t, s) \in \in \mathbb{C}_0^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}(\Gamma))$, которая является решением интегрального уравнения (1.15), а значит, динамический потенциал двойного слоя, порожденный этой функцией, будет удовлетворять граничному условию. Отметим, что T можно выбрать сколько угодно большим, а значит, решение будет существовать при всех $t \geqslant 0$.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Задача S имеет единственное решение.*

Доказательство.

Пусть существуют два решения: u_1 и u_2, тогда их разность $w = = u_1 - u_2$ будет удовлетворять следующей задаче:

$$(\Delta w - w)_t + \alpha \Delta w + \beta w = 0, \quad w|_{t=0} = w|_{\Gamma} = 0.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$(\Delta w - w)_t + \alpha(\Delta w - w) = -(\alpha + \beta) w$$

и проинтегрируем с учетом нулевых начальных условий:

$$\Delta w(t, x) - w(t, x) = -\int_0^t \exp[-\alpha(t - \tau)](\alpha + \beta)\, w(\tau, x)\, d\tau.$$

Как известно, при сформулированных выше условиях на область Ω и ее границу Γ для уравнения Гельмгольца существует функция Грина

$G(x,y)$ для внутренней задачи Дирихле. Тогда с учетом нулевых граничных условий получим

$$w(t,x)=\int\limits_{\Omega}\int G(x,y)\int\limits_{0}^{t}\exp\left[-\alpha(t-\tau)\right](\alpha+\beta)\,w(\tau,y)\;d\tau\,dy.$$

Так как $|w(t,x)|\leqslant|\alpha+\beta|\int\limits_0^t\sup\limits_{y\in\Omega}|w(\tau,y)|\;d\tau\int\limits_{\Omega}\int G(x,y)\;dy$, то $u(x)=$ $=\int\limits_{\Omega}\int G(x,y)\;dy$, функция $x\in\Omega$ удовлетворяет краевой задаче

$$\Delta u-u=-1,\quad u|_{\Gamma}=0.$$

В силу принципа максимума $0\leqslant u\leqslant 1$, значит

$$|w(t,x)|\leqslant|\alpha+\beta|\int\limits_0^t\sup\limits_{y\in\Omega}|w(\tau,y)|\;d\tau.$$

Здесь правая часть не зависит от x, значит

$$\sup\limits_{x\in\Omega}|w(t,x)|\leqslant|\alpha+\beta|\int\limits_0^t\sup\limits_{y\in\Omega}|w(\tau,y)|\;d\tau.$$

Последнее неравенство возможно, только если $w\equiv 0$.

Замечание. В случае внешней начально-краевой задачи постановку задачи S следует дополнить условиями регулярности на бесконечности: $\lim\limits_{|x|\to\infty}u(x,t)=0$. Вместо уравнения (1.15) следует рассматривать уравнение

$$\pi\mu(t,\sigma)+\int\limits_{\Gamma}\mu(t,s)\frac{\partial}{\partial n_s}K_0(|x(\sigma)-y(s)|)\,ds+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_{\Gamma}\mu(\tau,s)\frac{\partial}{\partial n_s}F(|x(\sigma)-y(s)|,t-\tau)\,ds\,d\tau=f(\sigma,t).\quad(1.24)$$

Тогда для внешней задачи будут справедливы аналоги теорем 1 и 2.

Интегральное уравнение (1.15) содержит интегрирование по времени от 0 до t, т. е. интегральный оператор вольтерровского типа. Это обстоятельство позволяет построить численный сеточный метод решения этого уравнения так, что значения неизвестной функции $\mu(t,s)$ будут находиться последовательно на каждом временном слое. При этом на каждом слое придется решать систему линейных алгебраических уравнений, однако матрица этой системы не будет меняться от слоя к слою, а будет меняться только правая часть, в которую

кроме функции $f(\sigma, t)$ будут входить выражения, содержащие $\mu(t, s)$, вычисленные на предыдущих слоях.

Перейдем к описанию алгоритма. Пространственную сетку на границе следует выбирать из соображений удобства, главное, чтобы она была равномерной или квазиравномерной. Так, в случае звездных областей удобно задавать кривую Γ в полярных координатах: $r = r(\varphi)$. В этом случае равномерная сетка по φ: $\varphi_i = 2\pi i/N$ порождает квазиравномерную сетку на кривой: $x_{1i} = r(\varphi_i)\cos\varphi_i, x_{2i} = r(\varphi_i)\sin\varphi_i$. По времени возьмем равномерную сетку с шагом $\Delta t = \text{const}$, $t_j = j\Delta t$. Далее подбираем подходящую квадратурную формулу, аппроксимирующую интегральное уравнение (1.15) на равномерной по времени и квазиравномерной по пространству сетке:

$$-\pi\mu_{ji} + \sum_{k=1}^{N} K_{ik}\mu_{jk} + \sum_{l=1}^{j}\sum_{k=1}^{N} F_{j-l,i,k}\mu_{lk} = f_{ji}. \qquad (1.25)$$

Здесь μ_{ji} — искомое значение плотности потенциала в i-й пространственной точке и на j-м временном слое, $K_{ik}, F_{j-l,i,k}$ определяются согласно выбранной квадратурной формуле. Мы использовали формулу трапеций на равномерной сетке по времени и на квазиравномерной сетке для аппроксимации интеграла по кривой Γ. Предположим, что при $l = 1, \cdot .j-1$; $k = 1, \cdot, N$ все μ_{lk} найдены, тогда из формулы (1.25) получим

$$-\pi\mu_{ji} + \sum_{k=1}^{N} K_{ik}\mu_{jk} + \sum_{k=1}^{N} F_{0,i,k}\mu_{jk} = f_{ji} - \sum_{l=1}^{j-1}\sum_{k=1}^{N} F_{j-l,i,k}\mu_{lk}. \qquad (1.26)$$

То есть для нахождения μ_{ji} на j-м временном слое необходимо решить систему линейных уравнений с матрицей, не зависящей от j; от j будет зависеть лишь правая часть. Это позволяет экономично построить алгоритм нахождения μ_{ji}: он сводится к умножению один раз вычисленной обратной матрицы на столбец правой части системы линейных алгебраических уравнений (1.26), и только этот столбец приходится вычислять заново на каждом временном слое. Отметим важность полученной выше формулы (1.11), позволяющей вычислять матричные элементы $F_{m,i,k}$ с точностью $10^{-15} - 10^{-16}$.

Были проведены расчеты для различных значений α и β, различных областей с различными краевыми режимами. Проводились тесты на сгущающихся сетках. В случае когда область Ω представляет собой круг, можно построить явное аналитическое решение, его удобно использовать для тестирования численного метода.

Для выяснения эффективного порядка точности предложенного метода были проведены тесты на сгущающихся сетках. Расчеты проводились для задачи внутри единичного круга для уравнения (1.3) с $\alpha = 1, \beta = 0$ и краевым режимом $u|_{r=1} = \sin t \exp(\sin\varphi)$. Погрешность численного решения оценивалась по результатам расчетов на двух со-

седних сетках с использованием метода Ричардсона. Сначала при фиксированном числе узлов пространственной сетки $N = 64$ проводились расчеты с различным числом шагов по времени: $J = 20, 40, ..., 1280$. Результаты этого теста представлены на рис. 1: показано убывание погрешности численного решения в сеточной норме $\mathbb{C}$ при удвоении числа узлов временной сетки. Характер убывания погрешности соответствует точности $O\left(\tau^2\right)$: тангенс угла наклона графика в двойном логарифмическом масштабе равен -2. Такой порядок точности $O\left(\tau^2\right)$ полностью согласуется с порядком аппроксимации интеграла по времени с использованием квадратурной формулы трапеций.

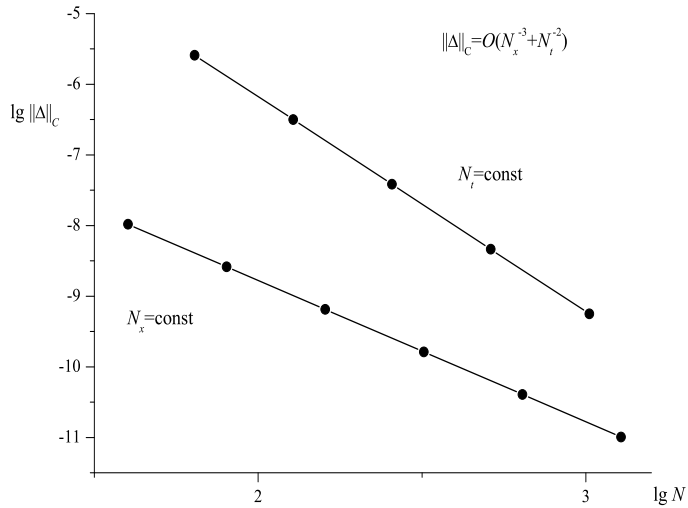

Рис. 1. Убывание погрешности с ростом числа узлов сетки подтверждает точность метода $O\left(N_x^{-3} + \tau^2\right)$

Если при фиксированном числе шагов временной сетки $J = 80$ сгущать пространственную сетку: $N = 32, 64, ..., 1024$, то характер убывания погрешности с ростом числа узлов приятно удивляет: тангенс угла наклона графика погрешности в двойном логарифмическом масштабе равен -3. Таким образом, несмотря на то что для аппроксимации пространственного интеграла также использована квадратурная формула трапеций, порядок точности построенного метода равен $O\left(N^{-3}\right)$. Это связано с тем, что при интегрировании периодических функций по периоду квадратурная формула трапеций имеет более высокий порядок точности, чем в общем случае. На основании проведенных тестов можно сделать вывод, что в случае достаточно гладкой границы

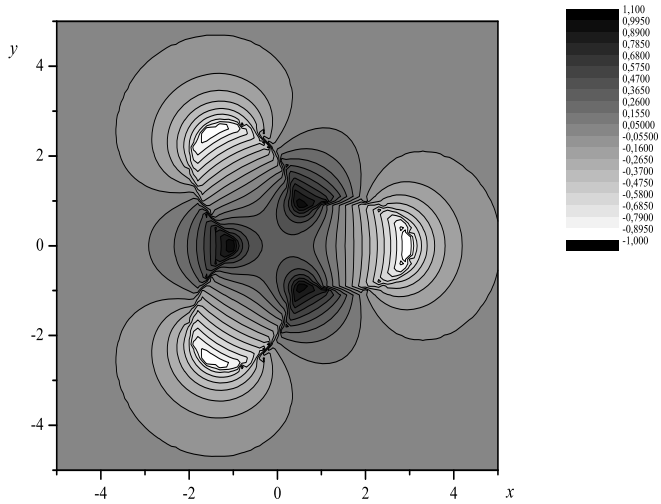

Рис. 2. Изолинии решения для внутренней и внешней задачи Дирихле

и достаточно гладких краевых режимов предложенный метод имеет точность $O\left(N^{-3}+\tau^2\right)$.

Одним из главных преимуществ данного метода является то, что он одинаково хорошо работает как для простых канонических областей, так и для областей с более сложной границей. На рис. 2 приведены изолинии потенциала внутренней и внешней задачи Дирихле с одинаковыми краевыми условиями, заданными на кривой, описываемой в полярных координатах уравнением $\rho = 2 + \cos 3\varphi$.

Подведем некоторые итоги. Применение динамических потенциалов для численного решения начально-краевых задач весьма эффективно в силу ряда причин: понижается размерность задачи (плоскую задачу мы свели к интегральному уравнению на кривой), появляется возможность применения метода для широкого класса областей, простота реализации алгоритма. Однако есть ряд ограничений: граница должна быть гладкой, для вычисления ядра мы использовали представление в виде ряда (1.9), что позволило довести точность вычисления ядра практически до машинной, если подобного представления не удается получить, то приходится численно обращать преобразование Лапласа (1.6).

§ 2. Численное решение начально-краевых задач для нелинейных уравнений псевдопараболического типа схемами Розенброка

2.1. Жесткий метод прямых. При численном решении начально-краевых задач для уравнений в частных производных нередко используют следующий подход: дифференциальные операторы по пространственным переменным заменяются их разностными аналогами на выбранной сетке, тем самым задача сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений большого порядка. Этот метод известен с 40-х годов прошлого века, однако возникающие системы дифференциальных уравнений решались явными методами, в последние годы метод получил новые возможности благодаря возможности решать систему ОДУ жесткими методами [Хайрер, Ваннер, 1999], что позволило избежать расщепления по процессам, уйти от итераций в нелинейных задачах и т. д.

2.2. Жесткие системы ОДУ и методы их решения. При численном решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dt} = F(u)$$

часто возникают задачи, для которых неявные методы дают существенно лучшие результаты, чем явные, такие задачи принято называть жесткими. На жесткость системы влияют такие факторы, как размерность системы, гладкость решения, собственные значения матрицы Якоби $\partial F/\partial u$ и т.д. При численном решении таких задач предъявляются повышенные требования к устойчивости.

Жесткая устойчивость. Начиная с 50-х годов прошлого века для жестких задач стали создавать специальные неявные методы, тогда же были даны формулировки ряда дополнительных свойств, которым должны удовлетворять искомые схемы. Рассмотрим задачу Далквиста

$$\frac{du}{dt} = \lambda u.$$

Для любой линейной схемы переход на следующий временной слой имеет вид $\widehat{u} = R(\tau\lambda)\,u$, где $R(\xi)$ называется функцией роста или функцией устойчивости.

Определение (Далквист). Схема называется A-устойчивой, если $|R(\xi)| \leqslant 1$ при $\mathrm{Re}(\xi) \leqslant 0$.

Также вводят понятие устойчивости.

Определение (Калиткин Н.Н.). Схема называется L_p-устойчивой, если она A–устойчива и $R(\xi) = O(\xi^{-p})$ при $|\xi| \to \infty$.

2.3. Схемы типа Розенброка. Наиболее употребительными методами решения жестких задач являются неявные методы Рунге–Кутты и методы Розенброка (полуявные). В неявных методах Рунге–Кутты

на каждом временном слое приходится решать системы нелинейных уравнений итерационными методами. Главное преимущество методов Розенброка заключается в том, что нелинейные системы там не возникают.

Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{du}{dt} = F(u),$$

где u — вектор-столбец из функций $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)$.

Далее мы будем использовать однопараметрическое семейство одностадийных схем Розенброка [Rosenbrock, 1963]:

$$\widehat{u} = u + \tau \mathrm{Re} k,\ (E - \alpha\tau F_u)\, k = F(u), \tag{2.1}$$

где $F_u \equiv \partial F/\partial u$ — матрица Якоби, E — единичная матрица, τ — шаг по времени, u — решение на текущем временной слое, $\widehat{u}$ — решение на новом временном слое, α — численный параметр, определяющий семейство одностадийных схем Розенброка. Таким образом, вектор k определяется из решения системы линейных уравнений с матрицей $E - \alpha\tau F_u$. Решение линейной системы следует выполнять прямыми методами (например, методом Гаусса с выбором главного элемента). При этом переход с исходного слоя на новый производится за конечное, заранее известное число операций, как в явных схемах. В то же время нахождение k из решения линейной системы вносит в схему неявность. Поэтому такие схемы называют явно-неявными или полуявными. Метод Розенброка легко обобщается для неявных дифференциальных уравнений

$$M\frac{du}{dt} = F(u), \tag{2.2}$$

где M — постоянная невырожденная матрица.

В этом случае схема CROS имеет следующий вид:

$$\widehat{u} = u + \tau \mathrm{Re} k;\ (M - \alpha\tau F_u)\, k = F(u). \tag{2.3}$$

При разных параметрах α схема обладает разными свойствами. При $\alpha = 0$ это явная схема; она имеет погрешность $O(\tau)$. Этот вариант схемы практически непригоден для расчета жестких задач. При $\alpha = 0.5$ получается известная схема «с полусуммой». Она имеет точность $O(\tau^2)$ и безусловно устойчива; поэтому ее часто используют в расчетах. Однако по классификации жестких задач она лишь A-устойчива. При $\alpha = 1$ получается так называемая обратная схема Эйлера (чисто неявная). Она $L1$-устойчива, что обеспечивает безусловную устойчивость и хорошее качественное поведение численного решения. Однако она имеет невысокую точность $O(\tau)$, что препятствует ее применению.

Описанные выше схемы вещественны. Однако существует одна комплексная схема этого семейства с $\alpha = (1+i)/2$ [Розенброк, 1963]. Она обладает уникальными свойствами: точность $O(\tau^2)$, $L2$–устойчивость

и, соответственно, безусловная устойчивость. Эта схема обладает высокой надежностью и пригодна для расчета задач с сильной жесткостью. Именно эта схема использована в описанных ниже расчетах. Эту схему принято в литературе называть схема CROS.

2.4. Метод ε-вложений. Рассмотрим дифференциально-алгебраическую систему:

$$\frac{dy}{dt} = f(y,z), \quad 0 = g(y,z).$$

Будем считать, что матрица $g_z(y,z)$ обратима в окрестности решения. Для построения численного решения таких систем применяют следующий подход. Рассматривается система

$$y' = f(y,z), \ \ \varepsilon\frac{dz}{dt} = g(y,z)$$

с согласованными начальными условиями $g(y_0,z_0)=0$. Для этой системы применяют какой-либо численный метод, а потом в получившихся формулах берут $\varepsilon = 0$. Обоснование этого подхода для методов Рунге-Кутты и Розенброка можно найти, например, в [Хайрер, Ваннер, 1999]. Более того, этот подход распространяется на системы, где алгебраические уравнения не отделены от дифференциальных, т. е. на системы вида

$$M\frac{du}{dt} = F(u), \tag{2.4}$$

где матрица M вырождена. В этом случае схема CROS имеет тот же вид, что в (2.3).

2.5. Расчеты на сгущающихся сетках. При численных расчетах важно не только выдать результат, но и гарантировано оценить его точность. Сделать это позволяет метод расчета на сгущающихся сетках [Марчук, Шайдуров, 1979; Альшина, 2005]. Известно, что при использовании сеточных методов на равномерных или квазиравномерных сетках погрешность численного решения разлагается по обратным степеням числа узлов N:

$$\Delta^{(N)} = \sum_{k=p} C_k N^{-k}, \tag{2.5}$$

здесь p — теоретический порядок точности схемы. Количество слагаемых в сумме определяется числом ограниченных производных точного решения. Главный член погрешности $\sim C_p N^{-P}$. Проведем расчеты на двух соседних сетках с числом узлов N и rN. Если r — целое число, то все узлы более грубой сетки совпадают с узлами подробной сетки. В этих точках погрешность $\Delta^{(rN)}$ вычисляется по формуле Ричардсона

$$\Delta^{(rN)}(t) = \frac{u^{(rN)}(t) - u^{(N)}(t)}{r^p - 1} + o\left(N^{-p}\right). \tag{2.6}$$

По результатам расчета на трех соседних сетках с числом узлов N, rN

и r^2N можно вычислить эффективный порядок точности

$$p^{\text{eff}}(t) = \log_r \frac{u^{(rN)}(t) - u^{(N)}(t)}{u^{(r^2N)}(t) - u^{(rN)}(t)}. \tag{2.7}$$

Если $p^{\text{eff}}(t) \to p$, то точное решение достаточно гладкое и оценка погрешности (2.6) асимптотически точна при $N \to \infty$. Эффективный порядок точности на некоторых специфических задачах может оказаться выше теоретического, например при интегрировании периодических функций. Это свидетельствует о том, что $C_p = 0$ в разложении (2.5). Тогда для получения асимптотически точной оценки погрешности надо использовать фактический p^{eff}:

$$\Delta^{(rN)}(t) = \frac{u^{(rN)}(t) - u^{(N)}(t)}{r^{p^{\text{eff}}} - 1} + o\left(N^{-p}\right). \tag{2.8}$$

Прием сгущения сеток лежит в основе техники расчетов с гарантированной точностью: сетку сгущают до тех пор, пока погрешность численного решения (2.6), (2.8) не станет меньше требуемого уровня точности.

Если точное решение задачи обладает большим количеством ограниченных производных, то асимптотически точную оценку погрешности (2.6), (2.8) можно учесть в качестве поправки:

$$\widetilde{u}^{(rN)}(t) = u^{(rN)}(t) + \Delta^{(rN)}(t).$$

Это равносильно исключению главного члена в разложении погрешности (2.5). Такое экстраполяционное уточнение требует всего нескольких арифметических операций, а порядок точности становится выше на 1 или даже 2 (для симметрично написанных разностных схем):

$$\widetilde{u}^{(rN)}(t) = u(t) + O\left(N^{-p-\sigma}\right), \quad \sigma = 1 \div 2.$$

Использование экстраполяционного уточнения существенно ускоряет процесс достижения заданного уровня точности.

Если эффективный порядок точности p^{eff} при $N \to \infty$ стремится к величине, меньшей, чем теоретический порядок точности схемы p, это свидетельствует о недостаточной гладкости решения. Например, при использовании метода второго порядка точности для задачи с точным решением, первая производная которого разрывна, эффективный порядок точности окажется на 1 меньше теоретического: $p^{\text{eff}} = 1$.

Естественным продолжением идей расчетов с контролем точности является методика диагностики сингулярности. В работе [Альшина, 2005] был предложен эффективный алгоритм диагностики сингулярности точного решения ОДУ при расчетах на сгущающихся сетках. Пусть в некоторой точке t_* точное решение задачи имеет разрыв второго рода $u(t_*) = \infty$ либо его первая производная обращается в бесконечность $u'(t_*) = \infty$, а при $t > t_*$ точное решение задачи не существует. Такие задачи относятся к классу плохообусловленных.

Тестирование наиболее употребительных методов численного интегрирования ОДУ на таких задачах показало, что практически все они приводят к переполнению в расчетах. Причем момент, когда наступает переполнение, вообще говоря, никак не связан с местоположением сингулярности t_*. Было также показано, что схема CROS, изначально предложенная для жестких систем, имеет массу преимуществ и при решении плохообусловленных задач. А именно: в расчетах не наступает переполнения, после прохождения сингулярности $t > t_*$ численное решение схемы CROS стабилизируется на некотором положении равновесия $u_*(N)$, зависящем от густоты сетки.

Проведением расчетов на сгущающихся сетках по схеме CROS с контролем величины p^{eff} можно отслеживать момент сингулярности и диагностировать ее тип. В точках гладкости точного решения $p^{\text{eff}} \to p$. При степенной особенности типа $u(t) \sim (t_* - t)^{-\beta}$ (разрыв второго рода при $\beta > 0$ или корневая особенность при $-1 < \beta < 0$) эффективный порядок точности схемы CROS во всех точках $t > t_*$ стремится к величине $p^{\text{eff}} \to -\beta$ [Альшина, 2005] при $N \to \infty$. Если $\lim\limits_{N \to +\infty} p^{\text{eff}} = -\infty$, то решение $u(t)$ растет экспоненциально: $u(t) \sim \exp\left\{(t_* - t)^{-1}\right\}$ при $t \to t_*$. Если $\lim\limits_{N \to +\infty} p^{\text{eff}} = 0$, то решение растет логарифмически: $u(t) \sim -ln(t_* - t)$.

Обобщим метод диагностики сингулярности для систем уравнений в частных производных, вообще говоря, нелинейных.

Пусть надо найти $u(x,t)$ — решение начально-краевой задачи для, вообще говоря, нелинейного уравнения в частных производных. Размерность задачи по пространственной переменной x произвольная, но наиболее наглядно метод иллюстрируется для случая одномерной по пространству задачи. Введем равномерную либо квазиравномерную сетку по пространственной переменной $\{x_l\}\, 0 \leqslant l \leqslant L$ с числом узлов L и используем метод прямых, т.е. аппроксимируем все пространственные переменные конечными разностями с точностью $O\left(L^{-2}\right)$. В общем случае это приводит к дифференциально-алгебраической системе большой размерности:

$$M \frac{dy}{dt} = f(y), \tag{2.9}$$

где $y(t)$ — значения неизвестной функции $u(x,t)$ в узлах пространственной сетки $\{x_l\}\, 0 \leqslant l \leqslant L$. Способы сведения конкретных начально-краевых задач для линейных, нелинейных и даже нелокальных уравнений будут проиллюстрированы ниже.

Для численного интегрирования (2.9) будем использовать схему CROS точности $O\left(\tau^2\right) = O\left(N^{-2}\right)$, где N — число узлов временной сетки, таким образом, построенный численный метод будет иметь точность $O\left(N^{-2} + L^{-2}\right)$.

Проведем расчет на стартовой сетке $\{x_l, t_n\}:\ 0 \leqslant l \leqslant L,\ 0 \leqslant n \leqslant N$. Так как теоретический порядок точности по временной и простран-

ственной переменным одинаков и равен 2, будем проводить последовательное сгущение временной и пространственной сеток в одинаковое целое число раз r (наиболее удобно $r = 2$). Узлы стартовой сетки при этом являются узлами всех последующих сеток, в этих точках и будем контролировать погрешность

$$\Delta^{(rN,rL)}(x,t) = \frac{u^{(rN,rL)}(x,t) - u^{(N,L)}(x,t)}{r^2 - 1} + o\left(N^{-2} + L^{-2}\right) \quad (2.10)$$

и эффективный порядок точности

$$p^{\text{eff}}(x,t) = \log_r \frac{u^{(rN,rL)}(x,t) - u^{(N,L)}(x,t)}{u^{(r^2N,r^2L)}(x,t) - u^{(rN,rL)}(x,t)}. \quad (2.11)$$

В точках (x,t), где

$$\lim_{N,L\to\infty} p^{\text{eff}}(x,t) = 2, \quad (2.12)$$

точное решение задачи имеет ограниченные вторые производные по пространственной и временной переменным, а оценка погрешности асимптотически точна при $N, L \to \infty$. Нарушение тенденции (2.12) свидетельствует о потере гладкости точного решения. В частности, при степенной особенности $u(x,t) \sim (t_* - t)^{-\beta}$ для любых $t > t_*$ эффективный порядок точности $\lim\limits_{N,L\to\infty} p^{\text{eff}}(x,t) = -\beta$ позволяет однозначно определить степень β. При $\lim\limits_{N,L\to\infty} p^{\text{eff}}(x,t) = -\infty$ для $t > t_*$ можно утверждать, что точное решение растет экспоненциально: $u(x,t_*) = \infty$, при $\lim\limits_{N,L\to\infty} p^{\text{eff}}(x,t) = 0$ для $t > t_*$ решение растет логарифмически. Момент сингулярности t_* возможно определить с точностью порядка шага контрольной сетки. Если нарушение гладкости решения наступает на всей области изменения пространственной переменной одновременно, то существенное отклонение $p^{\text{eff}}(x,t)$ от 2 будет зафиксировано во всех узлах сетки $\{x_l\}$ на первом же временной слое $t > t_*$. Если же сингулярность решения возникает сначала в одной точке x_*, то описанный метод также позволяет проследить за ее распространением. Такая диагностика возможна благодаря тому, что использование схемы CROS не приводит к переполнению, даже если точное решение задачи обращается в бесконечность.

§ 3. Результаты численных расчетов

С точки зрения применения численных методов рассмотренные ниже уравнения можно разделить на три типа.

1. Уравнения с линейным оператором при старшей производной по времени.
2. Уравнения с нелинейным оператором при старшей производной по времени.

3. Уравнения с нелокальными членами (коэффициенты уравнения зависят от нормы функции).

Также возможна комбинация второго и третьего типов.

3.1. Нелинейные псевдопараболические уравнения с линейным оператором при производной по времени. В начале рассмотрим уравнения с быстро растущей нелинейностью (ч. II, гл. 7) в случае одной пространственной переменной:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + e^u = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \; u|_{x=0} = u|_{l=0} = 0. \tag{3.1}$$

В гл. 7 (теорема 13) было доказано существование единственного классического решения до некоторого момента времени T_0, причем $\lim\limits_{t \uparrow T_0} \sup\limits_{x \in [0,l]} |u(x,t)| = +\infty$. Также были получены двусторонние оценки на время разрушения решения $T_0 \in [T_1^*, T_1]$ через начальные данные (3.4).

Для численного решения задачи (3.1) применим метод прямых, а для диагностики момента разрушения решения — метод сгущающихся сеток.

Аппроксимируя дифференциальный оператор $d^2/dx^2 - 1$ на равномерной пространственной сетке $x_k = hk, \;\; h = l/N$, приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$M \frac{dU}{dt} = F(U).$$

Здесь $U(t) = (u_1(t), u_2(t), ..., u_{N-1}(t))^T$ — вектор-столбец, состоящий из компонент разностного решения в точках $x_1, x_2, ..., x_{N-1}$:

$$M = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & ... & ... & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & 0 \\ 0 & .. & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & ... & .... & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & .... & ... & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Столбец $F(U)$ для этой задачи: $(-e^{u_1}, -e^{u_2}, ..., -e^{u_{N-1}})^T$. Отметим, что матрица M невырождена. Для решения этой задачи использовалась схема CROS в форме (2.3).

Описанную выше методику определения времени разрушения решения удобно проиллюстрировать с помощью табл. 8.1, в которой приведены значения эффективного порядка точности p_{eff}, вычисленного по

формуле (2.7) в разные моменты времени в разных точках отрезка. Как уже отмечалось выше, эффективный порядок точности стремится к теоретическому при стремлении числа узлов сетки к бесконечности, поэтому небольшое отклонение p_{eff} от двойки еще не свидетельствует о разрушении решения, однако в момент времени $t = 0.34$ происходит скачкообразное изменение p_{eff} сразу во всех точках наблюдения (в табл. 8.1 отмечено жирным шрифтом). И мы можем определить время разрушения решения с точностью до величины порядка длины шага по времени.

Таблица 8.1. Эффективный порядок точности метода позволяет диагностировать момент разрушения решения

$t \mid x$	0.26	0.52	0.79	1.05	1.31	1.57	1.83	2.09	2.36	2.62	2.88
0.02	2.00	2.00	2.00	2.01	2.00	2.00	2.00	2.01	2.00	2.00	2.00
0.04	2.00	2.00	2.00	2.01	2.00	2.00	2.00	2.01	2.00	2.00	2.01
0.06	2.00	2.00	1.99	2.01	2.00	2.00	2.00	2.01	1.99	2.00	2.00
0.08	2.00	2.00	1.99	2.01	2.00	2.00	2.00	2.01	1.99	2.00	2.00
0.1	2.00	2.00	1.99	2.02	2.01	2.00	2.01	2.02	1.99	2.00	2.00
0.12	2.00	2.00	1.99	2.03	2.01	2.01	2.01	2.03	1.99	2.00	2.00
0.14	2.00	2.00	1.99	2.06	2.01	2.01	2.01	2.06	1.99	2.00	2.00
0.16	2.00	2.00	1.99	1.97	2.01	2.01	2.01	1.97	1.99	2.00	2.00
0.18	2.00	2.00	1.99	1.95	2.02	2.01	2.02	1.95	1.99	2.00	2.00
0.20	2.00	2.00	1.99	1.97	2.04	2.02	2.04	1.97	1.99	2.00	2.00
0.22	2.00	1.99	1.99	1.98	1.92	2.07	1.92	1.98	1.99	1.99	2.00
0.24	1.99	1.99	1.99	1.98	1.96	1.91	1.96	1.98	1.99	1.99	1.99
0.26	1.99	1.99	1.99	1.98	1.97	1.97	1.97	1.98	1.99	1.99	1.99
0.28	1.99	1.99	1.98	1.98	1.98	1.97	1.98	1.98	1.98	1.99	1.99
0.30	1.98	1.98	1.98	1.98	1.97	1.97	1.97	1.98	1.98	1.98	1.98
0.32	1.95	1.95	1.95	1.95	1.95	1.95	1.95	1.95	1.95	1.95	1.95
0.34	**1.36**	**1.36**	**1.37**	**1.41**	**1.56**	**1.71**	**1.56**	**1.41**	**1.37**	**1.36**	**1.36**
0.36	**0.06**	**0.06**	**0.09**	**0.27**	**1.01**	**2.17**	**1.01**	**0.27**	**0.09**	**0.06**	**0.06**
0.38	**-0.32**	**-0.32**	**-0.25**	**0.22**	**2.51**	**1.43**	**2.51**	**0.22**	**-0.25**	**-0.32**	**-0.32**
0.40	**-0.40**	**-0.38**	**-0.20**	**0.92**	**1.37**	**-0.57**	**1.37**	**0.92**	**-0.20**	**-0.38**	**-0.40**

Для задачи 1 картина эволюции решения представлена рис. 3.

Интересно посмотреть, как согласуются двусторонние оценки, полученные на время разрушения решения, с соответствующим приближенным значением T_0, полученным методом сгущения сеток. Были проведены расчеты для задачи (3.1) с начальным условием

$$u_0(x) = A \sin x. \tag{3.3}$$

На рис. 4 отложены двусторонние оценки (сплошные линии) на время разрушения в зависимости от величины A, вычисленные по

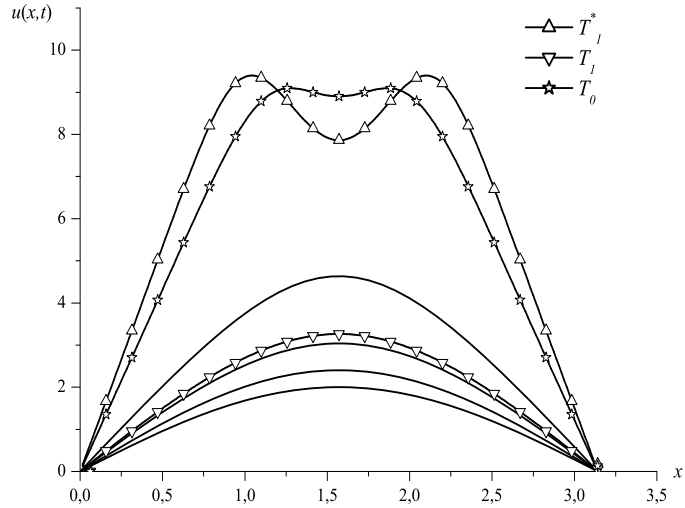

Рис. 3. Эволюция решения в различные моменты времени

формуле (3.4) (ч. II, гл. 7) для начального условия (3.3). Звездочками отмечены значения T_0, диагностированные в численном эксперименте методом сгущения сеток.

Если же совсем немного увеличить амплитуду начальных данных: $u(x,0) = 1.2\sin x$, то максимум решения также смещается вправо, но амплитуда его нарастает; особенно стремителен этот рост после момента времени $t \approx 2.5$. Профили численного решения для этого случая приведены на рис. 6. Их профиль гладкий, и вполне можно предположить, что классическое решение начально-краевой задачи (3.1) существует и после момента $t \approx 2.5$.

Рассмотрим еще одну начально-краевую задачу для псевдопараболического уравнения с линейным оператором при производной по времени, а именно уравнение Осколкова–Бенджамена–Бона–Махони–Бюргерса с кубическим источником:

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial t}(u_{xx} - u) + u_{xx} + uu_x + u^3 = 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{gathered} \tag{3.4}$$

Трехмерный аналог этой задачи рассматривался в гл. V (11.1). В частности, доказана теорема о разрешимости задачи в сильном обобщенном смысле (теорема 13) и получены достаточные условия ее

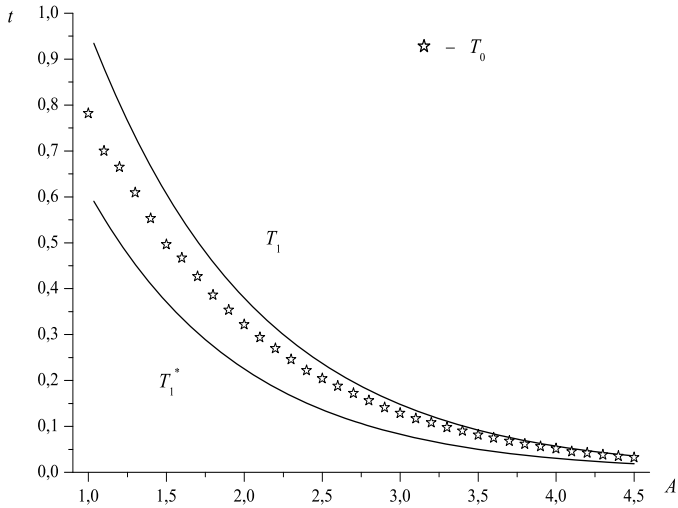

Рис. 4. Двусторонние теоретические оценки времени разрушения решения $T_1^* < T_1$ и T_0 — момент разрушения решения, диагностированный в численном эксперименте

глобальной разрешимости и разрушения за конечное время сильного обобщенного решения.

Выберем для простоты равномерную пространственную сетку $x_n = nh; h = \pi/N, 0 \leqslant n \leqslant N$, и применим метод прямых. Для этого необходимо все пространственные производные заменить разделенными разностями. Чтобы сохранить общий второй порядок точности метода, используем симметричную разделенную разность для аппроксимации первой пространственной производной:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u_{n+1}-2u_n+u_{n+1}}{h^2}-u_n\right)+\frac{u_{n+1}-2u_n+u_{n+1}}{h^2}+$$
$$+u_n\frac{u_{n+1}-u_{n-1}}{2h}+u_n^3=0, 1\leqslant n\leqslant N, \qquad (3.5)$$
$$u_0=u_N=0, u_n(0)=\varphi(x_n).$$

При численных расчетах деление на маленькое по модулю число ведет к большим ошибкам округления, что для разностных схем может выражаться в потере устойчивости. Во избежание этого умножим каждое из уравнений в системе (3.1) на h^2 и приведем к виду, пригодному для применения схемы CROS:

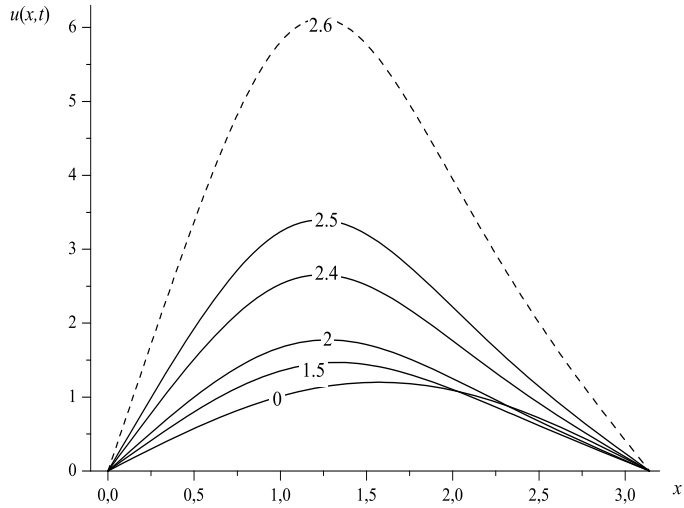

Рис. 5. Профили численного решения задачи (3.1) для начальных данных $u(x,0) = 1.2\sin x$, пунктир соответствует моменту времени после разрушения точного решения

$$\frac{d\left(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} - h^2 u_n\right)}{dt} = -\left(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}\right) - 0.5hu_u\left(u_{n+1} - u_{n-1}\right) - u_n^3, 1 \leqslant n \leqslant N,$$

$$u_0 = u_N = 0, u_n(0) = \varphi(x_n).$$

Матрица линейной алгебраической системы (2.3) в этом случае будет трехдиагональной. Обращение матрицы в этом случае весьма экономично выполняется методом прогонки, и переход на новый временной слой требует всего порядка N арифметических операций, где N — число узлов пространственной сетки.

Построенный численный метод имеет одинаковый порядок точности по временной и пространственной переменной (точность $O\left(h^2 + \tau^2\right)$), поэтому в тестах на сгущающихся сетках временную и пространственную сетку нужно измельчать в одно и то же число раз.

Картина поведения решения начально-краевой задачи (3.1) существенно зависит от начальных данных. При $u(x,0) = \sin x$ амплитуда решения затухает, а его максимум благодаря наличию переносного члена смещается вправо. Профили этого численного решения для данных начальных условий представлены на рис. 5 для моментов времени $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Тесты на сгущающихся сетках подтверждают гладкость полученного решения на всем протяжении расчета.

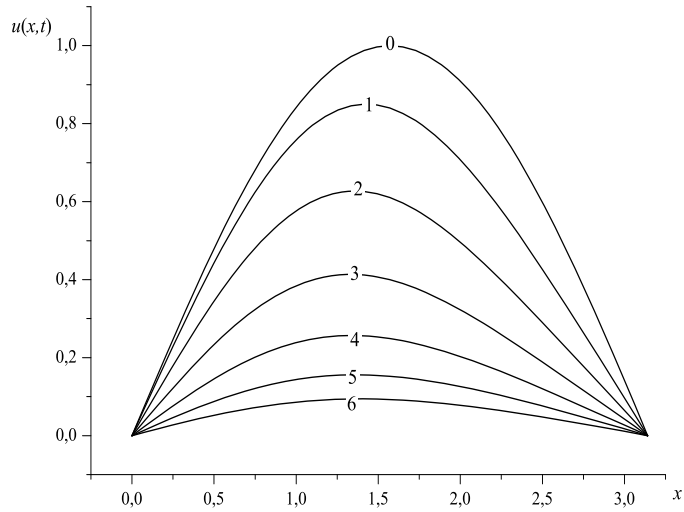

Рис. 6. Профили численного решения задачи (3.1) для начальных данных $u\,(x,0) = \sin x$

Однако тесты на сгущающихся сетках позволяют констатировать разрушение решения: после момента времени $t \approx 2.5$ эффективный порядок точности p^{eff} заметно отличается от теоретического значения $p = 2$, что позволяет диагностировать разрушение решения. Для этого расчета эффективный порядок точности в контрольных точках представлен в табл. 8.2.

3.2. Сильно нелинейные уравнения псевдопараболического типа. Рассмотрим некоторые задачи с нелинейным оператором при производной по времени. Если применить метод прямых непосредственно к такому уравнению, то задача сведется к неявной системе обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$M\,(U)\,\frac{dU}{dt} = F(U), \tag{3.6}$$

где матрица M, аппроксимирующая нелинейный оператор, зависит от U, а значит, к этой системе нельзя применить метод Розенброка. Однако, принимая весь нелинейный оператор за новую переменную, можно свести задачу к дифференциально-алгебраической системе с постоянной и вырожденной матрицей. Приведем конкретные примеры:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u_{xx} - u - u^3\right) + u_{xx} + u(u+1)(u-2) = 0. \tag{3.7}$$

Таблица 8.2. В точках гладкости решения эффективный порядок точности близок к теоретическому значению $p = 2$; после момента времени $t \geqslant 2.6$ отклонение эффективного порядка точности от теоретического свидетельствует о разрушении решения

$t \mid x$	0.314	0.628	0.942	1.257	1.571	1.885	2.199	2.513
0.5	1.993	1.997	2.000	2.001	2.001	2.001	1.999	1.989
1.0	1.998	1.999	2.001	2.001	2.001	2.001	2.000	1.998
1.5	2.001	2.002	2.002	2.003	2.003	2.002	2.002	2.002
2.0	2.006	2.007	2.008	2.008	2.008	2.008	2.007	2.007
2.4	2.020	2.021	2.022	2.022	2.022	2.022	2.022	2.022
2.5	2.023	2.024	2.026	2.026	2.026	2.026	2.026	2.026
2.6	**1.555**	**1.559**	**1.564**	**1.667**	**1.666**	**1.564**	**1.562**	**1.561**
2.7	**-0.881**	**-0.846**	**-0.723**	**-0.479**	**-0.15**	**0.169**	**0.391**	**0.499**
2.8	**-1.528**	**-1.266**	**-0.3**	**1.4**	**-1.569**	**-3.298**	**-5.497**	**-7.356**
2.9	**-1.824**	**-0.618**	**-0.279**	**-3.99**	**-2.664**	**-2.071**	**-1.951**	**-1.941**
3.0	**-2.226**	**1.417**	**-4.007**	**-3.729**	**-2.310**	**-0.006**	**0.230**	**-0.594**

Заменяем это уравнение системой

$$\frac{\partial}{\partial t}W + u_{xx} + u(u+1)(u-2) = 0, \quad 0 = W - \left(u_{xx} - u - u^3\right). \quad (3.8)$$

После аппроксимации на равномерной сетке задача сводится к дифференциально-алгебраической системе вида

$$\frac{\partial}{\partial t}W + u_{xx} + u(u+1)(u-2) = 0, \quad 0 = W - \left(u_{xx} - u - u^3\right), \quad (3.9)$$

где матрица M имеет очень простую структуру

$$M = \begin{pmatrix} E & O \\ O & O \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Для численных расчетов была взята задача о распаде «ступеньки». В результате при различных начальных данных наблюдалось два возможных сценария: либо решение стремится к стационарному пределу (рис. 8), предельный профиль определяется решением краевой задачи для уравнения

$$u_{xx} + u(u+1)(u-2) = 0, \quad (3.11)$$

либо решение быстро растет и разрушается за конечное время (рис. 7).

Рассмотрим еще один пример численного решения уравнения с нелинейным оператором при производной по времени.

В гл. 4 §9 была рассмотрена начально-краевая задача, которая в одномерном пространственном случае имеет вид

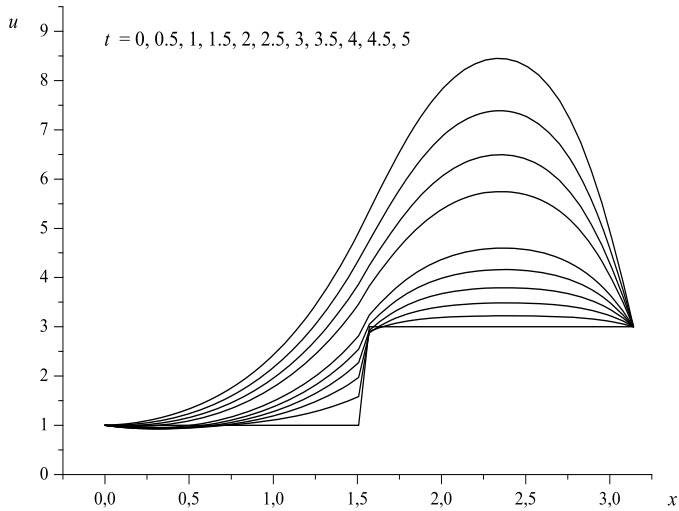

Рис. 7. Разрушение «ступеньки»

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u_{xx}-|u|^{q_1}u\right)+u_{xx}+|u|^{q_2}u=0,\ \ u\big|_{x=0}=u\big|_{x=l}=0,\ \ u\big|_{t=0}=u_0(x). \tag{3.12}$$

Как было показано в гл. 4, поведение решения существенно зависит от соотношения параметров. Так, если $q_1 \geqslant q_2 > 0$, то решение существует неограниченно долго. Наиболее интересен случай, когда $0 < q_1 < q_2$, тогда решение разрушается при начальных данных, удовлетворяющих условиям

$$\begin{gathered}\|u_0\|_{q_2+2}^{q_2+2} > \tfrac{q_2+2}{2}\|\nabla u_0\|_2^2,\\ \|u_0\|_{q_2+2}^{q_2+2} > \|\nabla u_0\|_2^2+\tfrac{2\sqrt{2}\,q_2(q_1+2)^{1/2}}{q_2-q_1}\left[\tfrac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2+\tfrac{q_1+1}{q_2+2}\|u_0\|_2^2\right].\end{gathered} \tag{3.13}$$

В гл. 4 исследование поведения решения основывалось на анализе энергетической функции

$$E(t)\equiv\tfrac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2+\tfrac{q_1+1}{q_1+2}\|u\|_{q_1+2}^{q_1+2}. \tag{3.14}$$

Будем действовать так же, как и в предыдущем примере. Введем новую переменную $w = u_{xx} - |u|^{q_1}u$, приходим к системе

$$\frac{\partial}{\partial t}W+u_{xx}+|u|^{q_2}u=0,\quad 0=w-\left(u_{xx}-|u|^{q_1}u\right).$$

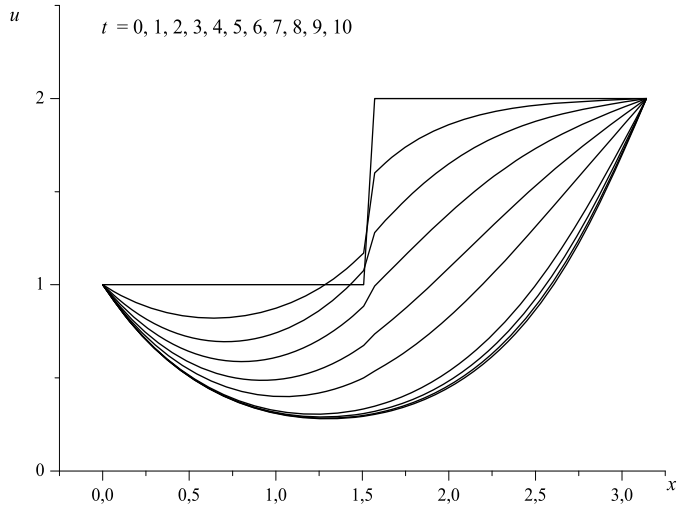

Рис. 8. Стремление к стационарному пределу

Применяя метод прямых, получим дифференциально-алгебраическую систему с той же матрицей (3.10). Для решения дифференциально-алгебраической системы использовалась схема CROS. Ниже приведены расчеты для случая $l = \pi$, $q_1 = 2$, $q_2 = 4\,(q_1 < q_2)$. Если взять начальные условия в виде $u_0\,(x) = A \sin nx$, то условия (3.2) легко вычисляются аналитически и их удобно проиллюстрировать следующим графиком. Для того чтобы были выполнены условия (3.2), точка (n, A) должна лежать выше обеих кривых на графике (рис. 9).

Ниже приведены расчеты эволюции решения для начальных данных $u_0\,(x) = 0.5 \sin x$ (рис. 10) и $u_0\,(x) = 3 \sin x$ (рис. 11), в последнем случае выполнены условия (3.2).

Если точное решение задачи уходит в бесконечность за конечное время, то численное решение в окрестности точки сингулярности может оставаться ограниченным, и исследователь, глядя на результаты расчетов, проведенных на одной сетке, может сделать неправильный вывод о поведении решения. В этой связи следует подчеркнуть важность проведения расчетов на сгущающихся сетках с контролем точности, которые позволяют определить момент сингулярности и ее тип. На рис. 11 сплошными линиями изображена эволюция численного решения до момента сингулярности, а пунктиром — после. Именно тесты на сгущающихся сетках позволяют нам судить, до какого момента мы можем доверять нашим расчетам.

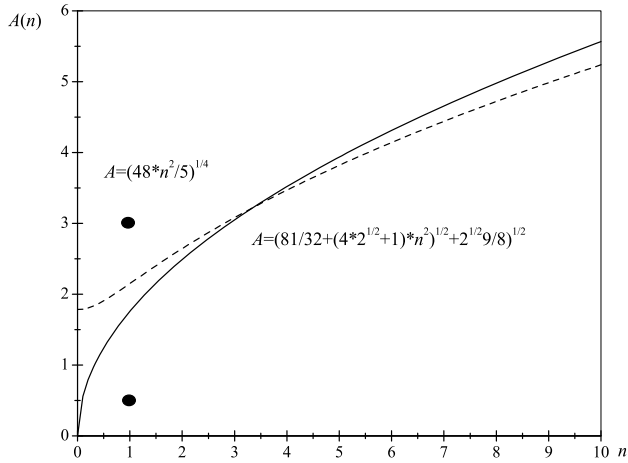

Рис. 9. Граница выполнимости условий (3.2) для начальных данных $u_0(x) = A \sin nx$

В гл. 4 было получено уравнение (IV.8.4), описывающее полупроводник, с нелинейной и анизотропной зависимостью тензора диэлектрической проницаемости от поля, с плотностью тока свободных зарядов, зависящей от потенциала самосогласованного поля по степенному закону:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta u + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right) + |u|^q u = 0.$$

Кроме того, для начально-краевой задачи с нулевыми граничными условиями были получены результаты о локальной разрешимости и единственности в слабом обобщенном смысле (теорема 5), а также получены условия как глобальной разрешимости, так и разрушения решения за конечное время, причем на время разрушения получены двусторонние оценки (теорема 6).

Рассмотрим пространственно-одномерный случай:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u_{xx} + \left(|u_x|^{p-2} u_x\right)_x\right) + |u|^q u = 0, \quad u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0,$$
$$u|_{t=0} = u_0(x). \quad (3.15)$$

Так как при производной по времени стоит нелинейный оператор, для применения метода прямых в сочетании с методом Розенброка

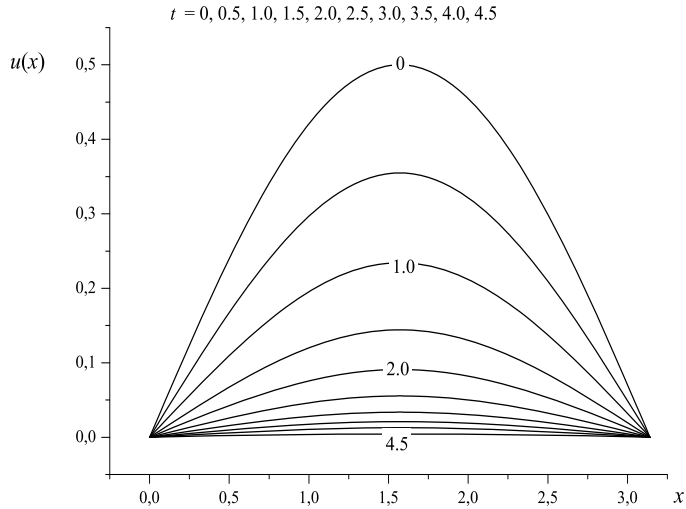

Рис. 10. Эволюция решения для начальных данных $u_0(x) = 0.5 \sin x$

необходимо перейти к дифференциально-алгебраической системе, вводя новую функцию $w = u_{xx} + \left(|u_x|^{p-2} u_x\right)_x$:

$$\frac{\partial}{\partial t} w = -|u|^q u, \quad 0 = w - \left(u_{xx} + \left(|u_x|^{p-2} u_x\right)_x\right),$$
$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x).$$

Применение метода прямых приводит к системе дифференциально-алгебраических уравнений с вырожденной, но постоянной матрицей. При аппроксимации производных в знаменателе оказывается маленькое число h (шаг пространственной сетки) в некоторой степени, это может при сгущении сеток вести к потере устойчивости. Поэтому целесообразно каждое уравнение умножить на h^p и избежать маленьких чисел в знаменателе. После этого к полученной дифференциально-алгебраической системе применим метод Розенброка, а именно схему CROS (2.3).

В гл. IV (теорема 6) показано, что при $p > q + 2$ решение существует неограниченно долго, и получены двусторонние оценки на степенной рост энергии, которая в одномерном случае имеет вид

$$E(t) = \tfrac{1}{2} \|u_x\|_2^2 + \tfrac{p-1}{p} \|u_x\|_p^p. \qquad (3.16)$$

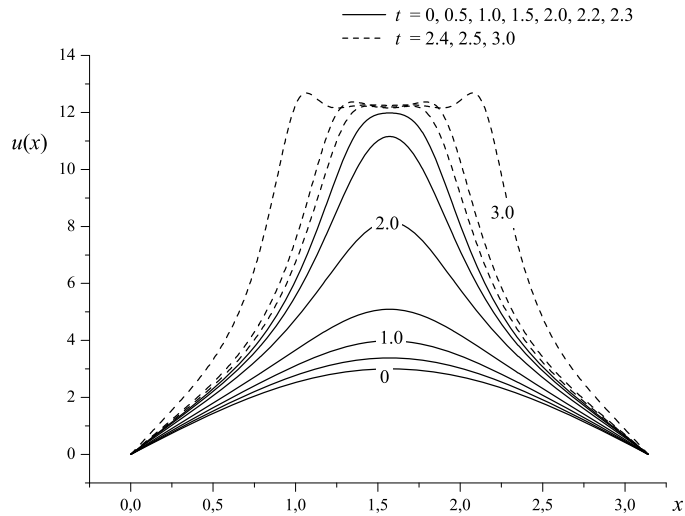

Рис. 11. Эволюция решения для начальных данных $u_0(x) = 3\sin x$

При $p = q + 2$ решение также существует неограниченно долго, но энергия растет экспоненциально. При $p < q + 2$ энергия уходит в бесконечность за конечное время.

В расчетах мы выбрали $q = 2$, а p равное 3, 4 и 5, тем самым были охвачены все три случая из теоремы 6.

При $p = 4$ эволюция решения с начальными данными $u_0(x) = \sin x$ представлена на рис. 12.

Кроме того, в процессе расчетов вычислялся численный аналог энергии (3.2), в случае $p = 4$ рост энергии экспоненциальный. На рис. 13 показан рост энергии в логарифмическом масштабе, график близок к прямой, что подтверждает экспоненциальную зависимость.

Проводились тесты на сгущающихся сетках, которые показали, что во всех контрольных точках по пространственной и временной координатам эффективный порядок точности метода равен 2.

Таблица 8.3. Эффективный порядок точности близок к теоретическому значению $p = 2$, что свидетельствует о гладкости решения

$t \mid x$	0.314	0.628	0.942	1.257	1.571	1.885	2.199	2.513	2.827
1	2.054	2.033	2.003	2.062	1.863	2.062	2.003	2.033	2.054
2	2.033	2.025	2.011	2.088	1.868	2.088	2.011	2.025	2.033
3	2.023	2.019	2.011	2.097	1.984	2.097	2.011	2.019	2.023
4	2.022	2.019	2.014	2.005	2.047	2.005	2.014	2.019	2.022

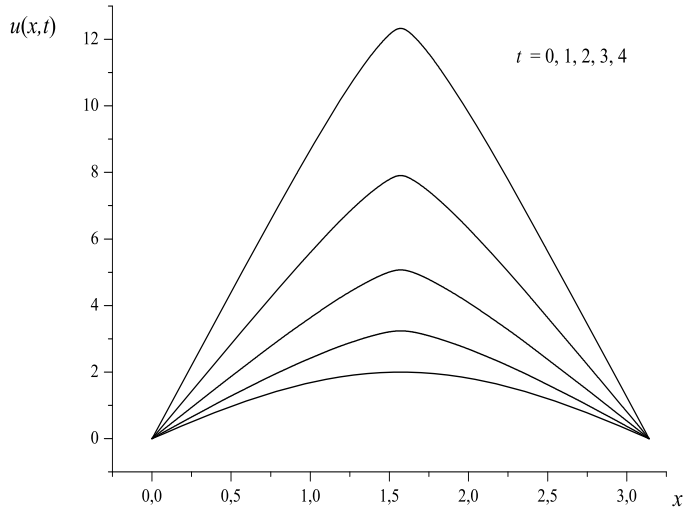

Рис. 12. Профили решения задачи (3.15) для случая $q = 2, p = 4$

На рис. 14 приведены эволюция решения и энергии для случая $p = 3$ и начальных данных $u_0(x) = \sin x$. Пунктиром обозначен профиль после момента разрушения, диагностированного методом сгущения сеток.

В случае $p > 4$ поведение решения напоминает случай $p = 4$, только рост решения происходит медленнее, поэтому приведем лишь график роста энергии. Важно показать, что рост энергии степенной. В случае $p = 5$ энергия растет как $E(t) \sim (A + Bt)^5$.

Если изменить знак перед нелокальным слагаемым, поведение решения существенно изменится:

$$\begin{gathered} (u_{xx} - u)_t + \|u_x\|_2^p u_{xx} - \beta u u_x = 0, \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0,\ u|_{t=0} = u_0(x). \end{gathered} \tag{3.17}$$

3.3. Уравнения с нелокальными членами (коэффициенты уравнения зависят от нормы функции). Рассмотрим третий тип уравнений, когда коэффициенты зависят от нормы функции:

$$\begin{gathered} (u_{xx} - u)_t - \|u_x\|_2^p u_{xx} - \beta u u_x = 0, \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0,\ u|_{t=0} = u_0(x), \end{gathered} \tag{3.18}$$

здесь $\|\cdot\|_2$ — норма в пространстве $L_2[0, l]$.

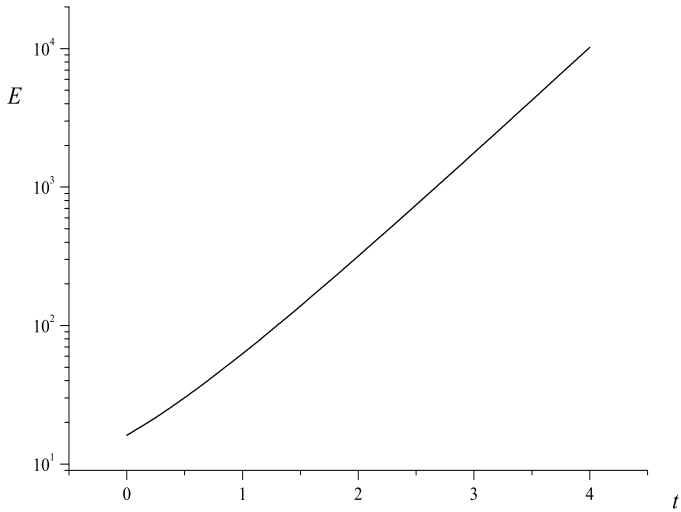

Рис. 13. Рост энергии в задаче (3.15) для случая $q = 2, p = 4$

Таблица 8.4. Тесты на сгущающихся сетках показали разрушение решения в $T_0 \approx 1.155$. За сингулярностью предел эффективного порядка точности -1 указывает, что амплитуда нарастает пропорционально $(T_0 - t)^{-1}$

$t \mid x$	0.314	0.628	0.942	1.257	1.571	1.885	2.199	2.513
0.35	2.048	2.038	2.031	2.026	1.905	2.026	2.031	2.038
0.875	2.098	2.094	2.089	2.083	1.929	2.083	2.089	2.094
0.91	2.096	2.093	2.088	2.083	1.935	2.083	2.088	2.093
0.98	2.075	2.073	2.07	2.067	1.930	2.067	2.070	2.073
1.015	2.024	2.023	2.023	2.024	1.890	2.024	2.023	2.023
1.05	1.963	1.929	1.977	1.937	1.955	1.937	1.977	1.929
1.085	2.042	2.055	2.067	2.090	2.109	2.039	2.067	2.055
1.12	1.915	1.916	1.916	1.917	1.935	1.917	1.916	1.916
1.155	**-0.137**	**-0.137**	**-0.137**	**-0.138**	**-0.139**	**-0.138**	**-0.137**	**-0.137**
1.19	**-0.989**	**-0.989**	**-0.989**	**-0.989**	**-0.990**	**-0.989**	**0.989**	**-0.989**
1.26	**-0.997**	**-0.997**	**-0.996**	**-0.996**	**-0.996**	**-0.996**	**-0.996**	**-0.997**
1.295	**-1.001**	**-1.001**	**-1.000**	**-0.997**	**-0.994**	**-0.997**	**-1.000**	**-1.001**
1.365	**-1.042**	**-1.039**	**-1.027**	**-0.998**	**-0.967**	**-0.998**	**-1.027**	**-1.039**

Так как уравнение (3.18) содержит линейный оператор при производной по времени, то применение метода прямых приводит к неявной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянной

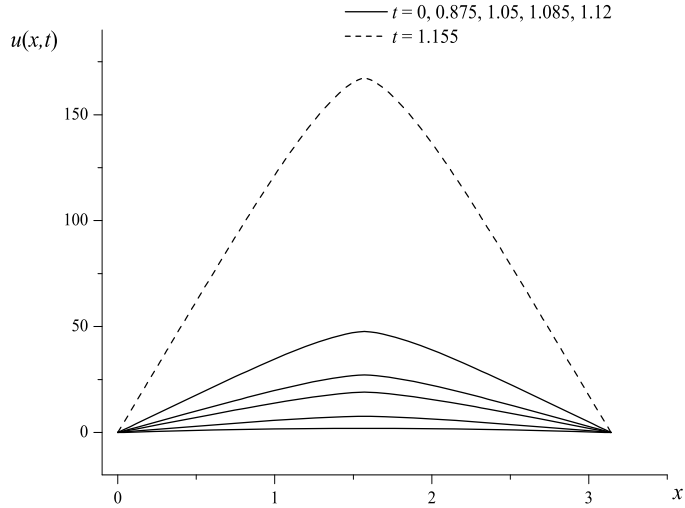

Рис. 14. Профили решения задачи (3.15) для случая $q = 2$, $p = 3$

Таблица 8.5. Контроль эффективного порядка точности позволяет диагностировать момент разрушения точного решения

$t \mid x$	0.314	0.628	0.942	1.257	1.571	1.885
0.20	2.004	2.002	2.001	2.000	1.999	2.000
0.40	2.005	2.002	2.000	1.998	1.998	1.998
0.60	2.007	2.002	1.998	1.997	1.996	1.997
0.80	2.006	1.997	1.994	1.994	1.995	1.994
0.90	1.988	1.983	1.986	1.993	1.998	1.993
0.94	1.957	1.96	1.973	1.996	2.011	1.996
0.96	1.919	1.932	1.958	2.005	2.045	2.005
0.98	1.817	1.855	1.919	2.087	2.398	2.087
1.00	**1.354**	**1.484**	**1.803**	**-1.652**	**0.727**	**-1.652**
1.02	**-0.700**	**-0.629**	**0.990**	**-1.564**	**-1.213**	**-1.564**

невырожденной матрицей, имеющей тот же вид, что и в формуле (3.2):

$$M\frac{dU}{dt} = F(U).$$

Каждая строчка этой системы соответствует разностной аппроксимации уравнения (3.18) в некоторой пространственной точке.

В этом случае, как было отмечено выше, можно применять метод Розенброка в форме (2.3). Однако наличие нелокального члена

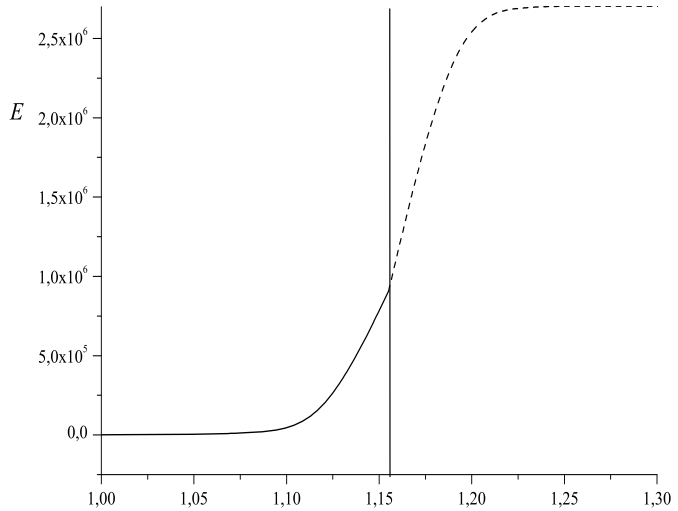

Рис. 15. Рост энергии в задаче (3.15) для случая $q = 2$, $p = 3$

в уравнении означает, что правая часть в каждой точке зависит от значения функции во всех точках. Это приводит к тому, что матрица Якоби в формуле (2.3) плотно заполнена. Мы можем свести задачу к дифференциально-алгебраической системе, вводя новую переменную $w = \|u_x\|_2$:

$$(u_{xx} - u)_t - w^p u_{xx} - \beta u u_x = 0, \quad 0 = w - \|u_x\|_2 .$$

Матрица M для этой системы получается из матрицы (3.2) добавлением нулевой последней строки и нулевого последнего столбца, матрица Якоби в формуле (2.3) имеет следующую простую структуру:

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & * & * & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix},$$

т. е. содержит $\sim 5 \cdot N$ ненулевых элементов. Если в матрице системы линейных алгебраических уравнений есть заранее известные плотные массивы нулевых элементов, то их обход в прямом ходе метода Гаусса приводит к сильному ускорению счета. В этом случае число арифметических действий для решения линейной системы уравнений (2.3)

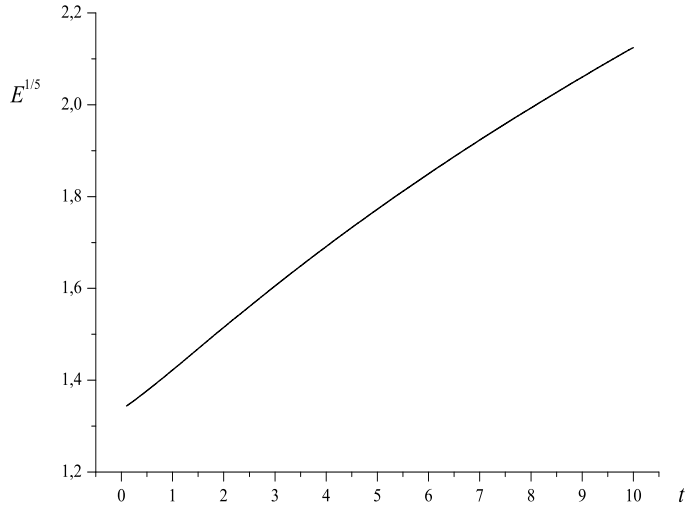

Рис. 16. Степенной рост энергии в задаче (3.15) для случая $q = 2$, $p = 5$ подтверждает теоретические оценки, полученные в главе IV

методом Гаусса будет пропорционально числу уравнений. Напомним, что в случае плотно заполненной матрицы это число $\sim 2/3N^3$. Таким образом, в отличие от уравнений второго типа, применение метода прямых и метода Розенброка для уравнений третьего типа возможно и без сведения к дифференциально-алгебраическим системам, однако этот прием позволяет существенно ускорить процесс вычислений.

Для численных расчетов мы взяли для задачи (3.18) начальные данные в виде уединенного «горба»: $x \in [0, \pi]$, $p = -2$, $\beta = 0.5$, $u(x, 0) = 10 \sin(x) \exp(-5x)$.

Поведение решения обусловлено взаимодействием двух нелинейных слагаемых в уравнении (3.18). В первые моменты времени (рис. 17) происходит рост решения с небольшим сдвигом вправо, далее преобладает нелинейный перенос, который быстро сдвигает волну направо, за волной образуется «прогиб», который, пройдя через нуль, становится источником новой волны (рис. 18), бегущей уже влево, и т. д.

В заключение рассмотрим уравнение, в котором присутствуют, как нелинейный оператор при производной по времени, так и нелокальные коэффициенты. В гл. 7 была рассмотрена начально-краевая задача (5.1), возникающая в полупроводниках при наличии нелокальной связи проводимости среды и напряженности электрического поля. Была доказана локальная разрешимость и единственность решения (теоре-

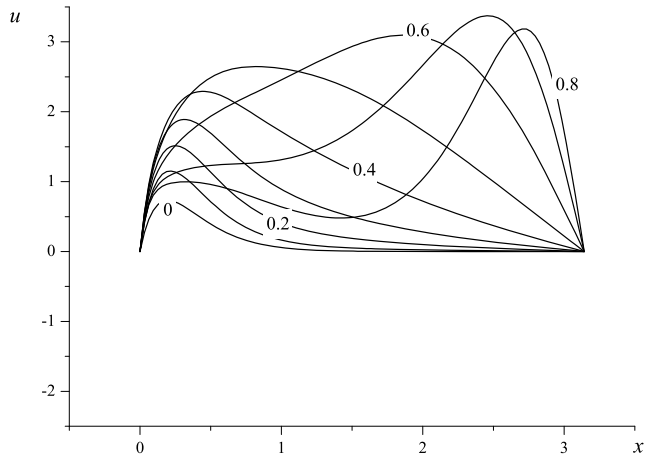

Рис. 17. Эволюция решения задачи (3.18) $t \leqslant 0.8$

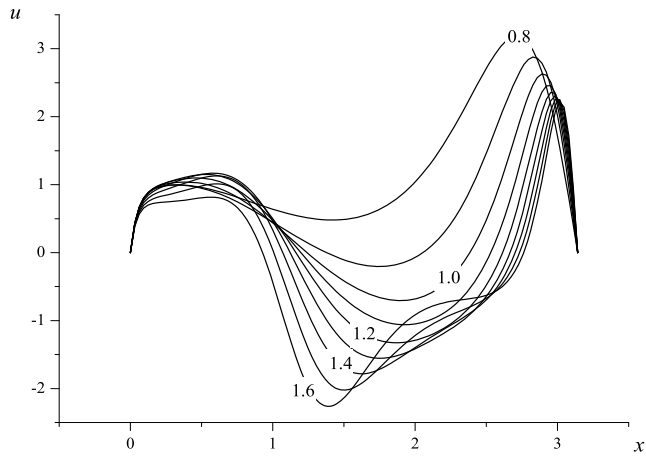

Рис. 18. Эволюция решения задачи (3.18) $t \geqslant 0.8$

ма 21), а также получены условия разрушения решения и глобальной разрешимости задачи (теорема 22).

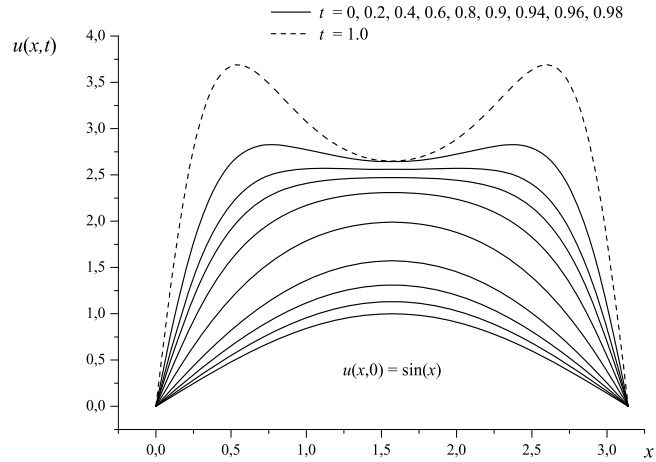

Рис. 19. Эволюция решения задачи (3.17), пунктиром показано численное решение после момента разрушения

В этой главе мы рассмотрим одномерный аналог задачи:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left(u_{xx}-|u|^{q}u\right)-\|u_x\|_2^{2p}u_{xx}=0,\\ &u|_{x=0}=u|_{x=l}=0,\ u|_{t=0}=u_0(x). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Уравнение содержит нелинейный оператор при производной по времени, поэтому для применения метода Розенброка необходимо ввести новую функцию: $w=u_{xx}-|u|^{q}u$. Далее, применяя метод прямых, мы получим дифференциально-алгебраическую систему с постоянной и вырожденной матрицей. Наличие нелокального члена в уравнении (3.19), строго говоря, не требует введения новой функции $v=\|u_x\|_2$. Однако этот подход предпочтительней, так как матрица Якоби в формуле (2.3) будет иметь простую структуру и содержать много нулевых элементов.

Численные расчеты решения задачи (3.19) проводились для случая $p=1, q=1$. На рис. 19 приведены профили численного решения для начальных данных $u_0(x)=\sin x$, $0\leqslant x\leqslant\pi$.

Определение момента пробоя в полупроводнике проводится тестами на сгущающихся сетках. Построенная разностная схема имеет точность $O\left(h^2+\tau^2\right)$, поэтому и временную, и пространственную сетки нужно сгущать вдвое. По результатам расчетов на трех соседних сетках был вычислен эффективный порядок точности p^{eff}. Результаты этого теста приведены в таблице для моментов времени, соответствующих профилям решения на рисунке. В областях гладкости решения

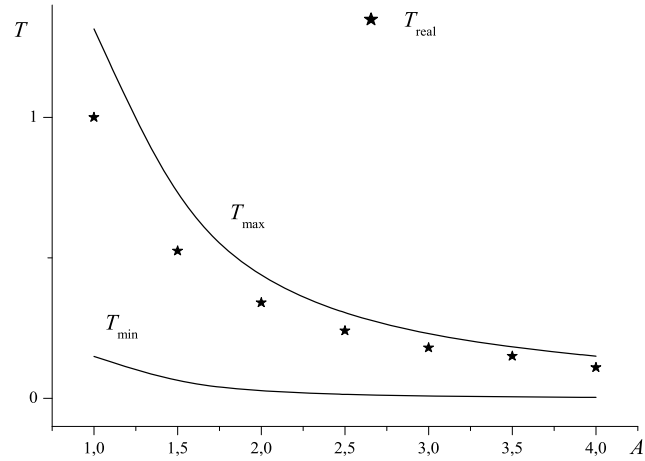

Рис. 20. Двусторонние теоретические оценки на время разрушения решения $T_{\min} < T_{\max}$ и момент сингулярности T_{real}, диагностированный тестами на сгущающихся сетках

$\lim\limits_{N\to\infty} p^{\text{eff}} = p = 2$, нарушение этой тенденции свидетельствует о сингулярности решения. В данном случае разрушение решения имеет место между контрольными точками $t = 0.98$ и $t = 1.00$.

В гл. 7 (теорема 22) для времени разрушения решения получены двусторонние оценки. Была проведена серия расчетов с различными начальными данными $u_0(x) = A\sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, и исследована зависимость времени разрушения от амплитуды начальных данных. На рис. 20 показаны двусторонние теоретические оценки на время разрушения решения $T_{\min}, T_{\max}$ и момент пробоя полупроводника T_{real}, определенный тестами на сгущающихся сетках. Видно, что вычислительный эксперимент полностью подтверждает теоретические оценки.

3.4. Выводы. Применение метода прямых в сочетании с комплексной схемой Розенброка к решению начально-краевых задач для псевдопараболических уравнений позволяет избежать переполнения счета, даже если точное решение обращается в бесконечность. Применяя технику контроля точности при расчетах на сгущающихся сетках предложенным методом, возможно диагностировать момент разрушения точного решения. В точках гладкости точного решения предложенный алгоритм позволяет выдать результат с асимптотически точной оценкой погрешности расчета. Все это делает предложенный метод весьма привлекательным для приложений.

Приложение А

Вспомогательные оценки

Лемма 1. *При условиях* $\beta > 2,\ \ 1 + q^{-1} < \beta,\ \ q > 0$, *справедливо следующее неравенство*:

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^2} dy\, f(x^{'}, y) \right| \leqslant C_1 (1 + |x^{'}|^2)^{-\beta/(2(q+1))} + \\ + \begin{cases} C_2, & |x^{'}| \leqslant \varepsilon < +\infty, \\ C_3(|x^{'}|^{-1} + |x^{'}|^{1-\beta}), & |x^{'}| \geqslant \varepsilon > 0, \end{cases}$$

где

$$f(x^{'}, y) \equiv \frac{1}{|y|(1 + |x^{'} - y|^2)^{\beta/2}}.$$

Доказательство. Если перейти к полярной системе координат, то интеграл в формулировке леммы примет вид

$$\int\limits_0^{+\infty} d\rho \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\, (1 + |x^{'}|^2 + \rho^2 - 2|x^{'}|\rho\cos(\varphi))^{-\beta/2} = \int\limits_0^{+\infty} d\rho \left(\int\limits_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} + 2\int\limits_0^{\varepsilon} \right) d\varphi \times \\ \times (1 + |x^{'}|^2 + \rho^2 - 2|x^{'}|\rho\cos(\varphi))^{-\beta/2} = I_1 + I_2,$$

$$I_1 = \int\limits_0^{+\infty} d\rho \int\limits_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} d\varphi\, (1 + |x^{'}|^2 + \rho^2 - 2|x^{'}|\rho\cos(\varphi))^{-\beta/2} \leqslant \\ \leqslant 2(\pi - \varepsilon) \int\limits_0^{+\infty} d\rho\, (1 + |x^{'}|^2 + \rho^2 - 2|x^{'}|\rho\cos(\varepsilon))^{-\beta/2} \leqslant \\ \leqslant \frac{2(\pi - \varepsilon)}{(1 - \cos(\varepsilon))^{\beta/2}} \int\limits_0^{+\infty} d\rho\, \frac{1}{(1 + \rho^2 + |x^{'}|^2)^{\beta/2}} \leqslant \\ \leqslant \frac{2(\pi - \varepsilon)}{(1 - \cos(\varepsilon))^{\beta/2}} \int\limits_0^{+\infty} d\rho\, \frac{(1 + |x^{'}|^2)^{\beta/(2(q+1))}}{(1 + \rho^2 + |x^{'}|^2)^{\beta/2}} \times \\ \times \frac{1}{(1 + |x^{'}|^2)^{\beta/(2(q+1))}} \leqslant C_1 \frac{1}{(1 + |x^{'}|^2)^{\beta/(2(1+q))}}$$

при дополнительном условии $\beta > 1 + 1/q,\ \ q > 0$,

$$I_2 = 2\int\limits_0^{+\infty} d\rho \int\limits_0^{\varepsilon} d\varphi\,(1+|x^{'}|^2+\rho^2-2|x^{'}|\rho\cos(\varphi))^{-\beta/2} \leqslant$$

$$\leqslant 2\int\limits_0^{+\infty} d\rho \int\limits_0^{\varepsilon} d\varphi\,(1+|x^{'}|^2+\rho^2-2|x^{'}|\rho+|x^{'}|\rho\varphi^2)^{-\beta/2}.$$

Рассмотрим сначала случай $|x^{'}| \geqslant \varepsilon > 0$:

$$I_2 \leqslant 2\int\limits_0^{+\infty} d\rho\,\frac{1}{(1+(|x^{'}|-\rho)^2)^{\beta/2}} \int\limits_0^{\varepsilon} d\varphi\,\frac{1}{(1+|x^{'}|\rho/(1+|x^{'}|^2+\rho^2)\varphi^2)^{\beta/2}}.$$

Рассмотрим отдельно внутренний интеграл:

$$\int\limits_0^{\varepsilon} d\varphi\,\frac{1}{(1+|x^{'}|\rho/(1+|x^{'}|^2+\rho^2)\varphi^2)^{\beta/2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{1+(|x^{'}|-\rho)^2}}{\sqrt{|x|\rho}} \int\limits_0^{+\infty} d\psi\,\frac{1}{(1+\psi^2)^{\beta/2}};$$

$$I_2 \leqslant \frac{1}{\sqrt{|x^{'}|}} \int\limits_0^{+\infty} d\rho\,\frac{1}{\sqrt{\rho}\,(1+(|x^{'}|-\rho)^2)^{(\beta-1)/2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|x^{'}|}} \int\limits_{-|x^{'}|}^{+\infty} dz \frac{1}{\sqrt{z+|x^{'}|}\,(1+z^2)^{(\beta-1)/2}} = \frac{1}{\sqrt{|x^{'}|}}(J_1+J_2),$$

где

$$J_1 = \int\limits_{-|x^{'}|/2}^{+\infty} dz\,\frac{1}{\sqrt{z+|x^{'}|}\,(1+z^2)^{(\beta-1)/2}},$$

$$J_2 = \int\limits_{-|x^{'}|}^{-|x^{'}|/2} dz\,\frac{1}{\sqrt{z+|x^{'}|}\,(1+z^2)^{(\beta-1)/2}},\quad J_1 \leqslant C_2/\sqrt{|x^{'}|}\,,\quad \beta > 2,$$

$$J_2 = \sqrt{|x^{'}|} \int\limits_{-1}^{-1/2} dy\,\frac{1}{\sqrt{1+y}\,(1+y^2|x^{'}|^2)^{(\beta-1)/2}} \leqslant C_3\frac{\sqrt{|x^{'}|}}{|x^{'}|^{\beta-1}}.$$

Таким образом,

$$I_2 \leqslant C\left[\frac{1}{|x'|}+\frac{1}{|x'|^{\beta-1}}\right],\quad \beta>2,\quad |x^{'}|\geqslant\varepsilon>0.$$

Рассмотрим теперь случай $|x^{'}|\leqslant\varepsilon<+\infty$:

$$I_2 \leqslant C\int\limits_0^{+\infty} d\rho\int\limits_0^{\varepsilon} d\varphi\,\frac{1}{(1+(|x'|-\rho)^2+|x'|\rho\varphi^2)^{\beta/2}}\leqslant$$

$$\leqslant C\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\rho\,\frac{1}{(1+(|x'|-\rho)^2)^{\beta/2}}\leqslant C\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz\,\frac{1}{(1+z^2)^{\beta/2}}<+\infty$$

при $\beta>1$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Справедливы следующие неравенства*:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} dy\,\frac{(1+|x|^2)^{\alpha/(2(1+q))}}{|y|(1+|x-y|^2)^{\alpha/2}}\leqslant\begin{cases}C_1(\varepsilon), & 0\leqslant|x|<\varepsilon,\\ C_2(\varepsilon)|x|^{\alpha/(1+q)-1}, & |x|\geqslant\varepsilon>0,\end{cases}$$

при $3<\alpha\leqslant 1+q$.

Доказательство. Пусть

$$I\equiv\int\limits_{\mathbb{R}^3} dy\,\frac{1}{|y|[1+|x-y|^2]^{\alpha/2}}=$$

$$=2\pi\int\limits_0^{+\infty} dr\int\limits_0^{\pi} d\vartheta\,\frac{r\sin\vartheta}{[1+|x|^2+r^2-2|x|r\cos\vartheta]^{\alpha/2}},$$

$$a=1+|x|^2+r^2,\quad b=2|x|r,$$

$$\int\limits_0^{\pi} d\vartheta\,\frac{\sin\vartheta}{(a-b\cos\vartheta)^{\alpha/2}}=\int\limits_{-1}^{1} dz\,\frac{1}{(a-bz)^{\alpha/2}}=$$

$$=\frac{1}{b^{\alpha/2}}\frac{2}{\alpha-2}\left[\frac{1}{(a/b-1)^{\alpha/2-1}}-\frac{1}{(a/b+1)^{\alpha/2-1}}\right],$$

$$I=\frac{2\pi}{\alpha-2}\frac{1}{|x|}\int\limits_0^{+\infty} dr\left[\frac{1}{[1+(r-|x|)^2]^{\beta/2}}-\frac{1}{[1+(r+|x|)^2]^{\beta/2}}\right]\equiv$$

$$\equiv I_1+I_2,\,\beta\equiv\alpha-2.$$

Пусть $|x| \geqslant \varepsilon > 0$. Тогда

$$I_1 = \frac{2\pi}{\alpha - 2}\frac{1}{|x|}\int\limits_0^{+\infty} dr\,\frac{1}{[1+(r-|x|)^2]^{\beta/2}} = \int\limits_{-|x|}^{+\infty} dz\,\frac{1}{(1+z^2)^{\beta/2}} < +\infty,$$

$$I_2 = \frac{2\pi}{\alpha - 2}\frac{1}{|x|}\int\limits_0^{+\infty} dr\,\frac{1}{[1+(r+|x|)^2]^{\beta/2}} \leqslant \int\limits_0^{+\infty} dr\,\frac{1}{(1+r^2)^{\beta/2}}, \quad \alpha > 3.$$

Пусть $0 \leqslant |x| \leqslant \varepsilon$. Предположим, что $\beta > 1$. Тогда с помощью замен переменных выражение для I приводим к виду

$$I = \frac{2\pi}{\alpha - 2}\frac{1}{|x|}\int\limits_{-|x|}^{|x|} dz\,\frac{1}{(1+z^2)^{\beta/2}} \leqslant \frac{2\pi}{\alpha - 2}\frac{1}{|x|}2|x| \leqslant \frac{4\pi}{\alpha - 2}.$$

Лемма доказана.

Приложение Б

Некоторые результаты функционального анализа

§ 1. Пространства Соболева $\mathbb{W}^{s,p}(\Omega)$, $\mathbb{W}_0^{s,p}(\Omega)$, $\mathbb{W}^{s,p}(\Gamma)$

Рассмотрим пространства Соболева, соответствующие произвольной ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ с гладкой границей $\Gamma \in \mathbb{C}^{2,\delta}$, $\delta \in (0,1]$.

Определение 1. Если $s \in \mathbb{N}$ и $p \in [0,+\infty]$, то мы обозначим через $\mathbb{W}^{s,p}(\Omega)$ векторное пространство

$$\{u \in \mathcal{D}'(\Omega) : D^\alpha u \in \mathbb{L}^p(\Omega),\ |\alpha| \leqslant s\}$$

с нормой

$$\| u \|_{\mathbb{W}^{s,p}(\Omega)} = \left[\sum_{|\alpha| \leqslant s} \| D^\alpha u \|^p_{\mathbb{L}^p(\Omega)} \right]^{1/p}.$$

Если $s \in \mathbb{R}_+ \backslash \mathbb{N}$ и $p \in (1,+\infty)$, то мы обозначим через $\mathbb{W}^{s,p}(\Omega)$ векторное пространство

$$\{u \in \mathcal{D}'(\Omega) : u \in \mathbb{W}^{[s],p}(\Omega) \text{ и } d_{\sigma,\alpha}(u) \in \mathbb{L}^p(\Omega \times \Omega),\ |\alpha| = [s]\}$$

с нормой

$$\| u \|_{\mathbb{W}^{s,p}(\Omega)} = \left[\| u \|^p_{\mathbb{W}^{|s|,p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=[s]} \| d_{\sigma,\alpha}(u) \|^p_{\mathbb{L}^p(\Omega\times\Omega)} \right]^{1/p},$$

где

$$d_{\sigma,\alpha} = \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^{(N/p)+\alpha}},\quad s = [s] + \sigma.$$

Определение 2. Если $k \in \mathbb{N}$ и $p \in [1,+\infty]$, то через $\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega)$ мы обозначим замыкание $\mathcal{D}(\Omega)$ по норме пространства $\mathbb{W}^{k,p}(\Omega)$, наделенное топологией, индуцируемой последним пространством. Если $s \in \mathbb{R}_+ \backslash \mathbb{N}$ и $p \in (1,+\infty)$, то через $\mathbb{W}_0^{s,p}(\Omega)$ мы обозначим замыкание $\mathcal{D}(\Omega)$ в норме $\mathbb{W}^{s,p}(\Omega)$, наделенное топологией, индуцируемой последним пространством.

Определение 3. Если $s \in \mathbb{R}_- \backslash 0$ и $p \in (0,+\infty)$, то через $\mathbb{W}^{s,p}(\Omega)$ мы обозначим пространство, двойственное к $\mathbb{W}_0^{-s,p'}(\Omega)$, где $p' = p/(p-1)$.

Теорема 1. *Пространства* $\mathbb{W}^{k,p}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ *и* $p \in [1,+\infty]$, *являются банаховыми. Если* $p \in (0,+\infty)$, *то они рефлексивны, если* $p = 2$,

то они являются гильбертовыми пространствами со скалярным произведением

$$(u,v)_{\mathbb{H}^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leqslant k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\,.$$

Пространства $\mathbb{W}^{s,p}(\Omega)$, $s \in \mathbb{R}_+\backslash\mathbb{N}$ *и* $p \in (0,+\infty)$ — *рефлексивные банаховы пространства, и если* $p=2$, *то они являются гильбертовыми со скалярным произведением*

$$(u,v)_{\mathbb{H}^s(\Omega)} = (u,v)_{\mathbb{H}^{[s]}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=[s]} (d_{\sigma,\alpha}(u), d_{\sigma,\alpha}(v))_{\mathbb{L}^2(\Omega\times\Omega)}.$$

Теорема 2. *Пространства* $\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ *и* $p \in [1,+\infty]$, *являются банаховыми. Если* $p \in (0,+\infty)$, *то они рефлексивны, и если* $p=2$, *то они являются гильбертовыми пространствами, которые мы обозначаем через* $\mathbb{H}_0^s(\Omega)$. *Аналогично, пространства* $\mathbb{W}_0^{s,p}(\Omega)$, $s \in \mathbb{R}_+\backslash\mathbb{N}$ *и* $p \in (1,+\infty)$, *являются рефлексивными, а при* $p=2$ — *гильбертовыми пространствами, обозначаемыми* $\mathbb{H}_0^s(\Omega)$.

Теорема 3. *Обобщенная функция* $\mathbb{T}$ *принадлежит* $\left(\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega)\right)' = \mathbb{W}^{-k,p'}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ *и* $p \in (1,+\infty)$, *тогда и только тогда, когда* $\mathbb{T}$ *может быть представлена в виде*

$$\mathbb{T} = \sum_{|\alpha|\leqslant k} D^\alpha g_\alpha,\ \ g_\alpha \in \mathbb{L}^{p'}(\Omega),\ \ p' = \frac{p}{p-1}.$$

Теорема 4. *Если* $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ — *ограниченное открытое множество класса* $\mathbb{C}^{2,\delta}$, $\delta \in (0,1]$, *с целым* $k \geqslant 1$ *и* $p \in [1,+\infty)$, *то справедливы следующие вложения.*

1. *Если* $N > kp$, *то* $\mathbb{W}^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^q(\Omega)$ *с* $q \leqslant Np/(N-kp)$ *и* $\mathbb{W}^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbb{L}^q(\Omega)$, *если* $q < Np/(N-kp)$; *в более общем случае, если* $m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant k$ *и* $N > (k-m)p$, *то* $\mathbb{W}^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{W}^{m,q}(\Omega)$ *с* $q \leqslant Np/(N-(k-m)p)$ *и* $\mathbb{W}^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbb{W}^{m,q}(\Omega)$, *если* $q < Np/(N-(k-m)p)$.
2. *Если* $N = kp$, *то* $\mathbb{W}^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbb{L}^q(\Omega)$ *для каждого* $q \in [1,+\infty)$.
3. *Если* $\mathrm{N} < kp$, *то* $\mathbb{W}^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbb{C}^{0,\mu}(\overline{\Omega})$ *со следующими значениями* μ : $\mu = k-(N/p)$, *если* $k-(N/p) < 1$; μ — *произвольное и* $\mu < 1$, *если* $k-(N/p) = 1$; $\mu = 1$, *если* $k-(N/p) > 1$. *В более общем случае, если* $m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant k$ *и* $N < (k-m)p$, *то* $\mathbb{W}^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbb{C}^{m,\mu}(\overline{\Omega})$ *при:* $\mu = k-m-(N/p)$, *если* $k-m-(N/p) < 1$; *произвольном* $\mu < 1$, *если* $k-m-(N/p) = 1$; $\mu = 1$, *если* $k-m-(N/p) > 1$.

Теорема 4 (продолжение). *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — *ограниченная область с границей* Γ, *непрерывной по Липшицу, целое* $k \geqslant 1$ *и* $p \in [1,+\infty)$. *Тогда справедливы следующие предложения.*

1. *Если* $kp < N$ *и* $1 \leqslant q \leqslant (N-1)p/(N-kp)$, *то существует единственный оператор* $\gamma_0 \in \mathcal{L}(\mathbb{W}^{k,p}(\Omega); \mathbb{L}^q(\Gamma))$ *такой, что если* $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, *то* $\gamma_0 u = u\big|_\Gamma$, *а если* $u \in \mathbb{W}^{k,p}(\Omega)$, *то мы называем* $\gamma_0 u$ *следом порядка 0 функции* u *на* Γ; *если* $p > 1$, *то* γ_0 — *компактный оператор.*
2. *Если* $kp = N$, *то* (1) *справедливо при любом* $q \geqslant 1$.
3. *Если* $kp > N$, *то след* $\gamma_0 u$ *функции* $u \in \mathbb{W}^{k,p}(\Omega) \subset \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ *является классическим сужением* u *на* Γ.

Рассмотрим теперь отдельно пространство $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$. Имеет место следующее утверждение. Пусть $f \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$. Тогда существуют такие $f_0, f_1, ..., f_n$ в $\mathbb{L}^2(\Omega)$, что

$$\langle f, v\rangle = \int\limits_\Omega dx \left[f_0 v + \sum_{i=1}^n f_i v_{x_i} \right] \quad \forall\ v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Кроме того,

$$\| f \|_{\mathbb{H}^{-1}} = \inf \left\{ \left(\int\limits_\Omega \sum_{i=0}^n |f_i|^2 \, dx \right)^{1/2} : f_0, ..., f_n \in \mathbb{L}^2(\Omega) \right\}.$$

§ 2. Слабая и $*$−слабая сходимости

Определение 4. Последовательность $x_n \rightharpoonup x$ называется слабо сходящейся в нормированном пространстве $\mathbb{X}$, если числовая последовательность $\langle u_n, h\rangle$ сходится для любого $h \in \mathbb{X}^*$, где символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначена скобка двойственности между нормированными пространствами $\mathbb{X}$ и $\mathbb{X}^*$.

Определение 5. Последовательность $h_n \in \mathbb{X}_s^*$ называется $*$−слабо сходящейся, если для любого $u \in \mathbb{X}$ числовая последовательность $\langle u, h_n\rangle$ сходится.

Теорема 5. *Пусть* $\{x_n\}$ — *ограниченная по норме последовательность элементов рефлексивного банахова пространства* $\mathbb{X}$. *Тогда из* $\{x_n\}$ *можно выделить подпоследовательность* $\{x_{n'}\}$, *слабо сходящуюся к некоторой точке пространства* $\mathbb{X}$.

Теорема 6. *Всякая слабо сходящаяся последовательность* $\{x_n\}$ *сильно ограничена. В частности, если* $x_n \rightharpoonup x$, *то последовательность* $\{\| x_n \|\}$ *ограничена и*

$$\liminf_{n \to +\infty} \| x_n \| \geqslant \| x \|.$$

Теорема 7 (Данфорд–Петтис). *Пусть* $\mathbb{B}$ — *сепарабельное банахово пространство и* $\mathbb{T} : \mathbb{B} \to \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^1)$, *тогда существует изме-*

римая функция g на $\mathbb{R}^1$ со значениями в $\mathbb{B}^*$ такая, что

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^1} \| g \| = \| \mathbb{T} \|$$

и, кроме того,

$$\mathbb{T}(e) = \int \langle g(x), e\rangle \, dx.$$

Теорема 8 (Данфорд). *Пусть $\mathbb{Q}$ — ограниченная область в $\mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}_t$, g_μ и g такие функции из $\mathbb{L}^q(\mathbb{Q})$, $1 < q < +\infty$, что $\| g_\mu \|_{\mathbb{L}^q(\mathbb{Q})} \leqslant \mathrm{C}$, $g_\mu \to g$ почти всюду в $\mathbb{Q}$. Тогда $g_\mu \rightharpoonup g$ слабо в $\mathbb{L}^q(\mathbb{Q})$.*

§ 3. Слабая и сильная измеримость. Интеграл Бохнера

Определение 6. Пусть $(S, \mathfrak{B}, m)$ — пространство с мерой и $x(s)$ — отображение, определенное на S, со значениями из $\mathbb{B}$ — пространства $\mathbb{X}$. Отображение $x(s)$ называется слабо $\mathfrak{B}$-измеримым, если для любого элемента $h \in \mathbb{X}^*$ числовая функция $\langle x(s), h\rangle$ переменной s измерима. Отображение $x(s)$ называется простым, если оно принимает постоянные отличные от нуля значения на каждом из множеств B_j, образующих конечную систему непересекающихся $\mathfrak{B}$-измеримых множеств, причем $m(B_j) \leqslant \infty$, и $x(s) = 0$ при $s \in S - \bigcup\limits_j B_j$. Отображение $x(s)$ называется сильно $\mathfrak{B}$-измеримым, если существует последовательность $\{x_n(s)\}$ простых отображений, сильно сходящаяся к $x(s)$ m-п. вс. на S.

Определение 7. Функция $x(s)$ называется сепарабельнозначной, если область ее значений $\{x(s); s \in S\}$ сепарабельна. Она называется m-почти сепарабельнозначной, если существует $\mathfrak{B}$-измеримое множество B_0 m-меры нуль такое, что множество $x(s); s \in S - B_0$ сепарабельно.

Определение 8. Функция $x(s)$, определенная на пространстве с мерой $(S, \mathfrak{B}, m)$ и принимающая значения в $\mathbb{B}$-пространстве $\mathbb{X}$, называется m-интегрируемой по Бохнеру, если существует последовательность простых функций $\{x_n(s)\}$, сильно сходящаяся к $x(s)$ m-почти всюду в S, так что при этом

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_S \| x(s) - x_n(s) \| \; m(ds) = 0.$$

Для любого множества $B \in \mathfrak{B}$ m-интеграл Бохнера функции $x(s)$ по множеству B определяется так:

$$\int\limits_B x(s)\, m(ds) \equiv s - \lim_{n\to+\infty} \int\limits_S \chi_B(s) x_n(s)\, m(ds),$$

где $\chi_B(s)$ — характеристическая функция области Ω.

Теорема 9 (Бохнер). *Для того чтобы сильно $\mathfrak{B}$-измеримая функция была m-интегрируемой по Бохнеру, необходимо и достаточно, чтобы норма $\| x(s) \|$ была m-интегрируемой.*

Теорема 10. *Пусть $x(\sigma) \in \mathbb{L}(0, \mathrm{T}; \mathbb{B})$. Тогда для почти всех $t, t+h, t-h \in (0, \mathrm{T})$ имеет место равенство*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{t-h}^{t+h} ds \ \| x(\sigma) - x(t) \|_{\mathbb{B}} \, d\sigma = 0.$$

Замечание. Сильно абсолютно непрерывная функция может нигде не иметь производной. Соответствующий пример приведен в работе [Хилле–Филлипс]. Справедливо следующее утверждение:

Теорема 11. *Если $y(t)$ — функция с ограниченным сильным изменением, определенная на $(0, \mathrm{T})$ и со значениями в $\mathbb{B}$, почти всюду слабо дифференцируемая, то ее производная $y'(t)$ принадлежит $\mathbb{L}(0, \mathrm{T}; \mathbb{B})$. Если, кроме того, $y(t)$ слабо абсолютно непрерывная функция, то она может быть представлена в виде неопределенного интеграла от $y'(t)$.*

§ 4. Пространства интегрируемых функций и распределений

Определение 9. Через $\mathbb{L}^p(S; \mathbb{X})$, $p \in [1, +\infty)$, обозначается множество всех измеримых по Бохнеру функций $u \in (S \to \mathbb{X})$, для которых конечен интеграл Лебега

$$\int_S ds \ \| u(s) \|^p < +\infty.$$

Теорема 12. *Множество $\mathbb{L}^p(S; \mathbb{X})$, $p \in [1, +\infty)$, образующее линейное пространство с естественными линейными операциями, превращается в банахово пространство при наделении его нормой*

$$\| u \|_{\mathbb{L}^p(S;\mathbb{X})} = \left(\int_S ds \ \| u(s) \|^p \right)^{1/p}.$$

Определение 10. Функция $u \in (S \to \mathbb{X})$ называется существенно ограниченной, если она эквивалентна некоторой ограниченной функции, т. е. если существует такое число $M < +\infty$, что $\| u(s) \| \leqslant \mathrm{M}$ для почти всех $s \in S$. Нижняя грань всех таких чисел M обозначается через

$$\operatorname*{vraimax}_{s \in S} \| u(s) \| .$$

Множество всех измеримых по Бохнеру существенно ограниченных функций из $(S \to \mathbb{X})$ мы обозначаем через $\mathbb{L}^\infty(S;\mathbb{X})$.

Теорема 13. *Множество $\mathbb{L}^\infty(S;\mathbb{X})$ является банаховым нерефлексивным пространством относительно нормы*

$$\| u \|_{\mathbb{L}^\infty(S;\mathbb{X})} = \operatorname*{vraimax}_{s\in S} \| u(s) \| .$$

Теорема 14 (неравенство Гельдера). *Если $u \in \mathbb{L}^p(S;\mathbb{X})$, $p \in [1,+\infty]$, и $v \in \mathbb{L}^q(S;\mathbb{X}^*)$, $p^{-1}+q^{-1}=1$, то $\langle u(\cdot), v(\cdot)\rangle \in \mathbb{L}^1(\Omega)$ и*

$$\int_S \langle u(s), v(s)\rangle \, ds \leqslant \| u \|_{\mathbb{L}^p(S;\mathbb{X})} \| v \|_{\mathbb{L}^q(S;\mathbb{X}^*)} .$$

Теорема 15. *Если $\{\mathbb{H}, (\cdot,\cdot)\}$ — гильбертово пространство, то пространство $\mathbb{L}^2(S;\mathbb{H})$ со скалярным произведением*

$$(u,v)_S = \int_S (u(s), v(s))\, ds$$

тоже является гильбертовым.

Теорема 16 (аппроксимационная теорема Вейерштрасса). *При любом конечном $\mathrm{T} > 0$ множество многочленов из $[0,\mathrm{T}] \to \mathbb{B}$, т. е. множество*

$$\left\{ p | p \in [0,\mathrm{T}] \to \mathbb{B},\ \ p(t) = \sum_{j=0}^{m} a_j t^j,\ \ a_j \in \mathbb{B},\ \ j = \overline{0,m} \right\},$$

плотно в $\mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{B})$.

Определение 11. Обозначим пространство $\mathcal{L}(\mathcal{D}(S), \mathbb{X}_w)$ всех непрерывных линейных отображений пространства $\mathcal{D}(S)$ в локально выпуклое пространство $\mathbb{X}_w$ через $\mathcal{D}^*(S;\mathbb{X})$ и элементы этого пространство назовем распределениями на S со значениями в $\mathbb{X}$.

Определение 12. $\mathbb{C}_w^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{B})$ — множество всех деминепрерывных функций на отрезке $[0,\mathrm{T}]$ со значениями в рефлексивном банаховом пространстве $\mathbb{B}$, имеющих деминепрерывную слабую производную.

§ 5. Оператор Немыцкого. Теорема Вайнберга–Немыцкого

Определение 13. Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^N$ и пусть $f(x;\xi)$ функция, определенная для почти всех $x \in \Omega$ и для всех $\xi \in \mathbb{R}^m$. Говорят, что функция f обладает свойством Каратеодори, если

1) для всех $\xi \in \mathbb{R}^m$ функция $f_\xi(x) = f(x;\xi)$ измерима на Ω как функция переменой ξ;

2) для почти всех $x \in \Omega$ функция $f_x(\xi) = f(x;\xi)$ является непрерывной в $\mathbb{R}^m$ по переменной ξ.

Определение 14. Пусть $f(x;\xi)$ — функция, определенная для $x \in \Omega$ и $\xi \in \mathbb{R}^m$, и пусть f является каратеодориевой. Оператор $\mathcal{K}$, определенный на всевозможных упорядоченных наборах из m измеримых функций $u_i = u_i(x)$ $(x \in \Omega,\ \ i = \overline{1,m})$ формулой

$$\mathcal{K}(u_1,...,u_m) = f(x;u_1(x),...,u_m(x)),\ \ x \in \Omega$$

называется оператором Немыцкого.

Теорема 17. *Если оператор Немыцкого* f, *определенный функцией* $f(x;u(x))$ *действует из* $\mathbb{L}^{p_1}$ *в* $\mathbb{L}^{p_2}$, *где* $p_1, p_2 \geqslant 1$, *то оператор Немыцкого* f *непрерывен и ограничен.*

Теорема 18. *Пусть непрерывная по* u *функция* $f(x,u)$ $x \in G$, $-\infty < u < +\infty$, *удовлетворяет неравенству*

$$|f(x,u)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{T}_i(x)|u|^{\beta_i} + b|u|^{\beta_0},$$

где

$$\mathbb{T}_i \in \mathbb{L}^{\frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2\beta_i}},\ \ 0 \leqslant p_2\beta_i < p_1,\ \ i = \overline{1,n},\ \ \beta_0 = \frac{p_1}{p_2},\ \ b \geqslant 0.$$

Тогда оператор f *действует из пространства* $\mathbb{L}^{p_1}$ *в пространство* $\mathbb{L}^{p_2}$, *причем он непрерывен и ограничен.*

Теорема 19. *Если оператор Немыцкого* $\mathrm{f} = f(x;u_1,...,u_m)$ *действует из* $\mathbb{L}^{p_1} \times \mathbb{L}^{p_2} \times ... \times \mathbb{L}^{p_m}$ *в* $\mathbb{L}^r$, *где* $p_1,...,p_m, r \geqslant 1$, *то оператор Немыцкого непрерывен и ограничен.*

Пример 1. Рассмотрим функцию

$$f(x,u) = |h||u|^q : \mathbb{L}^{q+2}(\Omega) \to \mathbb{L}^{\frac{q+2}{q+1}}(\Omega)$$

для любого фиксированного $h \in \mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$, $q > 0$. Можно проверить, что выполнены все условия теоремы 14. По определению непрерывность оператора $\mathrm{f} : \mathbb{L}^{\mathrm{q}+2}(\Omega) \to \mathbb{L}^{(\mathrm{q}+2)/(\mathrm{q}+1)}(\Omega)$ означает, что имеет место предельное равенство

$$\lim_{n \to +\infty} \int\limits_{\Omega} \int dx\ |f(x,u) - f(x,u_n)|^{\frac{q+2}{q+1}} = 0$$

при условии сильной сходимости $u_n \to u$ в $\mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$.

Пример 2. Рассмотрим функцию

$$f(x,u) = |\nabla h||\nabla u|^{p-2} : \mathbb{L}^p(\Omega) \to \mathbb{L}^{p'}(\Omega)$$

при $p' = p/(p-1)$ для любого фиксированного $h \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, $p > 2$. Можно проверить, что выполнены все условия теоремы 16. По опреде-

лению непрерывность оператора $\mathrm{f}: \mathbb{L}^{\mathrm{p}}(\Omega) \to \mathbb{L}^{\mathrm{p}'}(\Omega)$ означает, что имеет место предельное равенство

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{\Omega}\int dx\ |f(x,u) - f(x,u_n)|^{p'} = 0, \quad p' = p/(p-1)$$

при условии сильной сходимости $\nabla u_n \to \nabla u$ в $\mathbb{L}^p(\Omega)$.

Пример 3. Рассмотрим функцию

$$f(x,u) = |u|^q : \mathbb{L}^{q+2}(\Omega) \to \mathbb{L}^{\frac{q+2}{q}}(\Omega)$$

при $q > 0$. Можно проверить, что выполнены все условия теоремы 14. По определению непрерывность оператора $\mathrm{f}: \mathbb{L}^{\mathrm{q}+2}(\Omega) \to \mathbb{L}^{(\mathrm{q}+2)/\mathrm{q}}(\Omega)$ означает, что имеет место предельное равенство

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{\Omega}\int dx\, |f(x,u) - f(x,u_n)|^{\frac{q+2}{q}} = 0$$

при условии сильной сходимости $u_n \to u$ в $\mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$.

Пример 4. Рассмотрим функцию

$$f(x,u) = |\nabla u|^{p-2} : \mathbb{L}^p(\Omega) \to \mathbb{L}^{p/(p-2)}(\Omega)$$

при $p > 2$. Можно проверить, что выполнены все условия теоремы 16. По определению непрерывность оператора $\mathrm{f}: \mathbb{W}_0^{1,\mathrm{p}}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,\mathrm{p}'}(\Omega)$ означает, что имеет место предельное равенство

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{\Omega}\int dx\ |f(x,u) - f(x,u_n)|^{p/(p-2)} = 0$$

при условии сильной сходимости $\nabla u_n \to \nabla u$ в $\mathbb{L}^p(\Omega)$.

§ 6. Неравенства

Теорема 20 (неравенство Йенсена). *Пусть $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ выпуклая вниз функция и $U \in \mathbb{R}^N$ — ограниченное открытое множество. Пусть $u: U \to \mathbb{R}$ — суммируемая функция. Тогда*

$$f\left(\frac{1}{|U|}\int\limits_U u\,dx\right) \leqslant \frac{1}{|U|}\int\limits_U f(u)\,dx,$$

где $|U|$ — мера U.

Неравенство Коши с ε: $\quad ab \leqslant \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2, \quad \varepsilon > 0, \quad a, b > 0.$

Неравенство Коши–Шварца. Пусть $\mathbb{A}: \mathbb{V} \to \mathbb{V}^*$ является симметричным линейным неотрицательным оператором относительно

скобок двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle$ между рефлексивными банаховыми пространствами $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}^*$, тогда справедливо неравенство

$$\langle \mathbb{A}u, v\rangle \leqslant \langle \mathbb{A}u, u\rangle^{1/2}\langle \mathbb{A}v, v\rangle^{1/2}.$$

§ 7. Операторное исчисление

Рассмотрим ограниченный линейный оператор $\mathbb{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{X})$, где $\mathbb{X}$ — комплексное банахово пространство. Мы определим функцию $f(\mathbb{T})$ от оператора $\mathbb{T}$ формулой, аналогичной интегральной формуле Коши:

$$f(\mathbb{T}) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(\lambda)\mathbb{R}(\lambda;\mathbb{T})\,d\lambda.$$

Для этого обозначим через $F(\mathbb{T})$ совокупность всех комплексных функций $f(\lambda)$, голоморфных в некоторой окрестности спектра $\sigma(\mathbb{T})$ оператора $\mathbb{T}$. Эти окрестности не обязательно связны и могут зависеть от $f(\lambda)$. Пусть $f \in F(\mathbb{T})$, и пусть открытое множество $U \supseteq \sigma(\mathbb{T})$ комплексной плоскости содержится в области голоморфности функции f. Допустим также, что граница Γ этого множества состоит из конечного числа спрямляемых жордановых кривых, ориентированных в положительном направлении. Тогда ограниченный оператор $f(\mathbb{T})$ определяется формулой

$$f(\mathbb{T}) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(\lambda)\mathbb{R}(\lambda;\mathbb{T})\,d\lambda.$$

§ 8. Теоремы о неподвижной точке

Теорема 21 (Шаудер). *Пусть множество* $\mathrm{K} \subset \mathbb{X}$ *компактно и выпукло,* $\mathbb{X}$ *— вещественное банахово пространство. Предположим, что отображение*

$$\mathbb{A} : \mathrm{K} \to \mathrm{K}$$

непрерывно. Тогда $\mathbb{A}$ *имеет неподвижную точку.*

Теорема 22. *Пусть* $\mathbb{B}$ *— замкнутое выпуклое ограниченное подмножество банахова пространства* $\mathbb{X}$*. Пусть оператор* $\mathbb{A}$ *действует из* $\mathbb{B}$ *в* $\mathbb{B}$ *и является сжимающим на* $\mathbb{B}$*, тогда у оператора существует единственная неподвижная точка* $x \in \mathbb{B}$*.*

§ 9. Ослабленное решение уравнения Пуассона

В этом параграфе мы введем понятие ослабленного решения и выясним как оно связано с широко известным понятием слабого решения уравнения Пуассона. Итак, рассмотрим следующую задачу:

$$-\triangle u = f,\ \ u\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{9.1}$$

Определение 15. Под слабым обобщенным решением задачи (9.1) называется решение класса $u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, удовлетворяющее условиям

$$(\nabla u, \nabla \eta)_2 = \langle f, \eta \rangle \quad \forall \ \eta \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \tag{9.2}$$

при условии, что $f \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, где $(\cdot,\cdot)_2$ — скалярное произведение в $\mathbb{L}^2(\Omega)$, в ограниченной области Ω с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$, $\delta \in (0,1]$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скобки двойственности между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$.

Определение 16. Ослабленным решением задачи (9.1) называется слабое решение класса $\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})$.

Рассмотрим уравнение (9.1), понимаемое в слабом смысле. Тогда оператор $-\triangle$ является изометрическим изоморфизмом между $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$. В этом случае при условии, что $f \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, приходим к эквивалентному уравнению

$$u = (-\triangle)^{-1} f. \tag{9.3}$$

Заметим, что на множестве $f \in \mathbb{C}^{(0,h)}(\overline{\Omega})$, $h \in (0,1]$, для оператора $(-\triangle)^{-1}$ имеет место явное представление [Владимиров]

$$(-\triangle)^{-1} f = \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y) f(y), \tag{9.4}$$

где $G(x,y)$ — функция Грина первой краевой задачи для уравнения Лапласа в ограниченной области Ω с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$, $\delta \in (0,1]$. С учетом (9.3) из (9.4) получим

$$u = \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y) f(y). \tag{9.5}$$

Используя известные свойства функции Грина $G(x,y)$, получим, что для $f = f_\varepsilon \in \mathbb{C}^{(0,h)}(\overline{\Omega})$ формула дает слабое решение задачи (9.1) в смысле (9.2), где данное пространство является банаховым относительно нормы

$$\| f \|_h = \sup_{x\in\Omega} |f(x)| + \sup_{x,y\in\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^h}, \quad h \in (0,1].$$

Подставим (9.5), в котором $f = f_\varepsilon$, в уравнение (9.2), тогда получим

$$\left(\nabla \int\limits_{\Omega} dy\, G(x,y) f_\varepsilon(y), \nabla \eta \right)_2 = \langle f_\varepsilon, \eta \rangle \quad \forall \ \eta \in \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Предположим теперь, что $\varphi \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ — произвольная фиксированная функция и что $f_\varepsilon \to \varphi$ сильно в $\mathbb{C}(\overline{\Omega})$ относительно стандартной нормы

$$\| f \| = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|,$$

причем $f_\varepsilon \in \mathbb{C}^{(0,h)}(\overline{\Omega})$. Заметим, что для φ корректно определен интеграл типа потенциала

$$\int\limits_\Omega dy\, G(x,y)\varphi(y).$$

Тогда справедливо следующее соотношение:

$$\left(\int\limits_\Omega dy\, \nabla_x G(x,y)\varphi(y), \nabla\eta\right)_2 + \left(\int\limits_\Omega dy\, \nabla_x G(x,y)[f_\varepsilon(y)-\varphi(y)], \nabla\eta\right)_2 = \\ = \langle\varphi,\eta\rangle + \langle f_\varepsilon - \varphi, \eta\rangle. \quad (9.6)$$

Используя свойства функции Грина в пределе при $\varepsilon \to +0$ из (9.6) получим

$$\left(\int\limits_\Omega dy\, \nabla_x G(x,y)\varphi(y), \nabla\eta\right)_2 = \langle\varphi,\eta\rangle \quad \forall\ \eta \in \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Таким образом, функция

$$u(x) = \int\limits_\Omega dy\, G(x,y)\varphi(y), \quad \varphi(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega}), \qquad (9.7)$$

является слабым решением задачи и в то же время принадлежит классу $\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})$, т.е. является ослабленным решением задачи (9.1).

Тем самым нами доказано, что сужение оператора $(-\triangle)^{-1}$ на класс $\mathbb{C}(\overline{\Omega})$ имеет явное представление (9.7). И, кроме того, нами получено явное представление (9.7) для ослабленного решения задачи (9.1).

§ 10. Пересечение и сумма банаховых пространств

Определение 17. Под полунормой на линейном пространстве $\mathbb{X}$ понимается всякий функционал $p(x)$, $x \in \mathbb{X}$, который удовлетворяет следующим условиям:

1) $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$;
2) $p(tx) = |t|p(x)$.

Определение 18. Линейное пространство, являющееся одновременно и топологическим, называется локально выпуклым пространством, если существует такое семейство μ полунорм на $\mathbb{X}$, что

1) если $p(x) = 0$ для каждого $p \in \mu$, то $x = 0$,
2) совокупность (выпуклых) множеств вида

$$\{x | x \in \mathbb{X},\ p_i(x - x_0) < \varepsilon_i,\ \ i = \overline{1,n}\}$$

образует базис топологии в $\mathbb{X}$ (здесь x_0 — произвольная точка из $\mathbb{X}$, $p_1, ..., p_n$ — любая конечная система полунорм из μ и $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ — любая конечная система положительных вещественных чисел).

Теорема 23. *Банаховы пространства* $\mathbb{X}$ *и* $\mathbb{Y}$ *непрерывно вложены в локально выпуклое пространство* $\mathbb{V}$, *тогда их пересечение* $\mathbb{X} \cap \mathbb{Y}$ *можно превратить в банахово пространство относительно нормы*

$$\| z \| = \| z \|_{\mathbb{X}} + \| z \|_{\mathbb{Y}} .$$

Теорема 24. *Пусть* $\mathbb{X}$ *и* $\mathbb{Y}$ *— банаховы пространства, непрерывно вложенные в локально выпуклое пространство* $\mathbb{V}$. *Пусть, далее, пересечение* $\mathbb{X} \cap \mathbb{Y}$, *наделенное нормой* $\| z \|_{\mathbb{V}} = \| z \|_{\mathbb{X}} + \| z \|_{\mathbb{Y}}$, *плотно в* $\mathbb{X}$ *и* $\mathbb{Y}$. *Тогда*

$$\mathbb{X}^* + \mathbb{Y}^* = (\mathbb{X} \cap \mathbb{Y})^*$$

и

$$(\mathbb{X} + \mathbb{Y})^* = \mathbb{X}^* \cap \mathbb{Y}^*$$

как в смысле равенства множеств, так и в смысле равенства норм.

§ 11. Классические, ослабленные, сильные обобщенные и слабые обобщенные решения эволюционных задач

На протяжении книги мы используем различные понятия решений тех или иных задач. Мы решили показать связь этих решений. Действительно, имеет место следующая цепочка включений классов решений:

$$\boxed{\textbf{классические решения}} \subset \boxed{\textbf{ослабленные решения}} \subset$$

$$\subset \boxed{\textbf{сильнообобщенные решения}} \subset \boxed{\textbf{слабообобщенные решения}}.$$

Разумеется, для каждой конкретной задачи эти классы решений формулируются своим способом, но их связь остается такой.

Сейчас на примере простейшей задачи мы рассмотрим, как определяются эти классы решений. Итак, рассмотрим следующую линейную задачу.

Задача 1.

$$\frac{\partial}{\partial t} \triangle u - u = 0, \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x),$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0,1]$, $(x_1, x_2, x_3) \in \Omega$.

Определение 19. Классическим решением задачи 1 называется решение класса $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}]; \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega}))$.

Заметим, что в рассматриваемом классе все частные производные определены в классическом смысле.

Определение 20. Ослабленным решением задачи 1 называется сильное обобщенное из класса $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})\cap\mathbb{C}_0(\overline{\Omega}))$.

Определение 21. Сильным обобщенным решением задачи 1 называется решение класса $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}_0^1(\Omega))$ следующей задачи:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\triangle u - u, w \right\rangle = 0 \ \ \forall\, w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \ \ \forall\, t \in [0,\mathrm{T}],$$

$$u(x,0) = u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega),$$

где символом $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — обозначена скобка двойственности между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, а производная по времени понимается в классическом смысле.

Определение 22. Слабым обобщенным решением задачи 1 называется решение класса $\mathbb{AC}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}_0^1(\Omega))$ задачи

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left\langle \frac{\partial}{\partial t}\triangle u - u, w \right\rangle \vartheta(t) = 0 \ \ \forall\, w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \ \ \forall\, \vartheta(t) \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T}),$$

$$u(x,0) = u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega),$$

где символом $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — обозначена скобка двойственности между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, а производная по времени понимается в лебеговском смысле.

Заметим, что можно дать более слабое определение слабого обобщенного решения. Это зависит от каждой конкретной задачи. Например, для задачи 1 можно дать следующее определение слабого обобщенного решения.

Определение 23. Слабым обобщенным решением задачи 1. называется решение класса $u \in \mathbb{C}(0,\mathrm{T};\mathbb{H}_0^1(\Omega))$, удовлетворяющее задаче

$$\frac{d}{dt}\langle\triangle u, w\rangle - \langle u, w\rangle = 0 \quad \forall\, w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega),$$

$$u(x,0) = u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega),$$

производная по времени понимается в смысле $\mathcal{D}'(0,\mathrm{T})$, а символом $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначена скобка двойственности между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$,

Очевидно, что в силу сформулированных определений для задачи 1 имеет место указанная цепочка вложений.

В случае стационарных задач имеет место более простая цепочка типов решений:

$$\boxed{\textbf{классические решения}} \subset \boxed{\textbf{ослабленные решения}} \subset$$

$$\subset \boxed{\textbf{слабые обобщенные решения}}.$$

Это связано с тем, что в определениях 20–22 сильных и слабых обобщенных решений используется та или иная гладкость решений во времени и в случае стационарных задач эти свойства отсутствуют.

§ 12. Две эквивалентные формулировки слабого решения в смысле $\mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{B})$

Пусть $\mathbb{B}$ — рефлексивное сепарабельное банахово пространство с сопряженным $\mathbb{B}^*$, со скобкой двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{B}}$. Обозначим через $\| \cdot \|_{\mathbb{B}}$ норму в $\mathbb{B}$, а $\| \cdot \|_{\mathbb{B}}^*$ — норму в $\mathbb{B}^*$.

Пусть $\mathcal{L}[u]$ некоторый дифференциальный оператор в частных производных такой, что для любого $\mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0)$ имеет место неравенство

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \ \| \mathcal{L}[u] \|_{\mathbb{B}}^{*2} (t) \leqslant \mathrm{C}(\mathrm{T}) < +\infty \ \ \forall \, \mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0). \tag{12.1}$$

Рассмотрим следующие две формулировки слабого обобщенного решения оператора $\mathcal{L}[u]$:

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \ \langle \mathcal{L}[u], w \rangle_{\mathbb{B}} \, \varphi(t) = 0 \ \ \forall \, w \in \mathbb{B}, \ \ \forall \, \varphi(t) \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}), \ \ \forall \, \mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0), \tag{12.2}$$

и

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \ \langle \mathcal{L}[u], v \rangle_{\mathbb{B}} = 0 \ \ \forall \, v \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{B}), \ \ \forall \, \mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0), \tag{12.3}$$

где символом $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{B}}$ обозначена скобка двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{B}$ и $\mathbb{B}^*$. В силу (12.1) левые части выражений (12.2), (12.3) определены.

Докажем теперь, что с любой наперед заданной точностью произвольную фиксированную функцию из $\mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{B})$ можно приблизить в смысле $\mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{B})$ функциями из $\mathbb{C}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{B})$. Действительно, введем финитную в $\mathbb{R}^1$ бесконечно дифференцируемую функцию

$$\rho(t) = \left\{ \begin{array}{cc} \mathrm{C} \exp\left(\frac{1}{t^2 - 1}\right), & |t| < 1 \\ 0, & |t| \geqslant 1 \end{array} \right\}, \tag{12.4}$$

где постоянная $\mathrm{C} > 0$ определяется условием

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} dt \, \rho(t) = 1.$$

Фиксируем произвольную функцию $v \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{B})$, а через $\overline{v}$ обозначим продолжение функции v нулем вне интервала $(0,\mathrm{T})$. Используя функцию (12.4), введем срезку функции $\overline{v}$:

$$v^{\varepsilon}(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\mathbb{R}^1} ds\,\rho\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right)\overline{v}(s), \tag{12.5}$$

где интеграл понимается в смысле Бохнера. Заметим, что в силу результата теоремы 3.8.4 [Хилле] из (12.5) заключаем, что $v^{\varepsilon} \in \in \mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{B})$. Справедливо слеующее выражение:

$$v^{\varepsilon}(t) - v(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\mathbb{R}^1} ds\,\rho\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right)\left[\overline{v}(s) - v(t)\right].$$

Из последнего выражения вытекает неравенство

$$\| v^{\varepsilon}(t) - v(t) \|_{\mathbb{B}} \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\mathbb{R}^1} ds\,\rho\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right)\| \overline{v}(s) - v(t) \|_{\mathbb{B}} \quad \forall\, t \in (0,\mathrm{T}). \tag{12.6}$$

Из (12.6) вытекает неравенство

$$\| v^{\varepsilon}(t) - v(t) \|_{\mathbb{B}} \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} ds\ \| v(s) - v(t) \|_{\mathbb{B}}\,. \tag{12.7}$$

В силу теоремы 3.8.5 [Хилле] получаем, что для почти всех $t \in (0,\mathrm{T})$ справедливо следующее предельное равенство:

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} ds\ \| v(s) - v(t) \|_{\mathbb{B}} = 0.$$

Значит, для почти всех $t \in (0,\mathrm{T})$ в силу (12.7) справедливо предельное равенство

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\| v(t) - v^{\varepsilon}(t) \|_{\mathbb{B}} = 0.$$

В силу теоремы Лебега приходим к выводу, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{0}^{\mathrm{T}} dt\ \| v(t) - v^{\varepsilon}(t) \|_{\mathbb{B}}^2 = 0.$$

Итак, мы доказали, что любую функцию из $\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{B})$ со сколь угодной точностью можно приблизить функциями из $\mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{B})$.

Рассмотрим банахово пространство $\mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{B})$. В силу сепарабельности банахова пространства $\mathbb{B}$ в этом пространстве найдется счетная всюду плотная система элементов $\{w_k\}_{k=1}^{+\infty}$. В силу результата теоремы 1.3 гл. 4 [Гаевский] система функций $\{w_{k_1}t^{k_2}\}_{k_1,k_2=1}^{+\infty}$, $t \in [0,\mathrm{T}]$, всюду плотна в $\mathbb{C}([0,\mathrm{T};\mathbb{B})$.

Пусть $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{+\infty}$ — какой-либо базис в $\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T})$. Справедливо следующее неравенство:

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \parallel v - \sum_{k_1,k_3=1}^{m_1,m_3} \mathrm{c}_{m_1m_3k_1k_3}\varphi_{k_3}(t)w_{k_1} \parallel_{\mathbb{B}}^2 \leqslant 3\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \parallel v - v_\varepsilon \parallel_{\mathbb{B}}^2 +$$

$$+ 3\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \parallel v_\varepsilon - \sum_{k_1,k_2=1}^{m_1,m_2} d_{m_1m_2k_1k_2}w_{k_1}t^{k_2} \parallel_{\mathbb{B}}^2 +$$

$$+ 3\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \parallel \sum_{k_1,k_2=1}^{m_1,m_2} d_{m_1m_2k_1k_2}w_{k_1}(t^{k_2} - \sum_{k_3=1}^{m_3}\gamma_{k_2k_3}\varphi_{k_3}(t)) \parallel_{\mathbb{B}}^2 =$$

$$= \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3, \quad (12.8)$$

где

$$\mathrm{c}_{m_1m_3k_1k_3} = \sum_{k_2=1}^{m_2} d_{m_1m_2k_1k_2}\gamma_{k_2k_3}.$$

Тем самым для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая функция v_ε, что $\mathrm{I}_1 \leqslant \varepsilon/3$, найдутся такие $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ и найдутся такие $d_{m_1m_2k_1k_2}$, что $\mathrm{I}_2 \leqslant \varepsilon/3$, наконец, найдутся такие $\gamma_{k_2k_3}$, что $\mathrm{I}_3 \leqslant \varepsilon/3$. Тем самым, из (12.8) вытекает неравенство

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \parallel v - \sum_{k_1,k_3=1}^{m_1,m_3} \mathrm{c}_{m_1m_3k_1k_3}\varphi_{k_3}(t)w_{k_1} \parallel_{\mathbb{B}}^2 \leqslant \varepsilon. \quad (12.9)$$

Рассмотрим задачи (12.2), (12.3). Совершенно очевидно, что из (12.3) вытекает (12.2). Теперь мы докажем, что из (12.2) вытекает (12.3). Действительно, справедливо следующее равенство:

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \, \langle \mathcal{L}[u], v\rangle_{\mathbb{B}} = \int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left\langle \mathcal{L}[u], v - \sum_{k_1,k_3=1}^{m_1,m_3} \mathrm{c}_{m_1m_3k_1k_3}\varphi_{k_3}(t)w_{k_1} \right\rangle_{\mathbb{B}} \quad (12.10)$$

$\forall\, v \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{B})$. Из (12.1) и (12.9) вытекает, что правая часть равенства (12.10) для любого $\varepsilon > 0$ может быть сделана меньше $\delta(\varepsilon) \to +0$ при $\varepsilon \to +0$. Так как левая часть не зависит от $\varepsilon > 0$, то приходим к (12.3).

Таким образом, задачи (12.2) и (12.3) эквивалентны.

§ 13. Производные Гато и Фреше нелинейных операторов

Сформулируем определения производных Гато и Фреше нелинейных отображений, а также некоторые важные для нас результаты.

Пусть $\mathbb{B}$ — рефлексивное банахово пространство с сильным сопряженным $\mathbb{B}'$. Предположим, что на банаховом пространстве $\mathbb{B}$ определен оператор $\mathbb{F}(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$.

Определение 24. Если в точке $u \in \mathbb{B}$ существует предел

$$\lim_{t \to +0} \| t^{-1}[\mathbb{F}(u+th) - \mathbb{F}(u)] - \mathbb{VF}(u,h) \|_{\mathbb{B}'} = 0, \quad h \in \mathbb{B},$$

то оператор $\mathbb{VF}(u,h)$ называется дифференциалом Гато в точке $x \in \mathbb{B}$ от оператора $\mathbb{F}(u)$.

Определение 25. В том случае, когда дифференциал Гато $\mathbb{VF}(u,h) : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ от оператора $\mathbb{F}(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ является линейным относительно $h \in \mathbb{B}$, он называется производной Гато.

Определение 26. Если в точке $u \in \mathbb{B}$ имеет место следующее выражение:

$$\mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u) = d\mathbb{F}(u,h) + \omega(u,h),$$

где $\omega(u,h)$ есть линейный оператор от $u \in \mathbb{B}$ и

$$\lim_{\|h\|_{\mathbb{B}}=1} \frac{\| \omega(u,h) \|_{\mathbb{B}'}}{\| h \|_{\mathbb{B}}} = 0,$$

то $d\mathbb{F}(u,\cdot) : \mathbb{B} \to \mathcal{L}(\mathbb{B}, \mathbb{B}')$ называется производной Фреше оператора $\mathbb{F}(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$.

Сформулируем теперь теорему о достаточных условиях, при которых из существования производной Гато следует существование совпадающей с ней производной Фреше.

Теорема 25. *Если производная Гато* $\mathbb{VF}(u,h) : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ *оператора* $\mathbb{F}(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ *существует в некоторой окрестности* $\mathrm{U}(u)$ *точки* $u \in \mathbb{B}$ *и непрерывна в этой точке, то существует*

$$d\mathbb{F}(u,h) = \mathbb{VF}(u,h).$$

Иными словами: *непрерывная производная Гато есть производная Фреше.*

Теперь мы докажем, что производная Фреше оператора псевдолапласиана

$$\triangle_p u \equiv \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) : \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega), \quad p > 2, \quad p' = p/(p-1),$$

имеет производную Фреше, определенную на $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$:

$$d\mathbb{F}(u,h) = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla h) + (p-2)\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-4}(\nabla u, \nabla h)\nabla u) : \\ : \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \times \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega).$$

Действительно, пусть $u,\ h \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Введем обозначения

$$\overrightarrow{\zeta} = \nabla u,\ \ \overrightarrow{\eta} = \nabla h.$$

Для нахождения производной Фреше оператора $\mathbb{A}_1(u) \equiv \equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ необходимо найти производную Фреше оператора $|\overrightarrow{\zeta}|^{p-2}\overrightarrow{\zeta}$. С этой целью предварительно найдем производную Гато указанной функции для любой вектор-функции $\overrightarrow{\zeta} \in \mathbb{L}^p(\Omega) \times \mathbb{L}^p(\Omega) \times \mathbb{L}^p(\Omega)$, т. е. докажем, что имеет место предельное равенство

$$\lim_{t\to+0} \| (|\overrightarrow{\zeta} + t\overrightarrow{\eta}|^{p-2}(\overrightarrow{\zeta} + t\overrightarrow{\eta}) - |\overrightarrow{\zeta}|^{p-2}\overrightarrow{\zeta})t^{-1} - \\ - |\overrightarrow{\zeta}|^{p-2}\overrightarrow{\eta} - (p-2)|\overrightarrow{\zeta}|^{p-4}(\overrightarrow{\zeta}, \overrightarrow{\eta})\overrightarrow{\zeta} \|_{p'} = 0.$$

Для любых фиксированных $\overrightarrow{\zeta},\ \overrightarrow{\eta} \in \mathbb{L}^p(\Omega) \times \mathbb{L}^p(\Omega) \times \mathbb{L}^p(\Omega)$ множества

$$\mathrm{E}_\delta = \left\{x \in \Omega : |\overrightarrow{\zeta}| \geqslant \delta > 0\right\},\ \ \mathrm{E}'_\delta = \left\{x \in \Omega : |\overrightarrow{\zeta}| < \delta\right\}$$

при произвольном фиксированном $\delta > 0$ являются измеримыми подмножествами множества Ω, причем, очевидно, $\Omega = \mathrm{E}_\delta \cup \mathrm{E}'_\delta \cup \mathrm{E}_0$, $\operatorname{meas}\mathrm{E}_0 = 0$. Далее нам нужно рассмотреть два случая: $p \in (2,4)$ и $p \in [4,+\infty)$. Второй случай проще, поэтому рассмотрим первый. Итак, пусть $p \in \in (2,4)$.

Рассмотрим векторнозначную функцию

$$\overrightarrow{\vartheta}(t) = |\overrightarrow{\zeta} + t\overrightarrow{\eta}|^{p-2}(\overrightarrow{\zeta} + t\overrightarrow{\eta}),\ \ p > 2,$$

для которой справедлива формула Тейлора с остаточным слагаемым в форме Лагранжа:

$$\overrightarrow{\vartheta}(t) = \overrightarrow{\vartheta}(0) + \overrightarrow{\vartheta}'(\tau)t,\ \ \tau \in (0,t),$$

$$\overrightarrow{\vartheta}(0) = |\overrightarrow{\zeta}|^{p-2}\overrightarrow{\zeta},\ \ \overrightarrow{\vartheta}'(\tau) = |\overrightarrow{\zeta} + \tau\overrightarrow{\eta}|^{p-2}\overrightarrow{\eta} + \\ + (p-2)\left(\tau|\overrightarrow{\eta}|^2 + (\overrightarrow{\eta}, \overrightarrow{\zeta})\right)|\overrightarrow{\zeta} + \tau\overrightarrow{\eta}|^{p-2}(\overrightarrow{\zeta} + \tau\overrightarrow{\eta})\frac{1}{|\overrightarrow{\zeta} + \tau\overrightarrow{\eta}|^2} = \\ = \overrightarrow{\eta}|(\overrightarrow{\zeta} + \tau\overrightarrow{\eta})|^{p-2} + (p-2)|\overrightarrow{\zeta} + \tau\overrightarrow{\eta}|^{p-2}\frac{(\overrightarrow{\zeta} + \tau\overrightarrow{\eta}, \overrightarrow{\eta})}{|\overrightarrow{\zeta} + \tau\overrightarrow{\eta}|}\frac{\overrightarrow{\zeta} + \tau\overrightarrow{\eta}}{|\overrightarrow{\zeta} + \tau\overrightarrow{\eta}|}.$$

Значит,

$$|\overrightarrow{\vartheta}'(\tau)| \leqslant (p-1)|\overrightarrow{\eta}||\overrightarrow{\zeta} + \tau\overrightarrow{\eta}|^{p-2}.$$

Кроме того,

$$\int\limits_{\mathrm{E}'_\delta} dx\,|\overrightarrow{\vartheta}'(\tau)|^{p'} \leqslant (p-1)^{p'} \int\limits_{\mathrm{E}'_\delta} dx\,|\overrightarrow{\eta}|^{p'}\,|\overrightarrow{\zeta}+\tau\overrightarrow{\eta}|^{p'(p-2)} \leqslant$$

$$\leqslant (p-1)^{p/(p-1)} \left(\int\limits_{\mathrm{E}'_\delta} dx\,|\overrightarrow{\eta}|^{p}\right)^{1/(p-1)} \left(\int\limits_{\mathrm{E}'_\delta} dx\,|\overrightarrow{\zeta}+\tau\overrightarrow{\eta}|^{p}\right)^{(p-2)/(p-1)} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C}\,\|\,\overrightarrow{\eta}\,\|_p^{p/(p-1)} \left[\|\,\overrightarrow{\zeta}\,\|_p + \tau\,\|\,\overrightarrow{\eta}\,\|_p\right]^{p(p-2)/(p-1)} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C}_1\delta + \mathrm{C}_2\tau \leqslant \varepsilon/6$$

при достаточно малом $\delta > 0$ и малом $t > 0$, $\tau \in (0, t)$. Таким образом, справедлива оценка

$$\|\,(|\overrightarrow{\zeta}+t\overrightarrow{\eta}|^{p-2}(\overrightarrow{\zeta}+t\overrightarrow{\eta}) - |\overrightarrow{\zeta}|^{p-2}\overrightarrow{\zeta})t^{-1} - |\overrightarrow{\zeta}|^{p-2}\overrightarrow{\eta} -$$

$$-(p-2)|\overrightarrow{\zeta}|^{p-4}(\overrightarrow{\zeta},\overrightarrow{\eta})\overrightarrow{\zeta}\,\|_{p',\mathrm{E}'_\delta} \leqslant$$

$$\leqslant \|\,\overrightarrow{\vartheta}'(\tau)\,\|_{p',\mathrm{E}'_\delta} + \|\,|\overrightarrow{\zeta}|^{p-2}\overrightarrow{\eta}\,\|_{p',\mathrm{E}'_\delta} + (p-2)\,\|\,|\overrightarrow{\zeta}|^{p-4}(\overrightarrow{\zeta},\overrightarrow{\eta})\overrightarrow{\zeta}\,\|_{p',\mathrm{E}'_\delta},$$

где

$$\|\,\varphi\,\|_{p',\mathrm{E}'_\delta} \equiv \left(\int\limits_{\mathrm{E}'_\delta} dx\,|\varphi|^{p'}\right)^{1/p'}.$$

Справедливы следующая цепочка неравенств:

$$\|\,|\overrightarrow{\zeta}|^{p-2}\overrightarrow{\eta}\,\|_{p',\mathrm{E}'_\delta} \leqslant \left(\int\limits_{\mathrm{E}'_\delta} dx\,|\overrightarrow{\zeta}|^{(p-2)p'}\,|\overrightarrow{\eta}|^{p'}\right)^{1/p'} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{\mathrm{E}'_\delta} dx\,|\overrightarrow{\zeta}|^{(p-2)p'r_1}\right)^{1/(p'r_1)} \left(\int\limits_{\mathrm{E}'_\delta} dx\,|\overrightarrow{\eta}|^{p'r_2}\right)^{1/(p'r_2)} \equiv Y.$$

Потребуем, чтобы $p'r_2 = p$, тогда $r_2 = p-1$, $r_1 = (p-1)(p-2)^{-1}$, $(p-2)p'r_1 = p$, $p'r_1 = p/(p-2)$. Значит,

$$Y \leqslant \left(\int\limits_{\mathrm{E}'_\delta} dx\,|\overrightarrow{\zeta}|^{p}\right)^{(p-2)/p} \left(\int\limits_{\mathrm{E}'_\delta} dx\,|\overrightarrow{\eta}|^{p}\right)^{1/p} \leqslant \mathrm{C}\delta \leqslant \varepsilon/6.$$

Аналогичным образом доказывается, что

$$(p-2)\,\|\,|\overrightarrow{\zeta}|^{p-4}(\overrightarrow{\zeta},\overrightarrow{\eta})\overrightarrow{\zeta}\,\|_{p',\mathrm{E}'_\delta}\leqslant\varepsilon/6$$

при достаточно малом $\delta>0$.

Значит,

$$\|\,(|\overrightarrow{\zeta}+t\overrightarrow{\eta}|^{p-2}(\overrightarrow{\zeta}+t\overrightarrow{\eta})-|\overrightarrow{\zeta}|^{p-2}\overrightarrow{\zeta})t^{-1}-$$
$$-|\overrightarrow{\zeta}|^{p-2}\overrightarrow{\eta}-(p-2)|\overrightarrow{\zeta}|^{p-4}(\overrightarrow{\zeta},\overrightarrow{\eta})\overrightarrow{\zeta}\,\|_{p',\mathrm{E}'_\delta}\leqslant\varepsilon/2$$

при достаточно малых $t>0$ и $\delta>0$.

Теперь рассмотрим векторнозначную функцию

$$\overrightarrow{\vartheta}(t)=|\overrightarrow{\zeta}+t\overrightarrow{\eta}|^{p-2}(\overrightarrow{\zeta}+t\overrightarrow{\eta}),\quad p>2,$$

на множестве E_δ. Функцию $\overrightarrow{\vartheta}(t)$ можно представить в следующем эквивалентном виде:

$$\overrightarrow{\vartheta}(t)=||\overrightarrow{\zeta}|^2+t^2|\overrightarrow{\eta}|^2+2\left(\overrightarrow{\zeta},\overrightarrow{\eta}\right)|^{(p-2)/2}(\overrightarrow{\zeta}+t\overrightarrow{\eta})=$$
$$=|\overrightarrow{\zeta}|^{p-2}|1+z|^{(p-2)/2}(\overrightarrow{\zeta}+t\overrightarrow{\eta}),$$

где

$$z=\frac{t^2|\overrightarrow{\zeta}|^2+2t\left(\overrightarrow{\zeta},\overrightarrow{\eta}\right)}{|\overrightarrow{\zeta}|^2}.$$

Пусть $t>0$ настолько мало, что $z\in(0,1)$. Тогда, воспользовавшись формулой Лагранжа и тем, что $p\in(2,4)$, получим

$$(1+z)^{(p-2)/2}=1+\frac{p-2}{2}\frac{z}{(1+\xi)^{(4-p)/2}},\quad \xi\in(0,z).$$

Отсюда получим

$$\overrightarrow{\vartheta}(t)=\overrightarrow{\vartheta}(0)+t|\overrightarrow{\zeta}|^{p-2}\overrightarrow{\eta}+t(p-2)\frac{|\overrightarrow{\zeta}|^{p-4}\left(\overrightarrow{\zeta},\overrightarrow{\eta}\right)}{(1+\xi)^{(4-p)/2}}\overrightarrow{\zeta}+$$
$$+\frac{1}{(1+\xi)^{(4-p)/2}}[(p-2)t^2\left(\overrightarrow{\zeta},\overrightarrow{\eta}\right)|\overrightarrow{\zeta}|^{p-4}\overrightarrow{\eta}+\frac{p-2}{2}t^2|\overrightarrow{\zeta}|^{p-4}|\overrightarrow{\eta}|^2\overrightarrow{\zeta}+$$
$$+\frac{p-2}{2}t^3|\overrightarrow{\zeta}|^{p-4}|\overrightarrow{\eta}|^2\overrightarrow{\eta}],$$

где из явного вида z следует, что при фиксированных $\overrightarrow{\zeta},\ \overrightarrow{\eta}\in\mathbb{L}^p(\Omega)\times\mathbb{L}^p(\Omega)\times\mathbb{L}^p(\Omega)$ найдется такое $\tau\in(0,t)$, что справедливо представление

$$\xi=\frac{\tau^2|\overrightarrow{\zeta}|^2+2\tau\left(\overrightarrow{\zeta},\overrightarrow{\eta}\right)}{|\overrightarrow{\zeta}|^2}.$$

Отметим, что

$$|\xi| > \frac{\tau}{|\overrightarrow{\zeta}|^2}|2|(\overrightarrow{\zeta}, \overrightarrow{\eta})| - \tau|\overrightarrow{\eta}|^2|,$$
$$|\overrightarrow{\zeta}| > \tau|\overrightarrow{\eta}|$$

при достаточно малом $\tau \in (0, t)$ на множестве E_δ. Кроме того, при таких $\tau \in (0, t)$ справедливы оценки

$$\left|\frac{1}{(1+\xi)^{(4-p)/2}} - 1\right| \leqslant \mathrm{C}|\xi|.$$

Отметим, что при $|\overrightarrow{\zeta}| > \tau|\overrightarrow{\eta}|$ имеет место неравенство $|\xi| \leqslant 3$. Справедливы неравенства

$$\mathrm{J} \equiv \| [\overrightarrow{\vartheta}(t) - \overrightarrow{\vartheta}(0)]t^{-1} - |\overrightarrow{\zeta}|^{p-2}\overrightarrow{\eta} - (p-2)|\overrightarrow{\zeta}|^{p-4}(\overrightarrow{\zeta}, \overrightarrow{\eta})\overrightarrow{\zeta} \|_{p', \mathrm{E}_\delta} \leqslant$$
$$\leqslant \| (1 - (1+\xi)^{(p-4)/2})(p-2)|\overrightarrow{\zeta}|^{p-4}(\overrightarrow{\zeta}, \overrightarrow{\eta})\overrightarrow{\zeta} \|_{p', \mathrm{E}_\delta} +$$
$$+ \| (1+\xi)^{(p-4)/2}[(p-2)t(\overrightarrow{\zeta}, \overrightarrow{\eta})|\overrightarrow{\zeta}|^{p-4}\overrightarrow{\eta} +$$
$$+ (p-2)2^{-1}|\overrightarrow{\zeta}|^{p-4}|\overrightarrow{\eta}|^2\overrightarrow{\zeta}t + (p-2)2^{-1}|\overrightarrow{\zeta}|^{p-4}|\overrightarrow{\eta}|^2\overrightarrow{\eta}t^2] \|_{p', \mathrm{E}_\delta} =$$
$$= \mathrm{J}_1 + \mathrm{J}_2,$$

для J_1 выполнена следующая оценка равномерно по $t > 0$:

$$\mathrm{J}_1 \leqslant \mathrm{C} \| |\overrightarrow{\zeta}|^{p-2}|\overrightarrow{\eta}| \|_{\mathrm{E}_\delta, p'} \leqslant \mathrm{C}(\delta, \| \overrightarrow{\eta} \|_{\mathrm{E}_\delta, p'}) < +\infty.$$

С другой стороны, в силу явного вида ξ имеем, что $\xi \to +0$ при $t > \tau > 0$, стремящемся к нулю для почти всех $x \in \mathrm{E}_\delta$. Значит,

$$(1 - (1+\xi)^{(p-4)/2})(p-2) \leqslant \mathrm{C}|\xi| \to +0$$

при $t > \tau > 0$, стремящемся к нулю. Стало быть, в силу теоремы Лебега приходим к выводу, что при достаточно малом $t > 0$ справедлива оценка

$$\mathrm{J}_1 \leqslant \varepsilon/4.$$

Воспользовавшись тем, что при достаточно малом $t > 0$ имеет место неравенство $|\overrightarrow{\eta}|t < |\overrightarrow{\zeta}|$, получим соотношения

$$t|(\overrightarrow{\eta}, \overrightarrow{\zeta})|\overrightarrow{\zeta}|^{p-4}\overrightarrow{\eta}| \leqslant |\overrightarrow{\zeta}|^{p-2}|\overrightarrow{\eta}|,$$
$$t||\overrightarrow{\zeta}|^{p-4}|\overrightarrow{\eta}|\overrightarrow{\zeta}| \leqslant |\overrightarrow{\zeta}|^{p-2}|\overrightarrow{\eta}|, \quad t^2||\overrightarrow{\zeta}|^{p-4}|\overrightarrow{\eta}|^2\overrightarrow{\eta}| \leqslant |\overrightarrow{\zeta}|^{p-2}|\overrightarrow{\eta}|.$$

Отсюда с учетом явного выражения для J_2 получим, что, с одной стороны, при достаточно малом $t > 0$

$$\mathrm{J}_2 \leqslant \mathrm{C}.$$

С другой стороны,

$$t(\overrightarrow{\eta},\overrightarrow{\zeta})|\overrightarrow{\zeta}|^{p-4}\overrightarrow{\eta}\to 0,\ \ t|\overrightarrow{\zeta}|^{p-4}|\overrightarrow{\eta}|\overrightarrow{\zeta}\to 0,\ \ t^2|\overrightarrow{\zeta}|^{p-4}|\overrightarrow{\eta}|^2\overrightarrow{\eta}\to 0$$

при $t\to+0$ для почти всех $x\in \mathrm{E}_\delta$. И снова по теореме Лебега приходим к выводу, что при при достаточно малом $t>0$

$$\mathrm{J}_2\leqslant \varepsilon/4.$$

Значит, при достаточно малом $t>0$ имеем

$$\mathrm{J}\leqslant \varepsilon/2.$$

Тем самым приходим к выводу, что

$$\|\,(|\overrightarrow{\zeta}+t\overrightarrow{\eta}|^{p-2}(\overrightarrow{\zeta}+t\overrightarrow{\eta})-|\overrightarrow{\zeta}|^{p-2}\overrightarrow{\zeta})t^{-1}-$$
$$-|\overrightarrow{\zeta}|^{p-2}\overrightarrow{\eta}-(p-2)|\overrightarrow{\zeta}|^{p-4}(\overrightarrow{\zeta},\overrightarrow{\eta})\overrightarrow{\zeta}\,\|_{p'}\leqslant\varepsilon$$

при достаточно малом $t>0$.

Стало быть, векторная функция

$$|\overrightarrow{\zeta}|^{p-2}\overrightarrow{\zeta},\ \ p\in(2,4),$$

дифференцируема по Гато. Это в свою очередь означает, что оператор $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ дифференцируем по Гато для любого $u\in\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ и его производная Гато имеет вид

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla h)+(p-2)\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-4}(\nabla u,\nabla h)\nabla u)\ \ \forall\, h\in\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega).$$

Для удобства перепишем производную Гато оператора $\triangle_p u$ в виде

$$\mathbb{A}_{1,u}^{'}(u)h=\mathbb{A}_{11}(u)h+\mathbb{A}_{12}(u)h,$$
$$\mathbb{A}_{11}(u)h=-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla h),$$
$$\mathbb{A}_{12}(u)h=-(p-2)\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-4}\nabla u(\nabla u,\nabla h)),$$

где $\mathbb{A}_{1,u}^{'}(\cdot):\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)\to\mathcal{L}(\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega);\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega))$, $p'=p/(p-1)$. Докажем теперь, что производная Гато $\mathbb{A}_{11}(u)$ является сильно непрерывным и ограниченным отображением $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)\to\mathcal{L}(\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega);\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega))$. По определению имеем

$$\|\,\mathbb{A}_{11}(u)-\mathbb{A}_{11}(u_n)\,\|_{\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)\to\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)}=$$
$$=\sup_{\|h\|_{W_0^{1,p}}=1}\|\,\mathbb{A}_{11}(u)h-\mathbb{A}_{11}(u_n)h\,\|_{\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)}\leqslant \mathrm{C}\sup_{\|h\|_{\mathbb{W}_0^{1,p}}=1}\mathbb{J}_n(h),$$

где

$$\mathbb{J}_n(h)=\left(\int\limits_\Omega dx\,|\nabla h|^{p'}\,||\nabla u_n|^{p-2}-|\nabla u|^{p-2}|^{p'}\right)^{1/p'}.$$

Отсюда получаем оценку сверху на величину $\mathbb{J}_n(h)$. Действительно, справедливо следующее неравенство:

$$\mathbb{J}_n(h) \leqslant \left(\int\limits_\Omega dx\,|\nabla h|^{p'r_1}\right)^{1/(r_1p')} \left(\int\limits_\Omega dx\,||\nabla u|^{p-2} - |\nabla u_n|^{p-2}|^{p'r_2}\right)^{1/(r_2p')},$$

где $r_1^{-1} + r_2^{-1} = 1$, $r_1p' = p$, $r_1 = p-1$, $r_2 = (p-1)/(p-2)$, $p' = p/(p-1)$. Стало быть, справедливо неравенство

$$\mathbb{J}_n(h) \leqslant \left(\int\limits_\Omega dx\,|\nabla h|^p\right)^{1/p} \left(\int\limits_\Omega dx\,\left||\nabla u_n|^{p-2} - |\nabla u|^{p-2}\right|^{p/(p-2)}\right)^{(p-2)/p}.$$

Рассмотрим оператор

$$\mathrm{f} = |\nabla u|^{p-2} = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^{(p-2)/2}, \quad u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Этот оператор порожден каратеодориевой функцией, причем этот оператор Немыцкого как несложно убедиться действует из $\mathbb{L}^p(\Omega) \times \mathbb{L}^p(\Omega) \times \mathbb{L}^p(\Omega)$ в $\mathbb{L}^{p/(p-2)}(\Omega)$, $p > 2$, $p/(p-2) > 1$. Значит, по теореме Немыцкого оператор

$$\mathrm{f} : \mathbb{L}^{\mathrm{p}}(\Omega) \times \mathbb{L}^{\mathrm{p}}(\Omega) \times \mathbb{L}^{\mathrm{p}}(\Omega) \to \mathbb{L}^{\mathrm{p}/(\mathrm{p}-2)}(\Omega)$$

является ограниченным и сильно непрерывным, т. е.

$$\int\limits_\Omega dx\,\left||\nabla u_n|^{p-2} - |\nabla u|^{p-2}\right|^{p/(p-2)} \to +0,$$

как только $\nabla u_n \to \nabla u$ сильно в $\mathbb{L}^p(\Omega)$. Из (2.13) вытекает, что $\mathbb{J}_n(h) \to +0$ равномерно по h на сфере $\| h \|_{+2} = 1$.

Рассмотрим теперь оператор

$$\mathbb{A}_{12}(h) \equiv -(p-2)\,\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-4}(\nabla u, \nabla h)\nabla u).$$

Введем функции

$$f_{ij}(\overrightarrow{\xi}) = |\overrightarrow{\xi}|^{p-2}\frac{\xi_i}{|\overrightarrow{\xi}|}\frac{\xi_j}{|\overrightarrow{\xi}|}, \quad \overrightarrow{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3, \quad i, j = \overline{1,3},$$

где $\xi_m = u_{x_m}$, $m \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Нетрудно проверить, что операторы Немыцкого, определенные функциями f_{ij}, действуют из $\mathbb{L}^p(\Omega) \times \mathbb{L}^p(\Omega) \times \mathbb{L}^p(\Omega)$ в $\mathbb{L}^{p/(p-2)}(\Omega)$. Тогда справедливы неравенства

$$\| \mathbb{A}_{12}(u) - \mathbb{A}_{12}(u_n) \|_{\mathbb{W}_0^{1,p} \to \mathbb{W}^{-1,p'}} = (p-2)\times$$

$$\times \sup_{\|h\|_{\mathbb{W}_0^{1,p}}=1} \Big\| \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-4}(\nabla u,\nabla h)\nabla u - |\nabla u_n|^{p-4}(\nabla u_n,\nabla h)\nabla u_n)\Big\|_{-1,p'} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C} \sup_{\|h\|_{\mathbb{W}_0^{1,p}}=1} \Big\| \sum_{i=1}^{3} \Big[|\nabla u|^{p-4}(\nabla u,\nabla h)u_{x_i} - |\nabla u_n|^{p-4}(\nabla u_n,\nabla h)u_{nx_i}\Big]\Big\|_{p'} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C} \sup_{\|h\|_{\mathbb{W}_0^{1,p}}=1} \sum_{i=1}^{3} \Big\||\nabla u|^{p-4}(\nabla u,\nabla h)u_{x_i} - |\nabla u_n|^{p-4}(\nabla u_n,\nabla h)u_{nx_i}\Big\|_{p'} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C} \sup_{\|h\|_{\mathbb{W}_0^{1,p}}=1} \sum_{i=1}^{3} \| \sum_{j=1}^{3} \Big(|\nabla u|^{p-2}\frac{u_{x_j}}{|\nabla u|}\frac{u_{x_i}}{|\nabla u|} -$$

$$- |\nabla u_n|^{p-2}\frac{u_{nx_j}}{|\nabla u_n|}\frac{u_{nx_i}}{|\nabla u_n|}\Big)h_{x_j}\|_{p'} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C}\sum_{i,j=1}^{3} \sup_{\|h\|_{\mathbb{W}_0^{1,p}}=1} \Big(\int\limits_{\Omega} dx \Big||\nabla u|^{p-2}\frac{u_{x_i}}{|\nabla u|}\frac{u_{x_j}}{|\nabla u|} -$$

$$- |\nabla u_n|^{p-2}\frac{u_{nx_i}}{|\nabla u_n|}\frac{u_{nx_j}}{|\nabla u_n|}\Big|^{p'}|h_{x_j}|^{p'}\Big)^{1/p'} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C}\sum_{i,j=1}^{3} \Big(\int\limits_{\Omega} dx \Big||\nabla u|^{p-2}\frac{u_{x_i}}{|\nabla u|}\frac{u_{x_j}}{|\nabla u|} -$$

$$- |\nabla u_n|^{p-2}\frac{u_{nx_i}}{|\nabla u_n|}\frac{u_{nx_j}}{|\nabla u_n|}\Big|^{p/(p-2)}\Big)^{(p-2)/(p-1)} \equiv S_n,$$

из которых вытекает, что $S_n \to +0$, как только $\nabla u_n \to \nabla u$ сильно в $\mathbb{L}^p(\Omega)$.

Стало быть,

$$\| \mathbb{A}'_{1,u}(u) - \mathbb{A}'_{1,u_n}(u_n) \|_{\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)\to\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)} \to +0,$$

как только $u_n \to u$ сильно в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$.

Тем самым по теореме 25 мы приходим к выводу, что производная Фреше оператора $\triangle_p u : \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$ определена на $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ и имеет следующий явный вид:

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla h) + (p-2)\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-4}(\nabla u,\nabla h)\nabla u) : \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \to$$
$$\to \mathcal{L}(\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega);\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)).$$

Еще проще можно доказать, что производная Фреше нелинейного оператора $|u|^q u : \mathbb{L}^{q+2}(\Omega) \to \mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\Omega)$, $q > 0$, определена на $\mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$ и имеет следующий явный вид:

$$(q+1)|u|^q h : \mathbb{L}^{q+2}(\Omega) \to \mathcal{L}(\mathbb{L}^{q+2}(\Omega);\mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\Omega)).$$

§ 14. О градиенте функционала

Пусть $\mathbb{X}$ — рефлексивное банахово пространство с сопряженным $\mathbb{X}^*$. Через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначим скобку двойственности между $\mathbb{X}$ и $\mathbb{X}^*$. Предположим, что f — дифференцируемый по Гато функционал над $\mathbb{X}$ с производной Гато

$$\mathrm{Df}(v,h):\mathbb{X}\times\mathbb{X}\to\mathbb{C}^1$$

для всех $h, v\in\mathbb{X}$. Стало быть, найдется такое $\mathrm{F}\in\mathbb{X}^*$, что

$$\mathrm{Df}(v,h)=\langle \mathrm{F},\mathrm{h}\rangle,\ \ \mathrm{F}=\mathrm{F(v)}:\mathbb{X}\to\mathbb{X}^*.$$

Определение 27. *Оператор* $\mathrm{F}=\mathrm{F}(v)$ *определенный формулой*

$$\lim_{t\to+0} t^{-1}\left[f(v+th)-f(v)\right]=\langle \mathrm{F}(v),h\rangle,$$

назовем градиентом функционала $f(v)$:

$$\mathrm{F}(v)=\mathbf{grad}\, f(v).$$

Рассмотрим функционал типа нормы

$$f(v)=\left(\int\limits_{\Omega}|\nabla v|^p\,dx+\int\limits_{\Omega}|v|^p\,dx\right)^{1/p},$$

где $p\geqslant 2$, $v\in\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, Ω — ограниченная область с достаточно гладкой границей. Докажем, что для градиента данного функционала справедливо явное представление

$$\mathbf{grad}\, f(v)=\left(\|\ v\ \|_p^p+\|\ \nabla v\ \|_p^p\right)^{1/p-1}\left(-\triangle_p v+|v|^{p-2}v\right),$$

где

$$\|\ u\ \|_p=\left(\int\limits_{\Omega}|u|^p\,dx\right)^{1/p},\ p\geqslant 2.$$

Введем обозначения: $\overrightarrow{\xi}=\nabla v$, $\overrightarrow{\eta}=\nabla h$. Теперь мы рассмотрим функцию $|\overrightarrow{\xi}+t\overrightarrow{\eta}|^p$, для которой в силу формулы Лагранжа получим следующее выражение:

$$\left|\overrightarrow{\xi}+t\overrightarrow{\eta}\right|^p=|\overrightarrow{\xi}|^p+p\left|\overrightarrow{\xi}+\tau\overrightarrow{\eta}\right|^{p-2}\left\{\left(\overrightarrow{\xi},\overrightarrow{\eta}\right)+\tau\,|\overrightarrow{\eta}|^2\right\}t, \qquad (14.1)$$

$$\tau=\tau(\overrightarrow{\xi},\overrightarrow{\eta})\in(0,t). \qquad (14.2)$$

Выражение (14.1) перепишем в следующем эквивалентном виде:

$$\left|\overrightarrow{\xi}+t\overrightarrow{\eta}\right|^p=|\overrightarrow{\xi}|^p+p\,|\overrightarrow{\xi}|^{p-2}\left(\overrightarrow{\xi},\overrightarrow{\eta}\right)t+\vartheta_1(\overrightarrow{\xi},\overrightarrow{\eta},\tau,t), \qquad (14.3)$$

$$\vartheta_1 = p\left[\left|\overrightarrow{\xi}+\tau\overrightarrow{\eta}\right|^{p-2}-\left|\overrightarrow{\xi}\right|^{p-2}\right]\times$$
$$\times\left[\left(\overrightarrow{\xi}\,,\overrightarrow{\eta}\right)+\tau\,|\overrightarrow{\eta}|^2\right]t+p\,\tau\,t\,|\overrightarrow{\eta}|^2\left|\overrightarrow{\xi}\right|^{p-2}. \quad (14.4)$$

Аналогичным образом можно получить следующее выражение:

$$|v+th|^p=|v|^p+p\,|v|^{p-2}\,vht+\vartheta_2(v,h,\overline{\tau},t),\ \overline{\tau}=\overline{\tau}(v,h)\in(0,t), \quad (14.5)$$
$$\vartheta_2=p\left[|v+\overline{\tau}h|^{p-2}-|v|^{p-2}\right]\left[vh+\overline{\tau}h^2\right]t+p\,\overline{\tau}\,t\,|h|^2\,|v|^{p-2}. \quad (14.6)$$

В силу (14.1)–(14.6) справедлива следующая цепочка равенств:

$$\left(\int\limits_\Omega|\nabla v+t\nabla h|^p\,dx+\int\limits_\Omega|v+th|^p\,dx\right)^{1/p}=\left(\int\limits_\Omega|\nabla v|^p\,dx+\int\limits_\Omega|v|^p\,dx+\right.$$
$$\left.+tp\int\limits_\Omega\left(|\nabla v|^{p-2}\nabla v,\nabla h\right)dx+tp\int\limits_\Omega|v|^{p-2}vh\,dx+\int\limits_\Omega[\vartheta_1+\vartheta_2]\,dx\right)^{1/p}=$$
$$=\mathrm{J},$$

$$\mathrm{J}=\|\,v\,\|\left(1+tp\,\|\,v\,\|^{-p}\int\limits_\Omega\left(|\nabla v|^{p-2}\nabla v,\nabla h\right)dx+tp\,\|\,v\,\|^{-p}\times\right.$$
$$\left.\times\int\limits_\Omega|v|^{p-2}vh\,dx+\vartheta_3(t)\right)^{1/p},$$
$$\|\,v\,\|=\left(\int\limits_\Omega|\nabla v|^p\,dx+\int\limits_\Omega|v|^p\,dx\right)^{1/p},$$

где $\vartheta_3(t)=\overline{\overline{o}}(t)$. Для J справедливо следующее асимптотическое поведение при $t\to+0$:

$$\mathrm{J}=\|\,v\,\|+\|\,v\,\|^{1-p}\left[\int\limits_\Omega\left(|\nabla v|^{p-2}\nabla v,\nabla h\right)dx+\int\limits_\Omega|v|^{p-2}vh\,dx\right]t+\overline{\overline{o}}(t),$$
$$t^{-1}\,(\mathrm{J}-\|\,v\,\|)=\|\,v\,\|^{1-p}\left[\int\limits_\Omega\left(|\nabla v|^{p-2}\nabla v,\nabla h\right)dx+\int\limits_\Omega|v|^{p-2}vh\,dx\right]+\overline{\overline{o}}(1).$$

Стало быть, справедливо равенство

$$\lim_{t\to+0}t^{-1}\,(\mathrm{J}-\|\,v\,\|)=$$

$$=\| v \|^{1-p} \left[\int\limits_{\Omega} \Big(|\nabla v|^{p-2} \nabla v, \nabla h \Big) \, dx + \int\limits_{\Omega} |v|^{p-2} v h \, dx \right] =$$

$$=\| v \|^{1-p} \Big[-\langle \triangle_p v, h \rangle + \langle |v|^{p-2} v, h \rangle \Big],$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$, $p' = p\,(p-1)^{-1}$. Значит,

$$\mathbf{grad}\, f(v) = \big(\| v \|_p^p + \| \nabla v \|_p^p \big)^{1/p-1} \times$$

$$\times \Big(-\triangle_p v + |v|^{p-2} v \Big) : \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega).$$

Приложение В

(к главе 8)

§ 1. Сходимость метода ε-вложений со схемой CROS

Рассмотрим автономную дифференциально-алгебраическую задачу

$$\frac{dy}{dt} = f(y,z), \quad 0 = g(y,z), \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0. \tag{1.1}$$

Пусть функции в правых частях уравнений $f(y,z), g(y,z)$ дважды непрерывно дифференцируемы по обеим переменным, а начальные значения y_0, z_0 согласованны, т. е. $g(y_0, z_0) = 0$.

Введем следующие обозначения для численного решения системы (1.1):

$$v \approx y, \quad w \approx z. \tag{1.2}$$

Формулы переходя на новый временной слой для численного решения задачи (1.1) методом ε-вложений со схемой CROS запишем в следующем виде, удобном для доказательства теоретических результатов:

$$v_1 = v_0 + \mathrm{Re}k, \quad w_1 = w_0 + \mathrm{Re}l, \tag{1.3}$$

здесь v_0, w_0 — численное решение на текущем временном слое t, а v_1, w_1 — решение на новом временном слое $t+\tau$. Приращения k, l в (1.3) определяются из линейной алгебраической системы

$$\begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} = \tau \begin{pmatrix} f(v_0, w_0) \\ g(v_0, w_0) \end{pmatrix} + \alpha\tau \begin{pmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Для CROS $\alpha = (1+i)/2$.

Пусть $y(t), z(t)$ — точное решение задачи (1.1). Зафиксируем t и применим метод, сделав один шаг на величину τ. Локальные погрешности схемы (1.3), (1.4) обозначим

$$\delta v_\tau(x) = v_1 - y(t+\tau), \delta w_\tau(x) = w_1 - z(t+\tau), \tag{1.5}$$

здесь v_1, w_1 есть численное решение, полученное по (1.3) с начальными данными $v_0 = y(t), w_0 = z(t)$.

Теорема 1. Для метода ε-вложения со схемой CROS

$$\delta v_\tau(t) = O\left(\tau^3\right), \quad \delta w_\tau(t) = O\left(\tau^2\right).$$

Доказательство. Разложим точное решение задачи (1.1) $y(t+\tau), z(t+\tau)$ и численное решение v_1, w_1, даваемое схемой (1.3), (1.4), в ряды Тейлора по степеням τ, удерживая необходимое для доказательства утверждения теоремы число слагаемых. Для этого необходимо вычислить производные y', y'', z' и v', v'', w' по переменной τ

в точке $\tau = 0$ и убедиться, что у точного и численного решений эти производные совпадают. Для точного решения имеем

$$y' = f(y,z), z' = -(g_z)^{-1} g_y f,$$
$$y'' = f_y y' + f_z z' = f_y f - f_z (g_z)^{-1} g_y f. \tag{1.6}$$

Для численного решения согласно (1.3) получаем

$$v' = \mathrm{Re}k', \quad v'' = \mathrm{Re}k'', \quad w' = \mathrm{Re}l'. \tag{1.7}$$

Запишем формулу (1.3) покомпонентно:

$$k = \tau f + \alpha\tau f_y k + \alpha\tau f_z l, \quad 0 = g + \alpha g_y k + \alpha g_z l. \tag{1.8}$$

Из первого уравнения (1.8) получаем

$$k'|_{\tau=0} = f,$$

здесь учтено, что при $k, l|_{\tau=0} = 0$.

Из второго уравнения ((1.8) имеем

$$l' = -(g_z)^{-1} g_y k' = -(g_z)^{-1} g_y f.$$

Дифференцируя первое уравнение ((1.8) дважды, получим

$$k''|_{\tau=0} = 2\alpha f_y k' + 2\alpha f_z l' = 2\alpha f_y f - 2\alpha f_z (g_z)^{-1} g_y f.$$

Учитывая, что для CROS $\mathrm{Re}2\alpha = 1$, приходим к выводу, что (1) и ((1.7) при $\tau = 0$ совпадают. Тем самым в разложении ((1.5) взаимно уничтожаются все слагаемые вплоть до

$$\delta v_\tau(t) = O\left(\tau^3\right), \quad \delta w_\tau(t) = O\left(\tau^2\right).$$

Пусть расчет задачи (1.1) ведется на сетке с числом узлов N, временной промежуток, на котором ищется решение $N\tau = const$. Оценку глобальной погрешности, накопленной на протяжении всего расчета, дает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть матрица g_z регулярна в некоторой окрестности точного решения $(y(t), z(t))$ задачи (1.1), функции $f(y,z), g(y,z)$ дважды непрерывно дифференцируемы по обеим переменным и начальные значения y_0, z_0 согласованны*, т. е. *есть $g(y_0, z_0) = 0$, тогда метод ε-вложения со схемой CROS сходится со вторым порядком:*

$$y(t + N\tau) - v_N = O\left(\tau^2\right),$$
$$z(t + N\tau) - w_N = O\left(\tau^2\right),$$

здесь $y(t + N\tau), z(t + N\tau), v_N, w_N$ — соответственно точное и численное решение на момент времени $t_N = N\tau$.

Доказательство. Будем действовать по схеме, предложенной в [Хайрер, Ваннер] для доказательства сходимости метода ε-вложения

со схемами типа Розенброка–Ваннера с действительными коэффициентами.

Так как матрица g_z регулярна в некоторой окрестности решения, то

$$\left\|g_z^{-1}(y,z)\,g(y,z)\right\| \leqslant \delta. \tag{1.9}$$

Величина δ не зависит от τ и может быть сделана сколь угодно малой стягиванием окрестности.

Используя выражение (1.3), найдем $\frac{\partial v_1}{\partial v_0}, \frac{\partial v_1}{\partial w_0}, \frac{\partial w_1}{\partial v_0}, \frac{\partial w_1}{\partial w_0}$. Для этого вычислим $\frac{\partial k}{\partial v_0}, \frac{\partial k}{\partial w_0}, \frac{\partial l}{\partial v_0}, \frac{\partial l}{\partial w_0}$. Оценим k, l, используя (1.8):

$$k = O(\tau), \quad l = -\frac{1}{\alpha} g_z^{-1} g + O(\tau) = O(\tau+\delta).$$

Дифференцируя (1.8), получим

$$\frac{\partial k}{\partial v_0} = O(\tau), \quad \frac{\partial l}{\partial v} = -\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial v_0}\left(g_z^{-1} g\right) + O(\tau), \quad \frac{\partial k}{\partial w_0} = O(\tau),$$
$$\frac{\partial l}{\partial w_0} = -\frac{1}{\alpha} + g_z^{-1} g_{zz} g_z^{-1} g + O(\tau) = -\frac{1}{\alpha} + O(\tau+\delta). \tag{1.10}$$

Дифференцируя (1.3) и используя (1.10), получим

$$\frac{\partial v_1}{\partial v_0} = 1 + O(\tau), \quad \frac{\partial w_1}{\partial v_0} = O(1), \quad \frac{\partial v_1}{\partial w_0} = O(\tau),$$
$$\frac{\partial w_1}{\partial w_0} = \underbrace{1 - \mathrm{Re}\frac{1}{\alpha}}_{=0} + O(\tau+\delta) = O(\tau+\delta),$$

здесь учтено, что $\alpha = (1+i)/2$.

Рассмотрим две пары начальных данных: (v_0, w_0) и $(\widetilde{v}_0, \widetilde{w}_0)$, эти начальные данные не обязательно согласованны, но они лежат в описанной выше окрестности (1.9). Используя оценки на производные (1.10) и формулу конечных приращений Лагранжа, получим

$$\begin{aligned} \|v_1 - \widetilde{v}_1\| &\leqslant (1+\tau L)\,\|v_0 - \widetilde{v}_0\| + \tau P\,\|w_0 - \widetilde{w}_0\|, \\ \|w_1 - \widetilde{w}_1\| &\leqslant Q\,\|v_0 - \widetilde{v}_0\| + q\,\|w_0 - \widetilde{w}_0\|, \quad q < 1. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Константы Q, P, L, q не зависят от начальных данных и положительны, причем, стягивая окрестность (1.9), мы можем добиться $q < 1$. Необходимо оценить, как будет накапливаться ошибка за N шагов.

Лемма 1. *Пусть* $\{v_n\}, \{w_n\}, n = 0, 1, 2, \ldots$, *последовательности неотрицательных чисел, удовлетворяющих неравенствам*

$$v_{n+1} \leqslant m_{11} v_n + m_{12} w_n, \quad w_{n+1} \leqslant m_{21} v_n + m_{22} w_n.$$

Причем все элементы матрицы $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ *положительны. Тогда* v_n, w_n *можно оценить через* v_0, w_0 :

$$v_n \leqslant \widehat{m}_{11} v_0 + \widehat{m}_{12} w_0, \quad w_n \leqslant \widehat{m}_{21} v_0 + \widehat{m}_{22} w_0,$$

где элементы $\widehat{m}_{ij}$ *— это элементы матрицы* M^n.

Доказательство легко провести по индукции.

Лемма 2. *Если мы для начальных данных* (v_0, w_0) *и* $(\widetilde{v}_0, \widetilde{w}_0)$ *сделаем* N *шагов* $(N\tau \leqslant \text{const})$ *и предположим, что на каждом шаге* (v_n, w_n) *и* $(\widetilde{v}_n, \widetilde{w}_n)$, $1 \leqslant n \leqslant N$ *остаются в описанной выше окрестности* (1.9), *то*

$$\|v_N - \widetilde{v}_N\| \leqslant C\left(\|v_0 - \widetilde{v}_0\| + \tau\,\|w_0 - \widetilde{w}_0\|\right),$$
$$\|w_N - \widetilde{w}_N\| \leqslant C\left(\|v_0 - \widetilde{v}_0\| + \left(\tau + q^N\right)\|w_0 - \widetilde{w}_0\|\right),\ q < 1.$$

Воспользуемся формулой (1.11) и применим лемму 1 с матрицей $M = \begin{pmatrix} 1+\tau L & \tau P \\ Q & q \end{pmatrix}$:

$$\|v_n - \widetilde{v}_n\| \leqslant \widehat{m}_{11}\,\|v_0 - \widetilde{v}_0\| + \widehat{m}_{12}\,\|w_0 - \widetilde{w}_0\|$$
$$\|w_n - \widetilde{w}_n\| \leqslant \widehat{m}_{21}\,\|v_0 - \widetilde{v}_0\| + \widehat{m}_{22}\,\|w_0 - \widetilde{w}_0\|, \quad (1.12)$$

где элементы $\widehat{m}_{ij}$ — это элементы матрицы $M^n = \begin{pmatrix} 1+\tau L & \tau P \\ Q & q \end{pmatrix}^n$.

Собственные значения λ матрицы M определяются из характеристического уравнения

$$(1 + \tau L - \lambda)(q - \lambda) - \tau PQ = 0,$$

откуда

$$\lambda_1 = 1 + \tau L - \frac{\tau PQ}{q - \tau L - 1} + O\left(\tau^2\right), \quad \lambda_2 = q + \frac{\tau PQ}{q - \tau L - 1} + O\left(\tau^2\right).$$

Для дальнейшего изложения важны следующие оценки. Найдутся такие константы $A > 0$ и $B > 0$, что

$$\lambda_1^n \leqslant A, \quad \lambda_2^n \leqslant Bq^n. \quad (1.13)$$

В самом деле, если $N\tau \leqslant \text{const}$, так как $\lambda_1 = 1 + O(\tau)$, то $\lambda_1 \leqslant 1 + Ch$. Используя известную оценку (см., например, [Ильин, Позняк]) получим

$$\lambda_1^n \leqslant \left(1 + C\frac{\text{const}}{N}\right)^n \leqslant \left(1 + C\frac{\text{const}}{n}\right)^n \leqslant \exp\left(C \cdot \text{const}\right) = A.$$

Аналогично доказывается вторая оценка.

Матрицу M^n можно представить следующим образом:

$$T^{-1}M^nT = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix},$$

где столбцы матрицы T — это координаты собственных векторов матрицы M:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\tau P}{1-q} + o(\tau) \\ \frac{Q}{1-q} + O(\tau) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & O(\tau) \\ O(1) & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1+O(\tau) & O(\tau) \\ O(1) & 1+O(\tau) \end{pmatrix}$. Тогда для матрицы M^n получим

$$M^n = T \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & O(\tau) \\ O(1) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 1+O(\tau) & O(\tau) \\ O(1) & 1+O(\tau) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & O(\tau) \\ O(1) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n (1+O(\tau)) & \lambda_1^n O(\tau) \\ \lambda_2^n O(1) & \lambda_2^n (1+O(\tau)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1+O(\tau))\lambda_1^n + \lambda_2^n O(\tau) & \lambda_1^n (1+O(\tau)) O(\tau) + \lambda_2^n O(\tau)(1+O(\tau)) \\ \lambda_1^n O(1)(1+O(\tau)) + \lambda_2^n O(1) & \lambda_1^n O(1) O(\tau) + \lambda_2^n (1+O(\tau)) \end{pmatrix}.$$

Откуда, используя оценки (1.13), получаем, что найдутся такие положительные константы C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, что

$$\begin{aligned} \widehat{m}_{11} &= (1+O(\tau))\lambda_1^n + \lambda_2^n O(\tau) \leqslant C_1 \leqslant C, \\ \widehat{m}_{12} &= \lambda_1^n (1+O(\tau)) O(\tau) + \lambda_2^n O(\tau)(1+O(\tau)) \leqslant C_2\tau \leqslant C\tau, \\ \widehat{m}_{21} &= \lambda_1^n O(1)(1+O(\tau)) + \lambda_2^n O(1) \leqslant C_4 + C_3 q^n \leqslant C, \\ \widehat{m}_{22} &= \lambda_1^n O(1) O(\tau) + \lambda_2^n (1+O(\tau)) \leqslant C_5\tau + q^n \leqslant C\tau + q^n. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Утверждение леммы получается, если в (1) положить $C = \max\{C_1, C_2, C_4 + C_3 q^n, C_5\}$ и использовать оценку (1.12).

Доказательство теоремы 2.

Для того чтобы доказать утверждение теоремы, необходимо оценить, как накапливается ошибка за N шагов ($\tau N \leqslant \text{const}$).

Для этого используем следующий прием. Будем гипотетически применять численный метод с начальными данными $v_0 = y(t+n\tau), w_0 = z(t+n\tau)$, взятыми на точном решении. По прошествии $N-n$ шагов, численное решение, полученное таким образом, обозначим v_{N-n}, w_{N-n}. Тогда норму разности между численным решением v_N, w_N с начальными данными $v_0 = y(t), w_0 = z(t)$ и точным решением $y(t+N\tau), z(t+N\tau)$ через N шагов можно оценить как

$$\begin{aligned} &\|v_N - y(t+N\tau)\| = \\ &\quad = \|v_N - v_{N-1} + v_{N-1} - v_{N-2} + ...v_1 - y(t+N\tau)\| \leqslant \\ &\leqslant \|v_N - v_{N-1}\| + \|v_{N-1} - v_{N-2}\| + ... + \|v_1 - y(t+N\tau)\|, \end{aligned} \tag{1.15}$$

$$\|w_N - z(t+N\tau)\| = \\ = \|w_N - w_{N-1} + w_{N-1} - w_{N-2} + ...w_1 - z(t+N\tau)\| \leqslant \\ \leqslant \|w_N - w_{N-1}\| + \|w_{N-1} - w_{N-2}\| + ... + \|w_1 - z(t+N\tau)\|. \tag{1.16}$$

Рассмотрим отдельно $\left\|v_{N-n} - v_{N-(n-1)}\right\|$ и $\left\|w_{N-n} - w_{N-(n-1)}\right\|$. Для получения v_{N-n}, w_{N-n} нужно сделать $N-n$ шагов, для получения v_{N-n+1}, w_{N-n+1} на один больше. Сделаем один шаг нашего численного метода (1.3) с начальными данными $v_0 = y(t+(n-1)\tau), w_0 = z(t+(n-1)\tau)$ и далее сделаем синхронно $N-n$ шагов по схеме (1.3). На первом шаге возникает ошибка, которая, по сути, являет-

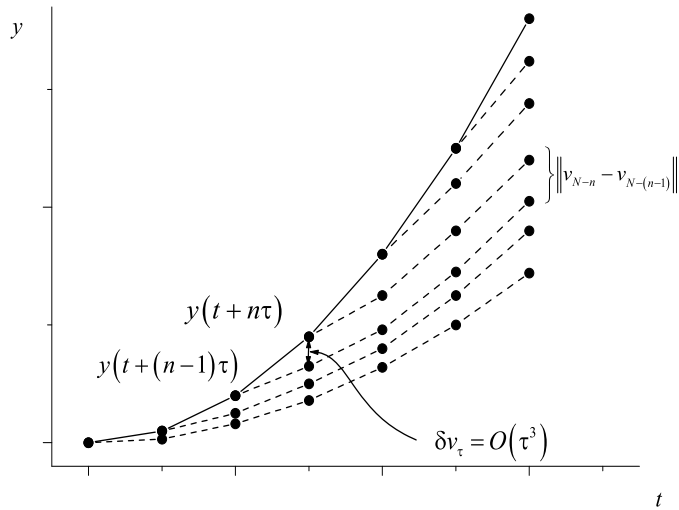

Рис. 21. Накопление глобальной ошибки

ся локальной ошибкой метода и согласно теореме 1 равна $\delta v_\tau(x) = O(\tau^3)$, $\delta w_\tau(x) = O(\tau^2)$. Дальнейшее накопление ошибки за $N-n$ шагов описывается леммой 2, где $\|v_0 - \widetilde{v}_0\| = O(\tau^3)$, $\|w_0 - \widetilde{w}_0\| = O(\tau^2)$, а число шагов равно $N-n$. Таким образом,

$$\left\|v_{N-n} - v_{N-(n-1)}\right\| \leqslant C\left(O\left(\tau^3\right) + \tau O\left(\tau^2\right)\right), \tag{1.17}$$
$$\left\|w_{N-n} - w_{N-(n-1)}\right\| \leqslant C\left(O\left(\tau^3\right) + \left(\tau + q^{N-n}\right) O\left(\tau^2\right)\right),\ q < 1.$$

Подставляя (1.17) в (1.15), (1.16) и учитывая, что $N\tau \leqslant const$ и $\sum\limits_{n=1}^{N} q^{N-n} < \frac{1}{1-q}$, получим оценку для глобальной погрешности

$$\|v_N - y\,(t + N\tau)\| \leqslant \mathrm{const} \cdot \tau^2, \quad \|w_N - z\,(t + N\tau)\| \leqslant \mathrm{const} \cdot \tau^2. \quad (1.18)$$

Для завершения доказательства необходимо обосновать предположение о том, что численное решение лежит в описанной выше окрестности (1.9) точного решения. Это легко сделать индукцией по числу шагов.

Оценка (1.18) доказывает сходимость метода ε-вложения для схемы CROS со вторым порядком точности.

Список литературы

Александрян Р. А. Спектральные свойства операторов, порожденных системой дифференциальных уравнений типа С. Л. Соболева // Тр. Моск. мат. об-ва, 1980. № 9. — С. 455–505.

Альшин А. Б. Начально-краевые задачи для уравнения составного типа с движущимися границами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2002. — Т. 42, № 2. — С. 171–184.

Альшин А. Б., Альшина Е. А., Болтнев А. А., Качер О. А., Корякин П. В. Численное решение начально-краевых задач для уравнений соболевского типа методом квазиравномерных сеток // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2004. — Т. 44, № 3. — С. 490–511.

Альшин А. Б., *Плетнер Ю. Д.*, *Свешников А. Г.* Однозначная разрешимость задачи Дирихле для уравнения ионно-звуковых волн в плазме // ДАН, 1998. — Т. 361, № 6. — С. 749–751.

Альшин А. Б., *Плетнер Ю. Д.*, *Свешников А. Г.* Разрешимость одной внешней начально-краевой задачи для уравнения ионно-звуковых волн // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1996. — Т. 36, № 10. — С. 180–189.

Альшин А. Б., *Альшина Е. А.*, *Калиткин Н. Н.*, *Корягина А. Б.* Численное решение сверхжестких дифференциально-алгебраических систем // ДАН, 2006., в печати.

Альшина Е. А., *Калиткин Н. Н.*, *Корякин П. В.* Диагностика особенностей точного решения методом сгущения сеток // ДАН, 2005. — Т. 404, № 3. — С. 1–5.

Альшина Е. А., *Калиткин Н. Н.*, *Корякин П. В.* Диагностика особенностей точного решения при расчетах с контролем точности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2005. — Т. 45, № 10. — С. 1837–1847.

Астратов В. Н., *Ильинский А. В.*, *Киселев В. А.* Стратификация объемного заряда при экранировании поля в кристаллах // ФТТ, 1984. — Т. 26, № 9. — С. 2843–2851.

Баренблатт Г. И., *Желтов Ю. П.*, *Кочина И. Н.* Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах // ПММ, 1960. — Т. 24, № 5. — С. 58–73.

Басс Ф. Г., *Бочков В. С.*, *Гуревич Ю. С.* Электроны и фононы в ограниченных полупроводниках. — М.: Наука, 1984. — 288 с.

Байокки К., *Капело А.* Вариационные и квазивариационые неравенства. — М.: Наука, 1988. — 448 с.

Бонч-Бруевич В. Л., *Калашников С. Г.* Физика полупроводников. — М.: Наука, 1990. — 672 с.

Бонч-Бруевич В. Л., *Звягин И. П.*, *Миронов А. Г.* Доменная электрическая неустойчивость в полупроводниках. — М.: Наука, 1972.

Боровиков В. А. Асимптотика при $t \to +\infty$ функции Грина уравнения внутренних волн // ДАН СССР, 1990. — Т. 313, № 2. — С. 313–316.

Ваксер А. И. Термотоковая неустойчивость в полупроводниках // ФТП, 1981. — Т. 15, № 11. — С. 2203–2208.

Ватсон Г. Н. Теория Бесселевых функций. — Москва: Изд. ИЛ, 1949. — 799 с.

Вайнберг М. М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. — М.: Гос. изд. техн.-теор. лит., 1956. — 344 с.

Виноградова М. Б., *Руденко О. В.*, *Сухоруков А. П.* Теория волн. — М.: Наука, 1990.

Вишик М. И. Задача Коши для уравнения с операторными коэффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и приближенный метод их решения // Матем. сб., 1956. — Т. 39, № 1. — С. 51–148.

Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1988. — 512 с.

Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1982. — 304 с.

Врагов В. Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. — Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1983.

Габов С. А., *Свешников А. Г.* Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. — М.: Наука, 1990. — 344 с.

Габов С. А. Новые задачи математической теории волн. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 1998. — 448 с.

Габов С. А. Введение в теорию нелинейных волн. — Изд-во Московского университета, 1988. — 177 с.

Габов С. А. Об уравнении уизема //ДАН СССР, 1978. — Т. 242, № 5. — С. 993–996.

Габов С. А. О свойстве разрушения уединенных волн, описываемых уравнением Уизема // ДАН СССР, 1979. — Т. 246, № 6. — С. 1292–1295.

Габов С. А., *Вабищевич П. Н.* Угловой потенциал для дивергентного эллиптического оператора // ДАН СССР, 1978. — Т. 242, № 4. — С. 835–838.

Габов С. А., *Малышева Г. Ю.*, *Свешников А. Г.* Об одном уравнении составного типа, связанном с колебаниями сжимаемой стратифицированной жидкости // Диф. уравн., 1983. — Т. 19, № 7. — С. 1171–1180.

Габов С. А., *Тикиляйнен А. А.* Об одном дифференциальном уравнении третьего порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1987. — Т. 27, № 7. — С. 1100–1105.

Галактионов В. А. Об одной краевой задаче для нелинейного параболического уравнения $u_t = \triangle u^{1+\sigma} + u^{\beta}$ // Диф. уравн., 1981. — Т. 17, № 5. — С. 836–842.

Галактионов В. А. Об условиях отсутствия глобальных решений одного класса квазилинейных параболических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1982. — Т. 22, № 2. — С. 322–338.

Галактионов В. А. О неразрешимых в целом задачах Коши для квазилинейных параболических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1983. — Т. 23, № 5. — С. 1072–1087.

Гальперин С. А. Задача Коши для общих систем линейных уравнений с частными производными // Тр. Моск. мат. об-ва., 1990. — № 9. — С. 401–423.

Гальперин С. А. Задача Коши для уравнения С.Л. Соболева // Сиб. мат. журн., 1963. — Т. 4, № 4. — С. 758–773.

Гаевский Х., *Грегер К.*, *Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978. — 336 с.

Гилбарг Д., *Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. — М.: Наука, 1989. — 464 с.

Гинзбург В. Л., *Рухадзе А. А.* Волны в магнитоактивной плазме. — М.: Наука, 1970.

Гладков А. Л. Единственность решения задачи Коши для некоторых квазилинейных псевдопараболических уравнений // Матем. заметки, 1996. — Т. 60, № 3. — С. 356–362.

Градштейн И. С., *Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971. — 1108 с.

Гуревич А. Г., *Мелков Г. А.* Магнитные колебания и волны. — М.: Наука, 1994. — 464 с.

Достовалова А. С., *Симаков С. Т.* Фундаментальное решение модельного уравнения несжимаемой стратифицированной жидкости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1994. — Т. 34, № 10. — С. 1528–1534.

Демидович В. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.

Демиденко Г. В., *Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. — Новосибирск: Научная книга. 1998. — 437 с.

Демиденко Г. В. Задача Коши для псевдопараболических систем // Сиб. мат. журн., 1997. — Т. 38, № 6. — С. 1251–1266.

Демиденко Г. В. Оценки при $t \to +\infty$ решения одной задачи С.Л. Соболева // Сиб. матем. журн., 1984. — Т. 25, № 2. — С. 112–120.

Демиденко Г. В., *Матвеева И. И.* Об одном классе краевых задач для системы Соболева. — Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1989. С. 54–78.

Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Краевые задачи в четверти пространства для систем не типа Коши–Ковалевской // Труды ин-та математики СО РАН, 1994. — Т. 26. — С. 42–76.

Джураев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. — Ташкент: ФАН, 1979.

Дзекцер Е. С. Обобщение уравнений движения грунтовых вод со свободной поверхностью // ДАН СССР, 1972. — Т. 202, № 5. — С. 1031–1033.

Дьяченко М. И., Ульянов П. Л. Мера и интеграл. — М.: Факториал, 1998. — 160 с.

Дубинский Ю. А. О некоторых дифференциально-операторных уравнениях произвольного порядка // Мат. сб., 1973. — Т. 90, № 1. — С. 3–22.

Дубинский Ю. А. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения. — М.: ВИНИТИ, 1990.

Егоров И. Е. Разрешимость одной краевой задачи для уравнения соболевского типа высокого порядка // Дифф. уравн., 1987. — Т. 23, № 9. — С. 1560–1567.

Егоров И. Е., *Пятков С. Г.*, *Попов С. В.* Неклассические дифференциально-операторные уравнения. — Новосибирск: Наука, 2000. — 336 с.

Егоров И. Е., *Федоров В. Е.* Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. — Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995.

Захаров В. Е., *Манаков С. В.*, *Новиков С. П.*, *Питаевский Л. П.* Теория солитонов. Метод обратной задачи. — М.: Наука, 1980. — 320 с.

Зеленяк Т. И. Избранные вопросы качественной теории уравнений с частными производными. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 1970.

Зеленяк Т. И. Об обобщенных собственных функциях оператора, связанного с одной задачей С. Л. Соболева // СМЖ. 1968. — Т. 9, № 5. — С. 1075–1092.

Зеленяк Т. И. О поведении на бесконечности решений одной смешанной задачи // Дифференц. уравн., 1969. — Т. 5, № 9. — С. 1676–1689.

Зеленяк Т. И., *Капитонов Б. В.*, *Сказка В. В.*, *Фокин М. В.* О проблеме С. Л. Соболева в теории малых колебаний вращающейся жидкости // Препринт ВЦ СО АН СССР. Новосибирск. 1983. — № 471. — 20 с.

Зорич В. А. Математический анализ. — М.: Наука, 1981. — 544 с.

Иванов А. В. Квазилинейные параболические уравнения, допускающие двойное вырождение // Алгебра и анализ, 1992. — Т. 4, № 6. — С. 114–130.

Ильин В. А., *Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. Часть I. — М: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 600 с.

Иосида К. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967. — 624 с.

Калантаров В. К., *Ладыженская О. А.* Формирование коллапсов в квазилинейных уравнениях параболического и гиперболического типов // Записки ЛОМИ, 1977. — Т. 69, — С. 77–102.

Калиткин Н. Н. Численные методы решения жестких систем // Матем. модел., 1995. — Т. 7, № 5. — С. 8–11.

Калиткин Н. Н., *Альшин А. Б.*, *Альшина Е. А.*, *Рогов Б. В.* Вычисления на квазиравномерных сетках. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 224 с.

Каменец Ф. Ф., *Лахин В. П.*, *Михайловский А. Б.* Нелинейные электронные градиентные волны // Физ. плазмы, 1987. — Т. 13. Вып. 4. — С. 412–416.

Канторович Л. В., *Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977. — 744 с.

Капитонов Б. В. Теория потенциала для уравнения малых колебаний вращающейся жидкости // Мат. сб., 1979. — Т. 109, № 4. — С. 607–628.

Клеммоу Ф., *Доуэрти Дж.* Электродинамика частиц и плазмы. — М.: Мир, 1996. — 528 с.

Комаров М. В., *Шишмарев И. А.* Периодическая задача для уравнения Ландау–Гинзбурга // Мат. зам., 2002. — Т. 72, вып. 2. — С. 227–235.

Копаческий Н. Д., *Темнов А. Н.* Колебания стратифицированной жидкости в бассейне произвольной формы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1986. — Т. 26, № 5. — С. 734–755.

Корпусов М. О., *Плетнер Ю. Д.*, *Свешников А. Г.* Нестационарные волны в стратифицированной жидкости, возбуждаемые изменением нормальной компоненты скорости на криволинейном отрезке // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1997. — Т. 37, № 9. — С. 1112–1121.

Корпусов М. О., *Плетнер Ю. Д.*, *Свешников А. Г.* О нестационарных волнах в средах с анизотропной дисперсией // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1999. — Т. 39, № 6. — С. 968–984.

Корпусов М. О., *Плетнер Ю. Д.*, *Свешников А. Г.* О квазистационарных процессах в проводящих средах без дисперсии // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2000. — Т. 40, № 8. — С. 1237–1249.

Корпусов М. О., *Свешников А. Г.* Трехмерные нелинейные эволюционные уравнения псевдопараболического типа в задачах математической физики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2003. — Т. 43, № 12. — С. 1835–1869.

Корпусов М. О., *Свешников А. Г.* Трехмерные нелинейные эволюционные уравнения псевдопараболического типа в задачах математической физики. 2. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2004. — Т. 44, № 11. — С. 2041–2048.

Корпусов М. О., *Свешников А. Г.* О разрушении за конечное время решения начально-краевой задачи для полулинейного уравнения

составного типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2000. — Т. 40, № 11. — С. 1647–1654.

Корпусов М. О. Глобальная разрешимость и разрушение за конечное время решений нелинейных уравнений псевдопараболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2002. — Т. 42, № 6. — С. 849–866.

Корпусов М. О. К вопросу о разрушении за конечное время решения задачи Коши для псевдопараболического уравнения $Au_t = F(u)$ // Диффер. уравнения, 2002. — Т. 38, № 12. — С. 1–6.

Корпусов М. О., *Свешников А. Г.* О разрешимости сильно нелинейного уравнения псевдопараболического типа с двойной нелинейностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2003. — Т. 43, № 7. — С. 944–962.

Корпусов М. О. Разрушение решения псевдопараболического уравнения с производной по времени от нелинейного эллиптического оператора // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2002. — Т. 42, № 12. — С. 1717–1724.

Корпусов М. О., Свешников А. Г. Энергетическая оценка при больших временах для решения нелинейного уравнения псевдопараболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2002. — Т. 42, № 8. — С. 1200–1206.

Корпусов М. О. О разрушении решений класса сильно нелинейных уравнений типа Соболева // Изв. РАН. Сер. мат., 2004. — Т. 68, № 4. — С. 151–204.

Корпусов М. О., *Свешников А. Г.* Разрушение решений абстрактных задач Коши для нелинейных дифференциально-операторных уравнений // ДАН, 2005. — Т. 401, № 2. — С. 168–171.

Корпусов М. О., *Свешников А. Г.* О разрушении решений одного класса квазилинейных диссипативных волновых уравнений типа Соболева с источниками // ДАН, 2005. — Т. 404, № 1. — С. 1–3.

Корпусов М. О., *Свешников А. Г.* О разрушении решений нелинейных волновых уравнений типа Соболева с кубическими источниками // Мат. зам., 2005. — Т. 78, № 3. — С. 559–578.

Корпусов М. О. Условия глобальной разрешимости начально-краевой задачи для нелинейного уравнения псевдопараболического типа // Диффер. уравн., 2005. — Т. 41, № 5. — С. 1–8.

Корпусов М. О., *Свешников А. Г.* О разрушении решений полулинейных уравнений псевдопараболического типа с быстро растущими нелинейностями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2005. — Т. 45, № 2. — С. 272–286.

Корпусов М. О. О разрушении решения начально-краевой задачи для неоднородного уравнения псевдопараболического типа // Дифф. уравн., 2005. — Т. 41, № 6. — С. 1–4.

Корпусов М. О., *Свешников А. Г.* О разрушении решения начально-краевой задачи для нелинейного нелокального уравнения псев-

допараболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2004. — Т. 44, № 12. — С. 2104–2111.

Корпусов М. О., *Свешников А. Г.* О существовании решения уравнения Лапласа с нелинейным динамическим граничным условием // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2003. — Т. 43, № 1. — С. 113–128.

Корпусов М. О. Условия глобальной разрешимости задачи Коши для полулинейного уравнения псевдопараболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2003. — Т. 43, № 8. — С. 1159–1172.

Корпусов М. О. Глобальная разрешимость начально-краевой задачи для одной полулинейной системы уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2002. — Т. 42, № 7. — С. 1039–1050.

Корпусов М. О. Пробой полупроводников // Радиотехника и электроника, 2004. — Т. 50, № 2. — С. 252–255.

Корпусов М. О., Свешников А. Г. О разрушении решения уравнения типа Соболева с нелокальным источником // Сиб. матем. ж., 2005. — Т. 46, № 3. — С. 567–578.

Корпусов М. О., *Свешников А. Г.* О разрушении решений класса сильно нелинейных волновых диссипативных уравнений типа Соболева с источниками // Изв. РАН, 2005. — Т. 69, № 4. — С. 89–128.

Костюченко А. Г., *Эскин Г. И.* Задача Коши для уравнений типа Соболева–Гальперна // Тр. Моск. мат. об-ва., 1961. — Т. 10, — С. 273–285.

Кожанов А. И. Параболические уравнения с нелинейным нелокальным источником // Сиб. матем. ж., 1994. — Т. 35, № 5. — С. 1062–1073.

Кожанов А. И. Начально-краевая задача для уравнений типа обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным источником // Матем. заметки, 1999. — Т. 65, № 1. — С. 70–75.

Кожанов А. И. Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка. — Новосибирск: Изд. Новосибир. гос. ун-та, 1990.

Кожанов А. И. О свойствах решений для одного класса псевдопараболических уравнений // ДАН, 1992. — Т. 326, № 5. — С. 781–786.

Козлов В. Ф. Формирование волн Россби в нестационарном баротропном океаническом потоке под действием возмущений // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1980. — Т. 16, № 4. — С. 410–416.

Красножон А. В., *Плетнер Ю. Д.* О поведении решения задачи Коши для уравнения гравитационно-гироскопических волн // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1994. — Т. 34, № 1. — С. 78–87.

Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

Кринчик Г. С. Физика магнитных явлений. — М.: Изд-во МГУ, 1976. — 368 с.

Крутицкий П. А. Первая начально-краевая задача для уравнения гравитационно-гироскопических волн в многосвязной области // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1997. — Т. 37, № 1. — С. 117–128.

Кудашев В. Р., *Михайловский А. Б.*, *Шарапов С. Е.* К нелинейной теории дрейфовой моды, индуцированной тороидальностью // Физ. плазмы, 1987. — Т.13, Вып. 4. — С. 417–421.

Кузнецов А. В. О разрешимости дважды нелинейных эволюционных уравнений с монотонными операторами // Дифф. уравн., 2003. — Т. 39, № 9. — С. 1176–1187.

Ландау Л. Д., *Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1992. — 664 с.

Лаптев Г. Г. Об отсутствии решений одного класса сингулярных полулинейных дифференциальных неравенств // Труды МИАН, 2001. — Т. 232. — С. 223–235.

Лаптев Г. И. Слабые решения квазилинейных параболических уравнений второго порядка с двойной нелинейностью // Матем. сб., 1997. — Т. 188, № 9. — С. 83–112.

Лаптев Г. И. Эволюционные уравнения с монотонным оператором и функциональной нелинейностью при производной по времени // Матем. сб., 2000. — Т. 191, № 9. — С. 43–64.

Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972. — 588 с.

Лионс Ж.-Л., *Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи. — М.: Мир, 1971. — 372 с.

Лифшиц Е. М., *Питаевский Л. П.* Физическая кинетика. — М.: Наука, 1979. — 528 с.

Люстерник Л. А., *Шнирельман Л. Г.* Топологические методы в вариационных задачах. — М.: Труды Института математики и механики при МГУ, 1930. — 68 с.

Ляшко С. И. Обобщенное управление линейными системами. — Киев: Наукова думка, 1998. — 472 с.

Ляшко С. И. Приближенное решение уравнений псевдопараболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1991. — Т. 31, №12. — С. 1906–1911.

Марчук Г. И., *Шайдуров В. В.* Повышение точности решений разностных схем. — М.: Наука, 1979.

Масленникова В. Н. Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Изд. РУДН, 1997.

Масленникова В. Н. Решение в явном виде задачи Коши для одной системы уравнений с частными производными // Изв. АН СССР. Сер. мат., 1958. — Т 22, № 1. — С. 135–160.

Масленникова В. Н. Явные представления и априорные оценки решений граничных задач для системы С.Л. Соболева // Сиб. мат. журн., 1968. — Т. 9. № 5. — С. 1182–1198.

Маслов В. П. О существовании убывающего при $t \to +\infty$ решения уравнения С.Л. Соболева для малых колебаний вращающейся жидкости в цилиндрической области // Сиб. мат. журн., 1968. — Т. 9, № 6. — С. 1351–1359.

Митидиери Э., *Похожаев С. И.* Априорные оценки и отсутствие решений дифференциальных неравенств в частных производных. Труды МИАН, т. 234, 2001.

Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей. Т. 1. Неустойчивости однородной плазмы. — М.: Атомиздат, 1975. — 296 с.

Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей. Т. 2. Неустойчивости неоднородной плазмы. — М.: Атомиздат, 1977.

Морен К. Методы Гильбертова пространства. — М.: Мир, 1965. — 572 с.

Наумкин П. И., *Шишмарев И. А.* Опрокидывание волн для уравнения Уизема с сингулярным ядром // Дифф. уравн., 1985. — Т. 21, № 21. — С. 1775–1790.

Наумкин П. И., *Шишмарев И. А.* Асимптотика при $t \to +\infty$ решений нелинейных уравнений с немалыми начальными возмущениями // Мат. зам., 1996. — Т. 59, № 6. — С. 855–864.

Номировский Д. А. О гомеоморфизмах, осуществляемых некоторыми дифференциальными операторами с частными производными // Украинский матем. журнал, 2004. — № 12. — С. 1243–1252.

Овсянников Л. В., *Макаренко Н. И.*, *Налимов В. Н. и др.* Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. — Новосибирск: Наука, 1985. — 320 с.

Осколков А. П. К теории устойчивости решений полулинейных диссипативных уравнений типа С. Л. Соболева // Зап. ЛОМИ, 1992. — Т. 200. — С. 139–148.

Осколков А. П. Нелокальные проблемы для одного класса нелинейных операторных уравнений, возникающих в теории уравнений типа С. Л. Соболева // Зап. ЛОМИ, 1991. — Т. 198. — С. 31–48.

Петвиашвили В. И., *Похотелов О. А.* Уединенные волны в плазме и атмосфере. — М.: Атомиздат, 1989.

Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1970. — 280 с.

Плетнер Ю. Д. Структурные свойства решений уравнения гравитационно-гироскопических волн и явное решение одной задачи динамики стратифицированной вращающейся жидкости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1990. — Т. 30, № 10. — С. 1513–1525.

Плетнер Ю. Д. Представление решений двумерного уравнения гравитационно-гироскопических волн обобщенными рядами Тейлора и Лорана // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1990. — Т. 30, № 11. — С. 1728–1740.

Плетнер Ю. Д. О колебаниях плоского двустороннего диска в стратифицированной жидкости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1990. — Т. 30, № 2. — С. 278–290.

Плетнер Ю. Д. О свойствах решений уравнений, аналогичных двумерному уравнению Соболева // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1991. — Т. 31, № 10. — С. 1512–1525.

Плетнер Ю. Д. О построении решений некоторых уравнений в частных производных // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1992. — Т. 32, № 5. — С. 742–757.

Плетнер Ю. Д. О свойствах решений некоторых уравнений в частных производных // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1992. — Т. 32, № 6. — С. 890–903.

Плетнер Ю. Д. Фундаментальные решения операторов типа Соболева и некоторые начально-краевые задачи // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1992. — Т. 32, № 12. — С. 1885–1899.

Плетнер Ю. Д. Представление решений двумерных аналогов уравнения Соболева обобщенными рядами Тейлора и Лорана // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1992. — Т. 32, № 1. — С. 59–70.

Пятков С. Г. Краевые задачи для некоторых уравнений и систем, возникающих в теории электрических цепей // Актуал. вопр. совр. мат., 1995. — № 1. — С. 121–133.

Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр 2. Линейная алгебра. — М.: Наука, 1986. — 400 с.

Похожаев С. И. Об одном классе квазилинейных гиперболических уравнений // Мат. сб., 1975. — Т. 25, № 1. — С. 145–158.

Похожаев С. И. Об одном подходе к нелинейным уравнениям // ДАН СССР, 1979. — Т. 247, № 6. — С. 1327–1331.

Похожаев С. И. О собственных функциях уравнения $\triangle u + \lambda f(u) = 0$ // ДАН СССР, 1965. — Т. 165, № 1. — С. 36–39.

Похожаев С. И. Об одном конструктивном методе вариационного исчисления // ДАН СССР, 1988. — Т. 298, № 6. — С. 1330–1333.

Похожаев С. И. О методе расслоения решения нелинейных краевых задач // Труды МИАН СССР, 1990. — Т. 192. — С. 146–163.

Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. — М.: Наука, 1967.

Робертсон А., *Робертсон В.* Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1967. — 259 с.

Самарский А. А., *Галактионов В. А.*, *Курдюмов С. П.*, *Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. — М.: Наука, 1987. — 480 с.

Свешников А. Г., *Тихонов А. Н.* Теория функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1986. — 304 с.

Свиридюк Г. А. Об одной модели динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости // Изв. вузов. Математика, 1988. — № 1. — С. 74–79.

Свиридюк Г. А. Об одной модели слабосжимаемой вязкоупругой жидкости // Изв. вузов. Математика, 1988. — № 1. — С. 62–70.

Свиридюк Г. А. К общей теории полугрупп операторов // Успехи матем. наук., 1994. — Т. 49, № 4. — С. 47–74.

Свиридюк Г. А., *Федоров В. Е.* Аналитические полугруппы с ядрами и линейные уравнения типа Соболева // Сиб. мат. журн., 1995. — Т. 36, № 5. — С. 1130–1145.

Свиридюк Г. А. Многообразие решений одного сингулярного псевдопараболического уравнения // ДАН, 1986. — Т. 289, № 6. — С. 1315–1318.

Свиридюк Г. А., *Семенова И. Н.* О разрешимости неоднородной задачи для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска // Дифферен. уравн., 1988. — Т. 24, № 9. — С. 1607–1613.

Свиридюк Г. А., *Казак В. А.* Фазовое пространство начально-краевой задачи для уравнения Хоффа // Мат. заметки, 2002. — Т. 71, № 2. — С. 292–297.

Свиридюк Г. А., *Вакарина О. В.* Задача Коши для линейных уравнений типа Соболева высокого порядка // Дифферен. уравн., 1995. — Т. 31, № 11. — С. 1912–1919.

Свиридюк Г. А., Шеметова В. В. Фазовое пространство уравнений Корпусова–Плетнера–Свешникова на графе // Вычислительные технологии, 2005. — Т. 10, № 6. — С. 82–90.

Секерж-Зенькович С. Я. Построение фундаментального решения оператора внутренних волн // ДАН СССР, 1979. — Т. 246, № 2. — С. 286–288.

Секерж-Зенькович С. Я. К теории установившихся волн конечной амплитуды, вызванных давлением, периодически распределенным по поверхности потока тяжелой жидкости бесконечной глубины // ДАН СССР, 1968. — Т. 180, № 2. — С. 304–307.

Секерж-Зенькович С. Я. Об установившихся волнах конечной амплитуды, вызванных давлением, периодически распределенным по поверхности потока тяжелой жидкости конечной глубины // ДАН СССР 1968. — Т. 180, № 3. — С. 560–563.

Симаков С. Т. К вопросу о малых колебаниях в стратифицированной жидкости // ПММ, 1989.— Т. 23, № 1.— С. 66–74.

Ситенко А. П., *Сосенко П. П.* О коротковолновой конвективной турбулентности и аномальной электронной теплопроводности плазмы // Физ. плазмы, 1987. — Т.13, Вып. 4. — С. 456–462.

Скрыпник И. В. Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. — М.: Наука, 1990. — 448 с.

Смайт В. Электростатика и электродинамика. — М.: Изд-во иностр. лит. 1954. — 604 с.

Соболев С. Л. Об одной новой задаче математической физики // Известия АН СССР. Сер. мат. 1954. — № 18. — С. 3–50.

Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма. — М.: ОГИЗ, 1948. — 540 с.

Тамм И. Е. Основы теории электричества. — М.: Наука, 1989. — 504 с.

Тахтаджян Л. А., *Фаддеев Л. Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. — М.: Наука, 1986. — 528 с.

Тверской М. Б. О не зависящих от вертикальной координаты нелинейных волнах в стратифицированной жидкости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1996. — Т. 36, № 9. — С. 112–119.

Успенский С. В., *Демиденко Г. В.*, *Перепелкин В. Г.* Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям. — Новосибирск: Наука, 1984. — 224 с.

Успенский С. В. О представлении функций, определяемых одним классом гипоэллиптических операторов // Труды МИАН СССР, 1972. — Т. 117. — С. 292–299.

Успенский С. В., *Васильева Е. Н.* О поведении на бесконечности решения одной задачи гидродинамики // Труды МИАН СССР, 1990. — Т 192. — С. 221–230.

Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977. — 624 с.

Фалалеев М. В. Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах // Сиб. матем. ж., 2000. — Т. 41, № 5. — С. 1167–1182

Фалалеев М. В., Гражданцева Е. Ю. Фундаментальные оператор-функции вырожденных дифференциальных и дифференциально-разностных операторов с Нетеровым оператором в главной части в банаховых пространствах // Сиб. матем. ж., 2005. — Т. 46, № 6. — С. 1393–1406

Федоров В. Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов // Алгебра и анализ, 2000. — Т. 12, вып. 3. — С. 173–200.

Федоров В. Е. Полугруппы и группы операторов с ядрами. — Челябинск, 1998.

Федосов В. Н. Низкочастотные флуктуации и релаксация в полупроводниковом сегнетоэлектрике // Физ. и техн. полупроводников, 1983. — Т. 17, № 5. — С. 941–944.

Фурман А. С. О стратификации объемного заряда при переходных процессах в полупроводниках // ФТТ, 1986. — Т. 28, № 7. — С. 2083–2090.

Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. — М.: Мир, 1968. — 428 с.

Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. — М.: Мир, 1999. — 685 с.

Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 832 с.

Шишмарев И. А. Об одном нелинейном уранении типа Соболева // Дифференц. уравн., 2005. — Т. 41, № 1. — С. 1–3.

Albert J. P. On the decay of solutions of the generalized Benjamin-Bona-Mahony equation // J. Math. Anal. Appl., 1989. — V. 141, № 2. — P. 527–537.

Amann H., *Fila M.* A fujita-type theorem for the laplace equation with a dynamical boundary condition // Acta Math. Univ. Comenianae., 1997. — V. LXVI, № 2. — P. 321–328.

Amann H. Parabolic evolution equations and nonlinear boundary conditions // J. diff. equations., 1988. — V. 72. — P. 201–269.

Avrin J., *Goldstein J. A.* Global existence for the Benjamin-Bona-Mahony equation in arbitrary dimensions // Nonlinear Anal., TMA. 1985. — V. 9, № 8. — P. 861–865.

Ball J. Stability theory for an extensible beam // J. Diff. Equations, 1973. — V. 14, P. 399–418.

Bagchi B., *Venkatesan C.* Exploring solutions of nonlinear Rossby waves in shallow water equations // J. Phys. Soc. Japan, 1996. — V. 65, № 8. — P. 2717–2721.

Bebernes J., *Lacey A. A.* Global existence and finite time blow-up for a class of nonlocal parabolic problems // Adv. differ. equations, 1997. — V. 2. P. 927–954.

Begehr H., *Dai D. Q.* Initial boundary value problem for nonlinear pseudoparabolic equations // Complex Variables, Theory Appl., 1992. — V. 18, № 1-2. — P. 33–47.

Begehr H. Entire solutions of quasilinear pseudoparabolic equations // Demonstratio mathematica, 1985. — V. 18, № 3. — P. 673–685.

Benjamin T. B., *Bona J. L.*, *Mahony J. J.* Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems // Philos. Trans. Royal Soc. London A., 1972. — V. 272, № 1220. — P. 47–78.

Biler P. Long time behavior of the generalized Benjamin- Bona-Mahony equation in two space dimensions // Differential and Integral Equations, 1992. — V. 5, № 4. — P. 891–901.

Bretherton F. P. // J. Fluid Mech., 1967. — V. 28. — P. 545–570.

Coleman B. D., *Duffin R. J.*, *Mizel V. J.* Instability, uniqness and nonexistence theorems for the equation $u_t = u_{xx} - u_{xxt}$ on strip // Arch. Rat. Mech. Analys, 1965. — V. 19. — P. 100–116.

Camassa R., *Holm D. D.* An integrable shallow water equation with peaked solitons // Phys. Rev. Lett., 1993. — V. 71, № 11. — P. 1661–1664.

Chung S. K., *Pani A. K.* Numerical methods for the Rosenau equation // J. Appl. Anal., 2001. — V. 77, № 3-4. — P. 351–369.

Chung S. K., *Ha S. N.* Finite element Galerkin solutions for the Rosenau equation // J. Appl. Anal., 1994. — V. 54, № 1-2. — P. 39–56.

Chen Yu. Remark on the global existence for the generalized Benjamin-Bona-Mahony equations in arbitrary dimension // Appl. Anal., 1988. — V. 30, № 1-3. — P. 1–15.

Chipot M., *Fila M.*, *Quittner P.* Stationary solutions, blow up and convergence to stationary solutions for semilinear parabolic equations with

nonlinear boundary conditions // Acta. math. univ. comenianae, 1991. — V. LX. — P. 35–103.

DiBenedetto E., *Pierre M.* On the maximum principle for pseudoparabolic equations // Indiana University Mathematical Journal, 1981. — V. 30, № 6. — P. 821–854.

Di Benedetto E. Degenerate parabolic equations Springer-Verlag. — N.Y., 1993.

Eden A., *Kalantarov V. K.* On global behavior of solutions to an inverse problem for nonlinear parabolic equations // J. math. analys. appl., 2005. — V. 307. — P. 120–133.

Erdem D., *Kalantarov V. K.* A remark on nonexistence of global solutions to quasi-linear hyperbolic and parabolic equations // Applied mathematics letters, 2002. — V. 15. — P. 585–590.

Escher J. Global existence and nonexistence for semilinear parabolic systems with nonlinear boundary conditions// Math. analys, 1989. — V. 284. — P. 285–305.

Favini A., *Yagi A.* Degenerate differential equations in Banach spaces. Marcel Dekker, Inc. New York – Basel – Hong Kong. 1999.

Fila M. Boundedness of global solutions for the heat equation with nonlinear boundary conditions // Comment. math. univ. Carol., 1989. — V. 30. — P. 179–181.

Fila M., *Levine H. A.* Quenching on the boundary // Nonlinear Analys. TMA, 1993. — V. 21. — P. 795–802.

Fan E. G., *Zhang J.* Blow-up of solutions to a class of nonlinear pseudoparabolic equations // (Chinese) Sichuan Shifan Daxue Xuebao Ziran Kexue Ban, 1995. — V. 18, №. 4. — P. 21–26.

Fujita H. On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for $u_t = \triangle u + u^{1+\alpha}$ // J. Fac. Univ. Tokyo, 1966. — Sect. IA. V. 13. — P. 109–124.

Galaktionov V. A. Necessary and sufficient conditions for complete blowup and existence for one-dimensional quasilinear heat equations // Arch. rat. mech. analys, 1995. — V. 129. — P. 225-244.

Galaktionov V. A. Continuation of blowup solutions of nonlinear heat equations in several space dimensions // Comm. pure appl. math., 1997. — V. 50. — P. 1–67.

Gao H., *Ma T. F.* Global solutions for a nonlinear wave equation with the p-laplacian operator // EJQTDE, 1999. — № 11. — P. 1–13.

Gardner C. S., *Green J. M.*, *Kruskal M. D.*, *Miura R. M.* Method for solving the Korteweg- de Vries equation // Phys. Rev. Lett., 1967. — V. 19, № 19. — P. 1095–1097.

Goldstein J. A., *Kajikiya R.*, *Oharu S.* On some nonlinear dispersive equations in several space variables // Differ. and Integral Equat., 1990. — V. 3, № 4. — P. 617–632.

Greenberg J. M., *MacCamy R. C.*, *Mizel V. J.* On the existence, uniqueness and stability of solutions of the equation $\sigma'(u_x)u_{xx} + \lambda u_{xxt} = \rho_0 u_{tt}$ // J. math. mech., 1968. — V. 17. — P. 707–728.

Guo B., *Miao Ch.* On inhomogeneous GBBM equations // J. Partial Differ. Equations, 1995. — V. 8, № 3. — P. 193–204.

Guowang C., *Shubin W.* Existence and non-existence of global solutions for nonlinear hyperbolic equations of higher order // Comment. Math. Univ. Carolinae, 1995. — V. 36, № 3. — P. 475–487.

Hagen T., *Turi J.* On a class of nonlinear BBM-like equations // Comput. Appl. Math., 1998. — V. 17, № 2. — P. 161–172.

Hayashi N., *Kaikina E. I., Naumkin P. I.*, *Shishmarev I. A.* Asymptotics for dissipative nonlinear equations. Springer. 2006. 565 pp.

Hu B., *Yin H.-M.* The profile near blowup time for solutions of the heat equation with a nonlinear boundary condition // Trans. of AMS, 1994. — V. 346, № 1. — P. 117–135.

Jeffrey A., *Engelbrecht J.* Nonlinear dispersive waves in a relaxing medium // Wave Motion, 1980. — V. 2, № 3. — P. 255–266.

Kaplan S. On the growth of solutions of quasi-linear parabolic equations // Comm. Pure and Appl. Math., 1963. — V. 16. — P. 305–330.

Karch G. Asymptotic behavior of solutions to some pseudoparabolic equations // Math. Methods Appl. Sci., 1997. — V. 20, № 3. — P. 271–289.

Kirane M., *Nabana E.*, *Pokhozhaev S. I.* The absence of solutions of elliptic systems with dynamic boundary conditions// J. differen. equations, 2002. — V. 38, № 6. — P. 808–815.

Kirchhoff G. Vorlesungen uber Mechanick. — Teubner, Leipzig. 1883.

Knessl Ch., *Keller J. B.* Rossby waves // Stud. Appl. Math., 1995. — V. 94, № 4. — P. 359–376.

Lee H. Y., *Ohm M. R.*, *Shin J. Y.* The convergence of fully discrete Galerkin approximations of the Rosenau equation// Korean J. Comput. Appl. Math., 1999. — V. 6, № 1. — P. 1–13.

Levine H. A. Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + F(u)$// Arch. Rational. Mech. Analys., 1973. — V. 51. — P. 371–386.

Levine H. A., *Payne L. E.* Some nonexistence theorems for initial–boundary value problems with nonlinear boundary constraints // Proc. of AMS, 1974. — V. 46, № 7. — P. 277–281.

Levine H. A., *Payne L. E.* Nonexistence theorems for the heat equation with nonlinear boundary conditions and for the porous medium equation backward in time // J. differ. equations, 1974. — V. 16. — P. 319–334.

Levine H. A., *Park S. R.*, *Serrin J.* Global existence and nonexistence theorems for qusilinear evolution equations of formally parabolic type // J. Differential equations, 1998. — V. 142. — P. 212–229.

Levine H. A., *Serrin J.* Global nonexistence theorems for qusilinear evolution equations with dissipation // Arch. rat. mech. analys., 1997. — V. 137. — P. 341–361.

Levine H. A., *Fila M.* On the boundedness of global solutions of abstract semilinear parabolic equations // J. Math. Anal. Appl., 1997. — V. 216. — P. 654–666.

Levine H. A., *Park S. R.*, *Serrin J.* Global existence and global nonexistence of solutions of the Cauchy problem for a nonlineary damped wave equation // J. Math. Anal. Appl., 1998. — V. 228. — P. 181–205.

Levine H. A. The role of critical exponents in blowup problems // SIAM Rev., 1990. — V. 32. — P. 262–288.

Li Z. On the initial-boundary value problem for the system of multidimensional generalized BBM equations // Math. Appl., 1990. — V. 3, № 4. — P. 71–80.

Lindqvist P. On the equation $\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \lambda |u|^{p-2}u = 0$ // Proc. Amer. Math. Soc., 1990. — V. 109. — P. 157–164.

Liu L., *Mei M.* A better asymptotic profile of Rosenau-Burgers equation // J. Appl. Math. Comput., 2002. — V. 131, — № 1. P. 147–170.

Liu Yacheng, *Wan Weiming*, *Lu Shujuan* Nonlinear pseudoparabolic equations in arbitrary dimensions // Acta Math. Appl. Sin., Engl. Ser., 1997. — V. 13, № 3. — P. 265–278.

Medeiros L. A., *Perla M. G.* On global solutions of a nonlinear dispersive equation of Sobolev type // Bol. Soc. Bras. Mat., 1978. — V. 9, № 1. — P. 49–59.

Mei M. Long-time behavior of solution for Rosenau–Burgers equation. II // J. Appl. Analys., 1998. — V. 68, № 3-4. — P. 333–356.

Mei M. $\mathbb{L}_q$-decay rates of solutions for Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equations // J. Differ. Equations., 1999. — V. 158, № 2. — P. 314–340.

Naumkin P. I., *Shishmarev I. A.* Nonlinear Nonlocal Equations in the Theory of Waves. Translations of Mathematical Monographs 133 (Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1994).

Naumkin P. I. Large-time asymptotic behaviour of a step for the Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equation // Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A. 1996. — V. 126, № 1. — P. 1–18.

Park M. A. On the Rosenau equation in multidimensional space // J. Nonlinear Analys., Theory Methods Appl., 1993. — V. 21, № 1. — P. 77–85.

Park M. A. Pointwise decay estimates of solutions of the generalized Rosenau equation// J. Korean Math. Soc., 1992. — V. 29, № 2. — P. 261–280.

Pereira J. M. Stability of multidimensional traveling waves for a Benjamin–Bona–Mahony type equation // Differ. Integral Equqtion, 1996. — V. 9, № 4. — P. 849–863.

Pohozaev S. I. On eigenfunctions of quasilinear elliptic problems// Mat. Sb., 1970. — V. 82. — P. 192–212.

Redekopp L. G. On the theory of solitary Rossby waves // J. Fluid Mech., 1977. — V. 82, № 4. — P. 725–745.

Rosenbrock H. H. Some general implicit processes for the numerical solution of differential equations // Comput. J., 1963. — V. 5, № 4. — P. 329–330.

Rossi J. D. The blow-up rate for a semilinear parabolic equation with a nonlinear boundary condition // Acta. Math. Univ. Comenianae, 1998. — V. LXVII, № 2. — P. 343–350.

Spagnolo S. The Cauchy problem for Kirchhoff equations // Estratto dal «Rendiconti del Seminaro Matematico e Fisico di Milano», 1992. — V. 62. — P. 17–51.

Shang Yadong, *Guo Boling* Initial-boundary value problems and initial value problems for nonlinear pseudoparabolic integro-differential equations(Chinese. English summary) // J. Math. Appl., 2002. — V. 15, № 1. — P. 40–45.

Showalter R. E. Monotone operators in Banach space and nonlinear differential equations, volume 49 of Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society. 1997.

Showalter R. E. Existance and representation theorems for a semilinear Sobolev equation in Banach space // SIAM J. Math. Analys., 1972. — V. 3, № 3. — P. 527–543.

Showalter R. E. Nonlinear degenerate evolution equations and partial differential equations of mixed type // SIAM J. math. analys., 1975. — V. 6, № 1. — P. 25–42.

Showalter R. E. Partial differential equations of Sobolev-Galpern type // Pacific J. math., 1963. — V. 31, № 3. — P. 787–793.

Showalter R. E. The Sobolev type equations. I (II) // Appl. analys., 1975. — V. 5, № 1. — P. 15–22.(No 2. — P. 81–99.)

Showalter R. E., *Ting T. W.* Pseudoparabolic partial differential equations // SIAM J. math. analys., 1970. — V. 1, № 1. — P. 1–26.

Sidorov N., *Loginov B.*, *Sinitsyn A.*, *Falaleev M.* Lyapunov-Schmidt methods in nonlinear analysis and applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002.

Stefanelli U. On a class of doubly nonlinear nonlocal evolution equations // Differential Integral Eq., 2002. — V. 15, № 8. — P. 897–922.

Sviridyuk G. A., *Fedorov V. E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht : VSP, 2003. — 228 p.

Tan B., *Liu Sh.* Nonlinear Rossby waves in the geophysical fluids // J. Math. Appl., 1990. — V. 3, № 1. — P. 40–49.

Tan B., *Boyd J.P.* Dynamics of the Flierl-Petviashvili monopoles in a barotropic model with topographic forcing // Wave Motion, 1997. — V. 26, № 3. — P. 239–251.

Tian Ying Hui. The blow-up properties of generalized nonlinear pseudoparabolic and pseudohyperbolic equations // (Chinese) Sichuan

Shifan Daxue Xuebao Ziran Kexue Ban, 1993. — V. 16, № 4. — P. 61–68.

Ting T. W. Certain non steady flows of second-order fluids // Arch. rat. mech. analys., 1963. — V. 14, № 1. — P. 28–57.

Ting T. W. Parabolic and pseudoparabolic partial differential equations // J. math. soc. japan, 1969. — V. 14. — P. 1–26.

Weissler F. B. Local existence and nonexistence for semilinear parabolic equations in $\mathbb{L}^p$ // Ind. Univ. Math. jnl. 1980. — V. 29. — P. 79–102.

Zakharov V. E., *Monin A. S.*, *Piterbarg L. I.* Hamiltonian description of baroclinic Rossby waves // Sov. Phys., Dokl., 1987. — V. 32, № 8. — P. 626–627.

Zakharov V. E., *Piterbarg L. I.* Canonical variables for Rossby and drift waves in plasma // Sov. Phys., Dokl., 1987. — V. 32, № 7. — P. 560–561.

Zhang L. Decay of solutions of generalized BBMB equations in n-space dimensions // Nonlinear Analysis T.M.A., 1995. — V. 20. — P. 1343–1390.

Zhi Jian, *Chen Guowang* Blow-up of solutions to a class of quasilinear pseudoparabolic equations // (Chinese) Gaoxiao Yingyong Shuxue Xuebao Ser., 1994. — V. 9, № 3. — P. 228–236.

Формульный указатель линейных уравнений

1.

$$\triangle_3\varphi(x,t)+\omega_p^2\int\limits_0^t d\tau(t-\tau)\varphi_{x_3x_3}(x,\tau)+$$
$$+\int\limits_0^t d\tau\{\omega_{pe}^2 sin[\omega_{Be}(t-\tau)]/\omega_{Be}+$$
$$+\omega_{pi}^2 sin[\omega_{Bi}(t-\tau)]/\omega_{Bi}\}\triangle_2\varphi(x,\tau)=+\operatorname{div}\mathbf{F_0}(x,t). \quad \text{(I.2.9)}$$

2.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_e^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_i^2\right)\triangle_2\Phi+$$
$$+\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_p^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_{Be}^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_{Bi}^2\right)\Phi_{x_3x_3}=$$
$$=\operatorname{div}\mathbf{F_0}(x,t). \quad \text{(I.2.10)}$$

3.

$$\triangle_3\varphi+\omega_{pe}^2\int\limits_0^t d\tau(t-\tau)\varphi_{x_3x_3}(x,\tau)+$$
$$+\omega_{pe}^2\int\limits_0^t d\tau\frac{sin[\omega_{Be}(t-\tau)]}{\omega_{Be}}\triangle_2\varphi(x,\tau)=\operatorname{div}\mathbf{F_0}(x,t). \quad \text{(I.2.12)}$$

4.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_{pe}^2+\omega_{Be}^2\right)\triangle_2\Phi+$$
$$+\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_{pe}^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_{Be}^2\right)\Phi_{x_3x_3}=\operatorname{div}\mathbf{F_0}(x,t). \quad \text{(I.2.14)}$$

5.

$$\triangle_3\varphi - \frac{1}{r_D^2}\varphi + \omega_{pi}^2 \int\limits_0^t d\tau (t-\tau)\varphi_{x_3x_3}(x,\tau) + \\ + \omega_{pi}^2 \int\limits_0^t d\tau \frac{sin[\omega_{Bi}(t-\tau)]}{\omega_{Bi}} \triangle_2\varphi(x,\tau) = \operatorname{div}\mathbf{F_0}(x,t). \quad \text{(I.3.6)}$$

6.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{Bi}^2\right)\left(\triangle_3\Phi - \frac{1}{r_D^2}\Phi\right) + \\ + \omega_{pi}^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\triangle_3\Phi + \omega_{pi}^2\omega_{Bi}^2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2} = \operatorname{div}\mathbf{F_0}(x,t). \quad \text{(I.3.7)}$$

7.

$$\left(1 + \frac{c^2}{u_{\mathrm{A}e}^2}\right)\triangle_2\varphi_e + (\varphi_e)_{x_3x_3} - \frac{1}{r_{\mathrm{D}e}^2}\varphi_e + \\ + \omega_{pe}^2 \int\limits_0^t d\tau (t-\tau)(\varphi_e)_{x_3x_3}(x,\tau) = \operatorname{div}\mathbf{F_0}(x,t). \quad \text{(I.3.20)}$$

8.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\triangle_2\Phi_e + \frac{u_{\mathrm{A}e}^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\triangle_3\Phi_e - \frac{1}{r_{\mathrm{D}e}^2}\Phi_e\right) + \\ + \omega_{Be}^2 \frac{\partial^2\Phi_e}{\partial x_3^2} = \frac{u_{\mathrm{A}e}^2}{c^2}\operatorname{div}\mathbf{F}_0(x,t). \quad \text{(I.3.21)}$$

9.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\triangle_2\Phi_i + \frac{u_{\mathrm{A}i}^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\triangle_3\Phi_i - \frac{1}{r_{\mathrm{D}i}^2}\Phi_i\right) + \\ + \omega_{Bi}^2 \frac{\partial^2\Phi_i}{\partial x_3^2} = \frac{u_{\mathrm{A}i}^2}{c^2}\operatorname{div}\mathbf{F}_0(x,t). \quad \text{(I.3.22)}$$

10.

$$\triangle_3\psi(x,t) + \omega_2^2 \int\limits_0^t d\tau \frac{sin[\omega_1(t-\tau)]}{\omega_1}\triangle_2\psi(x,\tau) = \\ = 4\pi \operatorname{div}\mathbf{q}(x,t). \quad \text{(I.4.9)}$$

11.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_1^2\right)\triangle_3\Psi(x,t)+\omega_2^2\triangle_2\Psi(x,t)= \\ =\operatorname{div}\mathbf{q}(x,t). \quad \text{(I.4.12)}$$

12.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_3^2\right)\triangle_3\Psi(x,t)+ \\ +\omega_4^2\Psi_{x_2x_2}(x,t)+\omega_5^2\Psi_{x_3x_3}(x,t)=\operatorname{div}\mathbf{q}(x,t). \quad \text{(I.4.18)}$$

13.

$$\triangle_3\psi(x,t)+ \\ +\int\limits_0^t d\tau\,\{sin[\omega_6(t-\tau)]/\omega_6\}\left[\omega_8^2\psi_{x_1x_1}(x,\tau)+\omega_9^2\psi_{x_3x_3}(x,\tau)\right]+ \\ +\omega_{10}^2\int\limits_0^t d\tau\,\{\sin[\omega_7(t-\tau)]/\omega_7\}\,\psi_{x_2x_2}(x,\tau)= \\ =4\pi\operatorname{div}\mathbf{q}_0(x,t). \quad \text{(I.4.29)}$$

14.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_7^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_6^2+\omega_8^2\right)\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_1^2}+ \\ +\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_6^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_7^2+\omega_{10}^2\right)\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_2^2}+ \\ +\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_7^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_6^2+\omega_9^2\right)\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_3^2}=\operatorname{div}\mathbf{q}_0(x,t). \quad \text{(I.4.30)}$$

15.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_0^2\right)\triangle_3\Psi+ \\ +\omega_s\omega_y\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\omega_s\omega_x\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}-2\omega_{xy}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}=\operatorname{div}\mathbf{q}(x,t). \quad \text{(I.4.36)}$$

Формульный указатель нелинейных уравнений

1. $\partial_t \triangle u + \partial_{x_1} u + u\partial_{x_1} u + \triangle u = 0$ (III.2.1).
2. $\partial_t \triangle u + \partial_{x_1} u + u\partial_{x_1} u + \triangle u + a\triangle_p u + \lambda|u|^q u = 0$ (III.2.2).
3. $\partial_t \triangle u + \triangle u + a\triangle_p u + \lambda|u|^q u = 0$ (III.2.3).
4. $\partial_t \triangle u + \triangle(u + u^2 + u^3) + \lambda|u|^q u = 0$ (III.2.5).
5. $\partial_t \triangle u + \triangle(|u|^{q_1} u) + \lambda|u|^{q_2} u = 0$ (III.2.6).
6. $\partial_t (\triangle u - u) + \partial_{x_1} u + u\partial_{x_1} u + \triangle u = 0$ (III.2.7).
7. $\partial_t (\triangle u - u) + \partial_{x_1} u + u\partial_{x_1} u + \triangle u + a\triangle_4 u + \lambda|u|^q u = 0$ (III.2.8).
8. $\partial_t (\triangle u - u) + \triangle u + a\triangle_4 u + \lambda|u|^q u = 0$ (III.2.9).
9. $\partial_t (\triangle u - u) + \triangle(u + u^2 + u^3) + \lambda|u|^q u = 0$ (III.2.10).
10. $\partial_t (\triangle u - u) + \triangle(|u|^{q_1} u) + \lambda|u|^{q_2} u = 0$ (II.2.11).
11. $\partial_t (\triangle u - u) - u = 0$ (III.2.18).
12. $\partial_t (\triangle u - \alpha_1 u) + \triangle u + \operatorname{div}(u\nabla u) = 0$ (III.2.25).
13. $\partial_t (\triangle u + u) + \partial_{x_1} u + u\partial_{x_1} u + \triangle u = 0$ (III.2.32).
14. $\partial_t(\triangle u + u) + \partial_{x_1} u + u\partial_{x_1} u + \triangle u + a\triangle_4 u + \lambda|u|^q u = 0$ (III.2.33).
15. $\partial_t(\triangle u + u) + \triangle u + a\triangle_4 u + \lambda|u|^q u = 0$ (III.2.34).
16. $\partial_t (\triangle u + u) + \triangle(u + u^2 + u^3) + \lambda|u|^q u = 0$ (III.2.35).
17. $\partial_t (\triangle u + u) + \triangle(|u|^{q_1} u) + \lambda|u|^{q_2} u = 0, \;\; q_1, \; q_2 \geqslant 0$ (III.2.36).
18. $\partial_t (\triangle u + \triangle_p u - |u|^{q_1} u) + \partial_{x_1} u + u\partial_{x_1} u + \triangle u = 0$ (III.2.37).
19. $\partial_t (\triangle u + \triangle_p u - |u|^{q_1} u) +$
$+\partial_{x_1} u + u\partial_{x_1} u + \triangle u + \triangle_4 u + \lambda|u|^{q_2} u = 0$ (III.2.38).
20. $\partial_t (\triangle u + \triangle_p u - |u|^{q_1} u) + \triangle u + \triangle_4 u + \lambda|u|^{q_2} u = 0$ (III.2.39).
21. $\partial_t (\triangle u + \triangle_p u - |u|^{q_1} u) + \triangle(u + u^2 + u^3) + \lambda|u|^{q_2} u = 0$ (III.2.40).
22. $\partial_t (\triangle u + \triangle_p u - |u|^{q_1} u) + \triangle(|u|^{q_2} u) + \lambda|u|^{q_3} u = 0$ (III.2.41).
23. $\partial_t (\triangle u + \triangle_p u - |u|^{q_1} u) + (w_1 + w_2 \parallel \nabla u \parallel_2^2)^{q_2} \triangle u = 0$ (III.2.50).
24. $\partial_t (\triangle u - u) - (-\triangle)^{1/2} u + \partial_{x_1}(|u|^{q_1+1}) + |u|^{q_2} u = 0$ (III.6.1).
25. $\partial_t (\triangle u - u) - (-\triangle)^{1/2} u + u\partial_{x_1} u + \lambda u^3 = 0$ (III.6.2).
26. $\partial_t \left(-\triangle^2 u + \triangle u - u\right) - (-\triangle)^{1/2} u + \partial_{x_1}(|u|^{q_1+1}) + \lambda|u|^{q_2} u = 0$ (III.6.3).
27. $\partial_t \left(-\triangle^2 u + \triangle u\right) + \partial_{x_1}(|u|^{q_1+1}) + |u|^{q_2} u = 0$ (III.6.4).
28. $\partial_t(-\triangle^2 u + \triangle u + \triangle_p u - |u|^{q_1} u) -$
$-(-\triangle)^{1/2} u + \partial_{x_1}\left(|u|^{q_2+1}\right) + \triangle u + \triangle_4 u + |u|^{q_3} u = 0$ (III.6.5).
29. $\partial_t \left(-\triangle^2 u + \triangle u\right) + u\partial_{x_1} u - \triangle_p u = 0$ (III.6.6).
30. $\partial_t \left(\triangle^2 u - \triangle u\right) + \triangle_p u = 0$ (III.6.7).
31. $\partial_t \left(-\triangle^2 u + \triangle u + \triangle_{p_1} u\right) - \triangle_{p_2} u = 0$ (III.6.8).

32. $\partial_t\left(-\triangle^2 u+\triangle u+\triangle_{p_1}u\right)+\triangle u-\triangle_{p_2}u=0$ (III.6.9).
33. $\partial_t\left(\triangle u+\triangle_p u)\right)-(-\triangle)^{1/2}u+|u|^q u=0$ (III.6.10).
34. $\partial_t\triangle u+\beta_1\partial_{x_1}(\partial_{x_2}u\partial_{x_3}u)+\beta_2\partial_{x_2}(\partial_{x_3}u\partial_{x_1}u)+\beta_3\partial_{x_3}(\partial_{x_1}u\partial_{x_2}u)$ (III.7.3).
35. $\partial_t(\triangle u-\triangle^2 u+\triangle_4 u)+\lambda\triangle_p u+$ $+\beta_1\partial_{x_1}(\partial_{x_2}u\partial_{x_3}u)+\beta_2\partial_{x_2}(\partial_{x_3}u\partial_{x_1}u)+\beta_3\partial_{x_3}(\partial_{x_1}u\partial_{x_2}u)=0$ (III.7.5).
36. $\partial_t\left(\triangle u+\sum\limits_{j=1}^{n}\triangle_{p_j}u\right)+|u|^q u=0$ (IV.1.3).
37. $\partial_t\left(\triangle u-|u|^{q_1}u\right)+|u|^{q_2}u=0$ (IV.1.4).
38. $\partial_t\left(\triangle u+\triangle_p u-|u|^{q_1}u\right)+|u|^{q_2}u=0$ (IV.1.5).
39. $\partial_t(\triangle u-u)+\triangle_p u+\lambda|u|^{p-2}u=0$ (IV.1.6).
40. $\partial_t\left(\triangle^2 u-\triangle u\right)+\triangle_p u=0$ (IV.1.7).
41. $\partial_t\left(-\triangle^2 u+\triangle u+\triangle_{p_1}u\right)-\triangle_{p_2}u=0$ (IV.1.8).
42. $\partial_t\left(\triangle u+\sum\limits_{i=1}^{N}\partial_{x_i}(|\partial_{x_i}u|^{p-2}\partial_{x_i}u)\right)+|u|^q u=0$ (IV.8.4).
43. $\partial_t(\triangle u-|u|^q u)+\triangle_p u+|u|^{p-2}u=0$ (IV.9.6).
44. $\partial_t\triangle u+u|u|^q=0$ (IV.10.1).
45. $\partial_t(\triangle u+\sum\limits_{j=1}^{N}\triangle_{p_j}u)-u+|u|^q u=0$ (V.1.3).
46. $\partial_t(\triangle u-|u|^{q_1}u)+\triangle u+|u|^q u=0$ (V.1.4).
47. $\partial_t(\triangle u+\triangle_p u-|u|^{q_1}u)-u+|u|^q u=0$ (V.1.5).
48. $\partial_t(-\triangle^2 u+\triangle u+\triangle_{p_1}u)+\triangle u-\triangle_{p_2}u=0$ (V.1.6).
49. $\partial_t(\triangle u+\triangle_p u)-(-\triangle)^{1/2}u+|u|^q u=0$ (V.1.7).
50. $\partial_t(\triangle u+\sum\limits_{j=1}^{N}\triangle_{p_j}u)+u\partial_{x_1}u+u^3=0$ (V.1.8).
51. $\partial_t(\triangle u-|u|^{q_1}u)+\partial_{x_1}(|u|^{q_2+1})+|u|^{2q_2}u=0$ (V.1.9).
52. $\partial_t(-\triangle^2 u+\triangle u+\triangle_{p_1}u)+u\partial_{x_1}u-\triangle_4 u=0$ (V.1.10).
53. $\partial_t(-\triangle^2 u+\triangle u)-\triangle_4 u+$ $+\beta_1\partial_{x_1}(\partial_{x_2}u\partial_{x_3}u)+\beta_2\partial_{x_2}(\partial_{x_3}u\partial_{x_1}u)+\beta_3\partial_{x_3}(\partial_{x_1}u\partial_{x_2}u)=0$ (V.1.11).
54. $\partial_t(\triangle u-u)+u\partial_{x_1}u+u^3=0$ (V.8.1).
55. $\partial_t(-\triangle^2 u+\triangle u)+u\partial_{x_1}u-\triangle_4 u=0$ (V.8.2).
56. $\partial_t(-\triangle^2 u+\triangle u)-\triangle_4 u+$ $+\beta_1\partial_{x_1}(\partial_{x_2}u\partial_{x_3}u)+\beta_2\partial_{x_2}(\partial_{x_3}u\partial_{x_1}u)+\beta_3\partial_{x_3}(\partial_{x_1}u\partial_{x_2}u)=0$ (V.8.3).
57. $\partial_t(\triangle u-|u|^{q_1}u)+\triangle u+|u|^{q_2}u=0$ (V.9.1).
58. $\partial_t(\triangle u-u)+\triangle u+\partial_{x_1}(|u|^{1+q/2})+|u|^q u=0$ (V.10.18).
59. $\partial_t(-\triangle^2 u+\triangle u)+\triangle u+\partial_{x_1}(|u|^{1+q/2})-\operatorname{div}(|\nabla u|^q\nabla u)=0$ (V.10.20).
60. $\partial_t(-\triangle^2 u+\triangle u)+\triangle u+\partial_{x_1}(|u|^{1+q/2})+|u|^q u=0$ (V.10.22).
61. $\partial_t(-\triangle^2 u+\triangle u)+\triangle u+$

$+\gamma_1(u_{x_2}u_{x_3})_{x_1}+\gamma_2(u_{x_3}u_{x_1})_{x_2}+\gamma_3(u_{x_1}u_{x_2})_{x_3}-\operatorname{div}(|\nabla u|^2\nabla u)=0$ (V.10.24).

62. $\partial_t(\triangle u-u)+\triangle u+\partial_{x_1}(u^2)+u^3=0$ (V.11.1).

63. $\partial_t(\triangle u-u)+\triangle u+\partial_{x_1}u+\partial_{x_1}(u^2)-\operatorname{div}(|\nabla u|^2\nabla u)=0$ (V.12.1).

64. $\partial_t(\triangle u+\triangle_{p_1}u)+\triangle u-\triangle_{p_2}u=0$ (V.12.1).

65. $\partial_t(\triangle u-u+\sum\limits_{j=1}^{n}\triangle_{p_j}u)-u+uu_{x_1}+u^3=0$ (VI.1.2).

66. $\partial_t(\triangle u-u-|u|^{q_1}u)+\triangle u+\partial_{x_1}(|u|^{q_2+1})+|u|^{2q_2}u=0$ (VI.1.3).

67. $\partial_t(-\triangle^2u+\triangle u+\operatorname{div}(|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u))+\triangle u+uu_{x_1}+u^3=0$ (VI.1.4).

68. $\partial_t(-\triangle^2u+\triangle u+\operatorname{div}(|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u))+\triangle u-\operatorname{div}(|\nabla u|^2\nabla u)+$
$+\alpha_1\partial_{x_1}(\partial_{x_2}u\partial_{x_3}u)+\alpha_2\partial_{x_2}(\partial_{x_3}u\partial_{x_1}u)+\alpha_3\partial_{x_3}(\partial_{x_1}u\partial_{x_2}u)=0$ (VI.1.5).

69. $\partial_t(\triangle u-u-|u|^qu)+\triangle u+u_{x_1}+uu_{x_1}-\parallel\nabla u\parallel_2^2\triangle u$ (VI.5.1).

70. $\partial_t(-\triangle^2u+\triangle u+\triangle_pu)+\triangle u-\triangle_4u+$
$+\alpha_1(u_{x_2}u_{x_3})_{x_1}+\alpha_2(u_{x_3}u_{x_1})_{x_2}+\alpha_3(u_{x_1}u_{x_2})_{x_3}=0$ (VI.6.1).

71. $\partial_t(\triangle u+\triangle_pu)-u+u_{x_1}+uu_{x_1}+u^3$ (VI.7.1).

72. $\partial_t(\triangle u-u)+\parallel\nabla u\parallel_2^{2q}\triangle u=0$ (VII.1.1).

73. $\partial_t\triangle u=\triangle_pu$ (VII.2.1).

74. $\partial_t\triangle u+\triangle u=\triangle_pu$ (VII.2.2).

75. $\partial_t(\triangle u-u)=\triangle_pu$ (VII.2.3).

76. $\partial_t\triangle u+u\partial_{x_1}u=\triangle_4u$ (VII.2.4).

77. $\partial_t(\triangle u-u)+u\partial_{x_1}u=\triangle_4u$ (VII.2.5).

78. $\partial_t(\triangle u-u)+e^u=0$ (VII.3.1).

79. $\partial_t(\triangle u-u)+ue^{u^2}=0$ (VII.3.2).

80. $\partial_t(\triangle u-u)=\triangle(ue^{u^2})$ (VII.3.3).

81. $\partial_t(\triangle u-u)+u^3=f(x)$ (VII.4.1).

82. $\partial_t(\triangle u-|u|^qu)-\parallel\nabla u\parallel_2^{2p}\triangle u=0$ (VII.5.1).

83. $(\partial_t\partial_{x_3}u+\partial_{x_3}u+|u|^qu)\Big|_{x_3=0}=0$ (VII.6.1).

84. $\partial_t\triangle u+\triangle u+|u|^qu=0$ (VII.7.1).

Научное издание

СВЕШНИКОВ Алексей Георгиевич
АЛЬШИН Александр Борисович
КОРПУСОВ Максим Олегович
ПЛЕТНЕР Юрий Дмитриевич

ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

Редактор *Н.Б. Бартошевич-Жагель*
Оригинал-макет: *М.О. Корпусов*
Оформление переплета: *Н.В. Гришина*

Подписано в печать 07.12.06. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 46. Уч.-изд. л. 50. Тираж 400 экз.
Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ППП «Типография «Наука»
121099, г. Москва, Шубинский пер., 6