ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Е.Б. Сандаков, В.П. Трифоненков, М.В. Смоленцев

ПРИВЕДЕНИЕ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Учебно-методическое пособие

Москва 2009

УДК 514.12(07)
ББК 22.151.3я7
С 18

Сандаков Е.Б., Трифоненков В.П., Смоленцев М.В. **Приведение кривых и поверхностей второго порядка к каноническому виду:** учебно-методическое пособие. – М.: МИФИ, 2009. – 32 с.

Пособие «Приведение кривых и поверхностей второго порядка к каноническому виду» предназначено для студентов МИФИ первого курса всех специальностей. Оно полностью соответствует программе курса «Аналитическая геометрия», предусмотренного для таких технических и экономических вузов с углубленным изучением высшей математики, как МИФИ.

Состоит из двух параграфов. В первом параграфе рассматривается приведение кривых второго порядка к каноническому виду, а во втором – приведение поверхностей второго порядка к каноническому виду. В начале каждого параграфа приводятся краткие теоретические сведения (подробные сведения можно найти в пособии [1]). Затем разбирается большое число примеров приведения кривых и поверхностей второго порядка к каноническому виду.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. *С.Г. Артышев*

Рекомендовано к изданию редсоветом МИФИ

ISBN 978-5-7262-1134-3

§ 1. Приведение кривых второго порядка к каноническому виду

Общим уравнением линии второго порядка называется уравнение вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \qquad (1.1)$$

в котором по крайней мере один из коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} отличен от нуля (т.е. $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$). Коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} называются коэффициентами группы старших членов, коэффициенты a_{13}, a_{23} и a_{33} – коэффициентами линейной части уравнения (1.1). Коэффициент a_{33} также называют свободным членом уравнения (1.1).

Поставим следующую задачу. Найти такую декартовую систему координат, в которой уравнение (1.1) примет настолько простой вид, что геометрическая характеристика линии, определяемой этим уравнением, не будет представлять затруднений. Так как переход от одной декартовой прямоугольной системы координат к другой может быть осуществлен некоторым параллельным переносом системы координат и последующего поворота, то для решения поставленной задачи необходимо знать, как преобразуются коэффициенты уравнения (1.1) при параллельном переносе и повороте.

Как известно, старые (x, y) и новые (x', y') координаты точки M при параллельном переносе связаны соотношениями:

$$\begin{cases} x = x_0 + x'; \\ y = y_0 + y'. \end{cases} \qquad (1.2)$$

Подставляя выражения (1.2) для x и y в левую часть (1.1), получаем уравнение линии в системе $O'x'y'$. Очевидно, это уравнение имеет вид:

$$a_{11}(x')^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}(y')^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0, \qquad (1.3)$$

где

$$\begin{cases} a'_{13} = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}; \\ a'_{23} = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}; \\ a'_{33} = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33}. \end{cases} \qquad (1.4)$$

Осуществляя параллельный перенос координат, новое начало $O'(x_0, y_0)$ иногда можно выбрать так, чтобы в уравнении (1.3) исчезли члены первой степени, т.е. так, чтобы коэффициенты a'_{13} и a'_{23} равнялись нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0; \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Тогда уравнение (1.3) примет в новой системе $O'x'y'$ вид:

$$a_{11}(x')^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}(y')^2 + a'_{33} = 0. \tag{1.6}$$

Очевидно, если (a, b) – произвольная точка, принадлежащая линии, определяемой уравнением (1.6), то и симметричная ей относительно O' точка $(-a, -b)$ лежит на этой линии, т.е. все точки данной линии располагаются симметрично относительно точки O'. Точка $O'(x_0, y_0)$, обладающая указанным свойством, называется центром данной линии.

Таким образом, для нахождения координат (x_0, y_0) центра данной линии необходимо найти решение системы (1.5).

Уравнения (1.5) называются уравнениями центра линии второго порядка.

Если уравнения центра имеют единственное решение, то линию второго порядка называют центральной. В силу теоремы Крамера имеем: для того, чтобы кривая, определяемая уравнением (1.1), была центральной, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы (1.5) $J_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$ был отличен от нуля.

Рассмотрим далее поворот декартовой прямоугольной системы координат на угол φ.

Как известно, поворот системы координат на угол φ задается формулами

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi; \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi. \end{cases} \tag{1.7}$$

Подставляя выражения (1.7) для x и y в левую часть (1.1), получаем уравнение линии в новой системе $O'x'y'$. Очевидно, это уравнение имеет вид:

$$a'_{11}(x')^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}(y')^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0\,, \qquad (1.8)$$

где

$$\begin{cases} a'_{11} = a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi; \\ a'_{12} = -a_{11}\cos\varphi\sin\varphi + a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + a_{22}\cos\varphi\sin\varphi; \\ a'_{22} = a_{11}\sin^2\varphi - 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\cos^2\varphi; \\ a'_{13} = a_{12}\cos\varphi + a_{23}\sin\varphi; \\ a'_{23} = -a_{13}\sin\varphi + a_{23}\cos\varphi. \end{cases} \qquad (1.9)$$

Всегда можно выбрать угол φ поворота системы координат так, чтобы после преобразования в уравнении (1.8) исчез член с произведением текущих координат, т.е. так, чтобы в уравнении (1.8) $a'_{12} = 0$. Учитывая (1.9), для определения угла φ получаем уравнение:

$$a_{12}\sin^2\varphi + (a_{11} - a_{22})\sin\varphi\cos\varphi - a_{12}\cos^2\varphi = 0\,.$$

Если $a_{12} \neq 0$ (иначе нет надобности в повороте систем координат), то последнее уравнение приводится к виду

$$a_{12}\mathrm{tg}^2\varphi - (a_{22} - a_{11})\,\mathrm{tg}\,\varphi - a_{12} = 0\,. \qquad (1.10)$$

Откуда

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{a_{22} - a_{11} \pm \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2}}{2a_{12}}\,. \qquad (1.11)$$

Отметим, что $\mathrm{tg}\,\varphi_1 \cdot \mathrm{tg}\,\varphi_2 = -1$. Это означает, что для уравнения (1.1) всегда найдутся два взаимно ортогональных направления, определяемые углами φ_1 и φ_2, такие, что, поворачивая координатные оси на один их этих углов, в новой системе координат получим уравнение линии, в котором отсутствует член с произведением текущих координат (т.е. $a'_{12} = 0$). После поворота на угол φ, тангенс которого определен по формуле (1.11), уравнение линии примет вид

$$a'_{11}(x')^2 + a'_{22}(y')^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0\,.$$

Коэффициенты a'_{11}, a'_{22}, a'_{13}, a'_{23} определяют по формулам (1.9), предварительно определив $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ по известному $\mathrm{tg}\,\varphi$:

$$\sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}; \quad \cos\varphi = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}. \qquad (1.12)$$

Знаки в знаменателях этих формул выбираются произвольно, но обязательно одинаковыми.

Как уже отмечалось, все кривые второго порядка подразделяются на два больших класса: центральные и нецентральные. Кривые, для которых определитель $J_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, являются центральными, а кривые, для которых $J_2 = 0$, – нецентральными (или параболическими).

Замечание. Нетрудно показать, что величины $J_2 = a_{11} + a_{22}$ и $J_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$ являются инвариантами линии второго порядка (1.1) относительно преобразований декартовой прямоугольной системы координат.

Центральные кривые в свою очередь в зависимости от знака J_2 делятся еще на два класса: при $J_2 > 0$ кривые называются кривыми эллиптического типа, а при $J_2 < 0$ – кривыми гиперболического типа.

Итак, все линии второго порядка в зависимости от знака инварианта J_2 делятся на следующие три типа:

эллиптический тип, если $J_2 > 0$;

гиперболический тип, если $J_2 < 0$;

параболический тип, если $J_2 = 0$.

Очевидно, тип линии не меняется при изменении декартовой системы координат. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема. Для любой кривой второго порядка, заданной в декартовой прямоугольной системе координат Oxy уравнением (1.1), существует такая декартовая прямоугольная система координат $O'x'y'$, в которой это уравнение принимает один из девяти видов:

1) $\dfrac{\tilde{x}^2}{a^2} + \dfrac{\tilde{y}^2}{b^2} = 1$ – эллипс (рис. 1);

2) $\dfrac{\tilde{x}^2}{a^2} + \dfrac{\tilde{y}^2}{b^2} = -1$ – мнимый эллипс;

3) $\dfrac{\tilde{x}^2}{a^2}+\dfrac{\tilde{y}^2}{b^2}=0$ – одна точка;

4) $\dfrac{\tilde{x}^2}{a^2}-\dfrac{\tilde{y}^2}{b^2}=1$ – гипербола (рис. 2);

5) $\dfrac{\tilde{x}^2}{a^2}-\dfrac{\tilde{y}^2}{b^2}=0$ – пара пересекающихся прямых (рис. 3);

6) $\tilde{y}^2=2p\tilde{x}$ – парабола (рис. 4);

7) $\tilde{y}^2-a^2=0$ – пара параллельных прямых ($\tilde{y}=a$ и $\tilde{y}=-a$);

8) $\tilde{y}^2+a^2=0$ – пара мнимых параллельных прямых;

9) $\tilde{y}^2=0$ – пара совпавших прямых.

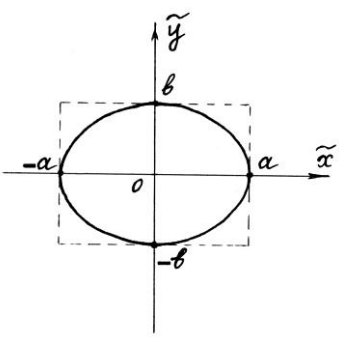

Рис. 1

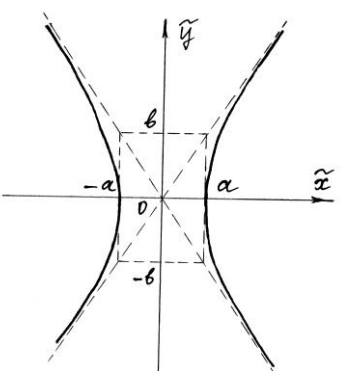

Рис. 2

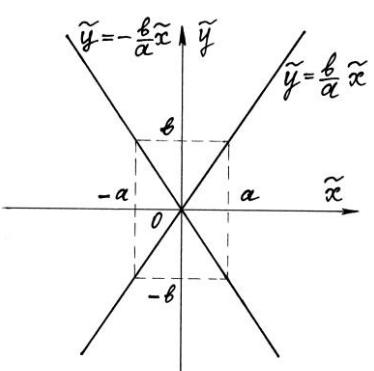

Рис. 3

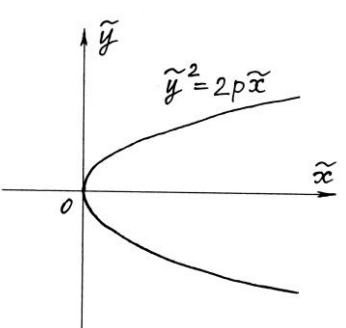

Рис. 4

Рассмотрим примеры приведения кривых второго порядка к каноническому виду. Для этого рассмотрим отдельно случай центральной линии и случай нецентральной линии (параболический случай).

I. Случай центральной линии

Пример 1.1. Привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$ и построить ее относительно первоначальной системы координат.

Решение. Отметим, что в случае центральной линии $(J_2 \neq 0)$ на практике удобнее сначала сделать параллельный перенос системы координат в центр, а затем поворот системы координат вокруг центра. В нашем случае $J_2=\begin{vmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{vmatrix}=9$.

Следовательно, данная линия является центральной. Координаты центра линии определим из системы уравнений (1.5), которая в данном случае имеет вид

$$\begin{cases}5x_0+4y_0-9=0;\\ 4x_0+5y_0-9=0.\end{cases}$$

Решая эту систему, найдем $x_0=1,\ y_0=1$. Перенесем начало координат в точку $O'(1;\ 1)$, сохраняя направление осей координат. Уравнение данной линии относительно новой системы координат $O'x'y'$ имеет вид $5(x')^2+8x'y'+5(y')^2+a'_{33}=0$.

Напомним, что при параллельном переносе системы координат в центр линии старшие коэффициенты в уравнении линии остаются без изменения, члены первой степени исчезают, а свободный член вычисляется подстановкой в левую часть исходного уравнения координат центра вместо текущих координат: $a'_{33}=5\cdot1^2+8\cdot1\cdot1+5\cdot1^2-18\cdot1-$ $-18\cdot1+9=-9$. Следовательно, окончательно уравнение данной линии примет вид

$$5(x')^2+8x'y'+5(y')^2-9=0. \qquad (1.13)$$

Далее сделаем поворот системы координат на угол φ, тангенс которого вычислим по формуле (1.11). В нашем случае

$\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\pm\sqrt{4\cdot 4^2}}{2\cdot 4} = \pm 1$. Выберем любое из полученных значений, например $\operatorname{tg}\varphi = 1$, и вычислим $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ по формулам (1.12). Получим $\sin\varphi = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos\varphi = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Если $\operatorname{tg}\varphi = 1$, то $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ имеют одинаковые знаки.

Выберем положительные значения $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$. Тогда преобразование поворота системы координат имеет вид

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\tilde{x}}{\sqrt{2}} - \dfrac{\tilde{y}}{\sqrt{2}}; \\ y' = \dfrac{\tilde{x}}{\sqrt{2}} + \dfrac{\tilde{y}}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Подставим эти значения x' и y' в уравнение (1.13). После упрощения получим $9\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - 9 = 0$ или $\tilde{x}^2 + \dfrac{\tilde{y}^2}{9} = 1$.

Нашли каноническое уравнение эллипса, полуоси которого $a = 1$, $b = 3$. Центр эллипса находится в точке $O'(1;\ 1)$ относительно первоначальной системы координат. Оси симметрии эллипса совпадают с осями системы $O'\tilde{x}\tilde{y}$, причем большая ось совпадает с осью $O'\tilde{y}$, а малая с осью $O'\tilde{x}$. Изобразим эту линию (рис. 5).

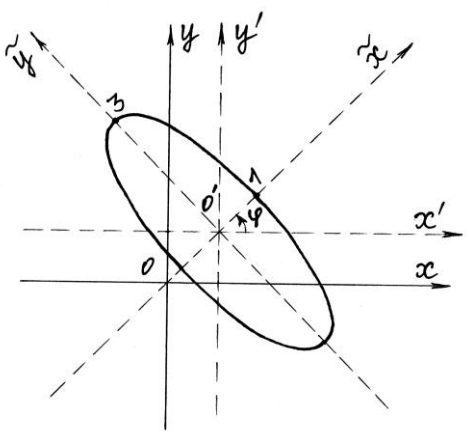

Рис. 5

Пример 1.2. Привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка

$$7x^2+16xy-23y^2-14x-16y-218=0$$

и построить ее относительно первоначальной системы координат.

Решение. Так как $J_2=\begin{vmatrix}7 & 8\\ 8 & -23\end{vmatrix}=-225\neq 0$, то данное уравнение определяет центральную линию. Координаты центра определим из системы уравнений (1.5), которая в данном случае имеет вид:

$$\begin{cases}7x_0+8y_0-7=0;\\ 8y_0-23y_0-8=0.\end{cases}$$

Решая эту систему, найдем $x_0=1,\ y_0=0.$

Перенесем начало координат в точку $O'(1;\ 0)$, сохраняя направление осей. Уравнение данной линии в новой системе координат $O'x'y'$ будет иметь вид $7(x')^2+16x'y'-23(y')^2+a'_{33}=0$.

Здесь (как и в предыдущем примере) при параллельном переносе

$$\begin{cases}x=1+x';\\ y=y'\end{cases}$$

старшие коэффициенты в уравнении линии остаются без изменения, члены первой степени исчезают, а a'_{33} в силу формулы (1.4) имеет вид

$$a'_{33}=7\cdot 1^2-16\cdot 1\cdot 0-23\cdot 0-14\cdot 1-16\cdot 0-218=-225.$$

Тогда окончательно в системе координат $O'x'y'$ уравнение нашей линии примет вид

$$7(x')^2+16x'y'-23(y')^2-225=0. \qquad (1.14)$$

Далее сделаем поворот системы координат на угол φ, тангенс которого вычислим по формуле (1.11). В нашем случае $\operatorname{tg}\varphi=$ $=\dfrac{-23-7\pm\sqrt{(30)^2+4\cdot 64}}{16}=\dfrac{-30\pm 34}{16}$, отсюда $(\operatorname{tg}\varphi)_1=-4$; $(\operatorname{tg}\varphi)_2=\dfrac{1}{4}$.

Выберем любое из полученных значений, например $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{1}{4}$, и вычис-

лим $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ по формулам (1.12) $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{17}}$; $\cos\varphi = \frac{4}{\sqrt{17}}$ (возьмем значения $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ положительными). Сделаем поворот системы координат по формулам:

$$\begin{cases} x' = \frac{4\tilde{x}}{\sqrt{17}} - \frac{\tilde{y}}{\sqrt{17}}; \\ y' = \frac{\tilde{x}}{\sqrt{17}} + \frac{4\tilde{y}}{\sqrt{17}}. \end{cases}$$

Подставляя эти значения x' и y' в уравнение (1.14), получим

$$\frac{7}{17}(16\tilde{x}^2 - 8\tilde{x}\tilde{y} + \tilde{y}^2) + \frac{16}{17}(4\tilde{x}^2 + 15\tilde{x}\tilde{y} - 4\tilde{y}^2) -$$

$$-\frac{23}{17}(\tilde{x}^2 + 8\tilde{x}\tilde{y} + 16\tilde{y}^2) - 225 = 0.$$

После упрощений придем к уравнению

$$\frac{\tilde{x}^2}{25} - \frac{\tilde{y}^2}{9} = 1.$$

Это есть каноническое уравнение гиперболы, действительная полуось которой равна 5, а мнимая – 3, причем действительная полуось совпадает с осью $O'\tilde{x}$, а мнимая – с осью $O'\tilde{y}$. Центр гиперболы находится в точке $O'(1;\ 0)$ относительно первоначальной системы координат. Эта кривая изображена на рис. 6.

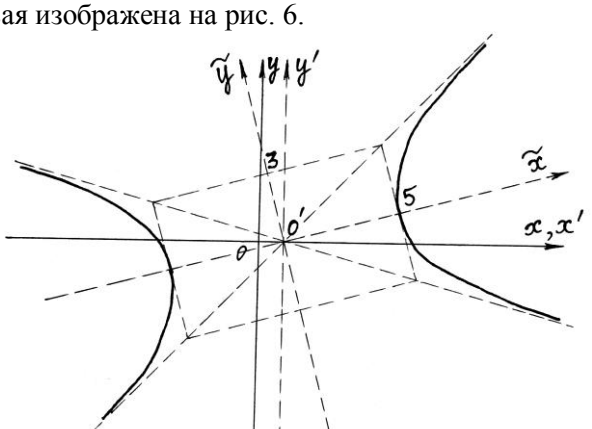

Рис. 6

Пример 1.3. Привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка

$$12xy+5y^2-12x-22y+17=0 \qquad (1.15)$$

и построить ее относительно первоначальной системы координат.

Решение. Вычислим инвариант $J_2=\begin{vmatrix}0 & 6\\ 6 & 5\end{vmatrix}=-36\neq 0$. Следовательно, данная линия является центральной. Координаты центра определим из системы (1.5), которая в нашем случае имеет вид

$$\begin{cases}6y_0-6=0;\\ 6x_0+5y_0-11=0.\end{cases}$$

Решая эту систему, найдем $x_0=1$, $y_0=1$.

Сделаем параллельный перенос системы координат, приняв за новое начало системы координат точку $O'(1;\ 1)$:

$$\begin{cases}x=1+x';\\ y=1+y'.\end{cases}$$

Подставляя эти значения x и y в заданное (1.15), после упрощений получим $12x'y'+5(y')^2=0$ или $y'(12x'+5y')=0$.

Следовательно, получаем пару пересекающихся прямых $y'=0$ и $12x'+5y'=0$. Относительно первоначальной системы координат эти прямые имеют вид: $y-1=0$ и $12x+5y-17=0$. Эта кривая изображена на рис. 7.

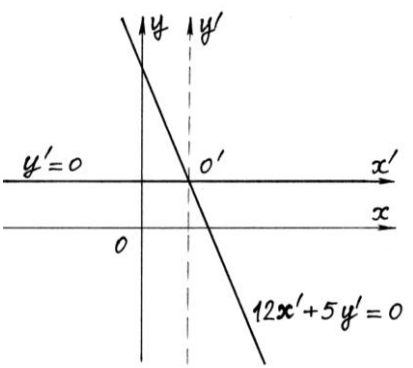

Рис. 7

Пример 1.4. Привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка

$$5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+120=0. \qquad (1.16)$$

Решение. Так как $J_2=\begin{vmatrix}5 & 2\\ 2 & 8\end{vmatrix}=36\neq 0$, то данное уравнение определяет центральную линию. Координаты центра определим из системы уравнений (1.5), которая в нашем случае имеет вид:

$$\begin{cases} 5x_0 + 2y_0 - 16 = 0; \\ 2x_0 + 8y_0 - 28 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем $x_0 = 2$, $y_0 = 3$.

Перенесем начало координат в точку $O'(2;\ 3)$, сохраняя направление осей. Это преобразование параллельного переноса задается формулами

$$\begin{cases} x = 2 + x'; \\ y = 3 + y'. \end{cases}$$

Подставляя эти значения x и y в уравнение (1.16) заданной кривой, после преобразований получим:

$$5(x')^2 + 4x'y' + 8(y')^2 + 4 = 0. \qquad (1.17)$$

Далее сделаем поворот системы координат $O'x'y'$ на угол φ, тангенс которого вычисляется по формулам (1.11). В нашем случае

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4}; \quad (\operatorname{tg}\varphi)_1 = 2; \quad (\operatorname{tg}\varphi)_2 = -\frac{1}{2}.$$

Выберем любое из полученных значений, например $\operatorname{tg}\varphi = 2$, и вычислим $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ по формулам (1.12): $\sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$ (возьмем значения $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ положительными). Тогда преобразование поворота системы координат будет иметь вид:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\tilde{x}}{\sqrt{5}} - \dfrac{2\tilde{y}}{\sqrt{5}}; \\ y' = \dfrac{2\tilde{x}}{\sqrt{5}} + \dfrac{\tilde{y}}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Подставляя эти значения x' и $\tilde{y}$ в уравнение (1.17), получим:

$$\frac{5}{5}(\tilde{x} - 2\tilde{y})^2 + \frac{4}{5}(\tilde{x} - 2\tilde{y})(2\tilde{x} + \tilde{y}) + \frac{8}{5}(2\tilde{x} + \tilde{y})^2 + 4 = 0.$$

После преобразований окончательно получим

$$45\tilde{x}^2 + 20\tilde{y}^2 + 20 = 0$$

или

$$\frac{9\tilde{x}^2}{4} + \tilde{y}^2 = -1.$$

Это каноническое уравнение мнимого эллипса.

II. Случай нецентральной кривой

Пример 1.5. Привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка

$$9x^2+24xy+16y^2+30x+40y-25=0 \qquad (1.18)$$

и построить ее относительно первоначальной системы координат.

Решение. Так как $J_2=\begin{vmatrix}9 & 12\\ 12 & 16\end{vmatrix}=0$, то данная кривая не является центральной. Она принадлежит к параболическому типу. В параболическом случае упрощение уравнения линии второго порядка всегда начинают с поворота осей координат на угол φ, тангенс которого вычисляется по формуле (1.11). В нашем случае $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{7\pm\sqrt{49+576}}{24}=$ $=\dfrac{7\pm 25}{24}$; $(\operatorname{tg}\varphi)_1=\dfrac{4}{3}$; $(\operatorname{tg}\varphi)_2=-\dfrac{3}{4}$. Выберем любое из полученных значений, например $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{4}{3}$, и вычислим $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ по формулам (1.12): $\sin\varphi=\dfrac{4}{5}$; $\cos\varphi=\dfrac{3}{5}$ (возьмем значения $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ положительными). Тогда преобразование поворота будет иметь вид:

$$\begin{cases} x=\dfrac{3x'}{5}-\dfrac{4y'}{5};\\ y=\dfrac{4x'}{5}+\dfrac{3y'}{5}.\end{cases}$$

Подставляя эти значения *x* и *y* в уравнение (1.18), получим

$$\frac{9}{25}(3x'-4y')^2+\frac{24}{25}(3x'-4y')(4x'+3y')+\frac{16}{25}(4x'+3y')^2+$$
$$+\frac{30}{5}(3x'-4y')+\frac{40}{5}(4x'+3y')-25=0.$$

После очевидных преобразований придем к уравнению $(x')^2+2x'-1=0$, которое запишем в виде: $(x'+1)^2=2$.

Это пара параллельных прямых: $x'=\sqrt{2}-1$ и $x'=-\sqrt{2}-1$. Такая кривая изображена на рис. 8.

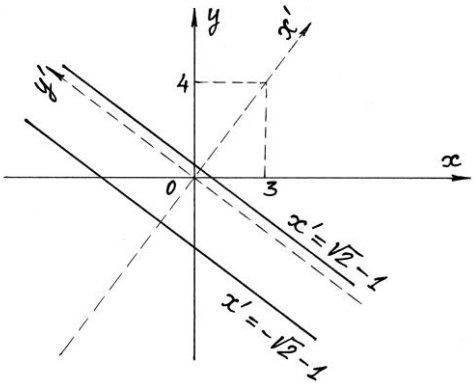

Рис. 8

Пример 1.6. Привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0 \qquad (1.19)$$

и построить ее относительно первоначальной системы координат.

Решение. Так как $J_2 = \begin{vmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{vmatrix} = 0$, то данная кривая не является центральной. Она принадлежит к параболическому типу. В параболическом случае упрощение уравнения линии второго порядка всегда начинают с поворота осей координат на угол φ, тангенс которого вычисляется по формуле (1.11). В нашем случае

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 576}}{-24} = \frac{7 \pm 25}{-24}; \quad (\operatorname{tg}\varphi)_1 = -\frac{4}{3}; \ (\operatorname{tg}\varphi)_2 = \frac{3}{4}.$$

Выберем любое из полученных значений, например $\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{4}$, и вычислим $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ по формуле (1.12): $\sin\varphi = \frac{3}{5}$; $\cos\varphi = \frac{4}{5}$ (возьмем значения $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ положительными). Тогда преобразование поворота будем иметь вид:

$$\begin{cases} x = \dfrac{4x'}{5} - \dfrac{3y'}{5}; \\ y = \dfrac{3x'}{5} + \dfrac{4y'}{5}. \end{cases}$$

Подставляя эти значения x и y в уравнение (1.19), получим

$$\frac{9}{25}(4x'-3y')^2-\frac{24}{25}(4x'-3y')(3x'+4y')+\frac{16}{25}(3x'+4y')^2-$$

$$-\frac{20}{5}(4x'-3y')+\frac{110}{5}(3x'+4y')-50=0.$$

После очевидных преобразований придем к уравнению

$$y'^2+4y'+2x'-2=0\,.$$

Выделяя полный квадрат по y', получим

$$(y'+2)^2+2(x'-3)=0\,.$$

После параллельного переноса

$$\begin{cases} x'=3+\tilde{x}; \\ y'=-2+\tilde{y} \end{cases}$$

придем к каноническому уравнению параболы

$$\tilde{y}^2=-2\tilde{x}\,.$$

Эта кривая изображена на рис. 9.

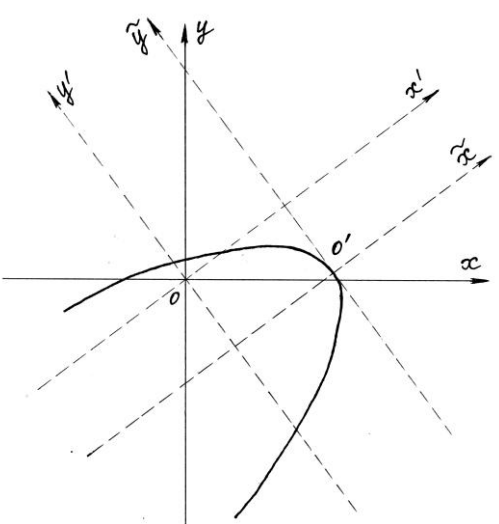

Рис. 9

§ 2. Приведение уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду

Пусть в пространстве задана прямоугольная декартова система координат $Oxyz$.

Общим уравнением алгебраической поверхности второго порядка в системе координат $Oxyz$ называется уравнение

$$\begin{gathered} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + \\ + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \end{gathered} \tag{2.1}$$

при условии $|a_{11}| + |a_{22}| + |a_{33}| + |a_{12}| + |a_{13}| + |a_{23}| > 0$.

Теорема. Для любого уравнения алгебраической поверхности второго порядка существует прямоугольная декартова система координат $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$, в которой оно приводится к одному из следующих видов:

1) $\dfrac{\tilde{x}^2}{a^2} + \dfrac{\tilde{y}^2}{b^2} + \dfrac{\tilde{z}^2}{c^2} = 1$ – уравнение эллипсоида;

2) $\dfrac{\tilde{x}^2}{a^2} + \dfrac{\tilde{y}^2}{b^2} + \dfrac{\tilde{z}^2}{c^2} = -1$ – уравнение мнимого эллипсоида;

3) $\dfrac{\tilde{x}^2}{a^2} + \dfrac{\tilde{y}^2}{b^2} + \dfrac{\tilde{z}^2}{c^2} = 0$ – уравнение вырожденного эллипсоида;

4) $\dfrac{\tilde{x}^2}{a^2} + \dfrac{\tilde{y}^2}{b^2} - \dfrac{\tilde{z}^2}{c^2} = 1$ – уравнение однополостного гиперболоида;

5) $\dfrac{\tilde{x}^2}{a^2} + \dfrac{\tilde{y}^2}{b^2} - \dfrac{\tilde{z}^2}{c^2} = -1$ – уравнение двуполостного гиперболоида;

6) $\dfrac{\tilde{x}^2}{a^2} + \dfrac{\tilde{y}^2}{b^2} - \dfrac{\tilde{z}^2}{c^2} = 0$ – уравнение конуса;

7) $\tilde{z} = \dfrac{\tilde{x}^2}{a^2} + \dfrac{\tilde{y}^2}{b^2}$ – уравнение эллиптического параболоида;

8) $\tilde{z} = \dfrac{\tilde{x}^2}{a^2} - \dfrac{\tilde{y}^2}{b^2}$ – уравнение гиперболического параболоида;

9) $\dfrac{\tilde{x}^2}{a^2} + \dfrac{\tilde{y}^2}{b^2} = 1$ – уравнение эллиптического цилиндра;

10) $\dfrac{\tilde{x}^2}{a^2} + \dfrac{\tilde{y}^2}{b^2} = -1$ – уравнение мнимого эллиптического цилиндра;

11) $\frac{\tilde{x}^2}{a^2}-\frac{\tilde{y}^2}{b^2}=1$ – уравнение гиперболического цилиндра;

12) $\tilde{y}^2=2px \quad (p>0)$ – уравнение параболического цилиндра;

13) $\frac{\tilde{x}^2}{a^2}-\frac{\tilde{y}^2}{b^2}=0$ – уравнение пары пересекающихся плоскостей;

14) $\frac{\tilde{x}^2}{a^2}+\frac{\tilde{y}^2}{b^2}=0$ – уравнение пары мнимых пересекающихся плоскостей;

15) $\tilde{y}^2-a^2=0 \quad (a>0)$ – уравнение пары параллельных плоскостей;

16) $\tilde{y}^2+a^2=0 \quad (a>0)$ – уравнение пары мнимых параллельных плоскостей;

17) $\tilde{y}^2=0$ – уравнение пары совпадающих плоскостей.

Уравнения 1 – 17 называются каноническими уравнениями алгебраических поверхностей второго порядка, а система координат $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ – канонической.

Уравнение 1 определяет поверхность, называемую эллипсоидом (см. эскиз поверхности на рис. 10); уравнения 4 и 5 определяют одно- (рис. 11) и двуполостный (рис. 12) гиперболоиды; уравнение 6 – конус (рис. 13); уравнения 7 и 8 – эллиптический (рис. 14) и гиперболический (рис. 15) параболоиды; уравнения 9, 11 и 12 – эллиптический (рис. 16), гиперболический (рис. 17) и параболический (рис. 18) цилиндры; уравнение 13 определяет пару пересекающихся плоскостей (рис. 19); уравнение 15 – пару параллельных плоскостей (рис. 20); уравнение 17 – плоскость $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{z}$ канонической системы координат (рис. 21); уравнение 14 определяет прямую – ось $\tilde{O}\tilde{z}$ канонической системы координат; уравнение 3 определяет точку $\tilde{O}$ – начало канонической системы координат; уравнения 2, 10 и 16 определяют пустое множество точек, т.е. нет ни одной точки пространства, координаты которой удовлетворяют какому-либо из этих уравнений.

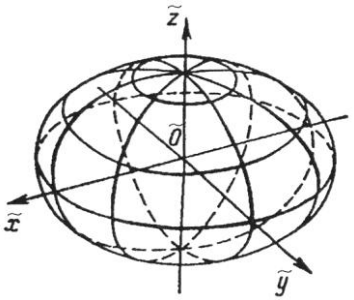

Рис. 10

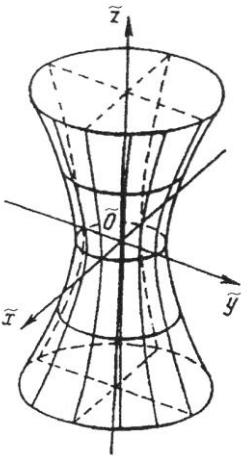

Рис. 11

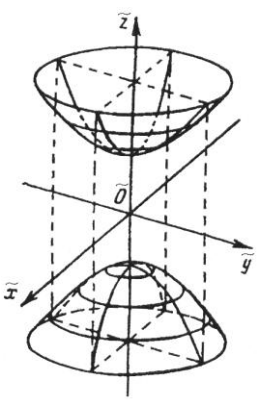

Рис. 12

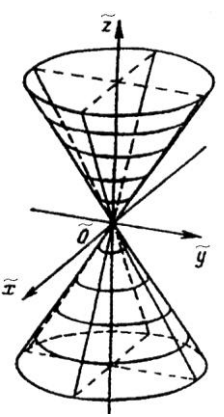

Рис. 13

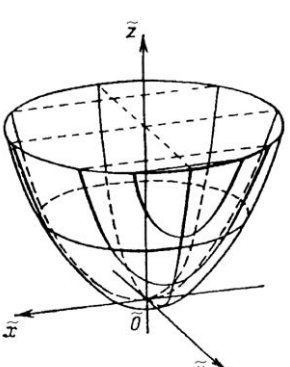

Рис. 14

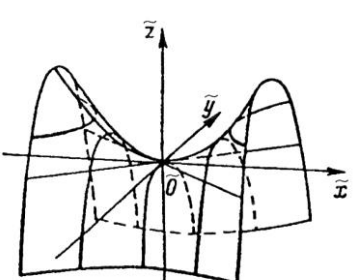

Рис. 15

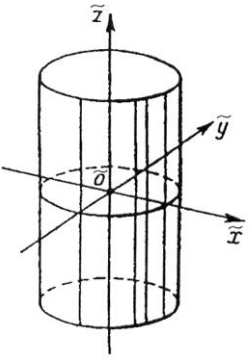

Рис. 16

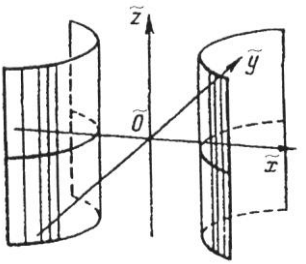

Рис. 17

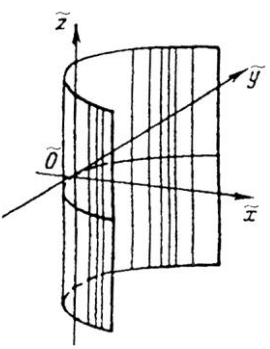

Рис. 18

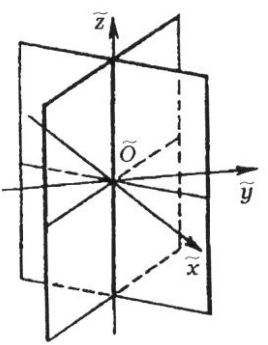

Рис. 19

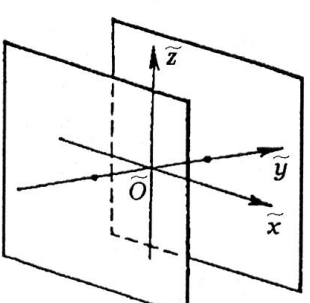

Рис. 20

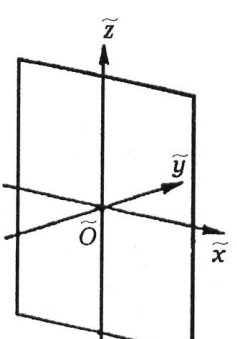

Рис. 21

Под приведением уравнения поверхности 2-го порядка (2.1) к каноническому виду будем понимать решение такой задачи: для указанного уравнения найти каноническую систему координат $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ (т.е. получить формулы преобразования прямоугольной декартовой системы координат в пространстве, соответствующие переходу от исходной системы координат $Oxyz$ к канонической системе координат $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$) и тот вид канонического уравнения, к которому приводится исходное уравнение в найденной системе координат $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$.

Группа слагаемых 2-го порядка в уравнении (2.1)

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \qquad (2.2)$$

образует квадратичную функцию (или, согласно терминологии, принятой в курсе линейной алгебры, квадратичную форму) от переменных x, y, z.

Для приведения уравнения поверхности 2-го порядка к каноническому виду необходимо решить следующую задачу: найти такую систему координат $Ox'y'z'$, в которой квадратичная форма (2.2) имеет вид

$$\begin{gathered} a'_{11}(x')^2 + a'_{22}(y')^2 + a'_{33}(z')^2 \\ (\, a'_{12} = a'_{13} = a'_{23} = 0; \quad |a'_{11}| + |a'_{22}| + |a'_{33}| > 0 \,) \end{gathered} \qquad (2.3)$$

(т.е. приведена к виду «суммы квадратов» всех координат с числовыми коэффициентами при них).

В курсе линейной алгебры доказывается, что такая система координат существует для произвольной квадратичной формы и рассматриваются общие методы её нахождения.

В некоторых несложных частных случаях удается найти такую систему координат $Ox'y'z'$, в которой квадратичная форма (2.2) уравнения (2.1) приведена к «сумме квадратов», и без использования общих методов линейной алгебры, а затем найти каноническую систему координат для этого уравнения поверхности. Рассмотрим такие примеры.

Пример 2.1. Привести к каноническому виду уравнение и построить эскиз поверхности

$$4x^2 - y^2 + 9z^2 - 16x + 6y + 8 = 0\,. \qquad (2.4)$$

Решение. Заметим, что для данного уравнения группа слагаемых 2-го порядка в исходной системе координат уже имеет вид «суммы

квадратов» (2.3). Далее следует выделить полные квадраты по каждой координате, для которой $a_{ii} \neq 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3)$. В данном случае полные квадраты могут быть выделены по каждой координате:

$$4(x^2 - 4x + 4) - 4 \cdot 4 - (y^2 - 6y + 9) + 9 + 9z^2 + 8 = 0;$$
$$4(x-2)^2 - (y-3)^2 + 9z^2 + 1 = 0.$$

Перейдем к системе координат $O'x'y'z'$ с помощью преобразования, определяемого формулами:

$$\begin{cases} x' = x - 2; \\ y' = y - 3; \\ z' = z \end{cases}$$

(это преобразование соответствует переходу к системе координат $O'x'y'z'$, полученной из исходной параллельным переносом, а координаты начала этой системы координат O' в исходной системе координат: $O'(2,\ 3\ ,0))$. Тогда преобразуемое уравнение приобретает вид

$$4(x')^2 - (y')^2 + 9(z')^2 + 1 = 0. \qquad (2.5)$$

Заметим, что квадратичная форма этого уравнения может быть приведена к виду квадратичной формы канонических уравнений 4, 5 или 6. Для этого достаточно перейти к такой системе координат $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$, в которой коэффициенты квадратичной формы $\tilde{a}_{11}$ и $\tilde{a}_{22}$ будут иметь одинаковый знак (это может быть достигнуто, если в (2.5) «поменять местами», например, вторую и третью координаты). С этой целью используем преобразование координат, соответствующее переходу от системы координат $O'x'y'z'$ к системе координат $O'\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$, полученной из системы $O'x'y'z'$ поворотом плоскости $O'y'z'$ на угол $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ (ось вращения $O'x'$ при этом остается неподвижной):

$$\begin{cases} \tilde{x} = x'; \\ \tilde{y} = z'; \\ \tilde{z} = -y'. \end{cases}$$

В этой системе координат преобразуемое уравнение

$$4\tilde{x}^2 + 9\tilde{y}^2 - \tilde{z}^2 + 1 = 0$$

приводится к виду

$$\frac{\tilde{x}^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{\tilde{y}^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}-\frac{\tilde{z}^2}{1^2}=-1,$$

что соответствует каноническому уравнению двуполостного гиперболоида (каноническое уравнение 5, эскиз поверхности см. на рис. 12).

Таким образом, система координат $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ является канонической для рассмотренного уравнения (2.4). Формулы преобразования координат, соответствующего переходу от исходной системы координат $Oxyz$ к канонической $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ имеют вид:

$$\begin{cases}\tilde{x}=x-2;\\ \tilde{y}=z;\\ \tilde{z}=-y+3.\end{cases}$$

Пример 2.2. Привести к каноническому виду уравнение и построить эскиз поверхности

$$y^2+2xz+2x+2y+2z+2=0. \qquad (2.6)$$

Решение. В этом уравнении группа слагаемых 2-го порядка не приведена к «сумме квадратов», так как $a_{13}=1\neq 0$.

В случае, когда только один из коэффициентов a_{12}, a_{13}, a_{23} не равен нулю, можно предложить следующий способ приведения квадратичной формы (2.2) к «сумме квадратов». Допустим $a_{13}\neq 0$, $a_{12}=a_{23}=0$. Тогда группа слагаемых 2-го порядка содержит квадратичную форму от переменных x, z: $a_{11}x^2+2a_{13}xz+a_{33}z^2$, которая может быть приведена к «сумме квадратов» координат x', z', если использовать для этого преобразование координат, которое соответствует переходу от системы координат Oxz на плоскости к системе координат $Ox'z'$, повернутой относительно исходной (см. способ приведения квадратичной формы $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$ в общем уравнении линии 2-го порядка на плоскости (1.1) к «сумме квадратов» $a'_{11}(x')^2+a'_{22}(y')^2$ ($a'_{12}=0$), который рассмотрен в § 1). Формулы такого преобразования координат имеют вид (ось вращения Oy остается неподвижной):

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - z'\sin\varphi; \\ y = y'; \\ z = x'\sin\varphi + z'\cos\varphi, \end{cases} \tag{2.7}$$

где величина угла φ может быть найдена из уравнения, аналогичного (1.10):

$$a_{13}\mathrm{tg}^2\varphi - (a_{33} - a_{11})\,\mathrm{tg}\,\varphi - a_{13} = 0\,, \tag{2.8}$$

а направление поворота при $\varphi > 0$ совпадает с направлением поворота от вектора $\vec{i}$ к вектору $\vec{k}$ исходной системы координат.

В рассматриваемом случае уравнение (2.8) выглядит так:

$$\mathrm{tg}^2\varphi - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,\varphi = \pm 1\,.$$

Если для $\mathrm{tg}\,\varphi = 1$ в соответствии с формулами (1.12) выбрать значения $\sin\varphi = \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (а это соответствует значению $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$), то преобразование координат принимает вид:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' - z'}{\sqrt{2}}; \\ y = y'; \\ z = \dfrac{x' + z'}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Подстановка формул этого преобразования координат в уравнение (2.6)

$$(y')^2 + 2\left(\frac{x' - z'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x' + z'}{\sqrt{2}}\right) + 2\left(\frac{x' - z'}{\sqrt{2}}\right) + 2y' + 2\left(\frac{x' + z'}{\sqrt{2}}\right) + 2 = 0$$

приводит его к виду:

$$(x')^2 + (y')^2 - (z')^2 + 2\sqrt{2}x' + 2y' + 2 = 0\,.$$

Следовательно, в системе координат $O'x'y'z'$ группа слагаемых 2-го порядка приведена к «сумме квадратов». Далее, выделим полные квадраты по переменным x', y' и z':

$$((x')^2 + 2\sqrt{2}x' + 2) - 2 + ((y')^2 + 2y' + 1) - 1 - (z')^2 + 2 = 0\,;$$

$$(x' + \sqrt{2})^2 + (y' + 1)^2 - (z')^2 - 1 = 0\,.$$

Перейдем к системе координат $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ с помощью преобразования, определяемого формулами (параллельный перенос системы координат):

$$\begin{cases} \tilde{x} = x' + \sqrt{2}; \\ \tilde{y} = y' + 1; \\ \tilde{z} = z'. \end{cases}$$

В этой системе координат преобразуемое уравнение приводится к виду

$$\frac{\tilde{x}^2}{1^2} + \frac{\tilde{y}^2}{1^2} - \frac{\tilde{z}^2}{1^2} = 1,$$

что соответствует каноническому уравнению однополостного гиперболоида (каноническое уравнение 4, эскиз поверхности см. на рис. 11). Следовательно, система координат $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ является канонической для рассмотренного уравнения (2.6). Формулы преобразования координат, соответствующего переходу от исходной системы координат $Oxyz$ к канонической $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$, имеют вид:

$$\begin{cases} \tilde{x} = \dfrac{x+z}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}; \\ \tilde{y} = y + 1; \\ \tilde{z} = \dfrac{-x+z}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Пример 2.3. Привести к каноническому виду уравнение и построить эскиз поверхности

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz - 1 = 0. \qquad (2.9)$$

Решение. В этом уравнении группа слагаемых 2-го порядка не приведена к «сумме квадратов», так как $a_{12} = -a_{13} = -a_{23} = 1 \neq 0$. В данном случае не удается привести квадратичную форму уравнения к «сумме квадратов» с помощью поворота системы координат только в одной из координатных плоскостей. Переходу к канонической системе координат соответствует более сложный поворот системы координат в пространстве, когда ось вращения не параллельна ни одной из осей исходной системы координат.

Тем не менее, и для этого уравнения удается найти каноническую систему координат элементарными методами. Группа слагаемых 2-го

порядка в этом уравнении может быть представлена следующим образом:

$$x^2 + 2x(y-z) + (y-z)^2 - 1 = 0.$$

Заметим, что линейная функция координат $\lambda y + \mu z$ при условии $\lambda^2 + \mu^2 > 0$ может быть приведена к виду

$$\lambda y + \mu z = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}\,(y\cos\varphi + z\sin\varphi) = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}\;y' \qquad (2.10)$$

(где $\cos\varphi = \dfrac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}$ и $\sin\varphi = \dfrac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}$), если рассматривать выражение $y\cos\varphi + z\sin\varphi$ как правую часть одной из формул для преобразования координат

$$\begin{cases} x' = x; \\ y' = y\cos\varphi + z\sin\varphi; \\ z' = -y\sin\varphi + z\cos\varphi, \end{cases}$$

которое соответствует переходу к системе $Ox'y'z'$, полученной из исходной поворотом в плоскости Oyz (ось вращения Ox остается неподвижной).

Для линейной функции $y - z$ (из рассматриваемого уравнения) это преобразование координат принимает вид

$$\begin{cases} x' = x; \\ y' = \dfrac{y-z}{\sqrt{2}}; \\ z' = \dfrac{y+z}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

а само это уравнение с учетом (2.10) выглядит так:

$$x^2 + 2\sqrt{2}x\left(\frac{y-z}{\sqrt{2}}\right) + 2\left(\frac{y-z}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1 = 0.$$

Вид уравнения (2.9) после перехода к системе координат $O'x'y'z'$ такой:

$$(x')^2 + 2\sqrt{2}x'y' + 2(y')^2 - 1 = 0.$$

Группу слагаемых 2-го порядка этого уравнения можно привести к «сумме квадратов» с помощью преобразования координат, соответст-

вующего переходу к системе $O'\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$, повернутой на угол ψ относительно $O'x'y'z'$ в плоскости $O'x'y'$ (ось вращения $O'z'$ остается неподвижной). Значение $\operatorname{tg}\psi$ для угла поворота системы координат можно найти по формуле (1.11), а значения $\sin\psi$ и $\cos\psi$, необходимые для формул преобразования координат (1.7), – по формулам (1.12) (аналогично тому, как это сделано в примере 2.2). Однако в данном случае, когда вся группа слагаемых 2-го порядка приводится к полному квадрату от линейной функции двух координат $\lambda x' + \mu y'$, для определения формул поворота можно воспользоваться и другим приемом, подобным тому, который применялся в этом примере при переходе от системы координат $Oxyz$ к $Ox'y'z'$. Действительно, поскольку рассматриваемое уравнение приводится к виду

$$(x' + \sqrt{2}y')^2 - 1 = 0,$$

то, преобразуя линейную функцию координат по аналогии с (2.10): $x' + \sqrt{2}y' = \sqrt{3}\,\dfrac{x' + \sqrt{2}y'}{\sqrt{3}}$, получим соответствующий вид уравнения:

$$3\left(\frac{x' + \sqrt{2}y'}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = 0.$$

Далее, полагая $\sin\psi = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ и $\cos\psi = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$, определим формулы преобразования координат при переходе от $O'x'y'z'$ к $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$:

$$\begin{cases} \tilde{x} = \dfrac{\sqrt{2}x' - y'}{\sqrt{3}}; \\ \tilde{y} = \dfrac{x' + \sqrt{2}y'}{\sqrt{3}}; \\ \tilde{z} = z'. \end{cases}$$

В системе координат $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ преобразуемое уравнение приводится к виду

$$\tilde{y}^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 0,$$

что соответствует каноническому уравнению пары параллельных плоскостей (каноническое уравнение 15, эскиз поверхности см. на рис. 20). Следовательно, система координат $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ является канонической для рассмотренного уравнения (2.9). Формулы преобразования координат, которое соответствует переходу от исходной системы координат $Oxyz$ к канонической $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$, имеют вид:

$$\begin{cases} \tilde{x} = \dfrac{2x - y + z}{\sqrt{6}}; \\ \tilde{y} = \dfrac{x + y - z}{\sqrt{3}}; \\ \tilde{z} = \dfrac{y + z}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Заметим, что формулы этого преобразования координат соответствуют повороту исходной системы координат относительно оси вращения, которая не параллельна ни одной из осей исходной системы координат.

Рекомендуемая литература

1. Сандаков Е.Б. Основы аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: МИФИ, 2005.

2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Высшая школа, 1998.

3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1999.

Евгений Борисович Сандаков

Владимир Петрович Трифоненков

Михаил Викторович Смоленцев

ПРИВЕДЕНИЕ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Учебно-методическое пособие

Редактор *М.В. Макарова*
Оригинал-макет изготовлен *С.В. Тялиной*

Подписано в печать 18.06.2009. Формат 60×84 1/16.
Уч.-изд. л. 2,0. Печ. л. 2,0. Тираж 500 экз. Изд. № 058-1. Заказ №

Московский инженерно-физический институт (государственный университет).
Типография МИФИ.
115409, Москва, Каширское ш., 31