

ЛУЧШИЕ КЛАССИЧЕСКИЕ УЧЕБНИКИ
МАТЕМАТИКА

А. А. СВЕШНИКОВ

ПРИКЛАДНЫЕ
МЕТОДЫ
ТЕОРИИ
МАРКОВСКИХ
ПРОЦЕССОВ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2007

ББК 22.171

С 24

Свешников А. А.

С 24 Прикладные методы теории марковских процессов: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2007. — 192 с. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-0719-4

Книга известного российского ученого сочетает в себе черты учебного пособия и монографии. Может служить для первоначального изучения прикладной теории марковских процессов. Содержит систематическое изложение ее основных аналитических методов и описание методики их применения к решению конкретных задач из области естествознания и техники. Рассмотрен ряд вопросов, недостаточно освещенных в специальной литературе (случай существенных нелинейностей, задачи о выбросах, задачи условных марковских процессов и др.). Содержание иллюстрируется большим числом примеров и задач. Книга продолжает известное пособие автора по общей теории случайных функций, переведенное на несколько иностранных языков.

Рассчитана на аспирантов, студентов старших курсов, научных и инженерно-технических работников.

ББК 22.171

Обложка
А. Ю. ЛАПШИН

*Охраняется законом РФ об авторском праве.
Воспроизведение всей книги или любой ее части
запрещается без письменного разрешения издателя.
Любые попытки нарушения закона
будут преследоваться в судебном порядке.*

© Издательство «Лань», 2007
© А. А. Свешников, наследники, 2007
© Издательство «Лань»,
художественное оформление, 2007

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие редактора	5
1. Введение	
§1. Общие замечания	11
§2. Определение понятия случайной функции	16
§3. Основные обозначения и формулы корреляционной теории случайных функций	21
2. Стохастические интегралы и стохастические дифференциальные уравнения	
§4. Функции броуновского движения	33
§5. Стохастические интегралы	44
§6. Стохастические дифференциальные уравнения ..	56
3. Уравнения Колмогорова и их составление по стохастическим дифференциальным уравнениям движения динамической системы	
§7. Уравнения Колмогорова для одномерного марковского процесса	65
§8. Нахождение коэффициентов уравнений Колмогорова по стохастическому дифференциальному уравнению, определяющему марковский процесс	71
§9. Уравнения Колмогорова для многомерного марковского процесса и их составление по системе стохастических дифференциальных уравнений, определяющих марковский процесс	75
4. Решение уравнений Колмогорова для неограниченного пространства	
§10. Решение уравнений Колмогорова для одномерного марковского процесса в случае гладких коэффициентов сноса и диффузии	80

§11. Особенности решения уравнений Колмогорова для одномерного марковского процесса при нарушении условий гладкости коэффициентов уравнения Колмогорова	96
§12. Решение уравнения Колмогорова для многомерных марковских процессов	99
§13. Применение теории марковских процессов к исследованию систем, содержащих существенно нелинейные звенья	121
§14. Вероятность пребывания марковского процесса в заданной области	127
§15. Выбросы марковского случайного процесса . . .	142
§16. Выбросы компоненты марковского процесса . . .	150
§17. Оптимальная оценка компонент многомерного марковского процесса	160
§18. Получение оптимальных оценок в случае Калмана	179

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Публикуемая сейчас книга написана одним из ведущих отечественных специалистов в области прикладных методов теории вероятностей. Ее автор, заслуженный деятель науки и техники РСФСР, доктор технических наук, профессор Арам Арутюнович Свешников (1911–1979) выпустил в свет несколько монографий и учебных пособий, получивших широкое признание читателей и разошедшихся многотысячными тиражами как у нас в стране, так и за рубежом. Несмотря на десятилетия, прошедшие с момента их написания, эти книги и по сей день сохраняют актуальность, остаются востребованными студентами вузов, инженерами и научно-техническими работниками. Предлагаемая читателю ранее не публиковавшаяся книга А. А. Свешникова, на наш взгляд, является ценным и полезным дополнением уже известного ранее научно-педагогического наследия ученого.

Наиболее широко известным из этого наследия является задачник [1*], написанный при непосредственном участии, и под общей редакцией А. А. Свешникова¹. На русском языке задачник выдержал три издания общим тиражом более 150 тысяч экземпляров, а затем был переведен на английский, немецкий, польский и чешский языки. Задачник уникален по широте охвата материала и обладает ярко выраженной прикладной направленностью. В решении любой вероятностной прикладной задачи можно выделить два этапа: формулировка конкретной исследовательской задачи как математической и собственно решение последней. В большинстве известных сборников задач основное внимание падает на второй этап. Нисколько не умаляя его важности, авторы [1*] вместе с тем ставят и успешно решают еще одну задачу: обучение способам построения математических вероятностных моделей реальных явлений. Такая направленность, подкрепленная высоким профессионализмом редактора и всего

¹Цифры со звездочкой указывают номера источников из дополнительного списка литературы в конце предисловия, а без звездочки — из основного списка в конце книги.

авторского коллектива, тщательный отбор материала, продуманность и доступность изложения сделали задачник весьма популярным среди основного круга читателей подобного рода литературы: преподавателей и студентов вузов, инженеров и научных работников.

Сходные методические принципы положены в основу наиболее известной монографии А. А. Свешникова «Прикладные методы теории случайных функций» [30]. Характеризующаяся высоким теоретическим уровнем, многочисленными техническими приложениями, доступная по форме изложения для читателей, владеющих лишь базовыми знаниями в объеме вузовского курса теории вероятностей и математического анализа, книга эта получила широкую известность и распространение в нашей стране. Впоследствии она несколько раз переиздавалась и за границей (в Англии, Польше, Германии). Было два русских издания, в том числе массовым тиражом в престижной серии «Физико-математическая библиотека инженера».

Более специальным изданием является монография «Вероятностные методы в прикладной теории гироскопов» [34], написанная в соавторстве с крупнейшим специалистом в области гироскопии С. С. Ривкиным. Книга посвящена систематическому изучению стохастических задач, возникающих в прикладной гироскопии. Она является весьма обстоятельным и тщательно проработанным прикладным руководством по важному конкретному разделу стохастической механики. Как отмечается в современных изданиях по стохастической механике [2*], даже сейчас, спустя более чем тридцать лет, опубликованы считанные единицы книг такого рода.

Все книги А. А. Свешникова отличает один и тот же общий для всех них авторский стиль. Он характеризуется высочайшим профессионализмом, ясностью, четкостью и доступностью изложения, нацеленностью на конкретный результат. Широкая математическая эрудиция позволяла Араму Арутюновичу включать в окончательный текст порой достаточно сложные математические конструкции, однако он всегда это делал не ради красоты математических формул или удобства изложения, а с целью доведения решения до конкретных числовых или качественных результатов. В книгах ученого нашли отражение его собственные плодотворные научные изыскания и богатый педагогический опыт.

Можно выделить три крупных этапа научно-педагогической деятельности А. А. Свешникова:

1) Работа в Артиллерийском научно-исследовательском морском институте (1939–1950).

2) Преподавание в Военно-морской академии им. А. Н. Крылова (1950–1969).

3) Работа профессором кафедры вычислительной математики Ленинградского политехнического института им. М. И. Калинина (ныне кафедра прикладной математики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета), охватывающая период с 1969 по 1979 год.

Первые два этапа характеризуются тем, что А. А. Свешников, в основном, работал в области оборонной техники, и поэтому большая часть полученных им результатов в открытой печати не публиковалась. Фундаментальные труды ученого стали достоянием гласности значительно позднее. Наиболее ценные научные результаты, считающиеся в настоящее время классическими и общепринятыми, относятся к теории стрельбы [3*], а также к теории качки корабля на нерегулярном морском волнении [4*].

Предлагаемое пособие по теории марковских процессов создавалось в заключительный период педагогической деятельности А. А. Свешникова, относящейся к политехническому институту. Круг его научных интересов и научной деятельности на кафедре был весьма широк, однако неизменно одним из основных, приоритетных направлений оставались приложения теории марковских процессов. Основное внимание уделялось двум классам задач: 1) задачам о невыходе и достижении границы; 2) существенно нелинейным задачам.

По первому направлению Свешниковым был получен ряд важных прикладных результатов, часть которых была включена в настоящее пособие. Второе направление чисто математически является более сложным и намечено в пособии лишь конспективно. Арам Арутюнович предложил весьма перспективный метод исследования существенно нелинейных систем, основанный на переходе к уравнению Пугачева, которое с помощью особых приемов преобразовывалось им к форме сингулярного интегродифференциального уравнения [5*]. Впоследствии этим методом удалось аналитически решить ряд практически интересных стохастических задач.

Последние годы жизни профессор Свешников интенсивно работал над литературным оформлением своего богатого научно-педагогического наследия. Настоящая книга оказалась последним из написанных им больших текстов. По мысли ученого она должна была стать, с одной стороны, логическим продолжением

и развитием монографии [30], а с другой — завершением серии пособий [31]–[33], изданных в издательстве политехнического института. Книга является расширенной версией курса, который в качестве заключительной части завершал большой курс теории случайных функций, читавшийся на физико-механическом факультете для студентов специальности «Прикладная математика».

Ученый успел написать полный рукописный текст своей последней книги, отметить в рукописи ряд необходимых доработок и исправлений, однако ему не хватило времени на переписку и окончательное редактирование текста. Рукопись была передана одному из ближайших учеников А. Н. Незлобину, который продолжал читать данный курс после А. А. Свешникова в течение почти четверти века. После смерти А. Н. Незлобина, последовавшей в 2005 году, было принято решение издать, наконец, эту нужную и полезную книгу. Научное редактирование и подготовка текста были возложены на автора этих строк.

При написании своей книги А. А. Свешников ставил перед собой две, в чем-то взаимоисключающих задачи: 1) дать систематическое изложение современного ему состояния прикладной теории марковских процессов; 2) изложить материал в форме, доступной для студентов старших курсов, инженеров и исследователей—прикладников. На наш взгляд автору в значительной степени удалось совместно решить эти две чрезвычайно сложные задачи. К несомненным достоинствам получившейся книги следует отнести тщательно подобранные и тесно увязанные с текстом задачи, которые позволяют читателю активно изучать излагаемые методы.

Материал посвященный теории марковских процессов, впервые появился во втором издании монографии [30]. Публикуемая сейчас новая книга А. А. Свешникова существенно отличается от соответствующей главы этой монографии. Прежде всего значительно увеличен ее объем (в 4–5 раз). Добавлены разделы, посвященные стохастическому интегрированию и стохастическим дифференциальным уравнениям. Все изложение последовательно ведется на основе интеграла Стратоновича (в книге [30] внимание на этом вопросе не акцентировалось, но по умолчанию использовался интеграл Ито). Подробно обсуждается решение уравнения Колмогорова с разрывными и негладкими коэффициентами, а также случай вырожденной матрицы диффузии. Существенно дополнен раздел, посвященный теории выбросов марковских процессов.

Особо следует отметить дополнительные разделы, посвященные теории условных марковских процессов. А. А. Свешников имел свой, оригинальный, взгляд на вопросы применения этой теории к решению прикладных задач. Этим вопросам была посвящена специальная статья [6*], которая писалась параллельно с данной книгой. Свешников считал, что широко применяемый на практике метод Калмана может быть объяснен наиболее физически понятно и наглядно именно на основе теории условных процессов Маркова. Это, по его мысли, открывает более широкие перспективы применения данного метода, чем формальное использование окончательных формул, предложенных Калманом (или Калманом-Бьюси).

Материал настоящей книги представлен в восемнадцати параграфах, разделенных на шесть глав. Первая глава (параграфы 1–3) является вводной и содержит определение понятия случайной функции, а также сводку основных формул корреляционной и спектральной теории. Подробно и наглядно поясняется разница между наиболее употребительными определениями случайной функции в широком смысле (по Е. Е. Слуцкому) и в узком смысле (по А. Н. Колмогорову). Во второй главе (параграфы 4–6) значительное внимание уделено прикладным вопросам теории стохастических интегралов и стохастических дифференциальных уравнений. На конкретных примерах поясняется разница между определениями Ито и Стратоновича и обосновывается предпочтительность второго из них. В третьей главе (параграфы 7–9) приводится классический вывод уравнений Колмогорова, а также правила их составления по стохастическим уравнениям движения динамической системы.

Четвертая глава (параграфы 10–13) является основной и занимает в книге наибольший объем. В ней содержится изложение методов решения уравнения Колмогорова при отсутствии ограничений на фазовые координаты системы. Автор акцентирует внимание на наиболее трудных задачах, не получивших широкого освещения в научной литературе: решении уравнения Колмогорова для существенно нелинейных систем, а также на решении уравнения Колмогорова с вырожденной характеристической формой (задача Фикеры). Пятая глава (параграфы 14–16) посвящена задачам о достижении границы и невыходе марковского процесса из заданной ограниченной области. Эти разделы в значительной их части основываются на собственных работах автора и содержат оригинальный материал. Изложение, как и во всей книге, не претендует на максимальную математическую

строгость, но отличается большой физической наглядностью и доступностью. Наконец, последняя, шестая глава, включающая параграфы 17–18, содержит изложение теории условных марковских процессов и решение на ее основе ряда прикладных задач теории оптимальной фильтрации.

Из всего сказанного следует, что предлагаемая книга будет полезна широкому кругу читателей и как учебное пособие, и как прикладное руководство для инженера или исследователя. В книге дается доступное, но достаточно строгое изложение теории марковских процессов, имеющее прикладную направленность и рассчитанное на минимально возможный для данного класса задач уровень предварительной математической подготовки читателя.

Мы надеемся, что книга окажется столь же полезной широкому читателю, как и преподавателям, студентам кафедры прикладной математики СПбГПУ, где она вот уже более четверти века постоянно используется в учебном процессе. Отзывы и пожелания просим направлять на кафедру по адресу: 195251, Санкт-Петербург, Политехническая, 29, СПбГПУ (e-mail: referent@amd.stu.neva.ru).

О. И. Заяц

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Предлагаемое руководство по теории марковских процессов продолжает ранее выпущенную в свет книгу автора *«Прикладные методы теории случайных функций»* [30] и рассчитано на тот же круг читателей: инженерно-технических и научных работников, а также аспирантов и студентов старших курсов высших технических учебных заведений.

Книга не ставит своей целью дать законченное и строгое изложение теории марковских процессов. Она призвана помочь широкому кругу специалистов, использующих теорию марковских процессов в своих конкретных исследованиях, овладеть прикладными методами этой теории, технологией решения практических задач.

По математической теории марковских процессов опубликовано немало хороших книг, написанных математиками для математиков. К сожалению, многие содержательные и полезные работы, посвященные процессам Маркова, часто остаются недоступными широкому кругу инженеров и исследователей, заинтересованных в решении соответствующих прикладных задач, так как работы эти рассчитаны на иной, более высокий уровень математической подготовки читателей. Именно такому, менее искушенному в математике читателю, прежде всего и адресована наша книга. Используемый в ней математический аппарат существенно ограничен рамками стандартных курсов математического анализа и теории вероятностей, читаемых в высших технических учебных заведениях.

Целевая направленность книги определила как отбор материала, так и принятый в ней уровень строгости изложения. Некоторые вопросы, интересные с точки зрения развития общей теории, красивые формулы и поучительные доказательства нам пришлось оставить в стороне. По возможности исключен излишний математический формализм, а строгость изложения

поддерживается лишь на том уровне, без которого невозможно профессионально применять теорию к решению конкретных прикладных задач.

В подобном пособии важное значение приобретают примеры (общим числом 25), подобранные так, чтобы по возможности охватить самые разнообразные технические приложения. Большая их часть ориентирована на задачи стохастической механики, теории надежности, теории автоматического управления. Чтобы сделать содержание примеров интересным более широкому кругу читателей, они, как правило, не формулируются в терминах какой-либо узкой задачи из определенного раздела техники. Формулировки большинства примеров носят достаточно общий характер, а их прикладное значение определяется не физическим, а вероятностным содержанием задачи и методом ее решения.

Книга представляет собой переработанный вариант курса лекций, который в течение ряда лет автор читал на физико-механическом факультете Ленинградского политехнического института (ЛПИ) для студентов специальности «Прикладная математика». Данный курс являлся заключительной, третьей частью большого курса теории вероятностей и случайных функций. Первую его часть составил курс теории вероятностей, изданный в ЛПИ тремя выпусками [31, 32, 33], а вторая была посвящена общей теории случайных функций и включала корреляционную и спектральную теорию, теорию выбросов, теорию оптимальной фильтрации, а также статистику случайных функций [30].

Предлагаемая вниманию читателя книга не предполагает детальной проработки читателем первых двух из упомянутых выше курсов. Необходимы лишь базовые знания по теории вероятностей, которые можно почерпнуть как из работ автора [31, 32, 33], так и из других источников. Здесь можно рекомендовать хорошо известный и многократно переиздававшийся курс Б. В. Гнеденко [9], а также книгу Ю. В. Прохорова и Ю. А. Розанова [26]. Основы корреляционной теории случайных функций читателю считаются известными. Несмотря на это, далее во введении приводится общая сводка соответствующих формул. Это сделано для того, чтобы облегчить чтение дальнейшего текста, а также избежать от необходимости уславливаться в обозначениях при изложении основного материала книги. Для углубления знаний по корреляционной теории можно рекомендовать книгу автора [30], а также более подробный курс В. С. Пугачева [28], содержащий и необходимое вероятностное введение.

Для сокращения объема книги автор счел целесообразным исключить из нее изложение общих вопросов теории вероятностей и не приводить сводку относящихся сюда основных формул. Эти сведения читателю предполагаются известными, а их знание для лиц, приступающих к изучению теории марковских процессов, является чем-то само собой разумеющимся. При необходимости достаточно подробную сводку основных вероятностных формул и обозначений можно найти в первой главе книги [30].

В книге отсутствует подробная библиография по приложениям теории марковских процессов. Список литературы включает только те источники, обращение к которым поможет получить более детальную информацию по вопросам, которые изложены в книге недостаточно подробно. Ссылки на оригинальные статьи сведены к минимуму и сохранены только с целью разъяснения формул и числовых результатов, приводимых без вывода. Литература по прикладной теории марковских процессов весьма обширна и ежегодно пополняется большим числом новых работ. Составление их обзора было бы нужным и полезным делом, однако это не входило в цели данной книги.

Последние десятилетия характеризуются появлением многочисленных журнальных публикаций по частным задачам анализа стохастических систем методами теории марковских процессов. Ряд работ этого направления принадлежит и автору настоящей книги. Тем не менее существует необходимость более последовательного и систематического изложения теории процессов Маркова, ориентированного на приложения. Несмотря на длительную историю применения и солидную теоретическую базу, прикладные руководства, пригодные для первоначального изучения предмета, весьма немногочисленны и, как правило, ограничиваются лишь каким-либо одним узким классом технических приложений. Между тем в прикладной теории марковских процессов разработаны достаточно эффективные и мощные общие методы, знание которых способно существенно облегчить решение инженерных и исследовательских задач независимо от конкретного физического содержания последних.

По своим свойствам марковские процессы являются лишь одним специальным и частным видом случайных процессов. Несмотря на это, с прикладной точки зрения они занимают особо важное положение среди других процессов. Во-первых, для исследования марковских процессов хорошо разработан математический аппарат, позволяющий решать самые разнообразные содержательные физические задачи. Во-вторых, многие реаль-

ные физические процессы с приемлемой степенью точности могут быть аппроксимированы при помощи марковских процессов.

Известно, что линейные стохастические системы сравнительно просто исследуются методами корреляционной теории (см., например, [30]). Метод, основанный на теории марковских процессов, является основным аналитическим методом исследования нелинейных стохастических систем. Существенно, что при этом не приходится накладывать никаких ограничений на свойства нелинейностей, входящих в уравнения движения системы, которые можно брать в их истинном виде, вытекающем из содержания решаемой задачи. Это позволяет, например, изучать гироскопические системы с негладкими, разрывными и даже гистерезисными нелинейностями [34].

Другой важный класс задач, решаемых путем моделирования реальных процессов процессами Маркова, составляют задачи с ограничениями на фазовые координаты системы. Анализ процессов, развивающихся в заданной ограниченной области фазового пространства оказывается весьма сложной задачей даже для линейных систем, не говоря уже о нелинейных. Применение марковских моделей является едва ли не единственным математически обоснованным методом решения подобных задач. При этом можно учесть все разнообразие вариантов поведения траектории процесса на границе, включая поглощающую и отражающую границу, остановку на границе, скачкообразный уход с границы и т. п. [13]. Эти задачи представляют существенный интерес при исследовании надежности стохастических систем. Если процесс, протекающий в стохастической системе, является марковским, то закон распределения фазовых координат такой системы удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных, известному как *уравнение Колмогорова*. Это позволяет свести исходную стохастическую задачу к решению некоторой краевой задачи для уравнения Колмогорова, то есть к задаче математической физики. Хотя решение последней и может представить определенные математические трудности, этот метод не встречает принципиальных, идейных затруднений. К сожалению, многочисленные попытки получить уравнение, аналогичное уравнению Колмогорова, для процессов, не обладающих марковским свойством, до настоящего времени успехом не увенчались. Все это делает теорию процессов Маркова уникальным аналитическим инструментом исследования стохастических систем и привлекает к ней повышенное внимание исследователей.

Уравнение Колмогорова обладает рядом особенностей, от-

личающих его от других уравнений математической физики. Во-первых, в отличие от наиболее известных типовых уравнений (уравнения теплопроводности, уравнения Лапласа, волнового уравнения и т. п.) его коэффициенты, вообще говоря, не постоянны, а являются произвольными нелинейными функциями, конкретный вид которых зависит от нелинейностей, входящих в уравнение движения системы. Известные типовые уравнения являются очень частным случаем уравнения Колмогорова и соответствуют простейшим марковским процессам (например, уравнение теплопроводности описывает процесс броуновского движения, подробно рассматриваемый далее).

Во-вторых, в многомерных задачах пространственные переменные в уравнении Колмогорова не разделяются. Их разделение означало бы, что система распадается на ряд не связанных друг с другом подсистем, каждую из которых можно было бы исследовать независимо от других. В результате многие стандартные методы решения уравнений математической физики (в частности метод Фурье) применительно к уравнению Колмогорова оказываются неэффективными. Это является одной из причин, по которым для многомерных систем получено сравнительно мало точных решений этого уравнения.

В-третьих, сам тип уравнения Колмогорова во многих практически значимых задачах является неклассическим. По общей классификации уравнение Колмогорова относится к классу дифференциальных уравнений второго порядка с неотрицательной характеристической формой [24]. Такое уравнение в зависимости от значений своих коэффициентов при старших производных может относиться либо к параболическому, либо к нестандартному ультрапараболическому типу. В последнем случае принципиально меняется сама постановка краевых задач: краевые условия приходится ставить не на всей границе, а лишь на регулярной ее части (так называемая *задача Фикеры*).

Таким образом, уравнение Колмогорова во многих отношениях нетипично для уравнений математической физики. То же самое можно сказать и о других уравнениях, рассматриваемых в прикладной теории марковских процессов. Так, например, уравнение Пугачева для характеристической функции марковского процесса является интегро-дифференциальным, а уравнение Понтрягина для среднего времени достижения границы марковским процессом — неоднородным и включает постоянный свободный член. Все это требует особого рассмотрения данного класса задач и их тщательного изучения. Решению этой пробле-

мы и посвящена данная книга.

Далее во введении рассматривается ряд вспомогательных вопросов, предваряющих основной материал пособия. К их числу относится определение понятия случайной функции, а также сводка основных формул и обозначений, используемых в дальнейшем изложении.

§2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОНЯТИЯ СЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ

Марковский процесс представляет собой определенную разновидность случайного процесса, то есть случайной функции времени. Поэтому вначале необходимо определить понятие *случайной функции*. Наиболее строгим и общим ее определением является аксиоматическое. В настоящее время общепринятой является аксиоматика теории вероятностей, предложенная в 1933 году А. Н. Колмогоровым. В рамках этого подхода понятие случайного события, случайной величины и случайной функции вводятся по единой общей схеме, которая естественным образом обобщает существовавшие до этого более элементарные подходы к определению вероятностных понятий [31, 9].

Аксиоматическое определение формулируется на языке теории множеств. Напомним некоторые основные обозначения этой теории, используемые далее. Если элемент x входит в множество X , то пишут $x \in X$. *Объединением* двух множеств X и Y называют множество, включающее элементы, принадлежащие хотя бы одному из них, а *пересечением* — множество, составленное из общих элементов обоих множеств. Для обозначения объединения X и Y используется запись $X \cup Y$, а их пересечения — $X \cap Y$. *Дополнением множества X до множества Y* называют множество, образованное теми элементами Y , которые не принадлежат X , обозначаемое $Y \setminus X$. Множество, не содержащее ни одного элемента называется *пустым* и обозначается символом $\emptyset$.

Рассмотрим произвольное множество Ω , составленное из элементов $\omega \in \Omega$. Элементы ω назовем *элементарными событиями*, а их совокупность Ω — *пространством элементарных событий*. Далее рассмотрим непустое множество $\mathfrak{A}$, составленное из всевозможных подмножеств A множества Ω . Множества $A \subset \mathfrak{A}$, формируемые произвольным образом из элементов $\omega \in \Omega$, будем трактовать как различные случайные события, а совокупность таких множеств $\mathfrak{A}$ — как полный набор всевозможных мыслимых случайных событий, которые допуска-

ет заданное пространство Ω .

Потребуем, чтобы множество $\mathfrak{A}$ удовлетворяло следующим условиям: 1) $\Omega \in \mathfrak{A}$, то есть все пространство Ω входит в качестве одного из элементов в состав $\mathfrak{A}$; 2) объединение счетного числа множеств $A_i \in \mathfrak{A}$, определяемое равенством

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad (2.1)$$

само является элементом $\mathfrak{A}$, то есть $A \in \mathfrak{A}$; 3) Дополнение $\Omega \setminus A$ любого множества $A \in \mathfrak{A}$ до всего пространства Ω принадлежит $\mathfrak{A}$. Последнее означает, что элементарные события ω , остающиеся в Ω после выделения любого события A из $\mathfrak{A}$ в совокупности образуют некоторое новое событие из $\mathfrak{A}$ (его называют противоположным A и обозначают $\bar{A}$). Множество $\mathfrak{A}$, обладающее указанными свойствами, называется *сигма-алгеброй на Ω* .

При такой трактовке случайных событий суммирование и перемножение событий сводится к выполнению операций объединения и пересечения множеств, характеризующих эти события. При этом благодаря свойствам сигма-алгебры $\mathfrak{A}$ результат суммирования или перемножения любого конечного или бесконечного числа событий из $\mathfrak{A}$ также будет принадлежать $\mathfrak{A}$.

Теперь введем на $\mathfrak{A}$ вероятностную меру P . Допустим, что все элементы $A \in \mathfrak{A}$ являются измеримыми множествами, то есть каждому из них можно поставить в соответствие неотрицательное число $P(A)$, удовлетворяющее условиям:

$$1. \quad P(\Omega) = 1.$$

$$2. \quad P(\emptyset) = 0.$$

$$3. \quad \text{Для любой непересекающейся системы множеств } \{A_i\}_{i=1}^{\infty}, \text{ таких, что}$$

$$A_i \in \mathfrak{A}; \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad (2.2)$$

выполняется равенство

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \quad (2.3)$$

Мера $P(A)$ является функцией множества A и служит обобщением таких понятий, как длина отрезка, площадь плоской фигуры, объем тела и т. п. При соблюдении перечисленных условий

мера P называется *нормированной и аддитивной*. Как функция множества она отображает всю сигма-алгебру $\mathfrak{A}$ на единичный отрезок $[0, 1]$.

Тройка $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ называется *вероятностным пространством*. Из его построения автоматически следуют основные формулы классической теории вероятностей в схеме случайных событий. Пользуясь понятием вероятностного пространства не сложно перейти к рассмотрению случайных величин и случайных функций.

Рассмотрим некоторую числовую величину X , являющуюся функцией элементарного события ω

$$X = \varphi(\omega) \quad (2.4)$$

и определенную при всех $\omega \in \Omega$. Если функция φ измерима относительно меры P , то числовую функцию $X = \varphi(\omega)$ называют *случайной величиной*.

Понятие измеримой функции детально обсуждается в курсах функционального анализа [16]. В данном случае это требование сводится к следующему. Рассмотрим множество элементарных событий, для которых X оказывается меньше заданного числа x .

$$A_x = \{\omega : X(\omega) < x\}. \quad (2.5)$$

Для измеримой функции φ множество A_x принадлежит сигма-алгебре $\mathfrak{A}$ и является P -измеримым при любом $x \in (-\infty, \infty)$.

При таком определении случайной величины с ней можно связать вероятностную меру, так как при любом x такой мерой обладает множество $A_x \in \mathfrak{A}$. Обычно вводят в рассмотрение функцию распределения X , определяемую равенством

$$F(x) = P(A_x), \quad (-\infty < x < \infty). \quad (2.6)$$

В элементарной теории вероятностей не прибегают к приведенным выше теоретико-множественным построениям, а равенство (2.6) сразу записывают в виде

$$F(x) = \mathcal{P}\{X < x\}, \quad (2.7)$$

где $\mathcal{P}$ — символ вероятности случайного события. При этом случайная величина считается заданной, если задана ее функция распределения F .

Аналогично случайной величине может быть введено понятие *случайной функции* $X(t)$ некоторого неслучайного аргумента t .

Для этого достаточно предположить, что функция φ в определении (2.4) зависит от t как от параметра, то есть положить

$$X(t) = \varphi(\omega, t) \quad (2.8)$$

и по-прежнему считать, что эта функция измерима относительно ω при любом t . При соблюдении этого условия множество

$$A_{x,t} = \{\omega : X(t) < x\} \quad (2.9)$$

принадлежит сигма-алгебре $\mathfrak{A}$. Отличие от случайной величины заключается только в том, что сами элементы сигма-алгебры будут зависеть от t , так как в формулу (2.8) явно входит этот параметр. Определенная описанным образом случайная величина, зависящая от параметра t , называется случайной функцией t .

Таким образом, введение понятия случайной функции не требует никаких принципиально новых подходов по сравнению с теми, которые использовались при определении случайных величин. При решении прикладных задач функция $\varphi(\omega, t)$, фигурирующая в определении (2.8), обычно в явном виде не определяется и при операциях со случайными функциями никак не используется. Вместо этого применяют традиционно употребляемую в вероятностных задачах функцию распределения

$$F(x, t) = P(A_{x,t}). \quad (2.10)$$

Более того, часто не выписывают в явном виде аргумент ω подобно тому, как это сделано в левой части (2.8). Аргумент случайной функции иногда указывают и в индексе, то есть пишут X_t вместо $X(t)$, однако такое обозначение обычно используется в математической литературе, и мы его не применяем. Для обозначения случайных функций в нашем пособии по возможности будут использоваться большие буквы из конца латинского алфавита, например $X(t), Y(t), Z(t), U(t)$.

Из определения случайной функции следует, что ее ординаты при фиксированных значениях аргумента образуют систему случайных величин, характеризуемую некоторым совместным законом распределения. Этот закон известен для любого набора $t_1, \dots, t_n$ значений аргумента t при произвольном $n \geq 1$. Иногда указанное свойство случайных функций кладется в основу их определения. Случайная функция считается заданной, если задана вся иерархия ее многомерных законов распределения при всех $n \geq 1$ и произвольных значениях t_i . Такое определение

случайной функции было предложено в начале двадцатого века Е. Е. Слуцким [30].

Некоторые авторы называют определение случайной функции по Колмогорову ее *определением в узком*, а по Слуцкому — *в широком смысле* слова [7]. Второе определение привлекает своей элементарностью и, в принципе, достаточно в тех случаях, когда рассматриваются характеристики случайной функции $X(t)$ только на конечном множестве значений t . Поэтому, например, именно второе определение обычно используется в рамках корреляционной теории случайных функций [30], в которой достаточно знать многомерные законы не выше, чем второго порядка.

Вместе с тем, существенный недостаток определения в широком смысле состоит в том, что оно не дает возможность рассматривать случайную функцию в целом, то есть совокупность всех ее значений. Затруднительна строгая постановка вопросов о таких функциональных свойствах функций $X(t)$, как непрерывность, дифференцируемость и т. п. Непосредственно нельзя ставить вопрос о вероятности события, заключающегося в том, что при всех t из заданного интервала функция $X(t)$ будет находиться в указанных пределах. Задачи, подобные перечисленным, встречаются в теории марковских процессов, поэтому мы и начали с более строгого определения.

Недостатки второго определения иллюстрирует следующий простой пример. Рассмотрим нормальную случайную функцию $X(t)$, имеющую тождественно равное нулю математическое ожидание, а также функцию $Y(t) = -X(t)$. Очевидно, обе эти функции имеют одну и ту же иерархию многомерных законов распределения. Но они не равняются друг другу. Различить их удастся только с помощью первого определения. Вместе с тем при корреляционном или спектральном анализе различать такие функции нет необходимости, если только мы не рассматриваем их взаимные характеристики. Для решения большинства задач, рассматриваемых в данном пособии, достаточно знать конечномерные законы распределения, причем (в силу марковского свойства) не выше второго порядка включительно.

§3. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ФОРМУЛЫ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Аргумент случайной функции t может изменяться или непрерывно в некотором интервале или может принимать только определенные дискретные значения $t_1, t_2, t_3, \dots$, образующие счетное множество. В первом случае говорят о «непрерывном времени» и функцию $X(t)$ называют *случайным процессом*. Во втором случае говорят, что «время» дискретно, а случайную функцию $X(t)$ называют *случайной последовательностью*.

Независимо от непрерывности или дискретности аргумента случайной функции, ее ординаты могут быть случайными величинами непрерывного или дискретного типа. В первом случае в качестве характеристик многомерных законов распределения ординат случайной функции $X(t)$ можно использовать или многомерные функции распределения

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \\ = P\{X(t_1) < x_1, \dots, X(t_n) < x_n\}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

или многомерные плотности вероятности

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \\ = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Во втором случае многомерная функция распределения (3.1) по-прежнему может быть использована в качестве определяющей характеристики случайной функции, однако эта функция уже не будет непрерывной по аргументам x_j и, следовательно, понятие плотности вероятности f , определяемое формулой (3.2) можно сохранить только если наряду с обычными функциями ввести в рассмотрение дельта-функцию, принадлежащую к классу обобщенных функций (см. [32, 9]). Таким образом, понятие плотности вероятности можно использовать для характеристики ординат случайной функции во всех случаях, независимо от того, являются эти ординаты непрерывными или дискретными случайными величинами. В данном пособии ординаты случайной функции всегда считаются непрерывными величинами, за исключением тех случаев, которые будут оговариваться особо. Согласно данному выше определению, будем считать случайную функцию

$X(t)$ заданной, если задана вся бесконечная совокупность многомерных плотностей вероятности $f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ (задан способ вычисления многомерной плотности распределения при любом числе n ординат случайной функции).

Характеризовать случайную функцию всей бесконечной совокупностью многомерных законов распределения при решении прикладных задач обычно является слишком сложным. Поэтому в приложениях обычно или ограничиваются приближенной характеристикой случайных функций с помощью законов не выше заданного фиксированного порядка, или рассматривают случайные функции специального вида, для точной характеристики которых достаточно указать только несколько младших многомерных законов распределения.

Наибольшее распространение получило приближенное рассмотрение случайных функций, называемое *корреляционной теорией*. В этом случае используются только первые два момента ординат случайной функции — *математическое ожидание* $\bar{x}(t)$ и *корреляционная функция* $K(t_1, t_2)$, определяемые равенствами

$$\begin{aligned}\bar{x}(t) &= M[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x; t) dx, \\ K(t_1, t_2) &= M\{[X(t_1) - \bar{x}(t_1)][X(t_2) - \bar{x}(t_2)]\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - \bar{x}(t_1)][x_2 - \bar{x}(t_2)] f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Если рассматривать только линейные стохастические системы (то есть системы, определяемые линейными детерминированными дифференциальными уравнениями со случайной правой частью), то корреляционная теория обладает свойством замкнутости в том смысле, что, зная математическое ожидание и корреляционную функцию функции $X(t)$, поступающей на вход системы, можно определить математическое ожидание и корреляционную функцию случайной функции $Y(t)$, являющейся выходом системы, без детального знания законов распределения ординат случайной функции $X(t)$.

Действительно, если

$$Y(t) = LX(t),\tag{3.4}$$

где L — линейный оператор, характеризующий рассматриваемую динамическую систему (Рис. 3.1), то

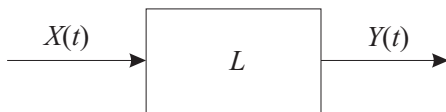


Рис. 3.1. Схема линейной стохастической системы

$$\bar{y}(t) = MY(t) = L\bar{x}(t), \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} K(t_1, t_2) &= M\{[Y(t_1) - \bar{y}(t_1)][Y(t_2) - \bar{y}(t_2)]\} = \\ &= L_{t_1}^0 L_{t_2}^0 K_x(t_1, t_2), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где L^0 обозначает однородную часть линейного оператора L , а индексы t_1 и t_2 при L^0 показывают, что в первом случае корреляционная функция $K_x(t_1, t_2)$ должна рассматриваться как функция первого аргумента, а во втором случае — как функция второго аргумента.

Многие операторы, результат применения которых к случайной функции представляет интерес в приложениях, предусматривают в своих определениях переход к пределу. К таким операторам относятся, например, оператор дифференцирования, оператор интегрирования и т. п. Понятие предела, вводимое в обычном анализе, не может быть непосредственно применено к случайным функциям и случайным величинам, так как при изучении последовательности случайных объектов никогда нельзя указать номер объекта, начиная с которого его отклонение от предела «будет меньше любого наперед заданного числа ε » — всегда имеется вероятность того, что это ε будет превзойдено. Поэтому понятию предела в теории случайных функций должен быть придан другой, более общий, смысл.

Обычно под пределом в теории случайных функций понимается *предел в смысле среднего квадратического*, который обозначается l.i.m. (limit in mean) и определяется следующим образом: случайная величина X является пределом последовательности случайных величин X_n при $n \rightarrow \infty$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M[(X_n - X)^2] = 0. \quad (3.7)$$

В случае детерминированных (то есть неслучайных) величин понятие предела в среднем квадратическом совпадает с обычным понятием предела, используемом в анализе.

Несмотря на обилие приложений, в которых методы корреляционной теории позволяют получать на практике удовлетворительные результаты, эта теория во многих случаях является недостаточной. Во-первых, методы корреляционной теории не позволяют исследовать нелинейные системы, т. е. такие системы, у которых входная функция $X(t)$ и выходная $Y(t)$ связаны нелинейными уравнениями. Во-вторых, имеется целый ряд и других задач, не связанных с нелинейностью системы, выходящих за рамки корреляционной теории. К таким задачам относятся, например, задачи о выбросах случайной функции за некоторый уровень. Даже нахождение средних величин, характеризующих выбросы, таких, например, как среднее время выброса, среднее число выбросов в единицу времени и т. п., уже требует знания двумерного закона распределения ординат случайной функции (а не только моментов ординат процесса).

Еще более трудной является задача нахождения вероятности пребывания ординаты случайной функции в заданной области в течение фиксированного интервала времени — эта задача не может быть решена просто даже в том случае, если известны все многомерные законы распределения и для получения простого ее решения приходится делать добавочные предположения о свойствах исследуемой случайной функции.

Поэтому, несмотря на существенные успехи, которые были достигнуты в приложениях путем использования корреляционных методов, в последние десятилетия начал усиленно развиваться новый раздел прикладной теории случайных функций, основанный на более полном вероятностном описании случайных функций, чем это делается в корреляционной теории. При этом пришлось отказаться от рассмотрения функций самого общего вида и ограничиться исследованием только случайных функций особой структуры. В частности было показано, что большое число задач, выходящих за рамки корреляционной теории и не поддающихся достаточно простому решению в общем случае, решаются сравнительно легко, если предположить, что рассматриваемый процесс $X(t)$ является марковским.

Как известно [30], случайный процесс $X(t)$ называется марковским, если закон распределения его ординаты в момент времени t_n , вычисленный при условии, что значения ординат процесса в предыдущие моменты времени $t_1, \dots, t_{n-1}$ ($t_1 < \dots < t_n$) известны, зависит только от значения ординаты $X(t_{n-1})$ в ближайший к t_n предшествующий момент времени и не зависит от значений других ординат.

Считая условно момент времени t_{n-1} «настоящим», момент времени t_n — «будущим», а все моменты $t_1, t_2, \dots, t_{n-2}$ — «прошедшими моментами времени», можно определить марковские процессы как такие процессы, для которых закон распределения ординаты процесса в будущие моменты времени полностью определяется значением ординаты процесса в настоящий момент времени и не зависит от прошлого процесса. Поэтому марковские процессы иногда называют «процессами без памяти». Если изобразить на рисунке (Рис. 3.2) траекторию процесса сплошной линией и считать известной ординату процесса в точке t_{n-1} , то для определения закона распределения ординаты процесса в точке t_n безразличен вид реализации процесса до момента времени t_{n-1} : реализация процесса может иметь вид, изображенный на рисунке жирной линией или вид одной из пунктирных кривых рисунка.

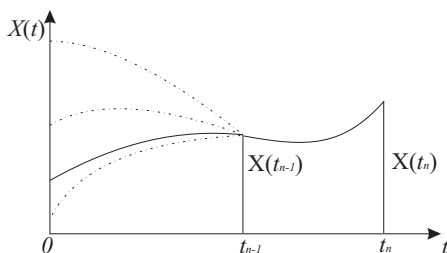


Рис. 3.2. К определению марковского процесса

Сформулируем данное выше определение марковского процесса математически. Рассмотрим возрастающую последовательность моментов времени

$$t_1 < t_2 < t_3 \dots < t_{n-2} < t_{n-1} < t_n$$

и будем обозначать ординаты процесса в эти моменты времени через X_j ($j = 1, 2, \dots, n$). Рассмотрим условную плотность вероятности $f(x_n | x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ ординаты процесса X_n при фиксированных значениях остальных ординат X_j ($j < n$). Если процесс марковский, то справедливо равенство

$$f(x_n | x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = f(x_n | x_{n-1}), \quad (3.8)$$

которое можно принять за определение марковского процесса.

Из равенства (3.8) следует, что любой многомерный закон распределения для марковского случайного процесса может быть выражен через двумерный закон распределения его ординат. Действительно, применяя равенство (3.8) последовательно n раз и используя формулу умножения вероятностей, получим, что многомерная плотность вероятности $f(x_n|x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} f(x_n|x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) &= f(x_n|x_{n-1})f(x_1, \dots, x_{n-1}) = \\ &= f(x_n|x_{n-1})f(x_{n-1}|x_{n-2}) \dots f(x_2|x_1)f(x_1), \end{aligned} \quad (3.9)$$

то есть справедливо выражение

$$f(x_n, x_2, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^{n-1} f(x_{j+1}|x_j)f(x_1). \quad (3.10)$$

С другой стороны очевидно, что все условные плотности вероятности $f(x_{j+1}|x_j)$ и одномерная плотность вероятности $f(x_1)$ могут быть выражены через двумерные плотности вероятности $f(x_{j+1}, x_j)$ (см. [33, 9]) по формулам:

$$\begin{aligned} f(x_{j+1}|x_j) &= \frac{f(x_j, x_{j+1})}{f(x_j)}, \\ f(x_j) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x_j, x_{j+1}) dx_{j+1}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Таким образом, характерной особенностью марковского процесса является то, что вся иерархия его многомерных законов распределения (а, следовательно, и все свойства этого процесса) однозначно определяются двумерным законом распределения его ординат.

Предположим, что ордината случайной функции $X(t)$ характеризует состояние некоторой системы. В этом случае изменение ее ординаты со значения $X(t)$ в момент времени t до значения $X(\tau)$ в момент времени τ ($\tau > t$) можно рассматривать как переход системы из состояния $X(t)$ в состояние $X(\tau)$, произошедший за интервал времени длиной $\tau - t$. Это изменение состояния системы можно рассматривать как результат двойного перехода: вначале из состояния $X(t)$, занимаемого в момент времени t , в

состояние $X(t_1)$, занимаемое в момент времени t_1 , а затем из состояния $X(t_1)$, отвечающего моменту времени t_1 — в состояние $X(\tau)$, отвечающее моменту времени τ . Если функция $X(t)$ является марковской, то окончательная вероятность перехода может быть выражена через вероятности промежуточных переходов.

Для вывода формулы, связывающей эти вероятности, несколько изменим обозначения. Будем обозначать ординату процесса в момент t буквой X , ординату процесса в момент t_1 — буквой Z , а ординату процесса в момент τ — буквой Y , причем $t < t_1 < \tau$, используя для обозначения конкретных значений случайных величин X , Y , Z соответствующие малые буквы. В этих обозначениях переход системы из состояния X в момент времени t в состояние Y в момент времени τ можно изобразить так, как это показано на Рис. 3.3. Наконец, условную плотность

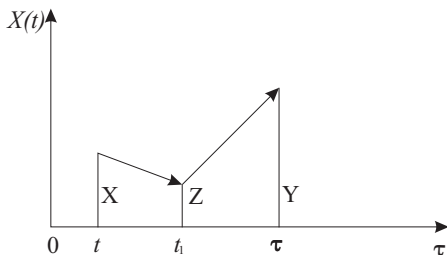


Рис. 3.3. К выводу обобщенного уравнения Маркова

вероятности значения ординаты процесса Z в момент времени t_1 при заданном значении x ординаты процесса в момент времени t будем обозначать $f(t, x; t_1, z)$ (вместо обозначения $f(z|x)$, использованного ранее). Аналогичным образом условную плотность вероятности ординаты Y при заданном значении ординаты z обозначим $f(t_1, z; \tau, y)$.

В этих обозначениях, учитывая марковские свойства рассматриваемого процесса, вероятность того, что система, находящаяся в момент времени t в состоянии X , в момент времени τ окажется в состоянии Y , заключенном в интервале $(y, y + dy)$, побывав в промежуточный момент времени t_1 в состоянии Z , находящемся в интервале $(z, z + dz)$, равна

$$f(t, x; t_1, z)dz \cdot f(t_1, z; \tau, y)dy.$$

Суммируя (интегрируя) эти вероятности по всем возможным значениям промежуточной ординаты z , получим вероятность

перехода системы из заданного состояния $X = x$ в состояние Y , которое находится в указанном интервале $(y, y + dy)$:

$$\begin{aligned} P\{y \leq Y(\tau) \leq y + dy | X(t) = x\} = \\ = dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t, x, t_1, z) f(t_1, z, \tau, y) dz. \end{aligned} \quad (3.12)$$

С другой стороны, согласно определению условной плотности f , та же самая вероятность равна $f(t, x, \tau, y) dy$. Приравнивая правую часть формулы (3.12) к последнему выражению и сокращая на dy , окончательно получим

$$f(t, x, \tau, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, x, t_1, z) f(t_1, z, \tau, y) dz. \quad (3.13)$$

Формула (3.13), называемая различными авторами *формулой Смолуховского* [45, 29], *уравнением Чепмена-Колмогорова* [40] или *обобщенным уравнением Маркова* [9], играет основную роль в теории марковских процессов. Эта формула справедлива как для непрерывного, так и для дискретного времени и может быть применима как в том случае, когда ордината процесса $X(t)$ является непрерывной случайной величиной, так и тогда, когда $X(t)$ относится к случайным величинам дискретного типа (в последнем случае наличие дельта-функций в выражениях плотностей вероятности приводит к тому, что интегрирование в (3.13) сведется к суммированию вероятностей перехода из одного дискретного состояния в другое).

Сравнивая ограничения, налагаемые на общие свойства случайных процессов для применимости теории марковских процессов, с исходными предположениями корреляционной теории случайных функций, можно сделать вывод, что ограничения в этих двух случаях носят совершенно различный характер: если в корреляционной теории не делаются допущения о виде случайной функции, но с самого начала отказываются от ее полного описания, ограничиваясь только изучением первых двух моментов ординат процесса, то в теории марковских процессов используется полная характеристика процесса, однако при этом рассматриваются только процессы специального вида (марковские). Очевидно, что возможности этих двух подходов к изучению случайных функций различны, а применение того или иного подхода зависит от характера решаемой задачи.

Как будет показано ниже, теория марковских процессов позволяет решать различные нелинейные задачи, в принципе неразрешимые в рамках корреляционной теории. При этом не только оказывается, что предположение о марковских свойствах процесса во многих случаях является практически приемлемым, но и выясняется, что допущения, обычно принимаемые в корреляционной теории, такие как нормальность процесса и дробно-рациональная спектральная плотность, эквивалентны допущению, что случайный процесс является компонентой *многомерного марковского процесса*. Под многомерным марковским процессом здесь понимается такая совокупность случайных функций времени $(X_1(t), \dots, X_n(t))$, совместный закон распределения ординат которых в «будущий момент времени» полностью определяется значением ординат этих функций в «настоящий момент» времени и не зависит от траекторий этих процессов «в прошлом». Как будет показано ниже, увеличивая число компонент n вспомогательного многомерного марковского процесса, можно практически всегда добиться совпадения свойств заданного процесса $X(t)$ со свойствами одной из компонент многомерного марковского процесса.

Весьма важным свойством случайной функции является ее стационарность: если все многомерные плотности вероятности $f(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$ не меняются при добавлении к величинам t_j одного и того же произвольного числа t_0 (то есть инвариантны к изменению начала отсчета времени), то функция $X(t)$ называется *стационарной*. В случае, когда это условие не выполняется, функцию называют *нестационарной*. Из определения стационарности следует, что одномерный закон распределения стационарной функции не зависит от времени, а двумерный закон распределения зависит только от разности моментов времени $(t_2 - t_1)$, для которых рассматриваются ординаты случайной функции. Отметим, что стационарность в указанном выше смысле часто называют *стационарностью в узком смысле*, чтобы отличать это понятия от другого определения стационарности, приводимого ниже.

Таким образом, при наличии стационарности

$$f(x, t) = f(x); \quad f(x_1, x_2; t_1, t_2) = f(x_1, x_2; t_2 - t_1). \quad (3.14)$$

Учитывая последние равенства и формулы (3.3) и (3.4), определяющие математическое ожидание и корреляционную функцию, для стационарной функции получим

$$\bar{x} = \text{const}, \quad K(t_1, t_2) = K(t_2 - t_1), \quad (3.15)$$

т. е. математическое ожидание стационарной случайной функции есть величина постоянная, а корреляционная функция является функцией одного аргумента.

Выполнение условий (3.15), вообще говоря еще не обеспечивает стационарности случайной функции. Однако, поскольку в корреляционной теории используются только первые два момента ее ординат, то при выполнении обоих условий (3.15) в этой теории отсутствует принципиальная возможность установить, является ли случайная функция стационарной или нет. Поэтому целесообразно ввести новое понятие — *стационарность в широком смысле*: случайная функция называется стационарной в широком смысле, если ее математическое ожидание есть величина постоянная, а корреляционная функция зависит от одного аргумента $\tau = t_2 - t_1$.

Понятие стационарности естественным образом обобщается и на систему случайных функций: если все многомерные законы распределения ординат системы случайных функций не зависят от выбора начала отсчета времени, то эта система называется стационарной. Для стационарной системы случайных функций $(X_1(t), X_2 \dots, X_m(t))$ все математические ожидания функций — величины постоянные, а все корреляционные функции $K_{x_j}(t_1, t_2)$ (иногда говорят автокорреляционные функции) и *взаимные корреляционные функции* $R_{x_j x_l}(t_1, t_2)$, определяемые равенствами

$$R_{x_j x_l}(t_1, t_2) = M[X_j(t_1) - \bar{x}_j(t_1)][X_l(t_2) - \bar{x}_l(t_2)], \quad j \neq l \quad (3.16)$$

являются функциями только разности $\tau = t_2 - t_1$.

Как и для одной функции, выполнение сформулированных выше условий недостаточно для того, чтобы утверждать о наличии стационарности системы функций $X_1(t), \dots, X_m(t)$ — в этом случае говорят, что система функций стационарна в широком смысле.

Весьма важным признаком случайных функций является вид закона распределения ее ординат. В теории вероятностей особую роль играет нормальный закон распределения или закон Гаусса. В соответствии с этим обычно выделяют в отдельный класс нормальные (или гауссовы) случайные функции, все ординаты которых подчиняются нормальному закону распределения. Для таких

функций n -мерная плотность вероятности имеет вид:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \\ = \frac{1}{2\pi^{n/2}\sqrt{\Delta}} \exp\left\{-\frac{1}{2\Delta} \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n A_{il}[x_j - \bar{x}_j(t_j)][x_l - \bar{x}_l(t_l)]\right\}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где через Δ обозначен определитель, составленный из элементов K_{jl} корреляционной матрицы системы нормальных случайных величин $X_1 = X(t_1), \dots, X_n = X(t_n)$; а через A_{jl} — алгебраическое дополнение элемента K_{jl} этого определителя, причем корреляционные моменты связаны с корреляционной функцией процесса соотношением

$$K_{jl} = K(t_j, t_l). \quad (3.18)$$

Нормальные случайные функции представляют особый интерес, так как в соответствии с формулами (3.17) и (3.18) все многомерные законы распределения этих функций однозначно определяются математическим ожиданием процесса $\bar{x}(t)$ и его корреляционной функцией $K(t_1, t_2)$. Поэтому, в частности, если нормальная случайная функция является стационарной в широком смысле, то она автоматически должна быть стационарной и в узком смысле — для нормальных процессов понятия стационарности в широком и узком смысле совпадают. Марковская случайная функция может быть как стационарной, так и нестационарной, может быть нормальной (гауссовской) или не гауссовской.

Для стационарных процессов многие выводы корреляционной теории значительно упрощаются, если в качестве основной характеристики процесса использовать не корреляционную функцию $K(\tau)$, а функцию $S(\omega)$, являющуюся преобразованием Фурье от $K(\tau)$, называемую *спектральной плотностью* и связанную с корреляционной функцией соотношениями

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i\omega\tau\} S(\omega) d\omega, \quad (3.19)$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-i\omega\tau\} K(\tau) d\tau. \quad (3.20)$$

Преимущество использования спектральной плотности вместо корреляционной функции состоит, в основном, в том, что спектральная плотность производной от стационарной случайной функции и спектральная плотность стационарного решения линейного дифференциального уравнения, содержащего в правой части стационарную случайную функцию, могут быть найдены путем алгебраических вычислений. Например, если

$$Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}, \quad (3.21)$$

где $X(t)$ — стационарная функция, имеющая спектральную плотность $S_x(\omega)$, то

$$S_y = |i\omega|^2 S_x(\omega). \quad (3.22)$$

Если случайная функция $Y(t)$ является стационарным решением уравнения с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^n Y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} Y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n Y = X(t), \quad (3.23)$$

характеристический многочлен которого

$$\Delta(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n \quad (3.24)$$

имеет корни с отрицательными вещественными частями, то спектральная плотность стационарного решения

$$S_y(\omega) = \frac{S_x(\omega)}{|(i\omega)^n + a_1(i\omega)^{n-1} + \dots + a_n|^2}. \quad (3.25)$$

Для стационарных марковских случайных процессов плотность вероятности ординаты процесса в момент времени $\tau > t$ зависит не порознь от каждого из моментов времени t и τ , а от их разности $\tau - t$. Условимся для дальнейшего ординату марковского процесса $U(t)$ в момент времени t всегда обозначать буквой X , а ту же ординату в момент времени τ — буквой Y , т. е. положим

$$U(t) = X, \quad U(\tau) = Y, \quad \tau > t. \quad (3.26)$$

Будем также обозначать плотность вероятности перехода из состояния x в момент времени t в состояние y в момент времени τ через $f(t, x; \tau, y)$. Если марковский процесс стационарен, то, очевидно

$$f(t, x; \tau, y) = f(0, x; \tau - t, y). \quad (3.27)$$

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§4. ФУНКЦИЯ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим сначала марковский процесс особого вида, называемый функцией броуновского движения. Этот процесс может быть получен путем естественной математической абстракции физического процесса броуновского движения.

Дадим сперва формальное определение функции броуновского движения: будем называть *функцией броуновского движения* $V(t)$ нормальную случайную функцию, удовлетворяющую при произвольных $\tau > t$ условиям

$$\begin{aligned} V(0) = 0, \quad M[V(\tau) - V(t)] = 0, \\ D[V(\tau) - V(t)] = (\tau - t), \quad MV(t)[V(\tau) - V(t)] = 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

из которых первые два условия не являются принципиальными и введены для удобства, третье условие показывает, что приращение ординаты рассматриваемого процесса имеет дисперсию, пропорциональную приращению времени, и, наконец, последнее условие означает, что приращение функции $V(\tau) - V(t)$ некоррелировано (а вследствие нормальности процесса, значит, и независимо) со значением ординаты процесса $V(t)$.

Убедимся прежде всего, что определенный условиями (4.1) процесс является марковским. Для этого достаточно показать, что плотность вероятности перехода из начального состояния $V(t)$ в конечное состояние $V(\tau)$ для процесса броуновского движения удовлетворяет обобщенному уравнению Маркова. Обозначая по-прежнему ординаты процесса в моменты времени t , t_1 и τ через x , y и z соответственно, и, учитывая нормальность процесса и независимость случайной величины $(Y - Z)$ от Z ,

получим

$$f(t, x, \tau, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\tau-t}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2(\tau-t)}\right\}, \quad (4.2)$$

$$f(t, x, t_1, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{t_1-t}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2(t_1-t)}\right\}, \quad (4.3)$$

$$f(t_1, z, \tau, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\tau-t_1}} \exp\left\{-\frac{(y-z)^2}{2(\tau-t_1)}\right\}, \quad (4.4)$$

где при написании плотностей нормального закона распределения учтены соотношения (4.1), согласно которым дисперсия приращений ординат процесса $V(t)$ равны приращениям времени, а условное математическое ожидание случайной величины Y при фиксированном значении $Z = z$ равно z .

Подставляя выражения (4.2), (4.3) в обобщенное уравнение Маркова (3.13), получим, что для того, чтобы процесс $V(t)$ был марковским, необходимо выполнение равенства

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\tau-t}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2(\tau-t)}\right\} = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\tau-t_1}} e^{-\frac{(y-z)^2}{2(\tau-t_1)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{t_1-t}} e^{-\frac{z^2}{2(t_1-t)}} dz, \end{aligned} \quad (4.5)$$

которое выражает известный из теории случайных величин факт, что композиция двух нормальных законов распределения равняется нормальному закону распределения с суммарным математическим ожиданием и суммарной дисперсией.

Таким образом, обобщенное уравнение Маркова для рассматриваемого процесса выполняется и, следовательно, функция броуновского движения $V(t)$ принадлежит к классу марковских процессов.

Покажем, что функция броуновского движения, определяемая формулами (4.1), может быть получена путем предельного перехода из процесса случайных блужданий, моделирующего физическое броуновское движение.

Рассмотрим для этой цели точку A (Рис. 4.1), расположенную в момент времени t на оси v на расстоянии $V_{\Delta}(t)$ от начала координат. Предположим, что в дискретные моменты времени $t_j = j\Delta$ ($j = 1, 2, \dots$) координата точки A либо с вероятностью



Рис. 4.1. К определению случайных блужданий

$1/2$ увеличивается на $\sqrt{\Delta}$, либо с вероятностью $1/2$ уменьшается на $\sqrt{\Delta}$ (точка делает «скачок» направо или налево). Если при $t = 0$ точка A находилась в начале координат, то ее координата $V_{\Delta}(t_n)$ в момент времени t_n может быть представлена в виде суммы

$$V_{\Delta}(t_n) = \sqrt{\Delta} \sum_{j=1}^n \xi_j, \quad (4.6)$$

где

$$\xi_j = \begin{cases} 1, & \text{если } V_{\Delta}(t_j) > V_{\Delta}(t_{j-1}), \\ -1, & \text{если } V_{\Delta}(t_j) < V_{\Delta}(t_{j-1}). \end{cases} \quad (4.7)$$

Очевидно, что

$$M(\xi_j) = 0, \quad D(\xi_j) = 1. \quad (4.8)$$

Следовательно, применяя к (4.6) теоремы о математическом ожидании и дисперсии для суммы независимых случайных величин, получим

$$M[V_{\Delta}(t_n)] = 0, \quad (4.9)$$

$$D[V_{\Delta}(t_n)] = n\Delta = t_n. \quad (4.10)$$

Рассмотрим момент времени t_{n+m} , равный $t_n + m\Delta$. Разность $V_{\Delta}(t_{n+m}) - V_{\Delta}(t_n)$ можно представить в виде суммы, аналогичной сумме (4.6), содержащей m слагаемых, т. е.

$$V_{\Delta}(t_{n+m}) - V_{\Delta}(t_n) = \sqrt{\Delta} \sum_{j=n+1}^{n+m} \xi_j, \quad (4.11)$$

где случайные величины ξ_j по-прежнему взаимно независимы и независимы от всех случайных величин ξ_i , входящих в сумму (4.6).

Применяя теоремы о математическом ожидании и дисперсии к правой части равенства (4.11), получим

$$M[V_{\Delta}(t_{n+m}) - V_{\Delta}(t_n)] = 0, \quad (4.12)$$

$$D[V_{\Delta}(t_{n+m}) - V_{\Delta}(t_n)] = \Delta m = t_{n+m} - t_n. \quad (4.13)$$

Независимость правых частей равенств (4.6) и (4.11) показывает, что левые части этих равенств между собой некоррелированы, а так как их математические ожидания равны нулю, то

$$M\{V_{\Delta}(t_n)[V_{\Delta}(t_{n+m}) - V_{\Delta}(t_n)]\} = 0. \quad (4.14)$$

Формулы (4.9), (4.10), (4.11) и (4.14) совпадают с формулами (4.1), определяющими свойства функции броуновского движения. Эти формулы остаются в силе и при переходе к пределу при $n \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$, однако в последнем случае, в соответствии с центральной предельной теоремой величины $V_{\Delta}(t_n)$ и $V_{\Delta}(t_{n+m})$ (как суммы бесконечно числа одинаково распределенных случайных величин) становятся нормальными. Поэтому, обозначая $t = n\Delta$ и устремляя $\Delta \rightarrow 0$ (считая при этом t конечным), получим, что функция броуновского движения $V(t)$ и функция $V_{\Delta}(t)$ связаны соотношением

$$V(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} V_{\Delta}(t). \quad (4.15)$$

Функция броуновского движения впервые была исследована в 1922 году Н. Винером. Поэтому иногда ее называют *винеровским процессом*. Далее установим несколько наиболее важных свойств функции броуновского движения.

Свойство 1. Умножение функции броуновского движения $V(t)$ на постоянный множитель C эквивалентно увеличению аргумента функции в C^2 раз, то есть

$$CV(t) = V(C^2t). \quad (4.16)$$

Действительно, находя дисперсию правой части последнего равенства и используя формулы (4.1), получим

$$D[V(C^2t)] = C^2t = C^2D[V(t)] = D[CV(t)]. \quad (4.17)$$

Аналогичным образом можно убедиться, что для функции $V(C^2t)$ выполняются все равенства (4.1), а так как изменение аргумента у случайной функции не меняет типа закона распределения ее ординат, то функция $V(C^2t)$ имеет нормальный закон распределения и, следовательно, $V(C^2t)$ действительно является функцией броуновского движения. В частном случае, положив C равным -1 , получим

$$-V(t) = V(t), \quad (4.18)$$

то есть переменяя знак у функции броуновского движения, мы снова получаем функцию броуновского движения.

Доказанное свойство (4.16) называют свойством *самоподобия* (*автомодельности*). Его физический смысл сводится к тому, что любой, самый малый, фрагмент реализации процесса броуновского движения повторяет все свойства реализации в целом. Если растянуть такой фрагмент вдоль оси абсцисс в k раз, а вдоль оси ординат в $\sqrt{k}$ раз, то полученная картина при любом k будет повторять картину исходного процесса. Данное свойство наблюдается у многих естественных, природных объектов (например, береговой линии рек и морей, горного рельефа и т. п.) и делает процесс $V(t)$ весьма привлекательным при их математическом моделировании.

Отметим, что самоподобие $V(t)$ заложено уже в его определении (4.1). Необходимо подчеркнуть, что в равенстве (4.16) оба процесса $V(t)$ и $V(C^2t)$ понимаются в широком смысле (см. параграф §2.), то есть равными считаются процессы, у которых совпадают все многомерные законы распределения. Вследствие этого смысл равенств (4.16) и (4.18) иной, чем для детерминированных функций (для детерминированного $V(t)$ из (4.18) следовало бы $V(t) \equiv 0$).

В узком смысле равенство процессов означает совпадение реализаций. Разумеется, реализации $V(t)$ и $-V(t)$ не совпадают, а являются зеркальным отражением друг друга относительно оси времени, но законы распределения $V(t)$ и $-V(t)$ любого порядка совершенно идентичны. В математических работах для обозначения этого факта иногда используют особое обозначение

$$Law(-V(t)) = Law(V(t)).$$

В нашем пособии в широком смысле понимаются все подобные равенства, и используются более привычные и удобные обозначения.

Свойство 2. Сумма квадратов приращений функции броуновского движения $V(t)$, соответствующих разбиению конечного интервала времени $(0, T)$ на n подынтервалов, стремится к T , если $n \rightarrow \infty$, а величина наибольшего подынтервала при этом

стремится к 0, то есть

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \sum_{j=1}^n [V(t_j) - V(t_{j-1})]^2, \quad (4.19)$$

где $t_0 = 0$, $t_n = T$ и при всех $j = \overline{1, n}$ имеем $t_j > t_{j-1}$, причем $\Delta = \max(t_j - t_{j-1})$.

Для доказательства этого свойства введем обозначение

$$S_n = \sum_{j=1}^n [V(t_j) - V(t_{j-1})]^2. \quad (4.20)$$

Случайная величина S_n является суммой величин, которые на основании основных свойств броуновского движения являются взаимно независимыми случайными величинами. Следовательно, при стремлении n к ∞ при одновременном стремлении Δ к 0, на основании центральной предельной теоремы, закон распределения S_n стремится к нормальному закону распределения, который полностью определяется математическим ожиданием и дисперсией S_n . Находя математическое ожидание обеих частей равенства (4.20) и учитывая при этом, что из (4.1) следует

$$M[V(t_j) - V(t_{j-1})]^2 = D[V(t_j) - V(t_{j-1})] = t_j - t_{j-1}, \quad (4.21)$$

получим

$$M[S_n] = \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) = T. \quad (4.22)$$

Для нахождения дисперсии S_n , учитывая независимость слагаемых в правой части равенства (4.20), имеем

$$D[S_n] = \sum_{j=1}^n D\{[V(t_j) - V(t_{j-1})]^2\}. \quad (4.23)$$

Дисперсия квадрата нормальной величины, как известно [31],[9] равняется удвоенному квадрату дисперсии этой величины. Следовательно,

$$D\{[V(t_j) - V(t_{j-1})]^2\} = 2\{D[V(t_j) - V(t_{j-1})]\}^2 = 2(t_j - t_{j-1})^2 \quad (4.24)$$

и вместо (4.23) можно записать

$$D(S_n) = 2 \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1})^2. \quad (4.25)$$

Однако,

$$\sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1})^2 \leq \Delta \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) = T\Delta, \quad (4.26)$$

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} D(S_n) = 0. \quad (4.27)$$

Таким образом, при переходе к пределу, указанному в формуле (4.19), закон распределения случайной величины S_n стремится к нормальному закону распределения, имеющему математическое ожидание, равное T , и нулевую дисперсию, то есть величина S_n стремится к постоянной T . Таким образом, равенство (4.19) доказано.

Свойство 3. Деление функции броуновского движения на ее аргумент t ($t > 0$) дает функцию броуновского движения, аргумент которой равен $\frac{1}{t}$, то есть

$$\frac{1}{t}V(t) = V\left(\frac{1}{t}\right) \quad (4.28)$$

или, что то же самое

$$tV\left(\frac{1}{t}\right) = V(t). \quad (4.29)$$

Так как умножение нормальной величины на неслучайный коэффициент сохраняет нормальность величины, то для доказательства последнего равенства достаточно убедиться, что выражение, стоящее слева в (4.29), удовлетворяет условиям (4.1) для функции броуновского движения. Используя правило нахождения дисперсии произведения неслучайного коэффициента на случайную величину и свойство дисперсии функции броуновского движения, получим

$$D\left[tV\left(\frac{1}{t}\right)\right] = t^2 D\left[V\left(\frac{1}{t}\right)\right] = t^2 \cdot \frac{1}{t} = t. \quad (4.30)$$

Рассмотрим разность $\left[(t+\Delta)V\left(\frac{1}{t+\Delta}\right) - tV\left(\frac{1}{t}\right)\right]$. Для нахождения ее дисперсии, где $\Delta > 0$, используем формулу для дисперсии суммы случайных величин

$$D\left[(t+\Delta)V\left(\frac{1}{t+\Delta}\right) - tV\left(\frac{1}{t}\right)\right] = D\left[(t+\Delta)V\left(\frac{1}{t+\Delta}\right)\right] + D\left[tV\left(\frac{1}{t}\right)\right] - 2M\left[(t+\Delta)V\left(\frac{1}{t+\Delta}\right)tV(t)\right]. \quad (4.31)$$

Здесь корреляционный момент слагаемых заменен математическим ожиданием их произведения, поскольку математическое ожидание функции броуновского движения при любом значении его аргумента равно нулю.

Заменяя в (4.31) дисперсии $D[(t+\Delta)V(\frac{1}{t+\Delta})]$ и $D[tV(\frac{1}{t})]$, в соответствии с (4.30), на $(t+\Delta)$ и t , соответственно, и, учитывая, что на основании (4.1)

$$M\left[V\left(\frac{1}{t+\Delta}\right)V\left(\frac{1}{t}\right)\right] = M\left[V\left(\frac{1}{t+\Delta}\right)\left[V\left(\frac{1}{t}\right) - V\left(\frac{1}{t+\Delta}\right)\right] + V\left(\frac{1}{t+\Delta}\right)\right] = \frac{1}{t+\Delta}, \quad (4.32)$$

получим

$$D\left[(t+\Delta)V\left(\frac{1}{t+\Delta}\right) - tV\left(\frac{1}{t}\right)\right] = (t+\Delta) + t - 2(t+\Delta)\frac{t}{t+\Delta} = \Delta. \quad (4.33)$$

Таким образом, произведение $tV(\frac{1}{t})$ удовлетворяет всем равенствам (4.1) и, следовательно, является функцией броуновского движения.

Свойство 4. Броуновская траектория нигде не дифференцируема, то есть не существует такой случайной функции, обладающей конечной дисперсией, которую можно рассматривать как предел (в смысле среднего квадратического) отношения

$$\frac{V(t+\Delta) - V(t)}{\Delta}$$

при $\Delta \rightarrow \infty$.

Действительно, из общей теории случайных функций известно, что для того, чтобы случайная функция имела бы производную, необходимо существование второй смешанной частной

производной от ее корреляционной функции. Однако, используя равенства (4.1), легко убедиться, что корреляционная функция случайного процесса $V(t)$ этому условию не удовлетворяет, так как

$$K(t_1, t_2) = \min(t_1, t_2) \quad (4.34)$$

и уже первая производная от корреляционной функции $K(t_1, t_2)$ терпит разрыв при $t_1 = t_2$.

Отсутствие производной у функции броуновского движения является естественным, если рассматривать эту функцию как результат предельного перехода от координаты частицы при случайных блужданиях. При конечном значении интервала времени эта функция имеет вид ломаной, состоящей из горизонтальных ступенек длиной Δ и высотой $\pm\sqrt{\Delta}$. При уменьшении Δ ширина этих ступенек будет уменьшаться, однако скачкообразный характер изменения ординаты функции $V(t)$ останется, что и делает невозможным ее дифференцирование.

Предельный переход от функции случайных блужданий наиболее простым образом позволяет показать, что длина l броуновской траектории равна ∞ . Действительно, длина кривой, проходящая на каждую ступеньку, равна $\sqrt{\Delta} + \Delta$. Длина l_n всей траектории, состоящей из n ступенек, определяется равенством

$$l_n = (\sqrt{\Delta} + \Delta)n = \left(\frac{1}{\sqrt{\Delta}} + 1\right)\Delta n = \left(\frac{1}{\sqrt{\Delta}} + 1\right)T \quad (4.35)$$

Следовательно, после предельного перехода, получим

$$l = \lim_{\Delta \rightarrow 0} l_n = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{\Delta}} + 1\right)T = \infty. \quad (4.36)$$

Технику решения конкретных задач, связанные с функцией броуновского движения, поясним на примерах, к рассмотрению которых мы и перейдем.

Пример 4.1. Рассмотрим процесс скользящего среднего от функции $V(t)$, в котором в качестве аргумента выступает длина интервала усреднения

$$U(t) = \frac{1}{t} \int_0^t V(\tau) d\tau \quad (4.37)$$

и получим закон распределения $U(t)$.

Решение. Процесс (4.37) является результатом применения линейного интегрального оператора к $V(t)$, благодаря чему его математическое ожидание и дисперсию можно представить в виде (см. параграф 3):

$$\bar{u}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \bar{v}(\tau) d\tau = 0, \quad (4.38)$$

$$\sigma_u^2(t) = \frac{1}{t^2} \int_0^t \int_0^t K_V(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (4.39)$$

Используя выражение (4.34) для корреляционной функции и разбивая интеграл (4.39) на сумму двух интегралов, получаем

$$\sigma_u^2(t) = \frac{1}{t^2} \int_0^t \int_0^{\tau_2} \tau_1 d\tau_1 d\tau_2 + \int_0^t \int_{\tau_2}^t \tau_2 d\tau_1 d\tau_2 = \frac{t}{3}. \quad (4.40)$$

Очевидно, процесс $U(t)$ является нормальным. Математические ожидания $U(t)$ и $V(t)$ совпадают и равняются нулю, но дисперсия $U(t)$ оказывается в три раза меньше, чем у $V(t)$, что объясняется эффектом интегрального усреднения в формуле (4.37).

Пример 4.2. Процесс, получаемый с помощью нелинейного преобразования

$$S(t) = \exp \left\{ -\frac{\sigma^2}{2} t + \sigma V(t) \right\}, \quad \sigma > 0 \quad (4.41)$$

называется *геометрическим* (или *экономическим*) *броуновским движением* и применяется для описания изменения во времени стоимости акций на бирже [52]. Найдём для него математическое ожидание и дисперсию.

Решение. Математическое ожидание и дисперсия геометрического броуновского движения выражаются интегралами

$$\bar{s}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\sigma^2}{2} t + \sigma v \right\} \exp \left\{ -\frac{v^2}{2t} \right\} dv, \quad (4.42)$$

$$\sigma_s^2(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\exp \left\{ -\frac{\sigma^2}{2} t + \sigma v \right\} - 1 \right)^2 \exp \left\{ -\frac{v^2}{2t} \right\} v. \quad (4.43)$$

Выделяя в показателе экспоненты (4.42) полный квадрат, находим

$$\bar{s}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{(v - \sigma t)^2}{2t} \right\} dv. \quad (4.44)$$

Второй интеграл после раскрытия круглых скобок и аналогичного преобразования принимает вид

$$\begin{aligned} \sigma_s^2(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} & \left(\exp \{ \sigma^2 t \} \exp \left\{ -\frac{(v - 2\sigma t)^2}{2t} \right\} - \right. \\ & \left. - 2 \exp \left\{ -\frac{(v - \sigma t)^2}{2t} \right\} + \exp \left\{ -\frac{v^2}{2t} \right\} \right) dv. \end{aligned} \quad (4.45)$$

В подынтегральных выражениях (4.44) и (4.45) стоит плотность нормального закона с дисперсией t и средним, соответственно, $2\sigma t$, σt и 0 . Интеграл от нее по всей числовой оси равен единице, и окончательно

$$\bar{s}(t) = 1, \quad \sigma_s^2(t) = e^{\sigma^2 t} - 1. \quad (4.46)$$

Пример 4.3. Процессом броуновского моста на интервале $[0, T]$ называется процесс

$$W(t) = V(t) - \frac{t}{T} V(T), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4.47)$$

Он интересен тем, что его ординаты на концах интервала $[0, T]$ фиксированы и равняются нулю, а внутри этого интервала изменяются случайным образом. Получим корреляционную функцию такого процесса и его дисперсию.

Решение. Очевидно, математическое ожидание броуновского моста равняется нулю, поэтому его корреляционная функция выражается в виде

$$K_W(t_1, t_2) = M \left[\left(V(t_1) - \frac{t_1}{T} V(T) \right) \left(V(t_2) - \frac{t_2}{T} V(T) \right) \right], \quad (4.48)$$

что дает после раскрытия скобок

$$K_W(t_1, t_2) = K_V(t_1, t_2) - \frac{t_1}{T} K_V(T, t_2) - \\ - \frac{t_2}{T} K_V(t_1, T) + \frac{t_1 t_2}{T^2} K_V(T, T), \quad (4.49)$$

где $K_V(t_1, t_2)$ обозначает корреляционную функцию $V(t)$. Используя ее явное выражение (4.34), получаем

$$K_W(t_1, t_2) = \min(t_1, t_2) \left[1 - \frac{\max(t_1, t_2)}{T} \right], \quad (4.50)$$

$$\sigma_W^2(t) = t(1 - \frac{t}{T}), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4.51)$$

§5. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ

Недифференцируемость функции броуновского движения $V(t)$ делает невозможным рассмотрение дифференциала $dV(t)$ функции $V(t)$ как произведения некоторой случайной функции, обладающей ограниченной дисперсией, на дифференциал dt ее аргумента. Поэтому интегралы, содержащие под знаком интеграла $dV(t)$ и называемые *стохастическими интегралами*, требуют добавочного определения и исследования. Рассмотрим интеграл вида

$$\mathfrak{I}(t) = \int_0^T \Phi[X(t), t, V(t)] dV(t), \quad (5.1)$$

где Φ — детерминированная (неслучайная) функция своих аргументов, которую будем считать дифференцируемой по каждому из аргументов, а интеграл будем понимать как предел (в смысле среднего квадратического) соответствующей интегральной суммы. Интеграл типа

$$\mathfrak{I}(t) = \int_0^T X(t) dt, \quad (5.2)$$

где $X(t)$ — случайная функция, не зависящая от $V(t)$, может быть определен способом, совершенно аналогичным определению

интеграла в классическом анализе, то есть можно положить

$$\mathfrak{I}(t) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \sum_{j=1}^n X(\tau_j)(t_j - t_{j-1}), \quad (5.3)$$

где t_j — точки, разбивающие промежуток $[0, T]$ на n интервалов ($t_0 = 0$, $t_n = T$), τ_j — значение аргумента t , взятое в интервале $[t_j - t_{j-1}]$, а $\Delta = \max(t_j - t_{j-1})$. При определении интеграла (5.2) формулой (5.3) безразличен способ выбора значения τ_j из указанного выше интервала. Картина меняется при переходе к интегралу (5.1). Если интеграл определить как предел суммы типа (5.3), в которой вместо разности $(t_j - t_{j-1})$ стоит приращение $V(t_j) - V(t_{j-1})$ функции $V(t)$ на этом интервале изменения аргумента, то численное значение интеграла оказывается зависящим от способа выбора значений τ_j из указанного интервала изменения t .

Рассмотрим два способа выбора τ_j , имеющие практический интерес. В первом способе, предложенном К. Ито [46], в качестве значения τ_j выбирается левая граница интервала (то есть полагается $\tau_j = t_{j-1}$)¹. В этом случае интеграл определяется равенством

$$\mathfrak{I}(t) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \sum_{j=1}^n \Phi[X(t_{j-1}), t_{j-1}, V(t_{j-1})][V(t_j) - V(t_{j-1})]^2, \quad (5.4)$$

а определенный таким образом интеграл называется *интегралом Ито*. Докажем, что интеграл Ито существует, если выполняется условие

$$\int_0^T M\Phi^2[X(t), t, V(t)]dt < \infty. \quad (5.5)$$

Разобьем для этой цели интервал $[0, T]$ независимым образом один раз на n , а другой раз на m более мелких интервалов и обозначим интегральные суммы, стоящие справа в формуле (5.4), соответствующие этим разбиениям, соответственно через S_n и S_m^* . Если предел (5.4) существует, то эти суммы, при

¹Независимо от Ито аналогичное определение интеграла было дано И. И. Гихменом [6].

соответствующем предельном переходе, должны стремиться (в смысле среднего квадратического) к одному и тому же пределу. Это будет выполнено, если выполняется условие

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} M[(S_n - S_m^*)^2] = 0, \quad (5.6)$$

где предел вычисляется при одновременном стремлении к нулю максимальных интервалов разбиения промежутка $[0, T]$, как на n , так и на m частей.

Так как входящие в интегральные суммы (5.4) приращения функции броуновского движения $[V(t_j) - V(t_{j-1})]$ не зависят от ординат функции $V(t_{j-1})$, являющихся аргументами функции Φ , а математическое ожидание $V(t)$ равно нулю, то

$$M(S_n) = M(S_m^*) = 0 \quad (5.7)$$

и поэтому условие (5.6) сводится к аналогичному условию, налагаемому на дисперсию разности $S_n - S_m^*$.

Подставляя в правую часть равенства (5.6) вместо S_n и S_m^* соответствующие им суммы и учитывая, что согласно формулам (4.1) математические ожидания произведений приращений функции броуновского движения отличны от нуля только в том случае, если соответствующие интервалы изменения аргумента t хотя бы частично перекрываются, получим

$$\begin{aligned} M[(S_n - S_m^*)^2] &= M\left\{\left(\sum_{j=1}^n \Phi_{j-1}[V(t_j) - V(t_{j-1})] - \sum_{l=1}^m \Phi_{l-1}^*[V(t_l^*) - V(t_{l-1}^*)]\right)^2\right\} = \\ &= M\left\{\sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^n \Phi_{j-1} \Phi_{p-1} [V(t_j) - V(t_{j-1})][V(t_p) - V(t_{p-1})] + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^m \sum_{q=1}^m \Phi_{l-1}^* \Phi_{q-1}^* [V(t_l^*) - V(t_{l-1}^*)][V(t_q^*) - V(t_{q-1}^*)] - \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^m \Phi_{j-1} \Phi_{l-1}^* [V(t_j) - V(t_{j-1})][V(t_l^*) - V(t_{l-1}^*)]\right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n M[\Phi_{j-1}^2](t_j - t_{j-1}) + \sum_{l=1}^m M[\Phi_{l-1}^{*2}](t_l^* - t_{l-1}^*) - \\
&- 2 \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^m M[\Phi_{j-1} \Phi_{l-1}^*][(t_j - t_{j-1}) \wedge (t_l^* - t_{l-1}^*)].
\end{aligned} \tag{5.8}$$

В последнем равенстве через t_j обозначены точки разбиения отрезка $[0, T]$ на n интервалов, t_l^* обозначают аналогичные точки при разбиении на m интервалов, через Φ_j и Φ_l^* обозначены значения функции $\Phi[X(t), t, V(t)]$, соответственно, при $t = t_j$ и $t = t_l^*$, а символ $(t_j - t_{j-1}) \wedge (t_l^* - t_{l-1}^*)$ применяется для обозначения длины общей части интервалов $[t_{j-1}, t_j]$ и $[t_{l-1}^*, t_l^*]$.

Каждое из слагаемых в правой части (5.8) представляет интегральную сумму для некоторого интеграла, причем при соблюдении условия (5.5) все эти интегралы сходятся. Устремляя независимо друг от друга n и m к бесконечности таким образом, чтобы $\Delta = \max[t_j - t_{j-1}]$ и $\Delta^* = \max[t_l^* - t_{l-1}^*]$ также независимо друг от друга стремились к нулю, будем иметь

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \sum_{j=1}^n M[\Phi_{j-1}^2](t_j - t_{j-1}) = \\
&= \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ \Delta^* \rightarrow 0}} \sum_{l=1}^m M[\Phi_{l-1}^{*2}](t_l^* - t_{l-1}^*) = \int_0^T M\{\Phi^2[X(t), t, V(t)]\} dt,
\end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0, \Delta^* \rightarrow 0}} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^m M[\Phi_{j-1} \Phi_{l-1}^*][(t_j - t_{j-1}) \wedge (t_l^* - t_{l-1}^*)] = \\
&= \int_0^T \int_0^T M\{\Phi[X(t_1), t_1, V(t_1)] \Phi[X(t_2), t_2, V(t_2)]\} \times \\
&\times \delta(t_2 - t_1) dt_1 dt_2 = \int_0^T M\{\Phi^2[X(t), t, V(t)]\} dt.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

В уравнении (5.10) $\delta(x)$ обозначает дельта-функцию Дирака (описание свойств этой функции и многочисленные примеры ее использования содержатся, например, в книге [30]).

Подставляя выражение (5.8) в (5.6) и переходя к пределу, согласно (5.9)–(5.10) получаем в правой части разность двух одинаковых слагаемых, равных удвоенному значению интеграла (5.5), который в соответствии с условием (5.5) существует и конечен. Следовательно, условие (5.6) выполнено.

Таким образом, при интегрируемости математического ожидания квадрата подынтегральной функции, предел интегральной суммы (5.4), определяющий интеграл Ито, действительно существует. Приведенный выше вывод не меняется в принципе, если верхний предел интегрирования T будет переменным или обратиться в бесконечность.

Интеграл Ито обладает многими свойствами привычного нам риманова интеграла. Так, например, исходя из определения следует, что постоянную можно выносить из-под знака интеграла; интеграл, взятый в пределах от 0 до T , равен сумме двух интегралов, взятых от той же подынтегральной функции в пределах от 0 до a и от a до T ; знак интеграла меняется на обратный при перемене местами пределов интегрирования и т. п. Однако при фактическом вычислении интеграла Ито возникают неожиданности. Например, общепринятые формулы табличных интегралов в этом случае оказываются непригодными и требуют изменения.

Для иллюстрации рассмотрим несколько простых примеров.

Пример 5.1. Вычислить интеграл

$$\mathfrak{I}_n = \int_0^t V(\tau) dV(\tau), \quad (5.11)$$

понимаемый в смысле Ито.

Решение. В соответствии с определением интеграла Ито и процесса броуновского движения имеем

$$\mathfrak{I}_n = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \sum_{j=1}^n V(\tau_{j-1}) [V(t_j) - V(t_{j-1})] = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{l=1}^{j-1} \Delta_l \right) \Delta_j, \quad (5.12)$$

где для краткости введено обозначение для приращения $V(t)$

$$\Delta_j = V(\tau_j) - V(\tau_{j-1}) \quad (5.13)$$

и использовано тождество

$$V(\tau_{j-1}) = \sum_{l=1}^{j-1} \Delta_l. \quad (5.14)$$

Двойную сумму, входящую в (5.12), можно выразить через однократные суммы, если заметить, что суммирование ведется по всем точкам треугольника, заштрихованного на Рис. 5.1, в которых координаты l и j принимают целочисленные значения. Вследствие симметрии тот же результат можно получить, если суммирование вести по всем точкам с целочисленными координатами из квадрата со стороной n , вычесть сумму по точкам, расположенным по диагонали квадрата, а затем окончательный результат разделить на 2.

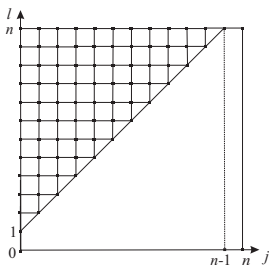


Рис. 5.1. Область суммирования в примере 5.1.

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{l=1}^{j-1} \Delta_l \right) \Delta_j &= \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \Delta_l \Delta_j - \sum_{j=1}^n \Delta_j^2 \right] = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{j=1}^n \Delta_j \right)^2 - \sum_{j=1}^n \Delta_j^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Первая сумма в квадратных скобках легко вычисляется

$$\sum_{j=1}^n \Delta_j = \sum_{j=1}^n [V(t_j) - V(t_{j-1})] = V(t_n) = V(t), \quad (5.16)$$

а вторая сумма при переходе к пределу в соответствии с формулами (4.1) равна t . Поэтому, подставляя (5.15) в (5.12), для интеграла (5.11) получим окончательно

$$\mathfrak{I}_n = \int_0^T V(\tau) dV(\tau) = \frac{1}{2} V^2(t) - \frac{1}{2} t, \quad (5.17)$$

то есть выражение, отличающееся слагаемым $(-\frac{1}{2}t)$ от результата $\frac{1}{2} V^2(t)$, соответствующего «обычным» формулам интегрирования степенной функции.

Пример 5.2. Вычислить интеграл

$$\mathfrak{I}_n = \int_0^t \cos[V(\tau)] d\tau, \quad (5.18)$$

понимаемый в смысле Ито.

Решение. Будем по-прежнему исходить из формулы (5.4), согласно которой в данном случае

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_n &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \sum_{j=1}^n \cos[V(\tau_{j-1})] [V(t_j) - V(t_{j-1})] = \\ &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \sum_{j=1}^n \cos \left[\frac{V(t_j) + V(t_{j-1})}{2} - \frac{1}{2} \Delta_j \right] \Delta_j, \end{aligned} \quad (5.19)$$

Учитывая последующий предельный переход, слагаемое, равное $-\frac{1}{2} \Delta_j$, в квадратных скобках можно считать величиной малой и, разложив $\cos \left[\frac{V(t_j) + V(t_{j-1})}{2} - \frac{1}{2} \Delta_j \right]$ в ряд Тейлора, ограничиться только первыми двумя членами. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_n &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \left(\sum_{j=1}^n \cos \left[\frac{V(t_j) + V(t_{j-1})}{2} \right] \Delta_j + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sin \left[\frac{V(t_j) + V(t_{j-1})}{2} \right] \Delta_j^2 \right). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Первая сумма в фигурных скобках дает площадь под кривой $\cos[V(\tau)]$ при изменении $V(\tau)$ от $V(0) = 0$ до $V(t)$, то

есть $\sin[V(\tau)]$. Во второй сумме при предельном переходе внутри каждого интервала $[\tau_{j-1}, \tau_j]$, имеющего достаточно малую ширину для того, чтобы считать аргумент функции $\sin(x)$ в этом интервале неизменным и равным $V(\tau_j)$, можно выделить бесчисленное множество еще более мелких подынтервалов и, следовательно, сумму Δ_j^2 , взятую по этим подынтервалам, в соответствии со свойством 2 функции броуновского движения (см. формулу (4.22)) можно заменять на $(\tau_j - \tau_{j-1})$. Учитывая вышеизложенное, вместо (5.20) получим окончательно

$$\mathfrak{I}_n = \sin[V(t)] + \frac{1}{2} \int_0^t \sin[V(\tau)] d\tau. \quad (5.21)$$

Таким образом, и в данном случае значение интеграла Ито отличается от значения интеграла, равного $\sin[V(t)]$, получаемого по классическим формулам интегрального исчисления.

Свойство интеграла Ито, обнаружившееся в приведенных выше примерах, является весьма нежелательным с точки зрения приложений, так как в прикладных задачах никогда не встречаются функции броуновского движения в собственном смысле этого слова, а приходится иметь дело с функциями, «напоминающими» функцию броуновского движения, для которых последняя представляется естественной математической аппроксимацией. Так как при использовании интеграла Ито переход к этой аппроксимации вызывает появление в формулах добавочных слагаемых, которые могут существенно исказить окончательный результат, в приложениях целесообразней пользоваться другим определением стохастического интеграла. Такое определение было предложено Р. Л. Стратоновичем [35] и определяется равенством

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(t) &= \int_0^t \Phi[X(\tau), \tau, V(\tau)] dV(\tau) = \\ &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \sum_{j=1}^n \Phi \left[\frac{V(t_j) + V(t_{j-1})}{2} \right] [V(t_j) - V(t_{j-1})]. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Как видно из определения, отличие интеграла Стратоновича от интеграла Ито заключается в том, что ордината функции

броуновского движения, являющаяся аргументом подынтегральной функции, берется не в начале j -го интервала (как это делается в интеграле Ито), а в середине этого интервала. Это, на первый взгляд, несущественное отличие, приводит к исчезновению добавочных членов, возникающих при вычислении интеграла.

Прежде чем получить общую формулу, связывающую интеграл Ито и интеграл Стратоновича, рассмотрим вычисление интеграла (5.11), понимая стохастическое интегрирование в смысле Стратоновича.

Пример 5.3. Вычислить интеграл

$$\mathcal{I}_c = \int_0^t V(\tau) dV(\tau), \quad (5.23)$$

где интеграл понимается в смысле Стратоновича.

Решение. По определению интеграла (5.22) имеем

$$\mathcal{I}_c = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} [V(\tau_j) + V(\tau_{j-1})][V(t_j) - V(t_{j-1})]. \quad (5.24)$$

Воспользовавшись обозначением (5.13), выражение (5.24) можно переписать в виде

$$\mathcal{I}_c = \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^j \Delta_l \Delta_j + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^{j-1} \Delta_l \Delta_j \right]. \quad (5.25)$$

В соответствии с (5.15) вторая сумма, стоящая в фигурных скобках, определяется равенством

$$\sum_{l=1}^{j-1} \Delta_l \Delta_j = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{j=1}^n \Delta_j \right)^2 - \sum_{j=1}^n \Delta_j^2 \right]. \quad (5.26)$$

При вычислении первой суммы в (5.25) применимы те же рассуждения, что и при получении формулы (5.15), однако при суммировании по всем точкам квадрата (см. Рис. 5.1) сумму по точкам, расположенным по диагонали квадрата, следует не вычесть, а прибавить. Таким образом, имеем

$$\sum_{l=1}^{j-1} \Delta_l \Delta_j = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{j=1}^n \Delta_j \right)^2 + \sum_{j=1}^n \Delta_j^2 \right]. \quad (5.27)$$

Складывая (5.26) и (5.27) и учитывая (5.16) окончательно получим

$$\mathfrak{I}_c = \int_0^t V(\tau) dV(\tau) = \frac{1}{2} V^2(t), \quad (5.28)$$

то есть обычная формула интегрального исчисления в данном случае оказывается применима.

Установим связь между интегралом Ито и интегралом Стратоновича в общем случае. Рассмотрим интеграл

$$\mathfrak{I} = \int_0^t \Phi[X(\tau), \tau, V(\tau)] dV(\tau), \quad (5.29)$$

который в первом случае будем понимать в смысле Ито и обозначать $\mathfrak{I}_u$, а во втором — в смысле Стратоновича и обозначать $\mathfrak{I}_c$. Разность этих интегралов в соответствии с определениями и может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_u - \mathfrak{I}_c &= \\ &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \sum_{j=1}^n \left\{ \Phi \left[X(t_{j-1}), t_{j-1}, \frac{V(t_j) + V(t_{j-1})}{2} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \Phi[X(t_{j-1}), t_{j-1}, V(t_{j-1})] \right\} [V(t_j) - V(t_{j-1})] = \\ &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \sum_{j=1}^n \left\{ \Phi \left[X(t_{j-1}), t_{j-1}, V(t_{j-1}) + \frac{1}{2} \Delta_j \right] - \right. \\ &\quad \left. - \Phi[X(t_{j-1}), t_{j-1}, V(t_{j-1})] \right\} [V(t_j) - V(t_{j-1})]. \end{aligned} \quad (5.30)$$

где Δ_j по-прежнему определяется (5.13).

Разложим первое слагаемое в фигурных скобках в ряд Тейлора, сохранив первые два члена ряда и написав остаточный член

в форме Лагранжа

$$\begin{aligned} \Phi \left[X(t_{j-1}), t_{j-1}, V(t_{j-1}) + \frac{1}{2} \Delta_j \right] &= \Phi \left[X(t_{j-1}), t_{j-1}, V(t_{j-1}) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \Delta_j \frac{\partial \Phi \left[X(t_{j-1}), t_{j-1}, V(t_{j-1}) \right]}{\partial V} + \\ &+ \frac{1}{8} \Delta_j^2 \frac{\partial^2 \Phi \left[X(t_{j-1}), t_{j-1}, V(t_{j-1}) + \theta \Delta_j \right]}{\partial V^2}, \quad (|\theta| \leq 1). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Подставляя (5.31) в (5.30), замечаем, что первый член ряда взаимно уничтожается с последним слагаемым в фигурных скобках (5.30), а третий член при суммировании и переходе к пределу обращается в нуль (вследствие наличия множителя Δ_j^3).

Следовательно, вместо (5.30) получим

$$\mathcal{I}_u - \mathcal{I}_c = \frac{1}{2} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi \left[X(t_{j-1}), t_{j-1}, V(t_{j-1}) \right]}{\partial V} \Delta_j^2. \quad (5.32)$$

При переходе к пределу можно представить себе, что весь интервал $(0, t)$ разбит на такие достаточно малые части, внутри каждой из которых производную $\frac{\partial \Phi}{\partial V}$ можно считать постоянной. Внутри этого интервала при переходе к пределу можно воспользоваться формулами (4.22), согласно которым в этом случае $\Delta_j^2 = \tau_j - \tau_{j-1}$.

Итак, заменив в формуле (5.32) Δ_j^2 на $(\tau_j - \tau_{j-1})$, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_u - \mathcal{I}_c &= \frac{1}{2} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi \left[X(t), t, V(t) \right]}{\partial V} (t_j - t_{j-1}) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial \Phi \left[X(\tau), \tau, V(\tau) \right]}{\partial V} d\tau. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Таким образом, окончательно получим

$$\mathcal{I}_u - \mathcal{I}_c = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial \Phi \left[X(\tau), \tau, V(\tau) \right]}{\partial V} d\tau. \quad (5.34)$$

Как было показано в начале этого параграфа, интеграл Ито существует, если выполняется условие (5.5). Формула (5.34) показывает, что это условие обеспечивает и существование интеграла Стратоновича, если существует интеграл, записанный в правой части формулы (5.34).

При замене реальных процессов функцией броуновского движения естественно пользоваться интегралом Стратоновича, а не интегралом Ито, поскольку в этом случае в формулах не появляются добавочные слагаемые, связанные с формальным предельным переходом и не отражающие существо дела.

Несколько обобщим понятие броуновского движения, введя наряду с функцией $V(t)$ функцию $V'(t)$, которую будем называть *неоднородным броуновским движением*. Дисперсия ее приращения $[V'(\tau) - V'(t)]$, определяется равенством

$$D[V'(\tau) - V'(t)|V'(t)] = b[V'(t), t](\tau - t) + o(\tau - t), \quad (5.35)$$

где $b(V, t)$ — неотрицательная детерминированная функция своих аргументов, а слагаемое $o(\tau - t)$ стремится к нулю с уменьшением разности $(\tau - t)$ быстрее, чем первая степень этой разности. Остальным уравнениям (4.1) неоднородное броуновское движение удовлетворяет по-прежнему, однако, наличие соотношения (5.35) приводит к тому, что закон распределения ординаты процесса $V'(t)$ уже может отличаться от нормального. В дальнейшем неоднородную функцию броуновского движения мы будем по-прежнему обозначать $V(t)$, оговаривая специально те случаи, когда речь идет о неоднородном броуновском движении.

Возвращаясь к формуле (5.34) и повторяя ее вывод для неоднородного броуновского движения, можно показать, что в этом случае разность между интегралом Стратоновича и интегралом Ито принимает вид

$$\mathfrak{I}_u - \mathfrak{I}_c = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial \Phi[X(\tau), \tau, V(\tau)]}{\partial V} b[V(\tau), \tau] d\tau. \quad (5.36)$$

Из формул (5.34) и (5.36) следует, что различие между интегралом Стратоновича и интегралом Ито исчезает, если подынтегральная функция исходного интеграла не зависит от функции броуновского движения.

Рассмотрим совокупность m функций броуновского движения: $V_1(t), V_2(t), \dots, V_m(t)$, которую для краткости будем

называть векторной функцией броуновского движения и обозначать $\vec{V}(t)$. Компоненты функции $\vec{V}(t)$ удовлетворяют соотношениям, являющимся обобщением аналогичных соотношений (4.1) и (5.35):

$$\begin{aligned} V_j(0) &= 0, & M[V_j(0)] &= 0, \\ M\{[V_j(\tau) - V_j(t)][V_l(\tau) - V_l(t)]|\vec{V}(t)\} &= b_{jl}[\vec{V}(t), t], \\ M\{V_j(\tau)[V_l(\tau) - V_l(t)]|\vec{V}(t)\} &= 0, \quad (\tau > t; j, l = \overline{1, m}). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Если $\Phi(X, t, \vec{V})$ — детерминированная функция своих аргументов, то интеграл

$$\mathfrak{I} = \int_0^t \Phi(X(\tau), \tau, \vec{V}(\tau)) dV_k(\tau), \quad (5.38)$$

где $V_k(t)$ — одна из компонент векторного броуновского движения $\vec{V}(t)$, и в этом случае может быть определен в двух смыслах: или в смысле интеграла Ито, или в смысле Стратоновича. Повторяя рассуждения, приведенные при выводе формулы (5.34), получим

$$\mathfrak{I}_u - \mathfrak{I}_c = \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi[X(\tau), \tau, V(\tau)]}{\partial V_j} b_{kj}[\vec{V}(\tau), \tau] d\tau. \quad (5.39)$$

§6. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим функцию $U(t)$, связанную с функцией броуновского движения $V(t)$ уравнением

$$dU(t) = \psi[U(t), t]dt + g[U(t), V(t), t]dV(t), \quad (6.1)$$

где ψ и g — заданные детерминированные функции. Уравнение (6.1), называемое *стохастическим дифференциальным уравнением*, не отличается по виду от обычного дифференциального уравнения, написанного в дифференциалах, однако вследствие недифференцируемости функции $V(t)$ возможность переписать это уравнение в обычной форме, содержащей производную от искомой функции $U(t)$, требует более детального исследования.

Интегрируя обе части уравнения (6.1) от 0 до текущего значения времени t , получим интегральное уравнение

$$U(t) = U(0) + \int_0^t \psi[U(\tau), \tau] d\tau + \int_0^t g[U(\tau), V(\tau), \tau] dV, \quad (6.2)$$

то есть выражение, содержащее стохастический интеграл. Однако, как это было выяснено в предыдущем параграфе, стохастическому интегралу можно придавать различный смысл, понимая его, например, или как интеграл в смысле Ито, или интеграл в смысле Стратоновича. Таким образом, само по себе стохастическое дифференциальное уравнение при заданных начальных условиях еще не определяет однозначно искомую функцию $U(t)$ — необходимо еще условиться в определении стохастического интеграла.

Как было отмечено в параграфе 5, для приложений существенно, чтобы переход от реального процесса, близкого по своим свойствам к функции броуновского движения, к его предельной модели, описываемой функцией броуновского движения, не приводил бы к возникновению добавочных слагаемых при вычислении интеграла. Поэтому при написании стохастических дифференциальных уравнений мы всегда будем считать, что интеграл понимается в смысле Стратоновича.

Вопрос о существовании решения уравнений типа (6.1) обычно не возникает в приложениях¹. Поэтому будем считать, что заданное стохастическое уравнение и начальная ордината процесса $U(t)$ однозначно определяют решение уравнения для моментов времени $t > 0$. Так как значения ординат функции $U(t)$ для $t < 0$ не входят в это решение, а значения приращений функции $V(t)$ для неперекрывающихся моментов времени взаимно независимы, то значения ординат функции $U(t)$ для «будущего» (для $t > 0$) не зависят от значений ординат этой функции для «прошлого» ($t < 0$).

Таким образом решением стохастического дифференциального уравнения (6.1) является марковский случайный процесс. Уравнение (6.1) можно переписать и в обычной форме дифференциального уравнения первого порядка, если условно ввести понятие производной от функции броуновского движения.

¹ Общие теоремы о существовании решений стохастических уравнений можно найти, например, в [6, 12].

Для этой цели рассмотрим случайную функцию $Y(t)$, связанную с нормальной стационарной функцией $X(t)$ соотношением

$$Y(t) = \int_0^t X(\tau) d\tau \quad (6.3)$$

и будем уменьшать время корреляции случайной функции $X(t)$, устремляя его к нулю. Очевидно, при этом приращения функции $Y(t)$ для неперекрывающихся интервалов времени станут независимыми, дисперсия $Y(t)$ будет пропорциональна t , а дисперсия приращения $[Y(\tau) - Y(t)]$ будет пропорциональна $\tau - t$. Предположим для определенности, что

$$K_x(\tau) = Ce^{-\alpha|\tau|} \quad (6.4)$$

и определим постоянную C так, чтобы при $\alpha \rightarrow \infty$ для функции $Y(t)$ выполнялись бы условия (4.1), определяющие функцию броуновского движения, то есть чтобы

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} Y(t) = V(t). \quad (6.5)$$

Используя формулу для дисперсии интеграла от стационарной функции [30]

$$D[Y(t)] = 2 \int_0^t (t - \tau) K_x(\tau) d\tau, \quad (6.6)$$

для корреляционной функции (6.4) получим

$$D[Y(t)] = \frac{2C}{\alpha} \left[t + \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) \right]. \quad (6.7)$$

Следовательно, для того, чтобы выполнялось равенство

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} D[Y(t)] = t \quad (6.8)$$

необходимо положить

$$C = \frac{\alpha}{2}, \quad K_x = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|\tau|}. \quad (6.9)$$

Легко видеть, что в этом случае

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) d\tau = 1 \quad (6.10)$$

и, следовательно, при $\alpha \rightarrow \infty$ корреляционная функция $K_x(\tau)$ будет обладать следующими свойствами

$$K_x = \begin{cases} 0, & \tau \neq 0, \\ \infty, & \tau = 0, \end{cases} \quad (6.11)$$

причем сохраняет силу равенство (6.10). Указанные свойства совпадают со свойствами дельта-функции $\delta(\tau)$, то есть имеем

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} K_x(\tau) = \delta(\tau). \quad (6.12)$$

Легко проверить, что при соблюдении равенства (6.12) выполняются и все другие соотношения, определяющие функцию $V(t)$. Таким образом, если корреляционная функция случайной функции $X(t)$ обращается в дельта-функцию, то интеграл (6.3) от функции $X(t)$ приобретает свойства функции броуновского движения.

Обозначим случайную функцию, получающуюся из функции $X(t)$ при $\alpha \rightarrow \infty$ через $\xi(t)$. Определенная таким образом функция, называемая *белым шумом*, обладает рядом особенностей, отличающих ее от обычных случайных функций. Во-первых, эта функция определяется путем некоторого предельного перехода², подобно тому, как в современном анализе определяются обобщенные функции. Во-вторых, дисперсия функции $\xi(t)$ (равная ее корреляционной функции при нулевом значении аргумента, то есть равная $\delta(0)$) обращается в бесконечность. Это показывает, что белый шум не может быть практически реализуем, так как все реальные случайные процессы обладают конечной дисперсией, но является весьма удобной математической абстракцией (как, впрочем, и функция броуновского движения). Для дальнейшего полезно отметить, что спектральная плотность белого шума есть величина постоянная, равная $\frac{1}{2\pi}$.

Действительно, учитывая связь между корреляционной функцией и спектральной плотностью и учитывая свойства дельта-

²Предельный переход, рассмотренный выше, использовал специальный вид корреляционной функции (6.4). Того же результата можно было достигнуть и при другом виде $K_x(\tau)$, если потребовать стремления к нулю времени корреляции процесса $X(t)$.

функции, получим

$$\begin{aligned} S_{\xi}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-i\omega\tau\} K_{\xi}(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-i\omega\tau\} \delta(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Возвращаясь к дифференциальному уравнению (6.1) и учитывая, что функция $V(t)$ может быть выражена через функцию $\xi(t)$ по формуле

$$V(t) = \int_0^t \xi(\tau) d\tau, \quad dV(t) = \xi(t) dt, \quad (6.14)$$

после деления обеих частей равенства на dt , получим

$$\frac{dU}{dt} = \psi(U, t) + g(U, V(t), t) \xi(t). \quad (6.15)$$

Уравнение (6.15) не отличается по виду от канонической формы дифференциального уравнения, принятой в анализе, однако не следует забывать, что этого удалось достигнуть только путем введения «обобщенной случайной функции» $\xi(t)$, то есть уравнение (6.15) следует рассматривать всего лишь как эквивалентную форму записи уравнения (6.1).

Все сказанное о дифференциальном уравнении первого порядка с небольшими изменениями применимо и к системе дифференциальных уравнений. Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dU_j &= \psi_j(U_1, U_2, \dots, U_k, t) dt + \\ &+ \sum_{l=1}^m g_{jl}(U_1, \dots, U_k, V_1, \dots, V_m, t) dV_l(t), \quad (j = \overline{1, k}), \end{aligned} \quad (6.16)$$

где $V_l(t)$, $(l = \overline{1, m})$ — система взаимно независимых функций броуновского движения, а ψ_j и g_{jl} — заданные детерминированные функции своих аргументов³. Система уравнений (6.16) (при

³Система (6.16) не является самым общим видом системы стохастических уравнений, однако более сложные системы далее не будут встречаться.

известных начальных значениях $U_l(0)$ и заданных до момента t реализациях $V_l(s)$, $s < t$ определяет ординаты функций $U_j(t)$ при любом $t > 0$, которые не зависят от ординат этих функций для моментов времени $s < t$. Следовательно, система стохастических уравнений (6.16) определяет компоненты k -мерного марковского процесса $\vec{U}(t)$.

Как и в случае дифференциального уравнения (6.1), если ввести понятие белого шума, систему уравнений (6.16) можно записать в виде, обычном для дифференциальных уравнений, то есть следующим образом:

$$\frac{dU_j}{dt} = \psi_j[\vec{U}(t), t] + \sum_{l=1}^m g_{jl}[\vec{U}(t), \vec{V}(t), t] \xi_l(t), \quad (j = \overline{1, k}), \quad (6.17)$$

где $\vec{U}(t)$ обозначает совокупность всех компонент $U_1, \dots, U_k$ векторного случайного процесса.

Как и в случае одного дифференциального уравнения, система (6.17) является эквивалентной записью системы (6.16), и, следовательно, фактическое вычисление ординат процесса $\vec{U}(t)$ зависит от того, понимаются ли интегралы, соответствующие дифференциальной записи (6.16), в смысле Ито или в смысле Стратоновича. По причинам, указанным выше, мы будем считать, что интегралы понимаются только в смысле Стратоновича.

Поскольку различие между интегралом Стратоновича и интегралом Ито исчезает в том случае, когда подынтегральная функция не зависит от функции броуновского движения, различие между стохастическими уравнениями в смысле Ито и в смысле Стратоновича исчезает в том случае, когда коэффициенты g_{jl} в правых частях уравнения (6.17) во-первых, не зависят от V_l явно, и, во-вторых, не зависят также и от компонент процесса $U_j(t)$, которые, в свою очередь, зависят от $V_l(t)$ в соответствии с системой уравнений. В этом случае при написании стохастических дифференциальных уравнений в формуле, содержащей функции белого шума, нет необходимости оговаривать, в каком смысле понимаются интегралы, соответствующие этим уравнениям, хотя в общем случае такое уточнение является необходимым.

Рассмотрим постейший пример на составление стохастических дифференциальных уравнений. Он относится к исторически первой задаче, возникшей в теории случайных функций — задаче исследования броуновского движения. Напомним, что теория

вероятностей возникла в XVII веке и приблизительно до XVIII века развивалась как наука о вычислении вероятностей появления различных случайных событий [31]. Первое время такое содержание новой науки вполне удовлетворяло потребностям практики, однако примерно с середины XIX века наука и техника поставили ряд новых задач, решение которых уже не укладывалось в привычную схему исчисления вероятностей случайных событий. Ученые приступили к изучению явлений, характер которых определялся уже не просто фактом появления или не появления того или иного случайного события, а зависел от некоторых величин, способных принимать по закону случая различные значения, как, например, в теории ошибок измерений. В результате возник новый объект исследования теории вероятностей — случайные величины [32]. Следующим естественным и логичным шагом в развитии теории явилось рассмотрение системы случайных величин [33], то есть совокупности нескольких таких величин, определенным образом связанных друг с другом. Эта модель, описывала те явления, в которых случайному разбросу были подвержены не скалярные, а векторные величины.

Длительное время, до начала XX века, подавляющее большинство практически интересных задач вероятностного содержания полностью укладывалось в схему случайных величин. Исключение составило только одно явление, открытое еще в 1827 году английским ботаником Р. Броуном⁴. Оно заключается в том, что легкие частицы, взвешенные в жидкости, совершают беспорядочное хаотическое движение. Механизм броуновского движения был открыт гораздо позднее в результате длительных физических исследований. Причиной этого явления оказалось хаотическое движение молекул жидкости, случайные удары которых заставляют броуновскую частицу описывать сложные и непредсказуемые нерегулярные траектории. Дифференциальное уравнение, описывающее движение броуновской частицы, впервые было составлено французским физиком П. Ланжевенем, который ввел в него случайные силы, по своим свойствам аналогичные процессу белого шума. В работах по физике подобного рода уравнения в настоящее время часто называют уравнениями Ланжевена.

⁴По устоявшейся традиции фамилия этого ученого (R. Brown) транслитерируется на русский язык согласно правилам грамматики первой половины XIX века. По современным правилам следовало бы писать не «Броун», а «Браун».

Пример 6.1. Рассмотрим одномерное броуновское движение свободной частицы массой m , на которую действует сила вязкого трения, пропорциональная скорости частицы $U(t)$, а также случайная сила, обусловленная хаотическими толчками молекул среды, пребывающих в беспрестанном тепловом движении. Допустим, что эти последние толчки являются весьма частыми и статистически независимыми. Требуется записать дифференциальное уравнение, задающее скорость частицы, систему дифференциальных уравнений, определяющих ее скорость и координату, а также рассмотреть предельный случай малой массы m .

Решение. В соответствии со сделанными предположениями случайная внешняя сила, воздействующая на частицу, может быть описана процессом белого шума. В результате уравнение движения такой частицы примет вид стохастического дифференциального уравнения первого порядка

$$m\dot{U} + \beta U = h\xi, \quad (6.18)$$

где постоянная h характеризует интенсивность толчков, а коэффициент β зависит от свойств среды и формы частицы. Например, для сферической частицы радиуса a имеем следующее выражение [45]

$$\beta = 6\pi\eta a, \quad (6.19)$$

где η — динамическая вязкость среды.

Обозначим через X координату частицы. Она связана со скоростью уравнением

$$\dot{X} = U. \quad (6.20)$$

В соответствии со сказанным ранее получаем, что координата и скорость броуновской частицы образуют двумерный марковский процесс

$$\begin{cases} \dot{X} = U, \\ \dot{U} = -\frac{\beta}{m}U + \frac{h}{m}\xi. \end{cases} \quad (6.21)$$

К этим уравнениям следует добавить соответствующие начальные условия. Например, если движение начинается из состояния покоя и координата отсчитывается от начального положения, то

$$X(0) = 0, \quad U(0) = 0. \quad (6.22)$$

В первоначальной теории броуновского движения, развитой А. Эйнштейном и М. Смолуховским [45], масса частицы m считалась пренебрежимо малой, что позволяет на основании (6.18)

и (6.20) записать

$$\dot{X} = \frac{h}{\beta} \xi, \quad (6.23)$$

откуда следует

$$X(t) = \frac{h}{\beta} V(t). \quad (6.24)$$

Таким образом, в приближении $m = 0$ координата броуновской частицы оказалась пропорциональной (с коэффициентом пропорциональности $\frac{h}{\beta}$) стандартной функции броуновского движения, подробно рассмотренной в параграфе 4, что и объясняет данное там наименование последней.

В приближении Эйнштейна—Смолуховского скорость броуновской частицы представляет собой процесс белого шума интенсивностью $\frac{h}{\beta}$, то есть координата частицы является недифференцируемым процессом. Более точная модель броуновского движения, основанная на уравнении (6.18), была разработана Дж. Уленбеком и Л. Орнштейном в [53]. В этой модели координата частицы дифференцируема, но ее скорость не имеет производной. Процесс (6.18) иногда называют процессом Уленбека—Орнштейна. Отметим, что независимо от указанных авторов математическое исследование данного марковского процесса было проведено также в работах С. Н. Бернштейна [5] и А. Н. Колмогорова [50].

УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОРОВА И ИХ СОСТАВЛЕНИЕ ПО СТОХАСТИЧЕСКИМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ДВИЖЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

§7. УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

Рассмотрим марковский случайный процесс $U(t)$, ординаты которого относятся к непрерывному типу. Будем считать $\tau > t$ и обозначим для краткости $U(t) = X$. Так как процесс $U(t)$ марковский, то все его свойства определяются двумерными плотностями распределения или одномерной плотностью распределения ординаты x и плотностью вероятности перехода из состояния x в момент времени t в состояние y в момент времени τ . Обозначим эту переходную плотность вероятности $f(t, x; \tau, y)$. Исследование марковских процессов существенно упрощается тем, что плотность вероятности $f(t, x; \tau, y)$ подчиняется системе двух дифференциальных уравнений в частных производных, называемых уравнениями Колмогорова, который впервые дал строгий вывод этих уравнений в 1931 году [49].

Для вывода указанных уравнений запишем обобщенное уравнение Маркова (3.13)

$$f(t, x; \tau, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, x; t_1, z) f(t_1, z; \tau, y) dz, \quad (7.1)$$

где $t < t_1 < \tau$, а через $Z = U(t_1)$ обозначена ордината процесса в момент t_1 . Функция $f(t, x; \tau, y)$ является плотностью

вероятности случайной величины Y и, следовательно,

$$f(t, x; \tau, y) \geq 0, \quad (7.2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t, x; \tau, y) dy = 1. \quad (7.3)$$

Выразим частную производную по времени $\frac{\partial f}{\partial t}$ через частные производные по аргументу x . Для этой цели перепишем уравнение (7.1), положив $t_1 = t + \Delta$ ($\Delta \geq 0$), что дает

$$f(t, x; \tau, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, x; t + \Delta, z) f(t + \Delta, z; \tau, y) dz. \quad (7.4)$$

На основании (7.1) имеем тождество

$$f(t + \Delta, x; \tau, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, x; t + \Delta, z) f(t + \Delta, x; \tau, y) dz. \quad (7.5)$$

Произведя вычитание (7.5) из (7.4), после деления на Δ и перехода к пределу, получим

$$\begin{aligned} -\frac{\partial f}{\partial t} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, x; t + \Delta, z) [f(t + \Delta, z; \tau, y) - \\ - f(t + \Delta, x; \tau, y)] dz. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Первое слагаемое в квадратных скобках можно разложить в ряд Тейлора по аргументу z вблизи точки $z = x$, положив

$$\begin{aligned} f(t + \Delta, z; \tau, y) = f(t + \Delta, x; \tau, y) - \frac{\partial f(t + \Delta, x; \tau, y)}{\partial x} (z - x) + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t + \Delta, x; \tau, y)}{\partial x^2} (z - x)^2 + R_3, \end{aligned} \quad (7.7)$$

где через R_3 обозначен остаточный член ряда Тейлора. Подставляя (7.7) в (7.6) и выполняя очевидные преобразования, будем

иметь

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial f(t, x; \tau, y)}{\partial t} &= \frac{\partial f(t, x; \tau, y)}{\partial x} \times \\
 &\times \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, x; t + \Delta, z)(z - x) dz + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t + \Delta, x; \tau, y)}{\partial x^2} \times \\
 &\times \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, x; t + \Delta, z)(z - x)^2 dz + \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} R_3.
 \end{aligned} \tag{7.8}$$

Особый интерес представляют марковские процессы, для которых $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} R_3$, которые называются *диффузионными процессами*. Будем в дальнейшем рассматривать только диффузионные марковские процессы. В этом случае последнее слагаемое в правой части равенства (7.8) может быть отброшено. Обозначим

$$a(t, x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, x; t + \Delta, z)(z - x) dz, \tag{7.9}$$

$$b(t, x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, x; t + \Delta, z)(z - x)^2 dz. \tag{7.10}$$

Интегралы в последних формулах можно рассматривать как условные математические ожидания, и, следовательно, формулам (7.9) и (7.10) можно придать вид:

$$a(t, x) = \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{1}{\tau - t} M[Y - X | X = x], \tag{7.11}$$

$$b(t, x) = \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{1}{\tau - t} M[Y - X | X = x], \tag{7.12}$$

то есть коэффициент $a(t, x)$ есть предел отношения математического ожидания приращения ординаты процесса за бесконечно малый промежуток времени к этому промежутку времени, а $b(t, x)$ — предел отношения математического ожидания квадрата приращения ординаты процесса к приращению времени. Поэтому $a(t, x)$ называют *коэффициентом сноса*, а $b(t, x)$ — *коэффициентом диффузии*.

Возвращаясь к уравнению (7.8), после подстановки (7.9) и (7.10) получим следующее уравнение, выражающее зависимость функции f от аргументов t и x :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a(t, x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} b(t, x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad (7.13)$$

где для краткости аргументы функции $f(t, x; \tau, y)$ не выписаны явно.

Вывод второго уравнения является более искусственным. Введем для этой цели некоторую функцию $\eta(y)$, определенную во всей области (α, β) изменения ординаты функции $U(t)$. Функцию $\eta(y)$ будем считать произвольной за исключением двух условий: функция $\eta(y)$ имеет производные до второго порядка и обращается в нуль вместе со своей первой производной на границах интервала (α, β) . Рассмотрим

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial f(t, x; \tau, y)}{\partial \tau} \eta(y) dy = \\ = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_{\alpha}^{\beta} [f(t, x; \tau + \Delta, y) - f(t, x; \tau, y)] \eta(y) dy. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Функцию $f(t, x; \tau + \Delta, y)$, пользуясь обобщенным уравнением Маркова, можно представить в виде:

$$f(t, x; \tau + \Delta, y) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t, x; \tau, z) f(t, x; \tau + \Delta, y) dz. \quad (7.15)$$

Подставляя (7.15) в (7.14), получим:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial f(t, x; \tau, y)}{\partial \tau} \eta(y) dy = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left[\int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} f(t, x; \tau, z) \times \right. \\ \left. \times f(t, x; \tau + \Delta, y) \eta(y) dz dy - \int_{\alpha}^{\beta} f(t, x; \tau, y) \eta(y) dy \right]. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Поменяв в двойном интеграле (7.16) обозначения аргументов z на y , а y на z , можно придать равенству (7.16) следующий вид:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial f(t, x; \tau, y)}{\partial \tau} \eta(y) dy &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_{\alpha}^{\beta} f(t, x; \tau, y) \times \\ &\times \left[\int_{\alpha}^{\beta} f(\tau, y; \tau + \Delta, z) \eta(z) dz - \eta(y) \right] dy. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Пользуясь дифференцируемостью функции $\eta(z)$, разложим ее в ряд Тейлора около точки $z = y$, то есть положим

$$\eta(z) = \eta(y) + \frac{d\eta(y)}{dy}(z - y) + \frac{1}{2} \frac{d^2\eta(y)}{dy^2}(z - y)^2 + R_3(z) \quad (7.18)$$

где $R_3(z)$ — остаточный член, стремящийся к нулю при $z \rightarrow y$.

Подставляя (7.18) в (7.17) и считая, что при предельном переходе остаточный член в результирующем выражении можно отбросить, после очевидных преобразований получим

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial f(t, x; \tau, y)}{\partial \tau} \eta(y) dy &= \int_{\alpha}^{\beta} f(t, x; \tau, y) \left[\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \times \right. \\ &\times \int_{\alpha}^{\beta} f(\tau, y; \tau + \Delta, z)(z - y) dz \left. \right] \frac{d\eta(y)}{dy} dy + \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(t, x; \tau, y) \times \\ &\times \left[\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_{\alpha}^{\beta} f(\tau, y; \tau + \Delta, z)(z - y)^2 dz \right] \frac{d^2\eta(y)}{dy^2} dy. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Пределы, стоящие здесь в квадратных скобках, совпадают с выражениями (7.9) и (7.10), в которых t заменено на τ , а x — на y и, следовательно, равны $a(\tau, y)$ и $b(\tau, y)$, соответственно. Поэтому

формулу (7.19) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial f(t, x; \tau, y)}{\partial \tau} \eta(y) dy &= \int_{\alpha}^{\beta} f(t, x; \tau, y) a(\tau, y) \frac{d\eta(y)}{dy} dy + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(t, x; \tau, y) b(\tau, y) \frac{d^2 \eta(y)}{dy^2} dy. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Производя в правой части равенства (7.20) интегрирование по частям и учитывая при этом, что вследствие обращения в нуль функции $\eta(y)$ и $\frac{d\eta(y)}{dy}$ на пределах интегрирования, внеинтегральные члены исчезнут, получим

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial f}{\partial \tau} \eta(y) dy = - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial y} (a f) \eta(y) dy + \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (b f) \eta(y) dy, \quad (7.21)$$

где аргументы у f, a и b не выписаны явно. Переносим все слагаемые в (7.21) в левую часть равенства и объединяя интегралы, будем иметь:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y} (a f) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (b f) \right] \eta(y) dy. \quad (7.22)$$

Равенство (7.22) может выполняться для любой функции $\eta(y)$ только в том случае, если квадратная скобка, стоящая под знаком интеграла, равна нулю, то есть если

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y} (a f) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (b f) = 0. \quad (7.23)$$

Таким образом, плотность вероятности $f(t, x; \tau, y)$, рассматриваемая как функция четырех переменных t, x, τ, y , удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a(t, x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} b(t, x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad (7.24)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y} [a(\tau, y) f] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [b(\tau, y) f] = 0. \quad (7.25)$$

Уравнение (7.24) называют *первым* или *обратным уравнением Колмогорова*; уравнение (7.25) — *вторым* или *прямым уравнением Колмогорова*. Второе уравнение, до строгого его вывода Колмогоровым, встречалось в работах физиков. Поэтому его называют иногда *уравнением Фоккера-Планка* или *уравнением Фоккера-Планка-Колмогорова*.

§8. НАХОЖДЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ УРАВНЕНИЙ КОЛМОГОРОВА ПО СТОХАСТИЧЕСКОМУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ, ОПРЕДЕЛЯЮЩЕМУ МАРКОВСКИЙ ПРОЦЕСС

Рассмотрим случайный процесс $U(t)$, определяемый стохастическим дифференциальным уравнением

$$\frac{dU(t)}{dt} = \psi[U(t), t] + g[U(t), t]\xi(t), \quad (8.1)$$

где $\xi(t)$ — функция белого шума, имеющего нулевое математическое ожидание и корреляционную функцию, равную дельта-функции

$$\bar{\xi}(t) = 0, \quad K_{\xi}(\tau) = \delta(\tau). \quad (8.2)$$

Как было отмечено в параграфе 6, если предполагать, что белый шум является нормальным, то $U(t)$ является марковским случайным процессом. Предположение о нормальности белого шума не является необходимым условием для того, чтобы $U(t)$ обладали свойствами марковского случайного процесса, однако оно достаточно, чтобы вероятностная зависимость между ординатами процесса $\xi(t)$ убывала должным образом с увеличением интервала времени между этими ординатами. (Например, можно потребовать, чтобы функция броуновского движения $V(t)$, соответствующая функции $\xi(t)$, была бы нормальной). В приложениях эти условия обычно выполняются. Например, шумы в электролампах, связанные с дробовым эффектом; ряд случайных процессов, возникающих вследствие пуассоновского потока элементарных частиц и т. п., приводят к возникновению случайных процессов типа броуновского движения, которые можно считать нормальными.

Итак, будем считать, что функция $\xi(t)$ обладает свойствами, при которых процесс $U(t)$ является марковским. В этом случае $U(t)$ полностью характеризуется плотностью вероятности перехода $f(t, x; \tau, y)$, определяемой системой уравнений Колмогорова при соответствующих начальных и граничных условиях.

Найдем коэффициент сноса $a(t, x)$ и коэффициент диффузии $b(t, x)$, определяемые формулами (7.11) и (7.12). Для применения этих формул проинтегрируем обе части уравнения (8.1) в пределах от t до $\tau = t + \Delta$, понимая интеграл в смысле Стратоновича. Выполнив интегрирование и учитывая обозначения $U(t) = X$, $U(\tau) = Y$ получим

$$Y - X = \int_t^{t+\Delta} \psi[U(t_1), t_1] dt_1 + \int_t^{t+\Delta} g[U(t_1), t_1] dV(t_1), \quad (8.3)$$

где $dV(t_1) = \xi(t_1) dt_1$.

Подставляя найденное выражение для разности $(Y - X)$ в формулу (7.11), получим

$$\begin{aligned} a(t, x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} M \left\{ \frac{1}{\Delta} \int_t^{t+\Delta} \psi[U(t_1), t_1] dt_1 + \right. \\ \left. + \frac{1}{\Delta} \int_t^{t+\Delta} g[U(t_1), t_1] dV(t_1) \middle| X = x \right\}. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Вычисление математического ожидания первого интеграла в фигурных скобках не связано с затруднениями, так как при $\Delta \rightarrow 0$ функция $U(t_1) \rightarrow x$, а сам интеграл является обычным римановским интегралом, и, следовательно, можно применить теорему о среднем

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} M \left[\int_t^{t+\Delta} \psi[U(t_1), t_1] dt_1 | X = x \right] = \\ = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \psi(U(t + \Delta\theta), t + \Delta\theta) \Delta = \psi(x, t), \end{aligned} \quad (8.5)$$

где $0 < \theta < 1$.

При вычислении математического ожидания второго интеграла следует учитывать, что интеграл понимается в смысле Стратоновича и, следовательно, при вычислении предела интегральной суммы подынтегральное выражение будет содержать слагаемые, коррелированные с дифференциалами $dV(t_1)$. Действительно, учитывая малость интервала интегрирования Δ ,

функцию $U(t_1)$, являющуюся аргументом в подынтегральном выражении, можно представить в виде

$$U(t_1) = x + dU(t_1), \quad dU(t_1) = \psi(x, t)dt_1 + g(x, t)dV(t_1). \quad (8.6)$$

Учитывая определение интеграла Стратоновича, выражение для приращения, а также свойства приращений процесса броуновского движения, имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} M \left[\int_t^{t+\Delta} g[U(t_1), t_1] dV(t_1) \middle| X = x \right] &= \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} M \left[\int_t^{t+\Delta} g[x + dU(t_1), t_1] dV(t_1) \middle| X = x \right] = \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} M \left[g\left[x + \frac{\Delta U(t)}{2}, t\right] \Delta V(t) \middle| X = x \right] = \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} M \left[\left[g(x, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial g(x, t)}{\partial x} \Delta U(t) \right] \Delta V(t) \middle| X = x \right] = \\ &= \frac{1}{2} g(x, t) \frac{\partial g(x, t)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (8.7)$$

При выводе последней формулы через ΔU и ΔV обозначены приращения соответствующих процессов на интервале $[t, t + \Delta]$, а функция $g[x + \frac{\Delta U}{2}, t]$ выражена по формуле конечных приращений Лагранжа. Подставляя (8.5), и (8.7) в (8.4), для коэффициента сноса получим

$$a(t, x) = \psi(x, t) + \frac{1}{2} g(x, t) \frac{\partial g(x, t)}{\partial x}. \quad (8.8)$$

Для вычисления коэффициента диффузии $b(t, x)$, возведя в квадрат обе части равенства (8.3) и подставляя результат в

формулу (7.12), будем иметь

$$\begin{aligned}
 b(t, x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} M \Bigg\{ & \left[\int_t^{t+\Delta} \psi(U(t_1), t_1) dt_1 \right]^2 + \\
 & + 2 \int_t^{t+\Delta} \psi(U(t_1), t_1) dt_1 \int_t^{t+\Delta} g(U(t_1), t_1) dV_1 + \\
 & + \left[\int_t^{t+\Delta} g(U(t_1), t_1) dV_1 \right]^2 \Big| X = x \Bigg\}.
 \end{aligned} \quad (8.9)$$

Первое слагаемое в фигурных скобках имеет относительно Δ порядок малости Δ^2 и при переходе к пределу дает нуль; математическое ожидание второго слагаемого — тоже порядка Δ^2 и, следовательно, его отношение к Δ в пределе исчезает.

Для вычисления предела математического ожидания третьего слагаемого, записав квадрат интеграла как двойной интеграл, заменяя $dV(t_1)$ на $\xi(t_1)dt_1$ и меняя порядок выполнения операций интегрирования и нахождения математического ожидания, при соблюдении условия $U(t) = x$, получим

$$\begin{aligned}
 \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} M \Bigg\{ & \int_t^{t+\Delta} \int_t^{t+\Delta} g[U(t_1), t_1] g[U(t_2), t_2] \xi(t_1) \xi(t_2) dt_1 dt_2 \Bigg\} = \\
 = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} & \int_t^{t+\Delta} \int_t^{t+\Delta} g(x, t_1) g(x, t_2) \delta(t_2 - t_1) dt_1 dt_2 = g^2(x, t).
 \end{aligned} \quad (8.10)$$

Слагаемые, возникающие в данном случае вследствие наличия корреляционной связи между аргументами подынтегрального выражения и дифференциалами функций броуновского движения, имеют порядок малости более высокий, чем Δ и исчезают при переходе к пределу. Подставляя (8.10) в (8.9), получим окончательно

$$b(t, x) = g^2(x, t). \quad (8.11)$$

Таким образом, составление уравнений Колмогорова для марковского процесса, определяемого стохастическим диффе-

ренциальным уравнением, сводится к простым вычислениям, определяемым формулами (8.8) и (8.11). При выводе этих формул не делалось никаких предположений о виде функций $\psi(U, t)$ и $g(U, t)$, играющих роль коэффициентов исходного стохастического уравнения, исключая очевидного требования дифференцируемости функции $g(U, t)$ по аргументу U . Однако и это требование может быть ослаблено, так как можно допустить, чтобы эта функция терпела разрывы в конечном числе точек или, при ее непрерывности, в конечном числе угловых точек теряла свойство дифференцируемости.

Легко видеть, что разбив область возможных значений ординат функции $U(t)$ на такие подобласти, в каждой из которых функция $g(U, t)$ имеет производную по U , для любой такой подобласти мы сможем повторить приведенный выше вывод для коэффициентов сноса и диффузии, то есть получим те же формулы (8.8) и (8.10), определяющие коэффициенты уравнений Колмогорова. Так как эти коэффициенты в рассматриваемом случае не будут непрерывными функциями своих аргументов, то при решении уравнений Колмогорова возникают добавочные трудности, связанные с удовлетворением условий сопряжения на границах областей непрерывности коэффициентов уравнений. Эти вопросы будут освещены подробнее в параграфе 12 при рассмотрении методов решения уравнений Колмогорова.

§9. УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОРОВА ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА И ИХ СОСТАВЛЕНИЕ ПО СИСТЕМЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ПРОЦЕСС

Рассмотрим n случайных функций $U_1(t), \dots, U_n(t)$, образующих в совокупности n -мерный марковский процесс, который кратко будем обозначать $\vec{U}(t)$. Условимся по-прежнему обозначать ординаты процесса в настоящий момент времени $t < \tau$ через $X_1, \dots, X_n$, или кратко $\vec{X}$, а ординаты процесса в будущий момент времени τ — через $Y_1, \dots, Y_n$, или кратко $\vec{Y}$. Тот факт, что процесс $\vec{U}(t)$ марковский, означает независимость условной плотности вероятности ординат $\vec{Y}$ при фиксированных ординатах $\vec{X}$ от значений ординат процесса $\vec{U}(t)$ для моментов времени, предшествующих t .

Обозначим через $f(t, x_1, \dots, x_n; \tau, y_1, \dots, y_n)$, или кратко

$f(t, \vec{x}; \tau, \vec{y})$, условную плотность вероятности, называемую плотностью вероятности перехода из состояния $\vec{x}$ в момент времени t в состояние $\vec{y}$ в момент времени τ . Можно показать, повторив рассуждения, предшествующие выводу формулы (3.10), что все многомерные законы распределения процесса $\vec{U}(t)$ определяются начальным законом распределения ординат этого процесса и функцией $f(t, \vec{x}; \tau, \vec{y})$. Поскольку процесс $\vec{U}(t)$ марковский, плотность вероятности перехода $f(t, \vec{x}; \tau, \vec{y})$ удовлетворяет обобщенному уравнению Маркова

$$\begin{aligned} f(t, x_1, \dots, x_n; \tau, y_1, \dots, y_n) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(t, x_1, \dots, x_n; t_1, z_1, \dots, z_n) \times \\ \times f(t_1, z_1, \dots, z_n; \tau, y_1, \dots, y_n) dz_1 \dots dz_n, \end{aligned} \quad (9.1)$$

которое далее будем записывать сокращенно в форме:

$$f(t, \vec{x}; \tau, \vec{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(t, \vec{x}; t_1, \vec{z}) f(t_1, \vec{z}; \tau, \vec{y}) d\vec{z}, \quad (9.2)$$

где t_1 — промежуточный момент, удовлетворяющий условию $t < t_1 < \tau$, а $\vec{Z} = \vec{U}(t_1)$ — ордината процесса $\vec{U}(t)$ в этот момент.

С другой стороны, так как плотность перехода f является плотностью вероятности системы случайных величин $\vec{Y}$, то она нормирована по аргументам $\vec{y}$, то есть

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(t, x_1, \dots, x_n; \tau, y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(t, \vec{x}; \tau, \vec{y}) d\vec{y} = 1. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Из формул (9.1) и (9.3) можно получить уравнения Колмогорова многомерного марковского процесса таким же образом, как из формул (7.5) и (7.3) были получены уравнения Колмогорова для одномерного марковского процесса. Действительно,

положим $t_1 = t + \Delta$ в формуле (9.1), и воспользовавшись равенством (9.3), получим тождество

$$\begin{aligned} f(t + \Delta, x_1, \dots, x_n; \tau, y_1, \dots, y_n) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(t, x_1, \dots, x_n; t + \Delta, z_1, \dots, z_n) \times \\ \times f(t + \Delta, x_1, \dots, x_n; \tau, y_1, \dots, y_n) dz_1 \dots dz_n. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Вычитая (9.4) из (9.1) и деля полученную разность на Δ , после перехода к пределу $\Delta \rightarrow 0$, имеем

$$\begin{aligned} -\frac{\partial f(t, \vec{x}; \tau, \vec{y})}{\partial t} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(t, \vec{x}; t + \Delta, \vec{z}) \times \\ \times \{f(t + \Delta, \vec{z}; \tau, \vec{y}) - f(t + \Delta, \vec{x}; \tau, \vec{y})\} d\vec{z}. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Разложив первое слагаемое в фигурных скобках в ряд Тейлора около точки $\vec{z} = \vec{x}$ и сохраняя при этом только слагаемые до квадратичных включительно, получим

$$\begin{aligned} f(t + \Delta, \vec{z}; \tau, \vec{y}) = f(t + \Delta, \vec{x}; \tau, \vec{y}) + \\ + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(t + \Delta, \vec{x}; \tau, \vec{y})}{\partial x_j} (z_j - x_j) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 f(t + \Delta, \vec{x}; \tau, \vec{y})}{\partial x_j \partial x_l} (z_j - x_j)(z_l - x_l). \end{aligned} \quad (9.6)$$

Подставляя (9.6) в (9.5) и считая рассматриваемый процесс диффузионным, для которого отброшенные слагаемые не дают вклада в окончательное выражение, после перехода к пределу при $\Delta \rightarrow 0$, получим первое уравнение Колмогорова для многомерного марковского процесса

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^n a_j(t, \vec{x}) \frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n b_{jl}(t, \vec{x}) \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l} = 0, \quad (9.7)$$

где аргументы функции $f(t + \Delta, \vec{x}; \tau, \vec{y})$ для краткости опущены и

введены обозначения

$$\begin{aligned} a_j(t, \vec{x}) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(t, \vec{x}; t + \Delta, \vec{z})(z_j - x_j) dz_1 \dots dz_n = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow t} M\{Y_j - X_j | \vec{X} = \vec{x}\}, \end{aligned} \quad (9.8)$$

$$\begin{aligned} b_j(t, \vec{x}) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(t, \vec{x}; t + \Delta, \vec{z}) \times \\ &\times (z_j - x_j)(z_l - x_l) dz_1 \dots dz_n = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow t} M\{(Y_j - X_j)(Y_l - X_l) | \vec{X} = \vec{x}\}. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Коэффициенты a_j как и в одномерном случае называются коэффициентами сноса, а b_j — коэффициентами диффузии. Вводят также вектор сноса $\vec{a}(t, \vec{x}) = \{a_i(t, \vec{x})\}_{i=1}^n$ и матрицу диффузии $B(t, \vec{x}) = \|b_{ij}(t, \vec{x})\|_{i,j=1}^n$.

Аналогичным образом, повторяя рассуждения, предшествовавшие выводу формулы (7.23), получим, что плотность вероятности $f(t + \Delta, \vec{x}; \tau, \vec{y})$, рассматриваемая как функция $(\tau, \vec{y})$, удовлетворяет второму уравнению Колмогорова:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_j} [a_j(\tau, \vec{y}) f] - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_l} [b_{jl}(\tau, \vec{y}) f] = 0, \quad (9.10)$$

где $a_j(\tau, \vec{y})$ и $b_{jl}(\tau, \vec{y})$ — функции, определенные равенствами (9.8) и (9.9), в которых аргументы t и $\vec{x}$ заменены на τ и $\vec{y}$, соответственно.

Вычисление коэффициентов сноса a_j и диффузии b_{jl} по стохастическим дифференциальным уравнениям, определяющим многомерный марковский процесс, в принципе не отличаются от вычисления этих коэффициентов для одномерного процесса.

Предположим, что задан n -мерный марковский процесс $\vec{U}(t) = \{U_i(t)\}_{i=1}^n$, определяемый системой уравнений

$$\frac{dU_j(t)}{dt} = \psi(\vec{U}(t), t) + \sum_{l=1}^n g_{jl}[\vec{U}(t), t] \xi_l(t), \quad (j = \overline{1, n}), \quad (9.11)$$

где ψ_j, g_{jl} — заданные неслучайные функции своих аргументов, а $\xi_l(t)$ — независимые процессы белого шума, которые для простоты будем считать нормальными. Интегрируя каждое уравнение системы от t до $t + \Delta$, получим n равенств:

$$Y_j - X_j = \int_t^{t+\Delta} \psi[\vec{U}(t_1), t_1] dt_1 + \sum_{l=1}^n \int_t^{t+\Delta} g_{jl}[\vec{U}(t_1), t_1] \xi_l(t) dV_l(t), \quad (9.12)$$

где $j = \overline{1, n}$, произведения $\xi_l(t_1) dt_1$ заменены на дифференциалы функций броуновского движения, а интегралы понимаются в смысле Стратоновича.

Находя условные математические ожидания приращения ординаты компоненты процесса $Y_j - X_j$ и переходя к пределу в формуле (9.8) так же, как это было выполнено для одномерного марковского процесса при получении формулы (8.8), получим

$$a_j(t, \vec{x}) = \psi_j(\vec{x}, t) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial g_{jl}(\vec{x}, t)}{\partial x_k} g_{kl}(\vec{x}, t). \quad (9.13)$$

Записав равенство (9.12) для двух значений индекса j и l , перемножив правые части полученных равенств и вычислив условное математическое ожидание, после перехода к пределу при $\Delta \rightarrow 0$, в соответствии с формулой (9.9) получим

$$b_{jl}(t, \vec{x}) = \sum_{k=1}^n g_{jk}(\vec{x}, t) g_{lk}(\vec{x}, t). \quad (9.14)$$

Как и в случае одномерного марковского процесса, для многомерного процесса коэффициенты сноса a_j и коэффициенты диффузии b_{jl} могут иметь разрывы при некоторых значениях своих аргументов. Чаще всего это имеет место при некоторых значениях «пространственных переменных» $x_1, \dots, x_n$ (на некоторых «поверхностях переключения»). Данное обстоятельство должно быть учтено при решении уравнений Колмогорова путем постановки соответствующих добавочных условий на границах областей непрерывности коэффициентов. Более подробно такие задачи рассматриваются в параграфе 13.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ КОЛМОГороВА ДЛЯ НЕОГРАНИЧЕННОГО ПРОСТРАНСТВА

§ 10. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ КОЛМОГороВА ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА В СЛУЧАЕ ГЛАДКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ СНОСА И ДИФФУЗИИ

Рассмотрим решение уравнений Колмогорова для различных конкретных случаев задания марковского процесса. Основное внимание уделим рассмотрению второго уравнения Колмогорова для одномерного процесса, которое в соответствии с (7.25) имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y}[a(\tau, y)f] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}[b(\tau, y)f] = 0, \quad (10.1)$$

причем в данном параграфе коэффициент сноса $a(\tau, y)$ будем считать один раз, а коэффициент диффузии $b(\tau, y)$ — дважды непрерывно дифференцируемыми функциями своих аргументов.

Уравнение (10.1) является уравнением параболического типа, и, следовательно, для его однозначного решения достаточно задать значение функции f при $\tau = t$ (начальные условия) и значения этой функции на границах интервала (α, β) возможных значений ординат функции $U(t)$ (граничные условия).

При $\tau = t$ ордината марковского процесса Y совпадает с ординатой X . Следовательно,

$$f(t, x; \tau, y)|_{\tau=t} = f_0(t, y), \quad (10.2)$$

где $f_0(t, y)$ — плотность вероятности ординаты процесса в начальный момент времени. В частном случае, когда начальная ордината x предполагается заданной детерминированной величи-

ной, плотность вероятности $f_0(t, y)$ обращается в дельта-функцию $\delta(y - x)$. Таким образом при фиксированном начальном значении ординаты процесса

$$f(t, x; \tau, y)|_{\tau=t} = \delta(y - x). \quad (10.3)$$

Граничные условия следует рассмотреть отдельно для бесконечного интервала возможных значений ординат процесса $U(t)$ ($\alpha = -\infty; \beta = \infty$) и для конечных значений α и β . В первом случае из общих свойств плотности вероятности следует, что функция f должна обращаться в нуль на бесконечности и в качестве граничных условий мы будем иметь

$$f(t, x; \tau, y)|_{y=\pm\infty} = 0, \quad \tau \geq t. \quad (10.4)$$

Случай, когда оба значения α и β или хотя бы одно из них конечны, требует специального исследования. Перепишем для этой цели уравнение (10.1) в виде

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ a(\tau, y) f - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} [b(\tau, y) f] \right\} = 0. \quad (10.5)$$

Интегрируя последнее равенство по y от α до β и учитывая при этом, что $\int_{\alpha}^{\beta} f dy = 1$ и, следовательно, $\frac{\partial}{\partial y} \int_{\alpha}^{\beta} f dy = 0$, получим граничные условия для конечных значений α и β :

$$\begin{aligned} & a(\tau, \beta) f(t, x; \tau, \beta) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} [b(\tau, y) f(t, x; \tau, y)] \Big|_{y=\beta} = \\ & = a(\tau, \alpha) f(t, x; \tau, \alpha) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} [b(\tau, y) f(t, x; \tau, y)] \Big|_{y=\alpha}. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Условиям (10.6) иногда придают следующую наглядную интерпретацию: будем рассматривать выражение $af - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (bf)$ как некий «поток вероятности через точку с координатой y ». Тогда формула (10.6) может рассматриваться как «закон сохранения потока вероятности»: сколько этой фиктивной величины входит через левую границу в область возможных значений ординаты процесса, столько же уходит через правую границу.

В том случае, когда коэффициенты уравнений Колмогорова не удовлетворяют сформулированным в начале данного параграфа условиям гладкости при некоторых значениях «пространственной переменной» y , необходимо установить дополнительные условия, которым должна удовлетворять функция f в этих точках.

Рассмотрим для примера случай, когда коэффициент сноса $a(\tau, y)$ терпит разрыв при $y = y_0$, то есть случай, когда

$$a(\tau, y_0 - 0) \neq a(\tau, y_0 + 0), \quad (10.7)$$

где $a(\tau, y_0 - 0)$ — предельное значение функции $a(\tau, y)$ при стремлении y к y_0 слева, а $a(\tau, y_0 + 0)$ — справа. Будем считать интервал изменения бесконечным ($\alpha = -\infty, \beta = \infty$). Интегрирование равенства (10.5) по y от $-\infty$ до ∞ в этом случае дает

$$\begin{aligned} & \left\{ a(\tau, y)f(t, x; \tau, y) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} [b(\tau, y)f(t, x; \tau, y)] \right\}_{y=y_0-0} = \\ & = \left\{ a(\tau, y)f(t, x; \tau, y) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} [b(\tau, y)f(t, x; \tau, y)] \right\}_{y=y_0+0}. \end{aligned} \quad (10.8)$$

Полученную формулу также как и граничное условие (10.6) можно рассматривать как условие сохранения «потока вероятности» — поток вероятности проходит через особую точку $y = y_0$, сохраняя свою величину.

Аналогичным образом могут быть исследованы случаи, когда функция $a(\tau, y)$ имеет несколько разрывов в различных точках или же разрывным является коэффициент $b(\tau, y)$ либо его производная $\frac{\partial b}{\partial y}$. Рассмотрим основные случаи, для которых может быть получено решение уравнения Колмогорова в общем виде. Будем по-прежнему рассматривать второе уравнение Колмогорова, считая для простоты его коэффициенты непрерывными. Рассмотрение первого уравнения Колмогорова не связано с дополнительными трудностями, и мы оставим его в стороне.

В качестве первого случая рассмотрим уравнение Колмогорова, коэффициенты которого не зависят от переменной τ . Если эти коэффициенты удовлетворяют еще некоторым добавочным условиям (они будут получены ниже), то при достаточно большом значении разности $(\tau - t)$ значение функции f практически перестает зависеть как от временных переменных t и τ , так и от начального значения ординаты процесса x . Это предельное значение плотности перехода называется стационарным решением уравнения Колмогорова и легко может быть получено. Действительно, учитывая независимость f от τ , производную по τ в (10.1) можно отбросить, и уравнение (10.1) становится обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dy} [a(y)f] - \frac{1}{2} \frac{d^2}{dy^2} [b(y)f] = 0. \quad (10.9)$$

Далее будем считать, что на ординату процесса $U(t)$ наложено ограничение $\alpha \leq U \leq \beta$.

Интегрируя уравнение (10.9) по y , получим

$$\frac{d}{dy}[b(y)f] - 2a(y)f = 0, \quad (10.10)$$

так как постоянная интегрирования обращается в нуль вследствие выполнения граничных условий (10.6). Уравнение (10.10) представляет собой линейное дифференциальное уравнение первого порядка и после интегрирования по y его решение может быть записано в виде

$$f(y) = \frac{C}{b(y)} \exp\left\{2 \int_0^y \frac{a(y_1)}{b(y_1)} dy_1\right\}, \quad (10.11)$$

где постоянная интегрирования C определяется из условия нормировки плотности вероятности $f(y)$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy = 1, \quad (10.12)$$

то есть из условия

$$C \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b(y)} \exp\left\{2 \int_0^y \frac{a(y_1)}{b(y_1)} dy_1\right\} = 1. \quad (10.13)$$

Рассмотрим пример, иллюстрирующий применение формулы (10.11).

Пример 10.1. Рассмотрим вынужденные прямолинейные случайные колебания тела массой m под действием внешней силы $F_{\text{вн}}(t)$ при наличии силы сопротивления $F_c(U)$, зависящей от скорости тела U (см. Рис. 10.1). Допустим, что возмущение является процессом белого шума интенсивностью h

$$F_{\text{вн}}(t) = h\xi(t), \quad (10.14)$$

а сила сопротивления задается в виде

$$F_c(U) = -\alpha \cdot \text{sign } U |U|^{\beta}. \quad (10.15)$$

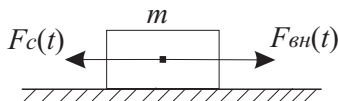


Рис. 10.1. К задаче о вынужденных колебаниях

При $\beta = 0$ имеем сухое (кулоново) трение, при $\beta = 1$ — вязкое (жидкостное) трение, а $\beta = 2$ отвечает аэродинамическому сопротивлению. В случае сухого трения $\alpha = \mu mg$, где μ — коэффициент сухого трения, m — масса тела, g — ускорение силы тяжести. По смыслу задачи скорость тела не ограничивается и принимает произвольные значения.

Решение. Уравнение движения такой системы имеет вид

$$m\dot{U} = -F_c(U) + h\xi \quad (10.16)$$

и задает марковский процесс изменения скорости с коэффициентами

$$a(y) = -\frac{1}{m}F_c(U), \quad b(y) = \frac{h^2}{m^2}, \quad (10.17)$$

поэтому согласно (10.11) финальный закон распределения скорости дается равенством

$$f(y) = C \exp\left\{\frac{2m}{h^2} \int_0^y F_c(x) dx\right\}, \quad (10.18)$$

где

$$\int_0^y F_c(x) dx = -\frac{\alpha}{\beta+1} |y|^{\beta+1}. \quad (10.19)$$

Подставляя выражение (10.18) в условие нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy = 1$, находим нормировочную постоянную

$$C = \frac{(\beta+1) \left(\frac{2\alpha m}{(\beta+1)h^2} \right)^{\frac{1}{\beta+1}}}{2\Gamma\left(\frac{1}{\beta+1}\right)}, \quad (10.20)$$

где $\Gamma(x)$ обозначает гамма-функцию

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-z} z^{x-1} dz. \quad (10.21)$$

В результате установившийся закон распределения скорости принимает вид

$$f(y) = \frac{(\beta + 1) \left(\frac{2\alpha m}{(\beta + 1)h^2} \right)^{\frac{1}{\beta + 1}}}{2\Gamma\left(\frac{1}{\beta + 1}\right)} \exp\left\{ -\frac{2m\alpha}{h^2(\beta + 1)} |y|^{\beta + 1} \right\}, \quad (10.22)$$

и характеризуется следующими значениями среднего модуля скорости и ее дисперсии

$$\begin{aligned} M[|U|] &= \frac{\left(\frac{(\beta + 1)h^2}{2\alpha m} \right)^{\frac{1}{\beta + 1}} \Gamma\left(\frac{2}{\beta + 1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\beta + 1}\right)}, \\ \sigma_U^2 &= \frac{\left(\frac{(\beta + 1)h^2}{2\alpha m} \right)^{\frac{2}{\beta + 1}} \Gamma\left(\frac{3}{\beta + 1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\beta + 1}\right)}. \end{aligned} \quad (10.23)$$

Отметим, что в этом примере коэффициент сноса (10.17) удовлетворяет сформулированным в данном параграфе условиям гладкости (непрерывная дифференцируемость) только при $\beta \geq 1$. Для значений $0 \leq \beta < 1$, вообще говоря, при $y = 0$ следовало бы ставить условия сопряжения, обсуждаемые далее в параграфе §11.. Можно показать, что решение (10.22) им удовлетворяет при любом $\beta \geq 0$. Это связано с тем, что решение (10.18) сохраняет силу для любой интегрируемой характеристики сил сопротивления $F_c(x)$ (см. пример 11.1)

Для возможности определения постоянной C необходимо, чтобы интеграл в левой части (10.13) был конечен, что и является необходимым условием существования стационарного решения уравнения Колмогорова для рассмотренного случая.

Вторым, весьма важным в практическом отношении, случаем аналитического решения уравнения Колмогорова является случай, когда эти уравнения путем преобразования независимых переменных могут быть преобразованы в одномерные уравнения теплопроводности, то есть уравнения вида

$$\frac{\partial f_1}{\partial \tau_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial y_1^2} = 0, \quad (10.24)$$

которое для неограниченной области при выполнении начальных условий (10.3) (при $\tau_1 = 0$) и граничных условиях (10.4) имеет

решение (см., например, [41])

$$f_1(\tau_1, y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\tau_1 - t_1}} \exp\left\{-\frac{(y_1 - x_1)^2}{2(\tau_1 - t_1)}\right\}. \quad (10.25)$$

В справедливости решения (10.25) легко убедиться непосредственной проверкой: при подстановке (10.25) в (10.24) получается тождество

$$\lim_{\tau_1 \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1 - e^{-2\tau_1}}} \exp\left\{-\frac{(y_1 - x_1)^2}{2\tau_1}\right\} = \delta(y_1 - x_1).$$

Далее, при $\tau = t$ выполняется начальное условие (10.3) и, наконец, $f(\tau_1, \pm\infty) = 0$.

Переход от уравнений Колмогорова произвольного вида к уравнению вида (10.24) возможен, если удастся так подобрать функции $\psi(\tau, y)$ и $\varphi(\tau)$, чтобы перейдя от старых переменных τ, y к новым переменным τ_1 и y_1 , соответственно, по формулам

$$\tau_1 = \varphi(\tau); \quad y_1 = \psi(\tau, y); \quad t_1 = \varphi(t); \quad x_1 = \psi(t, x) \quad (10.26)$$

получить требуемое уравнение. Поскольку случайная величина Y_1 связана со случайной величиной Y функциональным соотношением $Y_1 = \psi(\tau, Y)$, то условная плотность $f_1(t_1, x_1; \tau_1, y_1)$ случайной величины Y_1 определяется формулой [32, 9]

$$f_1(t_1, x_1; \tau_1, y_1) = f_1(t, x; \tau, y) \frac{1}{\left|\frac{\partial \psi(\tau, y)}{\partial y}\right|}, \quad (10.27)$$

где в правой части равенства старые независимые переменные предполагаются выраженными через новые.

Выполнив преобразование независимых переменных (10.26) и заменяя функцию f на f_1 , можно убедиться, что уравнения Колмогорова не изменяют свою форму и примут вид:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t_1} + a(t_1, x_1) \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} b'(t_1, x_1) \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = 0, \quad (10.28)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \tau_1} + \frac{\partial}{\partial y_1} [a'(\tau_1, y_1) f_1] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} [b'(\tau_1, y_1) f_1] = 0. \quad (10.29)$$

Новые коэффициенты диффузии и сноса a', b' выражаются через старые по формулам

$$a'(t_1, x_1) = \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x} a(t, x) + \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial t} \right] / \frac{d\varphi(t)}{dt}, \quad (10.30)$$

$$b'(t_1, x_1) = \left\{ \left[\frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x} \right]^2 b(t, x) \right\} / \frac{d\varphi(t)}{dt}, \quad (10.31)$$

где переменные t и x в правых частях равенства предполагаются выраженными через t_1 и x_1 (соответственно τ_1 и y_1). Если удастся подобрать вид функций $\varphi(t)$ и $\psi(t, x)$ так, чтобы коэффициент a' обратился в нуль, а коэффициент b' принял значение, равное -1 , то уравнение (10.29) превратится в уравнение теплопроводности (10.24), а уравнение (10.28) — в сопряженное ему уравнение, для которого так же легко может быть написан общий интеграл.

Например, если исходные коэффициенты $a(t, x)$ линейно зависят от переменной x , а $b(t, x)$ от переменной x не зависит, то есть

$$a(t, x) = \alpha(t)x + \beta(t); \quad b(t, x) = \gamma(t), \quad (10.32)$$

то, положив

$$\psi(t, x) = x \exp \left\{ - \int_0^t \alpha(t_1) dt_1 \right\} - \int_0^t \beta(t_2) \exp \left\{ - \int_0^{t_2} \alpha(t_1) dt_1 \right\} dt_2, \quad (10.33)$$

$$\varphi(t) = \int_0^t \gamma(t_2) \exp \left\{ -2 \int_0^{t_2} \alpha(t_1) dt_1 \right\} dt_2, \quad (10.34)$$

в соответствии с (10.30) и (10.31) получим

$$a' = 0; \quad b' = 1. \quad (10.35)$$

Для функций $f_1(t_1, x_1; \tau_1, y_1)$ в этом случае получим решение, определяемое формулой (10.15), в которой плотность вероятности начальной ординаты $f_0(x)$ должна быть заменена на плотность вероятности $f'_0(x_1)$ начального значения x_1 , определяемую формулой

$$f'_0(x_1) = f_0(x) / \left[\frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x} \right], \quad (10.36)$$

где в правой части равенства переменные t и x предполагаются выраженными через t_1 и x_1 .

Применим полученные формулы к еще более частному случаю, предположив, что

$$\begin{aligned} a(t, x) = a(x) = -\alpha x; \quad b(t, x) = b = \gamma = \text{const} > 0; \\ \alpha = \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (10.37)$$

Воспользовавшись в этом случае формулами (10.33) и (10.34), получим

$$\psi(t, x) = xe^{-\alpha t}, \quad (10.38)$$

$$\varphi(t) = \frac{b}{2\alpha}(1 - e^{2\alpha t}). \quad (10.39)$$

Следовательно,

$$x_1 = xe^{\alpha t}, \quad t_1 = \frac{b}{2\alpha}(1 - e^{2\alpha t}), \quad (10.40)$$

$$y_1 = ye^{\alpha t}, \quad \tau = \frac{b}{2\alpha}(1 - e^{2\alpha \tau}). \quad (10.41)$$

Предположим для простоты, что начальное значение ординаты случайного процесса $U(t)$ фиксировано, то есть

$$f_0(y) = \delta(y - x). \quad (10.42)$$

Тогда, используя формулу (10.25) для плотности вероятности перехода, в новых переменных, получим

$$f_1(t_1, x_1; \tau_1, y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\tau_1 - t_1}} \exp\left\{-\frac{(y_1 - x_1)^2}{2(\tau_1 - t_1)}\right\}. \quad (10.43)$$

Переходя затем к старым переменным, учитывая при этом формулы (10.27), (10.38), (10.40) и (10.41), имеем

$$f(t, x; \tau, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{(1 - e^{-2\alpha(\tau-t)})\frac{b}{2\alpha}}} \exp\left\{-\frac{[y - xe^{-\alpha(\tau-t)}]^2}{\frac{b}{\alpha}[1 - e^{-2\alpha(\tau-t)}]}\right\}. \quad (10.44)$$

Формула (10.44) показывает, что если коэффициент сноса марковского процесса пропорционален ординате процесса, а коэффициент диффузии постоянен, то ордината процесса в момент времени $\tau > t$ при условии, что ордината процесса в начальный

момент времени t задана, подчиняется нормальному закону распределения с математическим ожиданием

$$M[Y] = xe^{-\alpha(\tau-t)} \quad (10.45)$$

и дисперсией

$$D[Y] = \frac{b}{2\alpha} [1 - e^{-2\alpha(\tau-t)}]. \quad (10.46)$$

то есть рассматриваемый марковский процесс является нормальным.

В том случае, когда задана не начальная ордината процесса, а ее закон распределения $f_0(x)$, легко показать, что марковский процесс с коэффициентами Колмогорова (10.37) по-прежнему будет нормальным, если нормальным является закон распределения начальной ординаты. (см. пример 10.3).

В том случае, когда уравнения Колмогорова путем замены независимых переменных (10.26) не удастся свести к уравнению теплопроводности, их решение часто удастся получить классическими методами математической физики (применением метода разделения переменных, методами операционного исчисления и т. п.). Применимы также и различные приближенные методы: метод Галеркина, метод Канторовича и другие, которые будут рассмотрены более подробно далее в главе 5 применительно к задаче определения вероятности пребывания случайного процесса в заданной области. Рассмотрим несколько примеров, связанных с уравнением Колмогорова вида (10.24).

Пример 10.2. Показать, что марковский процесс $U(t)$, плотность вероятности перехода $f(t, x; \tau, y)$ для которого определяется уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad (10.47)$$

при дополнительных условиях

$$f|_{\tau=0} = \delta(y), \quad f|_{y=\pm\infty} = 0 \quad (10.48)$$

является процессом броуновского движения.

Решение. На основании (10.24) плотность вероятности f определяется формулой

$$f(0, 0; \tau, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{y^2}{2\tau}}. \quad (10.49)$$

Следовательно, процесс $U(t)$ нормальный, его дисперсия равна τ , а математическое ожидание равно 0. Для того, чтобы процесс $U(t)$ был процессом броуновского движения, достаточно показать, что

$$D[U(\tau) - U(t)] = \tau - t, \quad M[U(\tau)U(t)] = t, \quad (\tau \geq t). \quad (10.50)$$

Применяя формулу (10.25) при начальном условии вида $U|_{\tau=t} = x$, имеем

$$f_1(t_1, x_1; \tau_1, y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\tau_1 - t_1}} \exp\left\{-\frac{(y_1 - x_1)^2}{2(\tau_1 - t_1)}\right\},$$

то есть

$$D[U(\tau) - U(t)] = \tau - t. \quad (10.51)$$

Плотность вероятности $f(x, y)$ системы (X, Y) выражается в виде:

$$f(x, y) = f(x)f(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\tau - t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2(\tau-t)}}. \quad (10.52)$$

Следовательно,

$$M[XY] = \frac{1}{2\pi\sqrt{t(\tau-t)}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2t} - \frac{(y-x)^2}{2(\tau-t)}} xy dx dy = t. \quad (10.53)$$

Пример 10.3. Доказать, что если нормальный центрированный процесс $U(t)$ — марковский, то $\dot{U}(t) = \varphi(t)\xi(t)$, где $\varphi(t)$ — детерминированная функция, а $\xi(t)$ — гауссовский белый шум.

Решение. Так как процесс одновременно и нормальный, и марковский, то плотность вероятности $f(t, x; \tau, y)$ удовлетворяет уравнениям Колмогорова, в которых коэффициент сноса линейно зависит от пространственной координаты, а коэффициент диффузии b зависит только от времени. Следовательно, уравнение для процесса $U(t)$, являющееся уравнением первого порядка вследствие марковости процесса должно иметь вид

$$\frac{dU}{dt} = \alpha(t)U + \beta(t) + \varphi(t)\xi(t). \quad (10.54)$$

По условию $M[U(t)] = 0$, что возможно только при выполнении равенства $\alpha = \beta = 0$. Следовательно, $\frac{dU}{dt} = \varphi(t)\xi(t)$, что и требовалось доказать.

Пример 10.4. Показать, что марковский процесс, определяемый вторым уравнением Колмогорова

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} - \alpha \frac{\partial}{\partial y}(yf) - \frac{\gamma}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad (10.55)$$

при добавочных условиях

$$f|_{\tau=t} = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}}, \quad f|_{y=\pm\infty} = 0, \quad (10.56)$$

где σ_x и $\bar{x}$ — заданные дифференцируемые детерминированные функции времени, будет нормальным.

Решение. Достаточно показать, что можно подобрать такие функции $\sigma_y(t)$ и $\bar{y}(t)$, что плотность нормального закона распределения

$$f(t, x; \tau, y) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\bar{y})^2}{2\sigma_y^2}}, \quad f|_{y=\pm\infty} = 0, \quad (10.57)$$

удовлетворяет уравнению Колмогорова и заданным начальным условиям (граничные условия, как легко видеть, удовлетворяются). Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = f \left[-\frac{1}{\sigma_y} \frac{d\sigma_y}{d\tau} + \frac{1}{\sigma_y^3} (y - \bar{y})^2 \frac{d\sigma_y}{d\tau} + \frac{1}{\sigma_y^2} (y - \bar{y}) \frac{d\bar{y}}{d\tau} \right], \quad (10.58)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f \left[-\frac{(y - \bar{y})}{\sigma_y^2} \right], \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f \left[-\frac{1}{\sigma_y^2} + \frac{(y - \bar{y})^2}{\sigma_y^4} \right]. \quad (10.59)$$

Подставляя производные (10.59) в уравнение Колмогорова, сокращая на f и приравнявая коэффициенты при y^2 , y и y^0 к нулю, получим три уравнения, первые два из которых после простых преобразований имеют вид

$$\frac{d\sigma_y^2}{d\tau} = \gamma - \alpha \sigma_y^2, \quad \frac{d\bar{y}}{d\tau} = -\alpha \sigma_y^2 \bar{y}, \quad (10.60)$$

а третье уравнение является следствием первых двух. Полученная таким образом система может быть решена при начальных

условиях $y(\tau)|_{\tau=t} = x$, $\sigma_y^2|_{\tau=t} = \sigma_x^2$, что и доказывает правдивость утверждения, сформулированного в условии примера.

Пример 10.5. Определить переходную плотность вероятности марковского процесса, описываемого стохастическим дифференциальным уравнением

$$\dot{U} = \sigma U \xi(t), \quad (\sigma > 0), \quad (10.61)$$

понимаемым в смысле Стратоновича.

Решение. Марковость процесса $U(t)$ очевидна, так как уравнение (10.61) относится к виду (8.1), для которого это было установлено ранее, причем были получены общие выражения коэффициентов сноса и диффузии по Стратоновичу ((8.8) и (8.11)). Применительно к процессу (10.61) они дают

$$a(\tau, y) = \frac{1}{2}\sigma^2 y, \quad b(\tau, y) = \sigma^2 y^2, \quad (10.62)$$

и второе уравнение Колмогорова примет следующий вид

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\sigma^2 y}{2} f \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma^2 y^2 f) = 0. \quad (10.63)$$

Поставим дополнительные условия к уравнению (10.63). Здесь мы сталкиваемся с одной особенностью, обусловленной спецификой уравнения (10.61). В этой главе мы рассматриваем задачи, в которых дозволённая область изменения ординаты процесса $U(t)$ никак не ограничивается (задачам с ограничениями будет посвящена следующая глава). Тем не менее, в данной задаче ограничения на U возникают автоматически без постановки каких-либо особых условий и следуют из самого вида уравнения (10.61). Очевидно, процесс $U(t)$ не может пересечь границу $U = 0$. Если при некотором $t = t_0$ оказывается, что $U(t) = 0$, то согласно (10.61) тогда имеем $\dot{U} = 0$, то есть изображающая точка останется на границе. Отрицательные приращения U на границе невозможны в силу самих уравнений движения. Таким образом, при задании положительного начального значения U процесс развивается только на положительной полуоси, а отрицательного — не уходит с отрицательной полуоси.

Теория классификации границ для одномерных марковских процессов разработана В. Феллером [2]. В соответствии с этой

классификацией граница $U = 0$ является в данной задаче естественной. На естественной границе не ставятся никаких дополнительных условий, и она никак не влияет на процесс решения. Это обстоятельство и позволяет рассмотреть данный пример среди задач без ограничений на фазовые координаты.

Предположим, что в начальный момент времени $\tau = t$ ордината $U(t) = x$ положительна и фиксирована. Тогда при $y = \infty$ ставятся краевые условия

$$f|_{y=\infty} = 0, \quad (10.64)$$

а при $\tau = t$ имеем начальное условие

$$f|_{\tau=t} = \delta(y - x), \quad (10.65)$$

причем заранее известно, что $f \equiv 0$ при $y < 0$ для любого $\tau > t$. При этом (в отличие от задач, рассматриваемых в следующей главе) значение f на границе $y = 0$ никак не ограничивается и может быть произвольным.

В явном виде уравнение (10.63) запишется так

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} f - \frac{3\sigma^2 y}{2} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\sigma^2 y^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \quad (10.66)$$

Для решения этого уравнения воспользуемся методом преобразования координат по формулам (10.16), причем конкретные значения функции φ и ψ выберем в следующем виде

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \sigma^2 \tau, & t_1 &= \sigma^2 t, \\ y_1 &= \ln y + \sigma^2 \tau, & x_1 &= \ln x + \sigma^2 t. \end{aligned} \quad (10.67)$$

Кроме того, введем новую неизвестную функцию

$$f_1 = e^{-\frac{\sigma^2(\tau-t)}{2}} f. \quad (10.68)$$

Старые переменные (τ, y) выражаются через новые переменные (τ_1, y_1) по формулам

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\tau_1}{\sigma^2}, & t &= \frac{t_1}{\sigma^2}, \\ y &= e^{y_1 - \tau_1}, & x &= e^{x_1 - t_1}, \end{aligned} \quad (10.69)$$

причем

$$f = e^{\frac{\tau_1 - t_1}{2}} f_1. \quad (10.70)$$

Производные новых переменных по старым даются равенствами

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_1}{\partial \tau} &= 0, & \frac{\partial \tau_1}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial y_1}{\partial \tau} &= \sigma^2, & \frac{\partial y_1}{\partial y} &= \frac{1}{y},\end{aligned}\tag{10.71}$$

так что якобиан преобразования от (τ, y) к (τ_1, y_1) отличен от нуля и конечен при любом $y > 0$.

Производные, фигурирующие в (10.66), выражаются в новых переменных с помощью (10.71) так

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \tau} &= e^{\frac{\tau_1 - t_1}{2}} \left[\frac{\sigma^2}{2} f_1 + \sigma^2 \frac{\partial f_1}{\partial \tau_1} + \sigma^2 \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \right], \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= e^{\frac{\tau_1 - t_1}{2}} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \frac{1}{y}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= e^{\frac{\tau_1 - t_1}{2}} \left[\frac{\partial^2 f_1}{\partial y_1^2} \frac{1}{y^2} - \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \frac{1}{y^2} \right].\end{aligned}\tag{10.72}$$

Подставляя последние выражения в (10.66), получаем

$$\begin{aligned}e^{\frac{\tau_1 - t_1}{2}} \left[\frac{\sigma^2}{2} f_1 + \sigma^2 \frac{\partial f_1}{\partial \tau_1} + \sigma^2 \frac{\partial f_1}{\partial y_1} - \frac{\sigma^2}{2} f_1 - \right. \\ \left. - \frac{3\sigma^2}{2} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial y_1^2} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \right] = 0.\end{aligned}\tag{10.73}$$

Сокращая обе части (10.73) на $\sigma^2 e^{\frac{\tau_1}{2}}$ и приводя подобные члены в квадратных скобках, получаем для новой неизвестной функции уравнение (10.14)

$$\frac{\partial f_1}{\partial \tau_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial y_1^2} = 0,\tag{10.74}$$

однако его решение не будет совпадать с (10.15) так как согласно (10.65) функция f_1 должна удовлетворять более сложным начальным условиям

$$f_1|_{\tau_1=t_1} = \delta \left(e^{-t_1} (e^{y_1} - e^{x_1}) \right).\tag{10.75}$$

При произвольном начальном условии

$$f_1|_{\tau_1=t_1} = f_{10}(y_1)\tag{10.76}$$

решение уравнения (10.74) выражается через фундаментальное решение (10.15) и начальное условие (10.76) в виде [41]

$$f_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau_1 - t_1)}} e^{-\frac{(y_1 - y_{10})^2}{2(\tau_1 - t_1)}} f_{10}(y_{10}) dy_{10}. \quad (10.77)$$

Подставляя в последнее выражение f_{10} в виде (10.75) и переходя к новой переменной интегрирования $z = e^{y_{10} - t_1}$, получаем

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau_1 - t_1)}} e^{-\frac{(y_1 - x_1)^2}{2(\tau_1 - t_1)} - x_1 + t_1}. \quad (10.78)$$

Если теперь выразить f через f_1 по формуле (10.68), а в полученном уравнении выразить y_1, x_1, τ_1 и t_1 согласно (10.67), то после несложных алгебраических преобразований находим искомую переходную плотность в виде логарифмически нормального закона

$$f(t, x; \tau, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau - t)\sigma y}} e^{-\frac{(\ln y - \ln x)^2}{2\sigma^2(\tau - t)}}. \quad (10.79)$$

Это означает, что при условии $U(t) = x$ для любого $\tau > t$

$$U(\tau) = x e^{\sigma V(\tau - t)}, \quad (10.80)$$

где $V(t)$ — функция броуновского движения.

В частности, при заданном значении $U(0) = u_0$ для любого $t > 0$ имеем

$$U(t) = u_0 e^{\sigma V(t)}. \quad (10.81)$$

Это означает, что процесс (10.61) лишь числовым множителем $e^{-\frac{\sigma^2 t}{2}}$ отличается от процесса геометрического броуновского движения

$$U_*(t) = u_0 e^{-\frac{\sigma^2 t}{2} + \sigma V(t)}, \quad (10.82)$$

рассмотренного в примере 4.2. Можно показать, что процесс геометрического броуновского движения удовлетворяет тому же самому уравнению (10.61), но понимаемому в смысле Ито. Соответствующее доказательство мы для экономии места опускаем и предоставляем возможность читателю выполнить его самостоятельно.

Процессы $U(t)$ и $U_*(t)$ обладают принципиально различными асимптотическими свойствами при $t \rightarrow \infty$. Если математическое ожидание U неограниченно возрастает при увеличении t , то математическое ожидание U_* сохраняет при любом значении t постоянное значение, равное единице, что было доказано ранее. Этот пример показывает, насколько существенно могут отличаться по своим свойствам решения одного и того же стохастического уравнения, понимаемого в разных смыслах слова.

§ 11. ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА ПРИ НАРУШЕНИИ УСЛОВИЙ ГЛАДКОСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОРОВА

В предыдущих параграфах предполагалось, что коэффициенты сноса и диффузии, определяющие вид уравнения Колмогорова, являются достаточно гладкими функциями своих аргументов, а именно: коэффициенты сноса один раз, а коэффициенты диффузии — дважды непрерывно дифференцируемы. Однако имеется ряд задач, для которых указанные условия гладкости коэффициентов не выполняются.

Например, если марковский процесс $U(t)$ определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{dU}{dt} = C \operatorname{sign} U + \xi(t), \quad (11.1)$$

где $\xi(t)$ — белый шум, то для коэффициента сноса a имеем

$$a(\tau, y) = C \operatorname{sign} y. \quad (11.2)$$

Следовательно, при переходе значения y через 0 коэффициент сноса меняется скачком на $\pm C$. В том случае, когда коэффициенты уравнения Колмогорова терпят разрыв на некоторых линиях, называемых часто «линиями переключения», решение уравнения ищут в каждой из областей, для которой коэффициенты непрерывны, а затем используют условия сопряжения на линии переключения.

В приведенном выше примере необходимо поставить два

условия сопряжения при $y = 0$

$$\begin{aligned} & -Cf(t, x; \tau, y) - \frac{1}{2} \frac{\partial f(t, x; \tau, y)}{\partial y} \Big|_{y=-0} = \\ & = Cf(t, x; \tau, y) - \frac{1}{2} \frac{\partial f(t, x; \tau, y)}{\partial y} \Big|_{y=+0} \quad (11.3) \\ & f(t, x; \tau, y) \Big|_{y=-0} = f(t, x; \tau, y) \Big|_{y=+0}, \end{aligned}$$

первое из которых отражает условие непрерывности потока вероятности (10.8), а второе — непрерывности самой плотности вероятности. Второе из указанных условий запишется в виде (11.2) только в том случае, когда коэффициент диффузии является гладкой функцией на линии переключения. При наличии на этой линии скачка коэффициента диффузии правая и левая часть равенства (11.2) домножается на некоторый множитель, отражающий неоднородность диффузии по разные стороны границы. Наличие условий сопряжения существенно затрудняет получения решения уравнения Колмогорова в случае негладких коэффициентов.

В литературе существует два подхода к выводу условий сопряжения для уравнения Колмогорова, первый из них был предложен в работе [43], а затем более подробно описан в книге [44]. В этом подходе проводится физическая аналогия между плотностью вероятности перехода марковского процесса $f(t, x; \tau, y)$ и плотностью некой идеальной жидкости (или газа), заполняющей всю дозволённую область изменения ординаты процесса $U(t)$. В начальный момент вся масса жидкости сосредоточена в точке x . Далее она начинает перетекать таким образом, что средняя скорость в точке x в момент времени t равняется $a(t, x)$. Помимо этого имеется случайная диффузия, характеризуемая коэффициентом диффузии $b(t, x)$. Условия сопряжения для f выводятся из условия неразрывности для такой жидкости.

Второй подход является более строгим и не опирается на какие-либо качественные или интуитивные соображения. Проводится стандартный вывод второго уравнения Колмогорова, аналогичный тому, который был приведен в параграфе 7, но допускается, что условия гладкости $a(\tau, y)$ и $b(\tau, y)$ могут быть нарушены в некоторой точке $y = y_0$. Тогда при $y < y_0$ и $y > y_0$ получаем уравнение Колмогорова, записываемое в обычном виде, а при $y = y_0$ искомые условия сопряжения [39]. В одномерном случае оба указанных подхода приводят к одному

результату: условие непрерывности потока вероятности записывается в виде (10.8), а условие непрерывности плотности вероятности заменяется на условие согласования ее правого и левого предельных значений в точке разрыва коэффициентов

$$b(\tau, y)f(t, x; \tau, y)|_{y=y_0-0} = b(\tau, y)f(t, x; \tau, y)|_{y=y_0+0}. \quad (11.4)$$

Поясним использование этих условий на примере.

Пример 11.1. Обратимся к системе, рассмотренной в примере 10.1, и запишем уравнение Колмогорова и условия сопряжения к нему в случае сухого трения ($\beta = 0$, $\alpha = \mu mg$). Согласно вышеизложенному само уравнение должно быть записано в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \tau} - \mu g \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{h^2}{2m^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, & y > 0, \\ \frac{\partial f}{\partial \tau} + \mu g \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{h^2}{2m^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, & y < 0 \end{cases} \quad (11.5)$$

и решаться при условиях сопряжения:

$$\mu g f - \frac{h^2}{2m^2} \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y=-0} = -\mu g f - \frac{h^2}{2m^2} \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y=+0}, \quad (11.6)$$

$$f \Big|_{y=-0} = f \Big|_{y=+0}. \quad (11.7)$$

Нетрудно убедиться, что ранее построенное решение (10.22), которое при $\beta = 0$, $\alpha = \mu mg$ приобретает вид

$$f(y) = \frac{\mu g m^2}{h^2} e^{-\frac{2\mu g m^2}{h^2}|y|}, \quad (11.8)$$

удовлетворяет всем необходимым уравнениям и условиям.

Действительно, выполнение условия (11.7) очевидно. Поток вероятности для решения (10.18) выражается в виде

$$af - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y}(bf) = -\frac{1}{m} F_c(y)f - \frac{h^2}{2m^2} \left(-\frac{2m}{h^2} F_c(y) \right) f \equiv 0 \quad (11.9)$$

и тождественно обращается в нуль при произвольной нелинейной характеристике сил сопротивления $F_c(y)$. Следовательно, выполнено и условие (11.6).

§12. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОРОВА ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Многомерные уравнения Колмогорова принадлежат к уравнениям параболического типа и, следовательно, их решения однозначно определяются начальными и граничными условиями, подобными условиям для одномерного уравнения.

Рассмотрим для определенности второе уравнение Колмогорова, которое в соответствии с (9.10) можно переписать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_j} \left\{ a_j(\tau, \vec{y}) f - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial y_l} [b_{jl}(\tau, \vec{y}) f] \right\} = 0. \quad (12.1)$$

Начальные условия для этого уравнения будут различны в зависимости от того, заданы конкретные значения компонент вектора $\vec{X} = \vec{U}(t)$ или задан n -мерный закон распределения этих компонент. В первом случае начальные условия будут иметь вид:

$$f(t, \vec{x}; \tau, \vec{y})|_{\tau=t} = \prod_{j=1}^n \delta(y_j - x_j). \quad (12.2)$$

Во втором случае начальные условия будут следующими

$$f(t, \vec{x}; \tau, \vec{y})|_{\tau=t} = f_0(\vec{x}), \quad (12.3)$$

где $f_0(\vec{x})$ — плотность вероятности компонент вектора $\vec{X}$.

Для вывода граничных условий обозначим n -мерную область возможных значений вектора $\vec{y}$ через D , а $(n-1)$ -мерную поверхность, замыкающую эту область, через S . Поверхность S считаем двухсторонней и кусочно-гладкой.

Проинтегрировав (12.1) по всем компонентам y_j вектора $\vec{y}$ по области D и учитывая при этом, что вследствие нормировки плотности вероятности

$$\int \cdots \int_{(D)} f dy_1 \dots dy_n = 1, \quad (12.4)$$

получим

$$\underbrace{\int \cdots \int_{(D)}}_{(n)} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_j} \left\{ a_j f - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial y_l} (b_{jl} f) \right\} dy_1 \dots dy_n = 0. \quad (12.5)$$

Будем считать, что a_j и b_{jl} нигде не терпят разрывов и дифференцируемы по аргументам y_j соответствующее число раз, а именно, a_j один раз, а b_{jl} — дважды непрерывно дифференцируемы. Тогда объемный интеграл (12.5), в соответствии с теоремой Гаусса-Остроградского, может быть преобразован в интеграл по поверхности S от нормальной составляющей вектора, компоненты которого равны

$$\left\{ a_j f - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial y_l} (b_{jl} f) \right\}.$$

В результате равенству (12.5) можно придать следующий вид:

$$\int_{(S)} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_j} \left\{ a_j f - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial y_l} (b_{jl} f) \right\} \cos(\vec{y}, \vec{n}) dS = 0, \quad (12.6)$$

где dS элемент поверхности S .

Удовлетворить равенству (12.1), наложив на f условия, относящиеся только к ее поведению в заданной точке поверхности, можно только положив для любой точки поверхности S

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_j} \left\{ a_j(\tau, \vec{y}) f(t, \vec{x}; \tau, \vec{y}) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial y_l} [b_{jl}(\tau, \vec{y}) f(t, \vec{x}; \tau, \vec{y})] \right\} \cos(\vec{y}_j, \vec{n}) = 0, \end{aligned} \quad (12.7)$$

где $\cos(\vec{y}_j, \vec{n})$ — проекция единичного вектора нормали к поверхности S на направление оси y_j .

Формула (12.7) показывает, что для n -мерных марковских процессов выражения $\left\{ a_j f - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial y_l} (b_{jl} f) \right\}$ можно рассматривать как компоненты «потока вероятности», а условия на границе области D трактовать как отсутствие перетекания вероятности через поверхность S , то есть как своего рода условия «сохранения вероятности». В частном случае, когда область D — все пространство, условия на границе сводятся к требованию обращения в нуль условной плотности вероятности $f(t, \vec{x}, \tau, \vec{y})$ при обращении любой переменной y_j , взятой по модулю, в бесконечность.

В том случае, когда коэффициенты a_j или b_{jl} являются только кусочно-гладкими, то есть теряют гладкость на некоторых поверхностях («поверхностях переключения» S_α , $\alpha = \overline{1, m}$), по-прежнему интегрируя уравнения (12.1) по всей области D и применяя теорему Гаусса–Остроградского к каждой из областей гладкости коэффициентов уравнения Колмогорова, можно показать, что на каждой из этих поверхностей «поток вероятности» должен быть непрерывен, то есть должны соблюдаться условия

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_j} \left\{ a_j f - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial y_l} (b_{jl} f) \right\} \Big|_{S_\alpha^-} \cos(\vec{y}_j, \vec{n}_\alpha) = \\ = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_j} \left\{ a_j f - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial y_l} (b_{jl} f) \right\} \Big|_{S_\alpha^+} \cos(\vec{y}_j, \vec{n}_\alpha), \end{aligned} \quad (12.8)$$

где $\alpha = \overline{1, m}$, а значение выражения, стоящего в фигурных скобках в левой части равенства, берется на нижнем берегу поверхности переключения S_α , а в правой части равенства — на ее верхнем берегу.

Таким образом, добавочные условия, обеспечивающие однозначность решения уравнений Колмогорова в многомерном случае, в принципе не отличаются от условий для одномерного марковского процесса и не представляют принципиальной сложности. Однако точное аналитическое решение многомерных уравнений Колмогорова не удается получить во многих практически интересных случаях, даже при малых значениях n (например, $n = 2, 3$). Происходит это вследствие тех причин, которые упоминались во введении: переменные в уравнениях, как правило, разделяются только для некоторых частных случаев (см. пример 10.1), а другие типовые методы точного решения уравнений также оказываются непригодными.

Уравнения Колмогорова могут быть проинтегрированы в общем виде, когда коэффициенты диффузии b_{jl} зависят только от времени, а коэффициенты сноса a_j линейно зависят от «пространственных» переменных y_l и x_l . В этом случае при начальных условиях (12.2) решением уравнений Колмогорова $f(t, \vec{x}; \tau, \vec{y})$ является плотность нормального закона распределения.

Покажем это. Положим

$$a_j(\tau, \vec{y}) = \sum_{l=1}^n \alpha_{jl}(\tau) y_l + \alpha_{j0}(\tau); \quad b_{jl} = b_{jl}(\tau); \quad l, j = \overline{1, n}. \quad (12.9)$$

Применим ко второму уравнению Колмогорова (12.1) n -кратное преобразование Фурье, для чего умножим обе части равенства (12.1) на

$$\exp \left\{ i \sum_{j=1}^n z_j y_j \right\} = \exp \{ i \vec{z}^T \vec{y} \}$$

(все компоненты $\vec{z}$ вещественные, T — символ транспонирования) и проинтегрируем по всем переменным y_j в бесконечных пределах. В результате этого преобразования все слагаемые левой части уравнения могут быть выражены через характеристическую функцию E системы случайных величин $Y_1, \dots, Y_n$, определяемую равенством:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int \exp \{ i \vec{z}^T \vec{y} \} f(t, \vec{x}; \tau, \vec{y}) d\vec{y}. \quad (12.10)$$

Действительно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int \frac{\partial f}{\partial \tau} \exp \{ i \vec{z}^T \vec{y} \} f(t, \vec{x}; \tau, \vec{y}) dy_1 \dots dy_n = \frac{\partial E}{\partial \tau}, \quad (12.11)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \{ i \vec{z}^T \vec{y} \} \frac{\partial}{\partial y_j} (a_j f) d\vec{y} = \\ & = -i z_j \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \{ i \vec{z}^T \vec{y} \} f \left[\sum_{l=1}^n \alpha_{jl} y_l + \alpha_{j0} \right] d\vec{y} = \quad (12.12) \\ & = -z_j \left[\alpha_{jl} \frac{\partial E}{\partial z_l} + i \alpha_{j0} E \right], \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \{ i \vec{z}^T \vec{y} \} \frac{\partial^2 f}{\partial y_j \partial y_l} d\vec{y} = -z_j z_l \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \{ i \vec{z}^T \vec{y} \} f d\vec{y} = -z_j z_l E, \quad (12.13)$$

где при получении последних двух формул применено интегрирование по частям и учтено, что плотность вероятности f обращается в нуль на бесконечности. Подставляя (12.11), (12.12) и

(12.13) в уравнение (12.1), получим

$$\frac{\partial E}{\partial \tau} - \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \alpha_{jl} z_j \frac{\partial E}{\partial z_l} + \left[\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n b_{jl} z_j z_l - i \sum_{j=1}^n \alpha_{j0} z_j \right] E = 0. \quad (12.14)$$

Уравнение для характеристической функции марковского процесса впервые было получено в общем виде в 1944 году В. С. Пугачевым и носит название *уравнения Пугачева*. В общем случае оно является интегро-дифференциальным [28, 27], однако для линейных систем сводится к дифференциальному.

Уравнение (12.14) является линейным уравнением первого порядка в частных производных и, следовательно, его решение однозначно определяется начальными условиями, то есть видом функции E при $\tau = t$. Для получения этих начальных условий достаточно применить n -кратное преобразование Фурье к начальным условиям (12.2) для функции f , в результате чего получим

$$E|_{\tau=0} = e^{i\vec{z}^T \vec{y}}. \quad (12.15)$$

Дальнейшее решение уравнения (12.14) может быть получено общими методами, рассматриваемыми в теории дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (см, например, [11]), однако в данном случае легко проверить, что ему можно удовлетворить, приняв в качестве искомой функции E характеристическую функцию нормального закона системы случайных величин. Действительно, положив

$$E = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n k_{jl} z_j z_l + i \sum_{j=1}^n z_j \bar{y}_j \right\}, \quad (12.16)$$

где элементы корреляционной матрицы k_{jl} и математические ожидания $\bar{y}_j$ могут быть функциями τ , после подстановки в уравнение (12.14) и сокращения на E , получим

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n z_j z_l \frac{dk_{jl}}{d\tau} + i \sum_{j=1}^n z_j \frac{d\bar{y}_j}{d\tau} + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n z_j z_l \left(\sum_{r=1}^n \alpha_{jr} k_{rl} \right) - \\ & - i \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \alpha_{jl} z_j y_l + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n z_j z_l b_{jl}(\tau) - i \sum_{j=1}^n \alpha_{j0} z_j = 0. \end{aligned} \quad (12.17)$$

Приравнивая нулю коэффициенты при z_j , а также при произведениях $z_j z_l$ ($j, l = \overline{1, n}$) получаем, что уравнение (12.17) обращается в тождество, если выполняется следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} d\bar{y}_j - \sum_{r=1}^n \alpha_{jr} \bar{y}_r, \quad (j = \overline{1, n}), \\ \frac{dk_{jl}}{d\tau} - \sum_{r=1}^n (\alpha_{jr} k_{rl} + \alpha_{lr} k_{rj}) = b_{jl}(\tau), \quad (j, l = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (12.18)$$

В соответствии с формулой (12.15) начальными условиями при решении системы (12.18) будут

$$\bar{y}_j|_{\tau=t} = x_j, \quad k_{jl}|_{\tau=t} = 0, \quad (j, l = \overline{1, n}). \quad (12.19)$$

Таким образом показано, что n -мерный марковский процесс, имеющий коэффициенты уравнений Колмогорова вида (12.9), при начальных условиях (12.2), является нормальным¹. Если начальные условия заданы в виде (12.3), то процесс по-прежнему будет нормальным, если только функция $f_0(\bar{y})$ является плотностью нормального закона распределения. Действительно, обозначив значения элементов корреляционной матрицы закона f_0 через k_{jl}^0 , а математические ожидания компонент через $\bar{y}_j^0$, в качестве начального значения характеристической функции E получим

$$E|_{\tau=t} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n k_{jl}^0 z_j z_l + i \sum_{j=1}^n z_j y_j^0 \right\}. \quad (12.20)$$

Изменение начальных условий приведет только к тому, что начальные условия для системы (12.18) примут вид, отличный от (12.19)

$$\bar{y}_j|_{\tau=t} = y_j^0, \quad k_{jl}|_{\tau=t} = k_{jl}^0, \quad (j, l = \overline{1, n}). \quad (12.21)$$

Если функция f_0 не является плотностью нормального закона распределения, то $E|_{\tau=t}$ не может быть представлено в виде (12.20) ни при каких k_{jl}^0 и $\bar{y}_j^0$. Разыскивая решение в форме (12.16) невозможно удовлетворить начальным условиям и,

¹ Легко убедиться, что справедливо и обратное утверждение: если многомерный марковский процесс нормальный, то коэффициенты уравнений Колмогорова имеют вид (12.9).

следовательно, исследуемый марковский процесс уже не будет нормальный. В общем случае следует решать уравнение (12.14) общими методами [11].

Рассмотренный случай интегрируемости уравнений Колмогорова имеет важное значение, поскольку линейные стационарные марковские процессы имеют дробно-рациональную спектральную плотность, а именно такие процессы наиболее часто встречаются в приложениях.

Действительно, если коэффициенты сноса и диффузии многомерного марковского процесса имеют вид (12.9), то в соответствии с формулами (9.11), (9.13) и (9.14) компоненты процесса удовлетворяют системе стохастических уравнений (значение α_{j0} всегда можно сделать равным нулю, добавив к $U_j(t)$ некоторые неслучайные функции времени)

$$\frac{dU_j(t)}{dt} = \sum_{l=1}^n \alpha_{jl}(t)U_l + \sum_{l=1}^n g_{jl}(t)\xi_l(t), \quad (j = \overline{1, n}), \quad (12.22)$$

где $\xi_l(t)$ — независимые функции белого шума, а коэффициенты $g_{jl}(t)$ связаны с b_{jl} уравнениями

$$\sum_{k=1}^n g_{jk}(t)g_{lk}(t) = b_{jl}(t); \quad (j, l = \overline{1, n}). \quad (12.23)$$

Для того, чтобы система уравнений (12.22) имела стационарное решение, необходимо, чтобы коэффициенты α_{jl} и g_{jl} были бы постоянными, а значения α_{jl} кроме того удовлетворяли бы условиям, при которых характеристическое уравнение системы имело бы только корни с отрицательными вещественными частями (см. параграф §3.). В этом случае по прошествии достаточно большого интервала времени t все функции $U_j(t)$ можно считать стационарными, причем их спектральные плотности будут дробно-рациональными функциями частоты, поскольку определяются равенствами [30]

$$S_{U_j}(\omega) = \sum_{l=1}^n |A_{jl}(\omega)|^2 S_{x_l}(\omega) + \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n A_{jl}^*(\omega) A_{jk}(\omega) S_{x_l x_k}(\omega),$$

$$(j = \overline{1, n}), \quad (12.24)$$

вытекающими из конкретного вида уравнений (12.22).

Поясним обозначения, используемые в (12.24). В роли случайного возмущения в j -м уравнении (12.22) выступает процесс $x_j(t) = \sum_{l=1}^n g_{jl} \xi_l(t)$, представляющий линейную комбинацию независимых процессов белого шума ξ_l с постоянными коэффициентами g_{jl} . Спектральная плотность такого процесса $S_{x_j}(\omega)$, а также взаимная спектральная плотность $S_{x_j x_l}(\omega)$ даются равенствами

$$\begin{aligned} S_{x_j}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^n g_{jl}^2 \\ S_{x_j x_l}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n g_{jk} g_{kl} \end{aligned} \quad (12.25)$$

и не зависят от ω .

Равенство (12.22) позволяет выразить спектральную плотность j -й компоненты $U_j(t)$ через спектральные плотности всех остальных компонент, а также взаимные спектральные плотности между этими компонентами. Если исключить затем из полученных выражений взаимные спектральные плотности, то приходим к равенству (12.24), в котором

$$A_{jl}(\omega) = \frac{\Delta_{jl}(\omega)}{\Delta(\omega)}, \quad (12.26)$$

а звездочка обозначает комплексно-сопряженное выражение. Здесь через Δ обозначен определитель

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} i\omega - \alpha_{11} & -\alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\alpha_{n1} & -\alpha_{n2} & \dots & i\omega - \alpha_{nn} \end{vmatrix}, \quad (12.27)$$

а через $\Delta_{jl}(\omega)$ — алгебраическое дополнение элемента, стоящего в нем на пересечении j -й строки и l -го столбца. Очевидно,

$$\Delta(\omega) = \det(i\omega I_n - \alpha),$$

где I_n — единичная матрица, а $\alpha = \|\alpha_{ij}\|_{i,j=1}^n$ — матрица системы (12.22). Выражение (12.24) получается стандартными методами спектральной теории [30, 28]. Для краткости его вывод здесь не приводится. Наиболее важен качественный результат: любая компонента стационарного нормального многомерного

процесса, описываемого системой линейных уравнений, имеет дробно-рациональную спектральную плотность.

Справедливо и обратное утверждение: если стационарный нормальный процесс имеет дробно-рациональную спектральную плотность, то он является компонентой многомерного марковского процесса, число измерений которого равно половине показателя степени полинома, стоящего в знаменателе спектральной плотности.

Действительно, предположим, что имеется стационарный нормальный процесс $U(t)$, имеющий спектральную плотность

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{|P_m(i\omega)|^2}{|Q_n(i\omega)|^2}, \quad (m < n), \quad (12.28)$$

где P_m и Q_n — полиномы степеней m и n с постоянными коэффициентами β_j и α_j , соответственно, причем $\alpha_0 = 1$.

$$\begin{aligned} P_m &= \beta_0 x^m + \beta_1 x^{m-1} + \dots + \beta_m, \\ Q_n &= x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_n. \end{aligned} \quad (12.29)$$

Процесс $U(t)$ является стационарным решением дифференциального уравнения

$$Q_n(p)U(t) = P_m(p)\xi(t), \quad (12.30)$$

где $p = \frac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования, а $\xi(t)$ — белый шум.

Путем простых алгебраических преобразований [30] можно доказать, что уравнение (12.30) эквивалентно следующей системе n уравнений первого порядка

$$\frac{dU_j(t)}{dt} = \begin{cases} U_{j+1}(t), & 1 \leq j \leq n-m-1, \\ U_{j+1}(t) + C_{j-(n-m)+1}\xi(t), & n-m \leq j \leq (n-1), \\ -\sum_{l=1}^n \alpha_l U_{n-l}(t) + C_m \xi(t), & j = n, \end{cases} \quad (12.31)$$

где коэффициенты C_k определяются рекуррентными соотношениями

$$C_k = \beta_k - \sum_{r=0}^{k-1} \alpha_{k-r} C_r; \quad C_0 = \beta_0; \quad k = \overline{1, m}. \quad (12.32)$$

Система (12.31), по доказанному выше, определяет n -мерный марковский процесс. Следовательно, стационарный нормальный

процесс с дробно-рациональной спектральной плотностью является компонентой n -мерного марковского процесса.

Доказанную выше связь, существующую между нормальными процессами с дробно-рациональной спектральной плотностью и марковскими процессами, иногда называют теоремами Дуба. Первая теорема Дуба задает условия, при которых процесс с дробно-рациональной спектральной плотностью является марковским, а вторая — условия, когда его можно считать компонентой многомерного марковского процесса.

В корреляционной теории линейных систем, как правило, рассматривают стационарные процессы с дробно-рациональными спектральными плотностями, имеющие нормальный или близкий к нормальному закон распределения. Теоремы Дуба показывают, что, считая эти процессы компонентами многомерных марковских процессов, мы, не делая дополнительных допущений, получаем возможность применить к их исследованию весьма эффективный аппарат теории марковских процессов.

Перейдем к рассмотрению примеров многомерных марковских процессов. Особое внимание уделим нелинейным задачам.

Пример 12.1. Получим стационарное распределение вероятностей процесса $\bar{U}(t)$, являющегося решением нелинейного дифференциального уравнения второго порядка

$$\ddot{U} + \alpha \dot{U} + \varphi(U) = h\xi(t) \quad (12.33)$$

и выяснить, при каких ограничениях на параметры системы и функцию φ это решение имеет место.

Решение. Процесс $U(t)$, взятый сам по себе, не является марковским, однако, его можно рассматривать как компоненту двумерного марковского процесса $\vec{U}(t) = U_1(t), U_2(t)$, определяемого уравнениями ($U_1 = U, U_2 = \dot{U}$):

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = U_2, \\ \dot{U}_2 = -\alpha U_2 - \varphi(U_1) + h\xi, \end{cases} \quad (12.34)$$

марковское свойство которого следует из результатов параграфа 6. Вычисляя коэффициенты сноса и диффузии по формулам (9.13)–(9.14), находим

$$\begin{aligned} a_1 &= y_2, & a_2 &= -\alpha y_2 - \varphi(y_1), \\ b_{11} &= b_{12} = 0, & b_{22} &= h^2. \end{aligned} \quad (12.35)$$

Стационарное уравнение Колмогорова получаем из (9.10), опуская производную по времени

$$y_2 \frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{\partial}{\partial y_2} [(\alpha y_2 + \varphi(y_1))f] - \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2} = 0. \quad (12.36)$$

Уравнение (12.36) допускает точное решение методом разделения переменных. Представим искомую плотность f в виде произведения двух функций

$$f(y_1, y_2) = f_1(y_1)f_2(y_2), \quad (12.37)$$

каждая из которых зависит только от одного аргумента y_i . Подставляя представление (12.37) в (12.36) имеем

$$y_2 f_1' f_2 - \varphi(y_1) f_1 f_2' - f_1 \left(\alpha y_2 f_2 + \frac{h^2}{2} f_2' \right)' = 0. \quad (12.38)$$

Потребуем, чтобы функция f_2 удовлетворяла дифференциальному уравнению

$$f_2' + \frac{2\alpha y_2}{h^2} f_2 = 0, \quad (12.39)$$

что эквивалентно

$$f_2(y_2) = C_2 \exp \left\{ -\frac{\alpha y_2^2}{h^2} \right\}, \quad (12.40)$$

где C_2 — произвольная постоянная. Тогда третье слагаемое в (12.38) обратится в нуль, а само уравнение преобразуется к виду

$$\left[f_1' + \frac{2\alpha}{h^2} \varphi(y_1) \right] y_2 f_2 = 0, \quad (12.41)$$

откуда следует

$$f_1(y_1) = C_1 \exp \left\{ -\frac{\alpha y_2^2}{h^2} \int_0^{y_1} \varphi(y) dy \right\}, \quad (12.42)$$

причем C_1 — также произвольная постоянная.

Форма решения (12.37) означает, что компоненты процесса (12.34) в установившемся режиме независимы. Подберем постоянные C_i из условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_i(y_i) dy_i = 1, \quad (i = \overline{1, 2}). \quad (12.43)$$

Тогда функция f_i будет совпадать с финальным законом распределения i -й компоненты процесса (12.34). Из условия (12.43) находим

$$C_1 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\alpha y_2^2}{h^2} \int_0^{y_1} \varphi(y) dy \right\} dy_1 \right]^{-1}, \quad C_2 = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \frac{1}{h}. \quad (12.44)$$

Таким образом в установившемся режиме сам процесс U и его производная $\dot{U}$ независимы, причем последняя распределена по нормальному закону с нулевым средним и дисперсией

$$\sigma_{U_2}^2 = \frac{h^2}{2\alpha}. \quad (12.45)$$

Условие применимости данного решения сводится к требованию сходимости интеграла (12.46)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\alpha y_2^2}{h^2} \int_0^{y_1} \varphi(y) dy \right\} dy_1 < \infty. \quad (12.46)$$

Отметим, что построенное решение часто применяется в самых разнообразных задачах. В частности в механике оно используется для исследования осциллятора с вязким трением и нелинейной восстанавливающей силой. Появление нелинейной характеристики позиционной силы может быть обусловлено наличием в системе так называемых «начальных несовершенств»: зазоров, люфтов, предварительного натяжения или поджатия упругих элементов, трещин и т. п. Хотя сами по себе все элементы могут быть линейными, но из-за погрешности при их сборке система в целом ведет себя как нелинейная. Поясним сказанное примером.

Пример 12.2. Массивное основание совершает случайные колебания по закону $W(t)$, причем его ускорение есть процесс белого шума интенсивностью h . На основании с помощью линейного демпфера с коэффициентом сопротивления α и пружины жесткостью C укреплено тело массой m . Пружина имеет трещину, вследствие чего ее упругая характеристика отличается от идеальной и имеет вид

$$\varphi(x) = Cx \left[1 - \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} \text{sign}(x) \right], \quad (12.47)$$

где параметр $0 < \gamma < 1$ определяет степень повреждения пружины. Для данной системы (Рис. 12.1) требуется получить финаль-

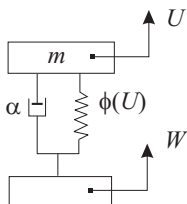


Рис. 12.1. К задаче о нелинейном осцилляторе

ный закон распределения относительного перемещения тела.

Решение. Уравнение относительного движения тела имеет вид

$$m\ddot{U} + \alpha\dot{U} + \varphi(U) = -m\ddot{W}. \quad (12.48)$$

По условию

$$\ddot{W} = -h\xi. \quad (12.49)$$

Знак минус в (12.49) взят только для удобства записи последующих формул и не является принципиальным: процессы $\xi(t)$ и $-\xi(t)$ совпадают в широком смысле слова (см. параграф 2) и характеризуются одним и тем же законом распределения. В результате перемещение тела описывается уравнением

$$\ddot{U} + \frac{\alpha}{m}\dot{U} + \frac{1}{m}\varphi(U) = h\xi. \quad (12.50)$$

Применяя решение примера 10.1 получаем

$$f(u) = \sqrt{\frac{\alpha C}{\pi m}} \cdot \frac{1}{h} \exp \left\{ -\frac{\alpha C u^2}{m h^2} \left(1 - \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} \text{sign}(u) \right) \right\}, \quad (12.51)$$

откуда находим среднее перемещение и дисперсию перемещения в виде

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{m}{\pi\alpha C}} \cdot h \frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma}(1+\sqrt{1-\gamma})}, \quad (12.52)$$

$$\sigma_u^2 = \frac{mh^2}{2\alpha C} \left[1 + \frac{\gamma(1 - \frac{2}{\pi}\gamma + \sqrt{1-\gamma})}{(1-\gamma)(1+\sqrt{1-\gamma})^2} \right]. \quad (12.53)$$

Появление трещины приводит к наличию систематического отклонения тела от положения равновесия ($\bar{u} \neq 0$), а также к увеличению дисперсии перемещения по сравнению с идеальной пружиной ($\gamma = 0$). Подобный же эффект изменения дисперсии имеет место и при других видах начальных несовершенств системы, например, в случае предварительного поджатия пружины [19], для которого

$$\varphi(x) = C(x + a \operatorname{sign}(x)), \quad (12.54)$$

где a — предварительное поджатие. При $a > 0$ значение σ_u^2 оказывается меньшим, чем при $a = 0$, хотя $\bar{u}$ остается равным нулю при любом a . В нашем случае увеличение дисперсии перемещения может оказаться весьма ощутимым и зависит от степени повреждения пружины γ .

Пример 12.3. Рассмотрим n -мерный процесс $\vec{W}(t)$, являющийся многомерным обобщением процесса (12.33)

$$\ddot{\vec{W}} + \alpha \dot{\vec{W}} + \vec{\varphi}(\vec{W}) = h \vec{\xi}(t), \quad (12.55)$$

причем потребуем, чтобы векторная функция $\vec{\varphi}(x)$ была потенциальной, то есть выражалась в виде градиента некоторой скалярной функции $\varphi(\vec{x})$, называемой потенциалом,

$$\vec{\varphi}(\vec{x}) = \operatorname{grad} \Phi(\vec{x}). \quad (12.56)$$

Это означает, что компоненты $\vec{\varphi}$

$$\varphi_i(\vec{x}) = \frac{\partial \Phi(\vec{x})}{\partial x_i}, \quad (i = \overline{1, n}). \quad (12.57)$$

Требуется получить установившийся закон распределения компонент $\vec{W}$ и условия, при которых он существует.

Решение. Чтобы построить многомерный марковский процесс, введем вспомогательный процесс $\vec{Z}(t)$ вида

$$\vec{Z} = \dot{\vec{W}}. \quad (12.58)$$

Очевидно, расширенный процесс

$$\vec{U}(t) = \{\vec{W}(t), \vec{Z}(t)\}$$

является марковским. Действительно, полагая $U_i(t) = W_i(t)$ при $n+1 \leq i \leq 2n$ и $U_i(t) = Z_{i-n}(t)$ при $1 \leq i \leq n$ получаем следующие определяющие его стохастические дифференциальные уравнения

$$\dot{U}_i = \begin{cases} U_{n+i}, & i = \overline{1, n}, \\ -\alpha U_i - \varphi_{i-n}(\vec{U}') + h\xi_{i-n}, & i = \overline{n+1, 2n}, \end{cases} \quad (12.59)$$

где через $\vec{U}'$ обозначен вектор размерности n , составленный из первых n компонент $\vec{U}$. Поскольку система (12.59) имеет вид (9.11), то марковость $\vec{U}$ обеспечена.

Коэффициенты уравнения Колмогорова подсчитываются по формулам (9.13) и (9.14)

$$a_i = \begin{cases} y_{n+i}, & i = \overline{1, n}, \\ -\alpha y_i - \varphi_{i-n}(\vec{y}'), & i = \overline{n+1, 2n}, \end{cases} \quad (12.60)$$

$$b_{ij} = \begin{cases} h^2, & i = j, & j = \overline{n+1, 2n}, \\ 0, & i \neq j; i = j, & j = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (12.61)$$

где $\vec{y}' = \{y_j\}_{j=1}^n$. Согласно общему выражению (9.10) многомерное уравнение Колмогорова в установившемся режиме запишется в форме

$$\sum_{i=1}^n y_{n+i} \frac{\partial f}{\partial y_i} - \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{\partial}{\partial y_i} [(\alpha y_i + \varphi_{i-n}(\vec{y}')) f] - \frac{h^2}{2} \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{\partial^2 f}{\partial y_i^2} = 0. \quad (12.62)$$

Будем как и в примере 10.1 строить решение методом разделения переменных в виде произведения двух функций

$$f(\vec{y}) = f_1(\vec{y}') f_2(\vec{y}''), \quad (12.63)$$

из которых первая зависит только от компонент $y_1, \dots, y_n$, а вторая — только от $y_{n+1}, \dots, y_{2n}$. Это дает

$$\sum_{i=1}^n \left(y_{n+i} \frac{\partial f_1}{\partial y_i} f_2 - \varphi_i(\vec{y}') f_1 \frac{\partial f_2}{\partial y_{n+i}} \right) - f_1 \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\alpha y_i f_2 + \frac{h^2}{2} \frac{\partial f_2}{\partial y_i} \right) = 0. \quad (12.64)$$

Подберем f_2 так, чтобы последний член в (12.64) тождественно обращался в нуль. Это можно сделать, положив

$$f_2(\vec{y}'') = C_2 e^{-\frac{\alpha}{h^2} \sum_{i=n+1}^{2n} y_i^2}, \quad (12.65)$$

тогда

$$\frac{\partial f_2}{\partial y_i} + \frac{2\alpha y_i}{h^2} f_2 = 0, \quad i = \overline{n+1, 2n}. \quad (12.66)$$

Выражая производные f_2 по y_i из последнего уравнения и подставляя эти выражения в (12.64) находим

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f_1}{\partial y_i} + \frac{2\alpha}{h^2} \varphi_i(\vec{y}') f_1 \right] y_{n+i} f_2 = 0. \quad (12.67)$$

Этому уравнению можно удовлетворить с помощью решения

$$f_1(\vec{y}') = C_1 e^{-\frac{2\alpha}{h^2} \Phi(\vec{y}')}. \quad (12.68)$$

Итак, в установившемся режиме первые n компонент процесса $\vec{U}$ не зависят от последних его n вспомогательных компонент, которые взаимно независимы и распределены по нормальному закону. Первые, основные компоненты, совпадающие с компонентами исследуемого процесса (12.55) распределены по закону (12.68), где Φ — потенциальная функция, определяемая равенством (12.56), а постоянная нормировки C выражается через интеграл

$$C_1 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2\alpha}{h^2} \Phi(\vec{y})} dy_1 \dots dy_n \right]^{-1}, \quad (12.69)$$

сходимость которого и является необходимым условием справедливости полученного решения.

Пример 12.4. Получить совместный закон распределения координаты и скорости броуновской частицы, рассмотренной в примере 6.1, считая, что частица стартует из состояния покоя, а ее координата отсчитывается от первоначального положения.

Решение. Рассмотрим двумерный марковский процесс, компоненты которого равны $U_1(t) = X(t)$ и $U_2(t) = U(t)$, а X и U обозначают соответственно координату и скорость частицы. Этот процесс описывается стохастическими уравнениями

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = U_2, \\ \dot{U}_2 = -\frac{\beta}{m}U_2 + \frac{h}{m}\xi, \end{cases} \quad (12.70)$$

которые должны решаться при начальных условиях

$$U_1(0) = 0, \quad U_2(0) = 0, \quad (12.71)$$

причем все обозначения в (12.70) совпадают с обозначениями примера 6.1.

Обозначая через $\bar{u}_i(t)$ математическое ожидание компоненты $U_i(t)$, а через $k_{ij}(t)$ — корреляционный момент между $U_i(t)$ и $U_j(t)$, получаем согласно (12.18) следующую систему дифференциальных уравнений для математических ожиданий

$$\dot{\bar{u}}_1 = \bar{u}_2, \quad \dot{\bar{u}}_2 = -\frac{\beta}{m}\bar{u}_2, \quad (12.72)$$

а также систему дифференциальных уравнений, определяющую корреляционные моменты

$$\begin{cases} \dot{k}_{11} = 2k_{12}, \\ \dot{k}_{12} = -\frac{\beta}{m}k_{12} + k_{22}, \\ \dot{k}_{22} = -\frac{2\beta}{m}k_{22} + \frac{h^2}{m^2}. \end{cases} \quad (12.73)$$

Вследствие начальных условий (12.71) обе этих системы должны решаться при начальных условиях

$$\bar{u}_1(0) = 0, \quad \bar{u}_2(0) = 0, \quad (12.74)$$

$$k_{11}(0) = 0, \quad k_{12}(0) = 0, \quad k_{22}(0) = 0, \quad (12.75)$$

откуда сразу же следует равенство нулю математических ожиданий обеих компонент

$$\bar{u}_1(\tau) \equiv 0, \quad \bar{u}_2(\tau) \equiv 0. \quad (12.76)$$

Далее интегрируем последовательно каждое уравнение системы (12.73) в порядке, обратном их записи в этой системе, в результате чего находим

$$\begin{aligned} k_{11}(t) &= \frac{h^2 m}{\beta^3} \left[\frac{\beta t}{m} - \frac{1}{2} (1 - e^{-\frac{\beta}{m} t}) (3 - e^{-\frac{\beta}{m} t}) \right], \\ k_{12}(t) &= \frac{h^2}{2\beta^2} (1 - e^{-\frac{\beta}{m} t})^2, \\ k_{22}(t) &= \frac{h^2}{2m\beta} (1 - e^{-\frac{2\beta}{m} t}). \end{aligned} \quad (12.77)$$

Таким образом, координата и скорость частицы представляют собой нормальные зависимые центрированные величины, причем при неограниченном увеличении t дисперсия скорости и корреляционный момент между скоростью и координатой стремятся к предельным значениям

$$k_{22\infty} = \frac{h^2}{2m\beta}, \quad k_{12\infty} = \frac{h^2}{2\beta^2}, \quad (12.78)$$

а дисперсия координаты возрастает по линейному закону

$$k_{11}(t) = \frac{h^2}{\beta^2} t [1 + o(t^{-1})]. \quad (12.79)$$

Пример 12.5. Стационарный нормальный процесс $W(t)$ характеризуется нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$K_w(\tau) = \sigma_w^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau. \quad (12.80)$$

Получить уравнения формирующего фильтра, преобразующего стандартный гауссовский белый шум $\xi(t)$ в данный процесс.

Решение. Вначале получим спектральную плотность W с помощью формулы обратного преобразования Фурье (см. параграф 3)

$$S_w(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} K_w(\tau) d\tau \quad (12.81)$$

Выражая косинус по формуле Эйлера через экспоненту

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad (12.82)$$

разбивая интегралы по всей числовой оси $(-\infty, +\infty)$ на сумму интегралов по полуосям $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ и применяя очевидные формулы

$$\int_0^{\infty} e^{-(\alpha \pm i\beta)\tau} d\tau = \frac{1}{\alpha \pm i\beta}, \quad \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha \pm i\beta)\tau} d\tau = \frac{1}{\alpha \pm i\beta}, \quad (12.83)$$

после приведения подобных членов получим

$$S_w(\omega) = \frac{\sigma_w^2 \alpha (\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2)}{\pi [(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2) + 4\alpha^2 \beta^2]}. \quad (12.84)$$

Теперь представим функцию (12.84) в виде (12.28), где степень полинома, стоящего в числителе, m равняется 1, а степень полинома в знаменателе n равняется 2, причем сами эти полиномы задаются равенствами

$$\begin{aligned} P_1(x) &= \sqrt{2\alpha} \sigma_w (x + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}), \\ Q_2(x) &= x^2 + 2\alpha x + (\alpha^2 + \beta^2). \end{aligned} \quad (12.85)$$

Следовательно, интересующий нас процесс можно представить как стационарное решение дифференциального уравнения

$$\ddot{W} + 2\alpha \dot{W} + (\alpha^2 + \beta^2)W = \sqrt{2\alpha} \sigma_w (\dot{\xi} + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \xi). \quad (12.86)$$

В соответствии с общей теорией введем двумерный процесс $\vec{W} = (W_1, W_2)$, определяемый системой уравнений (12.30), которая в данном случае выглядит так:

$$\begin{cases} \dot{W}_1 = W_2 + C_0 \xi, \\ \dot{W}_2 = -2\alpha W_2 - (\alpha^2 + \beta^2)W_1 + C_1 \xi. \end{cases} \quad (12.87)$$

Исключая из уравнений (12.87) компоненту W_2 , получаем одно уравнение второго порядка относительно W_1 следующего вида

$$\ddot{W}_1 + 2\alpha \dot{W}_1 + (\alpha^2 + \beta^2)W_1 = C_0 \dot{\xi} + (2\alpha C_0 + C_1)\xi. \quad (12.88)$$

Потребуем, чтобы неизвестные коэффициенты C_0 и C_1 удовлетворяли системе уравнений

$$\begin{cases} C_0 = \sqrt{2\alpha}\sigma_w, \\ C_1 + 2\alpha C_0 = \sqrt{2\alpha(\alpha^2 + \beta^2)}\sigma_w. \end{cases} \quad (12.89)$$

Тогда уравнения (12.86) и (12.88) совпадают друг с другом и, значит,

$$W_1(t) = W(t). \quad (12.90)$$

Решая систему (12.89), получаем

$$\begin{cases} C_0 = \sqrt{2\alpha}\sigma_w, \\ C_1 = \sqrt{2\alpha}(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - 2\alpha)\sigma_w, \end{cases} \quad (12.91)$$

и искомые уравнения формирующего фильтра примут окончательный вид

$$\begin{cases} \dot{W}_1 = W_2 + \sqrt{2\alpha}\sigma_w\xi, \\ \dot{W}_2 = -(\alpha^2 + \beta^2)W_1 - 2\alpha W_2 + \sqrt{2\alpha}\sigma_w(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - 2\alpha)\xi. \end{cases} \quad (12.92)$$

Пример 12.6. Получить уравнения формирующего фильтра для стационарного нормального центрированного процесса, обладающего дробно-рациональной спектральной плотностью вида

$$S_x(\omega) = \frac{2\sigma_x^2\mu(\lambda^2 + \mu^2)}{\pi[(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2]}. \quad (12.93)$$

Решение. В данном случае представление (12.28) принимает форму

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{|P_0(i\omega)|^2}{|Q_2(i\omega)|^2}, \quad (12.94)$$

где полином, стоящий в знаменателе, сохраняет прежний вид (12.85), а полином, стоящий в числителе, сводится к постоянной

$$P_0(x) = 2\sigma_x\sqrt{\mu(\lambda^2 + \mu^2)} = \text{const}(x). \quad (12.95)$$

Это сильно упрощает задачу, так как уравнение, задающее процесс $X(t)$ теперь не содержит производной белого шума

$$\ddot{X} + 2\mu\dot{X} + (\lambda^2 + \mu^2)X = 2\sigma_x\sqrt{\mu(\lambda^2 + \mu^2)}\xi \quad (12.96)$$

и элементарно преобразуется к нужному виду

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_2, \\ \dot{X}_2 = -(\lambda^2 + \mu^2)X_1 - 2\mu X_2 + 2\sigma_x(\sqrt{\mu(\lambda^2 + \mu^2)}\xi. \end{cases} \quad (12.97)$$

Пример 12.7. Вернемся к рассмотрению примера 10.1, в котором рассматривались вынужденные случайные колебания при наличии нелинейной силы сопротивления

$$m\dot{V} = -\varphi(V) + W, \quad (12.98)$$

однако откажемся от предположения, что внешнее воздействие W является процессом белого шума. Допустим, что процесс $W(t)$ стационарен, нормален, центрирован и имеет корреляционную функцию

$$K_w(\tau) = \sigma_w^2 e^{-\alpha|\tau|}. \quad (12.99)$$

Требуется построить расширенный марковский процесс, компонентой которого является скорость V и записать соответствующее уравнение Колмогорова.

Решение. Спектральная плотность возмущения

$$S_w(\omega) = \frac{\sigma_w^2 \alpha}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)} \quad (12.100)$$

является дробно-рациональной функцией ω , и поэтому процесс W можно представить как стационарное решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, в правую часть которого входит стандартный белый шум

$$\dot{W} + \alpha W = \sqrt{2\alpha}\sigma\xi(t). \quad (12.101)$$

Рассмотрим двумерный процесс $\vec{U} = \{U_1, U_2\}$, компоненты которого задаются равенствами $U_1 = V$, $U_2 = W$. Этот процесс описывается системой стохастических дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = -\frac{1}{m}\varphi(U_1) + \frac{1}{m}U_2 \\ \dot{U}_2 = -\alpha U_2 + \sqrt{2\alpha}\sigma\xi(t) \end{cases} \quad (12.102)$$

и является марковским процессом. Его коэффициенты сноса и диффузии таковы

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{m}\varphi(y_1) + \frac{1}{m}y_2, & a_2 &= -\alpha y_2, \\ b_{11} &= 0, & b_{12} &= 0, & b_{22} &= 2\alpha\sigma^2. \end{aligned} \quad (12.103)$$

В соответствии с общей теорией (см. параграф 7) второе уравнение Колмогорова для процесса (12.103) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial y_1} ((y_2 - \varphi(y_1))f) - \alpha \frac{\partial}{\partial y_2} (y_2 f) - \alpha\sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2} &= 0, \\ (\tau > 0, -\infty < y_1 < \infty, -\infty < y_2 < \infty). \end{aligned} \quad (12.104)$$

Предположим, что в начальный момент времени тело покоилось. Тогда начальные условия к (12.104) ставятся в виде

$$f|_{\tau=0} = \delta(y_1) \frac{e^{-\frac{y_2^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma}, \quad (12.105)$$

где $\delta(x)$ обозначает дельта-функцию. Краевые условия сводятся к требованию обращения решения в нуль на бесконечности.

$$f|_{y_1^2+y_2^2 \rightarrow \infty} = 0. \quad (12.106)$$

Обозначим через $f_1(y_1; \tau)$ закон распределения скорости тела $U_1(\tau)$. Эта функция выражается через решение уравнения Колмогорова в квадратурах

$$f_1(y_1; \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y_1, y_2; \tau) dy_2 \quad (12.107)$$

В настоящее время решение уравнения (12.104) известно лишь для случая вязкого трения.

В нелинейной постановке эту и подобные ей задачи приходится решать численными методами. Подробное обсуждение численных и приближенных методов решения уравнений Колмогорова выходит за рамки настоящей работы. Отметим только, что арсенал таких методов в настоящее время достаточно широк и включает сеточные методы [21, 20], методы Монте-Карло [10], итерационные методы [51, 17], метод степенных рядов [18], а также ряд других методов.

§13. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ К ИССЛЕДОВАНИЮ СИСТЕМ, СОДЕРЖАЩИХ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗВЕНЬЯ

Исследование нелинейных динамических систем, находящихся под воздействием случайных возмущений, в общем случае затруднительно даже приближенными способами, сходимость которых не всегда очевидна, а трудоемкость их применения резко растет с увеличением желаемой точности окончательного результата.

Теория марковских процессов позволяет исследовать самые разнообразные нелинейные системы, включая и системы с существенно нелинейными членами, если сделать обычно приемлемое допущение, что стационарные случайные функции, характеризующие внешние возмущения, имеют дробно-рациональные спектральные плотности и нормальны. Под «существенными» здесь понимаются неаналитические нелинейности, включающие такие особенности, как разрывы, угловые точки, зоны гистерезисности и т. п.

При этих допущениях исследование любых нелинейных систем сводится к решению уравнений Колмогорова, то есть к стандартной математической процедуре решения дифференциального уравнения в частных производных.

Рассмотрим для примера систему автоматического управления, в которой применяется релейная коррекция по скорости. Система описывается уравнением

$$\frac{dU(t)}{dt} = C \operatorname{sign}[U_2(t) - U(t)], \quad (13.1)$$

где $C = \text{const}$, а $U_2(t)$ — нормальная стационарная случайная функция, имеющая нулевое математическое ожидание и корреляционную функцию

$$K_{u_2}(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}, \quad \alpha > 0. \quad (13.2)$$

Например, по такому принципу работает гироскопический маятник — в этом случае роль случайной функции $U_2(t)$ играет ошибка физического маятника [34]. Хотя и представляется очевидным, что при достаточно большом времени работы системы случайная функция $U(t)$ станет стационарной, для определения дисперсии этой функции оказывается непригодным ряд типовых

приближенных методов (малого параметра, последовательных приближений), так как в качестве первых приближений в этих методах получается нестационарный случайный процесс.

Применим к исследованию уравнения (13.1) теорию марковских процессов. Функция $U(t)$ не является марковской, так как в правую часть равенства (13.1) входит случайная функция $U_2(t)$, ординаты которой в соответствии с (13.2) для «будущих» моментов времени коррелированы с ординатами процесса для «прошлого». Однако функцию $U_2(t)$ можно рассматривать как стационарное решение дифференциального уравнения

$$\frac{dU_2(t)}{dt} + \alpha U_2(t) = \sigma \sqrt{2\alpha} \xi(t), \quad (13.3)$$

где $\xi(t)$ — белый шум, поскольку применяя формулу (3.11) получим, что корреляционной функции (13.2) соответствует спектральная плотность

$$S_{u_2}(\omega) = \frac{\sigma^2 \alpha}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)}, \quad (13.4)$$

и, следовательно, по первой теореме Дуба процесс $U_2(t)$ — марковский случайный процесс.

Следовательно, обозначив

$$U(t) = U_1(t), \quad (13.5)$$

совокупность функций $U_1(t)$, $U_2(t)$ можно рассматривать как двумерный марковский процесс, определяемый системой стохастических уравнений

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = C \operatorname{sign}[U_2(t) - U_1(t)], \\ \dot{U}_2 = -\alpha U_2(t) + \sigma \sqrt{2\alpha} \xi(t). \end{cases} \quad (13.6)$$

Применяя общие формулы (9.13) и (9.14), получим для коэффициентов уравнений Колмогорова следующие выражения:

$$\begin{aligned} a_1(\tau, \vec{y}) &= C \operatorname{sign}[y_2 - y_1], & a_2(\tau, \vec{y}) &= -\alpha y_2, \\ b_{11}(\tau, \vec{y}) &= b_{12}(\tau, \vec{y}) = 0, & b_{22}(\tau, \vec{y}) &= 2\sigma^2 \alpha. \end{aligned} \quad (13.7)$$

В результате, второе уравнение Колмогорова принимает вид:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + C \operatorname{sign}(y_2 - y_1) \frac{\partial f}{\partial y_1} - \alpha \frac{\partial}{\partial y_2} (y_2 f) - \sigma^2 \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2} = 0. \quad (13.8)$$

Перейдем от переменных τ, y_1, y_2 к безразмерным величинам, положив

$$\tau' = \alpha\tau, \quad y'_1 = \frac{1}{\sigma}y_1, \quad y'_2 = \frac{1}{\sigma}y_2, \quad C' = \frac{C}{\sigma\alpha} \quad (13.9)$$

Подставляя (13.9) в (13.8) и опуская в окончательном результате штрихи, получим уравнения

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \tau} + C \frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{\partial}{\partial y_2}(y_2 f) - \frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2} = 0, & y_2 > y_1, \\ \frac{\partial f}{\partial \tau} - C \frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{\partial}{\partial y_2}(y_2 f) - \frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2} = 0, & y_2 < y_1. \end{cases} \quad (13.10)$$

Будем искать стационарное решение уравнения (13.10), то есть предположим, что разность $\tau - t$ достаточно велика, чтобы производную $\frac{\partial f}{\partial \tau}$ считать равной нулю, а функцию f — независимой от начальных условий. В этом случае вместо (13.10) получим систему

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{1}{C} \left[\frac{\partial}{\partial y_2}(y_2 f) + \frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2} \right] = 0, & y_2 > y_1, \\ \frac{\partial f}{\partial y_1} + \frac{1}{C} \left[\frac{\partial}{\partial y_2}(y_2 f) - \frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2} \right] = 0, & y_2 < y_1, \end{cases} \quad (13.11)$$

при решении которой необходимо удовлетворить требованию нормальности компоненты марковского процесса $U_2(t)$, то есть

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y_1, y_2) dy_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_2^2}{2}}. \quad (13.12)$$

Если проинтегрировать первое уравнение (13.11) по y_1 от $-\infty$ до y_2 , а второе уравнение по y_1 от y_2 до $+\infty$ и полученные результаты вычесть, то после простых преобразований, с учетом (13.12), для функции $f(y_1, y_2)$ получим следующие граничные условия на «линии переключения» $y_1 = y_2$:

$$\begin{aligned} & \left[(y_2 - C)f + 2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + \frac{\partial f}{\partial y_1} \right] \Big|_{y_1=y_2^{-0}} = \\ & = \left[(C + y_2)f + 2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + \frac{\partial f}{\partial y_1} \right] \Big|_{y_1=y_2^{+0}} \end{aligned} \quad (13.13)$$

Разобьем плоскость $y_1 0 y_2$ на две полуплоскости: область I, в которой $y_2 > y_1$, и область II, в которой $y_2 < y_1$. Назовем функцию, значения которой совпадают со значениями функции f в первой области $f_I(y_1, y_2)$ и, соответственно, во второй области $f_{II}(y_1, y_2)$. Вследствие центральной симметрии задачи достаточно найти только одну из этих функций, так как

$$f_I(y_1, y_2) = f_{II}(-y_1, -y_2), \quad (y_1 < y_2). \quad (13.14)$$

Система уравнений (13.11) при добавочных условиях (13.13) имеет единственное решение, обращающееся в нуль на бесконечности, которое может быть получено в виде ряда. Это решение приводится в [15].

Аналогичным образом могут быть рассмотрены нелинейные системы и более сложной структуры. Рассмотрим, например, систему, фазовая координата которой определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{dU(t)}{dt} = \varphi[U(t), U_1(t), t], \quad (13.15)$$

где φ — заданная нелинейная функция относительно своих аргументов, причем играющий роль случайного возмущения процесс $U_1(t)$ — нормальный стационарный случайный процесс с дробно-рациональной спектральной плотностью.

В соответствии со второй теоремой Дуба, функцию $U_1(t)$ можно рассматривать как компоненту n -мерного марковского процесса $(U_1, U_2(t), \dots, U_n)$, определяемого системой n уравнений первого порядка, содержащих в своих правых частях белый шум. Рассматривая эту систему уравнений совместно с уравнением (13.16), получим систему уравнения первого порядка, определяющую функции $U_1(t), \dots, U_n(t), U(t)$, которые образуют в совокупности $(n + 1)$ -мерный марковский процесс, поскольку начальные значения этих функций определяют решения системы, а наличие белого шума в правых частях равенства не может привести к зависимости «будущего» от «прошлого». Таким образом, исследование нелинейной системы, описываемой уравнением (13.16), сводится к исследованию многомерного марковского процесса, полностью определяемого системой уравнений Колмогорова. Составление этих уравнений не представляет труда, хотя при их решении могут встретиться чисто вычислительные трудности. Одной из наиболее серьезных среди них является существенная нелинейность функции φ относительно U либо U_1 .

При наличии разрывов или угловых точек у функции φ соответствующее уравнение Колмогорова перестает выполняться на «поверхностях переключения», где необходимо поставить соответствующие условия сопряжения, аналогичные тем, которые были рассмотрены в параграфе 11. В отличие от одномерных задач условия ставятся не на отдельно взятых точках, а на целых поверхностях, разбивающих пространство на области кусочной гладкости коэффициентов уравнения Колмогорова. В приведенном выше примере условия сопряжения выводились специально для данного примера. В литературе специальные исследования, посвященные данной проблеме [44, 38, 36] позволяют записать условия для большинства практически интересных задач.

В случае, когда на поверхности переключения коэффициенты диффузии в направлении по нормали к границе отличны от нуля и непрерывны, условия сопряжения имеют вид, аналогичный случаю одномерного процесса (непрерывность плотности вероятности и потока вероятности). Если указанный коэффициент диффузии по обе стороны границы обращается в нуль, то остается только второе условие. Наконец, при наличии разрывов коэффициента диффузии ставится условие согласования предельных значений плотности по обе стороны от границы, аналогичные (11.3). Нужно сказать, что существенно нелинейные задачи теории марковских процессов математически являются одними из наиболее сложных, и для их решения требуются серьезные усилия. Аналитическое решение удастся получить лишь в исключительных случаях. Рассмотрим один пример, когда это удастся сделать.

Пример 13.1. Рассмотрим двумерный марковский процесс, определяемый уравнениями

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \varkappa \cdot \text{sign}(U_2 - U_1), \\ \dot{U}_2 = -U_1 + \sqrt{2}\xi. \end{cases} \quad (13.16)$$

Этот процесс, на первый взгляд, незначительно отличается от процесса (13.6), который после перехода к безразмерным переменным

$$W_1 = \frac{U_1}{\sigma}, \quad W_2 = \frac{U_2}{\sigma}, \quad \tau = \alpha\tau, \quad \varkappa = \frac{C}{\sigma\alpha} \quad (13.17)$$

описывается стохастическими уравнениями

$$\begin{cases} \dot{W}_1 = \varkappa \cdot \text{sign}(W_2 - W_1), \\ \dot{W}_2 = -W_2 + \sqrt{2}\xi. \end{cases} \quad (13.18)$$

Отличие состоит всего лишь в том, что во втором уравнении (13.16) по сравнению с (13.18) вторая компонента процесса заменена на первую.

Для процесса (13.16) в установившемся режиме вместо уравнения Колмогорова (13.11) получаем уравнение вида

$$\begin{cases} \varkappa \frac{\partial f}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial f}{\partial y_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2} = 0, & y_2 > y_1, \\ \varkappa \frac{\partial f}{\partial y_1} + y_1 \frac{\partial f}{\partial y_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2} = 0, & y_2 < y_1. \end{cases} \quad (13.19)$$

решение которого, удовлетворяющее условию нормировки

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = 1 \quad (13.20)$$

и условиям сопряжения на прямой $y_2 = y_1$, было получено в работе [1]. Указанное решение имеет вид

$$f(y_1, y_2) = \frac{\varkappa}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_1^2}{2} - \varkappa|y_2 - y_1|}. \quad (13.21)$$

К сожалению, в нашей основной задаче для системы (13.18) столь простое решение неизвестно, и его приходится строить в виде сложного ряда по специальным функциям [15].

ЗАДАЧИ О ДОСТИЖЕНИИ ГРАНИЦЫ И НЕВЫХОДЕ МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА ЗА ПРЕДЕЛЫ ЗАДАННОЙ ОБЛАСТИ

§ 14. ВЕРОЯТНОСТЬ ПРЕБЫВАНИЯ МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА В ЗАДАННОЙ ОБЛАСТИ

При изучении пересечений случайной функцией фиксированного уровня (выброса случайной функции за данный уровень) простые результаты удастся получить только для средних величин: математического ожидания времени пребывания в данной области, среднего числа выбросов и т. п. Нахождение более полных вероятностных характеристик выбросов: закона распределения времени пребывания ординаты процесса в заданной области, вероятности появления заданного числа выбросов за фиксированный интервал времени и т. п. для случайных процессов общего вида представляет весьма сложную задачу. Для марковских случайных процессов вычисление этих характеристик существенно упрощается.

Рассмотрим в этом параграфе вычисление вероятности $W(\theta)$ того, что ордината марковского случайного процесса $U(t)$ в течение интервала времени $(t, t + \theta)$ ни разу не выйдет за интервал (k_1, k_2) , границы которого могут быть или постоянными или заданными функциями времени. Положим $\tau = t + \theta$ и будем по-прежнему пользоваться обозначениями $U(t) \equiv X$, $U(\tau) \equiv Y$. Плотность вероятности $f(t, x; \tau, y)$ перехода из состояния x в состояние y удовлетворяет второму уравнению Колмогорова

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y}(af) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (bf)}{\partial y^2} = 0, \quad (14.1)$$

где $a = a(\tau, y)$ — коэффициент сноса, а $b = b(\tau, y)$ — коэффициент диффузии. Рассмотрим реализацию $u(t)$ процесса $U(t)$,

начинающуюся в момент времени t в точке x (Рис. 14.1) и заканчивающуюся в момент времени τ в интервале $(y, y + dy)$ при условии, что вся реализация лежит в области, определяемой интервалом $(k_1(t), k_2(t))$. Обозначим плотность вероятности

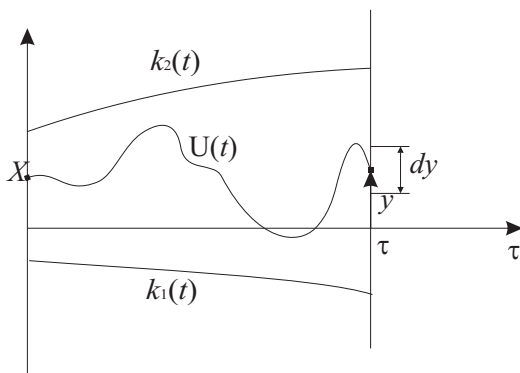


Рис. 14.1. К определению функции $w(\tau, y)$

сти Y , вычисленную при указанных выше условиях и называемую *плотностью вероятности невыхода*, через $w(t, x; \tau, y)$ или, сокращенно, через $w(\tau, y)$. Очевидно, что до пересечения реализацией $u(t)$ границы дозволенной области изменения ординат случайного процесса $U(t)$ локальные свойства плотности невыхода w не отличаются от свойств плотности перехода f и, следовательно, w должна удовлетворять уравнению (14.1)

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y}(aw) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (bw)}{\partial y^2} = 0, \quad (14.2)$$

При пересечении реализацией $U(t)$ хотя бы один раз границы дозволенной области эта реализация обрывается в момент первого пересечения, так как мы рассматриваем только такие реализации, которые целиком лежат в дозволенной области.

Марковский случайный процесс является недифференцируемым в том смысле, что не существует случайной функции с конечной дисперсией, которую можно рассматривать как предел в смысле среднего квадратического отношения

$$\frac{1}{\Delta} [U(t + \Delta) - U(t)],$$

поскольку среднеквадратический предел

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow 0} M \left\{ \frac{1}{\Delta^2} [U(t + \Delta) - U(t)]^2 \mid U(t) = x \right\} = \\ = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} M \left\{ \frac{1}{\Delta} [U(t + \Delta) - U(t)]^2 \mid U(t) = x \right\} = \\ = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} b(t, x) = \infty, \end{aligned}$$

так как коэффициент диффузии $b(t, x)$ конечен и не зависит от Δ . Следовательно, реализация марковского процесса имеет структуру, напоминающую структуру функции броуновского движения, то есть состоит из последовательности бесчисленного множества зигзагов, имеющих исчезающе малые размахи. Это приводит к тому, что реализация, ордината которой приняла в некоторый момент времени t значение $k_1(t)$ или $k_2(t)$ в предшествующий момент времени имела значение, выходящее за границы дозволенного интервала. Поэтому плотность вероятности $w(\tau, y)$ обращается в нуль при принятых значениях y , и при решении уравнения (14.2) граничными условиями будут

$$w(\tau, y) \Big|_{y=k_1(\tau)} = w(\tau, y) \Big|_{y=k_2(\tau)} = 0. \quad (14.3)$$

Начальные условия для уравнения (14.2) не отличаются от начальных условий (10.2) и (10.3) для функции f , так как при $\tau = t$ функции w и f совпадают. При этом, естественно, считается, что начальное значение x принадлежит дозволенной области. Будем считать, что начальная ордината x процесса $U(t)$ задана. В этом случае в качестве начальных условий для уравнения получим

$$w(\tau, y) \Big|_{\tau=t} = \delta(y - x). \quad (14.4)$$

Уравнение (14.2) вместе с добавочными условиями (14.3), (14.4) однозначно определяет плотность вероятности $w(\tau, y)$, которая в отличие от плотности вероятности f не является нормированной, поскольку часть реализаций, выходящих из точки x , обрывается на границах дозволенной области. Произведение $w(\tau, y)dy$ дает вероятность того, что в момент времени τ ордината процесса $U(\tau)$ находится в интервале $(y, y + dy)$. Следовательно, интегрируя это произведение от $k_1(\tau)$ до $k_2(\tau)$, мы получим искомую вероятность пребывания марковского процесса в

заданной области:

$$W(\tau) = \int_{k_1(\tau)}^{k_2(\tau)} w(\tau, y) dy. \quad (14.5)$$

Прежде чем переходить к рассмотрению конкретных примеров, иллюстрирующих общие формулы, заметим, что вероятность $W(\tau)$ может быть получена не только путем решения второго уравнения Колмогорова, но и путем использования первого уравнения Колмогорова.

Действительно, функция $w(t, x; \tau, y)$ удовлетворяет по переменным x, t и первому уравнению Колмогорова, то есть уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} + a(t, x) \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} b(t, x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (14.6)$$

Интегрируя обе части этого уравнения по y от $k_1(\tau)$ до $k_2(\tau)$ получим

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} + a(t, x) \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{1}{2} b(t, x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \quad (14.7)$$

то есть уравнение, определяющее искомую вероятность $W(\tau)$ ¹. Остается установить начальные и граничные условия для этого уравнения.

Так как значение x предполагается лежащим внутри дозволенной области, то:

$$W(\tau) \Big|_{\tau=t} = 1. \quad (14.8)$$

Рассуждая также как при решении уравнения (14.2), легко убедиться, что граничные условия и при решении уравнения (14.7) будут нулевыми, то есть

$$W(\tau) \Big|_{x=k_1(t)} = W(\tau) \Big|_{x=k_2(t)} = 0. \quad (14.9)$$

Аналитическое решение уравнений (14.2), (14.7) и (14.1) удастся получить только в том случае, если к ним применимы такие классические методы математической физики, как метод разделения переменных, метод фиктивных источников и т. п. Несмотря на то, что эти случаи встречаются далеко не всегда, их рассмотрение

¹Вероятность $W(\tau)$, естественно, кроме τ , зависит от t и x , хотя эту зависимость мы не будем отмечать явно в обозначениях.

представляется весьма полезным и поясняет сущность решаемой задачи, а часто и позволяет получить результаты, имеющие непосредственный практический интерес.

Рассмотрим применение метода расщепления переменных на примере следующей задачи. Задан стационарный нормальный процесс $U(t)$, имеющий корреляционную функцию

$$K_u(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \quad (14.10)$$

и нулевое математическое ожидание. Требуется определить вероятность $W(\tau)$ того, что ордината процесса за промежуток времени (t, τ) ни разу не выйдет из интервала $(-k, k)$, если задана начальная (в момент времени t) ордината процесса x .

В соответствии с первой теоремой Дуба рассматриваемый нормальный случайный процесс $U(t)$ является марковским. Процесс, имеющий корреляционную функцию (14.10), удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$\frac{dU}{dt} + \alpha U = \sigma \sqrt{2\alpha} \xi(t). \quad (14.11)$$

Из уравнения (14.11) следует, что коэффициент сноса $a(\tau, y)$ равен $-\alpha y$, а коэффициент диффузии $b(\tau, y)$ равен $2\alpha\sigma^2$. Следовательно, уравнение Колмогорова для плотности вероятности $w(\tau, y)$ имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} - \alpha \frac{\partial}{\partial y}(yw) - \sigma^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (14.12)$$

Решение уравнения (14.12) в данном случае должно быть найдено при условиях

$$w(\tau, y)|_{\tau=t} = \delta(y - x), \quad (14.13)$$

$$w(\tau, y)|_{y=-k} = w(\tau, y)|_{y=k} = 0. \quad (14.14)$$

Применяя к решению уравнения (14.12) обычный метод разделения переменных [41], получим, что

$$w(\tau, y) = \exp^{-\frac{y^2}{4\sigma^2}} \sum_{j=1}^{\infty} c_j e^{\mu_j \alpha(\tau-t)} D_{\mu_j}\left(\frac{y}{\sigma}\right), \quad (14.15)$$

где $D_r(y)$ — функция параболического цилиндра [3, 22], а μ_j обозначают последовательные корни уравнения

$$D_r(k) = 0, \quad (14.16)$$

то есть корни функций параболического цилиндра относительно индекса при фиксированном аргументе. Коэффициенты c_j определяются равенствами

$$c_j = \frac{1}{N_j} e^{\frac{x^2}{4\sigma^2}} D_{\mu_j}\left(\frac{x}{\sigma}\right), \quad N_j = \int_{-k}^k D_{\mu_j}^2(y) dy. \quad (14.17)$$

Проинтегрировав (14.14) по y от $-k$ до k , получим вероятность $W(\tau)$ того, что процесс в течение интервала времени (t, τ) ни разу не выйдет за границы полосы $(-k, k)$:

$$W(\tau) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j e^{\mu_j(\tau-t)}, \quad (14.18)$$

где

$$C_j = c_j \int_{-k}^k e^{\frac{y^2}{4}} D_{\mu_j}(y) dy = \frac{1}{N_j} e^{\frac{x^2}{4}} D_{\mu_j}(x) \int_{-k}^k e^{\frac{y^2}{4}} D_{\mu_j}(y) dy. \quad (14.19)$$

Формула (14.17) удобна для вычислений, так как бесконечный ряд, входящий в эту формулу (для не очень малых значений $\tau - t$), быстро сходится, а для первых двух членов ряда значения C_j и μ_j имеются в литературе. Значения этих величин приведены в таблице 14.1, взятой из работы [14] и отвечающей случаю $x = 0$.

Отметим, что корни μ_j отрицательны, и вероятность $W(\tau)$ быстро убывает с ростом τ . При $x \neq 0$ значения μ_j остаются без изменения, а значения C_j , в соответствии с (14.17) должны быть умножены на $e^{\frac{x^2}{4}} D_{\mu_j}(x)$.

Решение рассмотренной задачи можно получить и иначе, если исходить не из второго, а из первого уравнения Колмогорова. Первое уравнение Колмогорова в данном случае имеет вид:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \alpha x \frac{\partial w}{\partial x} + \alpha \sigma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (14.20)$$

и, следовательно, для вероятности $W(\tau)$ пребывания в заданной области, в соответствии с (14.7) получим уравнение

$$\frac{\partial W}{\partial t} - \alpha x \frac{\partial W}{\partial x} + \alpha \sigma^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \quad (14.21)$$

Таблица 14.1. Значения коэффициентов C_j и μ_j как функции $\frac{k}{\sigma}$, ($x = 0$)

k/σ	C_1	$-\mu_1$	C_2	$-\mu_2$
0.2	1.270	61.2	-0.423	558
0.4	1.265	15.0	-0.412	138
0.6	1.261	6.37	-0.385	61.4
0.8	1.237	3.38	-0.367	34.3
1.0	1.226	2.00	-0.336	21.8
2	1.101	0.254	-0.148	5.51
3	1.018	$2.4 \cdot 10^{-2}$	-0.333	2.67
4	1.001	$9.93 \cdot 10^{-4}$	$-0.27 \cdot 10^{-2}$	2.08
5	1.000	$1.44 \cdot 10^{-5}$	$-0.642 \cdot 10^{-3}$	2.00
6	1.000	$9.5 \cdot 10^{-8}$	$-0.334 \cdot 10^{-3}$	2.00

а в соответствии с (14.8) и (14.9) — добавочные условия

$$W(\tau)|_{t=\tau} = 1, \quad W(\tau)|_{x=k} = W(\tau)|_{x=-k} = 0. \quad (14.22)$$

Решая уравнение (14.21) методом разделения переменных, получим после ряда промежуточных преобразований для $W(\tau)$ прежнюю формулу (14.18).

В заключение рассмотрим еще один метод вычисления вероятности $W(\tau)$ пребывания марковского процесса в заданной области — метод источников и стоков. Он сравнительно редко позволяет получить точное решение, однако часто применяется для построения приближенных методов.

Применим этот метод для нахождения вероятности невыхода $W(\tau)$ ординаты нормального процесса $U(t)$, имеющего нулевое математическое ожидание и корреляционную функцию (14.10), из области $(0, \infty)$, считая, что начальное значение ординаты процесса $x > 0$. Вероятность $W(\tau)$ здесь имеет смысл вероятности того, что за время τ ордината процесса ни разу не приняла отрицательное значение. В этом случае уравнение (14.12) для определения плотности вероятности $w(\tau, y)$ нужно решать при добавочных условиях (считаем для простоты $t = 0$):

$$w(\tau, y)|_{\tau=0} = \delta(y - x), \quad w(\tau, y)|_{y=0} = w(\tau, y)|_{y=\infty} = 0. \quad (14.23)$$

Воспользуемся тем, что решение уравнения нас интересует

только для положительных значений y и будем искать решение для всех значений y , лежащих в более широком интервале $(-\infty, +\infty)$, заменив добавочные условия (14.23) условиями

$$w(\tau, y)|_{\tau=0} = \delta(y - x) - \delta(y + x), \quad (14.24)$$

$$w(\tau, y)|_{y=\pm\infty} = 0. \quad (14.25)$$

Поскольку для положительных значений y начальные условия не изменились, то найденное для всей плоскости решение $w(\tau, y)$ при $y \geq 0$ будет решением нашей задачи, если только оно обращается в нуль при $y = 0$. Убедимся, что это условие выполняется. Действительно, при граничных условиях (14.25) решение уравнения (14.12) есть плотность нормального закона распределения, то есть при начальном условии $w(0, y) = \delta(y - x)$ она дается равенством

$$w(\tau, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-2\tau}}} e^{-\frac{(y - xe^{-\tau})^2}{2(1 - e^{-2\tau})}} \quad (14.26)$$

а при начальном условии $w(0, y) = \delta(y + x)$ имеет вид

$$w(\tau, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-2\tau}}} e^{-\frac{(y + xe^{-\tau})^2}{2(1 - e^{-2\tau})}}. \quad (14.27)$$

Начальные условия (14.24) являются разностью начальных условий, соответствующих решениям (14.26) и (14.27), следовательно, учитывая линейность уравнения (14.12), при начальных условиях (14.24), решение уравнения равняется разности решений (14.26) и (14.27), то есть

$$w(\tau, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-2\tau}}} \left[e^{-\frac{(y - xe^{-\tau})^2}{2(1 - e^{-2\tau})}} - e^{-\frac{(y + xe^{-\tau})^2}{2(1 - e^{-2\tau})}} \right]. \quad (14.28)$$

Непосредственная проверка показывает, что при $y = 0$ выражение (14.28) обращается в нуль. Следовательно, при $y \geq 0$ решение (14.28) является решением нашей задачи. Интегрируя это выражение по y от 0 до ∞ , для искомой вероятности невыхода $W(\tau)$ получим

$$W(\tau) = \Phi \left(\frac{xe^{-\tau}}{\sqrt{1 - e^{-2\tau}}} \right). \quad (14.29)$$

Таким образом сущность метода фиктивных источников состоит в том, что область, в которой ищется решение, расширяется, и в добавленных частях этой области так изменяются начальные условия, чтобы граничные условия исходной задачи были выполнены. Если решение уравнения Колмогорова для новой области интегрирования может быть легко получено, а новые (фиктивные) начальные условия могут быть выбраны указанным выше образом, то данный метод сразу ведет к цели. К сожалению, выбор начальных условий, удовлетворяющий поставленным выше требованиям, может быть осуществлен сравнительно просто только для некоторых специальных случаев. В общем же случае само определение фиктивных начальных условий представляет из себя задачу не менее трудную, чем решение исходного дифференциального уравнения.

Для нахождения приближенного решения можно выбрать вне области, в которой ищется решение, несколько значений x_j и потребовать выполнение модифицированных начальных условий

$$w(\tau, y)|_{\tau=t} = \delta(y - x) + \sum_{j=1}^n c_j \delta(y - x_j), \quad (14.30)$$

где постоянные c_j и значения x_j следует выбрать так, чтобы условие $w(\tau, y) = 0$ на границе дозволенной области выполнялось наиболее точно. Различные приближенные способы, использующие метод фиктивных источников и стоков, отличаются друг от друга только способом приближения к условию $w(\tau, y)|_{\Gamma} = 0$ и выбором постоянных c_j и x_j . Например, координаты фиктивных источников x_j можно выбрать произвольно, а коэффициенты c_j определить из условия чтобы значение интеграла

$$\int_{-k}^k w^2(\tau, y) dy$$

было минимально.

Вернемся к рассмотрению общего случая определения вероятности $W(\tau)$ пребывания марковского процесса $U(t)$ внутри переменного интервала $[k_1(t), k_2(t)]$ в течение промежутка времени (t, τ) .

Как было показано выше, для нахождения вероятности $W(\tau)$ необходимо решить уравнение (14.2) для плотности вероятности

$w(\tau, y)$ при добавочных условиях (14.3) и (14.4), а затем воспользоваться формулой (14.5) или решить уравнение (14.7) при добавочных условиях (14.8) и (14.9). Хотя решение этих уравнений в аналитическом виде (особенно при переменных границах k_1 и k_2) часто является затруднительным, значение $W(\tau)$ всегда может быть получено с помощью приближенных или численных методов. Таким образом, вычисление вероятности пребывания марковского случайного процесса в заданной области сводится к стандартной математической процедуре.

Располагая значением вероятности $W(\tau)$ можно определить закон распределения времени Θ достижения реализацией случайного процесса границы рассматриваемой области при условии, что значение x ординаты процесса в момент времени t известно. Действительно, обозначим через Θ время первого достижения границы рассматриваемого интервала при условии, что в момент времени t ордината процесса равнялась x . Очевидно, что вероятность $W(t + \theta)$ равна вероятности того, что случайная величина $\Theta > \theta$, то есть имеем цепочку равенств

$$W(t + \theta) = P\{\Theta > \theta\} = 1 - F(\theta) = \int_{\theta}^{\infty} f(\theta) d\theta, \quad (14.31)$$

откуда получаем явные выражения для функции распределения $F(\theta)$ и плотности вероятности случайной величины Θ

$$F(\theta) = 1 - W(t + \theta), \quad (14.32)$$

$$f(\theta) = -\frac{dW(t + \theta)}{d\theta} \quad (14.33)$$

Располагая плотностью вероятности $f(\theta)$, можно найти все моменты случайной величины Θ . В том случае, когда коэффициенты сноса $a(t, x)$ и диффузии $b(t, x)$ не зависят от времени, для характеристической функции $E_{\theta}(z)$, соответствующей плотности вероятности $f(\theta)$, можно получить обыкновенное дифференциальное уравнение, так как, учитывая стационарность рассматриваемой задачи, вероятность W зависит не от τ и t в отдельности, а от их разности, и, следовательно, согласно (14.33), имеем

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\partial W}{\partial \tau} = f(\theta), \quad (14.34)$$

где $f(\theta)$, кроме явно выписанного аргумента θ , разумеется зависит также и от x .

Подставляя выражение (14.34) в (14.7), являющееся следствием первого уравнения Колмогорова, имеем:

$$f(\theta) + a(x) \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{1}{2} b(x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0. \quad (14.35)$$

Дифференцируя последнее равенство по θ и учитывая (14.33), получим уравнение в частных производных для плотности вероятности $f(\theta)$:

$$\frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} - a(x) \frac{\partial f(\theta)}{\partial x} - \frac{1}{2} b(x) \frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial x^2} = 0. \quad (14.36)$$

Умножение последнего равенства на $e^{i\theta z}$ и интегрирование по θ от 0 до $+\infty$ (с учетом того, что $f(0) = f(\infty) = 0$), дает уравнение для характеристической функции Θ

$$izE_\theta(z) + a(x) \frac{dE_\theta(z)}{dx} + \frac{1}{2} b(x) \frac{d^2 E_\theta(z)}{dx^2} = 0, \quad (14.37)$$

интеграл которого должен удовлетворять общему свойству характеристической функции $E_\theta(0) = 1$ и свойству характеристической функции, справедливому для непрерывной случайной величины: $E(\pm\infty) = 0$.

Сложность интегрирования полученного уравнения зависит от конкретного вида функций $a(x)$ и $b(x)$. Однако независимо от поведения этих функций уравнение (14.37) может быть использовано для получения дифференциальных уравнений, определяющих первые моменты времени выброса θ , причем эти последние уравнения интегрируются в квадратурах.

Действительно, используя хорошо известное соотношение между характеристической функцией случайной величины и ее начальным моментом m_j порядка j

$$m_j = \left. \frac{1}{i^j} \frac{d^j E(z)}{dz^j} \right|_{z=0}, \quad (14.38)$$

характеристическую функцию $E_\theta(z)$ можно разложить в ряд по степеням ее аргумента (считаем, что все моменты, входящие в коэффициенты ряда, существуют):

$$E_\theta(z) = 1 + im_1 z - \frac{1}{2} m_2 z^2 - \frac{i}{3!} m_3 z^3 + \dots \quad (14.39)$$

Подставляя ряд (14.39) в (14.37) и приравнявая к нулю коэффициенты при одинаковых степенях z , получим рекуррентные соотношения, связывающие начальные моменты различных порядков и позволяющие вести последовательное их определение, начиная с моментов низших порядков.

Первые два уравнения, позволяющие определить математическое ожидание $\bar{\theta} = m_1$ времени пребывания в области и его дисперсию $\sigma^2 = m_2 - \bar{\theta}^2$, имеют вид:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + r(x)\frac{d\bar{\theta}}{dx} = -\frac{2}{b(x)}, \quad (14.40)$$

$$\frac{d^2m_r}{dx^2} + r(x)\frac{dm_2}{dx} = -\frac{4}{b(x)}\bar{\theta}, \quad (14.41)$$

где $r(x) = \frac{2a(x)}{b(x)}$. Добавочные условия при интегрировании этих уравнений будут такими

$$\bar{\theta}\Big|_{x=k_1} = \bar{\theta}\Big|_{x=k_2} = 0; \quad m_2\Big|_{x=k_1} = m_2\Big|_{x=k_2} = 0. \quad (14.42)$$

Уравнения (14.40) и (14.41) одностипны и их интеграл может быть представлен в единообразном виде:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\theta} \\ m_2 \end{array} \right\} = \int_{k_1}^x \left\{ \int_{k_1}^{x_3} \exp\left[-\int_{x_2}^{x_3} r(x_1)dx_1\right] g(x_2)dx_2 + \right. \\ \left. + c_1 \exp\left[-\int_{k_1}^{x_3} r(x_1)dx_1\right] \right\} dx_3, \quad (14.43)$$

где c_1 определяется общим выражением

$$c_1 = - \frac{\int_{-\infty}^k \int_{-\infty}^{x_3} \exp\left[-\int_{x_2}^{x_3} r(x_1)dx_1\right] g(x_2)dx_2dx_3}{\int_{k_1}^{k_2} \exp\left[-\int_{k_1}^{x_2} r(x_1)dx_1\right] dx_2}, \quad (14.44)$$

в которое в зависимости от вычисляемого момента подставляется свое значение функции $g(x)$, а именно:

$$g(x) = -\frac{2}{b(x)}, \quad (14.45)$$

при интегрировании уравнения (14.40), и

$$g(x) = -\frac{4}{b(x)}\bar{\theta}, \quad (14.46)$$

при интегрировании уравнения (14.41).

Пример 14.1. Невесомая броуновская частица (см. пример 6.1) совершает прямолинейные случайные колебания. В начальный момент t ее координата $V(t) = x$ лежит внутри заданного интервала (α, β) . Динамика частицы описывается стохастическим дифференциальным уравнением

$$\dot{V} = \sigma \xi(t), \quad (14.47)$$

где $\sigma > 0$, а ξ — стандартный гауссовский белый шум. Определить вероятность невыхода частицы за пределы интервала $[\alpha, \beta]$ в течение промежутка времени $(t, \tau]$.

Решение. Искомая вероятность невыхода

$$W(\tau; t, x) = \int_{\alpha}^{\beta} w(t, x; \tau, y) dy, \quad (14.48)$$

где w обозначает плотность вероятности невыхода из интервала $[\alpha, \beta]$, которая удовлетворяет второму уравнению Колмогорова

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad (\tau > 0, \alpha < y < \beta), \quad (14.49)$$

начальному условию

$$w|_{\tau \rightarrow t} = \delta(y - x) \quad (14.50)$$

и краевым условиям

$$w|_{y=\alpha} = 0, \quad w|_{y=\beta} = 0. \quad (14.51)$$

Для решения задачи (14.49)–(14.51) воспользуемся методом разделения переменных [41]. Вначале решим вспомогательную задачу: будем искать решение уравнения (14.49), не равное тождественно нулю, удовлетворяющее краевым условиям (14.51) и представимое в виде

$$w = T(\tau)Y(y). \quad (14.52)$$

Подставляя выражение (14.52) в (14.49), после деления обеих частей (14.49) на произведение $\frac{\sigma^2}{2}TY$ получим

$$\frac{2T'}{\sigma^2 T} = \frac{Y''}{Y} = -\lambda^2, \quad (14.53)$$

где λ — неизвестная постоянная, не зависящая ни от τ , ни от y .

Из уравнения (14.53) следует, что функции T и Y удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$T' + \frac{\sigma^2 \lambda^2}{2} T = 0, \quad (\tau > 0), \quad (14.54)$$

$$Y'' + \lambda^2 Y = 0, \quad (\alpha < y < \beta), \quad (14.55)$$

причем функция Y должна удовлетворять краевым условиям

$$Y(\alpha) = Y(\beta) = 0. \quad (14.56)$$

Общее решение уравнения (14.55) имеет вид

$$Y(y) = C_1 \cos(\lambda y) + C_2 \sin(\lambda y) \quad (14.57)$$

и удовлетворяет краевым условиям в том случае, когда

$$\begin{cases} C_1 \cos(\lambda \alpha) + C_2 \sin(\lambda \alpha) = 0, \\ C_1 \cos(\lambda \beta) + C_2 \sin(\lambda \beta) = 0. \end{cases} \quad (14.58)$$

Определитель полученной системы

$$\Delta(\lambda) = \sin(\lambda(\beta - \alpha)). \quad (14.59)$$

Нетривиальное решение системы (14.58) существует только в случае $\Delta = 0$. Следовательно, параметр λ не может быть произвольным и должен принимать дискретный ряд значений

$$\lambda = \lambda_k = \frac{\pi k}{(\beta - \alpha)}, \quad (k = \overline{1, \infty}). \quad (14.60)$$

При соблюдении условия (14.60) уравнения системы (14.58) линейно зависимы, и одно из них, например второе, можно отбросить. Выражая из оставшегося уравнения одну из произвольных постоянных через другую, получаем после тригонометрических преобразований

$$Y_k(y) = A_k \sin \frac{\pi k(y - \alpha)}{(\beta - \alpha)}, \quad (k = \overline{1, \infty}), \quad (14.61)$$

где A_k — новая произвольная постоянная. Решение уравнения (14.54) при $\lambda = \lambda_k$ имеет вид

$$T_k(y) = B_k e^{-\frac{\sigma^2 \pi^2 k^2 (\tau - t)}{2(\beta - \alpha)^2}}, \quad (k = \overline{1, \infty}), \quad (14.62)$$

причем без ущерба для общности можно принять $B_k = 1$.

В силу линейности и однородности уравнения (14.49) сумма вида

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\frac{\sigma^2 \pi^2 k^2 (\tau - t)}{2(\beta - \alpha)^2}} \sin \frac{\pi k(y - \alpha)}{(\beta - \alpha)} \quad (14.63)$$

при любых значениях постоянных A_k удовлетворяет уравнению (14.49) и краевым условиям (14.51). Потребуем, чтобы она также удовлетворяла и начальному условию (14.50). Для этого подставим (14.63) в (14.50), домножим обе части полученного равенства на $\sin \frac{\pi j(y - \alpha)}{(\beta - \alpha)}$ и проинтегрируем в промежутке $[\alpha, \beta]$.

Используя свойство ортогональности функций (14.61), имеющее вид

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sin \frac{\pi k(y - \alpha)}{(\beta - \alpha)} \sin \frac{\pi j(y - \alpha)}{(\beta - \alpha)} dy = \begin{cases} \frac{\beta - \alpha}{2}, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases} \quad (14.64)$$

получаем

$$A_k = \frac{2}{(\beta - \alpha)} \sin \frac{\pi k(x - \alpha)}{(\beta - \alpha)}, \quad (14.65)$$

откуда следует

$$w = \frac{2}{(\beta - \alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2 \pi^2 k^2 (\tau - t)}{2(\beta - \alpha)^2}} \sin \frac{\pi k(y - \alpha)}{(\beta - \alpha)} \sin \frac{\pi k(x - \alpha)}{(\beta - \alpha)}. \quad (14.66)$$

Подставляя найденное выражение в (14.48), находим вероятность невыхода

$$W = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2 \pi^2 (2k+1)^2 (\tau - t)}{2(\beta - \alpha)^2}} \frac{\sin \frac{\pi (2k+1)(x - \alpha)}{(\beta - \alpha)}}{(2k + 1)}. \quad (14.67)$$

В частном случае, когда частица первоначально находилась в середине интервала, получаем наиболее простое выражение

$$W = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k + 1)} e^{-\frac{\sigma^2 \pi^2 (2k+1)^2 (\tau - t)}{2(\beta - \alpha)^2}}. \quad (14.68)$$

Сумма ряда (14.68) хорошо аппроксимируется с помощью конечного числа слагаемых, которые быстро убывают с ростом k . Погрешность не превосходит величины первого отбрасываемого члена. Вполне естественно, при $\tau = t$ имеем $W = 1$.

§ 15. ВЫБРОСЫ МАРКОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Будем, как обычно, под *выбросом* случайной функции $U(t)$ за уровень k понимать пересечение реализацией этой функции указанного уровня снизу вверх, то есть выполнение для достаточно малого положительного ε неравенств

$$U(t - \varepsilon) < k; \quad U(t + \varepsilon) > k \quad (15.1)$$

означает наличие выброса в момент времени t .

В корреляционной теории доказывается, что среднее число выбросов в единицу времени $\bar{\nu}$ и средняя длительность одного выброса $\bar{\theta}$ определяются формулами Райса, которые для стационарного процесса имеют вид [30]:

$$\bar{\nu} = \int_0^{\infty} v f(k, v) dv, \quad (15.2)$$

$$\bar{\theta} = \frac{1}{\bar{\nu}} [1 - F(k)], \quad (15.3)$$

где $F(k)$ — функция распределения ординаты процесса $U(t)$ при аргументе равном k , а $f(k, v)$ — плотность вероятности системы двух случайных процессов $U(t), V(t) = \dot{U}(t)$, взятая при первом аргументе, равном k .

Применение этих формул к марковскому процессу оказывается невозможным, так как в этом случае формулы дают $\bar{\nu} = \infty$, $\bar{\theta} = 0$. Обращение числа $\bar{\nu}$ в бесконечность связано с тем, что вследствие недифференцируемости марковского процесса его реализация может перейти из области $U < k$ в область $U > k$ только после многократного пересечения уровня k (Рис. 15.1), поскольку реализация имеет вид пилообразной кривой, изрезанной бесконечным числом бесконечно малых пиков,

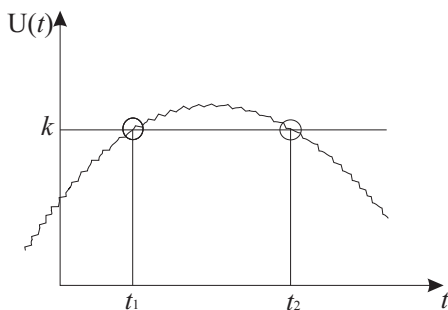


Рис. 15.1. К исследованию выбросов марковского процесса

и при подсчете всех точек пересечения мы неизбежно получим их бесконечное число. Очевидно, что подобный подсчет не представляет физического интереса и, следовательно, постановка задачи должна быть изменена таким образом, чтобы результаты могли представлять практический интерес. Этого можно достигнуть, если при вычислении среднего числа выбросов учитывать только те выбросы, длительность которых превосходит некоторое заданное число τ_0 , выбираемое исходя из физических соображений.

Очевидно, что при таком подсчете бесконечные серии бесконечно коротких выбросов (на рисунке они обведены кружками), предшествующих переходу реализации процесса из области $U < k$ в область $U > k$ будут учитываться как однократное пересечение заданного уровня, и в качестве выбросов мы будем рассматривать только промежутки времени между этими сериями. Такой подход при вычислении числа выбросов соответствует физической сущности задачи, так как все измерительные приборы имеют определенную инерционность и серия «бесконечно малых» выбросов практически всегда воспринимается как один выброс.

Обозначим среднее число выбросов, по длительности превосходящих τ_0 , приходящиеся на единицу времени, через $\bar{\nu}_{\tau_0}$. Для определения $\bar{\nu}_{\tau_0}$ рассмотрим интервал времени $(t - \Delta, t)$, в течение которого произошел выброс за уровень k . Вычислим при этих условиях вероятность того, что ордината процесса в момент времени τ будет находиться в малом интервале $(y, y + \Delta)$ при условии, что за промежуток времени (t, τ) она ни разу не станет меньше k . Если считать Δ бесконечно малой величиной,

то искомая вероятность будет пропорциональна произведению $dy\Delta$ и может быть обозначена через $v(\tau, y)dy\Delta$, где произведение $v(\tau, y)\Delta$ играет роль плотности вероятности и удовлетворяет второму уравнению Колмогорова. Поскольку величина Δ не зависит ни от τ , ни от y , то второму уравнению Колмогорова удовлетворяет и сама функция v :

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y}[a(\tau, y)v] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}[b(\tau, y)v] = 0. \quad (15.4)$$

Вероятность $\bar{v}_{\tau_0}\Delta$ того, что в интервале $(t - \Delta, t)$ произошел выброс с длительностью, превышающей τ_0 , будет равна $\Delta \int_k^\infty v(\tau_0, y)dy$. Следовательно, после сокращения на Δ получим

$$\bar{v}_{\tau_0} = \int_k^\infty v(t + \tau_0, y). \quad (15.5)$$

Поскольку в интервале времени $(t - \Delta, t)$ имел место выброс, а $\Delta \rightarrow 0$, то для моментов времени, предшествующих t , ордината процесса была меньше k . Следовательно,

$$v(\tau, y) = 0, \quad \tau < t, \quad (15.6)$$

причем решение уравнения (15.4) должно быть найдено для всех $\tau \leq t$.

Так как выброс имел место в интервале времени $(t - \Delta, t)$, то интеграл от $v(\tau, y)dy\Delta$ по τ в пределах от $t - \Delta$ до t должен давать при $y = k$ произведение плотности вероятности ординаты процесса $f(t, y)$ при $y = k$, умноженной на $dy\Delta$, то есть

$$v(\tau, y)|_{y=k} = f(t, k)\delta(\tau - t). \quad (15.7)$$

Условия (15.6) и (15.7) однозначно определяют решение уравнения (15.4).

Для дальнейших вычислений удобно перейти от неизвестной функции $v(\tau, y)$ к новой неизвестной $v_1(\tau, y)$, положив

$$v(\tau, y) = f(t, k)v_1(\tau, y). \quad (15.8)$$

Вследствие линейности уравнения (15.4), при подстановке в него (15.8) можно сократить обе части на $f(t, k)$, и, следовательно, для определения вновь введенной функции $v_1(\tau, y)$ получим

уравнение

$$\frac{\partial v_1}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y}[a(\tau, y)v_1] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}[b(\tau, y)v_1] = 0, \quad (15.9)$$

аналогичное второму уравнению Колмогорова. Добавочные условия для него в соответствии с (15.7) и (15.6) имеют вид

$$v_1(\tau, y)|_{y=k} = \delta(\tau - t), \quad (15.10)$$

$$v_1(\tau, y) = 0, \quad \tau < t. \quad (15.11)$$

Для стационарного процесса, когда коэффициенты уравнения (15.9) не зависят от времени, нахождение решения этого уравнения для многих практически интересных случаев удастся получить методами операционного исчисления. Обозначим преобразование Лапласа от функции $v_1(\tau, y)$ по аргументу τ через $V_1(p, y)$, то есть положим

$$V_1(p, y) = \int_t^{\infty} e^{-p(\tau-t)} v_1(\tau, y) d\tau. \quad (15.12)$$

Умножив обе части уравнения (15.9) на $e^{-p(\tau-t)}$ и интегрируя по τ от t до ∞ , после очевидных преобразований, получим уравнение в изображениях по Лапласу

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}[b(y)V_1] - 2 \frac{\partial}{\partial y}[a(y)V_1] = 2pV_1, \quad (15.13)$$

решение которого, на основании (15.10) и очевидного требования обращения функции $v_1(\tau, y)$ в нуль при $y = \infty$, надлежит искать при условиях

$$V_1(p, k) = 1, \quad V_1(p, \infty) = 0. \quad (15.14)$$

Все фигурирующие здесь изображения существуют в области $\operatorname{Re} p > 0$.

Изображение $N(p, k)$ функции $\nu(k, \tau_0)$ может быть выражено через функцию $V_1(p, k)$ и ее производную. Действительно, умножая (15.5) на $e^{-p\tau_0}$ и интегрируя по τ_0 , получим

$$N(p, k) = f(t, k) \int_k^{\infty} V_1(p, y) dy. \quad (15.15)$$

Интегрируя уравнение (15.13) по y от k до ∞ , с учетом (15.14), имеем

$$\int_k^{\infty} V_1(p, y) dy = a(k) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} [b(y) V_1(p, y)] \Big|_{y=k}, \quad (15.16)$$

что после подстановки в (15.15) дает

$$N(p, k) = f(t, k) \left\{ \frac{1}{p} a(k) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} [b(y) V_1(p, y)] \Big|_{y=k} \right\}. \quad (15.17)$$

В том случае, когда решение уравнения (15.13) дает для $V_1(p, y)$ достаточно простое выражение, пользуясь таблицами обратного преобразования Лапласа, можно найти оригинал $\bar{v}(k, \tau_0)$, соответствующий изображению (15.17). Выполненные таким образом расчеты, как и следовало ожидать из общих соображений, показывают, что при $\tau_0 \rightarrow 0$, $\bar{v}(k, \tau_0) \rightarrow \infty$ однако, если взять физически достаточно малое τ_0 , то полученное таким образом значение $\bar{v}$ оказывается конечным и пригодным для получения практических выводов.

Пример 15.1. Для нормального процесса $U(t)$, имеющего нулевое математическое ожидание и корреляционную функцию $K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$, для уровня k определить среднее число выбросов $\bar{v}(\tau_0)$ и среднее время пребывания процесса выше уровня k .

Решение. Рассматриваемый процесс — марковский, так как удовлетворяет уравнению

$$\frac{dU}{dt} + \alpha U = \sigma \sqrt{2\alpha} \xi(t). \quad (15.18)$$

Следовательно, коэффициенты сноса и диффузии определяются равенствами $a(\tau, y) = -\alpha y$; $b = 2\alpha\sigma^2$. В соответствии с (15.17) для изображения $V_1(p, y)$ среднего числа выбросов $\bar{v}(\tau, k)$ имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} [2\alpha\sigma^2 V_1] + 2\alpha \frac{\partial}{\partial y} [y V_1] = 2p V_1, \quad (15.19)$$

что с учетом (15.14) дает (см. [3, 22])

$$V_1(p, y) = \exp \left\{ \frac{k^2 - y^2}{4\sigma^2} \right\} \frac{D_{-\frac{p}{\alpha}}(\frac{y}{\sigma})}{D_{-\frac{p}{\alpha}}(\frac{k}{\sigma})}, \quad (15.20)$$

где $D_\rho(x)$ — обозначение функции параболического цилиндра. Подставляя найденное значение в (15.17) и учитывая правила дифференцирования функций параболического цилиндра [3], получим

$$N_1(p, k) = \frac{D_{-\frac{p}{\alpha}-1}\left(\frac{k}{\sigma}\right)}{D_{-\frac{p}{\alpha}}\left(\frac{k}{\sigma}\right)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{k^2}{2\sigma^2}}. \quad (15.21)$$

В том случае, когда рассматриваются выбросы за нулевой уровень $k = 0$, найденному изображению $N(p, k)$ соответствует простая формула для оригинала

$$\bar{\nu}(\tau_0, 0) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{e^{-\alpha\tau_0}}{\sqrt{1 - e^{-2\alpha\tau_0}}}. \quad (15.22)$$

График $\bar{\nu}(\tau_0, 0)$ как функции $\alpha\tau_0$ изображен на рис. 15.2. Для

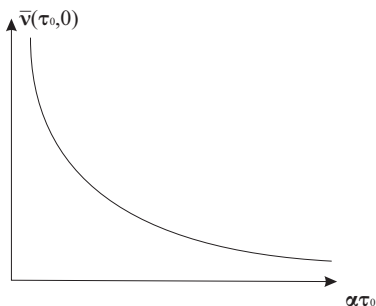


Рис. 15.2. Интенсивность выбросов за нулевой уровень

определения закона распределения $f(\tau)$ длительности одного выброса τ выберем внутри этого выброса произвольный момент времени t_0 , разбив таким образом время выброса τ на сумму времени τ_1 , предшествующего t_0 , и времени τ_2 от момента времени t_0 до конца выброса. Поскольку процесс $U(t)$ — марковский, величины τ_1 и τ_2 независимы и следовательно, плотность вероятности $f(\tau)$ является композицией плотностей вероятности $f_1(\tau_1)$ и $f_2(\tau_2)$ этих величин:

$$f(\tau) = \int_0^\infty f_1(\tau - \tau_2) f_2(\tau_2) d\tau_2. \quad (15.23)$$

Для определения $f_2(\tau_2)$ необходимо решить второе уравнение Колмогорова для процесса (15.18)

$$\frac{\partial w_2(\tau, y)}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial y}[\alpha y w(\tau, y)] - \sigma^2 \alpha \frac{\partial^2}{\partial y^2} w_2(\tau, y) = 0 \quad (15.24)$$

при начальных условиях $w_2(\tau, y)|_{\tau=0} = f_0(y)$, где $f_0(y)$ — плотность распределения ординаты процесса в момент t_0 , то есть плотность нормального закона, усеченного по уровню k :

$$f_0(y) = \frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{y^2}{2\sigma^2}\}}{1 - \Phi(\frac{k}{\sigma})}. \quad (15.25)$$

Обозначим через $F_2(\tau)$ функцию распределения τ_2 , а через $W_2(\tau)$ — вероятность невыхода процесса $U(t)$ за границу в течение времени t . Очевидно, если за время t ордината не вышла за границу, то это эквивалентно наступлению события $\tau_2 > \tau$, то есть

$$\mathcal{P}\{\tau_2 > \tau\} = 1 - F_2(\tau) = W_2(\tau), \quad (15.26)$$

откуда следует

$$f_2(\tau) = \frac{dF_2(\tau)}{d\tau} = -\frac{dW_2(\tau)}{d\tau}, \quad (15.27)$$

где вероятность невыхода

$$W_2(\tau) = \int_k^\infty w_2(\tau, y) dy. \quad (15.28)$$

Теперь обратимся к получению закона $f_1(\tau)$ первого подынтервала на рис. 15.3. Здесь нам придется рассмотреть первое уравнение Колмогорова

$$\frac{\partial w_1(t, x; \tau, y)}{\partial t} - \alpha x \frac{\partial w_1(t, x; \tau, y)}{\partial x} + \sigma^2 \alpha \frac{\partial^2 w_1(t, x; \tau, y)}{\partial x^2} = 0, \quad (15.29)$$

причем необходимо явно указать все аргументы плотности вероятности невыхода $w_1(t, x; \tau, y)$. Вероятность невыхода за дозволенные пределы при условии, что мы стартовали в момент t из точки x дается неравенством

$$W_1(t, x; \tau) = \int_k^\infty w_1(t, x; \tau, y) dy \quad (15.30)$$

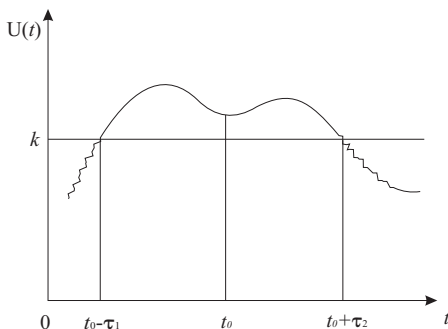


Рис. 15.3. К получению закона распределения длительности выброса

и, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial W_1}{\partial t} - \alpha x \frac{\partial W_1}{\partial x} + \sigma^2 \alpha \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} = 0 \quad (15.31)$$

и «начальному» условию

$$W_1(t, x; \tau) \Big|_{t=\tau} = 1. \quad (15.32)$$

Рассуждая по аналогии с (15.26)–(15.28) получаем, что

$$f_2(\tau) = -\frac{d}{d\tau} \int_k^\infty f_0(x) W_1(t, x; t + \tau) dx. \quad (15.33)$$

Поскольку процесс $U(t)$ является однородным во времени, то

$$W_1(t, x; \tau) = W_1(\tau - t, x) \quad (15.34)$$

и, таким образом,

$$f_2(\tau) = -\frac{d}{d\tau} \int_k^\infty f_0(x) W_1(\tau, x) dx. \quad (15.35)$$

Решение дифференциальных уравнений (15.24) и (15.31) с математической точки зрения ничем не отличается от решения уравнения (14.12) и может быть представлено в виде разложения в

ряд по функциям параболического цилиндра, разобранный в параграфе 14 (некоторые примеры разложения по данной системе функций в других по данной системе функций в других аналогичных задачах можно найти в [30]).

Вычисляя указанным образом плотности $f_1(\tau)$ и $f_2(\tau)$ далее по формуле свертки (15.23) находим искомый закон распределения $f(\tau)$. Результирующее выражение оказывается достаточно громоздким и здесь не приводится. В частном случае $k = 0$ (выбросы за нулевой уровень) оно упрощается. Качественный вид кривой $f(\tau)$ показан на рис. 15.4.

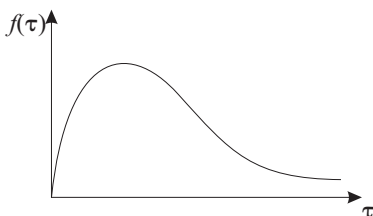


Рис. 15.4. Закон распределения длительности выбросов в примере 15.1

§ 16. ВЫБРОСЫ КОМПОНЕНТЫ МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

Как было показано в предыдущих параграфах, для марковского случайного процесса можно получить исчерпывающие характеристики выбросов за границы заданной области, включая вероятность пребывания и все остальные характеристики. При этом выясняется, что такие параметры, как, например, среднее число выбросов, обращаются в бесконечность, вследствие чего приходится рассматривать только выбросы достаточно большой длительности. Хотя таким образом и удастся получить физически осмысленные результаты, может возникнуть вопрос: насколько полученный результат соответствует реальному процессу, замена которого марковским процессом всегда является аппроксимацией, поскольку реальные процессы всегда дифференцируемы, в то время как марковские процессы не имеют производных? Ответить на этот вопрос утвердительно можно, если аппроксимировать исследуемый процесс с помощью компоненты соответствующего многомерного марковского процес-

са. Увеличивая размерность марковского процесса можно обеспечить любую точность аппроксимации. Особенно просто это осуществляется в наиболее важном для приложений случае нормального случайного процесса с дробно-рациональной спектральной плотностью.

Рассмотрим это вопрос подробнее. Пусть $U(t)$ — нормальный случайный процесс, спектральная плотность $S(\omega)$ которого имеет вид

$$S(\omega) = \frac{|P_m(i\omega)|^m}{|Q_n(i\omega)|^n}, \quad n > m \quad (16.1)$$

где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ обозначают полиномы степени m и, соответственно, n . В этом случае процесс $U(t)$ является стационарным решением дифференциального уравнения

$$Q_n(p)U(t) = P_m(p)\xi(t), \quad (16.2)$$

где $p = \frac{d}{dt}$ означает оператор дифференцирования, а $\xi(t)$ — стандартный белый шум.

Как было показано в параграфе 12, уравнение (16.2) можно заменить эквивалентной системой уравнений первого порядка для n -мерного процесса $[U_1(t), \dots, U_n(t)]$, одной из компонент которого является $U(t)$ (будем считать для определенности, что это первая компонента, то есть $U_1(t) = U(t)$). Определенный данной системой уравнений n -мерный процесс $\vec{U}(t)$ является марковским, а его плотность вероятности $f(t, \vec{x}, \tau, \vec{y})$ удовлетворяет системе уравнений Колмогорова (9.7) и (9.10), коэффициенты которой просто могут быть найдены по формулам (9.13) и (9.14).

Предположим, что задан некоторый интервал $[k_1(t), k_2(t)]$, вероятность пребывания $W(\theta)$ внутри которого в течение интервала времени $[t, t+\theta]$ ординаты процесса $U(t)$ требуется определить. Повторяя рассуждения предыдущего параграфа, можно показать, что вероятность $w(t, \vec{x}; \tau, \vec{y})$ попадания ординат n -мерного процесса в момент времени τ в элемент объема $d\vec{y}$, равного произведению $dy_1 \dots dy_n$ удовлетворяет второму уравнению Колмогорова. Следовательно, искомая вероятность $W(\theta)$ определяется формулой

$$W(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{k_1(\tau)}^{k_2(\tau)} w(t, \vec{x}; \tau, \vec{y}) dy_1 \dots dy_n, \quad \tau = t + \theta, \quad (16.3)$$

из которой следует формула для плотности вероятности времени пребывания внутри заданной области, аналогичная формуле (15.27):

$$f(\theta) = -\frac{dW(\theta)}{d\theta} \quad (16.4)$$

Формулы (16.3) и (16.4) аналогичны формулам (15.27) и (15.28) для одномерного марковского процесса, однако усложнение задачи состоит не только в том, что увеличивается размерность уравнений Колмогорова и кратность интеграла (16.3), но и в том, что граничные условия для уравнений Колмогорова во многих практически интересных случаях усложняются. Происходит это потому, что аппроксимация спектральной плотности функцией вида (16.1) используется, как правило, для того, чтобы иметь дело с дифференцируемыми процессами, которые лучше отражают свойства реальных процессов. В этом случае граничные условия для плотности вероятности невыхода w не могут быть нулевыми для всей границы рассматриваемой области, так как для нулевых граничных условий на всей границе существует только нулевое решение уравнений Колмогорова.

Рассмотрим этот вопрос подробнее на примере двумерного марковского процесса специального вида. Предположим, что $U(t)$ — стационарная нормальная случайная функция, имеющая нулевое математическое ожидание и корреляционную функцию

$$K_u(t) = \sigma^2 e^{-\alpha|t|} \left(\cos \beta t + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|t| \right). \quad (16.5)$$

Требуется определить вероятность $W(\tau)$ того, что в течение интервала времени $(t, t + \theta)$ ордината этой функции ни разу не покинет интервал (k_1, k_2) , где k_1 и k_2 могут быть или постоянными или заданными функциями времени.

Спектральная плотность, соответствующая корреляционной функции (16.5), имеет вид:

$$S_u(\omega) = \frac{2\sigma^2\alpha(\alpha^2 + \beta^2)}{\pi[(\omega^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2]}. \quad (16.6)$$

Следовательно, $U(t)$ может рассматриваться как стационарное решение дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2U}{dt^2} + 2\alpha\frac{dU}{dt} + (\alpha^2 + \beta^2)U = 2\sigma\sqrt{\alpha(\alpha^2 + \beta^2)}\xi(t) \quad (16.7)$$

или как решение системы уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \frac{dU_1}{dt} = U_2, \\ \frac{dU_2}{dt} = -2\alpha U_2 - (\alpha^2 + \beta^2)U_1 + 2\sigma\sqrt{\alpha(\alpha^2 + \beta^2)}\xi(t) \end{cases} \quad (16.8)$$

где $U_1(t) = U(t)$, а $\xi(t)$ — белый шум. Совокупность случайных функций $U_1(t), U_2(t)$ является двумерным марковским процессом, для которого соответствующая плотность вероятности перехода $f(t, x_1, x_2; \tau, y_1, y_2)$ из состояния x_1, x_2 в момент времени t в состояние y_1, y_2 в момент времени $\tau = t + \theta$ удовлетворяет системе уравнений Колмогорова (9.7), (9.10). Определяя коэффициенты этих уравнений, пользуясь формулами (9.13) и (9.14), получим

$$\begin{aligned} a_2(\tau, y_1, y_2) &= -(\alpha^2 + \beta^2)y_1 - 2\alpha y_2; & a_1(\tau, y_1, y_2) &= y_2; \\ b_{11} &= b_{12} = 0; & b_{22}(\tau, y_1, y_2) &= 2\sigma^2\alpha(\alpha^2 + \beta^2). \end{aligned} \quad (16.9)$$

Следовательно, второе уравнение Колмогорова примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial y_2} \left\{ [(\alpha^2 + \beta^2)y_1 + 2\alpha y_2] f \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial y_1} (y_2 f) - \sigma^2 \alpha (\alpha^2 + \beta^2) \frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2} = 0. \end{aligned} \quad (16.10)$$

Рассмотрим как и в случае одномерного марковского процесса, плотность вероятности $w(\tau, y_1, y_2)$ системы случайных величин $Y_1 \equiv U_1(\tau)$ и $Y_2 \equiv U_2(\tau)$, вычисленную при условии, что ординаты процессов $U_1(t)$ и $U_2(t)$ в момент времени t заданы (или задан их закон распределения), а ордината функции $U_1(t)$ в интервале времени (t, τ) ни разу не вышла за интервал (k_1, k_2) . Очевидно, что плотность вероятности невыхода $w(\tau, y_1, y_2)$ удовлетворяет уравнению, не отличающемуся от (16.10), то есть уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial y_2} \left\{ [(\alpha^2 + \beta^2)y_1 + 2\alpha y_2] w \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial y_1} (y_2 w) - \sigma^2 \alpha (\alpha^2 + \beta^2) \frac{\partial^2 w}{\partial y_2^2} = 0, \end{aligned} \quad (16.11)$$

а искомая вероятность невыхода $W(\tau)$ связана с плотностью вероятности $w(\tau, y_1, y_2)$ соотношением

$$W(\theta) = \int_{k_1(\tau) - \infty}^{k_2(\tau) + \infty} \int w(\tau, y_1, y_2) dy_2 dy_1, \quad \tau = t + \theta, \quad (16.12)$$

отличающимся от соотношения (14.5) только тем, что в данном случае требуется еще добавочное интегрирование по y_2 , отражающее тот факт, что значения ординат функции $U_2(t)$ ничем не ограничены.

Таким образом, для определения искомой вероятности невыхода $W(\tau)$ остается установить добавочные условия, определяющие решение уравнения (16.11). Начальные условия для плотности вероятности $w(\tau, y_1, y_2)$ устанавливаются также, как и для одномерного марковского процесса: если начальные значения x_1 и x_2 зафиксированы, то

$$w(\tau, y_1, y_2) \Big|_{\tau=t} = \delta(y_1 - x_1) \delta(y_2 - x_2), \quad (16.13)$$

если же задана плотность вероятности $f_0(x_1, x_2)$ начальных значений ординат компонент марковского процесса, то

$$w(\tau, y_1, y_2) \Big|_{\tau=t} = f_0(x_1, x_2). \quad (16.14)$$

Определение граничных условий требует более подробного рассмотрения. Выберем прямоугольную систему координат $y_1 O y_2$ и отметим в фазовой плоскости $y_1 O y_2$ область допустимых значений y_1 и y_2 . Очевидно, что этой областью (считаем k_1 и k_2 для простоты постоянными) будет бесконечная полоса, границы которой параллельны оси y_2 и удалены от нее на расстояния k_1 и k_2 соответственно. Рассмотрим четыре точки (точки 1, 2, 3, 4 на рис. 16.1), расположенные в допустимой области вблизи ее границ, и проследим возможные фазовые траектории реализаций случайных процессов $U_1(t)$, $U_2(t)$, проходящих через эти точки.

Так как y_2 в данной задаче, в соответствии с (16.3), является значением скорости изменения ординаты процесса $U_1(t)$, то в точках 1 и 2, лежащих в правой полуплоскости, касательные к фазовым траекториям могут иметь только положительные угловые коэффициенты (траектории могут идти только снизу вверх), а в точках 3 и 4, лежащих в левой полуплоскости, угловые коэффициенты могут иметь только отрицательные значения (траектории могут идти только сверху вниз). Таким образом, в точках

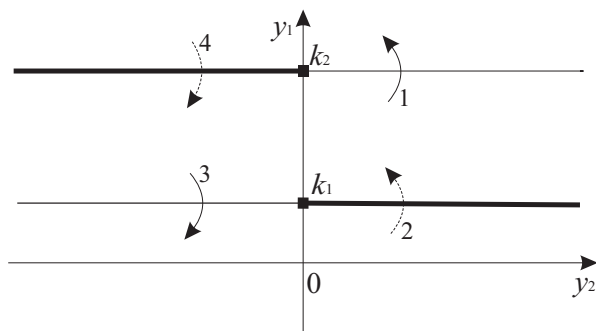


Рис. 16.1. К постановке краевых условий для многомерного процесса

2 и 4 фазовые траектории могут оказаться только войдя в допустимую область из области недопустимых значений ординаты функции $U_1(t)$. Однако любая траектория, хотя бы раз побывавшая в недопустимой области, обрывается и, следовательно, через эти точки фазовые траектории вообще не могут пройти, и плотность вероятности $w(\tau, y_1, y_2)$ обращается в нуль при любом $\tau > 0$.

Итак, для нашей задачи мы получаем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} w(\tau, k_1, y_2) \Big|_{y_2 > 0} &= 0, \\ w(\tau, k_2, y_2) \Big|_{y_2 < 0} &= 0, \end{aligned} \quad (16.15)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае граничные условия заданы не на всей границе допустимой области, а только на ее половине, отмеченной жирной линией на рис. 16.1. Никаких ограничений на функцию при и не налагается.

Можно проверить, что граничные условия (16.15) вместе с начальными условиями (16.13) (или (16.14)) однозначно определяют решение уравнения (16.11), однако полученный z -образный вид граничных условий представляет добавочные трудности при его решении.

При решении первого уравнения Колмогорова рассуждения, аналогичные приведенным выше показывают, что граничные условия и в этом случае должны быть заданы не на всей границе

допустимой области, а только на ее половине и имеют вид:

$$\begin{aligned} w|_{x_1=k_1, y_2>0} &= 0, \\ w|_{x_1=k_1, y_2<0} &= 0. \end{aligned} \quad (16.16)$$

Особый вид граничных условий для уравнения Колмогорова в данном случае связан с тем, что эти уравнения содержат две производные первого порядка (по времени и по одной пространственной координате) и только одну производную второго порядка (по другой пространственной координате). Для таких уравнений, называемых ультрапараболическими, являются характерными граничные условия полученного типа, которые ставятся только на части границы.

Уравнение Колмогорова относится к ультрапараболическому типу в том случае, если составленная из коэффициентов диффузии матрица диффузии $B = \|b_{ij}\|_{i,j=1}^n$ вырождается на всей границе, или отдельной ее части. В этом случае вначале необходимо определить так называемую регулярную часть границы (на которой ставятся краевые условия) и нерегулярную ее часть (свободную от условий). Правила определения регулярной части границы в общем случае изложены, например, в книге [40]. В нашем примере регулярную часть границы (отмеченную жирной линией на рис. 16.1) удалось определить из физических соображений.

Отметим, что указанная краевая задача носит название задачи Фикеры по имени итальянского математика, который впервые ее детально изучил [42]. До Фикеры подобными же задачами занимался Н. С. Пискунов [25]. Вырождение матрицы диффузии может выражаться либо в обращении в нуль некоторых коэффициентов диффузии (как в нашем случае), либо в линейной зависимости строк (или столбцов) этой матрицы.

Пример 16.1. Рассмотрим процесс

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \sqrt{2}\xi, \\ \dot{U}_2 = U_1, \end{cases} \quad (16.17)$$

развивающийся в области

$$\mathcal{D} = \{0 < a < U_1 < b, 0 < U_2 < d\} \quad (16.18)$$

при начальных условиях

$$U_1(0) = U_0, U_2(0) = 0, \quad (16.19)$$

где U_0 распределено равномерно в интервале $[a, b]$. Требуется найти вероятность невыхода процесса $U(t)$ за пределы области (16.18).

Решение. В данном случае второе уравнение Колмогорова имеет весьма простой вид

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} + y_1 \frac{\partial w}{\partial y_2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y_2^2} = 0 \quad (16.20)$$

и должно решаться при начальном условии

$$w|_{\tau=0} = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \delta(y_2), & (y_1, y_2) \in \mathcal{D}, \\ 0, & (y_1, y_2) \notin \mathcal{D}. \end{cases} \quad (16.21)$$

Краевые условия имеют вид

$$w|_{y_1=a} = w|_{y_1=b} = 0, \quad (16.22)$$

$$w|_{y_2=d} = 0, \quad (16.23)$$

то есть регулярной является вся граница кроме нижней стороны прямоугольника, задаваемой уравнением $y_2 = 0$.

Искомая вероятность невыхода вычисляется путем интегрирования

$$P(\tau) = \int_a^b \int_0^d w(\tau, y_1, y_2) dy_1 dy_2. \quad (16.24)$$

Детальный разбор этого примера, а также ряда других, аналогичных, но более сложных, задач о достижении границы можно найти в работе [23]. Числовые значения вероятности невыхода приводятся в таблице 16.1. В таблице приведены значения вероятности невыхода $P(t)$ двумерного процесса (U_1, U_2) за пределы области $D = \{a < U_1 < b, 0 \leq U_2 < d\}$ для значений $a = 1, b = 3$ и двух вариантов задания d , а именно $d = 1$ и $d = 5$ (графы 3 и 4 таблицы соответственно). Для сравнения в графе 2 даются значения вероятности невыхода $Q(t)$ первой компоненты этого же процесса U_1 за пределы интервала (a, b) при условии, что начальные значения указанной компоненты равномерно распределено в (a, b) .

Из физической сущности задачи (U_1 — «скорость», а U_2 — «путь» материальной частицы единичной массы под действием случайной внешней силы $\sqrt{2}\xi(t)$) ясно, что до момента $t = d/b$

Таблица 16.1. Значения вероятности невыхода

t	$Q(t)$	$P_1(t)$	$P_2(t)$
0.01	0.887	0.882	0.882
0.10	0.643	0.645	0.642
0.20	0.496	0.488	0.495
0.30	0.387	0.397	0.386
0.40	0.302	0.284	0.306
0.50	0.236	0.122	0.234
0.60	0.184	0.018	0.181
0.70	0.144	0.009	0.145
0.80	0.133	0.001	0.116

значения вероятностей P и Q должны совпадать, а при $t > d/a$ вероятность P должна быть пренебрежимо мала, что согласуется с результатами численных расчетов.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УСЛОВНЫХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

В предыдущих главах были рассмотрены различные методы получения вероятностных характеристик марковских процессов на основании теоретических соображений, используя общие уравнения, описывающие такие процессы. В прикладных задачах искомые характеристики могут определяться и иным способом — путем непосредственной обработки экспериментальных данных, полученных при измерении реализации процесса. Применяемые при этом методы принципиально не отличаются от обычных методов обработки реализаций случайных процессов общего вида подробно рассмотренных в книге [30]. Разумеется, общие методы оценки таких характеристик процесса, как математическое ожидание, корреляционная функция, спектральная плотность или функция распределения полностью сохраняют свою силу и для марковских процессов.

Вместе с тем марковское свойство процесса позволяет рассмотреть ряд весьма интересных математически и практически значимых задач статистической обработки экспериментальных данных, которые для других видов случайных процессов решить не удастся. К таким задачам относятся прежде всего задачи теории условных марковских процессов, развитой Р. Л. Стратоновичем [37].

Рассмотрим произвольный n -мерный марковский процесс $\vec{U}(t)$. Допустим, что часть компонент этого процесса, начиная с номера $m + 1$ и кончая номером n , измерены экспериментально, так что заданы их реализации $r_i(t) = U_{m+i}(t)$, ($i = \overline{1, n - m}$). Тогда говорят, что оставшиеся m компонент $U_1(t), \dots, U_m(t)$ образуют *условный марковский процесс*. Совместный закон распределения этих неизвестных компонент уже не будет удовлетворять уравнению Колмогорова, так условный марковский

процесс не является марковским в обычном смысле этого слова.

Тем не менее, для условного марковского процесса можно получить уравнение, аналогичное уравнению Колмогорова, но имеющее более сложный вид и включающее реализации известных компонент расширенного марковского процесса. Это уравнение называется *уравнением Стратоновича* и оказывается нелинейным интегро-дифференциальным уравнением. При этом дифференциальные члены уравнения Стратоновича по своему виду аналогичны соответствующим членам уравнения Колмогорова, а интегральный член включает искомый закон распределения условного марковского процесса нелинейным образом.

§ 17. ОПТИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА КОМПОНЕНТ МНОГОМЕРНОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

Рассмотрим процесс $U(t)$ (не обязательно марковский), некоторые свойства A ординат которого нам известны (например, известны значения ординат процесса в течение заданного интервала времени).

Поставим задачу экстраполирования этого процесса, то есть нахождения в любой момент t оценки ординаты процесса в будущий момент времени $t + \tau$, ($\tau > 0$). Потребуем, чтобы оценка удовлетворяла условию минимума среднего квадратического отклонения, то есть будем строить такую функцию $Z(t)$, для которой

$$M \left\{ [Z(t) - U(t + \tau)]^2 \middle| A \right\} = \min. \quad (17.1)$$

Легко видеть, что решением поставленной задачи будет функция

$$Z(t) = M \left[U(t + \tau) \middle| A \right]. \quad (17.2)$$

Иначе говоря, наилучшей оценкой ординаты $U(t + \tau)$ является значение математического ожидания этой ординаты, вычисленное при выполнении тех дополнительных условий A , которые были наложены на рассматриваемый процесс $U(t)$.

Действительно, вычитая и добавляя в квадратной скобке формулы (17.1) значение условного математического ожидания $\bar{u}_A = M[U(t + \tau) | A]$, после тождественных преобразований по-

лучим

$$\begin{aligned}
 M\left\{\left[Z(t)-U(t+\tau)\right]^2|A\right\} &= M\left\{\left[Z(t)-\bar{u}_A\right]^2- \right. \\
 &-2\left(Z(t)-\bar{u}_A\right)\left(U(t+\tau)-\bar{u}_A\right)+\left(U(t+\tau)-\bar{u}_A\right)^2|A\left\}= \\
 &= M\left\{\left[Z(t)-\bar{u}_A\right]^2\right\}+D\left[U(t+\tau)|A\right].
 \end{aligned}
 \tag{17.3}$$

Последнее слагаемое в (17.3) не зависит от $Z(t)$, а первое слагаемое неотрицательно и обращается в нуль только при $Z(t) = \bar{u}_A$, чем и доказывается правильность формулы (17.2).

Для того, чтобы определить условное математическое ожидание $\bar{u}_A = M[U(t+\tau)|A]$ необходимо располагать условной плотностью вероятности ординаты процесса $U(t+\tau)$ при выполнении комплекса условий A . При самой общей постановке задачи нахождение этой плотности представляет большие сложности. Исключением является случай, когда функция $U(t)$ является компонентой многомерного марковского процесса, а условие A заключается в задании ординат других компонент этого процесса (всех остальных компонент или хотя бы их части) за время, предшествующее настоящему моменту времени t . В этом случае искомая плотность вероятности удовлетворяет некоторому интегро-дифференциальному уравнению в частных производных, называемому уравнением Стратоновича, которое является обобщением уравнения Колмогорова.

Пусть, например, нас интересует случайная функция $U(t)$, ординаты которой измеряются с ошибкой $V(t)$, являющейся в свою очередь случайной функцией времени. Если $U(t)$ и $V(t)$ можно рассматривать как компоненты, соответственно, n_1 -мерного и n_2 -мерного марковского процесса (например, они являются нормальными процессами с дробно-рациональными спектральными плотностями), то «полезный сигнал» $U(t)$ и его измеренное с ошибкой значение $[U(t) + V(t)]$ можно рассматривать как компоненты $(n_1 + n_2)$ -мерного марковского процесса. К подобной схеме сводятся и более сложные задачи, связанные с измерением и прогнозированием случайных процессов. Далее рассмотрим более подробно общую модель, позволяющую охватить большое число важных прикладных задач.

Пусть имеется n -мерный марковский процесс $(U_1, \dots, U_n)$. Предположим, что на интервале времени $[0, t]$ последние $(n - m)$

его компонент известны:

$$U_\mu(t) = r_\mu(t), \quad \mu = \overline{m+1, n}, \quad (17.4)$$

где r_μ обозначают измеренные на опыте реализации. Будем называть эти компоненты наблюдаемыми компонентами. Тогда остальные, первые, m компонент $\vec{U}(t)$, которые не наблюдались и не измерялись, остаются случайными функциями t и образуют условный марковский процесс. Условный марковский процесс не является марковским в обычном смысле слова (так как для него не справедливо обобщенное уравнение Маркова (3.3)), однако, поскольку $U_\alpha(t)$ при $\alpha = \overline{1, m}$ являются компонентами n -мерного марковского процесса, для плотности вероятности этих компонент, можно получить уравнение, напоминающее уравнение Колмогорова, коэффициенты которого определяются коэффициентами сноса a_j и коэффициентами диффузии b_{jl} исходного марковского процесса, а также функциями $r_\mu(t)$, дающими в соответствии с (17.4) значения измеряемых компонент процесса в предшествующие моменты времени.

Условимся для дальнейшего, что латинские индексы i, j, k и l могут изменяться от 1 до n , греческие индексы α, β, γ меняются в пределах от 1 до m , а индексы μ, ν, λ принимают значения от $(m+1)$ до n . Векторные величины будем всегда считать имеющими n компонент. Предположим, что исходный n -мерный марковский процесс описывается системой стохастических дифференциальных уравнений Стратоновича вида (9.11):

$$\frac{dU_j(t)}{dt} = \psi_j[\vec{U}(t), t] + \sum_{l=1}^n g_{jl}[\vec{U}(t), t] \xi_l(t), \quad (17.5)$$

где ψ_j и g_{jl} — детерминированные функции, все частные производные которых, используемые далее, предполагаются существующими, а $\xi_l(t)$ — взаимно независимые процессы стандартного белого шума. Иначе говоря, $\xi_l(t)dt = dV_l(t)$, где $V_l(t)$ — независимые функции броуновского движения и, следовательно, корреляционные функции $K_{\xi_l}(\tau) = \delta(\tau)$, взаимные корреляционные функции $R_{\xi_i \xi_j}(\tau) = 0$, математические ожидания $\xi_l = 0$.

В соответствии с (9.13) и (9.14) имеем тогда

$$a_j(t, \vec{x}) = \psi_j(\vec{x}, t) + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_{jl}(\vec{x}, t)}{\partial x_k} g_{kl}(\vec{x}, t), \quad (17.6)$$

$$b_{jl}(t, \vec{x}) = \sum_{k=1}^n g_{jk}(\vec{x}, t) g_{lk}(\vec{x}, t), \quad (17.7)$$

причем в (17.6) коэффициенты сноса вычисляются по Стратоновичу.

Рассмотрим случайные величины W_α , определяемые равенствами

$$\begin{aligned} W_\alpha &= U_\alpha(\tau + \Delta) - U_\alpha(\tau); \\ W_\mu &= \dot{r}(t)\Delta - [U_\mu(t + \Delta) - U_\mu(\tau)], \end{aligned} \quad (17.8)$$

где, как было условлено выше, $\alpha = \overline{1, m}$, $\mu = \overline{(m+1), n}$, а приращение Δ будем считать малой положительной величиной.

Интегрируя обе части уравнения (17.5) в пределах от τ до $(\tau + \Delta)$ и подставляя результат в формулы (17.8), получим

$$\begin{aligned} W_\alpha &= \psi_\alpha(\vec{y}, \tau)\Delta + g_{\alpha j}(\vec{y}, \tau)dV_j(\tau) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial g_{\alpha l}(\vec{y}, \tau)}{\partial y_j} g_{jl}(\vec{y}, \tau)[dV_l(\tau)]^2, \end{aligned} \quad (17.9)$$

$$\begin{aligned} W_\mu &= \dot{r}_\mu(\tau)\Delta - \psi_\mu(\vec{y}, \tau)\Delta - \sum_{j=1}^n g_{\mu j}(\vec{y}, \tau)dV_j(\tau) - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial g_{\mu l}(\vec{y}, \tau)}{\partial y_j} g_{jl}(\vec{y}, \tau)[dV_l(\tau)]^2, \end{aligned} \quad (17.10)$$

где $V_j(\tau)$ — функция броуновского движения, соответствующая белому шуму $\xi_j(\tau)$, при интегрировании функций ψ_j и g_{jl} используется малость приращения Δ , благодаря которой подынтегральные функции при значениях аргументов $\tau, \vec{y}$ вынесены за знак интеграла, а слагаемые, содержащие $[dV_l(\tau)]^2$, появляются по той же причине, что и при выводе формул (8.8) и (9.13).

Будем считать y_j в формулах (17.9) и (17.10) заданными величинами. В этом случае благодаря свойствам процесса $\vec{U}(t)$ все семиинварианты величин W_j , начиная с семиинвариантов третьего порядка, в пределе при $\Delta \rightarrow 0$ обратятся в нуль, поскольку слагаемые, линейно зависящие от $dV_l(\tau)$, являются нормальными величинами, а учет слагаемых, квадратичных относительно $dV_l(\tau)$, даст поправки к моментам, порядок которых относительно Δ выше первого, и эти поправки можно не учитывать, поскольку в дальнейшем будет осуществлен предельный

переход при $\Delta \rightarrow 0$. Таким образом, при заданном значении $\vec{y}$ систему случайных величин W_j можно считать нормальной. Математические ожидания $\bar{w}_j$ и корреляционные моменты k_{jl} этой системы величин с учетом (17.6) и (17.7), могут быть представлены в виде:

$$\bar{w}_\alpha = a_\alpha(\tau, \vec{y})\Delta; \quad \bar{w}_\mu = \dot{r}_\mu(\tau)\Delta - a_\mu(\tau, \vec{y})\Delta, \quad (17.11)$$

$$k_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}(\tau, \vec{y})\Delta; \quad k_{\alpha\mu} = -b_{\alpha\mu}(\tau, \vec{y})\Delta; \quad k_{\mu\nu} = b_{\mu\nu}(\tau, \vec{y})\Delta, \quad (17.12)$$

причем всюду входящие в аргументы функций a_j и b_{ij} компоненты y_μ при $\mu = \overline{m+1, n}$ следует заменить на $r_\mu(\tau)$.

Покажем, что обобщенное соотношение Маркова (9.1) не применимо для так определенного условного марковского процесса и должно быть заменено другим, более сложным уравнением. Для упрощения написания формул условимся обозначать совокупность наблюдаемых компонент исходного марковского процесса в начальный момент времени через $\vec{\eta}$ или $\vec{\eta}_{t_j}$, если требуется явно отметить, к какому моменту времени относятся эти компоненты.

Аналогичным образом для ненаблюдаемых компонент будем пользоваться обозначениями $\vec{\xi}$ и $\vec{\xi}_{t_j}$, соответственно. В том случае, когда будут рассматриваться только два момента времени t и $\tau > t$ или t и $\tau + \Delta$, вместо $\vec{\xi}_t$, $\vec{\xi}_\tau$ или $\vec{\xi}_{\tau+\Delta}$ будем писать просто $\vec{x}$ и $\vec{y}$.

Рассмотрим интервал времени $[t, \tau]$. Разобьем этот интервал на k равных подынтервалов точками $t_s, s = \overline{0, k}$, причем $t_0 = t, t_k = \tau$. Обозначим совместную плотность вероятности системы $2(k+1)$ компонент получившихся случайных векторов $(\vec{\xi}_s, \vec{\eta}_s)$ ($s = \overline{0, k}$) через $f(\vec{\xi}_0, \dots, \vec{\xi}_k, \vec{\eta}_0, \dots, \vec{\eta}_k)$, где $\vec{\xi}_0 = \vec{x}, \vec{\xi}_k = \vec{y}$. Для получения условной плотности вероятности $w(t, \vec{x}; \tau, \vec{y})$ введенную выше плотность вероятности f необходимо умножить на нормировочный коэффициент, учитывающий условия, наложенные на наблюдаемые компоненты, проинтегрировать по всем аргументам $\vec{\xi}_s, (s = \overline{1, k-1})$ в бесконечных пределах и по $\vec{\eta}_i, (i = \overline{0, k})$ в бесконечно узкой области вблизи значений $\vec{r}(t_i)$.

Рассмотрим теперь интервал времени $[t, \tau + \Delta]$. Обозначая $\tau + \Delta$ через t_{k+1} , $\vec{\xi}(t_{k+1})$ через $\vec{\xi}_{k+1}$, а $\vec{\eta}(t_{k+1})$ через $\vec{\eta}_{k+1}$ и учитывая, что компоненты $\vec{\xi}(t), \vec{\eta}(t)$ образуют n -мерный марковский

процесс, имеем

$$\begin{aligned} f(\vec{\xi}_0, \dots, \vec{\xi}_{k+1}, \vec{\eta}_0, \dots, \vec{\eta}_{k+1}) = \\ = f(\vec{\xi}_0, \dots, \vec{\xi}_k, \vec{\eta}_0, \dots, \vec{\eta}_k) f(\vec{\xi}_{k+1}, \vec{\eta}_{k+1} | \vec{\xi}_k, \vec{\eta}_k). \end{aligned} \quad (17.13)$$

Перейдем непосредственно к выводу уравнений, описывающих плотность вероятности перехода $w(t, \vec{x}; \tau, \vec{y})$ условного марковского процесса. Для этого проинтегрируем обе части равенства (17.13) по $\vec{\xi}_s$ ($s = \overline{1, k}$) в бесконечных пределах и по $\vec{\eta}_j$ ($j = \overline{0, k+1}$) в бесконечно узкой полосе по каждому из аргументов $\vec{\eta}$ вблизи значений $\vec{\eta}_i(t) = \vec{r}_i(t)$. Тогда, учитывая связь между плотностью f и плотностью вероятности перехода w для условного марковского процесса и обозначая $\vec{\xi}_0 = \vec{x}$, $\vec{\xi}_k = \vec{z}$, $\vec{\xi}_{k+1} = \vec{y}$, получим

$$w(t, \vec{x}; \tau + \Delta, \vec{y}) = C \int_r \int_{-\infty}^{+\infty} w(t, \vec{x}; \tau, \vec{z}) f(\vec{y}, \vec{\eta}_{k+1} | \vec{z}, \vec{\eta}_k) d\vec{z} d\vec{\eta}_k d\vec{\eta}_{k+1}. \quad (17.14)$$

Так как

$$\begin{aligned} f(\vec{y}, \vec{\eta}_{k+1} | \vec{z}, \vec{\eta}_k) &= f(\vec{y} | \vec{z}, \vec{\eta}_k, \vec{\eta}_{k+1}) f(\vec{\eta}_{k+1} | \vec{z}, \vec{\eta}_k) = \\ &= w(\tau, \vec{z}; \tau + \Delta, \vec{y}) f(\vec{\eta}_{k+1} | \vec{z}, \vec{\eta}_k), \end{aligned} \quad (17.15)$$

то вместо (17.14) можно написать

$$\begin{aligned} w(t, \vec{x}; \tau + \Delta, \vec{y}) &= C \int_{-\infty}^{+\infty} \overset{2(n-m)}{(\cdot \cdot \cdot)} \int_{-\infty}^{+\infty} \overset{(m)}{(\cdot \cdot \cdot)} \int_{-\infty}^{+\infty} w(t, \vec{x}; \tau, \vec{y}) \times \\ &\times w(\tau, \vec{z}; \tau + \Delta, \vec{y}) f(\vec{\eta}_{k+1} | \vec{z}, \vec{\eta}_k) d\vec{z} d\vec{\eta}_k d\vec{\eta}_{k+1}, \end{aligned} \quad (17.16)$$

где $(n-m)$ -кратные интегралы по $\vec{\eta}_k$ и $\vec{\eta}_{k+1}$ вычисляются в пределах узкой области, непосредственно примыкающей к точкам, соответственно, $\vec{\eta}_k = \vec{r}(\tau)$ и $\vec{\eta}_{k+1} = \vec{r}(\tau + \Delta)$.

Обращаясь к формуле (17.8), видим, что компоненты $\vec{\eta}_{k+1}$ при фиксированных значениях $\vec{y}$ и $\vec{\eta}_k$ отличаются от компонент нормального вектора $\vec{W}$ только постоянными неслучайными слагаемыми. Следовательно, $\vec{\eta}_{k+1}$ является нормальным вектором,

причем пределы интегрирования по $\vec{\eta}_{k+1}$ соответствуют интегрированию по компонентам $\vec{W}$ в пределах бесконечно малого объема, примыкающего к центру распределения системы нормальных величин, имеющих математические ожидания (17.11) и корреляционную матрицу (17.12). Поэтому вместо (17.16), используя формулу (3.17) можно написать

$$\begin{aligned}
 w(t, \vec{x}; \tau + \Delta, \vec{y}) = & \gamma \int_{-\infty}^{+\infty} w(t, \vec{x}; \tau, \vec{y}) w(\tau, \vec{z}; \tau + \Delta, \vec{y}) \times \\
 & \times \exp \left\{ -\frac{\Delta}{2 \det(B)} \sum_{\mu=m+1}^n \sum_{\nu=m+1}^n A_{\mu\nu} [\dot{r}_\nu(\tau) - a_\nu(\tau), \vec{y}] \times \right. \\
 & \left. \times [\dot{r}_\mu(\tau) - a_\mu(\tau), \vec{y}] \right\} d\vec{z},
 \end{aligned} \tag{17.17}$$

где $\det(B)$ обозначает определитель матрицы $\|b_{\mu\nu}\|$, $A_{\mu\nu}$ — алгебраическое дополнение элемента $b_{\mu\nu}$ этого определителя, γ — новый нормировочный коэффициент, а индексы μ и ν в соответствии с принятыми ранее условиями пробегают значения от $(m+1)$ до n .

Множитель γ вычисляем, используя условие нормировки плотности вероятности $w(t, \vec{x}; \tau + \Delta, \vec{y})$, которое записывается в виде:

$$\begin{aligned}
 \gamma \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \binom{2m}{\cdot} w(t, \vec{x}; \tau, \vec{z}) w(\tau, \vec{z}; \tau + \Delta, \vec{y}) \exp \left\{ -\frac{\Delta}{2 \det(B)} \times \right. \\
 \left. \times \sum_{\mu=m+1}^n \sum_{\nu=m+1}^n A_{\mu\nu} (\dot{r}_\mu - a_\mu)(\dot{r}_\nu - a_\nu) \right\} d\vec{z} d\vec{y} = 1.
 \end{aligned} \tag{17.18}$$

Здесь и далее для краткости опущены аргументы $\tau, \vec{y}$ у функций a_μ и a_ν . При вычислении последнего интеграла, воспользовавшись малостью Δ , можно разложить экспоненту по степеням Δ , ограничившись при этом линейными слагаемыми, а плотность вероятности $w(t, \vec{z}; \tau + \Delta, \vec{y})$ заменить на $\delta(\vec{z} - \vec{y}) = \prod_{i=1}^m \delta(z_i - y_i)$.

Выполнив указанные преобразования получим:

$$\begin{aligned} & \gamma \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \binom{2m}{\cdot\cdot\cdot} w(t, \vec{x}; \tau, \vec{z}) \delta(\vec{y} - \vec{z}) \left\{ 1 - \frac{\Delta}{2 \det(B)} \times \right. \\ & \times \sum_{\mu=m+1}^n \sum_{\nu=m+1}^n A_{\mu\nu} (\dot{r}_\mu - a_\mu) (\dot{r}_\nu - a_\nu) + o(\Delta) \Big\} dz d\vec{y} = 1. \end{aligned} \quad (17.19)$$

Наличие дельта-функции под знаком последнего интеграла позволяет выполнять в нем интегрирование по аргументам $\vec{z}$, в результате чего (17.18) запишется в виде:

$$\begin{aligned} & \gamma \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \binom{m}{\cdot\cdot\cdot} w(t, \vec{x}; \tau, \vec{y}) d\vec{y} - \frac{\Delta}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \binom{m}{\cdot\cdot\cdot} w(t, \vec{x}; \tau, \vec{y}) \times \right. \\ & \times \frac{1}{\det(B)} \sum_{\mu=m+1}^n \sum_{\nu=m+1}^n A_{\mu\nu} (\dot{r}_\mu - a_\mu) (\dot{r}_\nu - a_\nu) d\vec{y} + o(\Delta) \Big\} = 1. \end{aligned} \quad (17.20)$$

Решая это уравнение относительно γ и учитывая малость Δ , находим

$$\begin{aligned} \gamma &= \left\{ 1 - \frac{\Delta}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \binom{m}{\cdot\cdot\cdot} w(t, \vec{x}; \tau, \vec{y}) \frac{1}{\det(B)} \times \right. \\ & \times \sum_{\mu=m+1}^n \sum_{\nu=m+1}^n A_{\mu\nu} (\dot{r}_\mu - a_\mu) (\dot{r}_\nu - a_\nu) d\vec{y} + o(\Delta) \Big\}^{-1} = \\ &= 1 + \frac{\Delta}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \binom{m}{\cdot\cdot\cdot} w(t, \vec{x}; \tau, \vec{y}) \frac{1}{\det(B)} \times \\ & \times \sum_{\mu=m+1}^n \sum_{\nu=m+1}^n A_{\mu\nu} (\dot{r}_\mu - a_\mu) (\dot{r}_\nu - a_\nu) d\vec{y} + o(\Delta). \end{aligned} \quad (17.21)$$

Подстановка полученного значения γ в (17.17) с последующим разложением экспоненты в подынтегральном выражении по

степеням Δ дает

$$\begin{aligned}
 w(t, \vec{x}; \tau + \Delta, \vec{y}) = & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \binom{m}{!} w(t, \vec{x}; \tau, \vec{z}) w(\tau, \vec{z}; \tau + \Delta, \vec{y}) d\vec{z} + \\
 & + \frac{\Delta}{2} w(t, \vec{x}; \tau, \vec{y}) \left\{ -\frac{1}{\det(B)} \sum_{\mu=m+1}^n \sum_{\nu=m+1}^n A_{\mu\nu} (\dot{r}_\mu - a_\mu) \times \right. \\
 & \times (\dot{r}_\nu - a_\nu) + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \binom{m}{!} w(t, \vec{x}; \tau, \vec{y}) \frac{1}{\det(B')} \times \\
 & \times \sum_{\mu=m+1}^n \sum_{\nu=m+1}^n A'_{\mu\nu} (\dot{r}_\mu - a'_\mu) (\dot{r}_\nu - a'_\nu) d\vec{y}' \left. \right\} + o(\Delta),
 \end{aligned} \tag{17.22}$$

где штрихами обозначены те функции, в которых в роли аргумента выступают компоненты y'_α ($\alpha = 1, m$) вектора $\vec{y}'$, являющиеся переменными интегрирования при вычислении интеграла, стоящего в фигурных скобках.

Сравним полученную формулу (17.22) с обобщенным соотношением Маркова, записанным для m -мерного марковского процесса для тех же трех моментов времени t , τ , $\tau + \Delta$, из которых два последних отстоят друг от друга на малую величину Δ :

$$f(t, \vec{x}; \tau + \Delta, \vec{y}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \binom{m}{!} f(t, \vec{x}; \tau, \vec{z}) f(\tau, \vec{z}; \tau + \Delta, \vec{y}) d\vec{z} \tag{17.23}$$

Формула (17.22) отличается от формулы (17.23) в двух отношениях: во-первых, в формуле (17.22) имеется второе слагаемое, пропорциональное Δ и играющее роль малой поправки к главному члену; во-вторых, первое слагаемое в (17.22), совпадая по форме с правой частью формулы (17.23), имеет то отличие, что для условного марковского процесса под знак интеграла входят не безусловная плотность вероятности перехода f , а условные плотности вероятности w , вычисленные при условии, что наблюдаемые $(n - m)$ остальных компонент исходного n -мерного марковского процесса имеют заданные значения $r_\mu(t)$.

Поэтому, если повторить рассуждения параграфа 7, предшествующие выводу второго уравнения Колмогорова (то есть

использовать (17.22) для нахождения производной

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} [w(t, \vec{x}; \tau + \Delta, \vec{y}) - w(t, \vec{x}; \tau, \vec{y})]$$

и т. д.), то мы получим интегро-дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w(t, \vec{x}; \tau, \vec{y})}{\partial \tau} + \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} [a_{\alpha}^* w(t, \vec{x}; \tau, \vec{y})] - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^m \frac{\partial^2}{\partial y_{\alpha} \partial y_{\beta}} \times \\ & \times [b_{\alpha\beta}^* w(t, \vec{x}; \tau, \vec{y})] = \frac{1}{2} w(t, \vec{x}; \tau + \Delta, \vec{y}) \left\{ -\frac{1}{\det(B)} \times \right. \\ & \times \sum_{\mu=m+1}^n \sum_{\nu=m+1}^n A_{\mu\nu} (\dot{r}_{\mu} - a_{\mu}) (\dot{r}_{\nu} - a_{\nu}) + \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(m)!}{(-\infty)} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\mu=m+1}^n \sum_{\nu=m+1}^n \frac{1}{\det(B')} A'_{\mu\nu} (\dot{r}_{\mu} - a'_{\mu}) \times \\ & \times (\dot{r}_{\nu} - a'_{\nu}) w(t, \vec{x}; \tau, \vec{y}) d\vec{y}' \Big\}. \end{aligned} \quad (17.24)$$

Дифференциальные члены уравнения (17.24) совпадают по форме с левой частью второго уравнения Колмогорова, отличаюсь однако тем, что коэффициенты a_{α}^* , $b_{\alpha\beta}^*$ вычисляются при заданном законе изменения наблюдаемых компонент исходного марковского процесса, то есть в отличие от формул (9.8) и (9.9) к условию $\vec{U}(t) = \vec{y}$ добавляется также и условие A

$$a_{\alpha}^*(\tau, \vec{y}) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} M [U_{\alpha}(\tau + \Delta) - U_{\alpha}(\tau) | \vec{U}(\tau) = \vec{y}, A], \quad (17.25)$$

$$\begin{aligned} b_{\alpha\beta}^*(\tau, \vec{y}) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} M \Big\{ [U_{\alpha}(\tau + \Delta) - U_{\alpha}(\tau)] \times \\ \times [U_{\beta}(\tau + \Delta) - U_{\beta}(\tau)] | \vec{U}(\tau) = \vec{y}, A \Big\}, \end{aligned} \quad (17.26)$$

где, напомним, буквой A для краткости обозначены условия, задающие наблюдаемые компоненты.

Так как приращения $[U_{\alpha}(\tau + \Delta) - U_{\alpha}(\tau)]$ в соответствии с (17.8) являются нормальными величинами, а условие A в данном случае означает ничто иное, как обращение в нуль случайных

величин W_μ , определяемых (17.8), то условные математические ожидания (17.25) и (17.26) могут быть выражены через моменты системы нормальных величин (см. формулу (3.44) работы [33]) и в данном случае определяются формулами

$$\begin{aligned} a_\alpha^*(\tau, \vec{y}) &= a_\alpha(\tau, \vec{y}) + \frac{1}{\det(B)} \sum_{\mu=m+1}^n \sum_{\nu=m+1}^n A_{\mu\nu}(\tau, \vec{y}) b_{\mu\alpha}(\tau, \vec{y}) \times \\ &\quad \times (\dot{r}_\nu - a_\nu(\tau, \vec{y})), \\ b_{\alpha\beta}^*(\tau, \vec{y}) &= b_{\alpha\beta}(\tau, \vec{y}) + \frac{1}{\det(B)} \sum_{\mu=m+1}^n \sum_{\nu=m+1}^n A_{\mu\nu}(\tau, \vec{y}) \times \\ &\quad \times b_{\alpha\mu}(\tau, \vec{y}) b_{\beta\nu}(\tau, \vec{y}), \end{aligned} \quad (17.27)$$

где $\det(B)$ — определитель матрицы $\|b_{\mu\nu}\|$, а $A_{\mu\nu}$ — алгебраические дополнения элемента $b_{\mu\nu}$ этого определителя. Полученное уравнение (17.22) называется уравнением Стратоновича, который впервые вывел его в 1960 г. ([36]).

От второго уравнения Колмогорова уравнение Стратоновича отличается не только своим интегральным членом, но также и тем, что исконая плотность вероятности w входит в это уравнение нелинейным образом. Оба этих обстоятельства затрудняют решение уравнения Стратоновича, однако, если такое решение получено, например, численно, то определение оптимальных оценок ненаблюдаемых компонент сводится к нахождению математических ожиданий, соответствующих плотности вероятности w .

Аналогично приведенному выводу формулы (17.22) можно получить и формулу, заменяющую для условного марковского процесса обобщенное соотношение Маркова для трех других моментов времени $(t - \Delta, t, \tau)$. Эта формула имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} w(t - \Delta, \vec{x}; \tau, \vec{y}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overset{(\cdot)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} w(t - \Delta, \vec{x}; t_1, \vec{z}) w(t_1, \vec{z}; \tau, \vec{y}) d\vec{z} + \\ &+ \frac{\Delta}{2} w(t, \vec{x}; \tau, \vec{y}) \left\{ -\frac{1}{\det(B)} \sum_{\mu=m+1}^n \sum_{\nu=m+1}^n A_{\mu\nu} (\dot{r}_\mu - a_\mu) (\dot{r}_\nu - a_\nu) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-\infty}^{+\infty} \overset{(\cdot)}{!} \int_{-\infty}^{+\infty} w(t, \vec{x}'; \tau, \vec{y}) \frac{1}{\det(B')} \sum_{\mu=m+1}^n \sum_{\nu=m+1}^n A'_{\mu\nu} (\dot{r}_{\mu} - a'_{\mu}) \times \\
& \quad \times (\dot{r}_{\nu} - a'_{\nu}) d\vec{x}' \Big\},
\end{aligned} \tag{17.28}$$

где обозначения совпадают с обозначениями в формуле (17.22), но аргументами у функций $\det(B)$, $A_{\mu\nu}$, $\dot{r}_{\mu}$, a_{μ} , а также $\det(B')$, $A'_{\mu\nu}$, a'_{μ} теперь являются не $\vec{y}$, τ и $\vec{y}'$, τ' , а, соответственно, t , $\vec{x}$ и t' , $\vec{x}'$.

Используя (17.28) для нахождения производной

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} [w(t, \vec{x}; \tau, \vec{y}) - w(t - \Delta, \vec{x}; \tau, \vec{y})]$$

и повторяя рассуждения, использованные при выводе первого уравнения Колмогорова в параграфе 7, обнаружим, что наряду со слагаемыми, дублирующими соответствующие слагаемые в первом уравнении Колмогорова, в правой части равенства возникает коэффициент при приращении Δ в формуле (17.28), взятый с обратным знаком. Таким образом, вместо первого уравнения Колмогорова для условного марковского процесса получим уравнение вида

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial w}{\partial t} + a_{\alpha}^* \frac{\partial w}{\partial x_{\alpha}} + \frac{1}{2} b_{\alpha\beta}^* \frac{\partial^2 w}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} = \frac{1}{2} w \left\{ \frac{1}{\det(B)} A_{\mu\nu} (\dot{r}_{\mu} - a_{\mu}) \times \right. \\
& \quad \times (\dot{r}_{\nu} - a_{\nu}) - \int_{-\infty}^{+\infty} \overset{(\cdot)}{!} \int_{-\infty}^{+\infty} w' \frac{1}{\det(B')} A'_{\mu\nu} (\dot{r}_{\mu} - a'_{\mu}) (\dot{r}_{\nu} - a'_{\nu}) d\vec{x}' \Big\},
\end{aligned} \tag{17.29}$$

где a_{α}^* и $b_{\alpha\beta}^*$ определяются формулами (17.27), но берутся при аргументах t и $\vec{x}$, а штрихом отмечены функции, в которых аргументы $\vec{x}$ заменены на переменные интегрирования, в качестве которых выступают компоненты вектора $\vec{x}'$. По аналогии с уравнениями Колмогорова уравнение (17.29) можно назвать первым, а уравнение (17.24) — вторым уравнением Стратоновича. Наиболее употребительно последнее из упомянутых уравнений, которое обычно и связывается с именем Стратоновича.

Уравнения (17.24) и (17.29) получены в предположении, что компоненты исходного марковского процесса определяются системой дифференциальных уравнений вида (17.5), то есть помехи типа белого шума добавляются не к самим ординатам процессов, а к их первым производным. Не менее важным случаем является наличие аддитивных помех у самих ординат составляющих марковского процесса. Уравнение Стратоновича для этого случая будет отличаться от приведенного выше уравнения (17.24).

Рассмотрим для примера двумерный марковский процесс $[U_1(t)U_2(t)]$, определяемый уравнениями

$$\begin{cases} \frac{dU_1(t)}{dt} = \psi(t) + g[U_1(t), t]\xi_1(t), \\ U_1(t) = U_1(t) + c\xi_2(t), \end{cases} \quad (17.30)$$

где $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — независимые центрированные белые шумы, имеющие единичные интенсивности, $g(x, t)$ и $\psi(t)$ — заданные функции, c — заданная постоянная. Предположим, что $U_1(t)$ — ненаблюдаемая, а $U_2(t)$ — наблюдаемая составляющие марковского процесса. Подобная задача возникает, например, если производится измерение марковского процесса с ошибками, которые можно считать белым шумом. В этом случае $U_1(t)$ — неизвестный марковский процесс, а $U_2(t)$ — значение ординат этого процесса, полученное в результате измерения. Обозначим коэффициенты сноса и диффузии процесса $U_1(t)$ через $a_1(\tau, y)$ и $b_{11}(\tau, y)$, соответственно, а значение наблюдаемой компоненты $U_2(t)$ — через $r(t)$.

Введем в рассмотрение случайную функцию $W(t)$, аналогичную функциям W_μ в формуле (17.8), положив

$$W(t) = \int_0^t [r(t_1) - U_1(t_1)]dt_1 - cV_2(t), \quad (17.31)$$

где $V_2(t)$ — функция броуновского движения, соответствующая белому шуму $\xi_2(t)$. Рассуждая так же, как при выводе формулы (17.22) и учитывая при этом, что плотность вероятности $w(t, x; \tau, y)$ перехода процесса $U_1(t)$ из состояния x в момент времени t в состояние y в момент времени $(t + \Delta)$, в данной задаче вычисляется при условии, что на интервале $(t, t + \Delta)$ выполня-

ется равенство $U_2(t) = r(t)$, получим

$$w(t, x; \tau + \Delta, y) = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} w(t, x; \tau, z) w(\tau, z; \tau + \Delta, y) \times \\ \times \exp\left\{-\frac{[r(\tau) - y_1]^2 \Delta}{2c^2}\right\} dz. \quad (17.32)$$

При записи (17.32) учтено, что условное математическое ожидание $M[W(\tau)|U_1(\tau) = y_1] = r(\tau) - y_1(\tau)$, а условная дисперсия $D[W(t)|U_1(t) = y_1] = c^2 \Delta$. Считая Δ бесконечно малым, разложив, подобно предыдущему, экспоненту в ряд и находя нормировочный множитель γ , имеем:

$$w(t, x_1; \tau + \Delta, y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t, x_1; \tau, z) w(\tau, z; \tau + \Delta, y_1) dz + \\ + \Delta \left\{ -\frac{1}{2c^2} [r(\tau) - y_1]^2 + \frac{1}{2c^2} \int_{-\infty}^{\infty} [r(\tau) - y'_1]^2 w(t, x_1; \tau, y'_1) dy'_1 \times \right. \\ \left. \times w(t, x_1; \tau, y_1) \right\} + o(\Delta). \quad (17.33)$$

Первое слагаемое в правой части не отличается от обобщенного соотношения Маркова и дает слагаемые дифференциального уравнения для $w(t, x_1; \tau + \Delta, y_1)$, идентичные с левой частью второго уравнения Колмогорова; второе слагаемое является интегральным и включает искомую функцию w нелинейным образом. Таким образом, для процесса (17.30) окончательно получим второе уравнение Стратоновича в виде, отличном от (17.22).

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y_1} [a_1(\tau, y_1) w] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} [b_{11}(\tau, y_1) w] = \\ = \frac{1}{2c^2} w \left\{ -[r(\tau) - y_1]^2 + \int_{-\infty}^{\infty} [r(\tau) - y'_1]^2 w(t, x_1; \tau, y'_1) dy'_1 \right\}. \quad (17.34)$$

Для нахождения решения уравнения (17.34) необходимо задать начальные условия. Если считать, что начальное значение

x_1 ординаты процесса $U_1(t)$ известно, то начальное условие для (17.34) примет вид:

$$w \Big|_{\tau=t} = \delta(y_1 - x_1), \quad (17.35)$$

а решение уравнения будет иметь смысл плотности вероятности перехода из состояния x_1 в состояние y_1 при условиях, поставленных в данной задаче.

Если плотность распределения $f_0(x_1)$ значений $X = U_1(t)$ задана, то начальное условие изменится:

$$w \Big|_{\tau=t} = f_0(y_1), \quad (17.36)$$

а решение w уравнения (17.34) будет иметь смысл плотности вероятности $Y_1 = U_1(\tau)$, найденной при заданном начальном распределении (17.36) и известных значениях $r(t)$ ординаты случайной функции $U_2(t)$.

Аналогично может быть получено и более общее уравнение для многомерного условного процесса Маркова, когда в исходном n -мерном марковском процессе m компонент не наблюдаются, а наблюдаемые значения остальных $(n - m)$ компонент искажены помехами типа белого шума, которые могут быть определенным образом связаны друг с другом. Обобщим рассмотренный случай двумерного марковского процесса на марковский процесс произвольного числа n измерений.

Предположим, имеется m -мерный марковский процесс, определяемый стохастической системой уравнений

$$\frac{dU_\alpha(t)}{dt} = \sum_{\beta=1}^m F_{\alpha\beta}(t)U_\beta(t) + \sum_{\beta=1}^m Q_{\alpha\beta}(t)\xi_\beta(t), \quad (\alpha = \overline{1, m}). \quad (17.37)$$

Даны значения $r_\mu(t)$ ординат функции $V_\mu(t)$, линейно связанных с $U_\alpha(t)$ и белыми шумами $\eta_\mu(t)$ соотношениями

$$V_\mu(t) = H_{\mu\alpha}(t)U_\mu(t) + \sum_{\nu=m+1}^n \sqrt{R_{\mu\nu}(t)}\eta_\nu(t), \quad (\mu = \overline{m+1, n}), \quad (17.38)$$

то есть известны реализации

$$r_\mu(t_1) = V_\mu(t_1), \quad t \leq t_1 \leq \tau. \quad (17.39)$$

Будем считать для общности, что компоненты белого шума $\vec{\xi}(t)$ и $\vec{\eta}(t)$ могут быть зависимы между собой и характеризуются матрицами интенсивностей $\|G_{\alpha\beta}(t)\|$ и $\|R_{\mu\nu}(t)\|$, определяемыми равенствами

$$\begin{aligned} M[\xi_\alpha(t)\xi_\beta(\tau)] &= G_{\alpha\beta}(t)\delta(t-\tau), \\ M[\eta_\mu(t)\eta_\nu(\tau)] &= R_{\mu\nu}(t)\delta(t-\tau). \end{aligned} \quad (17.40)$$

При этих условиях плотность вероятности $w(t, \vec{x}; \tau, \vec{y})$ значений ординат функции $U_\alpha(t)$ в момент $t = \tau$ удовлетворяет второму уравнению Стратоновича, являющемуся обобщением уравнения (17.34):

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y_\alpha}(a_\alpha w) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y_\alpha \partial y_\beta}(b_{\alpha\beta} w) + \\ + \frac{1}{2} w \left\{ \sum_{\mu=m+1}^n \sum_{\nu=m+1}^n R_{\mu\nu}^{-1}(y_\mu - r_\mu)(y_\nu - r_\nu) - \right. \\ \left. - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \binom{n-m}{\cdot \dots \cdot} R_{\mu\nu}^{-1}(y'_\mu - r_\mu)(y'_\nu - r_\nu) w' dy'_{m+1} \dots dy'_n \right\}, \end{aligned} \quad (17.41)$$

где коэффициенты сноса a_α и диффузии $b_{\alpha\beta}$ для m -мерного марковского процесса $(U_1, \dots, U_m)$ определяются по обычным правилам (см. параграф 9) из (17.37), а под знаком интеграла w заменено на w' , чтобы показать, что аргументами этой функции являются не произвольные значения аргументов y_α , а переменные интегрирования y'_α в интеграле (17.37).

Пример 17.1. Получить уравнение Стратоновича для одномерного условного марковского процесса $U_1(t)$, являющегося первой компонентой двумерного марковского процесса

$$\frac{dU_j}{dt} = \psi_j(U_1, U_2, t) + \sum_{l=1}^2 g_{jl}(U_1, U_2, t) \xi_l(t), \quad (j = \overline{1, 2}), \quad (17.42)$$

где ξ_1 не зависит от ξ_2 , при условии, что вторая компонента

$$U_2(t) = \rho(t). \quad (17.43)$$

Решение. Сформулированная задача является простейшим частным случаем общей задачи, поставленной в начале данного параграфа, и поэтому уравнение Стратоновича для нее описывается общим выражением (17.24). Тем не менее, для большей наглядности изложения и лучшего понимания сути формальных выкладок, примененных при выводе уравнения, повторим всю последовательность рассуждений на конкретном примере условного марковского процесса $U_1(t)$.

Прежде всего подсчитаем коэффициенты сноса и диффузии исходного двумерного марковского процесса (17.42). Согласно общим выражениям (7.13) и (7.14) имеем

$$a_i(\tau, y_1, y_2) = \psi_i(y_1, y_2, \tau) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 \frac{\partial g_{jl}(y_1, y_2, \tau)}{\partial y_j} g_{lj}(y_1, y_2, \tau),$$

$$(i = \overline{1, 2}),$$

$$(17.44)$$

$$b_{ij}(\tau, y_1, y_2) = \sum_{l=1}^2 g_{il}(y_1, y_2, \tau) g_{jl}(y_1, y_2, \tau), \quad (i = \overline{1, 2}, j = \overline{1, 2}).$$

$$(17.45)$$

Теперь найдем коэффициенты сноса и диффузии условного марковского процесса. Условие A , налагаемое на этот процесс, в данном случае сводится к тому, что $U_2(t_1) = \rho(t_1)$ при $t_1 \leq t$. Положим, $X_1 = U_1(t)$, $Y_1 = U_1(t + \Delta)$. Тогда в соответствии с общими выражениями (17.25) и (17.26)

$$a_1^*(t, x_1) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} M[Y_1 - X_1 | X_1 = x_1, A],$$

$$b_{11}^*(t, x_1) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} M[(Y_1 - X_1)^2 | X_1 = x_1, A].$$

$$(17.46)$$

Интегрируя уравнения (17.42) в пределах от t до $t + \Delta$ и учитывая, что эти уравнения понимаются в смысле Стратоновича, получим, удерживая главные члены разложения по Δ

$$X = Y_1 - X_1 = \psi_1 \Delta + \sum_{j=1}^2 g_{1j} dV_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 \frac{\partial g_{1j}}{\partial x_l} g_{lj} (dV_j)^2,$$

$$Y = Y_2 - X_2 = \psi_2 \Delta + \sum_{j=1}^2 g_{2j} dV_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 \frac{\partial g_{2j}}{\partial x_l} g_{lj} (dV_j)^2,$$

$$(17.47)$$

причем все функции ψ_i и g_{ij} берутся при аргументах $t, \vec{x}$. В этом выражении квадраты приращений функции броуновского движения, вообще говоря, уже не являются нормальными, однако, как показано в параграфе 4, эти квадраты асимптотически при малых Δ могут быть заменены на Δ . Таким образом, квадратичные члены не портят нормальность величин X и Y , но должны быть сохранены в сумме, так как вносят вклад порядка Δ в средние значения X и Y .

Асимптотически при стремлении Δ к нулю система случайных величин (X, Y) характеризуется двумерным нормальным законом

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{d}} e^{-\frac{1}{2d}[\sigma_y^2(x-\bar{x})^2 - 2k_{xy}(x-\bar{x})(y-\bar{y}) + \sigma_x^2(y-\bar{y})^2]}, \quad (17.48)$$

где через d обозначен определитель корреляционной матрицы этой системы

$$d = \begin{vmatrix} \sigma_x^2 & k_{xy} \\ k_{xy} & \sigma_y^2 \end{vmatrix}, \quad (17.49)$$

σ_x, σ_y обозначают дисперсии X и Y , k_{xy} — корреляционный момент между ними, а $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — математические ожидания. В силу выполнения условия A при малых Δ асимптотически

$$Y = Y_2 - X_2 = \frac{d\rho(t)}{dt}\Delta = \dot{\rho}(t)\Delta = Y_0. \quad (17.50)$$

Рассмотрим условный закон распределения X при заданном $Y = y$. Согласно общим формулам для систем нормальных случайных величин [33, 9] этот закон будет нормальным с условным математическим ожиданием

$$\bar{x}_y = \bar{x} + r \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \bar{y}) \quad (17.51)$$

и условной дисперсией

$$\sigma_{x|y}^2 = (1 - r)\sigma_x^2, \quad (17.52)$$

где

$$r = \frac{k_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}, \quad (|r| < 1) \quad (17.53)$$

обозначает коэффициент корреляции X и Y .

Введем новую систему нормальных величин (X, Z) , где

$$Z = Y_0 - Y = \dot{\rho}(t)\Delta - Y. \quad (17.54)$$

Для этой системы

$$\begin{aligned} \bar{x} &= a_1\Delta, \quad \bar{z} = \dot{\rho}(t)\Delta - a_2\Delta, \\ \sigma_x^2 &= b_{11}\Delta, \quad \sigma_z^2 = b_{22}\Delta, \quad k_{xy} = -b_{12}\Delta, \\ \bar{x}_z &= \bar{x} + r \frac{\sigma_x}{\sigma_z}(z - \bar{z}), \quad \sigma_{x|z}^2 = (1 - r^2)\sigma_x^2, \quad r = -\frac{b_{12}}{\sqrt{b_{11}b_{22}}}. \end{aligned} \quad (17.55)$$

Искомые коэффициенты сноса и диффузии условного марковского процесса выражаются через условное математическое ожидание и условную дисперсию элементарно

$$\begin{aligned} a_1 &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \bar{x}_z, \\ b_{11} &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \sigma_{x|z}^2. \end{aligned} \quad (17.56)$$

Опуская очевидные промежуточные выкладки получаем

$$\begin{aligned} a_1^*(t, x_1) &= a_1(t, x_1, \rho(t)) + \frac{b_{12}(t, x_1, \rho(t))}{b_{22}(t, x_1, \rho(t))} [\dot{\rho}(t) - a_2(t, x_1, \rho(t))], \\ b_{11}^* &= \frac{b_{11}(t, x_1, \rho(t))b_{22}(t, x_1, \rho(t)) - b_{12}^2(t, x_1, \rho(t))}{b_{22}^2(t, x_1, \rho(t))}. \end{aligned} \quad (17.57)$$

Таким образом, уравнение Стратоновича в данном случае будет таким:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y_1} (a_1^* w) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} (b_{11}^* w) + \frac{1}{2} w \left[-\frac{(\dot{\rho} - a_2)}{b_{22}} + \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\dot{\rho} - a_2)^2}{b_{22}} w(\tau, y_1') dy_1' \right] = 0, \end{aligned} \quad (17.58)$$

где a_1^* и b_{11}^* определяются (17.57), a_i и b_{ij} задаются (17.44)–(17.45), аргумент y_2 в последних функциях заменяется на $\rho(t)$,

а аргумент y_1 заменяется на y'_1 , если сама функция помечена штрихом. Для краткости аргументы (t, x) переходной плотности w опущены. Последнее слагаемое в правой части уравнения является следствием немарковости процесса U_1 в безусловном смысле.

§18. ПОЛУЧЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ОЦЕНОК В СЛУЧАЕ КАЛМАНА

Методы исследования условных марковских процессов, рассмотренные в предыдущем параграфе, дают общий метод нахождения оптимальных оценок ненаблюдаемых компонент многомерного марковского процесса практически во всех случаях, представляющих интерес в прикладных задачах. Однако решение соответствующего уравнения Стратоновича в общем случае может представлять значительные вычислительные трудности.

Исключением является случай, когда компоненты многомерного марковского процесса определяются системой линейных уравнений, в которые помехи, имеющие характер белого шума, входят тоже линейно. Метод получения оптимальных оценок для этого частного случая был впервые рассмотрен Калманом и Бьюси в 1961 году [48] независимо от теории условных марковских процессов и получил название *метода Калмана* или *метода Калмана-Бьюси*. Более естественно этот метод может быть получен, если исходить из теории условных марковских процессов.

Рассмотрим вначале тот случай, когда исходный марковский процесс имеет всего лишь две компоненты, из которых одна наблюдаемая, а другая — ненаблюдаемая (так называемый «одномерный фильтр Калмана»).

Пусть компонента $U_1(t)$ определяется дифференциальным уравнением [48]

$$\frac{dU_1(t)}{dt} = \varphi(t)U_1(t) + \sqrt{q(t)}\xi_1(t) \quad (18.1)$$

при начальных условиях

$$U_1(0) = U_0, \quad (18.2)$$

где U_0 распределено по нормальному закону с дисперсией σ_0^2 и математическим ожиданием $\bar{u}_0$, $\varphi(t)$ и $q(t)$ — детерминированные функции, $\xi_1(t)dt = dV_1(t)$, $V_1(t)$ — функция броуновского движения, а $q(t) > 0$. Очевидно, что при сделанных допущениях $U_1(t)$ будет нормальным марковским процессом. Для его

коэффициентов сноса $a(\tau, y)$ и диффузии $b(\tau, y)$, применяя формулы (8.10) и (8.11), получим:

$$a(\tau, y_1) = \varphi(\tau)y_1; \quad b(\tau, y) = q(\tau). \quad (18.3)$$

Предположим, что на интервале $[0, \tau]$ известны ординаты функции $U_2(t)$:

$$U_2(t) = r(t), \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad (18.4)$$

которая связана с $U_1(t)$ равенством

$$U_2(t) = U_1(t) + \sqrt{g(t)}\xi_2(t), \quad (18.5)$$

где детерминированная функция $g(t) > 0$, $\xi_2(t)dt = dV_2(t)$, а $V_2(t)$ — функция броуновского движения, не зависящая от $V_1(t)$. Требуется определить наилучшее, в смысле среднего квадратического, приближение к ординате $U_1(t)$.

Искомым приближением является условное математическое ожидание $\bar{y}_1^*$ ординаты $U_1(t)$, определяемое равенством

$$\bar{y}_1^*(\tau) = M[U_1(\tau) | U_2(t) = r(t); 0 \leq t \leq \tau]. \quad (18.6)$$

Для нахождения $\bar{y}(\tau)^*$ необходимо определить плотность вероятности $w(\tau, y_1)$ ординаты $U_1(\tau)$, найденную при условиях (18.2) и (18.4).

Основная идея дальнейшего решения состоит в том, что, во-первых, искомая плотность вероятности w удовлетворяет уравнению Стратоновича вида (17.34) и, во-вторых, это уравнение допускает решение в виде нормального закона с некоторой дисперсией $D(\tau)$ и математическим ожиданием $\bar{y}(\tau)$. Ведь поставленная нами сейчас задача отличается от задачи, рассмотренной в конце предыдущего параграфа, только тем, что коэффициент перед белым шумом в формуле (18.5) в данном случае является функцией времени. Так как это не влияет на вывод уравнения (17.34), то заменяя в этом уравнении c^2 на $g(t)$, учитывая, что интеграл (17.34) для нормального закона с параметрами D и $\bar{y}$ равен $[r^2(\tau) - 2r(\tau)\bar{y} + D - \bar{y}^2]$ и подставляя коэффициенты сноса и диффузии из (18.3), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(\tau, y_1)}{\partial \tau} + \varphi(\tau) \frac{\partial}{\partial y_1} [y_1 w(\tau, y_1)] - \frac{1}{2} q(\tau) \frac{\partial^2 w(\tau, y_1)}{\partial y_1^2} = \\ = \frac{1}{2g(\tau)} \{y_1^2 - 2r(\tau)y_1 + 2r(\tau)\bar{y}_r - D(\tau) - \bar{y}^2(\tau)\} w(\tau, y_1). \end{aligned} \quad (18.7)$$

Перейдем от плотности вероятности $w(\tau, y_1)$ к соответствующей ей характеристической функции

$$E(\tau, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izy_1} w(\tau, y_1) dy_1. \quad (18.8)$$

Умножив для этой цели обе части равенства (18.7) на e^{izy_1} и интегрируя по y_1 в бесконечных пределах, после очевидных преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \tau} - \varphi z \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{q(z)}{2} z^2 E = \\ = \frac{1}{2g} \left\{ -\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - 2ir \frac{\partial E}{\partial z} + (2r\bar{y} - D - \bar{y}^2) E \right\}. \end{aligned} \quad (18.9)$$

Производные характеристической функции выражаются через моменты $\left. \frac{\partial E}{\partial z} \right|_{z=0} = i\bar{y}$, $\left. \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \right|_{z=0} = D + \bar{y}^2$. Поэтому фигурная скобка в (18.9) тождественно обратится в нуль при $z = 0$. Следовательно, уравнению (18.9) удовлетворяет характеристическая функция нормального закона распределения, то есть решение можно искать в виде:

$$E(\tau, z) = \exp \left\{ -\frac{D(\tau)}{2} z^2 + i\bar{y}(\tau) z \right\}. \quad (18.10)$$

Подставляя (18.10) в (18.9) будем иметь

$$\begin{aligned} iz \frac{\partial \bar{y}}{\partial \tau} - \frac{1}{2} z^2 \frac{\partial D}{\partial \tau} + z\varphi(\tau)(Dz - i\bar{y}) + \frac{1}{2} z^2 q(\tau) = \\ = \frac{1}{2g(\tau)} \{-z^2 D^2 + 2izD\bar{y} + 2ir(\tau)Dz\}. \end{aligned} \quad (18.11)$$

Приравнявая к нулю коэффициенты при z^2 и z , получим два обыкновенных дифференциальных уравнения для определения $D(\tau)$ и $\bar{y}(\tau)$:

$$\frac{dD}{d\tau} = 2\varphi(\tau)D + \frac{1}{g(\tau)} D^2 + q(\tau), \quad (18.12)$$

$$\frac{d\bar{y}}{d\tau} = \varphi(\tau)\bar{y} + \frac{D}{g(\tau)} [r(\tau) - \bar{y}(\tau)]. \quad (18.13)$$

Начальными условиями для уравнений (18.12) и (18.13), в соответствии с (18.2) будут

$$D|_{\tau=0} = \sigma_0^2; \quad \bar{y}|_{\tau=0} = \bar{u}_0 \quad (18.14)$$

Уравнение (18.12) является уравнением типа Рикатти и его решение в аналитическом виде удастся получить только для частного вида функций φ , g и q . Поэтому его решение обычно придется находить численными методами. Уравнение (18.13) отличается от уравнения (18.1) тем, что вместо случайного слагаемого $\sqrt{g(\tau)}\xi_1(t)$ в правой части равенства стоит детерминированное слагаемое $\frac{D}{g}[r(\tau) - \bar{y}(\tau)]$, появление которого означает наличие обратной связи с коэффициентом усиления $\frac{D(\tau)}{g(\tau)}$, определяемым уравнением (18.12).

Очевидно, что рассмотренный метод охватывает весьма широкий круг задач, так как включает в себя и нестационарные системы. Этим он отличается от классической теории оптимальной фильтрации Винера-Колмогорова [30]. Если q , g и φ являются постоянными, уравнение (18.1) имеет стационарное решение (то есть должно выполняться условие $\varphi < 0$), а переходный процесс считается законченным, то применение метода Калмана, естественно, даст результат, совпадающий с теорией Винера-Колмогорова.

Метод Калмана-Бьюси был разработан ими и для случая, когда необходимо аппроксимировать не одну, а сразу несколько компонент марковского процесса на основании результатов измерения остальных его компонент. Рассмотрим применение метода Калмана-Бьюси и в этом случае, который часто называют «многомерным фильтром Калмана».

Предположим, что имеется n -мерный марковский процесс, компоненты $U_\alpha(t)$ которого определяются системой стохастических уравнений

$$\frac{dU_\alpha(t)}{dt} = F_{\alpha\beta}(t)U_\beta(t) + Q_{\alpha\beta}(t)\xi_\beta(t), \quad \alpha = \overline{1, n}, \quad (18.15)$$

где $\xi_\beta(t)dt = dV_\beta(t)$, $V_\beta(t)$ — функции броуновского движения ($\beta = \overline{1, r}$), которые для общности будем считать линейными комбинациями некоторых заданных, взаимно независимых, функций броуновского движения. Следовательно, в данном случае для задания совокупности белых шумов $\xi_\beta(t)$ необходимо указать мат-

рицу их интенсивностей $Q(t)$, элементы $Q_{\alpha\beta}$ которой определяются формулой.

$$M[\xi_\alpha(t)\xi_\beta(\tau)] = Q_{\alpha\beta}(t)\delta(t - \tau), \quad (\alpha, \beta = \overline{1, r}), \quad (18.16)$$

где, вообще говоря, матрица $\|Q_{\alpha\beta}\|$ не обязана быть единичной.

Предположим, что произведено измерение m линейных функций $\sum_{\alpha=1}^n H_{j\alpha} U_\alpha(t)$ от компонент рассматриваемого марковского процесса, где $j = \overline{1, m}$, причем измерение каждой функции сопровождается ошибками типа белого шума $\eta_j(t)$, характеризуемыми матрицей интенсивностей R :

$$M[\eta_j(t)\eta_l(\tau)] = R_{jl}(t)\delta(t - \tau), \quad (j, l = \overline{1, m}). \quad (18.17)$$

Введем обозначения

$$Z_j(t) = \sum_{\alpha=1}^n H_{j\alpha} U_\alpha(t) + \eta_j(t). \quad (18.18)$$

Тогда совокупность n компонент $U_\alpha(t)$ и m компонент $Z_j(t)$ можно рассматривать как $(n + m)$ -мерный марковский процесс, последние m компонент которого известны. В этом случае условная плотность вероятности первых n компонент удовлетворяет уравнению Стратоновича (17.41), решением которого будет плотность вероятности системы n нормальных величин, математические ожидания которых и дадут искомые оценки ненаблюдаемых компонент. Не останавливаясь на выводе, далее приведем только окончательные формулы.

Переписав (18.15) в матричной форме, получим

$$\dot{\vec{U}}(t) = F(t)\vec{U}(t) + G(t)\vec{\xi}(t), \quad (18.19)$$

где через $\vec{U}(t)$ и $\vec{\xi}(t)$ обозначены n -мерные векторные столбцы, через $F(t)$ — матрица размерности $(n \times n)$, а через $G(t)$ — матрица размерности $(n \times r)$.

Аналогично, вместо (18.18) имеем векторное условие

$$\dot{\vec{Z}}(t) = H(t)\vec{U}(t) + \vec{\eta}(t), \quad (18.20)$$

где $\vec{Z}(t)$ и $\vec{\eta}(t)$ есть m -мерные векторные столбцы, а $H(t)$ — матрица размерности $(m \times n)$. Корреляционная матрица $K(t)$ составляющих вектора $\vec{U}(t)$, вычисленная при условии, что вектор

$\vec{Z}(t)$ известен, определяется уравнением

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) = & F(t)K(t) + K(t)F^T(t) + G(t)Q(t)G^T(t) - \\ & - K(t)H^T(t)R^{-1}(t)H(t)K(t), \end{aligned} \quad (18.21)$$

а оптимальная оценка вектора $U(t)$, которую мы обозначим $\vec{U}^*(t)$ определяются уравнением

$$\vec{U}^*(t) = F(t)\vec{U}^*(t) + \mathfrak{x}(t)[Z(t) - H(t)\vec{U}^*(t)], \quad (18.22)$$

где матричный коэффициент усиления $\mathfrak{x}(t)$ задается выражением

$$\mathfrak{x}(t) = K(t)H^T(t)R^{-1}(t). \quad (18.23)$$

В последних уравнениях T обозначает символ транспонирования матрицы.

Уравнение (18.21) называют n -мерным уравнением Рикатти. Решение этого уравнения сопряжено с определенными математическими трудностями, для преодоления которых либо используются специальные вычислительные приемы, либо сводят задачу нахождения оптимальных оценок к некоторой рекуррентной процедуре [30].

Метод Калмана, находящий в настоящее время широкое применение в различных прикладных задачах, был предложен его автором без использования аппарата теории условных марковских процессов, которая в то время еще не существовала. Однако только применение этой теории делает окончательные формулы физически понятными и открывает более широкие перспективы, чем это можно получить формально применяя алгоритм метода Калмана. Например, с помощью теории условных процессов Маркова можно исследовать процессы, задаваемые любыми, в том числе и нелинейными стохастическими уравнениями, а не только простейшими линейными уравнениями вида (18.19)–(18.20). Это может существенно повысить эффективность нелинейной фильтрации и качество разрабатываемых технических систем.

Литература

- [1] *Баррет Дж. Ф.* Применение уравнения Колмогорова для исследования систем автоматического управления со случайными возмущениями//Труды I-го Международного конгресса ИФАК. М.: Издательство АН СССР, 1961, т. 3, с. 84–97.
- [2] *Баруча-Рид А. Т.* Элементы теории марковских процессов и их приложения. М.: Мир, 1969.
- [3] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1974.
- [4] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. М.: Наука, 1969. Том 1.
- [5] *Бернштейн С. Н.* О линейных квазинепрерывных цепях Маркова I, II//Доклады АН СССР, 1934, т. 1, № 1, с. 1–9; № 7, с. 361–365.
- [6] *Гихмен И. И.* О некоторых дифференциальных уравнениях со случайными функциями//Украинский математический журнал, 1950, т. 2, № 3, с. 45–69.
- [7] *Гихмен И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977.
- [8] *Гихмен И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев.: Наукова думка, 1968.
- [9] *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1969.
- [10] *Грановский Л. Б., Ермаков С. М.* Метод Монте-Карло//Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. Том 13. М.: ВИНТИ, 1976, с. 59–108.

-
- [11] *Гюнтер Н. М.* Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. Л.-М.: ОНТИ-ГТТИ, 1934.
- [12] *Дуб Д. Л.* Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956.
- [13] *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы. М.: Физматгиз, 1963.
- [14] *Зарицкий В. С.* Определение вероятности надежной работы системы в течение заданного промежутка времени//Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1966, № 1, с. 51–55.
- [15] *Заяц О. И., Свешников А. А.* Об одной нелинейной задаче прикладной теории гироскопов//Известия АН СССР. Механика твердого тела, 1977, № 6, с. 9–15.
- [16] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.
- [17] *Красовский А. А., Буков В. Н.* Итерационное решение уравнения Колмогорова в статистической динамике непрерывных систем//Доклады АН СССР, 1974, т. 216, № 3, с. 485–487.
- [18] *Красовский А. А.* Фазовое пространство и статистическая теория динамических систем. М.: Наука, 1974.
- [19] *Кренделл С.* Случайные колебания нелинейной системы с предварительно поджатой пружиной//Труды Американского общества инженеров-механиков. Серия Е. Прикладная механика, 1962, т. 29, № 3, с. 32–38.
- [20] *Махоткин О. А.* Разностные схемы для прямого уравнения Колмогорова//Журнал вычислительной математики и математической физики, 1975, т. 15, № 1, с. 263–266.
- [21] *Мерклингер К. Дж.* Численный анализ нелинейных систем управления с помощью уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова//Труды второго международного конгресса ИФАК. Оптимальные системы. Статистические методы. М.: Наука, 1965, с. 324–340.
- [22] *Миллер Д. Ч. П.* Таблицы функций Вебера (функций параболического цилиндра) М.: ВЦАН СССР, 1968.

-
- [23] *Незлобин А. Н.* Определение вероятности невыхода двумерного марковского процесса за границы заданной области//Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1973, № 3, с. 74–80.
- [24] *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Дифференциальные уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой//Итоги науки. Математический анализ 1969. М.: ВИНТИ, 1971.
- [25] *Пискунов Н. С.* Краевые задачи для уравнений эллиптико-параболического типа//Математический сборник, 1940, т. 7, № 3.
- [26] *Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А.* Теория вероятностей. Основные понятия, предельные теоремы, случайные процессы. М.: Наука, 1973.
- [27] *Пугачев В. С.* Применение теории марковских процессов к анализу точности автоматических систем//Известия АН СССР. ОТН. Энергетика и автоматика, 1961, № 3, с. 46–57.
- [28] *Пугачев В. С.* Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М.: Наука, 1962.
- [29] *Рытов С. М.* Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1976.
- [30] *Свешников А. А.* Прикладные методы теории случайных функций. М.: Наука, 1968.
- [31] *Свешников А. А.* Теория вероятностей и случайных функций. Случайные события. Л.: ЛПИ, 1979.
- [32] *Свешников А. А.* Теория вероятностей и случайных функций. Случайные величины. Л.: ЛПИ, 1980.
- [33] *Свешников А. А.* Теория вероятностей и случайных функций. Системы случайных величин. Л.: ЛПИ, 1982.
- [34] *Свешников А. А., Ривкин С. С.* Вероятностные методы в прикладной теории гироскопов. М.: Наука, 1973.

-
- [35] *Стратонович Р. Л.* Новая форма записи стохастических интегралов и уравнений// Вестник МГХ. Серия математика, механика, 1964, № 1.
- [36] *Стратонович Р. Л.* Об уравнении Фоккера-Планка с разрывными коэффициентами и условиях на поверхности разрыва//Известия вузов. Радиофизика, 1965, т. 8, № 4, с. 704–710.
- [37] *Стратонович Р. Л.* Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. М.: МГУ, 1966.
- [38] *Тай М. Л.* Условия сопряжения для плотности вероятности многомерного процесса//Известия вузов. Радиофизика, 1965, т. 8, № 4, с. 384–386.
- [39] *Тай М. Л.* Условия сопряжения для плотности вероятности перехода марковского процесса с разрывными коэффициентами сноса и диффузии//Известия вузов. Радиофизика, 1965, т. 8, № 2.
- [40] *Тихонов В. И., Миронов М. А.* Марковские процессы. М.: Советское радио, 1977.
- [41] *Тихонов В. И., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
- [42] *Фикера Г. К.* К единой теории краевых задач для эллипτικο-параболических уравнений второго порядка//Математика, 1963, т. 7, № 3.
- [43] *Хазен Э. М.* Определение плотности распределения вероятностей для случайных процессов в системах с нелинейностями кусочно-линейного типа//Известия АН СССР. ОТН. Энергетика и автоматика, 1961, № 3, с. 58–72.
- [44] *Хазен Э. М.* Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. М.: Советское радио, 1968.
- [45] *Эйнштейн А., Смолуховский М.* Броуновское движение. М.–Л.: ОНТИ, 1936.
- [46] *Ito K.* Stochastic integral//Proceedings of Imperial Academy of Tokyo, 1944, Vol. 20, p. 519–524.

-
- [47] *Kalman R., Busy R.* New results in linear filtering and prediction problems//Transaction ASME. Journal of basic engineering, 1961, Vol. 83, No. 1, p. 123–141.
- [48] *Kalman R.* A new approach to linear filtering and prediction problems//Transaction ASME. Journal of basic engineering, 1960, Vol. 82, No. 1, p. 35–46.
- [49] *Kolmogoroff A. N.* Über analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung//Mathematische Annalen, 1931, B. 104, S. 415–458.
- [50] *Kolmogoroff A. N.* Zufällige Bewegungen Zur Theorie der Brownschen Bewegungen//Annals of mathematics, 1934, Vol. 35, No. 1, p. 116–117.
- [51] *Mayfield W. W.* A sequence solution to the Fokker–Planck equation//IEEE transactions of information theory, 1973, Vol. 19, No. 1, p. 165–176.
- [52] *Samuelson P. A.* Rational theory of warrant pricing//Industrial management review, 1965, Vol. 6, No. 1, p. 13–31.
- [53] *Uhlenbeck G. E., Ornstein L. S.* On the theory of the Brownian motion//Physical reviews, 1930, Vol. 36, No. 1, p. 823–841.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1*] Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. Под общей редакцией А. А. Свешникова. Издание второе, дополненное. М.: Наука, 1970
- [2*] *Тертычный-Даури В. Ю.* Стохастическая механика. М.: Факториал пресс, 2001.
- [3*] *Павлов П. А.* Научная и педагогическая деятельность А. А. Свешникова// Вероятностные методы исследования динамических систем. СПб: ИТМО, 1992, с. 7–12.
- [4*] *Ривкин С. С.* О работах А. А. Свешникова по применению вероятностных методов в прикладной гироскопии// Труды ЛИТМО, 1984, с. 22–37.
- [5*] *Заяц О. И.* Уравнение Пугачева—Свешникова и статистическая динамика систем релейного типа// Известия вузов. Приборостроение, 1992, № 1–2, с. 8–16.
- [6*] *Свешников А. А.* Современные методы построения оптимальных динамических систем// Труды ЛИТМО. Случайные процессы в САУ. Л.: ЛИТМО; 1984, с. 7–22.

Арам Арутюнович СВЕШНИКОВ

**ПРИКЛАДНЫЕ
МЕТОДЫ
ТЕОРИИ
МАРКОВСКИХ
ПРОЦЕССОВ**

Учебное пособие

Генеральный директор *А. Л. Кноп*
Директор издательства *О. В. Смирнова*
Научный редактор *О. И. Заяц*
Подготовка макета *О. В. Вильчевская*

ЛР № 065466 от 21.10.97

Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.001665.03.02
от 18.03.2002 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»

lan@lpbl.spb.ru

www.lanbook.com

192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.

Издательство: тел./факс: (812)567-29-35, 567-05-97, 567-92-72;

pbl@lpbl.spb.ru

print@lpbl.spb.ru

Сдано в набор 03.03.06. Подписано в печать 20.11.06.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 84×108 1/32.
Печать офсетная. Усл. п. л. 10,08. Тираж 1000 экз.

Заказ № .

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ОАО «Владимирская книжная типография».
600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7.
Качество печати соответствует качеству
предоставленных диапозитивов