

А. И. Рубан

# АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ИДЕНТИФИКАЦИЕЙ

Монография

Институт космических и информационных технологий



СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Сибирский федеральный университет

**А. И. Рубан**

# **АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ИДЕНТИФИКАЦИЕЙ**

Монография

Красноярск  
СФУ  
2015

УДК 681.513.7  
ББК 32.965.09  
Р821

**Р е ц е н з е н т ы:**

Г. А. Доррер, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой системотехники Сибирского государственного технологического университета;

И. В. Ковалёв, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой системного анализа и исследования операций Сибирского государственного аэрокосмического университета

**Рубан, А. И.**

Р821      Адаптивные системы управления с идентификацией : монография / А. И. Рубан. – Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2015. – 140 с.  
ISBN 978-5-7638-3194-8

Изложен новый простой метод синтеза управлений с обратной связью. В основе адаптивных систем с идентификацией лежит использование динамических моделей стохастических объектов. Задается (или находится из критериев оптимальности) структура разностной модели с точностью до параметров, и по ней строится модель с переменными параметрами. Параметры модели перестраиваются непрерывно по мере поступления новой информации об объекте. По модели из локальных критериев оптимальности вычисляются и подаются на объект управляющие воздействия. Особенно эффективно адаптивное управление с идентификацией для объектов с чистыми запаздываниями по управлению и измеряемым внешним воздействиям. Это, как правило, распределенные в пространстве объекты. Для таких достаточно сложных в управлении технических объектов удалось синтезировать и испытать алгоритмы адаптивного управления: нагревом металла в дуговых сталеплавильных печах, нагревом и охлаждением жидких сред, обжигом извести и клинкера во вращающихся печах.

Предназначена для магистрантов по направлению 27.04.03 «Системный анализ и управление» и аспирантов по специальности 05.13.01 «Системный анализ, управление и обработка информации».

**Электронный вариант издания см.:**  
**<http://catalog.sfu-kras.ru>**

**УДК 681.513.7**  
**ББК 32.965.09**

ISBN 978-5-7638-3194-8

© Сибирский федеральный  
университет, 2015

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                                           |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ПРЕДИСЛОВИЕ.....                                                                          | 4   |
| ВВЕДЕНИЕ.....                                                                             | 5   |
| 1. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ.....                                               | 10  |
| 1.1. Дискретные динамические модели стохастических объектов.....                          | 10  |
| 1.2. Рекурсивные модели.....                                                              | 14  |
| 1.3. Модели с использованием функций чувствительности.....                                | 19  |
| Упражнения.....                                                                           | 25  |
| 2. АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ<br>СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ СТОХАСТИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ..... | 26  |
| 2.1. Схема синтеза закона управления.....                                                 | 26  |
| 2.2. Примеры синтеза устройств управления<br>для простейших линейных систем.....          | 27  |
| 2.3. Синтез алгоритмов управления для линейных систем.....                                | 36  |
| 2.4. Алгоритмы адаптивного управления для нелинейных систем.....                          | 38  |
| 2.5. Стабилизация движения двухколесного экипажа.....                                     | 43  |
| 2.6. Адаптивное управление дугowymi сталеплавильными печами.....                          | 50  |
| Упражнения.....                                                                           | 58  |
| 3. АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ<br>ОБЪЕКТАМИ С ЧИСТЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ.....           | 59  |
| 3.1. Постановка задачи адаптивного управления.....                                        | 59  |
| 3.2. Управление динамическими системами<br>с чистым запаздыванием.....                    | 60  |
| 3.3. Примеры синтеза устройств управления.....                                            | 61  |
| 3.4. Управление температурным режимом жидких сред.....                                    | 68  |
| Упражнения.....                                                                           | 75  |
| 4. АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ<br>ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ.....                  | 76  |
| 4.1. Адаптивное управление процессом обжига извести<br>во вращающихся печах.....          | 76  |
| 4.2. Управление обжигом клинкера во вращающихся печах.....                                | 93  |
| 4.3. Схема адаптивного управления многомерными объектами.....                             | 103 |
| 5. АЛГОРИТМЫ АДАПТИВНОЙ ПЕРЕСТРОЙКИ<br>ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛЕЙ.....                            | 115 |
| 5.1. Алгоритмы квадратичных критериев.....                                                | 115 |
| 5.2. Подстройка робастных параметров.....                                                 | 125 |
| 5.3. Простейшие адаптивные алгоритмы.....                                                 | 129 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....                                                                           | 134 |
| СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....                                                                    | 135 |

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Под сильным впечатлением от первых результатов по созданию адаптивной системы управления с идентификацией и внедрению её в процесс прокатки труб на Первоуральском новотрубном заводе [В.7, В.8] автор монографии решил развить теорию таких систем применительно к более сложным динамическим объектам. В результате была написана монография [2.1]. В главе 2 настоящей работы изложен способ синтеза управлений, основанный на применении динамических моделей с перестраиваемыми параметрами и локальных критериев оптимальности при расчёте управляющих воздействий. Этот перспективный метод удалось внедрить в учебный процесс [2.2, глава 8] и расширить класс объектов адаптивного управления. Использование для распределенных в пространстве объектов динамических моделей в виде разностных уравнений с чистыми запаздываниями позволило существенно упростить процесс синтеза алгоритмов цифрового адаптивного управления. Результаты содержатся в данной монографии. Наличие простых примеров способствует лучшему пониманию свойств замкнутых систем управления.

## ВВЕДЕНИЕ

Усложнение условий, при которых решается задача управления, привело к созданию методов адаптивного управления [В.1–В.12], основанных на решении задач оптимизации. Оптимизация применяется как при синтезе структуры устройств управления, так и при непрерывной работе алгоритмов адаптации.

Появление в системах автоматического управления устройств адаптации обусловлено, в первую очередь, недостаточным количеством априорной и текущей информации об управляемом объекте и окружающей его среде. В адаптивных системах обработки информации и управления происходит приспособление к изменяющимся условиям и неизвестным характеристикам объекта. В теории адаптивных систем управления формируются подходы, направленные на улучшение качества систем за счет изменения структуры и параметров алгоритмов управления в процессе их функционирования.

Действие основных факторов, таких как многомерность, многосвязность, нелинейность, нестационарность, стохастичность, приводит к тому, что существующие методы построения систем управления не позволяют добиться требуемого качества их работы (см. таблицу).

Таблица

| Фактор сложности системы                                                                                                                         | Трудности, порождаемые фактором сложности      | Пути преодоления трудностей                                                                                                                        |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Большое число переменных входа, выхода и состояния объекта. Распределенность параметров объекта и среды                                          | Рост затрат на расчет и реализацию управления  | Упрощение модели объекта и цели управления (декомпозиция, агрегирование). Упрощение структуры алгоритма управления (децентрализация, иерархизация) |
| Широкая область изменения параметров объекта и условий его функционирования ( <i>неопределенность</i> )                                          | Снижение качества и потеря устойчивости систем | Введение контура адаптации                                                                                                                         |
| Стохастичность, нелинейность, нестационарность объекта и условий его функционирования; наличие чистых запаздываний по каналам вход-выход объекта | Снижение качества и потеря устойчивости систем | Усложнение структуры алгоритма управления. Адаптивная коррекция параметров                                                                         |
| Неполнота текущей информации об объекте и условиях его функционирования                                                                          | Снижение качества и потеря устойчивости систем | Введение наблюдателей и фильтров в алгоритмы управления. Адаптивное изменение характеристик и параметров устройств управления                      |

Наличие контура адаптации позволяет существенно улучшить показатели качества работы замкнутой системы управления.

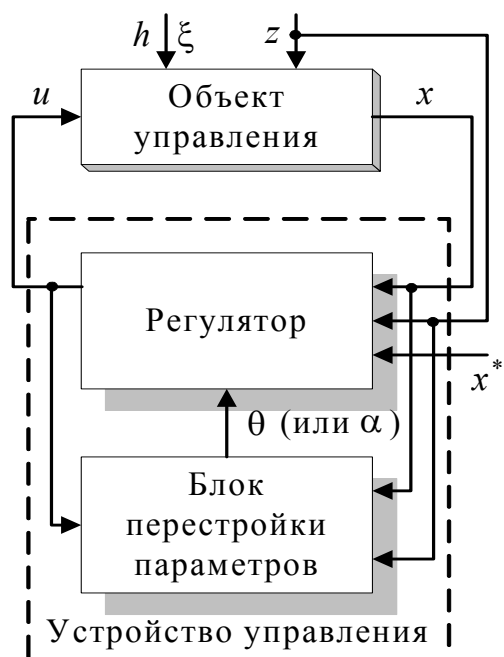


Рис. В.1

### Общая схема адаптивной системы управления (рис. В.1).

На рис. В.1 использованы обозначения:  $u$  – управляющее воздействие,  $z$  – измеряемое входное воздействие,  $h$  – неизмеряемое входное воздействие (часто имеет вид случайной помехи  $\xi$ ),  $x$  – измеряемый выход объекта,  $x^*$  – задающее воздействие,  $\theta$  (или  $\alpha$ ) – перестраиваемые параметры: 1)  $\theta$  – параметры регуляторов заданной структуры (например, ПИД регулятора); 2)  $\alpha$  – параметры моделей; в адаптивных системах с идентификатором регулятор синтезируется из критерия оптимальности с использованием модели прогноза.

В теории адаптивного управления существует два подхода к синтезу алгоритмов управления.

**Подход 1.** Задается или синтезируется структура регулятора (например, П, ПИ, ПИД и др., хорошо зарекомендовавшие себя на практике регуляторы) с точностью до параметров  $\theta$ .

Регулятор синтезируется на основе: 1) использования целевых условий; 2) теории инвариантности; 3) условий устойчивости (например, второго метода Ляпунова); 4) метода эталонной модели; 5) метода гиперустойчивости; 6) теории бинарных систем; 7) теории систем с разрывным управлением; 8) метода управления по вектору скорости; 9) минимаксного подхода; 10) использования П, ПИ, ПИД и др. регуляторов.

В контуре адаптации параметров регулятора  $\theta$  часто используются следующие алгоритмы: 1) квадратичного критерия (например, классического метода наименьших квадратов), его модификаций и обобщений (адаптивные); 2) проекционные (включая простейший адаптивный алгоритм и его модификации); 3) метода стохастической аппроксимации; 4) метода максимального правдоподобия (рекуррентные); 5) метода целевых неравенств; 6) метода скоростного градиента и др.

**Подход 2.** При проектировании математического обеспечения конкретной автоматической или автоматизированной системы управления технологическим процессом (АСУ ТП) возникает две большие проблемы.

Первая заключается в выборе и реализации сравнительно простого метода синтеза алгоритмов управления с обратной связью. При этом алгоритмы должны иметь минимальную сложность реализации их на управляющих вычислительных машинах, а также обеспечивать достаточно эффективное (например, по точностным показателям) управление объектами в реальном масштабе времени.

Вторая проблема состоит в выборе и реализации в управляющих вычислительных машинах эффективных алгоритмов перестройки структуры и параметров модели объекта, т. е. алгоритмов идентификации. Объединение в одной системе управления регулятора с обратной связью и идентификатора возродило новый класс систем управления, названный адаптивными системами с идентификаторами (АСИ) [В.7–В.9]. Идентификация происходит в реальном масштабе времени в темпе с процессом управления объектом. Регулятор с обратной связью синтезируется по модели объекта.

Будем рассматривать только дискретные уравнения объекта и модели. За счет этого получаемые алгоритмы идентификации и управления напрямую реализуемы на цифровой вычислительной технике.

На основе априорной информации задается структура модели объекта с точностью до параметров  $\alpha$ , а блок перестройки параметров (в соответствии с критерием оптимальности) непрерывно корректирует параметры модели. Далее с учетом модели из критерия оптимальности (обычно из локального критерия оптимальности) синтезируется структура регулятора. Здесь чаще всего реализуется один из численных алгоритмов минимизации (по искомым управлениям) локального показателя оптимальности. Расчет текущего управляющего воздействия  $u(t)$  происходит с учетом существующих на практике ограничений. Данный класс систем носит название адаптивных систем управления с идентификатором. Автор данной монографии считает его более мощным и более перспективным.

Задающим воздействием  $x^*$  может быть «желаемая траектория», поступающая, например, из системы управления более высокого уровня. Это может быть регламент технологического процесса (например, при выращивании кристаллов для получения полупроводников). Желаемая траектория иногда формируется как результат решения соответствующего разностного (для дискретных систем) или дифференциального уравнения с заданным воздействием (при использовании непрерывной модели объекта), например:  $x^*(t) = A_M x^*(t-1) + B_M \bar{r}(t-1)$ . Это уравнение называют заданной (эталонной) моделью. Здесь матрицы параметров  $A_M$ ,  $B_M$  и входное воздействие  $\bar{r}$  заданы. Такие системы управления называют «с эталонной моделью».

Целевые условия работы систем формируются (в последние 2–3 десятилетия) в виде локальных критериев оптимальности. Примеры:

$$MQ(x(t+1), x^*(t+1)) = \min, MQ(x(t+1), x^*(t+1)) \leq \Delta,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} MQ(x(t+1), x^*(t+1)) = \min, \lim_{t \rightarrow \infty} MQ(x(t+1), x^*(t+1)) \leq \Delta,$$

$$Q(y(t+1), x^*(t+1)) = \min, Q(y(t+1), x^*(t+1)) \leq \Delta.$$

Здесь  $M$  – оператор математического ожидания;  $x$  – выход объекта;  $y$  – выходная переменная модели объекта.

Реализация АСИ [В.7, В.8] позволяет осуществлять достаточно эффективное управление малоизученными объектами, для которых не были известны ни структура, ни параметры их моделей. Например, внедрение АСИ на одном прокатном стане Первоуральского новотрубного завода [В.7] обеспечило высокий экономический эффект за счет экономии металла и увеличения производительности, хотя для данного объекта использованы простейшие линейные статические модели, одношаговые адаптивные алгоритмы идентификации и простейшие алгоритмы управления. Исследование АСИ для данного объекта показало, что исключение из контура системы управления блока идентификации делает систему полностью неработоспособной.

В процессе реализации АСИ выяснилось также, что одни и те же алгоритмы работы АСИ можно применять для широкого спектра объектов различной природы. Это обстоятельство позволяет ставить задачу автоматизированного проектирования математического обеспечения АСИ. Существенное влияние на этот процесс оказывают методы синтеза алгоритмов управления с обратной связью и алгоритмов идентификации.

В настоящей монографии излагается достаточно простой метод (основанный в 1970–1990 гг.) синтеза управлений с обратной связью. Управляющие воздействия отыскиваются по той же схеме, по которой решаются задачи идентификации. Этот подход позволил существенно упростить процесс поиска структуры и параметров управления, упростить структуру управляющих устройств и добиться единообразия процессов идентификации и управления в АСИ.

В основе АСИ лежит использование модели объекта. Задается (или находится из критериев оптимальности) структура модели с точностью до параметров (см. п 1.1). Затем на её основе строится модель с переменными параметрами (см. пп. 1.2, 1.3), которые перестраиваются блоком идентификации непрерывно по мере поступления новой информации об объекте. При этом используются перечисленные ранее алгоритмы коррекции пара-

метров регулятора. Основные алгоритмы адаптивной идентификации представлены в главе 5.

В данной монографии проблема синтеза алгоритмов адаптивного управления с идентификацией охватывает важные для практики технические системы управления. Примером служит управление: нагревом металла в дуговых сталеплавильных печах (п. 2.6), нагревом и охлаждением жидких сред (п. 3.4), процессом обжига извести (п. 4.1) и клинкера (п. 4.2) во вращающихся печах.

Алгоритмы адаптивного управления с идентификацией используются и при обеспечении заданных температурных режимов в процессе получения полупроводников; стабилизации температуры, концентрации тока внутри гальванических ванн; максимизации скорости гальванопокрытия; в производстве протекторных заготовок шинного завода; в робототехнике. В указанных примерах уравнения движения объектов включают недоопределенные параметры, лежащие в известных конечных интервалах. В устройство адаптивного управления встраиваются блок адаптивной идентификации параметров моделей и схема синтеза по моделям структуры регуляторов.

Особенно эффективно адаптивное управление с идентификацией для объектов с чистыми запаздываниями по управлению и другим внешним воздействиям. Это, как правило, распределенные в пространстве объекты. Примером служит управление с Земли луноходами и марсоходами. Из-за большого расстояния запаздывают управляющие сигналы с Земли и измерения выходов и внешних воздействий объекта, поступающие на Землю. Управление некоторыми техническими распределёнными объектами представлено в гл. 3, 4 данной монографии.

# 1 | ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Поведение объектов в динамическом режиме описывается различными уравнениями [1.1–1.7]: обыкновенными дифференциальными, интегральными, интегро-дифференциальными; с запаздываниями; в частных производных и их дискретными аналогами [1.3]. В данной главе будем рассматривать сравнительно простые дискретные модели. Получаемые алгоритмы идентификации и управления напрямую реализуются на цифровой вычислительной технике. Дискретная модель подстраивается под объект в реальном масштабе времени при получении новых измерений его входа и выхода.

Дискретные модели [1.5–1.7] привязаны к номерам дискретных моментов реального времени, и поэтому основным аргументом для входных  $u(t)$  и выходных  $x(t), y(t)$  переменных является номер такта во времени  $t = 0, 1, 2, \dots$ . Например, линейное и нелинейное разностные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}x(t) &= A x(t-1) + B u(t-1), \quad t = 1, 2, \dots, x(0) = x_0; \\x(t) &= f(x(t-1), u(t-1), t-1, a), \quad t = 1, 2, \dots, x(0) = x_0.\end{aligned}$$

## 1.1. Дискретные динамические модели стохастических объектов

Считаем, что одномерный объект описывается дискретным уравнением

$$x(t) = a x(t-1) + b u(t-1) + c e(t-1) + e(t), \quad t = 1, 2, \dots \quad (1.1.1)$$

Здесь  $x, u$  – измеряемые скалярные, выход и вход объекта;  $e(t)$  – некоррелированная во времени центрированная помеха – дискретный «белый» шум;  $c e(t-1) + e(t) = \xi(t)$  – коррелированная (окрашенная) помеха;  $a, b, c$  – неизвестные параметры.

Расчет оценок  $\alpha(t)$  вектора параметров  $(a, b, c)^T$  производит идентификатор на основе информации (выборки входов и выходов объекта), поступившей к моменту времени  $t$ :  $x(t)$ ;  $x(t-1)$ ,  $u(t-1)$ ;  $x(t-2)$ ,  $u(t-2)$ ; ....

Обозначим через  $y(t)$  выход в модели в момент времени  $t$ .

Оптимальная (в смысле минимума среднего квадратичного значения невязки  $\varepsilon(t) = x(t) - y(t)$ :  $M\{\varepsilon^2(t)\} = \min$ ) структура модели [1.5, 1.7] имеет вид

$$y(t) = \hat{a}x(t-1) + \hat{b}u(t-1) + \hat{c}(x(t-1) - y(t-1)). \quad (1.1.2)$$

При этом невязка  $\varepsilon(t)$  между выходами объекта и модели обладает теми же свойствами, что и помеха  $e(t)$ , т. е.  $\varepsilon(t)$  – некоррелированная во времени центрированная случайная величина, дисперсия которой равна дисперсии помехи  $e(t)$ . Следовательно, объект (1.1.1) с помощью модели (1.1.2) удастся описать только с точностью до помехи  $e(t)$ .

Структуру уравнения модели (1.1.2) можно получить из уравнения объекта (1.1.1), сделав замену  $e(t)$  на  $[x(t) - y(t)]$ ,  $e(t-1)$  на  $[x(t-1) - y(t-1)]$  и переобозначив параметры объекта  $a, b, c$  на параметры  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$  оптимальной модели. Эту схему построения оптимальной структуры модели линейного объекта

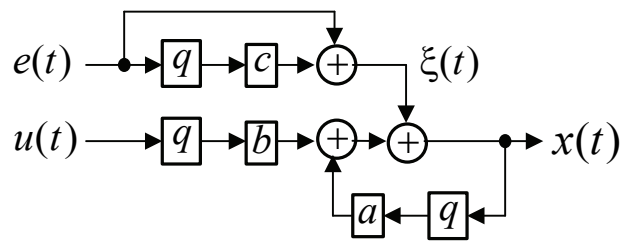


Рис. 1.1.1

будем применять для построения субоптимальной структуры модели нелинейных стохастических объектов. Заметим, что окрашенная помеха  $\xi(t) = ce(t-1) + e(t)$  приложена к правой части уравнения объекта (1.1.1) (рис. 1.1.1);  $q$  – оператор запаздывания сигнала на такт.

Если даже некоррелированная помеха  $e(t)$  приложена ко входу объекта (рис. 1.1.2)

$$x(t) = ax(t-1) + b[u(t-1) + e(t-1)], \quad (1.1.3)$$

то оптимальная структура модели имеет вид

$$y(t) = \hat{a}y(t-1) + \hat{b}u(t-1), \quad t = 1, 2, \dots \quad (1.1.4)$$

Эта модель всегда с обратной связью по  $y$ , в то время как модель (1.1.2) будет либо с обратной связью по выходной координате  $y$ , когда помеха  $\xi(t)$  окрашена ( $c \neq 0$ ), либо без обратной связи по  $y$ , когда помеха  $\xi(t)$  является «белым» шумом (т. е.  $\xi(t) = e(t)$ ).

Более общее по сравнению с (1.1.1) линейное уравнение объекта имеет вид

$$x(t) = \sum_{i=1}^n a_i x(t-i) + \sum_{j=1}^m b_j u(t-j) + \sum_{k=1}^q c_k e(t-k) + e(t). \quad (1.1.5)$$

Оптимальная структура модели также линейная и получается из (1.1.5) заменой  $e(p)$  на  $(x(p) - y(p))$  и параметров  $b_1, \dots, b_m, \dots, c_1, \dots, c_q)^T$  объекта на параметры  $\alpha = (\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_m, \dots, \hat{c}_1, \dots, \hat{c}_q)^T$  модели:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \hat{a}_i x(t-i) + \sum_{j=1}^m \hat{b}_j u(t-j) + \sum_{k=1}^q \hat{c}_k [x(t-k) - y(t-k)]. \quad (1.1.6)$$

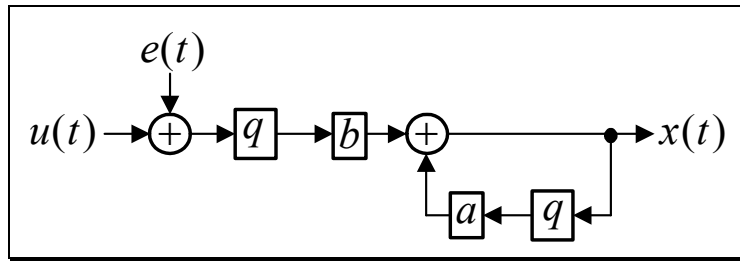


Рис. 1.1.2

Если помеха  $\xi(t)$  не окрашена, то последняя группа слагаемых в (1.1.6) отсутствует и модель не имеет обратной связи по  $y$ :

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \hat{a}_i x(t-i) + \sum_{j=1}^m \hat{b}_j u(t-j). \quad (1.1.7)$$

Если в этой модели (с оптимальной её структурой) удалось так настроить параметры, что они стали равны истинным параметрам объекта (т. е.  $\hat{a}_i = a_i, i = \overline{1, n}; \hat{b}_j = b_j, j = \overline{1, m}$ ), то из (1.1.7) и из уравнения объекта получаем, что

$$x(t) - y(t) = e(t), \quad (1.1.8)$$

т. е. после построения оптимальной модели рассогласование между выходами объекта и модели равно помехе  $e(t)$ . Точнее модель построить нельзя.

Аналогичные результаты имеют место, если в (1.1.5) основные переменные  $x, u, e$  являются векторами, а параметры – матрицами параметров.

Линейные разностные уравнения объекта могут по сравнению с (1.1.5) содержать интегральные суммы, чистые запаздывания по времени и т. п. Схема построения оптимальной модели не меняется.

Рассмотрим пример. Объект описывается уравнением

$$x(t) = ax(t-1) + bu(t-1) + c_1 e(t-1) + c_2 e(t-\tau) + e(t), \quad (1.1.9)$$

$$t = 1, 2, \dots, \tau > 1,$$

с чистым запаздыванием  $\tau$  в линейном фильтре для окрашенной помехи

$$\xi(t) = c_1 e(t-1) + c_2 e(t-\tau) + e(t).$$

Делаем в (1.1.9) замену переменных  $e(p)$  на  $[x(p) - y(p)]$  и параметров объекта на параметры модели и получаем динамическое уравнение модели

$$y(t) = \hat{a}x(t-1) + \hat{b}u(t-1) + \hat{c}_1[x(t-1) - y(t-1)] + \hat{c}_2[x(t-\tau) - y(t-\tau)]. \quad (1.1.10)$$

Это разностное уравнение с чистым запаздыванием по координате  $y$ . Оно переходит в обыкновенное уравнение без обратной связи по  $y$  (с входами модели  $x, u$  и выходом  $y$ ):

$$y(t) = \hat{a}x(t-1) + \hat{b}u(t-1),$$

если вместо окрашенной помехи на объект действует (при  $c_1 = c_2 = 0$ ) дискретный «белый» шум  $e(t)$ .

Для нелинейного объекта с линейным фильтром для аддитивной окрашенной помехи  $\xi(t)$

$$x(t) = f(x(t-1), u(t-1), a) + ce(t-1) + e(t) \quad (1.1.11)$$

после замены  $e(t-1)$  на  $[x(t-1) - y(t-1)]$ , а параметров объекта  $a, c$  на параметры модели  $\hat{a}, \hat{c}$  получаем субоптимальную структуру – модель объекта – в следующем виде:

$$y(t) = f(x(t-1), u(t-1), \hat{a}) + \hat{c}(x(t-1) - y(t-1)). \quad (1.1.12)$$

При воздействии дискретного «белого» шума  $e(t)$  (в окрашенной помехе  $\xi(t)$  надо положить  $c = 0$ ) в модели (1.1.12) исчезает обратная связь по координате  $y$ , и субоптимальная структура модели приобретает более простой вид

$$y(t) = f(x(t-1), u(t-1), \hat{a}). \quad (1.1.13)$$

Если в объекте имеется нелинейный фильтр для помехи  $\xi(t)$ , т. е.

$$x(t) = f_1(x(t-1), u(t-1), a) + f_2(c, e(t-1)) + e(t), \quad (1.1.14)$$

то модель объекта имеет следующую структуру:

$$y(t) = f_1(x(t-1), u(t-1), \hat{a}) + f_2(\hat{c}, x(t-1) - y(t-1)). \quad (1.1.15)$$

Модель построена по той же схеме, что и для линейных объектов. Эта модель не оптимальная, но её можно брать для дальнейших расчётов. Называть её будем субоптимальной моделью. Остается лишь на базе выбранной структуры модели оптимально распорядиться ее параметрами.

## 1.2. Рекурсивные модели

При синтезе модели с переменными параметрами остановимся на двух подходах. Подход 1 рассмотрен в п. 1.2, и он даёт так называемую рекурсивную модель. Подход 2 – с использованием функций чувствительности – представлен в п. 1.3.

Рекурсивная модель является преобладающей в современной теории и практике адаптивной идентификации и, соответственно, адаптивного управления [1.5, 1.7]. В каждый момент времени  $t$  в моделях (1.1.2), (1.1.6), (1.1.10), (1.1.12), (1.1.15) обратная связь по координате  $y$  своеобразно разрывается (без потери общности модели). Достигается это за счёт того, что фазовые координаты правой части уравнения модели берутся зависящими не от искомым параметров в момент  $t$  (как это есть на самом деле), а от известных параметров, полученных  $y$  предыдущие моменты времени.

Берём для примера оптимальную модель (1.1.2)

$$y(t) = \hat{a}x(t-1) + \hat{b}u(t-1) + \hat{c}(x(t-1) - y(t-1)).$$

Переменные  $y(t)$  и  $y(t-1)$  зависят (явно и неявно) от вектора параметров  $\alpha = (\hat{a}, \hat{b}, \hat{c})^T$ . Этот факт отразим следующим образом:  $y(t) \equiv y(t, \alpha)$ ,  $y(t-1) \equiv y(t-1, \alpha)$ . С учётом этого обозначения модель (1.1.2) приобретает вид

$$y(t, \alpha) = \hat{a}x(t-1) + \hat{b}u(t-1) + \hat{c}[x(t-1) - y(t-1, \alpha)].$$

Переходим теперь к переменным параметрам, например, к  $\alpha(t)$

$$y(t, \alpha(t)) = \hat{a}(t)x(t-1) + \hat{b}(t)u(t-1) + \hat{c}(t)[x(t-1) - y(t-1, \alpha(t))].$$

Неудобство работы с этим уравнением при расчёте параметров  $\alpha(t)$  обусловлено зависимостью от  $\alpha(t)$  выхода модели  $y(t-1, \alpha(t))$ .

В  $y(t-1, \alpha(t))$  заменяем параметры  $\alpha(t)$  на параметры  $\alpha(t-1)$ , уже полученные в предыдущий момент времени. Теперь уравнение принимает вид

$$y(t, \alpha(t)) \approx \hat{a}(t)x(t-1) + \hat{b}(t)u(t-1) + \hat{c}(t)[x(t-1) - y(t-1, \alpha(t-1))]$$

Оно приближённое. Правую часть (так как она не совпадает с  $y(t, \alpha(t))$ ) этого уравнения обозначим в виде  $y(t | \alpha(t))$ :

$$y(t | \alpha(t)) = \hat{a}(t)x(t-1) + \hat{b}(t)u(t-1) + \hat{c}(t)[x(t-1) - y(t-1, \alpha(t-1))].$$

Для унификации выходных переменных в правой части этого уравнения заменяем  $y(t-1, \alpha(t-1))$  на  $y(t-1 | \alpha(t-1))$ . Итоговая модель приобретает вид

$$y(t | \alpha(t)) = \hat{a}(t)x(t-1) + \hat{b}(t)u(t-1) + \hat{c}(t)[x(t-1) - y(t-1 | \alpha(t-1))], \quad (1.2.1)$$

и её называют рекурсивной моделью.

Правая часть рекурсивной модели **линейно** и **явно** зависит от искоемых параметров  $\alpha(t)$ . Рядом с параметрами стоят известные (измеренные или вычисленные) переменные:  $x(t-1)$ ,  $u(t-1)$ ,  $\hat{e}(t-1) = x(t-1) - y(t-1 | \alpha(t-1))$ , т. е. правая часть уравнения (1.2.1) представляет собой линейную комбинацию известных функций

$$y(t | \alpha(t)) = (\varphi(t), \alpha(t)) \equiv (\alpha(t), \varphi(t)) \equiv \varphi^T(t) \alpha(t) \equiv \alpha^T(t) \varphi(t), \quad (1.2.2)$$

$$\varphi(t) = (x(t-1), u(t-1), \hat{e}(t-1))^T, \quad \alpha(t) = (\hat{a}(t), \hat{b}(t), \hat{c}(t))^T,$$

$$\hat{e}(t-1) = x(t-1) - y(t-1 | \alpha(t-1)).$$

Рекурсивная модель (1.2.1), хотя и похожа на оптимальную модель (1.1.1), но принципиально отличается от неё. В модель (1.2.1) переменные параметры  $\alpha(t)$  входят явно, и они вычисляются на основе информации (о входе и выходе объекта), поступившей до момента времени  $t$  (включая и этот момент):  $x(t); x(t-1), u(t-1); \dots$

За счёт переменных параметров существенно повышаются возможности модели при воспроизведении достаточно сложных траекторий. Например, с помощью простейших линейных разностных моделей с переменными параметрами можно воспроизвести траектории, соответствующие решению более сложных по структуре линейных и нелинейных разностных уравнений с постоянными параметрами.

Алгоритмы адаптивной идентификации параметров  $\alpha(t)$  представлены в главе 5.

Перестройка параметров рекурсивной модели (1.2.2) на основе простейшего адаптивного алгоритма выглядит следующим образом:

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(t-1) + \Delta(t)x(t-1), \quad (1.2.3)$$

$$\hat{b}_j(t) = \hat{b}_j(t-1) + \Delta(t)u(t-1),$$

$$\hat{c}(t) = \hat{c}(t-1) + \Delta(t)\hat{e}(t-1), \quad t = 1, 2, \dots,$$

$$\Delta(t) = \frac{x(t) - y(t | \alpha(t-1))}{x^2(t-1) + u^2(t-1) + \hat{e}^2(t-1)},$$

$$y(t | \alpha(t-1)) = \hat{a}(t-1)x(t-1) + \hat{b}(t-1)u(t-1) + \hat{c}(t-1)\hat{e}(t-1),$$

$$\hat{e}(t-1) = x(t-1) - y(t-1 | \alpha(t-1)).$$

По аналогии с (1.2.3) строим рекурсивные линейные модели, соответствующие оптимальным линейным моделям (1.1.6), (1.1.7), (1.1.10) :

$$\begin{aligned} y(t | \alpha(t)) &= \sum_{i=1}^n \hat{a}_i(t)x(t-i) + \sum_{j=1}^m \hat{b}_j(t)u(t-j) + \\ &+ \sum_{k=1}^q \hat{c}_k(t)\hat{e}(t-k) = \varphi^T(t)\alpha(t), \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

$$\hat{e}(t-k) = x(t-k) - \bar{y}(t-k | \alpha(t-k));$$

$$y(t | \alpha(t)) = \sum_{i=1}^n \hat{a}_i(t)x(t-i) + \sum_{j=1}^m \hat{b}_j(t)u(t-j) = \varphi^T(t)\alpha(t); \quad (1.2.5)$$

$$\begin{aligned} y(t | \alpha(t)) &= \hat{a}(t)x(t-1) + \hat{b}(t)u(t-1) + \hat{c}_1(t)\hat{e}(t-1) + \\ &+ \hat{c}_2(t)\hat{e}(t-\tau) = \varphi^T(t)\alpha(t), \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

$$\hat{e}(t-1) = x(t-1) - y(t-1 | \alpha(t-1)),$$

$$\hat{e}(t-\tau) = x(t-\tau) - y(t-\tau | \alpha(t-\tau)) \text{ или}$$

$$\hat{e}(t-\tau) = x(t-\tau) - y(t-\tau | \alpha(t-1)).$$

Приводим соответственно для моделей (1.2.4) – (1.2.6) простейший адаптивный алгоритм перестройки их параметров

$$\hat{a}_i(t) = \hat{a}_i(t-1) + \Delta(t)x(t-i), \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.2.7)$$

$$\hat{b}_j(t) = \hat{b}_j(t-1) + \Delta(t)u(t-j), \quad j = \overline{1, m},$$

$$\hat{c}_k(t) = \hat{c}_k(t-1) + \Delta(t)\hat{e}(t-k), \quad k = \overline{1, q}, \quad t = 1, 2, \dots,$$

$$\Delta(t) = \frac{x(t) - y(t | \alpha(t-1))}{\sum_{i=1}^n x^2(t-i) + \sum_{j=1}^m u^2(t-j) + \sum_{k=1}^q \hat{e}^2(t-k)},$$

$$y(t | \alpha(t-1)) = \sum_{i=1}^n \hat{a}_i(t-1)x(t-i) + \sum_{j=1}^m \hat{b}_j(t-1)u(t-j) + \sum_{k=1}^q \hat{c}_k(t-1)\hat{e}(t-k),$$

$$\hat{e}(t-k) = x(t-k) - \bar{y}(t-k | \alpha(t-k));$$

$$\hat{a}_i(t) = \hat{a}_i(t-1) + \Delta(t)x(t-i), \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.2.8)$$

$$\hat{b}_j(t) = \hat{b}_j(t-1) + \Delta(t)u(t-j), \quad j = \overline{1, m}, \quad t = 1, 2, \dots,$$

$$\Delta(t) = \frac{x(t) - y(t | \alpha(t-1))}{\sum_{i=1}^n x^2(t-i) + \sum_{j=1}^m u^2(t-j)},$$

$$y(t | \alpha(t-1)) = \sum_{i=1}^n \hat{a}_i(t-1)x(t-i) + \sum_{j=1}^m \hat{b}_j(t-1)u(t-j);$$

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(t-1) + \Delta(t)x(t-1), \quad (1.2.9)$$

$$\hat{b}_j(t) = \hat{b}_j(t-1) + \Delta(t)u(t-1),$$

$$\hat{c}_1(t) = \hat{c}_1(t-1) + \Delta(t)\hat{e}(t-1),$$

$$\hat{c}_2(t) = \hat{c}_2(t-1) + \Delta(t)\hat{e}(t-\tau), \quad t = 1, 2, \dots,$$

$$\Delta(t) = \frac{x(t) - y(t | \alpha(t-1))}{x^2(t-1) + u^2(t-1) + \hat{e}^2(t-1) + \hat{e}^2(t-\tau)},$$

$$y(t | \alpha(t-1)) = \hat{a}(t-1)x(t-1) + \hat{b}(t-1)u(t-1) +$$

$$+ \hat{c}_1(t-1)\hat{e}(t-1) + \hat{c}_2(t-1)\hat{e}(t-\tau),$$

$$\hat{e}(t-1) = x(t-1) - y(t-1 | \alpha(t-1)),$$

$$\hat{e}(t-\tau) = x(t-\tau) - y(t-\tau | \alpha(t-\tau)) \quad \text{или}$$

$$\hat{e}(t-\tau) = x(t-\tau) - y(t-\tau | \alpha(t-1)).$$

Нелинейные модели (1.1.12), (1.1.13), (1.1.15) представим в обобщенном виде

$$y(t) = f(x(t-1), u(t-1), x(t-1) - y(t-1), \alpha). \quad (1.2.10)$$

С учетом этого рекурсивная модель приобретает вид

$$\begin{aligned} y(t | \alpha(t)) &= f(\varphi(t), \alpha(t)), \\ \varphi(t) &= (x(t-1), u(t-1), \hat{e}(t-1)) \\ \hat{e}(t-1) &= x(t-1) - y(t-1 | \alpha(t-1)). \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

Линеаризуем ее по  $\alpha$  в точке  $\alpha(t-1)$  и получаем возможность воспользоваться алгоритмами главы 5. Например, алгоритм Б. Т. Поляка [5.1] записывается в виде

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(t) &= \bar{\alpha}(t-1) + \bar{\gamma}(t) p^{-1}(t) \varepsilon(t) \nabla_{\alpha} y(t | \bar{\alpha}(t-1)), \\ \varepsilon(t) &= x(t) - y(t | \bar{\alpha}(t-1)), \\ \alpha(t) &= \alpha(t-1) + t^{-1} (\bar{\alpha}(t) - \alpha(t-1)), \quad t = 1, 2, \dots, \\ \bar{\gamma}(t) &= \gamma t^{-1/2}, \quad 0 < \gamma. \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

Применим также простейший адаптивный алгоритм [2.2, 5.6]:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \alpha(t-1) + \frac{x(t) - y(t | \alpha(t-1))}{(\nabla_{\alpha} y(t | \alpha(t-1)))^T \nabla_{\alpha} y(t | \alpha(t-1))} \nabla_{\alpha} y(t | \alpha(t-1)) = \\ &= \alpha(t-1) + \frac{x(t) - f(\varphi(t), \alpha(t-1))}{(\nabla_{\alpha} f(\varphi(t), \alpha(t-1)))^T \nabla_{\alpha} f(\varphi(t), \alpha(t-1))} \nabla_{\alpha} f(\varphi(t), \alpha(t-1)), \\ t &= 1, 2, \dots; \quad \nabla_{\alpha} f - \text{градиент (вектор-столбец) от } f \text{ по } \alpha. \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

На базе нелинейной модели (1.1.15) получаем следующую рекурсивную модель:

$$\begin{aligned} y(t | \alpha(t)) &= f_1(x(t-1), u(t-1), \hat{a}(t)) + f_2(\hat{e}(t-1), \hat{c}(t)), \\ y(t | \alpha(t-1)) &= f_1(x(t-1), u(t-1), \hat{a}(t-1)) + f_2(\hat{e}(t-1), \hat{c}(t-1)) \equiv \\ &\equiv f_1(\cdot) + f_2(\cdot), \\ \hat{e}(t-1) &= x(t-1) - y(t-1 | \alpha(t-1)). \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

Простейший адаптивный алгоритм перестройки параметров имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{a}(t) &= \hat{a}(t-1) + \Delta(t) \nabla_{\hat{a}} f_1(\cdot), \quad \hat{c}(t) = \hat{c}(t-1) + \Delta(t) \nabla_{\hat{c}} f_2(\cdot), \\ \Delta(t) &= \frac{x(t) - f_1(\cdot) - f_2(\cdot)}{(\nabla_{\hat{a}} f_1(\cdot))^T \nabla_{\hat{a}} f_1(\cdot) + (\nabla_{\hat{c}} f_2(\cdot))^T \nabla_{\hat{c}} f_2(\cdot)}, \quad t = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

### 1.3. Модели с использованием функций чувствительности

Остановимся для примера на оптимальной структуре модели (1.1.2) для объекта (1.1.1)

$$y(t) = \hat{a}x(t-1) + \hat{b}u(t-1) + \hat{c}[x(t-1) - y(t-1)]. \quad (1.3.1)$$

Выходы модели  $y(t)$  и  $y(t-1)$  (явно и неявно) зависят от параметров  $\alpha = (\hat{a}, \hat{b}, \hat{c})^T$ . Этот факт, как и в п. 1.2, отразим следующим образом:  $y(t) \equiv y(t, \alpha)$ ,  $y(t-1) \equiv y(t-1, \alpha)$ . С учётом этого обозначения модель (1.3.1) приобретает вид

$$y(t, \alpha) = \hat{a}x(t-1) + \hat{b}u(t-1) + \hat{c}[x(t-1) - y(t-1, \alpha)]. \quad (1.3.2)$$

Построим модель  $\bar{y}(t|\alpha(t))$  (с переменными параметрами) с использованием функций чувствительности  $w(t|\alpha(t-1)) = \nabla_{\alpha} \bar{y}(t|\alpha(t-1))$ , расположенных в виде вектора-столбца. Функции чувствительности показывают, как изменение выхода модели связано с изменением параметров.

Параметры модели  $\alpha(t)$  в момент времени  $t$  (как и в п. 1.2) корректируются на основе следующей информации:  $x(t)$ ;  $x(t-1), u(t-1)$ ;  $x(t-2), u(t-2)$ ; ... . Такая ситуация присуща адаптивным системам управления с идентификацией. В момент  $t$  только после построения модели рассчитывается и подается на вход объекта управляющее воздействие  $u(t)$ . Управление  $u(t)$  и новое измерение выхода объекта  $x(t+1)$  (реакции объекта на предшествующие управления) будут участвовать в расчете параметров модели  $\alpha(t+1)$  для следующего момента времени.

Линеаризуем выход модели (1.3.1) относительно параметров  $\alpha$  в точке  $\alpha(t-1)$ :

$$\begin{aligned} y(t, \alpha(t)) &\approx y(t, \alpha(t-1)) + w_{\hat{a}}(t, \alpha(t-1))\Delta\hat{a}(t) + w_{\hat{b}}(t, \alpha(t-1))\Delta\hat{b}(t) + \\ &+ w_{\hat{c}}(t, \alpha(t-1))\Delta\hat{c}(t) = y(t, \alpha(t-1)) + w^T(t, \alpha(t-1))\Delta\alpha(t), \quad (1.3.3) \\ w(t, \alpha(t-1)) &= \nabla_{\alpha} y(t, \alpha(t-1)), \quad \Delta\alpha(t) = \alpha(t) - \alpha(t-1). \end{aligned}$$

Здесь  $y(t, \alpha(t-1))$  – выход модели в момент времени  $t$  при значениях параметров, полученных в предыдущий момент времени  $t-1$ :

$$\begin{aligned} y(t, \alpha(t-1)) &= \hat{a}(t-1)x(t-1) + \hat{b}(t-1)u(t-1) + \\ &+ \hat{c}(t-1)[x(t-1) - y(t-1, \alpha(t-1))]. \quad (1.3.4) \end{aligned}$$

Правая часть в уравнении (1.3.3) является выходом модели  $\bar{y}(t | \alpha(t))$  с использованием функций чувствительности:

$$\begin{aligned} \bar{y}(t | \alpha(t)) = y(t, \alpha(t-1)) + w_{\hat{a}}(t, \alpha(t-1))\Delta\hat{a}(t) + w_{\hat{b}}(t, \alpha(t-1))\Delta\hat{b}(t) + \\ + w_{\hat{c}}(t, \alpha(t-1))\Delta\hat{c}(t) = y(t, \alpha(t-1)) + w^T(t, \alpha(t-1))\Delta\alpha(t), \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

Для обеспечения замкнутости решения входящая в (1.3.5) переменная  $y(t, \alpha(t-1))$  рассчитывается по уравнению (1.3.4), в котором вместо  $y(t-1, \alpha(t-1))$  ставим  $\bar{y}(t-1 | \alpha(t-1))$ , полученную на предыдущем такте, т. е.

$$\begin{aligned} y(t, \alpha(t-1)) = \hat{a}(t-1)x(t-1) + \hat{b}(t-1)u(t-1) + \\ + \hat{c}(t-1)[x(t-1) - \bar{y}(t-1 | \alpha(t-1))]; \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

Заметим, что вначале модель (1.3.5) применяется при нахождении параметров  $\alpha(t)$ , а затем найденные параметры подставляются в (1.3.5). Далее выход модели  $\bar{y}(t | \alpha(t))$  используется на следующем такте  $t+1$  при вычислении  $y(t+1, \alpha(t))$  по формуле (1.3.6):

$$y(t+1, \alpha(t)) = \hat{a}(t)x(t) + \hat{b}(t)u(t) + \hat{c}(t)[x(t) - \bar{y}(t | \alpha(t))].$$

Для упрощения записи уравнений чувствительности вводим обозначение:

$$w(t, \alpha(t-1)) \equiv w(t).$$

Функции чувствительности удовлетворяют разностным уравнениям чувствительности:

$$\begin{aligned} w_{\hat{a}}(t) &= -\hat{c}(t-1)w_{\hat{a}}(t-1) + x(t-1), \quad w_{\hat{a}}(0) = 0, \dots, \quad t = 1, 2, \dots, \\ w_{\hat{b}}(t) &= -\hat{c}(t-1)w_{\hat{b}}(t-1) + u(t-1), \quad w_{\hat{b}}(0) = 0, \quad t = 1, 2, \dots, \\ w_{\hat{c}}(t) &= -\hat{c}(t-1)w_{\hat{c}}(t-1) + [x(t-1) - \bar{y}(t-1 | \alpha(t-1))], \quad w_{\hat{c}}(0) = 0, \quad t = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

Каждое уравнение чувствительности получаем дифференцированием уравнения модели по соответствующему параметру. В правой части уравнения модели (1.3.1) в явном виде присутствует интересующий параметр, дифференцирование по нему дает возмущающее воздействие в уравнениях чувствительности (1.3.4). Выход модели  $y(t-1)$  также (но неявно) зависит от соответствующего параметра – дифференцирование этого слагаемого дает в правой части (1.3.4) компоненту  $[-\hat{c}w]$ .

Для расчета параметров модели  $\alpha(t)$  в момент  $t$  используем рекуррентные алгоритмы (см. гл. 5). В результате алгоритм (5.1.13) квадратич-

ного критерия с экспоненциальным забыванием информации приобретает вид

$$\alpha(t) = \alpha(t-1) + \gamma(t)[x(t) - y(t, \alpha(t-1))]$$

$$\gamma(t) = \frac{\Gamma_{t-1}w(t)}{p_t\lambda + w^T(t)\Gamma_{t-1}w(t)}, \quad (1.3.8)$$

$$\Gamma_t = [E - \gamma(t)w^T(t)]\Gamma_{t-1}\lambda^{-1}, \quad t = t_0 + 1, t_0 + 2, \dots$$

Аналогично записываем простой алгоритм (5.1.14) Б. Т. Поляка:

$$\bar{\alpha}(t) = \bar{\alpha}(t-1) + \bar{\gamma}(t)p_t^{-1}(t)w(t)[x(t) - y(t, \bar{\alpha}(t-1))],$$

$$\alpha(t) = \alpha(t-1) + t^{-1}(\bar{\alpha}(t) - \alpha(t-1)), \quad t = 1, 2, \dots, \quad (1.3.9)$$

$$\bar{\gamma}(t) = \gamma t^{-1/2}, \quad \gamma > 0;$$

простейший адаптивный алгоритм (5.3.4) п. 5.3:

$$\alpha(t) = \alpha(t-1) + \frac{x(t) - y(t, \alpha(t-1))}{w^T(t)w(t)}w(t), \quad t = 1, 2, \dots; \quad (1.3.10)$$

алгоритм (5.1.17) оценивания нестационарных параметров

$$a(t) = F(a(t-1)) + v(t)$$

объекта:

$$\alpha(t) = F(\alpha(t-1)) + \gamma(t)[x(t) - y(t, \alpha(t-1))], \quad (1.3.11)$$

$$\gamma(t) = \frac{\Gamma_{t-1}w(t)}{p_t\lambda + w^T(t)\Gamma_{t-1}w(t)},$$

$$\Gamma_t = [E - \gamma(t)w^T(t)]\Gamma_{t-1}\lambda^{-1} + V(t), \quad t = t_0 + 1, t_0 + 2, \dots;$$

алгоритм (5.2.9):

$$\alpha(t) = \alpha(t-1) + \gamma(t)\varepsilon(t), \quad \varepsilon(t) = x(t) - y(t, \alpha(t-1)), \quad (1.3.12)$$

$$\gamma(t) = \frac{\Gamma_{t-1}w(t)}{k_t\lambda + w^T(t)\Gamma_{t-1}w(t)},$$

$$\Gamma_t = [E - \gamma(t)w^T(t)]\Gamma_{t-1}\lambda^{-1}, \quad t = t_0 + 1, t_0 + 2, \dots;$$

$$a) k_t = p_t |\varepsilon(t)|,$$

$$б) k_t = p_t |\varepsilon(t)|^{2-\mu},$$

$$\hat{a}) k_t = \begin{cases} p_t, & |\varepsilon(t)| \leq \Delta, \\ p_t |\varepsilon(t)|^{-1} \Delta, & |\varepsilon(t)| > \Delta; \end{cases}$$

алгоритм (5.2.10):

$$\alpha(t) = \alpha(t-1) + \gamma(t)\psi'(\varepsilon(t)), \quad \varepsilon(t) = x(t) - y(t, \alpha(t-1)),$$

$$\gamma(t) = \frac{\Gamma_{t-1}w(t)}{p_t\lambda + w^T(t)\Gamma_{t-1}w(t)}, \quad (1.3.13)$$

$$\Gamma_t = [E - \gamma(t)w^T(t)]\Gamma_{t-1}\lambda^{-1}, \quad t = t_0 + 1, t_0 + 2, \dots$$

и алгоритм (5.2.12):

$$\bar{\alpha}(t) = \bar{\alpha}(t-1) + \bar{\gamma}(t)w(t)\psi'(\varepsilon(t)), \quad \varepsilon(t) = x(t) - y(t, \bar{\alpha}(t-1)),$$

$$\alpha(t) = \alpha(t-1) + t^{-1}(\bar{\alpha}(t) - \alpha(t-1)), \quad t = 1, 2, \dots, \quad (1.3.14)$$

$$\bar{\gamma}(t) = \gamma t^{-1/2}, \quad \gamma > 0$$

расчета робастных параметров модели.

Для других типов моделей (1.1.6), (1.1.7), (1.1.10), (1.1.12), (1.1.15) алгоритмы расчета параметров (1.3.5)–(1.3.11) не меняются. Необходимо лишь по выбранной модели рассчитывать свой выход модели  $y(t, \alpha(t-1))$  и свои функции чувствительности  $w(t)$ . На последнем вопросе остановимся подробнее.

Наиболее простой среди вышеуказанных является оптимальная структура модели без обратной связи (1.1.7):

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \hat{a}_i x(t-i) + \sum_{j=1}^m \hat{b}_j u(t-j). \quad (1.3.15)$$

Функции чувствительности равны соответственно  $x, u$  (отпадает необходимость решать уравнения чувствительности):

$$w_{\hat{a}_i}(t) = x(t-i), \quad i = \overline{1, n}, \quad w_{\hat{b}_j}(t) = u(t-j), \quad j = \overline{1, m}. \quad (1.3.16)$$

В каждый текущий момент времени  $t$  на основе измерений  $x(t)$ ;  $x(t-1), u(t-1)$ ;  $x(t-2), u(t-2)$  параметры корректируем по простейшему адаптивному алгоритму (5.3.4):

$$\hat{a}_i(t) = \hat{a}_i(t-1) + \frac{x(t) - y(t, \alpha(t-1))}{\sum_{i=1}^n w_{\hat{a}_i}^2(t) + \sum_{j=1}^m w_{\hat{b}_j}^2(t)} x(t-i); \quad i = \overline{1, n};$$

$$\hat{b}_j(t) = \hat{b}_j(t-1) + \frac{x(t) - y(t, \alpha(t-1))}{\sum_{i=1}^n w_{\hat{a}_i}^2(t) + \sum_{j=1}^m w_{\hat{b}_j}^2(t)} u(t-j); \quad j = \overline{1, m}; \quad (1.3.17)$$

$$y(t | \alpha(t-1)) = \sum_{i=1}^n \hat{a}_i(t-1)x(t-i) + \sum_{j=1}^m \hat{b}_j(t-1)u(t-j).$$

Для модели (1.1.6)

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \hat{a}_i x(t-i) + \sum_{j=1}^m \hat{b}_j u(t-j) + \sum_{l=1}^q \hat{c}_l (x(t-l) - y(t-l)) \quad (1.3.18)$$

функции чувствительности удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} w_{\hat{a}_i}(t) &= -\sum_{k=1}^q \hat{c}_k w_{\hat{a}_i}(t-k) + x(t-i), \quad i = \overline{1, n}; \\ w_{\hat{b}_j}(t) &= -\sum_{k=1}^q \hat{c}_k w_{\hat{b}_j}(t-k) + u(t-j), \quad j = \overline{1, m}; \\ w_{\hat{c}_l}(t) &= -\sum_{k=1}^q \hat{c}_k w_{\hat{c}_l}(t-k) + [x(t-l) - \bar{y}(t-l | \alpha(t-l))], \quad l = \overline{1, q}. \end{aligned} \quad (1.3.19)$$

Простейший адаптивный алгоритм перестройки параметров (5.3.4) принимает вид

$$\begin{aligned} \hat{a}_i(t) &= \hat{a}_i(t-1) + \Delta(t)x(t-i); \quad i = \overline{1, n}; \\ \hat{b}_j(t) &= \hat{b}_j(t-1) + \Delta(t)u(t-j); \quad j = \overline{1, m}; \\ \hat{c}_l(t) &= \hat{c}_l(t-1) + \Delta(t)[x(t-l) - \bar{y}(t-l | \alpha(t-l))], \quad l = \overline{1, q}, \\ \Delta(t) &= \frac{x(t) - y(t, \alpha(t-1))}{\sum_{i=1}^n w_{\hat{a}_i}^2(t) + \sum_{j=1}^m w_{\hat{b}_j}^2(t) + \sum_{l=1}^q w_{\hat{c}_l}^2(t)}, \\ y(t | \alpha(t-1)) &= \sum_{i=1}^n \hat{a}_i(t-1)x(t-i) + \sum_{j=1}^m \hat{b}_j(t-1)u(t-j) + \\ &+ \sum_{l=1}^q \hat{c}_l [x(t-l) - \bar{y}(t-l | \alpha(t-l))]. \end{aligned} \quad (1.3.20)$$

В работе [1.8] показано, что для линейных динамических моделей при получении каждого набора функций чувствительности  $\{w_{\hat{a}_i}\}$ ,  $\{w_{\hat{b}_j}\}$ ,  $\{w_{\hat{c}_l}\}$  надо решить не систему уравнений чувствительности, а лишь одно уравнение, в котором фазовые координаты представляют собой интересные нас функции чувствительности. Этот результат справедлив для

моделей с постоянными параметрами. Его можно попробовать распространить и на линейные модели с переменными параметрами.

Все ранее рассмотренные нелинейные субоптимальные модели (1.1.12), (1.1.15) запишем в виде уравнения

$$y(t) = f(x(t-1), u(t-1), x(t-1) - y(t-1), \alpha), \quad (1.3.21)$$

где  $\alpha$  – вектор-столбец искомых параметров.

Модель с переменными параметрами (см. аналог (1.3.3) для линейной оптимальной структуры (1.3.2)):

$$\begin{aligned} y(t, \alpha(t)) &\approx y(t, \alpha(t-1)) + w^T(t, \alpha(t-1)) \Delta \alpha(t) = \\ &= f(x(t-1), u(t-1), \hat{e}(t-1), \alpha(t-1)) + w^T(t, \alpha(t-1)) \Delta \alpha(t) \equiv \\ &\equiv f(\cdot) + w^T(t, \alpha(t-1)) \Delta \alpha(t), \\ \hat{e}(t-1) &= x(t-1) - \bar{y}(t-1 | \alpha(t-1)) \\ w(t) &\equiv w(t, \alpha(t-1)) = \nabla_{\alpha} y(t, \alpha(t-1)), \quad \Delta \alpha(t) = \alpha(t) - \alpha(t-1). \end{aligned} \quad (1.3.22)$$

Уравнения чувствительности имеют вид

$$\begin{aligned} w(t) &= w(t-1) \nabla_y f(\cdot) + \nabla_{\alpha} f(\cdot), \quad w(0) = 0, \quad t = 1, 2, \dots, \\ w(t) &\equiv w(t, \alpha(t-1)). \end{aligned} \quad (1.3.23)$$

Для нелинейной структуры модели без обратной связи

$$y(t) = f(x(t-1), u(t-1), \alpha_1, \alpha_2) \quad (1.3.24)$$

получаем следующие выход модели  $y(t, \alpha(t-1))$  и функции чувствительности:

$$\begin{aligned} y(t, \alpha(t-1)) &= f(x(t-1), u(t-1), \alpha_1(t-1), \alpha_2(t-1)), \\ w_{\alpha_1}(t) &= \frac{\partial f(x(t-1), u(t-1), \alpha_1(t-1), \alpha_2(t-1))}{\partial \alpha_1}, \\ w_{\alpha_2}(t) &= \frac{\partial f(x(t-1), u(t-1), \alpha_1(t-1), \alpha_2(t-1))}{\partial \alpha_2}, \end{aligned} \quad (1.3.25)$$

а также простейший адаптивный алгоритм перестройки параметров (см. п. 5.3):

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= \alpha_1(t-1) + \frac{x(t) - y(t, \alpha(t-1))}{w_{\alpha_1}^2(t) + w_{\alpha_2}^2(t)} w_{\alpha_1}(t), \\ \alpha_2(t) &= \alpha_2(t-1) + \frac{x(t) - y(t, \alpha(t-1))}{w_{\alpha_1}^2(t) + w_{\alpha_2}^2(t)} w_{\alpha_2}(t), \quad t = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.3.26)$$

Если в модели (1.3.24) появляется обратная связь по выходу, т. е.

$$y(t) = f(x(t-1), u(t-1), y(t-1), \alpha_1, \alpha_2), \quad (1.3.27)$$

то меняется расчет выхода модели и функций чувствительности:

$$y(t, \alpha(t-1)) = f(x(t-1), u(t-1), \bar{y}(t-1 | \alpha(t-1)), \alpha_1(t-1), \alpha_2(t-1)) \equiv f(\cdot),$$

$$\bar{y}(t-1 | \alpha(t-1)) = f(x(t-2), u(t-2), \bar{y}(t-2 | \alpha(t-2)), \alpha_1(t-1), \alpha_2(t-1)),$$

$$w_{\alpha_1}(t) = w_{\alpha_1}(t-1) \frac{\partial f(\cdot)}{\partial y} + \frac{\partial f(\cdot)}{\partial \alpha_1}, \quad (1.3.28)$$

$$w_{\alpha_2}(t) = w_{\alpha_2}(t-1) \frac{\partial f(\cdot)}{\partial y} + \frac{\partial f(\cdot)}{\partial \alpha_2},$$

а формула перестройки параметров сохраняет свой вид (1.3.26).

### Упражнения



Для объектов, описываемых уравнениями:

1.1.  $x(t) = bu(t-1) + e(t),$

1.2.  $x(t) = u(t-1) + ce(t-1) + e(t),$

1.3.  $x(t) = bu(t-1) + ce(t-1) + e(t),$

1.4.  $x(t) = bu(t-1) + c_1e(t-1) + c_2e(t-2) + e(t),$

1.5.  $x(t) = a \frac{x(t-1)}{u(t-1)} + e(t),$

1.6.  $x(t) = \frac{x(t-1)}{u(t-1)} + ce(t-1) + e(t),$

1.7.  $x(t) = a \frac{x(t-1)}{u(t-1)} + ce(t-1) + e(t),$

запишите оптимальную структуру модели, постройте две модели с переменными параметрами (рекурсивную и с функциями чувствительности) и составьте адаптивные алгоритмы перестройки параметров моделей:

а) алгоритм минимизации квадратичных функционалов;

б) простейший адаптивный алгоритм.

## 2.1. Схема синтеза закона управления

Рассмотрим адаптивную систему с идентификацией (АСИ), представленную на рис. 2.1.1. Синтезируем алгоритм расчета управления (алгоритм работы устройства управления)  $u(t)$  в каждый текущий момент времени  $t$ . Исходными экспериментальными данными о входе и выходе объекта являются:  $x(t)$ ;  $x(t-1)$ ,  $u(t-1)$ ;  $x(t-2)$ ,  $u(t-2)$ ; .... Они включают в себя последнее измерение выхода объекта  $x(t)$  и предыдущие синхронные измерения входа и выхода – они хранятся в памяти вычислительного устройства управления. Необходимо рассчитать управляющее воздействие  $u(t)$ , обеспечивающее достижение следующей цели: наименьшего отклонения выхода системы  $x$  от заданной траектории  $x^*$  в каждый текущий момент времени.

Считаем, что поведение объекта в динамическом режиме описывается разностным уравнением

$$x(t) = f(x(t-1), u(t-1), a) + \xi(t), \quad t = 1, 2, \dots \quad (2.1.1)$$

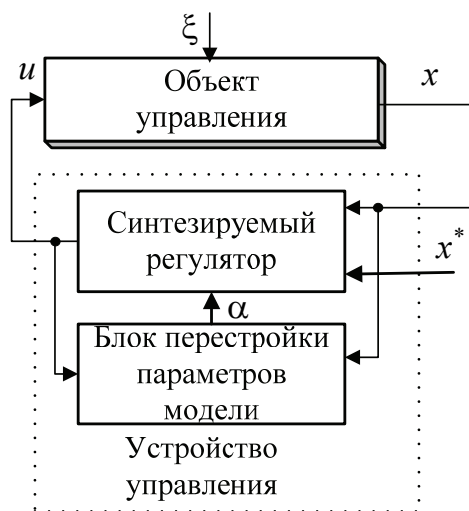


Рис. 2.1.1

Здесь  $f(\cdot)$  – известная функция,  $a$  – неизвестные параметры;  $\xi(t)$  – дискретный «окрашенный» либо «белый» шум. Так как в гл. 2 внимание сосредоточено на синтезе управлений (построении алгоритма работы регулятора, см. рис. 2.1.1), то для простоты считаем помеху  $\xi(t)$  «белым» шумом  $e(t)$ . Если шум «окрашенный» (см. гл. 1), то он представляется как функция от  $e(t)$ ,  $e(t-1)$ , ... и параметры этой зависимости также доопределяются в процессе идентификации. Алгоритмы работы идентификатора представлены в главе 5.

Обозначим через  $y(k | \alpha(t))$  выход

модели в момент времени  $k$  при значении вектора параметров  $\alpha(t)$ , вычисленных в момент времени  $t$ . Если шум  $[\xi(t) = e(t)]$  «белый», то

$$y(k | \alpha(t)) = f(x(k-1), u(k-1), \alpha(t)). \quad (2.1.2)$$

Эта модель используется как для целей идентификации параметров  $\alpha(t)$  (при этом  $k$  принимает значение  $t, t-1, \dots$ ), так и расчета управления  $u(t)$  (при этом  $k$  полагаем равным  $t+1$ ). При  $k = t+1$  из (2.1.2) получаем прогноз выхода объекта для следующего момента времени:

$$y(t+1 | \alpha(t)) = f(x(t), u(t), \alpha(t)). \quad (2.1.3)$$

Параметры  $\alpha(t)$  поступают из идентификатора, где они рассчитываются по одному из адаптивных алгоритмов (см. гл. 5). Неизвестным в правой части уравнения (2.1.3) остается управление  $u(t)$ . Его вычисляем из условия наилучшего приближения выхода модели  $y(t+1 | \alpha(t))$  к желаемой траектории  $x^*(t+1)$  в момент времени  $t+1$ :

$$(y(t+1 | \alpha(t)) - x^*(t+1))^2 = \min \text{ при } u(t) \in U(t). \quad (2.1.4)$$

Здесь  $U(t)$  – множество допустимых значений управления. Примером служит интервал  $[u_1, u_2]$ , ограниченный известными значениями.

## 2.2. Примеры синтеза устройств управления для простейших линейных систем

**Пример 2.2.1.** Считаем, что объект описывается уравнением

$$x(t) = x(t-1) + u(t-1) + h(t-1), \quad t = 1, 2, \dots \quad (2.2.1)$$

Здесь  $h$  – неизвестное внешнее воздействие на объект. Структурная схема объекта приведена в верхней части рис. 2.2.1. Через  $q$  обозначен оператор запаздывания сигнала на один такт.

Необходимо найти алгоритм расчета управляющего воздействия  $u(t)$  в каждый текущий момент времени  $t$  на основе информации о структуре модели и на основе измерений

$$x(t); x(t-1), u(t-1); \dots \quad (2.2.2)$$

входа и выхода объекта, чтобы достигалась цель управления: движение системы по заданной траектории  $x^*$ .

Формируем модель объекта

$$y(k | \alpha(t)) = x(k-1) + u(k-1) + \alpha(t). \quad (2.2.3)$$

Параметр  $\alpha(t)$  оценивает неизвестное внешнее возмущение  $h(t)$  объекта.

Вычислим  $\alpha(t)$ , приравняв выход объекта  $x(t)$  и выход модели  $y(t | \alpha(t))$  в момент времени  $t$ :

$$x(t) = x(t-1) + u(t-1) + \alpha(t). \quad (2.2.4)$$

Это уравнение лежит в основе простейшего адаптивного алгоритма (см. п. 5.3). Из (2.2.4) получаем параметр

$$\alpha(t) = x(t) - x(t-1) - u(t-1). \quad (2.2.5)$$

Структурная схема для блока идентификации представлена в нижней части устройства управления на рис. 2.2.1.

Для расчета управления  $u(t)$  находим по уравнению модели (2.2.3) прогноз выхода объекта на момент времени  $t+1$

$$y(t+1 | \alpha(t)) = x(t) + u(t) + \alpha(t) \quad (2.2.6)$$

и из локального квадратичного критерия оптимальности

$$I(u) = [y(t+1 | \alpha(t)) - x^*(t+1)]^2 = \min_{u_1(t) \leq u(t) \leq u_2(t)} \quad (2.2.7)$$

рассчитываем оптимальное управление:

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t), & \text{если } v(t) \leq u_1(t), \\ v(t), & \text{если } u_1(t) \leq v(t) \leq u_2(t), \\ u_2(t), & \text{если } u_2(t) \leq v(t). \end{cases} \quad (2.2.8)$$

Преобразователь (2.2.8) представляет собой обыкновенный ограничитель по амплитуде для сигнала  $v(t)$ . Значение  $v(t)$  обеспечивает абсолютный минимум функции  $I(u)$  (без учета ограничения на  $u$ ):

$$\begin{aligned} \frac{dI(u)}{du} &= 2(y(t+1 | \alpha(t)) - x^*(t+1)) = 0, \\ y(t+1 | \alpha(t)) &= x^*(t+1), \quad x(t) + v(t) + \alpha(t) = x^*(t+1), \\ v(t) &= x^*(t+1) - x(t) - \alpha(t). \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

На рис. 2.2.2 показано, что оптимальное решение экстремальной задачи (2.2.7) имеет вид (2.2.8), т. е. имеют место три возможных положения квадратичной функции качества  $I(u)$ . Если абсолютное значение минимума  $v(t)$  лежит слева от  $u_1$ , то функция качества  $I(u)$  достигает в допустимой области  $[u_1, u_2]$  минимум в точке  $u_1$ . Остальные ситуации рассматриваются аналогично данной.

Блок-схема полученного алгоритма управления (2.2.8), (2.2.9) приведена в верхней части устройства управления на рис. 2.2.1. Блок адаптивного управления состоит из двух частей: регулятора (2.2.8), (2.2.9) и идентификатора (2.2.5). Причем в момент времени  $t$  после получения нового измерения выхода объекта  $x(t)$  вначале срабатывает идентификатор (он вычисляет  $\alpha(t)$ ), а затем регулятор с учетом нового значения неизвестного параметра  $\alpha(t)$ .

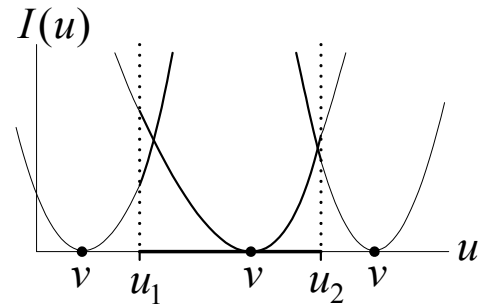


Рис. 2.2.2

Проведём анализ полученных результатов.

Вычислим ошибку работы системы для следующего момента времени  $t + 1$  (ибо она зависит от найденного управления  $u(t)$ ):

$$\varepsilon_0(t+1) = x(t+1) - x^*(t+1). \quad (2.2.10)$$

Подставляем сюда  $x(t+1)$  из уравнения движения объекта

$$x(t+1) = x(t) + u(t) + h(t),$$

а  $x^*(t+1)$  — из уравнения (2.2.9) для управления  $v(t)$  (без учета ограничений)

$$x^*(t+1) = x(t) + v(t) + \alpha(t),$$

и получаем, что

$$\varepsilon_0(t+1) = [h(t) - \alpha(t)] + [u(t) - v(t)] = \varepsilon_1(t+1) + \varepsilon_2(t+1). \quad (2.2.11)$$

Ошибка работы системы состоит из двух частей: из ошибки  $\varepsilon_1(t+1)$  идентификации внешнего возмущения  $h$  и ошибки  $\varepsilon_2(t+1)$ , обусловленной ограниченностью управления. Если ресурса по управлению хватает, т. е.  $u(t) = v(t)$ , то  $\varepsilon_2(t+1) = 0$ . Ошибку идентификации точно рассчитать нельзя в силу неизвестности  $h$ , но ее можно оценить, если есть некоторая информация об  $h$ .

Найдём ошибку идентификации.

В уравнение для  $\alpha(t)$

$$\alpha(t) = x(t) - x(t-1) - u(t-1)$$

подставляем  $x(t)$  из уравнения движения объекта

$$x(t) = x(t-1) + u(t-1) + h(t-1)$$

и получаем, что

$$\alpha(t) = h(t-1). \quad (2.2.12)$$

Параметр модели  $\alpha(t)$  точно отслеживает возмущение  $h(t-1)$ , действующее на объект в предыдущий момент времени, так как информация об  $h(t-1)$  содержится в измеренном значении  $x(t)$  выхода объекта.

Ошибка идентификации с учетом (2.2.12) равна величине приращения возмущения в соседние моменты времени, т. е. скорости изменения внешнего воздействия:

$$\varepsilon_1(t+1) = h(t) - \alpha(t) = h(t) - h(t-1). \quad (2.2.13)$$

Здесь  $h(t)$  – неизвестное значение возмущения.

Если в течение некоторого интервала времени возмущение остается постоянным:

$$h(t) = c, \quad t = t_1, t_1 + 1, \dots, t_2,$$

то в момент времени  $t_1 + 1$  идентификатор вычисляет эту константу, и ошибка идентификации равна нулю для моментов  $t = t_1 + 1, \dots, t_2$ . При  $t = t_2 + 1$  возмущение меняет свое значение, и ошибка идентификации равна величине

$$\varepsilon_1(t_2 + 2) = h(t_2 + 1) - c.$$

Если известно, что возмущение  $h(t)$  лежит в заданном интервале, т. е.  $|h(t)| \leq h_1$ , то для ошибки идентификации получаем следующий интервал ее изменения:

$$|\varepsilon_1(t+1)| = |h(t) - \alpha(t)| \leq |h(t)| + |h(t-1)| \leq 2h_1,$$

$$-2h_1 \leq \varepsilon_1(t+1) \leq 2h_1.$$

Если известен интервал изменения для приращения возмущения  $\Delta h(t) = h(t) - h(t-1)$ , т. е.  $|\Delta h(t)| \leq \Delta_1$ , то ошибка идентификации находится внутри того же интервала:

$$|\varepsilon_1(t+1)| = |h(t) - \alpha(t)| = |h(t) - h(t-1)| \leq \Delta_1,$$

$$-\Delta_1 \leq \varepsilon_1(t+1) \leq \Delta_1.$$

На рис. 2.2.3 приведены графики изменения во времени выходной координаты управляемого объекта, управляющего воздействия, желаемого значения выхода замкнутой системы, внешнего неизмеряемого воздействия и параметра модели, оценивающего это воздействие.

Изменим уравнение движения объекта:

$$x(t) = x(t-1) + u(t-1) + a + h(t-1), \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0.$$

Здесь  $a$  – неизвестный параметр;  $h$  – неизвестное внешнее воздействие, которое может быть и случайным;  $|h(t)| \leq h_1$ .

Модель остается прежней. Параметр  $\alpha(t)$  отслеживает теперь сумму параметра  $a$  и внешнего воздействия  $h$ . Устройство управления сохраняет прежний вид.

Идентификацию осуществляем по тому же алгоритму

$$\alpha(t) = x(t) - x(t-1) - u(t-1),$$

откуда получаем, что

$$\alpha(t) = a + h(t-1).$$

Ошибка отслеживания траектории остаётся той же:

$$\begin{aligned} x(t+1) - x^*(t+1) &= [a + h(t) - \alpha(t)] + e_2(t+1) = \\ &= [h(t) - h(t-1)] + [u(t) - v(t)], \end{aligned}$$

т. е.

$$|x(t+1) - x^*(t+1)| \leq 2h_1 + |u(t) - v(t)|$$

либо

$$|x(t+1) - x^*(t+1)| \leq \Delta_1 + |u(t) - v(t)|, \text{ где } |h(t) - h(t-1)| \leq \Delta_1.$$

На рис. 2.2.4 приведены графики изменения во времени основных переменных ( $x^*$ ,  $x$ ,  $a$ ,  $\alpha$ ,  $h$ ,  $u$ ) системы при наличии помехи  $h$ , принимающей значения из интервала  $[-0.5; 0.5]$ , и при отсутствии ограничений на управление.

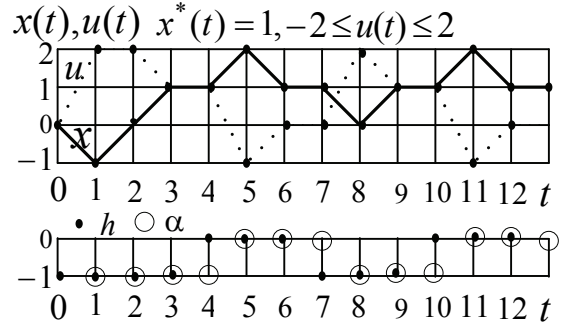


Рис. 2.2.3

В моменты  $t = 0, 1, 2$  помеха равна нулю, идентификатор при  $t = 1, 2, 3$  точно отслеживает неизвестный параметр  $a = 1$ , и при  $t = 2, 3$  система точно движется по назначенной траектории.

Далее при  $t = \overline{3, 7}$  помеха  $h(t)$  совершает колебания на предельно возможных уровнях, и ошибка отслеживания назначенной траектории достигает максимального значения  $|x(t) - x^*(t)| \leq 2h_1 = 1$ .

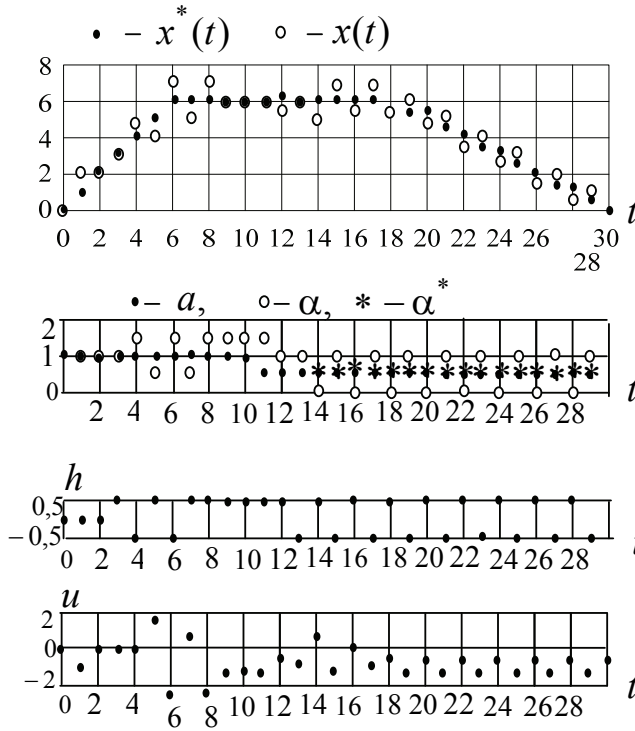


Рис. 2.2.4

При  $t = \overline{7, 12}$  помеха принимает постоянное значение 0,5, идентификатор отслеживает суммарную величину  $(a + h)$  и точно восстанавливает модель объекта. За счет этого при  $t = \overline{9, 11}$  ошибка работы системы равна нулю.

В момент  $t = 11$  неизвестный параметр меняет свое значение и становится равным 0,5. Это непредвиденное возмущение приводит к ошибке отслеживания траектории при  $t = 12$ . Идентификатор на следующем такте после изменения параметра отслеживает это изменение и приводит к ликвидации возникшей ошибки работы системы.

Начиная с  $t = t_0 = 12$  помеха вновь на каждом такте попеременно принимает предельные значения. За счет этого ошибка идентификации равна максимально возможной величине  $h_1$ . В целях уменьшения ошибки идентификации вводим оператор усреднения текущих оценок  $\alpha(t)$

$$\alpha^*(t) = \alpha^*(t-1) + (t - t_0)^{-1}(\alpha(t) - \alpha^*(t-1)),$$

$$t > t_0 = 12, \quad \alpha^*(t_0) = \alpha(t_0)$$

и при расчете  $u(t)$  вместо  $\alpha(t)$  используем  $\alpha^*(t)$ . На рис. 2.2.4 хорошо видно, что  $\alpha^*(t) \rightarrow a$  при  $t \rightarrow \infty$ . Ошибка идентификации уменьшается до нуля, а максимальная ошибка отслеживания траектории уменьшается в два раза:  $|x(t) - x^*(t)| \rightarrow h_1$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Если в уравнении (2.2.1) внешнее воздействие  $h(t)$  дрейфует во времени по линейному закону

$$h(t) = ta, \quad (2.2.14)$$

то в модель объекта вводим параметр  $\alpha(t)$ , оценивающий в момент времени  $t$  неизвестный коэффициент  $a$ :

$$y(k | \alpha(t)) = x(k-1) + u(k-1) + (k-1)\alpha(t). \quad (2.2.15)$$

Как и ранее, из условия равенства  $x(t)$  и  $y(t | \alpha(t))$

$$x(t) = x(t-1) + u(t-1) + (t-1)\alpha(t) \quad (2.2.16)$$

находим  $\alpha(t)$ :

$$\alpha(t) = (t-1)^{-1}(x(t) - x(t-1) - u(t-1)), \quad (2.2.17)$$

а затем из критерия оптимальности (2.2.7) получаем оптимальное управление (2.2.8), где

$$v(t) = x^*(t+1) - x(t) - t\alpha(t). \quad (2.2.18)$$

Ошибка работы системы равна величине

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(t+1) &= x(t+1) - x^*(t+1) = t(a - \alpha(t)) + [u(t) - v(t)] = \\ &= \varepsilon_1(t+1) + \varepsilon_2(t+1). \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

Вычисляем ошибку идентификации  $\varepsilon_1(t+1)$ . Берем уравнение для расчета  $\alpha(t)$  (см. (2.2.17), подставляем в него  $x(t)$  из уравнения движения объекта и получаем, что

$$\alpha(t) = (t-1)^{-1}(x(t-1) + u(t-1) + (t-1)a - x(t-1) - u(t-1)) = a,$$

т. е. идентификатор точно оценивает постоянный параметр  $a$ . Ошибка идентификации равна нулю. Когда идеальное управление  $v(t)$  лежит внутри допустимой (для управления) области, то и ошибка управления равна нулю. Система осуществляет точное движение по предписанной траектории в каждый текущий момент времени  $t$ .

Линейный дрейф (2.2.14) возмущения  $h(t)$  можно отследить по-иному. Параметры  $\alpha(t)$ ,  $\alpha(t-1)$  вычисляем, как обычно, по формуле (2.2.5), но в модель  $y(t+1 | \alpha(t))$  прогноза выхода объекта (2.2.6) вместо  $\alpha(t)$  подставляем линейный прогноз  $\hat{\alpha}(t+1)$ , вычисленный по последним двум значениям параметра  $\alpha(t-1)$ ,  $\alpha(t)$  (рис. 2.2.5):

$$\hat{\alpha}(t+1) = 2\alpha(t) - \alpha(t-1).$$

Для получения этого равенства берем уравнение линии  $a_1 + a_2 \cdot t$  и из двух условий, что линия проходит через  $\alpha(t-1)$  и через  $\alpha(t)$

$$a_1 + a_2 \cdot (t-1) = \alpha(t-1),$$

$$a_1 + a_2 \cdot t = \alpha(t)$$

находим параметры линии

$$a_2 = \alpha(t) - \alpha(t-1),$$

$$a_1 = \alpha(t-1) - a_2 \cdot (t-1) = \alpha(t-1) - [\alpha(t) - \alpha(t-1)] \cdot (t-1).$$

Затем вычисляем прогнозируемое по этой линии значение на момент  $(t+1)$ :

$$\hat{\alpha}(t+1) = a_1 + a_2 \cdot (t+1) = 2\alpha(t) - \alpha(t-1).$$

В оптимальном управлении (2.2.8), (2.2.9) вместо  $\alpha(t)$  ставим  $\hat{\alpha}(t+1)$ . При этом  $\hat{\alpha}(t+1)$  равно величине

$$\hat{\alpha}(t+1) = 2h(t-1) - h(t-2).$$

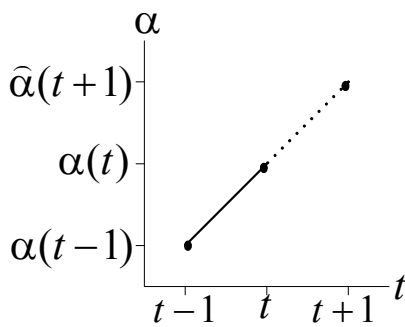


Рис. 2.2.5

Ошибка идентификации  $\varepsilon_1(t+1)$  в ошибке работы системы (2.2.11) рассчитывается по формуле

$$\varepsilon_1(t+1) = h(t) - \hat{\alpha}(t+1) = h(t) - 2h(t-1) + h(t-2).$$

Это конечная разность второго порядка (ускорение) для возмущения  $h$ . Если  $h(t)$  меняется линейно во времени (2.2.14)

$$h(t) = t \cdot a,$$

где  $a$  — неизвестный параметр, то ошибка идентификации равна нулю:  $\varepsilon_1(t+1) = 0$ .

**Пример 2.2.2.** Объект описывается уравнением

$$x(t) = a_0 + a_1 x(t-1) + a_2 u(t-1) + e(t), \quad (2.2.20)$$

где  $e(t)$  — «белый» шум;  $a_0, a_1, a_2$  — неизвестные параметры. Необходимо построить алгоритм расчета управляющих воздействий  $u(t)$  (для каждого текущего момента времени  $t$ ), чтобы система (объект плюс устройство управления) двигалась по назначенной траектории  $x^*$ . Исходными измерениями в момент времени  $t$  являются:  $x(t); x(t-1), u(t-1); \dots$ . Заменя-

ем  $e(t)$  на  $x(t) - y(t)$ , параметры объекта – на параметры модели, получаем модель объекта:

$$y(k | \alpha(t)) = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)x(k-1) + \alpha_2(t)u(k-1). \quad (2.2.21)$$

При решении задачи идентификации индекс  $k$  может принимать значения  $t, t-1, \dots$ , а при расчете управления  $k$  – значение  $t+1$ .

Параметры модели могут перестраиваться с помощью одного из адаптивных алгоритмов, представленных, например, в главе 5. Приведем простейший адаптивный алгоритм:

$$\begin{aligned} \alpha_0(t) &= \alpha_0(t-1) + \frac{x(t) - y(t | \alpha(t-1))}{1 + x^2(t-1) + u^2(t-1)} = \alpha_0(t-1) + \Delta(t), \\ \alpha_1(t) &= \alpha_1(t-1) + \Delta(t)x(t-1), \\ \alpha_2(t) &= \alpha_2(t-1) + \Delta(t)u(t-1). \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

Затем по модели прогнозируем выход объекта для следующего момента времени:

$$y(t+1 | \alpha(t)) = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)x(t) + \alpha_2(t)u(t), \quad (2.2.23)$$

и из квадратичного локального критерия

$$(y(t+1 | \alpha(t)) - x^*(t+1))^2 = \min_{u_1 \leq u(t) \leq u_2}$$

найдем управляющее воздействие (2.2.8), где идеальное управление

$$v(t) = \alpha_2^{-1}(t)(x^*(t+1) - \alpha_0(t) - \alpha_1(t)x(t)). \quad (2.2.24)$$

Ошибка работы системы

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(t+1) &= x(t+1) - x^*(t+1) = [x(t+1) - y(t+1 | \alpha(t))] + \\ &+ [y(t+1 | \alpha(t)) - x^*(t+1)] = [a_0 - \alpha_0(t)] + (a_1 - \alpha_1(t))x(t) + \\ &+ (a_2 - \alpha_2(t))u(t) + \alpha_2(t)[u(t) - v(t)] + e(t+1) \end{aligned}$$

состоит из трёх компонент: ошибки идентификации, ошибки, вызванной ограниченностью управления, и помехи.

При подстройке параметров можно использовать простой алгоритм Б. Т. Поляка [5.1]:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_0(t) &= \bar{\alpha}_0(t-1) + \bar{\gamma}(t)(x(t) - y(t | \bar{\alpha}(t-1))) = \bar{\alpha}_0(t-1) + \Delta_1(t), \\ \alpha_0(t) &= \alpha_0(t-1) + t^{-1}(\bar{\alpha}_0(t) - \alpha_0(t-1)), \\ \bar{\alpha}_1(t) &= \bar{\alpha}_1(t-1) + \Delta_1(t)x(t-1), \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

$$\alpha_1(t) = \alpha_1(t-1) + t^{-1}(\bar{\alpha}_1(t) - \alpha_1(t-1)),$$

$$\bar{\alpha}_2(t) = \bar{\alpha}_2(t-1) + \Delta_1(t)u(t-1),$$

$$\alpha_2(t) = \alpha_2(t-1) + t^{-1}(\bar{\alpha}_2(t) - \alpha_2(t-1)), \quad \bar{\gamma}(t) = \gamma t^{-1/2}, \quad \gamma > 0.$$

При расчете управления (2.2.23), (2.2.24) необходимо применять сглаженные значения параметров  $\alpha_0(t)$ ,  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$ .

### 2.3. Синтез алгоритмов управления для линейных систем

Рассмотрим объект, описываемый разностным уравнением  $n$ -го порядка

$$x(t) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x(t-i) + \sum_{j=1}^m a_{n+j} u(t-j) + e(t). \quad (2.3.1)$$

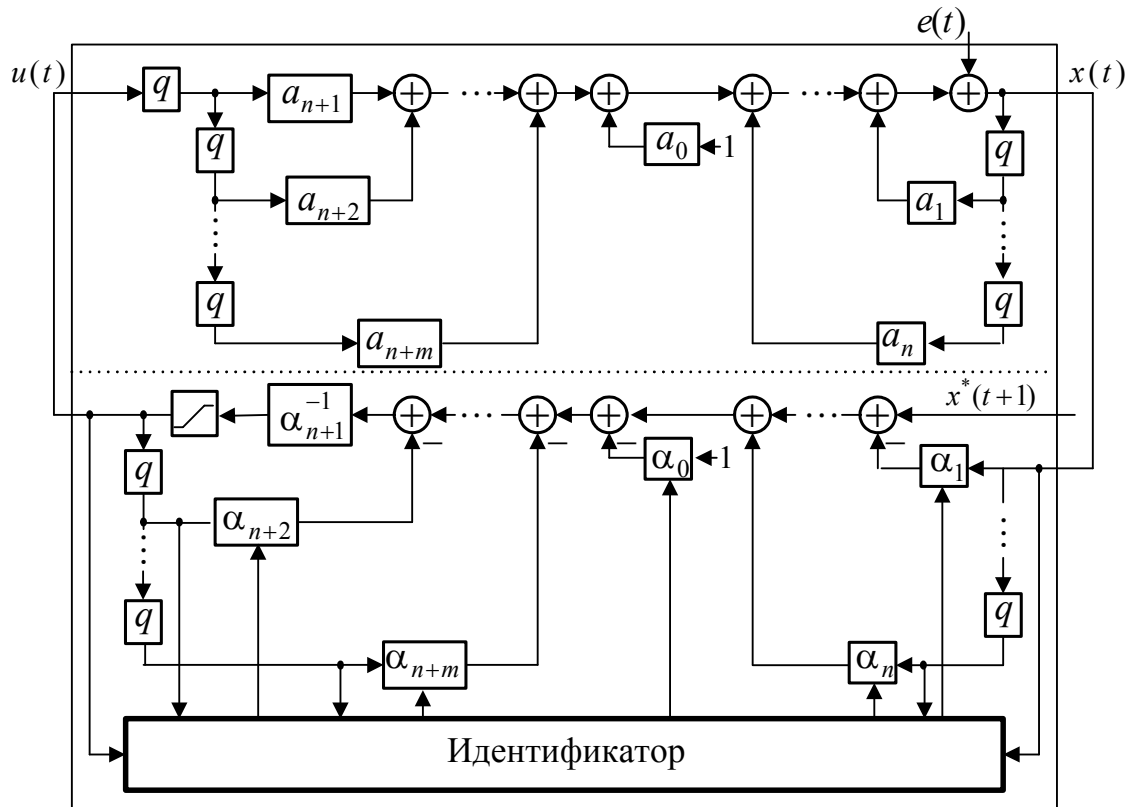


Рис. 2.3.1

Параметры модели

$$y(k | \alpha(t)) = \alpha_0(t) + \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) x(k-i) + \sum_{j=1}^m \alpha_{n+j}(t) u(k-j) \quad (2.3.2)$$

рассчитываем по одному из адаптивных алгоритмов (см. гл. 5). Оптимальное управление найдём из критерия

$$(y(t+1 | \alpha(t)) - x^*(t+1))^2 = \min_{u_1 \leq u(t) \leq u_2} \quad (2.3.3)$$

и получим его в виде (2.2.8), а идеальное управление

$$\begin{aligned} v(t) = & \alpha_{n+1}^{-1}(t)(x^*(t+1) - \alpha_0(t) - \sum_{i=1}^n \alpha_i(t)x(t+1-i) - \\ & - \sum_{j=2}^m \alpha_{n+j}(t)u(t+1-j)). \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Структурная схема системы управления представлена на рис. 2.3.1. Ошибка работы системы, равная величине

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(t+1) = & x(t+1) - x^*(t+1) = [x(t+1) - y(t+1 | \alpha(t))] + \\ & + [y(t+1 | \alpha(t)) - x^*(t+1)] = [a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x(t+1-i) + \\ & + \sum_{j=1}^m a_{n+j} u(t+1-j) + e(t+1) - \alpha_0(t) - \sum_{i=1}^n \alpha_i(t)x(t+1-i) - \\ & - \sum_{j=1}^m \alpha_{n+j}(t)u(t+1-j)] + [\alpha_0(t) + \sum_{i=1}^n \alpha_i(t)x(t+1-i) + \\ & + \sum_{j=2}^m \alpha_{n+j}(t)u(t+1-j) + \alpha_{n+1}(t)u(t) - \alpha_0(t) - \sum_{i=1}^n \alpha_i(t)x(t+1-i) - \\ & - \sum_{j=2}^m \alpha_{n+j}(t)u(t+1-j) - \alpha_{n+1}(t)v(t)] = [[a_0 - \alpha_0(t)] + \\ & + \sum_{i=1}^n [a_i - \alpha_i(t)]x(t+1-i) + \sum_{j=1}^m [a_{n+j} - \alpha_{n+j}(t)]u(t+1-j)] + \\ & + \alpha_{n+1}(t)[u(t) - v(t)] + e(t+1), \end{aligned}$$

складывается из ошибки идентификации, ошибки управления (обусловленной ограниченностью ресурса для управляющего воздействия) и помехи.

## 2.4. Алгоритмы адаптивного управления для нелинейных систем

Объект описывается нелинейным разностным уравнением

$$x(t) = f(x(t-1), u(t-1), a, t-1) + e(t), \quad t = 1, 2, \dots \quad (2.4.1)$$

Структурная схема объекта представлена на рис. 2.4.1.

Построим алгоритм расчета управляющего воздействия  $u(t)$  в каждый текущий момент времени  $t$  на основе измерений, поступивших в устройство управления к этому моменту времени:  $x(t); x(t-1), u(t-1); \dots$

Модель объекта (см. п. 1.2) имеет вид

$$y(k | \alpha(t)) = f(x(k-1), u(k-1), \alpha(t), k-1). \quad (2.4.2)$$

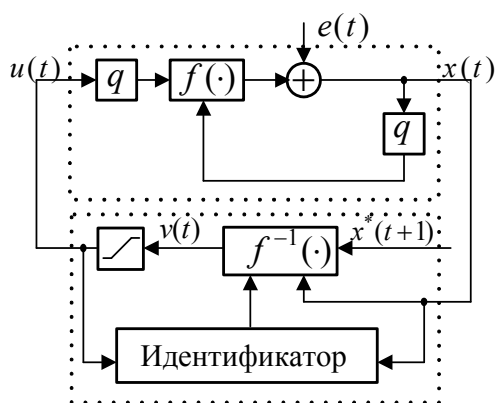


Рис. 2.4.1

Ее используют для целей идентификации параметров  $\alpha(t)$  (при  $k = t, t-1, \dots$ ) и расчета управляющего воздействия (при  $k = t+1$ ).

Параметры модели вычислим по одному из рекуррентных алгоритмов, описанных в гл. 5, с использованием идеи линеаризации модели. Для примера приведем алгоритм Б. Т. Поляка

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(t) &= \bar{\alpha}(t-1) + \bar{\gamma}(t) \nabla_{\alpha} y(t | \bar{\alpha}(t-1)) \varepsilon(t), \\ \varepsilon(t) &= x(t) - y(t | \bar{\alpha}(t-1)), \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

$$\alpha(t) = \alpha(t-1) + t^{-1} (\bar{\alpha}(t) - \alpha(t-1)), \quad t = 1, 2, \dots, \quad \bar{\gamma}(t) = \gamma t^{-1/2}, \quad \gamma > 0.$$

С учетом скорректированных (по новой информации) параметров  $\alpha(t)$  прогнозируем (с помощью модели) выход объекта  $y(t+1 | \alpha(t))$  и из квадратичного критерия находим управляющее воздействие. Оно получается на выходе ограничителя по амплитуде, на вход которого подается идеальное управление

$$v(t) = f^{-1}(x(t), x^*(t+1), \alpha(t), t). \quad (2.4.4)$$

Идеальное управление является решением уравнения

$$\begin{aligned} y(t+1 | \alpha(t)) &= x^*(t+1) \quad \text{или} \\ f(x(t), v(t), \alpha(t), t) &= x^*(t+1). \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Структурная схема системы управления представлена на рис. 2.4.1.

**Пример 2.4.1.** Считаем, что нелинейный (по каналу вход-выход) объект описывается разностным уравнением

$$x(t) = x(t-1)u(t-1) + h(t-1), \quad t = 1, 2, \dots$$

Здесь  $h(t)$  – неизвестное входное воздействие.

Синтезируем алгоритм расчета управляющего воздействия  $u(t)$  в каждый текущий момент времени  $t$  на основе информации о структуре модели и на основе измерений

$$x(t); x(t-1), u(t-1); \dots \quad (2.4.6)$$

входа и выхода объекта, чтобы достигалась цель управления: движение системы по заданной траектории  $x^*$ . Затем проанализируем качество полученного управления.

Формируем модель объекта

$$y(k | \alpha(t)) = x(k-1)u(k-1) + \alpha(t). \quad (2.4.7)$$

Параметр  $\alpha(t)$ , как и для линейного объекта (пример 2.2.1), оценивает неизвестное внешнее возмущение  $h(t)$  объекта.

Вычислим  $\alpha(t)$  на основе простейшего адаптивного алгоритма, приравнивая выход модели  $y(t | \alpha(t))$  и выход объекта  $x(t)$  в момент времени  $t$ :

$$x(t) = x(t-1)u(t-1) + \alpha(t). \quad (2.4.8)$$

Получаем параметр

$$\alpha(t) = x(t) - x(t-1)u(t-1). \quad (2.4.9)$$

Для расчета управления  $u(t)$  по модели (2.4.7) прогнозируем выход объекта для следующего момента времени  $t+1$

$$y(t+1 | \alpha(t)) = x(t)u(t) + \alpha(t). \quad (2.4.10)$$

Из локального квадратичного критерия оптимальности

$$I(u) = (y(t+1 | \alpha(t)) - x^*(t+1))^2 = \min_{u_1(t) \leq u(t) \leq u_2(t)} \quad (2.4.11)$$

рассчитываем оптимальное управление:

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t), & \text{если } v(t) \leq u_1(t), \\ v(t), & \text{если } u_1(t) \leq v(t) \leq u_2(t), \\ u_2(t), & \text{если } u_2(t) \leq v(t). \end{cases} \quad (2.4.12)$$

Идеальное управление  $v(t)$  (без учета ограничения на  $u$ ) обеспечивает абсолютный минимум функции  $I(u)$ :

$$\begin{aligned}\frac{dI(u)}{du} &= 2(y(t+1 | \alpha(t)) - x^*(t+1)) = 0, \\ y(t+1 | \alpha(t)) &= x^*(t+1), \quad x(t)v(t) + \alpha(t) = x^*(t+1), \\ v(t) &= \frac{x^*(t+1) - \alpha(t)}{x(t)}\end{aligned}\tag{2.4.13}$$

Проведём анализ полученных результатов.

Вычислим ошибку работы системы для следующего момента времени  $t+1$  (ибо она зависит от найденного управления  $u(t)$ ):

$$\varepsilon_0(t+1) = x(t+1) - x^*(t+1).\tag{2.4.14}$$

Подставим  $x(t+1)$  из уравнения движения объекта (2.2.10):

$$x(t+1) = x(t)u(t) + h(t),$$

а  $x^*(t+1)$  – из уравнения (2.4.13) для идеального управления  $v(t)$  (без учета ограничений)

$$x^*(t+1) = x(t)v(t) + \alpha(t).$$

Получим, что

$$\varepsilon_0(t+1) = [h(t) - \alpha(t)] + [x(t)(u(t) - v(t))] = \varepsilon_1(t+1) + \varepsilon_2(t+1).\tag{2.4.15}$$

**Пример 2.4.2.** Считаем теперь, что нелинейный объект описывается разностным уравнением

$$x(t) = ax(t-1)u(t-1) + e(t), \quad t = 1, 2, \dots$$

Здесь  $a$  – неизвестный коэффициент,  $e(t)$  – ограниченный по амплитуде «белый» шум  $|e(t)| \leq \bar{e}$ .

Строим модель объекта

$$y(k | \alpha(t)) = \alpha(t)x(k-1)u(k-1).$$

Из условия максимальной близости выходов модели  $y(t | \alpha(t))$  и объекта в момент  $t$  находим параметр модели:

$$x(t) = \alpha(t)x(t-1)u(t-1), \quad \alpha(t) = \frac{x(t)}{x(t-1)u(t-1)}.$$

Управляющее воздействие  $u(t)$  вычислим из квадратичного критерия:  $(y(t+1 | \alpha(t)) - x^*(t+1))^2 = \min$ , где  $u_1 \leq u(t) \leq u_2$ , и получим, что

$$u(t) = \begin{cases} u_1, & \text{если } v(t) \leq u_1, \\ v(t), & \text{если } u_1 \leq v(t) \leq u_2, \\ u_2, & \text{если } u_2 \leq v(t), \end{cases}$$

$$v(t) = \frac{x^*(t+1)}{\alpha(t)x(t)}.$$

Алгоритм системы управления построен. Структурная схема системы представлена на рис. 2.4.2. Оценим теперь качество работы замкнутой системы.

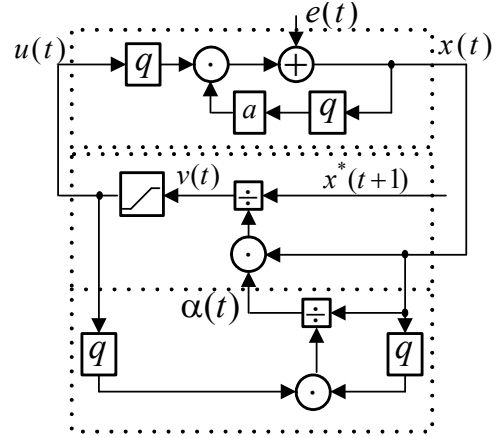


Рис. 2.4.2

Ошибка работы системы равна величине

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(t+1) &= x(t+1) - x^*(t+1) = [x(t+1) - y(t+1 | \alpha(t))] + \\ &+ [y(t+1 | \alpha(t)) - x^*(t+1)] = [ax(t)u(t) + e(t+1) - \alpha(t)x(t)u(t)] + \\ &+ [\alpha(t)x(t)u(t) - \alpha(t)x(t)v(t)] = [a - \alpha(t)]x(t)u(t) + \\ &+ [u(t) - v(t)]\alpha(t)x(t) + e(t+1) = \varepsilon_1(t+1) + \varepsilon_2(t+1) + e(t+1). \end{aligned}$$

Она состоит из ошибки идентификации  $\varepsilon_1(t+1)$ , ошибки  $\varepsilon_2(t+1)$ , вызванной ограниченностью управления, и помехи  $e(t+1)$ .

Ошибка идентификации

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(t+1) &= \left[ \frac{x(t)}{x(t-1)u(t-1)} - \frac{e(t)}{x(t-1)u(t-1)} - \frac{x(t)}{x(t-1)u(t-1)} \right] x(t)u(t) = \\ &= \frac{x(t)u(t)}{x(t-1)u(t-1)} e(t) = -\alpha(t)u(t)e(t). \end{aligned}$$

Если помеха  $e(t)$  равна нулю, то ошибка идентификации тоже нулевая. Если помеха ограничена  $|e(t)| \leq \bar{e}$ , то ограничена и ошибка идентификации  $|\varepsilon_1(t+1)| \leq |\alpha(t)u(t)| \bar{e}$ .

Рассмотрим частный вариант предыдущего примера. Объект описывается нелинейным разностным уравнением

$$x(t) = ax(t-1)u(t-1), \quad t \geq 1, \quad x(0) = u(0) = 1,$$

где  $a$  – неизвестный параметр, а на управление  $u(t)$  не наложено ограничений.

На каждом такте  $t$  после измерения выхода объекта  $x(t)$  идентификатор вычисляет оценку неизвестного параметра  $a$  :

$$\alpha(t) = \frac{x(t)}{x(t-1) u(t-1)}.$$

Затем управляющее устройство рассчитывает и подает на объект управление

$$u(t) = v(t) = \frac{x(t-1) u(t-1)}{\alpha(t) x(t)}.$$

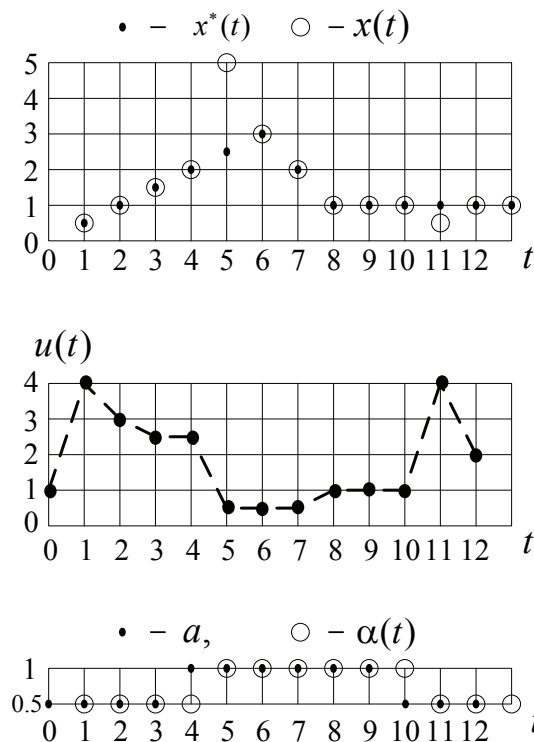


Рис. 2.4.3

Отклонение выхода системы  $x(t+1)$  от заданной траектории  $x^*(t+1)$  равно только ошибке идентификации

$$x(t+1) - x^*(t+1) = (a - \alpha(t))x(t)u(t).$$

Заметим, что если параметр  $a$  постоянен в моменты времени  $t = \overline{k, k+l}$ , то он точно оценивается идентификатором в моменты  $t = \overline{k+1, k+l}$ , и система точно движется по назначенной траектории  $x^*(t+1)$  ( $t = \overline{k+1, k+l}$ ). На рис. 2.4.3 представлен отрезок реализаций для  $x, x^*, u, a, \alpha$ .

## 2.5. Стабилизация движения двухколесного экипажа

Динамические свойства управляемого двухколесного экипажа (велосипеда), движущегося с постоянной скоростью, описываются обыкновенным линейным дифференциальным уравнением [2.3]

$$\ddot{x}(t') - a'_1 \dot{x}(t') = a'_2 u(t') + a'_3 u(t') + \xi'(t'), \quad (2.5.1)$$

$$t' > 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x'_0$$

Здесь  $c, l, h'$  – конструктивные параметры (м) (см. рис. 2.5.1);  $x(t')$  – угол (град) отклонения рамы от вертикали;  $u(t)$  – угол поворота руля;  $t'$  – непрерывное время (с);  $a'_1 = g/h'$ ,  $a'_2 = V^2/(h'c)$ ,  $a'_3 = lV/(h'c)$ ,  $V$  – скорость (м/с) движения экипажа;  $g$  – ускорение (м/с<sup>2</sup>) свободного падения;  $\xi'(t')$  – возмущения, вызванные неровностями дороги, ветром и др. Уравнение (2.5.1) справедливо только для  $|x(t')| \leq \rho$ . При превышении отклонения  $x(t')$  величины  $\rho$  экипаж совершает падение, и его необходимо вновь устанавливать в исходное состояние и отпускать. Считаем, что  $t' = 0$  соответствует начальному запуску объекта, а также запуску после каждого падения или вынужденной остановки. Экипаж устанавливают почти вертикально и отпускают, при этом  $|x(0)| \leq \varepsilon_0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ , и он движется с постоянной скоростью  $V$ . Заметим, что при  $u'(t) = 0$  объект неустойчив (ибо  $a'_1 > 0$ ), и экипаж падает.

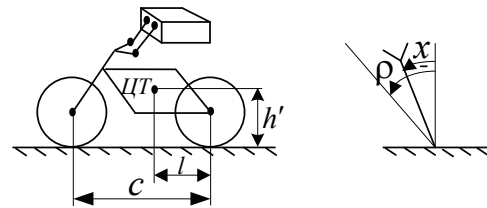


Рис. 2.5.1

свободного падения;  $\xi'(t')$  – возмущения, вызванные неровностями дороги, ветром и др. Уравнение (2.5.1) справедливо только для  $|x(t')| \leq \rho$ . При превышении отклонения  $x(t')$  величины  $\rho$  экипаж совершает падение, и его необходимо вновь устанавливать в исходное состояние и отпускать. Считаем, что  $t' = 0$  соответствует начальному запуску объекта, а также запуску после каждого падения или вынужденной остановки. Экипаж устанавливают почти вертикально и отпускают, при этом  $|x(0)| \leq \varepsilon_0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ , и он движется с постоянной скоростью  $V$ . Заметим, что при  $u'(t) = 0$  объект неустойчив (ибо  $a'_1 > 0$ ), и экипаж падает.

Рулевой механизм по сигналам от устройства управления в моменты времени  $t' = 0, \delta, 2\delta, \dots, t\delta, \dots$  быстро поворачивает руль в заданные положения и оставляет руль в этих положениях в течение интервала времени между указанными дискретами, т. е. управление является кусочно-постоянной функцией времени:

$$u(t') = u(t), \quad t\delta \leq t' < (t+1)\delta, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5.2)$$

Измерительный механизм также фиксирует величины  $x(t')$  в дискретные моменты  $t' = t\delta$  ( $t = 0, 1, 2, \dots$ ).

С учетом дискретности управления (2.5.2) переходим от непрерывного уравнения объекта (2.5.1) к дискретному

$$x(1) = (a_1/2)x(0) + \xi(0);$$

$$x(t+1) = a_1 x(t) + a_2 x(t-1) + a_3 u(t) + a_4 u(t-1) + \xi(t), \quad (2.5.3)$$

$$t = 1, 2, \dots,$$

где

$$u(0) = 0; \quad a_1 = 2ch\gamma; \quad a_2 = -1; \quad a_3 = [a'_2(ch\gamma - 1) + a'_3\sqrt{a'_1}sh\gamma] / a'_1;$$

$$a_4 = [a'_2(ch\gamma - 1) - a'_3\sqrt{a'_1}sh\gamma] / a'_1; \quad \gamma = \delta\sqrt{a'_1};$$

$\xi(t)$  – дискретное возмущение, порожденное помехой  $\xi'(t')$ .

Необходимо стабилизировать движение двухколесного экипажа в положении  $x^*(t) = 0$  при неизвестных параметрах  $c, h, l, V$  (либо параметрах  $a_1 \div a_4$ ) и неизвестной ограниченной по амплитуде помехи  $\xi(t)$  (т. е.  $|\xi(t)| < \xi_1$ ) и с учетом ограниченности управляющего воздействия, т. е.  $|u(t)| \leq u_1$ .

Опишем алгоритмы адаптивного управления. В момент времени  $t$  снимается информация о положении объекта  $x(t)$ , производится перестройка параметров модели, рассчитывается и подается на рулевой механизм управляющее воздействие  $u(t)$ . В следующий дискретный момент времени  $t+1$ , соответствующий реальному времени  $t' = (t+1)\delta$ , все операции повторяются.

В идентификаторе реализуем простейший одношаговый (с минимальной памятью) алгоритм коррекции параметров модели. Модель объекта (2.5.3) (при условии, что помеха является дискретным «белым» шумом) имеет вид

$$y(k|\alpha(t)) = \alpha_1(t)x(k-1) + \alpha_2(t)x(k-2) +$$

$$+ \alpha_3(t)u(k-1) + \alpha_4(t)u(k-2) = \alpha^T(t)\varphi(k) \equiv \varphi^T(k)\alpha(t). \quad (2.5.4)$$

При  $k=t$  приравниваем выход модели  $y(t, \alpha(t))$  и измеренный выход объекта  $x(t)$

$$x(t) = y(t|\alpha(t)). \quad (2.5.5)$$

Это уравнение относительно  $\alpha(t)$  имеет бесчисленное множество решений. Для получения единственного решения применим оператор псевдообращения и будем отыскивать вначале не сами параметры, а их коррекцию  $\Delta\alpha(t)$ . Обозначим  $\alpha(t) = \alpha(t-1) + \Delta\alpha(t)$ , и тогда равенство (2.5.5) приобретет вид

$$x(t) - y(t|\alpha(t-1)) = y(t|\Delta\alpha(t)) \equiv \varphi^T(t)\Delta\alpha(t). \quad (2.5.6)$$

Теперь найдём вектор  $\Delta\alpha(t)$ , удовлетворяющий этому уравнению и имеющий минимальный квадрат нормы

$$\|\Delta\alpha(t)\|^2 = \min, \quad (2.5.7)$$

т. е. (п. 5.3)

$$\alpha(t) = \alpha(t-1) + (\varphi^T(t))^+ (x(t) - y(t, \alpha(t-1))), \quad (2.5.8)$$

$$(\varphi^T(t))^+ = \frac{\varphi(t)}{\varphi^T(t)\varphi(t)} = \frac{\varphi(t)}{x^2(t-1) + x^2(t-2) + u^2(t-1) + u^2(t-2)}.$$

Скорректировав параметры модели, вычислим прогноз выхода объекта для момента времени  $t+1$ :

$$y(t+1 | \alpha(t)) = \alpha_1(t)x(t) + \alpha_2(t)x(t-1) + \alpha_3(t)u(t) + \alpha_4(t)u(t-1) \quad (2.5.9)$$

и из условия минимума рассогласования прогнозируемого значения и назначаемой траектории  $x^*(t+1) = 0$  найдем управляющее воздействие

$$u(t) = -\alpha_3^+(t)(\alpha_1(t)x(t) + \alpha_2(t)x(t-1) + \alpha_4(t)u(t-1)), \quad (2.5.10)$$

$$\alpha_3^+ = \begin{cases} \alpha_3^{-1}, & \text{если } |\alpha_3| \geq \varepsilon, \\ 0, & \text{если } |\alpha_3| < \varepsilon. \end{cases}$$

Считаем, что переход управления  $u(t)$  за допустимый интервал  $[-u_1, u_1]$  равносильен падению экипажа.

Рассмотрим работу системы управления, состоящей из велосипеда и робота-велосипедиста, в которой реализованы алгоритмы идентификации и управления.

Имитация объекта (2.5.3) была проведена при следующих значениях параметров:  $c = 1,1$ ;  $l = 0,7$ ;  $h' = 0,6$ ;  $V = 6$ ;  $g = 9,81$ ;  $\delta = 0,2$ . Параметры объекта оказались следующими:  $a_1 = 2,69$ ;  $a_2 = -1$ ;  $a_3 = 2,42$ ;  $a_4 = -0,12$ . Были заданы также параметры, характеризующие начальное положение объекта  $\varepsilon_0 = 0,1^\circ$  (т. е.  $|x(0)| \leq \varepsilon_0$ ,  $x(0) = 0$ ), допустимую область для  $x(t)$  и  $u(t)$ ,  $\rho = u_1 = 45^\circ$  (т. е.  $|x(t)| \leq \rho$ ,  $|u(t)| \leq u_1$ ) и уровень помех  $\xi_1$  (т. е.  $|\xi(t)| \leq \xi_1$ ). Последний параметр является варьируемым (рис. 2.5.2). Длительность разового экспериментирования на объекте (игры) была принята равной 60 с, что при длительности одной дискреты, равной  $\delta = 0,2$  с, соответствует 300 тактам для дискретного уравнения объекта (2.5.3).

Основными выходными характеристиками замкнутой системы управления (робот-велосипедист-велосипед) были приняты:  $T_0$  – время обучения, за которое условно было принято время последнего падения;  $N$  – число падений за время обучения.

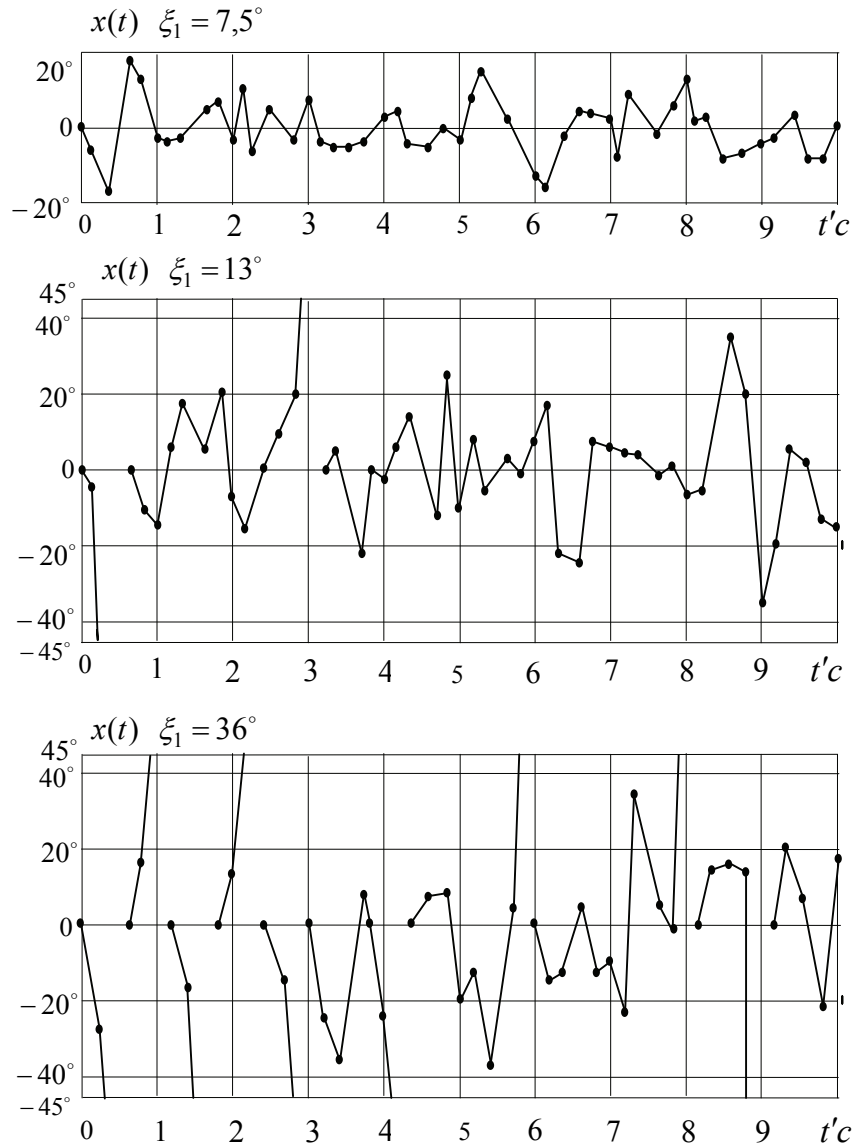


Рис. 2.5.2

В модели объекта (2.5.4) в начале каждой игры исходные приближения параметров  $\alpha_1(0)$ ,  $\alpha_2(0)$ ,  $\alpha_4(0)$  были приняты нулевыми, а параметр  $\alpha_3(0)$  варьировался. Такая стратегия обусловлена тем, что наибольшее влияние на процесс обучения оказывает  $\alpha_3(0)$ .

На рис. 2.5.2 отражено типичное поведение выходной координаты объекта  $x(t)$  при различных уровнях помех  $\xi_1 = 7,5^\circ; 13^\circ; 36^\circ$  и при

$\alpha_4(0) = 2$ . При малом уровне помех  $|\xi(t)| \leq 7,5^\circ$  процесс обучения проходит без падений. С течением времени параметры модели существенно перестраиваются, а затем совершают колебания (вызванные помехами) в стационарной области. Выходная координата объекта лежит внутри области  $|x(t)| \leq 10^\circ$ , которая несколько шире (за счет ошибки идентификации) области действия помехи  $\xi(t)$ . С увеличением интенсивности помехи  $|\xi(t)| \leq 13^\circ$  в период обучения робота-велосипедиста экипаж совершает падения. После окончания процесса обучения координата состояния объекта лежит в пределах  $|x(t)| \leq 18^\circ$ . При большом уровне помех  $|\xi(t)| \leq 36^\circ$  падения происходят до самого конца игры, и в среднем не удается после обучения обеспечить стабилизацию объекта:  $|x(t)| \leq 45^\circ$ .

Получены графики зависимостей времени обучения  $T_0$  и числа падений  $N$  за время  $T_0$  от интенсивности помехи  $\xi_1$ . Каждая точка графика представляет собой среднее значение по двадцати реализациям. Лучшие результаты получены при достаточно больших положительных значениях исходного приближения параметра  $\alpha_3(0)$  (см. рис. 2.5.3 при  $\alpha_3(0) = 100$  и рис. 2.5.4 при  $\alpha_3(0) = 50$ ) и при  $\alpha_3(0)$ , близком к истинному  $a_3 = 2,42$  (см. рис. 2.5.5 при  $\alpha_3(0) = 2$ ).

Если  $\alpha_3(0)$  близко к нулю или равно отрицательным величинам, то результаты существенно хуже (см. рис. 2.5.6 при  $\alpha_3(0) = 0,01$  и рис. 2.5.7 при  $\alpha_3(0) = -10$ ). Ограничение графика  $T_0(\xi_1)$  уровнем 60 с обусловлено принятой длительностью игры.

Синтезированный алгоритм работы робота-велосипедиста позволяет приспособливаться к изменению параметров объекта, что равносильно перестановке робота-велосипедиста с одного велосипеда на другой. Они отличаются размерами и скоростью движения. Графики, иллюстрирующие качество работы системы, приведены на рис. 2.5.8. На первом графике показано изменение во времени координаты  $x(t')$  объекта, а на втором – величины

$$S(t') = \frac{1}{a_3} \sqrt{\left(\frac{a_1}{a_3} - \frac{\alpha_1(t')}{\alpha_3(t')}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{a_3} - \frac{\alpha_2(t')}{\alpha_3(t')}\right)^2 + \left(\frac{a_4}{a_3} - \frac{\alpha_4(t')}{\alpha_3(t')}\right)^2},$$

характеризующей качество работы идентификатора. При  $\alpha_1 = a_1$ ,  $\alpha_2 = a_2$ ,  $\alpha_3 = a_3$ ,  $\alpha_4 = a_4$  величина  $S = 0$ . Если  $S(t' = t^*) < S_1$ , то при  $t' > t^*$   $|x(t)| < x_1$ .

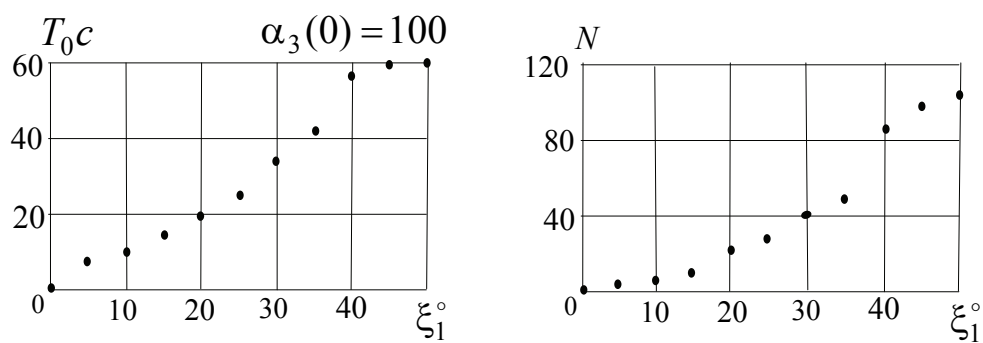


Рис. 2.5.3

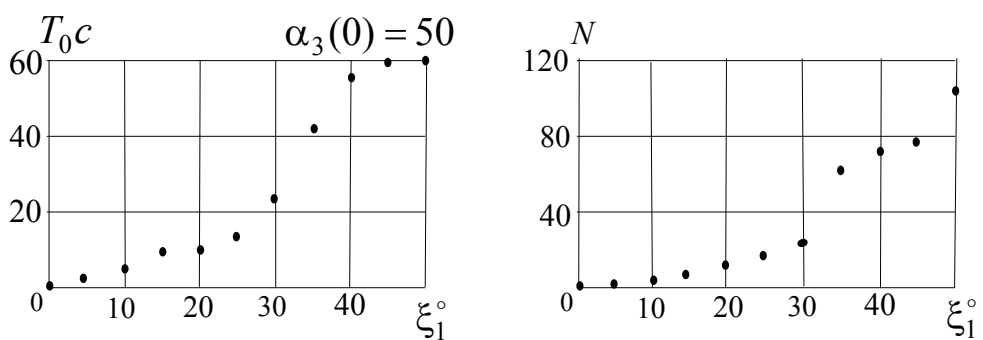


Рис. 2.5.4

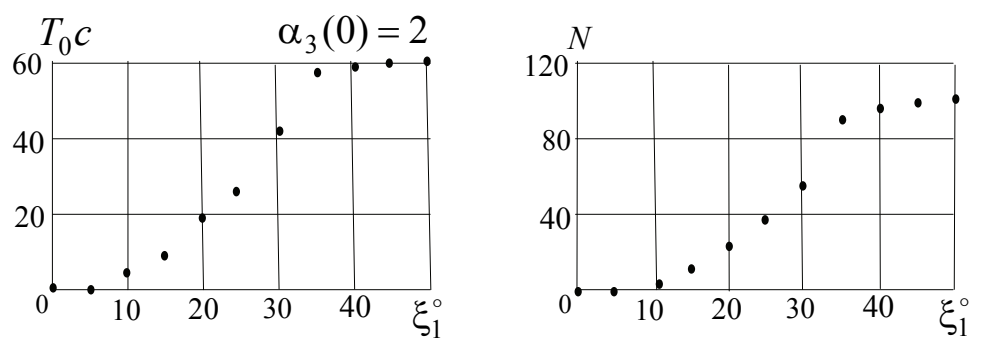


Рис. 2.5.5

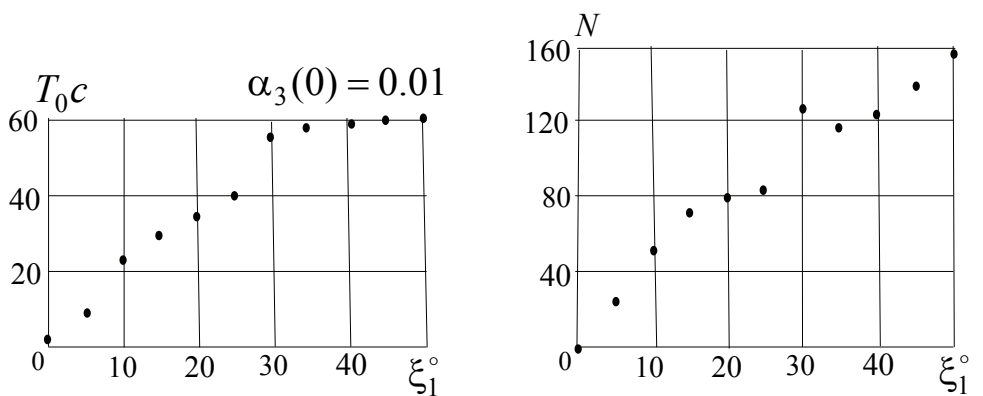


Рис. 2.5.6

При  $0 \leq t' < 5$  с производится управление объектом с параметрами  $c = 1,1$ ;  $l = 0,7$ ;  $h' = 0,6$ ;  $V = 6$ ;  $g = 9,81$ ;  $\delta = 0,2$ , а также при  $\alpha_3(0) = 0,01$  и  $\xi_1 = 2$ . На начальной стадии обучения экипаж совершает два падения. Величина  $S$  вначале резко нарастает из-за резкой перестройки параметров модели, а затем совершает колебания у границы зоны стабилизации  $S_1$ .

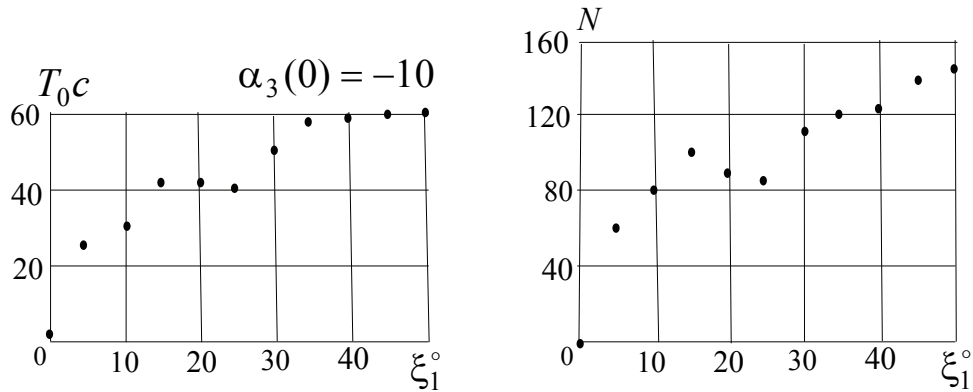


Рис. 2.5.7

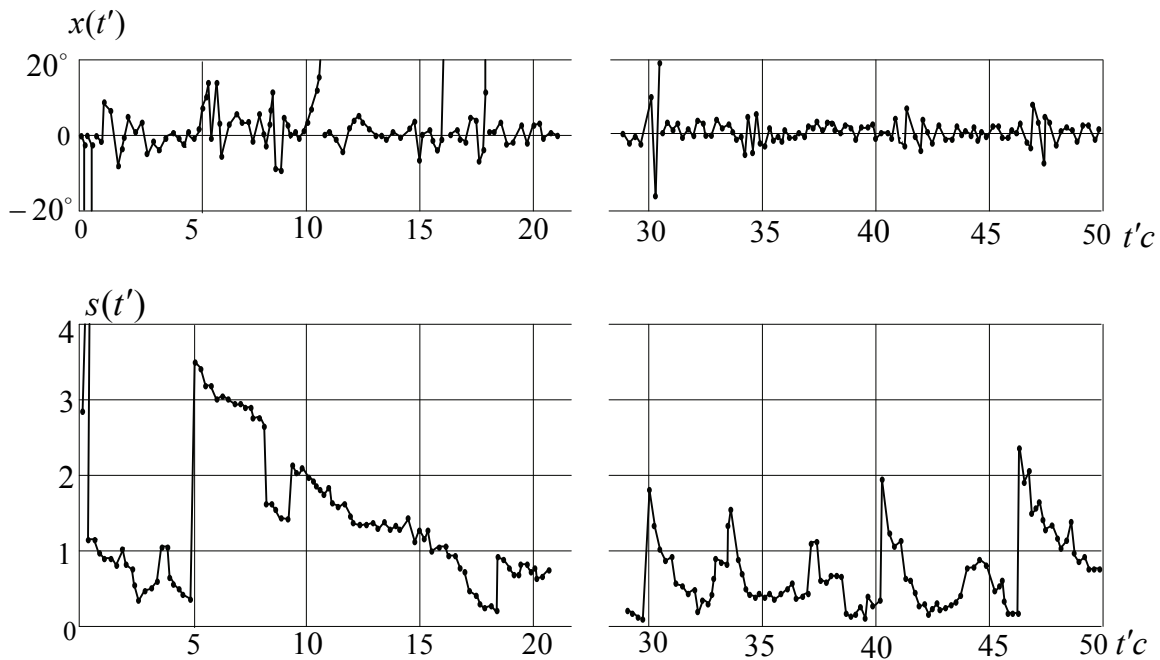


Рис. 2.5.8

В момент  $t' = 5$  с меняется высота велосипеда  $h' = 10$  (в предыдущем случае было  $h' = 0,6$ ). Параметры объекта (2.5.3) принимают значения  $a_1 = 2,04$ ;  $a_2 = -1$ ;  $a_3 = 4,0$ ;  $a_4 = -3,87$ . Величина  $S$  резко увеличивается, велосипед раскачивается, идентификатор корректирует параметры модели, и со временем (при  $5c < t < 10c$ ) стабилизация улучшается.

В момент времени  $t' = 10$  с уменьшается скорость велосипеда до величины  $V = 0,5$  (ранее было  $V = 6$ ). Параметры объекта принимают значения  $a_1 = 2,04$ ;  $a_2 = -1$ ;  $a_3 = 0,33$ ;  $a_4 = -0,33$ . На начальной стадии обучения происходит одно падение, а затем после установки велосипеда наблюдается хорошая стабилизация.

В момент  $t' = 15$  с параметры  $c$  и  $l$  полагаются нулевыми (ранее они были  $c = 1,1$ ;  $l = 0,7$ ), т. е. робот-велосипедист переставляется на велосипед с одним колесом. Тогда  $a_1 = 2,04$ ;  $a_2 = -1$ ;  $a_3 = a_4 = 0,72$ . Сразу же происходит падение экипажа, а затем в процессе обучения – еще два падения. При  $18\text{ с} < t < 30\text{ с}$  робот осуществляет хорошую ( $|x(t)| \leq 2,5^\circ$ ) стабилизацию велосипеда.

В момент  $t' = 30$  вновь задаются исходные параметры  $c = 1,1$ ;  $l = 0,7$ ;  $h' = 0,6$ ;  $V = 6$  ( $a_1 = 2,69$ ;  $a_2 = -1$ ;  $a_3 = 2,42$ ;  $a_4 = -0,12$ ). Экипаж совершает одно падение, а затем наблюдается стабилизация. Периодически (видимо, из-за ухудшения качества идентификации) увеличивается величина  $S$  и возрастает раскачивание экипажа. По мере уменьшения  $S$  раскачивание уменьшается. Следовательно, для существенного улучшения качества управления необходимо повышать качество идентификации.

## 2.6. Адаптивное управление дуговыми сталеплавильными печами

Алгоритмы адаптивного управления процессами расплавления шихты и доведения температуры жидкого металла до заданного уровня в дуговой сталеплавильной печи опубликованы в статье [2.4]. Детальное описание технологических процессов, представленных в пп. 2.6, 4.1, 4.2, содержится в диссертации [2.5], выполненной под научным руководством автора монографии.

Плавка стали в дуговых сталеплавильных печах (ДСП) представляет собой циклический технологический процесс, для которого характерно чередование строгой последовательности производственных операций и этапов. Процесс плавки в дуговой сталеплавильной печи можно разделить на следующие основные технологические периоды: заправка печи; загрузка шихты (завалка); расплавление шихты; окислительный период; восстановительный период; выпуск готового продукта.

Заправка печи производится после окончания цикла предыдущей плавки и имеет цель: подготовить печь к очередному технологическому циклу. В период заправки выполняются операции по чистке плавильного

агрегата и устранению незначительных повреждений футеровки, образовавшихся в процессе плавки. Очистка дуговой сталеплавильной печи от остатков металла и шлака после выпуска стали крайне сложна. Затяжка этой операции увеличивает непроизводительное время простоя печи и приводит к её охлаждению, вследствие этого понижается экономическая эффективность производственного процесса плавки.

Эффективность плавки стремятся повысить за счет применения более эффективных средств механизации и правильной эксплуатации печей. При этом используют прогрессивные технологические схемы ведения процесса, точно реализуют рассчитанные оптимальные режимы в окислительный и восстановительный периоды, сокращают время выдержки расплава в печи и стремятся получить к моменту окончания слива металла в ковш шлак с заданными физико-химическими свойствами (составом и текучестью). В этом случае футеровка подины и откосов печи в меньшей мере пропитываются окислами железа, мало размягчаются, что в конечном счете способствует тому, что основной шлак перед выпуском плавки остается жидкоподвижным и вытекает из печи с жидким металлом, практически не оседая на футеровке.

Очищенную от остатков шлака и металла печь устанавливают в рабочее положение и после отворота свода заправляют футеровку подины и откосов магнезитовым порошком с помощью центробежной машины. Продолжительность этой рабочей операции составляет около двух минут. Затем при необходимости заправляют футеровку передней стенки печи огнеупорными материалами с помощью заправочной машины ленточного типа. Для этого заправочную машину заполняют магнезитом, мостовым краном подают к печи и устанавливают против рабочего окна. Заправка печи огнеупорными материалами осуществляется с применением центробежных и ленточных заправочных машин.

Во всех ДСП загрузка шихты (завалка печи) выполняется сверху бадьями (корзинами). На участке шихтоподготовки оптимальная по насыпной плотности и химическому составу завалка переносится мостовым краном к печи и вводится в нее. Во избежание повреждения футеровки подины кусками загружаемого лома бадью опускают в печь возможно ниже – примерно на расстояние 30–40 см от пода. Для ослабления ударного действия падающих кусков предварительно засыпают 2–3 мульды легковесного лома. Для частичного удаления фосфора из металла в период его расплавления и ускорения дефосфорации ванны в окислительный период в завалку вместе с металлошихтой вводят известь (2–3 % от общего объема завалки), которую помещают в бадью на металлическую шихту. Продолжительность завалки зависит от способа завалки, емкости печи, сортамента выплавляемой стали и состава металлошихты в завалке.

По окончании завалки свод надвигают на печь, опускают электроды, зажигают электрические дуги. Начинается период расплавки шихты. В течение каждого технологического цикла плавки в кладке печи совершается сложный термодинамический процесс аккумуляирования и отдачи тепла. В периоды расплавления, окисления и восстановления жидкой ванны, а также футеровки печи накапливается количество тепла, соответствующее примерно 20 % от общих затрат электроэнергии на плавку.

### Постановка задачи

**Анализ технологического периода расплавления шихты.** Выплавка стали осуществляется в дуговых сталеплавильных печах, например, ДСП–12.

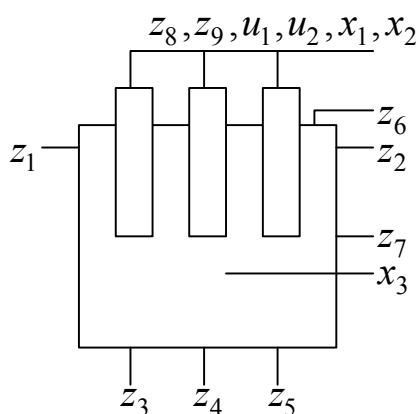


Рис. 2.6.1

Основными входными контролируемыми переменными ДСП, оказывающими влияние на всех стадиях расплавления и последующего нагрева жидкого металла, являются (см. рис. 2.6.1):  $z_1(t)$  – температура воды, охлаждающей сводовое кольцо на входе;  $z_2(t)$  – температура воды, охлаждающей сводовое кольцо на выходе;  $z_3(t)$  – температура днища печи в первой точке;  $z_4(t)$  – температура днища печи во второй точке;  $z_5(t)$  – температура днища печи в третьей точке;  $z_6(t)$  – температура свода печи;  $z_7(t)$  – температура кожуха печи;  $z_8(t)$  – напряжение во вторичной цепи печного трансформатора;  $z_9(t)$  – ток во вторичной цепи печного трансформатора;  $u_1(t)$  – ступень напряжения во вторичной цепи печного трансформатора;  $u_2(t)$  – значение токовой уставки для регуляторов положения электродов. Выходные переменные:  $x_1(t)$  – реактивная мощность;  $x_2(t)$  – активная мощность;  $x_3(t)$  – температура жидкого металла. Здесь  $\{z_i(t)\}$  – входные контролируемые переменные;  $\{u_i(t)\}$  – входные управляющие переменные;  $\{x_i(t)\}$  – выходные контролируемые переменные.

Процесс расплавления шихты характеризуется переменными:  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  (выходные переменные);  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  (управляющие воздействия);  $z_8(t)$ ,  $z_9(t)$  (входные контролируемые переменные). По  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  формируется одна выходная переменная  $x(t) = x_1(t) / x_2(t)$ , называемая «под-

строчным параметром». В дальнейшем в соответствии с общими схемами адаптивного оптимального управления [2.1, 2.2] строятся алгоритмы коррекции параметров модели и синтеза управляющих воздействий (для каждого текущего момента времени).

Период расплавления шихты разбит на три стадии: 1) заглубление электродов на  $1,5d$ , где  $d$  – диаметр электрода; 2) проплавление колодцев; 3) основное расплавление. При работе печи до последней подвалки режим работы печи характеризуется чередованием двух первых стадий, причем необходим переход от второй стадии к первой. После последней подвалки режим работы печи начинается с первой стадии, затем следуют вторая и третья стадии. Это относится и к случаю, когда металлошихта завалена в печь в один прием. При переводе печи с одной стадии на другую и стабилизации выходной переменной  $x(t)$  приходится учитывать динамику процесса плавки.

Комплекс задач динамического управления электрическим режимом плавки предназначен для непрерывного автоматического управления электрическим режимом расплавления шихты и доведения температуры жидкого металла до заданного значения. Решаются следующие задачи: расчет подстрочного коэффициента  $x(t) = x_1(t) / x_2(t)$ ; заглубление трех электродов с расчётом не менее  $1,5 d$ ; проплавление колодцев и выход на жидкую ванну; основное расплавление; определение момента взятия пробы и измерение температуры металла; нагрев ванны жидкого металла до заданной температуры. Цели достигаются за счёт управления переключателем ступеней напряжения  $u_1(t)$  и положением электродов  $u_2(t)$  – значением токовой уставки для регуляторов положения электродов. Если при формировании исходных данных не возникли дополнительные ограничения, то в качестве исходной ступени напряжения всегда выбирается наивысшая ступень напряжения (8-я). Момент наступления каждой стадии определяется по ряду признаков: для первой стадии – появление сигнала «свод закрыт»; для второй стадии – рабочее перемещение электродов вниз и заглубление их на  $1,5 d$ ; для третьей стадии – отсутствие рабочих перемещений электродов вниз (отсутствие постоянного сигнала, определяющего перемещение последнего из электродов вниз), а также минимальный размах колебаний среднедействующего значения активной мощности печной установки.

Процесс нагрева ванны жидкого металла (до заданной температуры) характеризуется переменными:  $x_3(t)$  (выходная переменная);  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  (управляющие воздействия);  $z_1(t) - z_7(t)$  (входные контролируемые переменные). Для этой стадии также строятся алгоритмы коррекции параметров модели и синтеза управляющих воздействий (для каждого текущего

момента времени). Особенность этой фазы состоит в выборочном измерении температуры  $x_3(t)$ . После получения сообщения «замер температуры» сталевар опускает термозонд, который автоматически фиксирует температуру жидкого металла.

**Управление процессом расплавления шихты.** Динамические свойства процесса плавления можно описать разностными уравнениями. Использование дискретно-временных моделей позволяет получать алгоритмы управления, напрямую реализуемые на цифровой вычислительной технике, а адаптивная коррекция параметров (по мере поступления информации о входах и выходах объекта) позволяет применять простые структуры моделей.

Процесс плавления шихты описывается динамическим разностным уравнением

$$x(t) = a_0 + a_1x(t-1) + a_2u_1(t-1) + a_3u_2(t-1) + a_4z_8(t-1) + a_5z_9(t-1) + \xi(t). \quad (2.6.1)$$

Здесь  $\xi(t)$  – аддитивная помеха, в которую включаются все неточности описания объекта. Основная часть уравнения (без  $\xi(t)$ ) строится, например, по методу наименьших квадратов обработкой накопленных экспериментальных данных, т. е. за счет ретроспективной идентификации объекта. Полученный набор параметров является хорошим начальным приближением параметров при адаптивной идентификации в синтезируемом адаптивном устройстве управления.

На основе (2.6.1) строим динамическую модель в виде разностного динамического уравнения с двумя входными управляющими воздействиями  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  и с двумя входными возмущающими воздействиями  $z_8(t)$ ,  $z_9(t)$ :

$$\begin{aligned} y(k | \alpha(t)) &= \alpha_0(t) + \alpha_1(t)x(k-1) + \alpha_2(t)u_1(k-1) + \alpha_3(t)u_2(k-1) + \\ &+ \alpha_4(t)z_8(k-1) + \alpha_5(t)z_9(k-1) \equiv \varphi^T(k)\alpha(t), \\ \varphi^T(k) &= (1; x(k-1); u_1(k-1); u_2(k-1); z_8(k-1); z_9(k-1)), \\ \alpha^T(t) &= (\alpha_0(t); \alpha_1(t); \alpha_2(t); \alpha_3(t); \alpha_4(t); \alpha_5(t)). \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

Аргумент  $t$  в параметрах модели означает, что они построены на основе информации, поступившей к моменту  $t$ :

$$x(t), z_8(t), z_9(t); x(t-1), u_1(t-1), u_2(t-1), z_8(t-1), z_9(t-1); \dots \quad (2.6.3)$$

При коррекции параметров модели в момент  $t$  (при этом в модели (2.6.2) аргумент  $k$  принимает значения  $t, t-1, \dots$ ) можно использовать

весь спектр рекуррентных алгоритмов – см. гл. 5. Простейший адаптивный алгоритм (из класса проекционных алгоритмов) имеет вид

$$\alpha(t) = \alpha(t-1) + \frac{x(t) - \varphi^T(t)\alpha(t-1)}{\varphi^T(t)\varphi(t)}\varphi(t). \quad (2.6.4)$$

Для расчета управлений по модели (2.6.2) осуществляем прогноз выхода объекта на такт вперед

$$\begin{aligned} y(t+1 | \alpha(t)) &= \alpha_0(t) + \alpha_1(t)x(t) + \alpha_2(t)u_1(t) + \alpha_3(t)u_2(t) + \\ &+ \alpha_4(t)z_8(t) + \alpha_5(t)z_9(t) \equiv \varphi^T(t+1)\alpha(t) \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

и из локального критерия оптимальности

$$I = [y(t+1 | \alpha(t)) - x^*(t+1)]^2 = \min, \quad (2.6.6)$$

где  $u_1^1 \leq u_1(t) \leq u_1^2$ ,  $u_2^1 \leq u_2(t) \leq u_2^2$ , находим два оптимальных управления:

$$u_j(t) = \begin{cases} u_j^1, & v_j(t) \leq u_j^1, \\ v_j(t), & u_j^1 \leq v_j(t) \leq u_j^2, \\ u_j^2, & u_j^2 \leq v_j(t), \end{cases} \quad j = 1, 2, \quad (2.6.7)$$

$$v_j(t) = u_j(t) + \frac{x^*(t+1) - \hat{y}(t+1 | \alpha(t))}{\alpha_2^2(t) + \alpha_3^2(t)}\alpha_{j+1}(t), \quad j = 1, 2,$$

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+1 | \alpha(t)) &= \alpha_0(t) + \alpha_1(t)x(t) + \\ &+ \alpha_2(t)u_1(t-1) + \alpha_3(t)u_2(t-1) + \alpha_4(t)z_8(t) + \alpha_5(t)z_9(t). \end{aligned}$$

Здесь  $x^*(t+1)$  – желаемое значение выходной координаты объекта на такт вперед. В силу целочисленности управляющего воздействия  $u_1$  округляем полученные значения до ближайшего целого.

В (2.6.7) идеальные управления  $v_j(t)$ ,  $j = 1, 2$  рассчитываются также на основе простейшего адаптивного алгоритма.

**Численный пример.** Динамическое уравнение (2.6.1) ДСП, полученное на основе обработки экспериментальных данных, имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) &= -1,26 + 0,7572x(t-1) + 0,00359u_1(t-1) + 0,01113u_2(t-1) + \\ &+ 0,000496z_8(t-1) + 0,00030912z_9(t-1) + \xi(t). \end{aligned} \quad (2.6.8)$$

Интервал дискретизации равен 10 с, помеха  $\xi(t)$  не коррелирована во времени и равномерно распределена в интервале  $[-0,15; 0,15]$ .

Желаемые значения выходной переменной:  $x^* = 0,75$  – для первой стадии;  $x^* = 0,9$  – для второй стадии;  $x^* = 1,1$  – для третьей стадии. Первое управляющее воздействие ( $1 \leq u_1 \leq 8$ ) принимает целочисленные значения (ступень напряжения). Второе управляющее воздействие ( $0 \leq u_2 \leq 120$ ) измеряется в амперах (значение токовой уставки для регулятора положения электродов). Входное воздействие  $120 \leq z_8 \leq 318$  измеряется в вольтах. Входное воздействие  $0 \leq z_9 \leq 125$  измеряется в амперах.

В процессе адаптации модели её параметры совершают колебания в окрестности «истинных» параметров объекта (2.6.8). Графики их изменения особого интереса не представляют, они не приводятся. Графики изменения управляющих переменных и выхода замкнутой системы управления представлены на рис. 2.6.2. Качество управления хорошее.

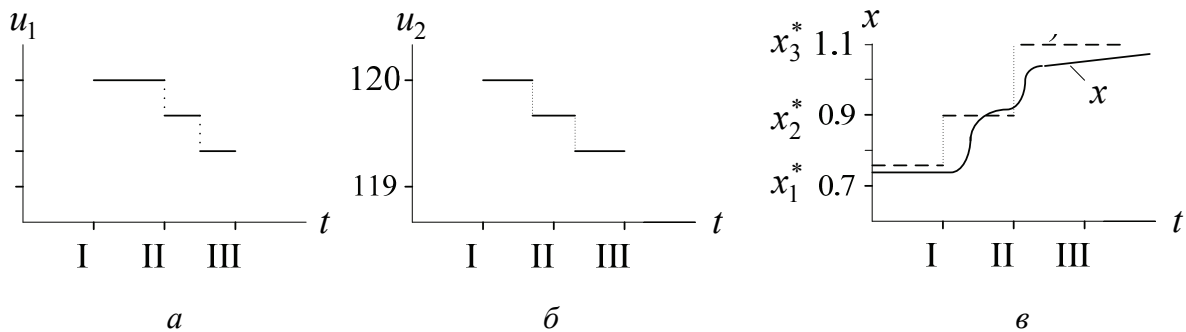


Рис. 2.6.2

**Управление процессом нагрева жидкого металла.** Динамические свойства процесса нагрева жидкого металла можно описать динамическим разностным уравнением:

$$\begin{aligned}
 x_3(t) = & a_0 + a_1 x_3(t-1) + a_2 u_1(t-1) + a_3 u_2(t-1) + \\
 & + a_4 z_1(t-1) + a_5 z_2(t-1) + a_6 z_3(t-1) + a_7 z_4(t-1) + a_8 z_5(t-1) + \\
 & + a_9 z_6(t-1) + a_{10} z_7(t-1) + \xi(t).
 \end{aligned}
 \quad (2.6.9)$$

Основная часть уравнения, как и в предыдущем случае, строится обработкой накопленных экспериментальных данных по методу наименьших квадратов. Полученный набор параметров является хорошим начальным приближением параметров модели при адаптивной идентификации. Уравнение (2.6.9) используется для имитации объекта при численных исследованиях алгоритмов адаптивного управления.

На основе (2.6.9) записываем структуру динамической модели:

$$\begin{aligned} y_3(k | \alpha(t)) = & \alpha_0(t) + \alpha_1(t)x_3(k-1) + \alpha_2(t)u_1(k-1) + \alpha_3(t)u_2(k-1) + \\ & + \alpha_4(t)z_1(k-1) + \alpha_5(t)z_2(k-1) + \alpha_6(t)z_3(k-1) + \alpha_7(t)z_4(k-1) + \\ & + \alpha_8(t)z_5(k-1) + \alpha_9(t)z_6(k-1) + \alpha_{10}(t)z_7(k-1) \equiv \varphi^T(k)\alpha(t). \end{aligned} \quad (2.6.10)$$

С учетом обозначений в (2.6.10) векторов  $\varphi$  и  $\alpha$  простейший адаптивный алгоритм (проеекционный алгоритм) [4] сохраняет свой вид (2.6.4).

Для расчета управлений по модели (2.6.10) осуществляем прогноз на такт вперед  $y_3(t+1) = \varphi^T(t+1)\alpha(t)$  и из локального критерия оптимальности (2.6.6) с применением оператора псевдообращения получаем алгоритм (2.6.7), в котором вместо  $\hat{y}(t+1 | \alpha(t))$  необходимо поставить

$$\begin{aligned} \hat{y}_3(t+1 | \alpha(t)) = & \alpha_0(t) + \alpha_1(t)x_3(t) + \\ & + \alpha_2(t)u_1(t-1) + \alpha_3(t)u_2(t-1) + \sum_{i=1}^7 \alpha_{3+i}(t)z_i(t). \end{aligned} \quad (2.6.11)$$

**Численный пример.** Динамическое уравнение (2.6.9) процесса нагрева жидкого металла, полученное на основе обработки экспериментальных данных, имеет вид

$$\begin{aligned} x_3(t) = & 983 + 0,07719x_3(t-1) - 10,92u_1(t-1) - 0,08502u_2(t-1) + \\ & - 0,01786z_1(t-1) + 3,46z_2(t-1) + 0,1159z_3(t-1) - 0,007393z_4(t-1) + \\ & - 0,001691z_5(t-1) + 0,07449z_6(t-1) - 0,8044z_7(t-1) + \xi(t). \end{aligned} \quad (2.6.12)$$

Интервал дискретизации равен 10 с, помеха  $\xi(t)$  не коррелирована во времени и равномерно распределена в интервале  $[-30; 30]$ .

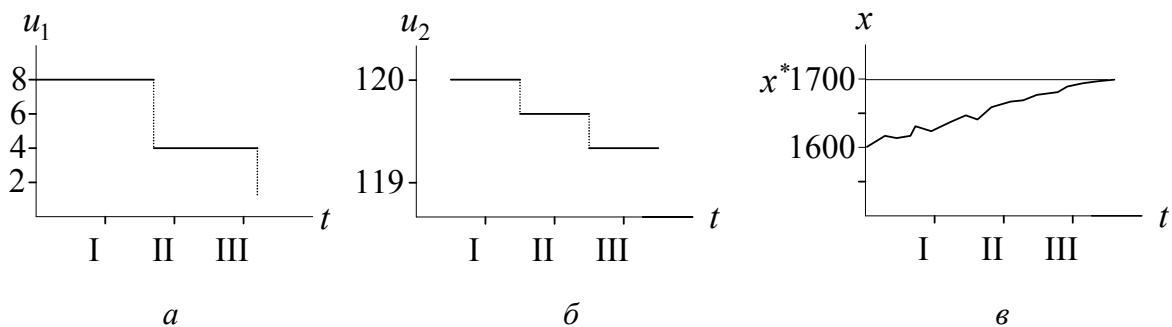


Рис. 2.6.3

Желаемые значения выходной переменной:  $x_3^* = 1700$  [°C]. Интервалы изменения выходной переменной и возмущающих воздействий:

$1550 \leq x_3 \leq 1700$  [°C],  $z_1 \approx 20$  [°C],  $z_2 \approx 100$  [°C],  $400 \leq z_i \leq 600$  [°C],  
 $i = 3, 4, 5$ ,  $300 \leq z_6 \leq 400$  [°C],  $40 \leq z_7 \leq 100$  [°C].

В процессе адаптации модели её параметры совершают колебания в окрестности «истинных параметров» объекта (2.6.12). Графики изменения управляющих переменных и выхода замкнутой системы управления представлены на рис. 2.6.3. Качество управления хорошее.

### Упражнения



Синтезируйте алгоритмы адаптивного управления для следующих объектов:

2.1.  $x(t) = bu(t-1) + h(t)$ ,  $b$  – известный коэффициент,  $h(t)$  – неизвестное возмущающее воздействие;

2.2.  $x(t) = bu(t-1) + h(t)$ ,  $b$  – неизвестный коэффициент;

2.3.  $x(t) = bu(t-1) + h(t) + ce(t-1) + e(t)$ ,  $e(t)$  – случайное воздействие типа «белого» шума;

2.4.  $x(t) = ax(t-1) + bu(t-1) + e(t)$ ;

2.5.  $x(t) = bu(t-1) + c_1e(t-1) + c_2e(t-2) + e(t)$ ;

2.6.  $x(t) = ax(t-1)u(t-1) + e(t)$ .

2.7.  $x(t) = x(t-1)u(t-1) + ce(t-1) + e(t)$ .

Наличие чистого запаздывания во времени между выходом и управляемым входом объекта – это физическое свойство реальных объектов. Примером служит большая удалённость объекта управления от устройства управления. При управлении луноходами и марсоходами с Земли посланное управляющее воздействие достигает объекта управления через время  $0,5\tau$ , а реакция на это воздействие (выход объекта) достигает пункта управления на Земле тоже через время  $0,5\tau$ . Следовательно, для земного устройства управления чистое запаздывание между измеряемым выходом объекта и управляющим воздействием составляет  $\tau$ .

Для распределённых в пространстве объектов выходная координата и управляющее воздействие находятся в различных точках объекта, и процесс взаимодействия между ними содержит чистое запаздывание во времени. Примерами служат: процесс нагрева металла в электролитических ваннах (п. 3.4) и процессы химических преобразований сырья в требуемые продукты в трубчатых печах – гл. 4.

### **3.1. Постановка задачи адаптивного управления**

Рассмотрим процесс построения алгоритмов идентификации и управления в адаптивных системах с идентификацией – АСИ.

Синтезируем алгоритм расчета управления (алгоритм работы устройства управления)  $u(t)$  в каждый текущий момент времени  $t$ . Исходными экспериментальными данными о входе и выходе объекта являются:  $x(t)$ ;  $x(t-1)$ ,  $u(t-1)$ ;  $x(t-2)$ ,  $u(t-2)$ ; .... Они включают последнее измерение выхода объекта  $x(t)$  и предыдущие синхронные измерения входа и выхода (они хранятся в памяти вычислительного устройства).

Рассчитаем управляющее воздействие  $u(t)$ , обеспечивающее достижение следующей цели: наименьшего отклонения выхода системы  $x$  от заданной траектории  $x^*$  в каждый текущий момент времени.

Считаем, что поведение объекта в динамическом режиме описывается разностным уравнением с чистым запаздыванием  $\tau$ :

$$x(t) = f(x(t-1), u(t-1-\tau), a) + \xi(t), \quad t = 1, 2, \dots \quad (3.1.1)$$

Здесь  $f(\cdot)$  – известная функция;  $a$  – неизвестные параметры;  $\xi(t)$  – «окрашенный» либо дискретный «белый» шум  $e(t)$ . Так как внимание сосредоточено на синтезе управлений (построении алгоритма работы регулятора), то для простоты считаем помеху  $\xi(t)$  «белым» шумом  $e(t)$ . Если шум «окрашенный» (см. гл. 1), то его можно представить в виде функции от  $e(t)$ ,  $e(t-1)$ , .... Параметры этой зависимости также доопределяются в процессе адаптивной идентификации.

### 3.2. Управление динамическими системами с чистым запаздыванием

Обозначим через  $y(k | \alpha(t))$  выход модели в момент времени  $k$  при значении вектора параметров  $\alpha(t)$ , вычисленных в момент времени  $t$ . Если шум  $[\xi(t) = e(t)]$  «белый», то

$$y(k | \alpha(t)) = f(x(k-1), u(k-1-\tau), \alpha(t)). \quad (3.2.1)$$

Эта модель используется как для целей идентификации параметров  $\alpha(t)$  (при этом  $k$  принимает значение  $t, t-1, \dots$ ), так и для расчета управления  $u(t)$  (при этом  $k$  последовательно полагаем равным  $t+1, t+2, \dots, t+\tau+1$ ).

При  $k = t+1, t+2, \dots, t+\tau+1$  из (3.2.1) получаем прогноз выхода объекта для последующих моментов времени:

$$\begin{aligned} y(t+1 | \alpha(t)) &= f(x(t), u(t-\tau), \alpha(t)), \\ y(t+2 | \alpha(t)) &= f(y(t+1 | \alpha(t)), u(t-\tau+1), \alpha(t)), \\ &\dots \\ y(t+\tau+1 | \alpha(t)) &= f(y(t+\tau | \alpha(t)), u(t), \alpha(t)). \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Здесь вместо неизвестных (ещё не измеренных) выходов объекта  $x(t+1), x(t+2), \dots$  стоят выходы модели в соответствующие моменты времени.

Параметры  $\alpha(t)$  поступают из идентификатора, где они рассчитываются по одному из адаптивных алгоритмов (см. гл. 5).

Неизвестным в правой части уравнения для  $y(t+\tau+1 | \alpha(t))$  является управление  $u(t)$ . Его вычисляем из условия наилучшего приближения выхода модели  $y(t+\tau+1 | \alpha(t))$  к значению  $x^*(t+\tau+1)$  желаемой траектории в момент времени  $t+\tau+1$ :

$$[y(t + \tau + 1 | \alpha(t)) - x^*(t + \tau + 1)]^2 = \min \text{ при } u(t) \in U(t). \quad (3.2.3)$$

Здесь  $U(t)$  – множество допустимых значений управления.

Решение получается в форме (см. гл. 2)

$$u(t) = \begin{cases} u_1, & \text{если } v(t) \leq u_1; \\ v(t), & \text{если } u_1 \leq v(t) \leq u_2; \\ u_2, & \text{если } u_2 \leq v(t), \end{cases} \quad (3.2.4)$$

где идеальное управление  $v(t)$  вычисляем из решения уравнения

$$y(t + 1 + \tau | \alpha(t)) = x^*(t + 1 + \tau), \quad (3.2.5)$$

$$f(y(t + \tau | \alpha(t)), v(t), \alpha(t)) = x^*(t + 1 + \tau).$$

Формальное решение уравнения (3.2.5) записываем в виде

$$v(t) = f^{-1}(y(t + \tau | \alpha(t)), x^*(t + 1 + \tau), \alpha(t)). \quad (3.2.6)$$

### 3.3. Примеры синтеза устройств управления

**Пример 3.3.1.** Считаем, что объект описывается линейным уравнением

$$x(t) = x(t - 1) + u(t - 2) + h(t - 1), \quad t = 1, 2, \dots, \tau = 1. \quad (3.3.1)$$

Здесь  $h$  – неизвестное внешнее воздействие на объект, чистое запаздывание  $\tau = 1$ . Структурная схема объекта приведена в верхней части рис. 3.3.1. Через  $q$  обозначен оператор запаздывания сигнала на один такт.

Необходимо найти алгоритм расчета управляющего воздействия  $u(t)$  в каждый текущий момент времени  $t$  на основе информации о структуре модели и на основе измерений

$$x(t); x(t - 1), u(t - 1); \dots \quad (3.3.2)$$

входа и выхода объекта, чтобы достигалась цель управления: движение системы по заданной траектории  $x^*$ .

Формируем модель объекта

$$y(k | \alpha(t)) = x(k - 1) + u(k - 2) + \alpha(t). \quad (3.3.3)$$

Параметр  $\alpha(t)$  оценивает неизвестное внешнее возмущение  $h(t)$  объекта.

Вычислим  $\alpha(t)$ , приравняв выход модели  $y(t | \alpha(t))$  и выход объекта  $x(t)$  в момент времени  $t$ :

$$x(t) = x(t-1) + u(t-2) + \alpha(t). \quad (3.3.4)$$

Из (3.3.4) получим параметр

$$\alpha(t) = x(t) - x(t-1) - u(t-2). \quad (3.3.5)$$

Структурная схема для блока идентификации представлена в нижней части устройства управления на рис. 3.3.1.

Для расчета управления  $u(t)$  находим по уравнению модели (3.3.3) прогноз выхода объекта на момент времени  $t+2$

$$y(t+1 | \alpha(t)) = x(t) + u(t-1) + \alpha(t) \quad (3.3.6)$$

$$y(t+2 | \alpha(t)) = y(t+1 | \alpha(t)) + u(t) + \alpha(t) =$$

$$= x(t) + u(t) + u(t-1) + 2\alpha(t)$$

и из локального квадратичного критерия оптимальности

$$I(u) = [y(t+2 | \alpha(t)) - x^*(t+2)]^2 = \min_{u_1(t) \leq u(t) \leq u_2(t)} \quad (3.3.7)$$

рассчитываем оптимальное управление:

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t), & \text{если } v(t) \leq u_1(t); \\ v(t), & \text{если } u_1(t) \leq v(t) \leq u_2(t); \\ u_2(t), & \text{если } u_2(t) \leq v(t). \end{cases} \quad (3.3.8)$$

Идеальное управление  $v(t)$  проходит через ограничитель по амплитуде. Значение  $v(t)$  обеспечивает абсолютный минимум функции  $I(u)$  (без учета ограничения на  $u$ ):

$$\frac{dI(u)}{du} = 2(y(t+2 | \alpha(t)) - x^*(t+2)) = 0,$$

$$y(t+2 | \alpha(t)) = x^*(t+2), \quad x(t) + v(t) + u(t-1) + 2\alpha(t) = x^*(t+2),$$

$$v(t) = x^*(t+2) - x(t) - u(t-1) - 2\alpha(t). \quad (3.3.9)$$

Блок-схема полученного алгоритма управления (3.3.8), (3.3.9) приведена на рис. 3.3.1 в верхней части устройства управления. Блок адаптив-

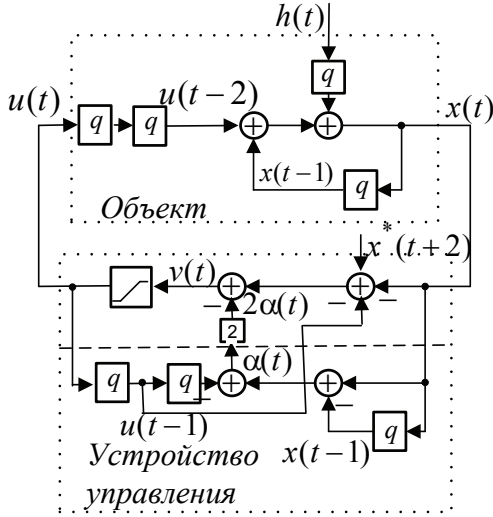


Рис. 3.3.1

ного управления состоит из двух частей: регулятора (3.3.8), (3.3.9) и идентификатора (3.3.5). Причем в момент времени  $t$  после получения нового измерения выхода объекта  $x(t)$  вначале срабатывает идентификатор (он вычисляет  $\alpha(t)$ ), а затем с учетом нового значения параметра  $\alpha(t)$  регулятор рассчитывает управление  $u(t)$  и подаёт его на вход объекта.

Вычислим теперь ошибку работы системы для момента времени  $t+2$  (так как она зависит от найденного управления  $u(t)$ ):

$$\varepsilon_0(t+2) = x(t+2) - x^*(t+2). \quad (3.3.10)$$

Подставим сюда  $x(t+2)$  за счёт последовательного пересчёта  $x$  из уравнения движения объекта

$$\begin{aligned} x(t+1) &= x(t) + u(t-1) + h(t), \\ x(t+2) &= x(t+1) + u(t) + h(t+1) = \\ &= x(t) + u(t) + u(t-1) + h(t+1) + h(t), \end{aligned}$$

а  $x^*(t+2)$  – из уравнения (3.3.9), которому удовлетворяет идеальное управление  $v(t)$  (без учета ограничений),

$$x^*(t+2) = x(t) + v(t) + u(t-1) + 2\alpha(t).$$

Получим, что

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(t+2) &= [h(t+1) + h(t) - 2\alpha(t)] + [u(t) - v(t)] \equiv \\ &\equiv \varepsilon_1(t+2) + \varepsilon_2(t+2). \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Ошибка работы системы состоит из ошибки  $\varepsilon_1(t+2)$  идентификации внешнего возмущения  $h$  и ошибки  $\varepsilon_2(t+2)$ , обусловленной ограниченным ресурсом по управлению. Если ресурса по управлению хватает (т. е.  $u(t) = v(t)$ ), то  $\varepsilon_2(t+2) = 0$ . Ошибку идентификации можно оценить, если есть некоторая информация об  $h$ .

В уравнение для расчёта параметра  $\alpha(t) = x(t) - x(t-1) - u(t-2)$  подставим  $x(t)$  из уравнения движения объекта

$$x(t) = x(t-1) + u(t-2) + h(t-1)$$

и получим, что

$$\alpha(t) = h(t-1). \quad (3.3.12)$$

Параметр модели  $\alpha(t)$ , как и в системе без чистого запаздывания (пример 2.2.1), точно отслеживает возмущение  $h(t-1)$ , действующее на

объект в предыдущий момент времени, так как информация об  $h(t-1)$  содержится в измеренном значении  $x(t)$  выхода объекта.

Ошибка идентификации (с учетом (3.3.12)) равна величине

$$\varepsilon_1(t+2) = h(t+1) + h(t) - 2\alpha(t) = h(t+1) + h(t) - 2h(t-1). \quad (3.3.13)$$

Здесь  $h(t)$  – неизвестное значение возмущения.

Если в течение некоторого интервала времени возмущение остается постоянным:

$$h(t) = c, \quad t = t_1, t_1 + 1, \dots, t_2,$$

то в момент времени  $t_1 + 1$  идентификатор вычисляет эту константу, но ошибка идентификации равна нулю только со следующего момента времени  $t = t_1 + 2, \dots, t_2$ . Если при  $t = t_2 + 1$  возмущение меняет свое значение, то ошибка идентификации равна величине

$$\varepsilon_1(t_2 + 2) = h(t_2 + 1) - c.$$

Если известно, что возмущение  $h(t)$  лежит в заданном интервале, т. е.  $|h(t)| \leq h_1$ , то для ошибки идентификации получаем следующий интервал ее изменения:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_1(t+2)| &= |h(t+1) + h(t) - 2h(t-1)| \leq \\ &\leq |h(t+1)| + |h(t)| + 2|h(t-1)| \leq 4h_1. \end{aligned}$$

При известном интервале изменения для приращения возмущения  $\Delta h(t+1) = h(t+1) - h(t)$ ,  $\Delta h(t) = h(t) - h(t-1)$ , т. е.  $|\Delta h(t+1)| \leq \Delta_1$ ,  $|\Delta h(t)| \leq \Delta_1$ , ошибка идентификации находится внутри интервала:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_1(t+2)| &= |h(t+1) + h(t) - 2h(t-1)| = \\ &= |h(t+1) - h(t) + 2[h(t) - h(t-1)]| \leq 3\Delta_1. \end{aligned}$$

Появление чистого запаздывания увеличивает ошибку идентификации и, соответственно, ошибку работы системы – см. пример 2.2.1.

Если  $h(t)$  дрейфует во времени по линейному закону

$$h(t) = ta, \quad (3.3.14)$$

то в модель объекта вводим параметр  $\alpha(t)$ , оценивающий в момент времени  $t$  неизвестный коэффициент  $a$ :

$$y(k | \alpha(t)) = x(k-1) + u(k-2) + (k-1)\alpha(t). \quad (3.3.15)$$

Как и в предыдущем случае, из условия равенства  $x(t)$  и  $y(t | \alpha(t))$

$$x(t) = x(t-1) + u(t-2) + (t-1)\alpha(t) \quad (3.3.16)$$

находим  $\alpha(t)$ :

$$\alpha(t) = (t-1)^{-1}[x(t) - x(t-1) - u(t-2)]. \quad (3.3.17)$$

Последовательно вычисляем по модели прогнозируемые значения выхода объекта на момент времени  $(t+2)$ :

$$\begin{aligned} y(t+1 | \alpha(t)) &= x(t) + u(t-1) + t\alpha(t), \\ y(t+2 | \alpha(t)) &= y(t+1 | \alpha(t)) + u(t) + (t+1)\alpha(t) = \\ &= x(t) + u(t) + u(t-1) + (2t+1)\alpha(t). \end{aligned}$$

Из критерия оптимальности (3.3.7) получаем оптимальное управление (3.3.8), где идеальное управление

$$v(t) = x^*(t+2) - x(t) - u(t-1) - (2t+1)\alpha(t). \quad (3.3.18)$$

Ошибка работы системы равна величине

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(t+2) &= x(t+2) - x^*(t+2) = \\ &= [x(t+2) - y(t+2 | \alpha(t))] + [y(t+2 | \alpha(t)) - x^*(t+2)] = \\ &= [x(t) + u(t) + u(t-1) + h(t+1) + h(t) - x(t) - u(t) - u(t-1) - (2t+1)\alpha(t)] + \\ &+ [x(t) + u(t) + u(t-1) + (2t+1)\alpha(t) - x(t) - v(t) - u(t-1) - (2t+1)\alpha(t)] = \\ &= [h(t+1) + h(t) - (2t+1)\alpha(t)] + [u(t) - v(t)] \equiv \\ &\equiv \varepsilon_1(t+2) + \varepsilon_2(t+2). \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

Вычислим ошибку идентификации  $\varepsilon_1(t+2)$  при  $h(t) = ta$ . Берем уравнение для расчета  $\alpha(t)$  (см. (3.3.17), подставим в него  $x(t)$  из уравнения движения объекта и получим, что

$$\alpha(t) = (t-1)^{-1}(x(t-1) + u(t-2) + (t-1)a - x(t-1) - u(t-2)) = a,$$

т. е. идентификатор точно оценивает постоянный параметр  $a$ . Ошибка идентификации (в (3.3.19)) равна нулю

$$\varepsilon_1(t+2) = h(t+1) + h(t) - (2t+1)\alpha(t) = [t+1+t-(2t+1)]a = 0.$$

Когда идеальное управление  $v(t)$  лежит внутри допустимой (для управления) области, то и ошибка управления  $\varepsilon_2(t+2)$  равна нулю. Система осуществляет точное движение по предписанной траектории в каждый текущий момент времени  $t$ .

**Пример 3.3.2.** Считаем, что объект описывается линейным уравнением

$$x(t) = x(t-1) + u(t-2) + h(t-1) + e(t), \quad t = 1, 2, \dots \quad (3.3.20)$$

В отличие от примера 3.3.1 добавлен «белый» шум  $e(t)$ . Все расчёты предыдущего примера повторяются, только в ошибке работы системы появляется ещё одно слагаемое  $[e(t+1) + e(t)]$ , обусловленное наличием «белого» шума.

**Пример 3.3.3.** Объект описывается нелинейным уравнением

$$x(t) = a_1 x(t-1) u(t-2) + h(t-1) + e(t), \quad (3.3.21)$$

где  $a_1$  – неизвестный параметр;  $h(t-1)$  – неизвестное внешнее воздействие;  $e(t)$  – «белый» шум. Необходимо построить алгоритм расчета управляющих воздействий  $u(t)$  (для каждого текущего момента времени  $t$ ), чтобы система (объект плюс устройство управления) двигалась по назначенной траектории  $x^*$ . Исходными измерениями в момент времени  $t$  являются:  $x(t)$ ;  $x(t-1)$ ,  $u(t-1)$ ; ....

Модель объекта имеет вид

$$y(k | \alpha(t)) = \alpha_1(t) x(k-1) u(k-2) + \alpha_2(t), \quad (3.3.22)$$

где  $\alpha_1(t)$  оценивает параметр  $a_1$ ,  $\alpha_2(t)$  – внешнее воздействие  $h$ .

При решении задачи идентификации индекс  $k$  может принимать значения  $t, t-1, \dots$ , а при расчете управления  $k$  принимает значения  $t+1$  и  $t+2$ .

Параметры модели могут быть найдены с помощью одного из адаптивных алгоритмов. Применим простейший адаптивный алгоритм перестройки коэффициентов модели (гл. 5):

$$\alpha_1(t) = \alpha_1(t-1) + \Delta(t) x(t-1) u(t-2), \quad (3.3.23)$$

$$\alpha_2(t) = \alpha_2(t-1) + \Delta(t), \quad \Delta(t) = \frac{x(t) - y(t | \alpha(t-1))}{x^2(t-1) u^2(t-2) + 1}.$$

$$y(t | \alpha(t-1)) = \alpha_1(t-1) x(t-1) u(t-2) + \alpha_2(t-1).$$

Затем по модели найдём прогноз выхода объекта на два такта вперёд во времени:

$$y(t+1 | \alpha(t)) = \alpha_1(t) x(t) u(t-1) + \alpha_2(t),$$

$$y(t+2 | \alpha(t)) = \alpha_1(t) y(t+1 | \alpha(t)) u(t) + \alpha_2(t)$$

и из квадратичного критерия

$$[y(t+2 | \alpha(t)) - x^*(t+2)]^2 = \min_{u_1 \leq u(t) \leq u_2}$$

вычислим управляющее воздействие (3.3.8), где идеальное управление

$$v(t) = [\alpha_1(t)y(t+1 | \alpha(t))]^{-1} [x^*(t+2) - \alpha_2(t)]. \quad (3.3.24)$$

Ошибка работы системы

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(t+2) &= x(t+2) - x^*(t+2) = \\ &= [x(t+2) - y(t+2 | \alpha(t))] + [y(t+2 | \alpha(t)) - x^*(t+2)] \end{aligned}$$

состоит из ошибки идентификации, ошибки, вызванной ограниченностью управления, и помехи.

**Пример 3.3.4.** Для объекта, описываемого уравнением

$$x(t) = a_0 + a_1 x(t-1) + a_2 u(t-3) + e(t), \quad t = 1, 2, \dots, \tau = 2,$$

строим модель

$$y(k | \alpha(t)) = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)x(k-1) + \alpha_2(t)u(k-3).$$

Для идентификации параметров применим простейший адаптивный алгоритм

$$\begin{aligned} \alpha_0(t) &= \alpha_0(t-1) + \\ &+ \frac{x(t) - \alpha_0(t-1) - \alpha_1(t-1)x(t-1) - \alpha_2(t-1)u(t-3)}{1 + x^2(t-1) + u^2(t-3)} \equiv \\ &\equiv \alpha_0(t-1) + \Delta(t), \\ \alpha_1(t) &= \alpha_1(t-1) + \Delta(t)x(t-1), \\ \alpha_2(t) &= \alpha_2(t-1) + \Delta(t)u(t-3), \quad t = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Рассчитаем управление. Найдём прогнозируемое значение выхода объекта на момент времени  $t+3$ , последовательно решая уравнения

$$\begin{aligned} y(t+1 | \alpha(t)) &= \alpha_0(t) + \alpha_1(t)x(t) + \alpha_2(t)u(t-2), \\ y(t+2 | \alpha(t)) &= \alpha_0(t) + \alpha_1(t)y(t+1 | \alpha(t)) + \alpha_2(t)u(t-1) = \\ &= \alpha_0(t) + \alpha_0(t)\alpha_1(t) + \alpha_1^2(t)x(t) + \alpha_2(t)u(t-1) + \alpha_1(t)\alpha_2(t)u(t-2), \\ y(t+3 | \alpha(t)) &= \alpha_0(t) + \alpha_0(t)\alpha_1(t) + \alpha_0(t)\alpha_1^2(t) + \alpha_1^3(t)x(t) + \\ &+ \alpha_2(t)u(t) + \alpha_1(t)\alpha_2(t)u(t-1) + \alpha_1^2(t)\alpha_2(t)u(t-2). \end{aligned}$$

Из условия равенства выхода модели  $y(t+3|\alpha(t))$  и значения  $x^*(t+3)$  желаемой траектории получаем идеальное управление

$$\begin{aligned} v(t) &= \alpha_2^{-1}(t)[x^*(t+3) - \alpha_0(t) - \alpha_1(t)y(t+3|\alpha(t))] =, \\ &= \alpha_2^{-1}(t)[x^*(t+3) - \alpha_0(t) - \alpha_0(t)\alpha_1(t) - \alpha_0(t)\alpha_1^2(t) - \alpha_1^3(t)x(t) - \\ &\quad - \alpha_1(t)\alpha_2(t)u(t-1) - \alpha_1^2(t)\alpha_2(t)u(t-2)], \end{aligned}$$

затем ограничиваем его по амплитуде (см. (3.3.8)) и находим оптимальное управление  $u(t)$ .

### 3.4. Управление температурным режимом жидких сред

Одними из наиболее распространенных задач управления в технике и быту являются задачи управления нагревом и охлаждением жидких, твердых и газообразных сред. Для автоматического решения этих задач в реальном масштабе времени с помощью цифровых вычислительных машин можно использовать описанные выше метод и алгоритмы адаптивного управления с идентификацией. В подтверждение этого рассмотрим задачу поддержания температурного режима жидкой среды, например, электролита гальванической ванны.

Считаем, что измерение температуры жидкости  $x(t)$  производится в фиксированной точке ванны, а управление ведется за счет изменения расхода  $u(t)$  пара в трубопроводе, греющем ванну. Управление  $u(t)$  лежит в пределах  $[0, u_2]$ . Охлаждение жидкости в ванне происходит за счет теплообмена с окружающей средой. Иногда осуществляют дополнительный теплоотвод более холодной жидкостью, проходящей, например, по змеевику, помещенному в ванну. Считаем, что расход и температура холодной жидкости и температура греющего пара постоянны.

Процесс теплообмена в гальванической ванне можно описать линейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка. При постоянной температуре греющего носителя динамика температуры в любой точке внутри раствора ванны описывается обыкновенным линейным дифференциальным уравнением второго порядка с чистым запаздыванием во входном сигнале. Если входной сигнал (расход пара) меняется только в дискретные моменты времени, а в интервалах между дискретами остается постоянным (этот случай соответствует управлению объектом от цифрового регулятора), то от дифференциального уравнения второго порядка существует однозначный переход к эквивалентному разностному уравнению

$$x(t) = a_0 + a_1 x(t-1) + a_2 x(t-2) + a_3 u(t-1-\tau) + a_4 u(t-2-\tau) + h(t-1), \quad t=1, 2, \dots \quad (3.4.1)$$

Здесь  $t$  – номер дискреты;  $a_i$  ( $i = \overline{0, 4}$ ) – неизвестные параметры; константа  $a_0$  обусловлена в основном влиянием внешнего теплоносителя – окружающей среды;  $h(t)$  – случайная помеха,  $|h(t)| \leq h_1$ . В дискретные моменты реального времени  $t' = t\delta$ , где  $\delta$  – интервал дискретизации, производится измерение температуры  $x(t)$ , ввод этой информации в вычислительную машину (управляющее устройство) и выдача с вычислительной машины на управляющие механизмы рассчитанного оптимального управляющего воздействия  $u(t)$ . Необходимо синтезировать закон управления, обеспечивающий изменение температуры жидкости в ванне по заданному закону  $x^*(t+1+\tau)$  ( $0 \leq t$ ). При  $x^*(t+1+\tau) = x^* = \text{const}$  цель управления заключается в стабилизации температуры на уровне  $x^*$ .

На каждом такте выработки оптимального управления строится математическая модель прогноза температуры (решается задача идентификации) и по ней рассчитывается оптимальное управление (см. гл. 2). Принципиально алгоритмы отличаются по способу построения модели:

$$\begin{aligned} y(k | \alpha(t)) &= \alpha_0(t) + \alpha_1(t)x(k-1) + \alpha_2(t)x(k-2) + \\ &+ \alpha_3(t)u(k-1-\tau) + \alpha_4(t)u(k-2-\tau) \equiv \\ &\equiv \alpha_0(t) + \bar{\alpha}^T(t) \bar{\varphi}(k) = \alpha_0(t) + \bar{\varphi}^T(k) \bar{\alpha}(t), \quad k \leq t. \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

Отсюда получаем модель в приращениях

$$\begin{aligned} \delta y(k | \alpha(t)) &\equiv y(k | \alpha(t)) - y(k-1 | \alpha(t)) = \alpha_1(t)\delta x(k-1) + \\ &+ \alpha_2(t)\delta x(k-2) + \alpha_3(t)\delta u(k-1-\tau) + \\ &+ \alpha_4(t)\delta u(k-2-\tau) \equiv \delta \varphi^T(k) \alpha(t), \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

где  $\delta x(k-1) \equiv x(k-1) - x(k-2)$ ,  $\dots$ ,  $k \leq t$ . Модели (3.4.2), (3.4.3) используем при идентификации.

Оптимальное управление имеет вид (2.2.6)

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } v(t) < 0, \\ v(t), & \text{если } 0 \leq v(t) \leq u_2, \\ u_2, & \text{если } u_2 < v(t), \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 v(t) &= \alpha_3^{-1}(t)(x^*(t + \tau + 1) - \alpha_0(t) - \alpha_1(t)y(t + \tau | \alpha(t)) - \\
 &\quad - \alpha_2(t)y(t - 1 + \tau | \alpha(t)) - \alpha_4(t)u(t - 1)), \\
 y(k | \alpha(t)) &= \alpha_0(t) + \alpha_1(t)x(k - 1) + \alpha_2(t)x(k - 2) + \\
 &\quad + \alpha_3(t)u(k - 1 - \tau) + \alpha_4(t)u(k - 2 - \tau), \quad k \leq t + 1, \\
 y(t + 2 | \alpha(t)) &= \alpha_0(t) + \alpha_1(t)y(t + 1 | \alpha(t)) + \alpha_2(t)x(t) + \\
 &\quad + \alpha_3(t)u(t + 1 - \tau) + \alpha_4(t)u(t - \tau), \\
 y(k | \alpha(t)) &= \alpha_0(t) + \alpha_1(t)y(k - 1 | \alpha(t)) + \alpha_2(t)y(k - 2 | \alpha(t)) + \\
 &\quad + \alpha_3(t)u(k - 1 - \tau) + \alpha_4(t)u(k - 2 - \tau), \quad t + 3 \leq k \leq t + 1 + \tau.
 \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

Качество управления существенно зависит от качества идентификации параметров, причем с ростом величины запаздывания  $\tau$  ошибка прогноза выхода объекта  $[x(t + \tau + 1) - y(t + \tau + 1 | \alpha(t))]$  нарастает, а это, в свою очередь, приводит к увеличению ошибки отслеживания заданной траектории  $[x(t + \tau + 1) - x^*(t + \tau + 1)]$ .

Идентификацию параметров модели осуществляем по трем алгоритмам.

В первом из них за основу взята модель в приращениях (3.4.3), и перестройка параметров ведется по простейшему адаптивному двухшаговому алгоритму

$$\begin{aligned}
 \hat{\alpha} &= \alpha^l + \frac{\Delta_2(\alpha^l, t) - h_1 \operatorname{sign} \Delta_2}{\delta \varphi^T(t) \delta \varphi(t)} \delta \varphi(t); \\
 \alpha^{l+1} &= \hat{\alpha} + \frac{\Delta_2(\hat{\alpha}, t) - h_1 \operatorname{sign} \Delta_2}{\delta \varphi^T(t) \delta \varphi(t)} \delta \varphi(t); \\
 l &= 0, 1, 2, \dots, l_1, \quad \alpha^0 \equiv \alpha(t - 1), \quad \alpha^{l_1+1} \equiv \alpha(t); \\
 \Delta_2(\alpha, t) &= x(t) - x(t - 1) - \delta \varphi^T(t) \alpha(t), \\
 \alpha_0(t) &= \alpha_0(t - 1) + \gamma(\hat{\alpha}_0(t) - \alpha_0(t - 1)),
 \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

$$\hat{\alpha}_0(t) = x(t) - \varphi(t)^T \alpha(t), \quad 0 < \gamma \leq 1, \quad \gamma \rightarrow 1 \text{ при } h_1 \rightarrow 0.$$

Здесь  $l_1$  — количество шагов, при котором первый раз выполнено условие для невязки  $\Delta_2$

$$|\Delta_2(\alpha^{l_1+1}, t)| < 2h_1. \tag{3.4.6}$$

После прихода в каждый момент времени  $t$  нового измерения выхода объекта  $x(t)$  производится рекуррентная коррекция (3.4.5) параметров  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  до выполнения условия (3.4.6), расчет свободного члена  $\hat{\alpha}_0(t)$  уравнения модели и сглаживание этого параметра.

На рис. 3.4.1 на примере гальванической ванны при уровне помехи  $h_1 = 0,1^\circ$  приведены входная и выходная переменные замкнутой системы управления, когда в управляющем устройстве реализованы алгоритмы (3.4.4) – (3.4.6), а заданный температурный режим  $x^*(t)$  является кусочно-постоянной функцией. В начальный момент времени температура ванны равна  $20^\circ$ . Требуется ее нагреть до температуры  $75^\circ$  и поддерживать эту температуру в течение 73 дискретных интервалов, что соответствует  $73 \times 48 \text{ с} = 3504 \text{ с} = 58,4 \text{ мин}$  реального времени. В дискретный момент времени  $t = 74$  происходит смена температурного режима до  $35,81^\circ$  и т. д. (см. рис. 3.4.1). В период нагрева ванны производится интенсивная коррекция параметров модели. Норма отклонения параметров модели и объекта  $Q$  уменьшается от величины 1,75 при  $t = 0$  до величины 0,11 при  $t = 25$  и остается примерно на этом же уровне в течение всего последующего времени управления объектом. В период основной перестройки коэффициентов модели параметр  $l_1$  многократности коррекции коэффициентов лежит в пределах  $[0; 20]$ , и чаще всего он был равен  $[0; 2; 3]$ . При  $t > 25$  почти всегда  $l_1 = 0$ , т. е. по мере поступления новой информации осуществляется однократная перестройка коэффициентов модели, достаточная для выполнения неравенства (3.4.6). Существующая ошибка идентификации  $Q \approx 0,11$  приводит к дополнительной ошибке отслеживания заданной траектории (сравните рис. 3.4.1 с рис. 3.4.2).

Во втором алгоритме идентификации в каждый момент времени  $t$  вначале коэффициенты  $\alpha$  модели (3.4.3) корректируются по формуле (3.4.5) (этот этап назовем этапом грубой оценки коэффициентов), а затем однократно уточняются по формуле

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \alpha^{l_1+1} + \frac{\Delta_1(\alpha^{l_1+1}, t) - h_1 \operatorname{sign} \Delta_1}{1 + \varphi^T(t) \varphi(t)} \varphi(t); \\ \alpha_0(t) &= \alpha_0(t-1) + \frac{\Delta_1(\alpha^{l_1+1}, t) - h_1 \operatorname{sign} \Delta_1}{1 + \varphi^T(t) \varphi(t)}, \\ \Delta_1(\alpha^{l_1+1}, t) &= x(t) - \alpha_0(t-1) - \varphi^T(t) \alpha^{l_1+1},\end{aligned}\tag{3.4.7}$$

в которой за основу взята модель (3.4.2). Данный алгоритм идентификации обеспечивает более точную и более быструю перестройку параметров модели.

Для того же самого примера при  $t = 11$  достигнута ошибка идентификации  $Q = 0,09$ , которая была наименьшей для алгоритма (3.4.5) за все время работы системы. При  $t = 20$  ошибка  $Q$  принимает значение 0,0001, а при  $t > 20$  она не превосходит этой величины. Построенная модель обеспечивает хорошее качество управления.

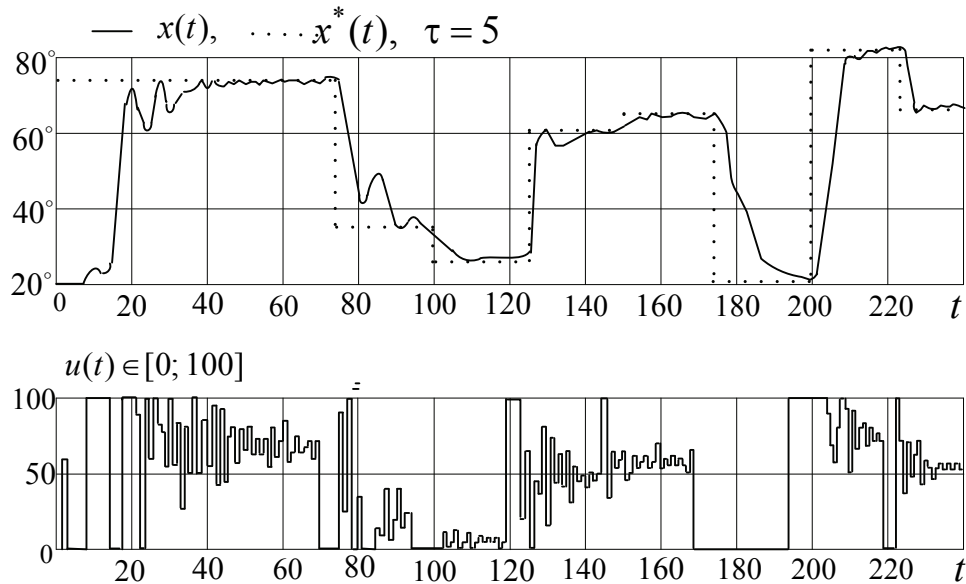


Рис. 3.4.1

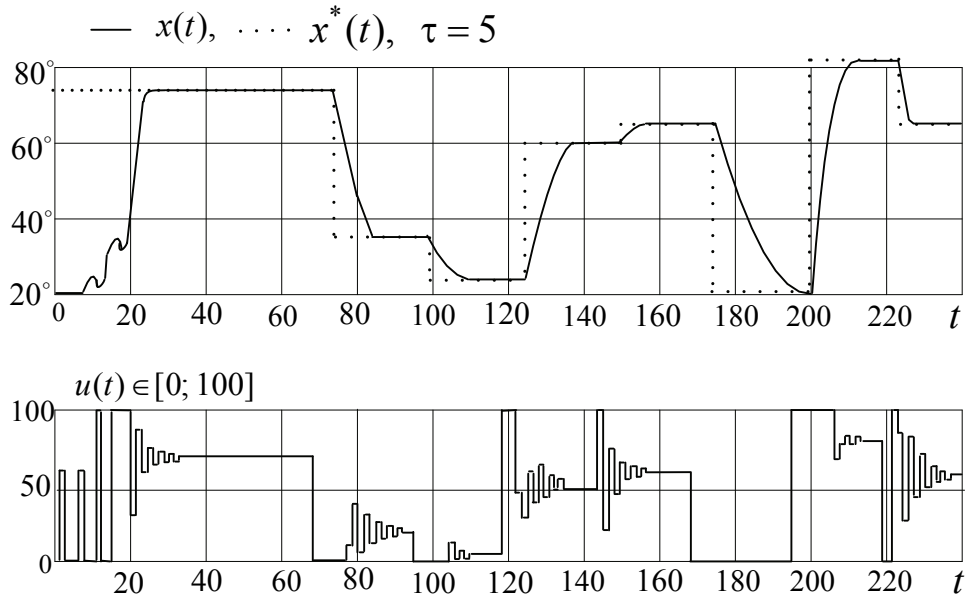


Рис. 3.4.2

Переходные процессы для входа  $u(t)$  и выхода  $x(t)$  объекта при работе замкнутой системы управления изображены на рис. 3.4.2. При изме-

нении требуемого уровня температуры  $x^*(t)$  управление начинает менять свое значение за  $\tau$  тактов до момента изменения  $x^*(t)$ . В момент смены уровня  $x^*$  начинает меняться выход системы  $x$ , и переход системы на новый уровень  $x^*$  происходит за минимальное время и без перерегулирования. При расчете управления  $u(t)$  используется информация о желаемой траектории движения через  $\tau + 1$  такт вперед, т. е.  $x^*(t + \tau + 1)$ .

Третий алгоритм идентификации назван многошаговым, он появился в результате обобщения более простых алгоритмов (3.4.5), (3.4.7). Запишем уравнение модели (3.4.2) в компактной векторной форме

$$y(k | \alpha(t)) = \varphi^T(k) \alpha(t), \quad k \leq t, \quad (3.4.8)$$

где  $\varphi^T(k) = (1, x(k-1), x(k-2), u(k-\tau-1), u(k-\tau-2))$ , в вектор  $\alpha^T(t) = (\alpha_0(t); \alpha_1(t); \alpha_2(t); \alpha_3(t); \alpha_4(t))$  в отличие от (3.4.2) включен параметр  $\alpha_0$ . Приравнявая выход объекта и модели в моменты времени  $k = t, t-1, \dots, t-p+1$ , где  $1 \leq p \leq 5$ , получаем  $p$  уравнений с 5 неизвестными параметрами. Запишем эти уравнения, выделяя приращения параметров  $\Delta\alpha(t) = \alpha(t) - \alpha(t-1)$ :

$$\begin{aligned} \varphi^T(k) \Delta\alpha(t) &= x(k) - \varphi^T(k) \alpha(t-1), \\ k &= t, t-1, \dots, t-p+1, \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

или

$$\begin{aligned} \Phi(t) \Delta\alpha(t) &= \bar{x}(t) - \Phi(t) \alpha(t-1); \\ \Phi(t) &= \begin{pmatrix} \varphi^T(t) \\ \vdots \\ \varphi^T(t-p+1) \end{pmatrix}; \quad \bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \vdots \\ x(t-p+1) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

При  $p = 5$  количество уравнений совпадает с количеством неизвестных параметров, хотя система уравнений может быть и вырожденной. При  $1 \leq p < 5$  система уравнений (3.4.10) недоопределена, и для получения единственного её решения минимизируем квадрат нормы приращения параметров

$$\|\Delta\alpha(t)\|^2 = \min. \quad (3.4.11)$$

Решение задачи (3.4.10), (3.4.11) имеет вид

$$\Delta\alpha(t) = \Phi^+(t) (\bar{x}(t) - \Phi(t) \alpha(t-1)), \quad (3.4.12)$$

и тогда

$$\alpha(t) = \alpha(t-1) + \Delta\alpha(t). \quad (3.4.13)$$

Здесь  $+$  – операция псевдообращения матрицы.

Заметим, что расчет  $\Delta\alpha(t)$  можно вести с учетом более глубокой памяти (при  $p > 5$ ) о входах и выходах объекта. При  $p > 5$  по критерию наименьших квадратов получаем систему нормальных уравнений

$$(\Phi^T(t)\Phi(t))\Delta\alpha(t) = \Phi^T(t)(x(t) - \Phi(t)\alpha(t-1)),$$

решение которой имеет вид

$$\Delta\alpha(t) = (\Phi^T(t)\Phi(t))^+ \Phi^T(t)[x(t) - \Phi(t)\alpha(t-1)].$$

Графики, иллюстрирующие работу алгоритма (3.4.12), (3.4.13), для гальванической ванны с параметрами  $a_0 = 0,084$ ,  $a_1 = 1,235$ ,  $a_2 = -0,319$ , при стабилизации температуры на уровне  $x^*(t) = 75^\circ$  приведены на рис. 3.4.3–3.4.8. Начальные оценки параметров модели во всех экспериментах выбирались равными  $\alpha_0(0) = \alpha_1(0) = \alpha_2(0) = \alpha_3(0) = \alpha_4(0) = 1$ .

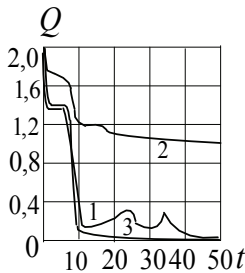


Рис. 3.4.3

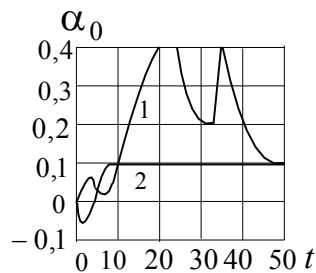


Рис. 3.4.4

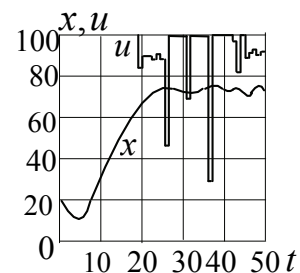


Рис. 3.4.5

На рис. 3.4.3 показано поведение эвклидовой нормы  $Q$  отклонения параметров модели и объекта. Кривая 1 соответствует алгоритму (3.4.5), (3.4.7), кривые 2 и 3 – алгоритму (3.4.12), (3.4.13) при значениях глубины памяти  $p$ , равной 1 (кривая 2) и 2 – 6 (кривая 3). Немонотонный характер изменения кривой 1 объясняется неудачным выбором параметра усреднения  $\gamma$  (в 2.5.5). При  $t = 2 - 6$  скорость сходимости для всех алгоритмов мала. Причиной этого служат нулевые начальные значения по управлению ( $u(t) = 0$ ,  $t = 0, -1, \dots, -\tau$ ;  $\tau = 5$ ) в уравнении движения объекта (3.4.1). В связи с этим на первых тактах отсутствует в измерениях входа и выхода объекта информация о параметрах  $\alpha_3$  и  $\alpha_4$  объекта.

На рис. 3.4.4 представлены графики, иллюстрирующие процесс оценивания параметра  $\alpha_0$  с помощью алгоритмов (3.4.5), (3.4.7) (кривая 1) и (3.4.12), (3.4.13) (кривая 2 при глубине памяти  $p = 3$ ).

Процесс изменения входной и выходной координат объекта при работе замкнутой системы управления представлен на рис. 3.4.5–3.4.8. Рис. 3.4.5 соответствует оценке параметров в устройстве управления по алгоритму (3.4.5), (3.4.7), а рис. 3.4.6 – 3.4.8 – по алгоритму (3.4.12), (3.4.13) соответственно при  $p = 1, 3, 5$ . Результаты стабилизации температуры на уровне  $75^\circ$ , представленные на рис. 3.4.5, 3.4.7, 3.4.8, примерно одинаковые из-за хорошего качества работы идентификатора. Одношаговый (при  $p = 1$ ) адаптивный алгоритм не обеспечивает нужное качество идентификации, и система не обеспечивает хорошего качества стабилизации (см. рис. 3.4.6) температуры.

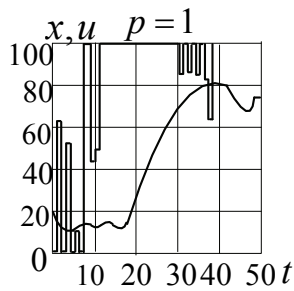


Рис. 3.4.6

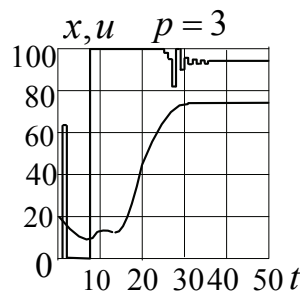


Рис. 3.4.7

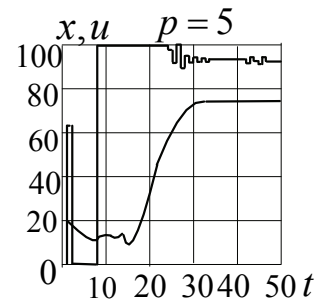


Рис. 3.4.8

Разработанный в гл. 3 подход к синтезу адаптивных систем управления может быть применен и к решению других конкретных задач поддержания заданных температурных режимов жидких, твердых и газообразных сред.

### Упражнения



Синтезируйте алгоритмы адаптивного управления для следующих объектов:

- 3.1.  $x(t) = bu(t - 2) + e(t)$ ,
- 3.2.  $x(t) = bu(t - 3) + ce(t - 1) + e(t)$ ,
- 3.3.  $x(t) = ax(t - 1) + bu(t - 2) + ce(t - 1) + e(t)$ ,
- 3.4.  $x(t) = ax(t - 1) + bu(t - 1 - \tau_1) + c_1e(t - 1) + c_2e(t - 1 - \tau_2) + e(t)$ ,
- 3.5.  $x(t) = bu(t - \tau) + h(t), \tau > 1$ ;
- 3.6.  $x(t) = bu(t - \tau) + ce(t - \tau) + e(t), \tau > 1$ ;
- 3.7.  $x(t) = ax(t - 1)u(t - 3) + e(t)$ .
- 3.8.  $x(t) = x(t - 1)u(t - 2) + ce(t - 1) + e(t)$ .

## 4

## АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ

В данной главе рассматривается синтез алгоритмов адаптивного управления процессами химических преобразований сырья в требуемые продукты во вращающихся печах – процессами обжига извести (п. 4.1) и клинкера (п. 4.2). Указанные объекты достаточно сложны в управлении. Они содержат несколько входов и несколько выходов. Часть входов является управляющими, а часть просто измеряемыми воздействиями. Все они (объединенные по группам) приложены к различным частям печи и, следовательно, имеют различные чистые запаздывания во времени по отношению к выходным переменным.

Описания технологических процессов в пп. 4.1, 4.2 заимствованы из диссертации [2.4], выполненной под руководством автора монографии.

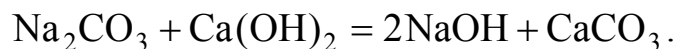
### 4.1. Адаптивное управление процессом обжига извести во вращающихся печах

**Характеристика технологического процесса** (см. [2.4]). Вращающиеся печи используются в целлюлозно-бумажной промышленности для регенерации извести из шлама. Для компенсации потери извести в процессе производства к шламу добавляют дробленый известняк. Вращающаяся печь установлена на роликовых опорах под небольшим углом к горизонту. Изнутри она футерована огнеупорным кирпичом.

Схема печи обжига извести представлена на рис. 4.1.1. Там же указаны величины чистых запаздываний (вызванных распределенным характером объекта) по отношению к выходной переменной.

Основными переменными, влияющими на качество продукта  $x(\text{CaO}\%)$ , являются:  $u_1$  – расход мазута;  $u_2$  – расход воздуха I;  $u_3$  – расход воздуха II;  $u_4$  – расход шлама;  $z_1$  – температура в зоне обжига, измеряемая термопарой;  $z_2$  – температура в зоне обжига, измеряемая пирометром;  $z_3$  – температура (измеряемая с помощью термопары) в зоне сушки;  $z_4$  – разрежение в зоне сушки;  $z_5$  – плотность шлама.

В качестве исходного материала для регенерации извести служит шлам, образующийся в результате основной реакции процесса карбонизации



Шлам представляет собой мелкодисперсный карбонат кальция. При регенерации извести из шлама во вращающейся печи протекает эндотермическая реакция первого порядка. Перед попаданием в печь шлам отмывается от щелочи и накапливается в сборнике. Затем он сгущается на вакуум-фильтре до влажности 40 - 50 %, дополнительно промывается, содержание щелочи в шламе становится менее 1 %. Материал для обжига подается в верхний конец печи, а готовый продукт (известь) с нижнего конца ссыпается в холодильник. Отсюда часть горячего воздуха (первичный воздух) направляется в форсунку, а другая (вторичный воздух) – непосредственно в печь, обеспечивая заданный режим горения топлива. Технологический процесс должен быть организован так, чтобы обеспечить заданное температурное поле по всей длине печи. Горячие газы, образующиеся в процессе сгорания топлива, при движении навстречу материалу отдают ему тепло. Из верхнего конца печи газы отсасываются дымососом; для улавливания пыли из газов перед их выбросом в атмосферу служит скруббер. Процесс получения извести в печи условно разбит на ряд технологических зон: сушка материала, нагрев, декарбонизация, охлаждение.

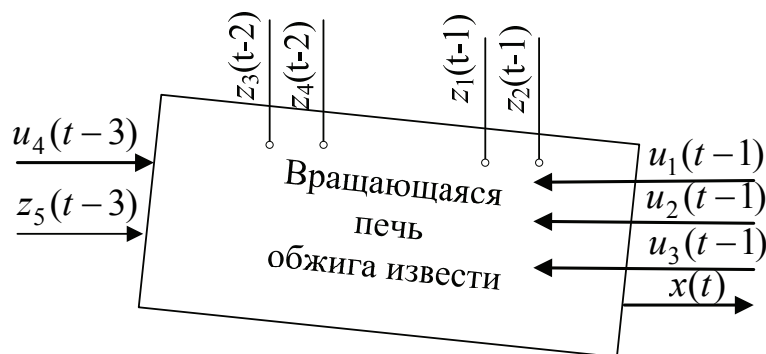


Рис. 4.1.1. Измеряемые входы и выходы печи

Для улучшения процессов теплообмена участок сушки снабжен цепной завесой, которая обеспечивает грануляцию материала и снижение его влажности до 10–12 %. Зона сушки состоит из трех участков: загрузочного, досушки и разгрузочного.

В зоне нагрева материал нагревается до температуры, которая соответствует началу декарбонизации ( $Q = 800^\circ$ ). Массообмена между фазами не происходит.

Температура материала в зоне декарбонизации мало растёт, так как все тепло, поглощаемое материалом, используется на химическую реакцию разложения  $\text{CaCO}_3$ . Участок горения топлива находится в конце зоны декарбонизации.

Процесс охлаждения извести осуществляется в отдельно установленном холодильнике. В этой зоне материал отдаёт тепло холодному воздуху, который затем поступает в печь. При изучении механизма процесса обжига извести необходимо рассматривать физические и химические превращения материала и газов в печи с учетом их противотока.

**Факторы, влияющие на качество выходного продукта ( $\text{CaO}$  %).**

Выходным продуктом известерегенерационной печи является регенерированная известь с таким химическим составом, %: окись кальция (активная  $\text{CaO}$  %) – 80–90 %; окись магния  $\text{MgO}$  – не более 3 %; двуокись кремния  $\text{SiO}_2$  – не более 3 %; полуторные окиси  $\text{R}_2\text{O}_3$  – не более 1,5 %.

Потери при прокаливании составляют 2 %. Остальная часть приходится на  $\text{CaCO}_3$ . Основным показателем качества процесса обжига извести является содержание окиси кальция  $\text{CaO}$  в готовом продукте. Анализ экспериментальных данных показывает, что получение извести с высоким содержанием  $\text{CaO}$  не всегда целесообразно. С увеличением содержания  $\text{CaO}$  в извести процент свободно циркулирующего при каустизации остаточного  $\text{CaCO}_3$  уменьшается, т. е. с увеличением степени обжига наблюдается более полное использование исходного продукта. Однако одновременно с этим при повышении содержания в извести  $\text{CaO}$  выше 87–90 % количество  $\text{CaO}$ , участвующего в реакции каустизации, не возрастает, а даже снижается за счет увеличения циркулирующего количества нереакционного  $\text{CaO}$ . Следовательно, уменьшение содержания остаточного  $\text{CaCO}_3$  в извести при увеличении содержания  $\text{CaO}$  свыше 90 % сопровождается ростом количества нереакционного  $\text{CaO}$ , который в конечном счете выводится из гасителей-классификаторов в отвал и представляет собой безвозвратные потери.

Проанализируем степень влияния различных факторов на характер процесса обжига извести во вращающихся печах (рис. 4.1.1). В целлюлозно-бумажной промышленности печи обжига извести являются вспомогательными агрегатами, их производительность зависит от потребностей отделения каустизации и обычно составляет 200–250 т/сут.

Расход шлама зависит от производственных условий и может меняться не более 1–2 раз в смену. Значительные колебания расхода шлама ( $u_4$ ) при стационарном режиме работы печи приводят к неравномерной нагрузке печи шламом, а это отрицательно сказывается на качестве конечного продукта.

Важным параметром шлама является плотность ( $z_5$ ), непосредственно связанная с влажностью шлама. При подаче в печь шлама, влажность которого менее 30 %, нарушается режим сушки. Происходит измельчение пересохших частиц шлама цепями и интенсивное пыление в зоне нагрева. Число оборотов печи влияет на скорость продвижения материала вдоль печи. При заданной производительности от этого параметра зависит степень заполнения печи материалом.

Параметрами, определяющими аэродинамический режим работы вращающейся печи, являются: разрежение в горячей головке печи ( $z_4$ ); расход первичного ( $u_2$ ) и вторичного воздуха ( $u_3$ ). От расхода первичного воздуха зависит конфигурация горящего факела, которая влияет на характер распределения тепла по различным зонам печи. Вторичный воздух необходим для сжигания топлива, образующиеся при сжигании топлива газы выполняют роль теплоносителя. Скорость движения теплоносителя, от которой зависят условия теплообмена между горячими газами и материалом, определяется разрежением в холодном конце печи, создаваемым вытяжным дымососом. От расхода топлива ( $u_1$ ), подаваемого на обжигание в форсунку, зависит общее количество тепла, которое идет на сушку, нагрев и декарбонизацию шлама. Такие параметры мазута, как температура и давление, влияют на форму факела. Давление распыляющего пара должно соответствовать расходу и другим параметрам мазута для достижения тонкости распыления, необходимой для хорошего сгорания топлива.

Обжиг извести во вращающихся печах – сложный многосвязный процесс. Теплообмен, движение материала и газа, физические и химические превращения тесно взаимосвязаны, при этом противоток газа и материала усиливает их. Как объект управления печь имеет специфические динамические характеристики. Большая длина печи при малой скорости движения материала определяет большое транспортное запаздывание, значительный запас материала – инерционность, противоток – сильную взаимосвязь переменных.

Анализ основных факторов процесса обжига извести с позиции управления показывает, что регулирующими воздействиями могут быть только расходы топлива ( $u_1$ ) и воздуха ( $u_2, u_3$ ). Остальные параметры не могут меняться в широких пределах. Отсутствие в настоящее время приборов для автоматического контроля качества обожженной извести осложняет управление процессом.

Для косвенной оценки качества регенерируемой извести используют такие параметры, как температура материала ( $z_1, z_2$ ) в горячей конечной зоне печи, температура отходящих к дымососу газов ( $z_3$ ). Первая указанная температура непосредственно влияет на качество обожженной извести,

а температура отходящих газов тесно связана с влажностью шлама на выходе из цепной завесы, т. е. характеризует завершенность сушки. Эти параметры можно непосредственно контролировать с помощью датчиков, установленных в печи. Для измерения температуры материала используются оптические приборы. Некоторые печи оснащены газоанализаторами для определения количества остаточного кислорода в отходящих газах. Этот параметр характеризует полноту сгорания топлива.

**Подходы к управлению обжигом извести во вращающейся печи.** Вопросам управления обжига извести во вращающихся печах в литературе уделено достаточное внимание, существует несколько способов управления такими печами.

Цель управления сводится к получению заданной степени термообработки материала в процессе движения его по рабочему тракту печи. Реализуется цель за счет управления узлом горения топлива, узлом загрузки, скоростью вращения барабана печи и температурным режимом внутри барабана печи.

Основные локальные контуры регулирования, которыми оснащено большинство вращающихся печей в целлюлозно-бумажной промышленности, по своему назначению можно разбить на три группы: системы для стабилизации загрузки печи сырьем, системы управления подачей воздуха в печь и системы управления подачей топлива.

Недостатком существующих систем является отсутствие коррекции расхода воздуха по температуре поступающего в печь воздуха. Необходимое разрежение в печи обеспечивается регулированием производительности вытяжного дымососа. Указанные локальные системы автоматического регулирования обеспечивают удовлетворительное качество выходного продукта ( $\text{CaO} \%$ ) при работе печи в стационарном режиме. Но неконтролируемые возмущения вызывают значительные колебания качества извести. Реализовать итоговую замкнутую систему управления качеством конечного продукта не удастся из-за большого транспортного запаздывания в объекте и отсутствия приборов автоматического измерения качества обожженной извести. Предложено несколько систем стабилизации качества конечного продукта путем регулирования косвенных переменных, имеющих меньшее запаздывание. Значительное улучшение качества конечного продукта можно получить за счет использования при управлении комплексных упрощенных моделей взаимосвязи между основными переменными процесса.

Получение моделей основано на законах сохранения массы и энергии и на кинетических законах химических превращений веществ при учете переноса тепла и массы из одной фазы в другую. Громоздкость получаемых систем дифференциальных уравнений в частных производных и трудности расчета и реализации управлений требуют поиска других подходов.

Динамический процесс в печи можно описать разностными динамическими уравнениями с чистыми запаздываниями и с перестраиваемыми параметрами. Такой подход позволяет непрерывно по мере управления объектом располагать его адекватной моделью, сильно упростить процесс синтеза закона управления и удешевить реализацию алгоритмов на цифровой вычислительной технике в производственных условиях.

В п. 4.1 разработан алгоритм адаптивного управления процессом обжига извести во вращающихся печах с использованием разностной динамической модели с запаздывающими аргументами по возмущающим и управляющим воздействиям с адаптивной коррекцией параметров модели. Управления вычисляются из локального критерия оптимальности [4.1].

**Постановка задачи адаптивного управления.** Основными факторами процесса обжига извести (рис. 4.1.2), влияющими на качество конечного продукта  $x$  (CaO %), являются (см. также рис. 4.1.1): расход мазута –  $u_1$ ; расход воздуха I –  $u_2$ ; расход воздуха II –  $u_3$ ; расход шлама  $u_4$ ; температура в зоне обжига, измеряемая термопарой  $z_1$  и пирометром  $z_2$ ; температура (измеряемая с помощью термопары) в зоне сушки  $z_3$ ; разрежение в зоне сушки  $z_4$ ; плотность шлама  $z_5$ .

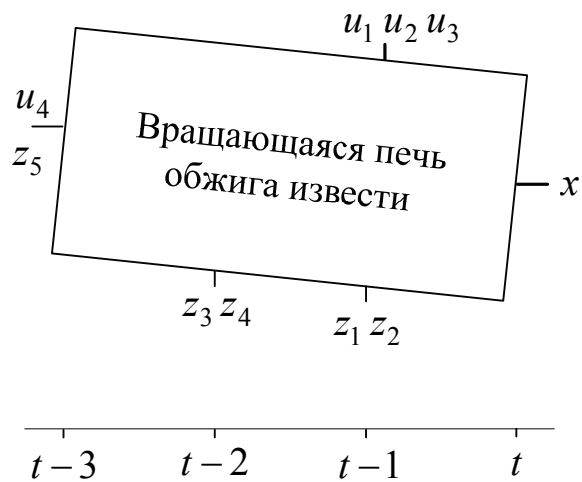


Рис. 4.1.2

Интервал дискретизации по времени равен 1 часу. Он обусловлен, в первую очередь, интервалом измерений основных переменных (например,  $x$ ) процесса.

На рис 4.1.2 также показано соответствие между значениями целочисленной переменной  $t$  (номером такта) и величинами запаздывания аргументов в соответствующих входных переменных при учете их влияния на выходную переменную при построении дискретно-временной модели. Запаздывания во времени обусловлены распределенным характером объекта. Например, запаздывание на 3 такта по расходу  $u_4$  и плотности  $z_5$  шлама (по отношению к выходной переменной  $x$ ) равно продолжительности прохождения материала через печь.

При переводе печи с одного режима на другой и стабилизации выходной переменной  $x$  приходится учитывать динамику процесса обжига, в первую очередь по  $x$ .

Идея адаптивного управления процессом обжига основана не только на разностной модели прогноза выхода объекта  $x$  (содержание  $\text{CaO } \%$  в конечном продукте), но и на локальном критерии оптимальности: минимума квадрата отклонения выходной координаты модели прогноза и желаемого выхода объекта в соответствующие моменты времени. Параметры модели корректируются по мере поступления информации о входах и выходе объекта.

Процесс обжига (для каждого текущего такта  $t$ ) описывается динамическим разностным уравнением с чистыми запаздываниями:

$$x(t) = a_0 + a_1x(t-1) + a_2z_2(t-1) + a_3u_1(t-1) + a_4u_2(t-1) + a_5u_3(t-1) + a_6z_3(t-2) + a_7u_4(t-3) + a_8z_5(t-3) + e(t), \quad (4.1.1)$$

где  $x$  – выход объекта;  $u_1 \div u_4$ ,  $z_2$ ,  $z_3$ ,  $z_5$  – управляющие и возмущающие воздействия. Один такт соответствует одному часу (интервалу съема экспериментальных данных).

Заметим, что основная часть выхода объекта (правая часть уравнения (4.1.1), стоящая перед помехой) не содержит компонент с входными возмущающими воздействиями  $z_1(t-1)$ ,  $z_4(t-2)$ , хотя рассмотрен и такой вариант модели. Структура уравнения (4.1.1) оказалась минимальной сложности. Отсутствие  $z_1(t-1)$  (температура в зоне обжига, измеряемая термопарой) обусловлено тем, что она не дает существенной информации по сравнению учтенной переменной  $z_2(t-1)$  (температура в зоне обжига, измеряемая пирометром). Связь между этими переменными жесткая: линейная либо близкая к ней. Присутствие обеих переменных сильно усложняет процесс идентификации. Например, при идентификации по методу наименьших квадратов возникает вырождение. Применение же проекционных алгоритмов (например, простейшего адаптивного алгоритма) инвариантно к наличию обоих переменных. Все отмеченное относится и к переменным  $z_3$ ,  $z_4$ . Из них оставлена входная переменная  $z_3$ .

Чистые запаздывания на 1, 2, и 3 такта по переменным  $u_1 \div u_4$ ,  $z_2$ ,  $z_3$ ,  $z_5$  соответствуют времени прохождения материала в зонах нагрева, сушки и обжига. Например, за 1 такт материал проходит через зону обжига; за 2 такта – через зоны сушки и обжига; за 3 такта через печь. Параметры уравнения объекта  $a_0$ ,  $a_1 \div a_5$  неизвестны. Они дрейфуют и соответствуют тому или иному режиму нормальной работы печи (в некоторой достаточно узкой области изменения входных переменных).  $e$  – аддитивная помеха, в которую включаются все неточности описания объекта.

Далее по структуре уравнения объекта (4.1.1) будет сформирована структура модели с постоянными параметрами, а по ней построена модель с переменными параметрами. Эти параметры перестраиваются по мере поступления новых измерений входов и выхода объекта. За счет этого происходит как приспособление модели к изменяющимся условиям протекания процесса, так и к компенсации неточностей структуры выбранной модели.

Для исследования свойств синтезируемых алгоритмов адаптивного управления необходимо иметь имитационные уравнения объекта. Ими являются уравнениям (4.1.1) с известными параметрами  $\bar{a}_0, \bar{a}_1 \div \bar{a}_5$  и известными статистическими свойствами помехи  $e$ . Они получаются путем обработки (например, по ретроспективным алгоритмам метода наименьших квадратов) серии накопленных экспериментальных данных о входах и выходе объекта. При этой ретроспективной идентификации приходится перебирать различные структуры уравнений сигнальной части и даже менять алгоритмы идентификации, каждый раз исследуя адекватность описания и основные свойства помехи  $e$ .

В момент времени  $t$  (момент принятия решения) осуществляется измерение входных возмущающих воздействий  $z_1(t) \div z_5(t)$  и выходной координаты объекта  $x(t)$ . Необходимо по этой новой информации и с учетом значений всех входов (в том числе и управляющих) и выхода объекта в предыдущие моменты времени  $t-1, t-2, \dots$  найти оптимальные управления  $u_1(t) \div u_4(t)$ .

Из уравнения объекта (4.1.1) видно, что управления  $u_1(t) \div u_3(t)$  влияют на выходную координату в момент времени  $t+1$  (т. е. на  $x(t+1)$ ), а управляющее воздействие  $u_4(t)$  — на  $x(t+3)$ . Но в момент времени  $t$  (момент расчета  $u_1(t) \div u_4(t)$ ) выходные координаты  $x(t+1), x(t+3)$  еще не известны, они будут измерены в последующие моменты времени. Следовательно, для формирования критериев оптимальности (для расчета управлений) необходимо строить модель объекта и по ней прогнозировать выход объекта для нужных моментов времени.

Локальный критерий оптимальности взят в виде минимума квадратичного отклонения выхода модели и желаемого выхода объекта в соответствующие моменты времени.

Структура модели печи строится в соответствии со структурой сигнальной части выхода объекта и имеет вид

$$\begin{aligned} y(t) = & \alpha_0 + \alpha_1 x(t-1) + \alpha_2 z_2(t-1) + \\ & + \alpha_3 u_1(t-1) + \alpha_4 u_2(t-1) + \alpha_5 u_3(t-1) + \\ & + \alpha_6 z_3(t-2) + \alpha_7 u_4(t-3) + \alpha_8 z_5(t-3). \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Структура модели (4.1.2) перенесена на динамическую модель с перестраиваемыми параметрами, так как помеха в (4.1.1) является дискретным «белым» шумом.

$$\begin{aligned} y(k | \alpha(t)) = & \alpha_0(t) + \alpha_1(t)x(k-1) + \alpha_2(t)z_2(k-1) + \\ & + \alpha_3(t)u_1(k-1) + \alpha_4(t)u_2(k-1) + \alpha_5(t)u_3(k-1) + \\ & + \alpha_6(t)z_3(k-2) + \alpha_7(t)u_4(k-3) + \alpha_8(t)z_5(k-3). \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Здесь  $\{\alpha_i(t)\}$  – параметры модели, вычисленные в момент времени  $t$  с учетом свежей информации, поступившей с входов и выхода объекта.

Аргумент  $k$  этой модели принимает значения  $k = t, t-1, \dots$  при идентификации параметров  $\alpha(t)$ . При этом за счет наилучшего подбора параметров модели минимизируются невязки выходов объекта  $x(k)$  и модели  $y(k | \vec{\alpha}(t))$  на одном или нескольких тактах работы системы. Лучшими из алгоритмов адаптивной перестройки параметров являются проекционные алгоритмы и модифицированные алгоритмы наименьших квадратов с ограничением чувствительности к выбросам помех и с учетом экспоненциального забывания информации. Проекционные алгоритмы удобно использовать на первых шагах перестройки параметров, когда только начинается процесс адаптации параметров модели, а также в вырожденных и близких к ним случаях. После накопления информации для корректных вариантов моделей лучше применять рекуррентные модифицированные схемы наименьших квадратов.

При синтезе управлений  $u_1(t) \div u_4(t)$  производится прогноз выхода модели (обычно на несколько тактов вперед). Индекс  $k$  модели принимает значения  $k = t+1, t+2, t+3$ .

**Алгоритм управления.** При подстройке в момент времени  $t$  параметров  $\vec{\alpha}(t)$  модели (4.1.3)

$$y(k | \alpha(t)) = \varphi^T(k)\alpha(t) \equiv \sum_{j=1}^m \varphi_j(k)\alpha_j(t)$$

где  $\varphi^T(k) = (1; x(k-1); z_2(k-1); u_1(k-1); u_2(k-1); u_3(k-1);$   
 $z_3(k-2); u_4(k-3); z_5(k-3) )$ ,

$$\alpha^T(t) = (\alpha_0(t); \alpha_1(t); \alpha_2(t); \dots; \alpha_8(t)),$$

на основе совокупности измерений входов и выходов, поступивших в устройство управления к этому моменту времени:

$$x(t), \vec{z}(t); x(t-1), \vec{u}(t-1), \vec{z}(t-1); x(t-2), \vec{u}(t-2), \vec{z}(t-2), \dots$$

применяются алгоритмы коррекции параметров – см. гл. 5.

Процедуру расчета управлений для объектов с чистым запаздыванием (см. гл. 3) обобщим применительно к процессу обжига извести.

По модели (4.1.3) находим прогнозируемое значение выходной координаты объекта на момент времени  $t + 1$ :

$$\begin{aligned} y(t+1 | \alpha(t)) &= \alpha_0(t) + \alpha_1(t)x(t) + \alpha_2(t)z_2(t) + \\ &+ \alpha_3(t)u_1(t) + \alpha_4(t)u_2(t) + \alpha_5(t)u_3(t) + \\ &+ \alpha_6(t)z_3(t-1) + \alpha_7(t)u_4(t-2) + \alpha_8(t)z_5(t-2) \equiv \\ &\equiv L_{t+1} + \alpha_3(t)u_1(t) + \alpha_4(t)u_2(t) + \alpha_5(t)u_3(t). \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Здесь выделены интересующие управления  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ ,  $u_3(t)$ , а остальные слагаемые обозначены одной групповой переменной

$$\begin{aligned} L_{t+1} &= \alpha_0(t) + \alpha_1(t)x(t) + \alpha_2(t)z_2(t) + \\ &+ \alpha_6(t)z_3(t-1) + \alpha_7(t)u_4(t-2) + \alpha_8(t)z_5(t-2), \end{aligned}$$

в которую входят все известные величины.

Из локального критерия оптимальности

$$I = \left( y(t+1 | \vec{\alpha}(t)) - x^*(t+1) \right)^2 = \min_{u_1(t), u_2(t), u_3(t)}, \quad (4.1.5)$$

где  $u_{1,1} \leq u_1(t) \leq u_{1,2}$ ,  $u_{2,1} \leq u_2(t) \leq u_{2,2}$ ,  $u_{3,1} \leq u_3(t) \leq u_{3,2}$ ;  $x^*(t+1)$  – значение желаемой траектории в момент  $(t+1)$ , вычисляем управляющие воздействия  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ ,  $u_3(t)$ .

Находим вначале идеальные управляющие воздействия  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$ ,  $v_3(t)$  – без учета ограничений, а затем проектируем их на выпуклую гиперпрямоугольную область ограничений.

Абсолютный минимум (без ограничений) квадратичного показателя  $I$  соответствует равенству выхода модели  $y(t+1 | \vec{\alpha}(t))$  и желаемой траектории  $x^*(t+1)$ :

$$\alpha_3(t)v_1(t) + \alpha_4(t)v_2(t) + \alpha_5(t)v_3(t) = x^*(t+1) - L_{t+1}. \quad (4.1.6)$$

Для получения единственного решения:

1) запишем линейное уравнение (4.1.6) относительно приращений  $\Delta v_1(t)$ ,  $\Delta v_2(t)$ ,  $\Delta v_3(t)$ , где  $v_1(t) = u_1(t-1) + \Delta v_1(t)$ ,  $v_2(t) = u_2(t-1) + \Delta v_2(t)$ ,  $v_3(t) = u_3(t-1) + \Delta v_3(t)$ :

$$\begin{aligned} & \alpha_3(t)\Delta v_1(t) + \alpha_4(t)\Delta v_2(t) + \alpha_5(t)\Delta v_3(t) = \\ & = x^*(t+1) - L_{t+1} - \alpha_3(t)u_1(t-1) - \alpha_4(t)u_2(t-1) - \alpha_5(t)u_3(t-1), \end{aligned}$$

2) наложим на приращения дополнительное ограничение в виде минимума квадрата нормы вектора уклонений

$$(\Delta v_1(t))^2 + (\Delta v_2(t))^2 + (\Delta v_3(t))^2 = \min,$$

3) найдём приращения с использованием операции псевдообращения

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Delta v_1(t) \\ \Delta v_2(t) \\ \Delta v_3(t) \end{pmatrix} &= (\alpha_3(t); \alpha_4(t); \alpha_5(t))^+ \begin{pmatrix} x^*(t+1) - L_{t+1} - \alpha_3(t)u_1(t-1) - \\ - \alpha_4(t)u_2(t-1) - \alpha_5(t)u_3(t-1) \end{pmatrix} = \\ &= \frac{(x^*(t+1) - L_{t+1} - \alpha_3(t)u_1(t-1) - \alpha_4(t)u_2(t-1) - \alpha_5(t)u_3(t-1))}{\alpha_3^2(t) + \alpha_4^2(t) + \alpha_5^2(t)} \begin{pmatrix} \alpha_3(t) \\ \alpha_4(t) \\ \alpha_5(t) \end{pmatrix}, \quad (4.1.7) \end{aligned}$$

4) вычислим итоговые идеальные управления

$$\begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(t-1) \\ u_2(t-1) \\ u_3(t-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta v_1(t) \\ \Delta v_2(t) \\ \Delta v_3(t) \end{pmatrix}. \quad (4.1.8)$$

Далее проектируем решение на прямоугольную область ограничений

$$u_j(t) = \begin{cases} u_{j,1}, & \text{при } v_j(t) \leq u_{j,1}, \\ v_j(t), & \text{при } u_{j,1} \leq v_j(t) \leq u_{j,2}, \quad j = 1, 2, 3. \\ u_{j,2}, & \text{при } u_{j,2} \leq v_j(t), \end{cases} \quad (4.1.9)$$

Три управляющих воздействия  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ ,  $u_3(t)$  получены. Теперь найдем управление  $u_4(t)$ . Для этого по модели (4.1.3) прогнозируем выход объекта на моменты  $(t+2)$  и  $(t+3)$ .

Для момента  $(t+2)$

$$\begin{aligned} y(t+2 | \alpha(t)) &= \alpha_0(t) + \alpha_1(t)y(t+1 | \alpha(t)) + \alpha_2(t)\tilde{z}_2(t+1) + \\ &+ \alpha_3(t)u_1(t+1) + \alpha_4(t)u_2(t+1) + \alpha_5(t)u_3(t+1) + \\ &+ \alpha_6(t)z_3(t) + \alpha_7(t)u_4(t-1) + \alpha_8(t)z_5(t-1) \equiv \\ &\equiv L_{t+2} + \alpha_3(t)u_1(t+1) + \alpha_4(t)u_2(t+1) + \alpha_5(t)u_3(t+1). \quad (4.1.10) \end{aligned}$$

Здесь  $y(t+1 | \alpha(t))$  – выход модели (4.1.4) после подстановки в неё найденных оптимальных управлений (4.1.9),  $\tilde{z}_2(t+1)$  – прогнозируемое на момент времени  $t+1$  значение для возмущающего воздействия  $z_2$ . Например, для линейного прогноза, приведенного в гл. 2,

$$\tilde{z}_2(t+1) = 2z_2(t) - z_2(t-1). \quad (4.1.11)$$

Прогнозируемое значение управляющих воздействий  $u_1(t+1)$ ,  $u_2(t+1)$ ,  $u_3(t+1)$  в (4.1.10) вычисляется по тому же принципу, что и управлений  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ ,  $u_3(t)$  [см. (4.1.5)–(4.1.9)].

В соответствии с критерием оптимальности

$$I = \left( y(t+2 | \alpha(t)) - x^*(t+2) \right)^2 = \min_{u_1(t+1), u_2(t+1), u_3(t+1)}, \quad (4.1.12)$$

где  $u_{1,1} \leq u_1(t+1) \leq u_{1,2}$ ,  $u_{2,1} \leq u_2(t+1) \leq u_{2,2}$ ,  $u_{3,1} \leq u_3(t+1) \leq u_{3,2}$ , получаем, что

$$u_j(t+1) = \begin{cases} u_{j,1}, & \text{при } v_j(t+1) \leq u_{j,1}, \\ v_j(t+1), & \text{при } u_{j,1} \leq v_j(t+1) \leq u_{j,2}, \quad j = 1, 2, 3; \\ u_{j,2}, & \text{при } u_{j,2} \leq v_j(t+1), \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} v_1(t+1) \\ v_2(t+1) \\ v_3(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta v_1(t+1) \\ \Delta v_2(t+1) \\ \Delta v_3(t+1) \end{pmatrix}; \quad (4.1.13)$$

$$\begin{pmatrix} \Delta v_1(t+1) \\ \Delta v_2(t+1) \\ \Delta v_3(t+1) \end{pmatrix} = (\alpha_3(t); \alpha_4(t); \alpha_5(t))^+ \begin{pmatrix} x^*(t+2) - L_{t+2} - \alpha_3(t)u_1(t) - \\ - \alpha_4(t)u_2(t) - \alpha_5(t)u_3(t) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{(x^*(t+2) - L_{t+2} - \alpha_3(t)u_1(t) - \alpha_4(t)u_2(t) - \alpha_5(t)u_3(t))}{\alpha_3^2(t) + \alpha_4^2(t) + \alpha_5^2(t)} \begin{pmatrix} \alpha_3(t) \\ \alpha_4(t) \\ \alpha_5(t) \end{pmatrix}.$$

Для момента  $(t+3)$

$$\begin{aligned} y(t+3 | \alpha(t)) &= \alpha_0(t) + \alpha_1(t)y(t+2 | \alpha(t)) + \alpha_2(t)\tilde{z}_2(t+2) + \\ &+ \alpha_3(t)u_1(t+2) + \alpha_4(t)u_2(t+2) + \alpha_5(t)u_3(t+2) + \\ &+ \alpha_6(t)\tilde{z}_3(t+1) + \alpha_7(t)u_4(t) + \alpha_8(t)z_5(t) \equiv \\ &\equiv L_{t+3} + \alpha_3(t)u_1(t+2) + \alpha_4(t)u_2(t+2) + \alpha_5(t)u_3(t+2) + \alpha_7(t)u_4(t), \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

где  $\tilde{z}_2(t+2)$ ,  $\tilde{z}_3(t+1)$  – прогнозируемые значения для возмущающих воздействий  $z_2$ ,  $z_3$ . Например, при линейном прогнозе

$$\tilde{z}_2(t+2) = 3z_2(t) - 2z_2(t-1), \quad \tilde{z}_3(t+1) = 2z_3(t) - z_3(t-1). \quad (4.1.15)$$

Расчет вспомогательных управлений  $u_1(t+2)$ ,  $u_2(t+2)$ ,  $u_3(t+2)$  и искомого управляющего воздействия  $u_4(t)$ , входящих в модель (4.1.14), проводится совместно по тому же принципу.

На основе критерия оптимальности

$$I = \left( y(t+3 | \alpha(t)) - x^*(t+3) \right)^2 = \min \quad (4.1.16)$$

вычисляем идеальные управления (без учета ограничений)

$$\begin{pmatrix} v_1(t+2) \\ v_2(t+2) \\ v_3(t+2) \\ v_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(t+1) \\ u_2(t+1) \\ u_3(t+1) \\ u_4(t-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta v_1(t+2) \\ \Delta v_2(t+2) \\ \Delta v_3(t+2) \\ \Delta v_4(t) \end{pmatrix}, \quad (4.1.17)$$

$$\begin{pmatrix} \Delta v_1(t+2) \\ \Delta v_2(t+2) \\ \Delta v_3(t+2) \\ \Delta v_4(t) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} x^*(t+3) - L_{t+3} - \alpha_3(t)u_1(t+1) - \alpha_4(t)u_2(t+1) - \\ - \alpha_5(t)u_3(t+1) - \alpha_7(t)u_4(t-1) \end{pmatrix}}{\alpha_3^2(t) + \alpha_4^2(t) + \alpha_5^2(t) + \alpha_7^2(t)} \begin{pmatrix} \alpha_3(t) \\ \alpha_4(t) \\ \alpha_5(t) \\ \alpha_7(t) \end{pmatrix}$$

и проектируем только  $v_4(t)$  (так как вспомогательные управления больше не используются) на интервальное ограничение

$$u_4(t) = \begin{cases} u_{4,1}, & \text{при } v_4(t) \leq u_{4,1}, \\ v_4(t), & \text{при } u_{4,1} \leq v_4(t) \leq u_{4,2}, \\ u_{4,2}, & \text{при } u_{4,2} \leq v_4(t). \end{cases} \quad (4.1.18)$$

**Численный пример.** Динамическое уравнение (4.1.2) вращающейся печи обжига извести, полученное в результате обработки экспериментальных данных, имеет вид

$$\begin{aligned}
x(t) = & 88,9 - 0,052x(t-1) + 0,041z_2(t-1) - 0,975u_1(t-1) - \\
& - 0,33u_2(t-1) + 0,141u_3(t-1) + 0,007z_3(t-2) + \\
& + 0,165u_4(t-3) - 0,5z_5(t-3) + e(t).
\end{aligned} \tag{4.1.19}$$

Интервал дискретизации равен 1 часу, помеха  $e(t)$  равномерно распределена в интервале  $[0,15; -0,15]$ .

Единицы измерения переменных:  $x$  [%],  $z_2$  [ $^{\circ}\text{C}$ ],  $u_1$  [ $\text{м}^3/\text{ч}$ ],  $u_2$  [%],  $u_3$  [%],  $z_3$  [ $^{\circ}\text{C}$ ],  $u_4$  [ $\text{м}^3/\text{ч}$ ],  $z_5$  [%].

Управляющие воздействия имеют ограничения:  $1,26 < u_1 < 2,47$ ;  $98,2 < U_2 < 100$ ;  $21,86 < U_3 < 21,9$ ;  $24,842 < U_4 < 24,889$ .

При исследовании алгоритмов поведение объекта имитировалось уравнением (4.1.19). Исследование проводили с целью оценки качества адаптивного управления распределённым объектом.

На рис. 4.1.3 приведены результаты адаптивной перестройки параметров модели (с использованием проекционного алгоритма – простейшего адаптивного алгоритма), управляющих воздействий и выходной координаты. Качество стабилизации выхода высокое.

На рис. 4.1.4 приведены такие же результаты, но при использовании алгоритмов наименьших квадратов в адаптивной идентификации параметров модели.

На рис. 4.1.5 еще для одной реализации процесса приведены на одних и тех же графиках результаты при использовании как простейшего адаптивного алгоритма, так и рекуррентного алгоритма наименьших квадратов. Так как изменение всех переменных осуществляется в сравнительно узких областях (в «малом») и реальный уровень помех не высок, то эффективность от использования указанных двух типов алгоритмов идентификации примерно одинаковая.

**Заключение.** Анализ технологического процесса обжига извести во вращающейся печи и результаты перебора различных структур моделей с чистым запаздыванием, а также ретроспективная идентификация параметров этих моделей по критерию наименьших квадратов позволили выбрать простейшую по структуре адекватную динамическую модель и исследовать свойства аддитивной помехи. Полученное математическое описание объекта позволило построить структуру модели с переменными параметрами и имитировать поведение объекта при численном исследовании свойств замкнутой системы адаптивного управления. Синтезированные алгоритмы адаптивного управления обеспечили сравнительно высокую точность и быстродействие работы замкнутой системы адаптивного управления.

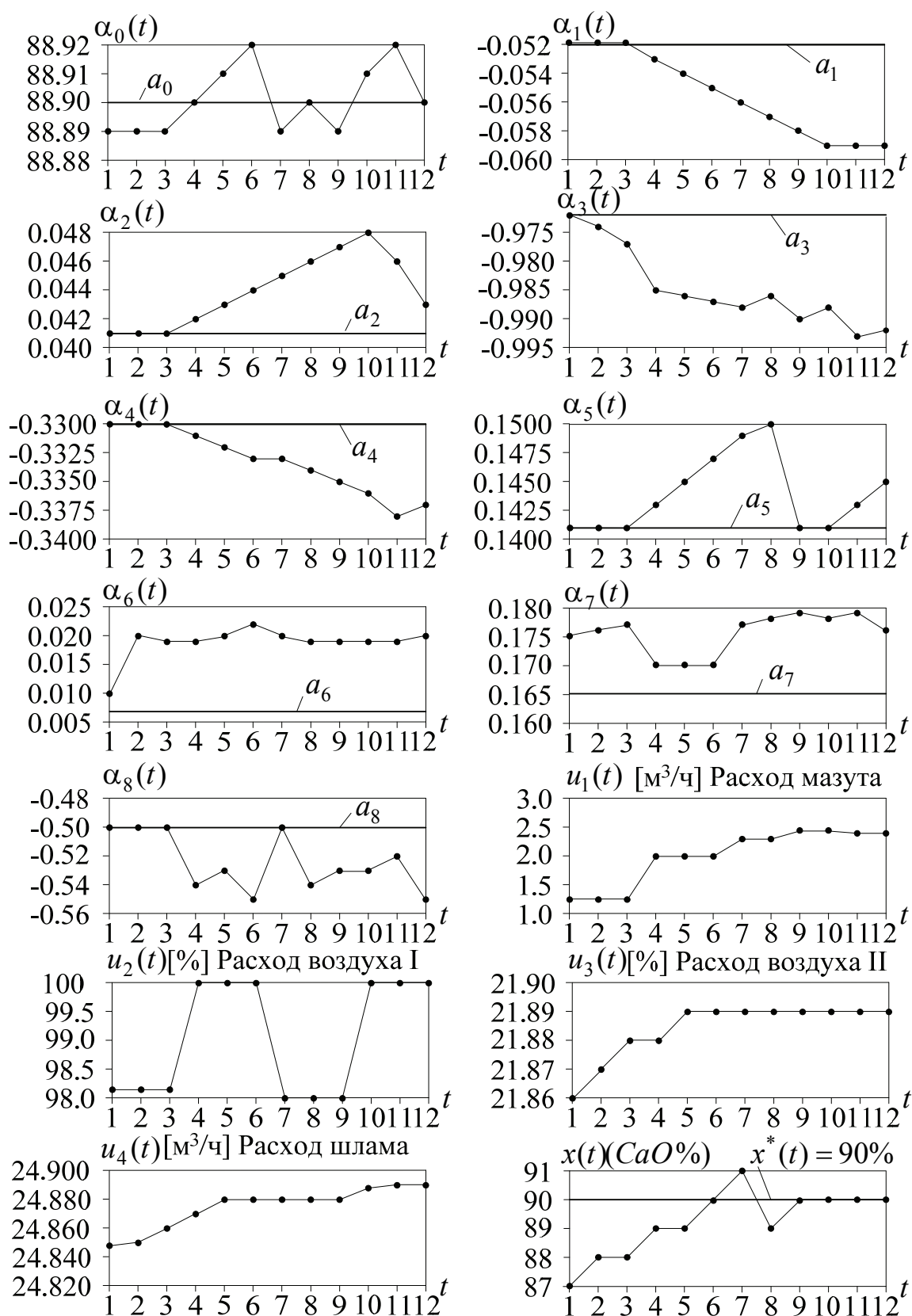


Рис. 4.1.3

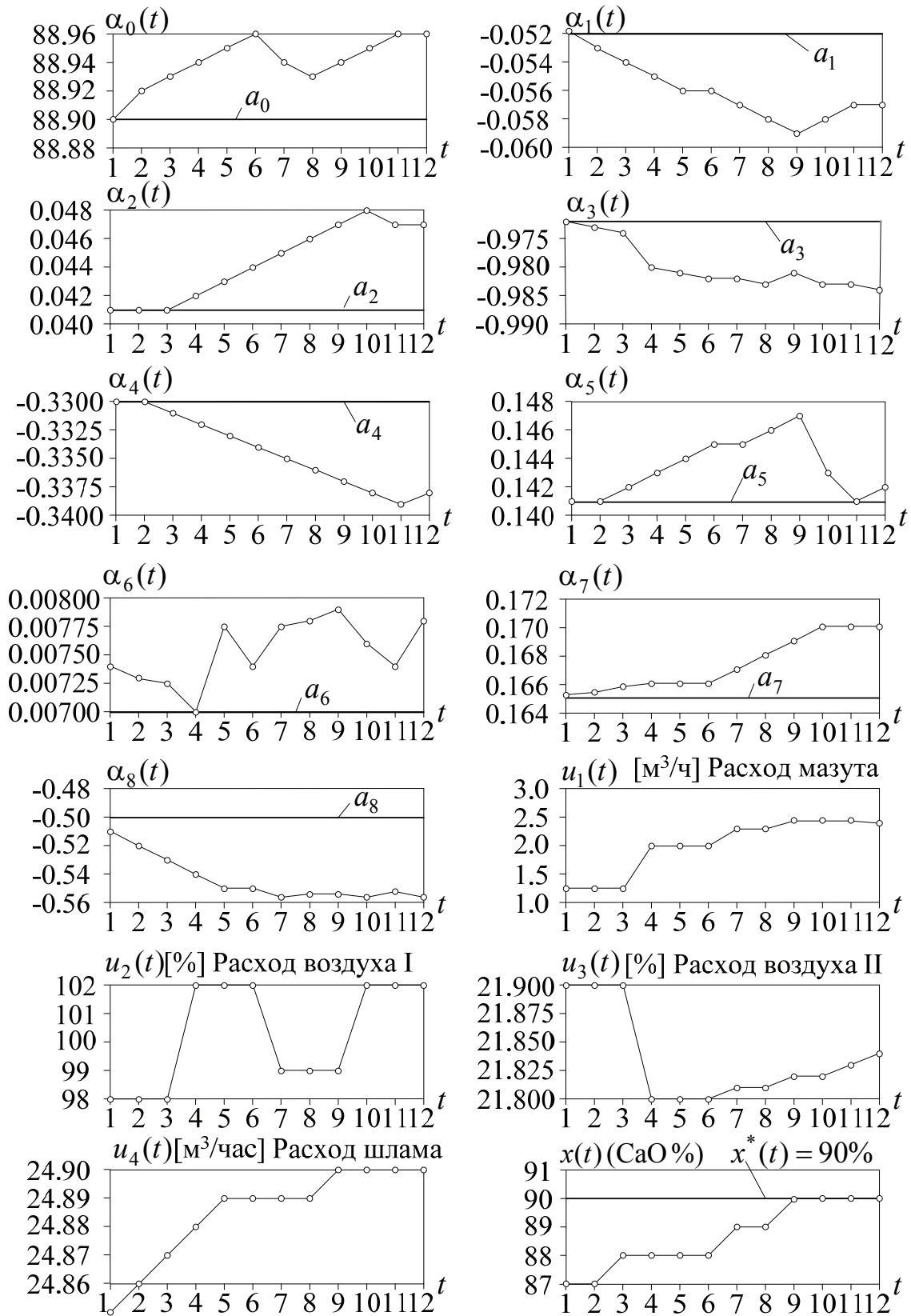


Рис. 4.1.4

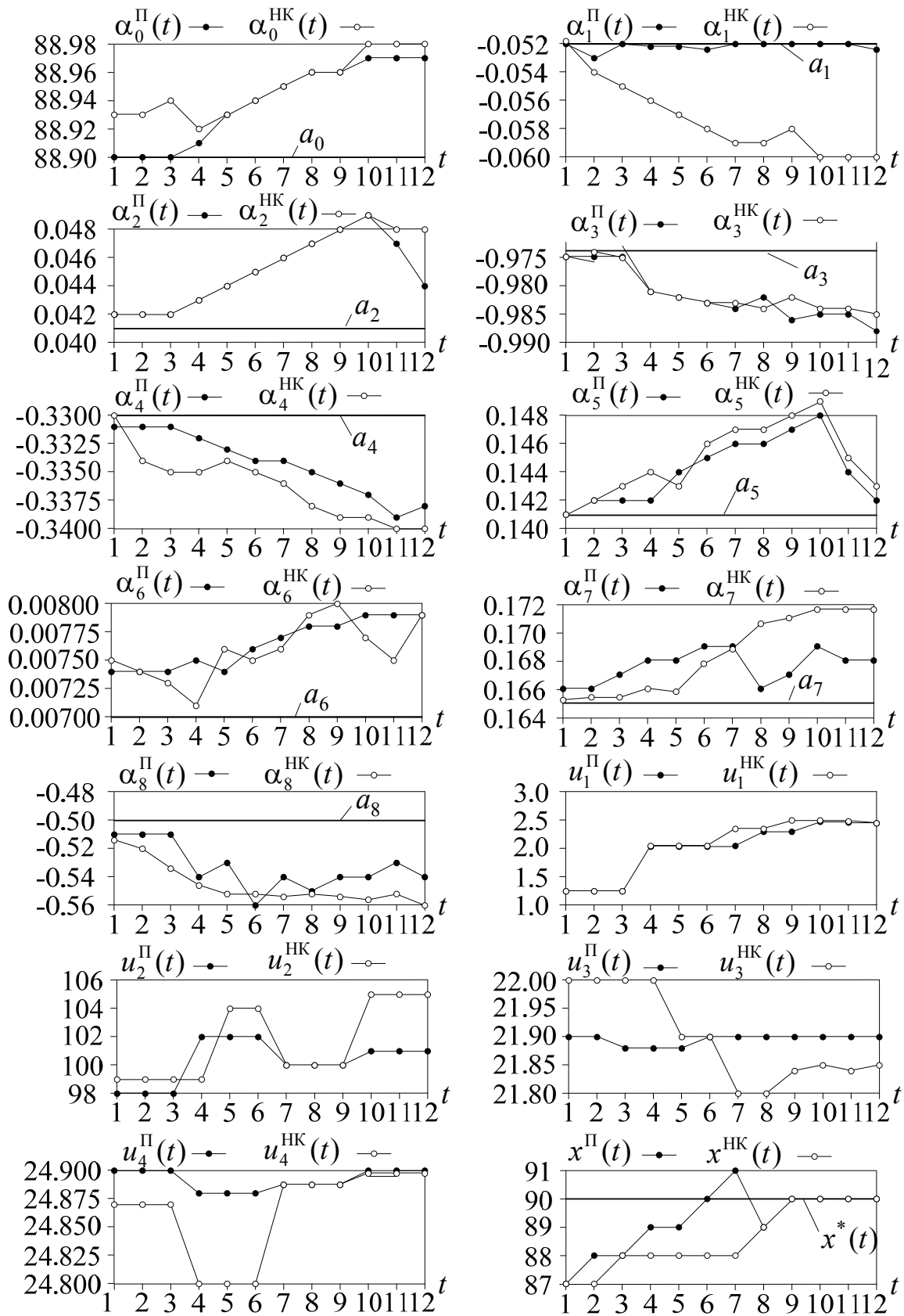


Рис. 4.1.5

## 4.2. Управление обжигом клинкера во вращающихся печах

Построен алгоритм адаптивного управления процессом обжига клинкера во вращающихся печах [4.2–4.4]. На каждом такте управления параметры модели с чистыми запаздываниями корректируются по текущей информации, затем на основе модели из локального критерия оптимальности синтезируются управляющие воздействия. Приведены результаты численного исследования алгоритма.

**Введение.** Вращающиеся печи в цехе обжига предназначены для обжига сырьевой смеси с целью получения клинкера (цементное производство), состоящего из трехкальциевого силиката ( $3\text{CaO SiO}_2$ ), трехкальциевого алюмината ( $3\text{CaO Al}_2\text{O}_3$ ), двухкальциевого силиката ( $2\text{CaO SiO}_2$ ), четырехкальциевого алюмоферрита ( $4\text{CaO Al}_2\text{O}_3 \text{FeO}_3$ ). В зависимости от требований, предъявляемых к клинкеру, сырьевая смесь может быть двух или трехкомпонентной (нефелиновый шлам, известняк, глина). Химический состав сырьевой шихты корректируется по модулям. Загрузка печей сначала осуществляется через поршневой регулирующий орган, далее шихта движется самотеком (за счет вращения печи и наклона), при этом она постепенно нагревается. По мере нагрева шихты происходят сложные физико-химические процессы разложения и соединения веществ с образованием минералов клинкера.

В зависимости от температуры и физико-химических превращений шихты при обжиге печь делится условно на шесть зон: 1) зона сушки (испарения влаги; 2) зона подогрева и дегидратации; 3) зона кальцинирования (декарбонизации); 4) зона экзотермических реакций; 5) зона спекания; 6) зона охлаждения (здесь происходит первичное охлаждение клинкера от температуры спекания до температур  $1\,000 \div 1\,200\text{ }^\circ\text{C}$ ).

В зоне спекания происходит образование трехкальциевого силиката – основного минерала клинкера. Из расплава (жидкой фазы) трехкальциевый силикат выделяется в виде мелких кристаллов, способных к росту. От крупности кристаллов, которые должны быть определенного размера, зависит качество клинкера (активность цемента и его прочность). Далее желательно резкое охлаждение расплава для получения стекловидной массы и прекращения развития кристаллов.

Резкое охлаждение клинкера препятствует разложению алита (трехкальциевого силиката). Из печи через соединительную шахту клинкер поступает в колосниковый холодильник для окончательного охлаждения. Охлаждение клинкера осуществляется воздухом, подаваемым вентилятором острого дутья под колосники для резкого охлаждения до  $400 \div 500\text{ }^\circ\text{C}$

и разбрасывания клинкера по ширине решетки, а затем охлаждения вентилятором общего дутья по всей площади решетки.

Регулирование процесса охлаждения осуществляется изменением скоростей решеток и расхода воздуха. Охлажденный до  $100 \div 120$  °С клинкер из холодильника поступает на ковшевые конвейеры, которыми доставляется в силосный склад (печи 3,4,5).

Удаление отходящих газов, которые образуются в результате сгорания топлива, испарения влаги и разложения известняка, осуществляется мощными запечными дымососами. Технологическая пыль, выносимая из печи с отходящими газами, улавливается в системе газоочистки (пыльная камера и электрофилтры) и через системы ячеевых затворов и шнеков концентрируется в расходных бункерах пневмовинтовых насосов, из которых с помощью сжатого воздуха по пылепроводам возвращается обратно в печь за цепную завесу. Очищенные от пыли отходящие газы через высокостоящие трубы рассеиваются в атмосфере. Часть подогретого в холодильнике воздуха подается в печь для полного сжигания топлива. Избыточный воздух через систему батарейных циклонов отсасывается аспирационными дымососами и выбрасывается в атмосферу.

На печах 3,4,5 производится вторая стадия очистки аспирационного воздуха в горизонтальных электрофилтрах, сброс пыли с которых идет на ковшевые транспортеры. Охлажденный клинкер с печей 3,4,5 ковшевыми конвейерами подается в клинкерные силосы. В качестве технологического топлива в печах обжига применяется приготовленный в шаровых мельницах угольный порошок, который при необходимости может быть заменен мазутом.

Агентом для сушки угля является смесь воздуха и продуктов сгорания мазута в топках угольных мельниц, затем выделяемый из пылевоздушной смеси угольный порошок подается в расходные бункеры печей. В систему топливосжигающих устройств печи входит форсуночный вентилятор (первичный воздух), дозаторы-питатели и форсунка. Технологический процесс получения клинкера контролируется и дистанционно регулируется с центрального пульта управления.

Выходным продуктом процесса обжига является клинкер. Результаты исследований позволили определить факторы, влияющие на процесс обжига и качество клинкера. Колебания влажности шлама и повышенная влажность затрудняют процесс обжига и требуют повышенных расходов топлива. При возврате во вращающуюся печь пыли, уловленной электрофилтрами, понижается активность клинкера за счет увеличения остаточного количества щелочей в клинкере.

Таким образом, существуют основные условия, соблюдение которых необходимо для гарантированного качества клинкера: постоянное количе-

ство подаваемой в печь пыли; оптимальное количество подаваемой пыли с учетом ее свойств; отсутствие подсосов в горячем конце печи. Существенным образом на качество обжигаемого клинкера влияет непостоянство количества возвращаемой в печь пыли и ее состав (содержание углерода,  $\text{CaCO}_3$  и щелочей).

Увеличение количества возвращаемой в печь пыли и изменение давления воздуха в магистрали приводит к тому, что наиболее крупные частицы пыли падают на слой клинкера, не долетая до зоны высоких температур. Догорание частиц угля в слое клинкера вызывает локальную восстановительную среду и обуславливает наличие  $\text{FeO}$  в клинкере. Кальцит, заключенный в частицах пыли, претерпевая превращение в слое клинкера, вызывает наличие в нем гнезд  $\text{CaO}$  и колец  $\text{CaCO}_3$ .

**Постановка задачи.** Основными входными контролируемыми переменными вращающейся печи, оказывающими влияние на процесс обжига клинкера, являются (см. рис. 4.2.1):  $z_1(t)$  – влажность шихты;  $z_2(t)$  – коэффициент насыщения шихты;  $z_3(t)$  – температура после цепной завесы;  $z_4(t)$  – нагрузка главного привода;  $z_5(t)$  – влажность топлива;  $z_6(t)$  – тонина помола;  $z_7(t)$  – летучие топлива;  $z_8(t)$  –  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  шихты;  $z_9(t)$  –  $\text{R}_2\text{O}$

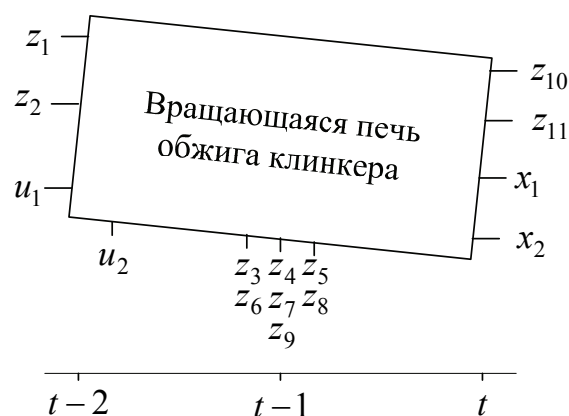


Рис. 4.2.1

шихты;  $z_{10}(t)$  – температура вторичного воздуха печи;  $z_{11}(t)$  – температура материала;  $u_1(t)$  – расход шлама в печи;  $u_2(t)$  – разрежение в холодной головке печи. Выходными контролируемыми являются переменные:  $x_1(t)$  – качество клинкера по  $\text{CaO}$ ;  $x_2(t)$  – качество клинкера по  $\text{FeO}$ . Качество клинкера (цементное производство) определяют по результатам лабораторного анализа материала, отбираемого на срезе вращающейся печи с периодичностью один раз в один час. Этот интервал выбран в дальнейшем при построении дискретной модели с чистыми запаздываниями. Показателями качества клинкера являются  $\text{CaO}$  и  $\text{FeO}$  ( $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ).

Для того чтобы в системе автоматического управления можно было оперативно поддерживать качество клинкера, по двум выходным показателям разработан алгоритм адаптивного оптимального управления [4.3, 4.4], позволяющий рассчитывать управляющие воздействия ( $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ ) на каждом такте управления  $t$  ( $t$  – это целочисленная независимая переменная).

ная). При этом строятся алгоритмы коррекции параметров модели и синтеза по ней управляющих воздействий (для каждого текущего момента времени).

На рис 4.2.1 также показано соответствие между значениями целочисленной переменной  $t$  (номером такта) и величиной запаздывания аргументов в соответствующих входных переменных при учете их влияния на выходные переменные, обусловленное распределенным характером объекта.

На примере процесса обжига клинкера изложим схему синтеза алгоритмов адаптивного управления с идентификацией для распределенных объектов с несколькими выходами. Модель печи представляет собой систему двух разностных уравнений, в правые части которых входят как общие входные переменные, так и свои. Важно, что общими для них являются искомые управляющие воздействия, и при расчете управлений необходимо одновременно рассматривать оба уравнения модели. Адаптивная идентификация проводится независимо для каждого уравнения модели.

**Управление процессом обжига клинкера.** Процесс обжига клинкера описывается двумя динамическими разностными уравнениями

$$\begin{aligned} x_1(t) = & a_{1,0} + a_{1,1}x_1(t-1) + a_{1,2}z_{10}(t) + a_{1,3}z_{11}(t) + \\ & + a_{1,4}z_4(t-1) + a_{1,5}z_5(t-1) + \\ & + a_{1,6}u_1(t-2) + a_{1,7}u_2(t-2) + a_{1,8}z_1(t-2) + a_{1,9}z_2(t-2) + \xi_1(t); \quad (4.2.1) \\ x_2(t) = & a_{2,0} + a_{2,1}x_2(t-1) + a_{2,2}z_3(t-1) + a_{2,3}z_6(t-1) + \\ & + a_{2,4}z_7(t-1) + a_{2,5}z_8(t-1) + a_{2,6}z_9(t-1) + \\ & + a_{2,7}u_1(t-2) + a_{2,8}u_2(t-2) + \xi_2(t). \end{aligned}$$

Здесь  $\xi_1(t)$ ,  $\xi_2(t)$  – аддитивные помехи, в которые включаются все неточности описания объекта основной частью (без  $\xi$ ) уравнения (4.2.1).

Основная часть уравнений строится, например, обработкой накопленных экспериментальных данных по методу наименьших квадратов, т. е. за счет ретроспективной идентификации объекта. Полученный набор параметров является хорошим начальным приближением параметров при адаптивной идентификации в синтезируемом адаптивном регуляторе.

На основе (4.2.1) строим динамическую модель (с настраиваемыми переменными параметрами) в виде двух разностных динамических уравнений с двумя входными управляющими  $u_1$  и  $u_2$  и несколькими возмущающими  $z_1 \div z_{11}$  воздействиями

$$\begin{aligned}
 y_1(k | \bar{\alpha}_1(t)) = & \alpha_{1,0}(t) + \alpha_{1,1}(t)x_1(k-1) + \alpha_{1,2}(t)z_{10}(k) + \\
 & + \alpha_{1,3}(t)z_{11}(k) + \alpha_{1,4}(t)z_4(k-1) + \alpha_{1,5}(t)z_5(k-1) + \\
 & + \alpha_{1,6}(t)u_1(k-2) + \alpha_{1,7}(t)u_2(k-2) + \alpha_{1,8}(t)z_1(k-2) + \\
 & + \alpha_{1,9}(t)z_2(k-2); \tag{4.2.2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_2(k | \bar{\alpha}_2(t)) = & \alpha_{2,0}(t) + \alpha_{2,1}(t)x_2(k-1) + \\
 & + \alpha_{2,2}(t)z_3(k-1) + \alpha_{2,3}(t)z_6(k-1) + \alpha_{2,4}(t)z_7(k-1) + \\
 & + \alpha_{2,5}(t)z_8(k-1) + \alpha_{2,6}(t)z_9(k-1) + \\
 & + \alpha_{2,7}(t)u_1(k-2) + \alpha_{2,8}(t)u_2(k-2).
 \end{aligned}$$

Аргумент  $t$  в параметрах  $\alpha(t)$  модели означает, что они построены на основе информации, поступившей к моменту  $t$ :

$$\begin{aligned}
 & x_1(t), x_2(t), z_1(t) \div z_{11}(t); \\
 & x_1(t-1), x_2(t-1), u_1(t-1), u_2(t-1), z_1(t-1) \div z_{11}(t-1); \tag{4.2.3} \\
 & x_1(t-2), x_2(t-2), u_1(t-2), u_2(t-2), z_1(t-2) \div z_{11}(t-2), \dots
 \end{aligned}$$

По этим же измерениям вычисляются и искомые управляющие воздействия  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ , которые обеспечивают наилучшее приближение выходных координат объекта к требуемым  $x_1^*$ ,  $x_2^*$  (в каждый текущий момент времени  $t$ ).

При коррекции параметров модели в момент  $t$  (при этом в модели (4.2.2) аргумент  $k$  принимает значения  $t$ ,  $t-1$ , ...) можно использовать весь спектр рекуррентных алгоритмов. Здесь остановимся на простейшем адаптивном алгоритме (из класса проекционных алгоритмов).

Представим двумерную линейную относительно параметров модель (4.2.2) в компактном виде

$$\begin{aligned}
 y_1(k | \bar{\alpha}_1(t)) & \equiv \bar{\Phi}_1^T(k) \bar{\alpha}_1(t), \\
 \bar{\Phi}_1^T(k) & = (1, x_1(k-1), z_{10}(k), z_{11}(k), z_4(k-1), z_5(k-1), \\
 & u_1(k-2), u_2(k-2), z_1(k-2), z_2(k-2)), \\
 \bar{\alpha}_1^T(t) & = (\alpha_{1,0}(t), \alpha_{1,1}(t), \alpha_{1,2}(t), \dots, \alpha_{1,9}(t)); \\
 y_2(k | \bar{\alpha}_2(t)) & \equiv \bar{\Phi}_2^T(k) \bar{\alpha}_2(t),
 \end{aligned}$$

$$\vec{\Phi}_2^T(k) = (1, x_2(k-1), z_3(k-1), z_6(k-1), \dots, z_9(k-1), u_1(k-2), u_2(k-2)),$$

$$\vec{\alpha}_2^T(t) = (\alpha_{2,0}(t), \alpha_{2,1}(t), \alpha_{2,2}(t), \dots, \alpha_{2,8}(t)).$$

Каждая модель зависит от группы своих параметров, поэтому для каждой группы ведется самостоятельная перестройка параметров.

Простейший адаптивный алгоритм перестройки параметров в момент  $t$  имеет вид

$$\vec{\alpha}_i(t) = \vec{\alpha}_i(t-1) + \frac{x_i(t) - \vec{\Phi}_i^T(t)\vec{\alpha}_i(t-1)}{\vec{\Phi}_i^T(t)\vec{\Phi}_i(t)} \vec{\Phi}_i(t), \quad i = 1, 2. \quad (4.2.4)$$

В базисные функции  $\vec{\Phi}_1(t)$ ,  $\vec{\Phi}_2(t)$  входят все измеренные ранее переменные (4.2.3).

Для расчета управлений последовательно по модели (4.2.2) осуществляем прогноз выходов на два такта вперед (при этом в правой части модели появятся искомые управления  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ ):

$$\begin{aligned} y_1(t+1 | \vec{\alpha}_1(t)) &= \alpha_{1,0}(t) + \alpha_{1,1}(t)x_1(t) + \alpha_{1,2}(t)\tilde{z}_{10}(t+1) + \\ &+ \alpha_{1,3}(t)\tilde{z}_{11}(t+1) + \alpha_{1,4}(t)z_4(t) + \alpha_{1,5}(t)z_5(t) + \\ &+ \alpha_{1,6}(t)u_1(t-1) + \alpha_{1,7}(t)u_2(t-1) + \alpha_{1,8}(t)z_1(t-1) + \alpha_{1,9}(t)z_2(t-1); \\ y_2(t+1 | \vec{\alpha}_2(t)) &= \alpha_{2,0}(t) + \alpha_{2,1}(t)x_2(t) + \\ &+ \alpha_{2,2}(t)z_3(t) + \alpha_{2,3}(t)z_6(t) + \alpha_{2,4}(t)z_7(t) + \alpha_{2,5}(t)z_8(t) + \\ &+ \alpha_{2,6}(t)z_9(t) + \alpha_{2,7}(t)u_1(t-1) + \alpha_{2,8}(t)u_2(t-1). \\ y_1(t+2 | \vec{\alpha}_1(t)) &= \alpha_{1,0}(t) + \alpha_{1,1}(t)y_1(t+1 | \vec{\alpha}_1(t)) + \\ &+ \alpha_{1,2}(t)\tilde{z}_{10}(t+2) + \alpha_{1,3}(t)\tilde{z}_{11}(t+2) + \alpha_{1,4}(t)\tilde{z}_4(t+1) + \\ &+ \alpha_{1,5}(t)\tilde{z}_5(t+1) + \alpha_{1,6}(t)u_1(t) + \alpha_{1,7}(t)u_2(t) + \\ &+ \alpha_{1,8}(t)z_1(t) + \alpha_{1,9}(t)z_2(t); \\ y_2(t+2 | \vec{\alpha}_2(t)) &= \alpha_{2,0}(t) + \alpha_{2,1}(t)y_2(t+1 | \vec{\alpha}_2(t)) + \\ &+ \alpha_{2,2}(t)\tilde{z}_3(t+1) + \alpha_{2,3}(t)\tilde{z}_6(t+1) + \alpha_{2,4}(t)\tilde{z}_7(t+1) + \\ &+ \alpha_{2,5}(t)\tilde{z}_8(t+1) + \alpha_{2,6}(t)\tilde{z}_9(t+1) + \alpha_{2,7}(t)u_1(t) + \alpha_{2,8}(t)u_2(t). \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

В этих уравнениях стоят прогнозируемые (на указанный в скобках момент времени) значения входных воздействий  $\tilde{z}$ . Кроме того, в правой

части последней пары уравнений вместо неизвестных выходов объекта  $x_1(t+1)$ ,  $x_2(t+1)$  стоят соответствующие выходы модели  $y_1(t+1 | \bar{\alpha}_1(t))$ ,  $y_2(t+1 | \bar{\alpha}_2(t))$ , полученные на предыдущем такте прогноза.

Расчет прогнозируемых значений  $\tilde{z}$  для каждой переменной проводится по обычной схеме. На рис. 4.2.2 для переменной  $z$  приведены: два последних измеренных значения  $z(t-1)$ ,  $z(t)$ , проходящая через них прямая линия и прогнозируемые на её основе два значения  $\tilde{z}(t+1)$ ,  $\tilde{z}(t+2)$ .

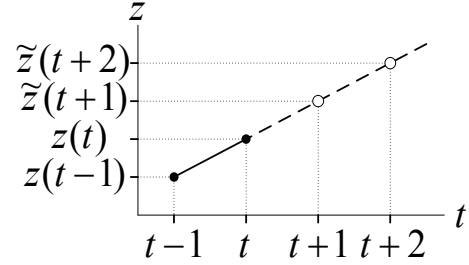


Рис. 4.2.2

Выписываем условие прохождения прямой линии через две известные точки, затем вычисляем прогнозируемые значения

$$z(t+1) = a + b \cdot (t+1) = 2z(t) - z(t-1),$$

$$z(t+2) = a + b \cdot (t+2) = 3z(t) - 2z(t-1).$$

Линейный прогноз можно осуществлять по трем и более значениям  $z$ , но при расчете параметров линейной модели необходимо осуществлять сглаживание экспериментальных данных, например, по квадратичному критерию

$$\sum_{k=t-m}^t (z(k) - a - b \cdot k)^2 = \min_{a, b}.$$

В правой части модели (4.2.5) (в момент времени  $t+2$ ) выделяем интересующие управления  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ , а остальные слагаемые обозначаем одной групповой переменной:

$$y_1(t+2 | \bar{\alpha}_1(t)) \equiv L_{1,t+2} + \alpha_{1,6}(t)u_1(t) + \alpha_{1,7}(t)u_2(t),$$

$$y_2(t+2 | \bar{\alpha}_2(t)) = L_{2,t+2} + \alpha_{2,7}(t)u_1(t) + \alpha_{2,8}(t)u_2(t). \quad (4.2.6)$$

Составляем локальный критерий оптимальности

$$I = \sum_{i=1}^2 [y_i(t+2 | \bar{\alpha}_i(t)) - x_i^*(t+2)]^2 = \min_{u_1(t), u_2(t)}, \quad (4.2.7)$$

где  $u_{1,1} \leq u_1(t) \leq u_{1,2}$ ,  $u_{2,1} \leq u_2(t) \leq u_{2,2}$ ;  $x_1^*(t+2)$ ,  $x_2^*(t+2)$  — значения переменных желаемой траектории в момент  $(t+2)$ . Получили задачу квадратичного программирования. Найдём её решение.

Вначале вычисляем управляющие воздействия  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$  без учета ограничений. Необходимое условие минимума представляет собой систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}\alpha_{1,6}(t)v_1(t) + \alpha_{1,7}(t)v_2(t) &= x_1^*(t+2) - L_{1,t+2} \equiv L_{1,t+2}^*, \\ \alpha_{2,7}(t)v_1(t) + \alpha_{2,8}(t)v_2(t) &= x_2^*(t+2) - L_{2,t+2} \equiv L_{2,t+2}^*.\end{aligned}\quad (4.2.8)$$

Чтобы обезопаситься от вырожденных случаев, запишем систему (4.2.8) в приращениях  $\Delta v_1(t)$ ,  $\Delta v_2(t)$  относительно управлений на предыдущем такте  $u_1(t-1)$ ,  $u_2(t-1)$ :

$$\begin{aligned}v_1(t) &= u_1(t-1) + \Delta v_1(t), \quad v_2(t) = u_2(t-1) + \Delta v_2(t), \\ \alpha_{1,6}(t)\Delta v_1(t) + \alpha_{1,7}(t)\Delta v_2(t) &= L_{1,t+2}^* - \alpha_{1,6}(t)u_1(t-1) - \alpha_{1,7}(t)u_2(t-1), \\ \alpha_{2,7}(t)\Delta v_1(t) + \alpha_{2,8}(t)\Delta v_2(t) &= L_{2,t+2}^* - \alpha_{2,7}(t)u_1(t-1) - \alpha_{2,8}(t)u_2(t-1)\end{aligned}$$

и используем при расчете  $\Delta v_1(t)$ ,  $\Delta v_2(t)$  операцию псевдообращения матрицы системы уравнений (при этом дополнительно учитывается критерий минимума квадрата нормы приращений  $(\Delta v_1(t))^2 + (\Delta v_2(t))^2 = \min$ )

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \Delta v_1(t) \\ \Delta v_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha_{1,6}(t) & \alpha_{1,7}(t) \\ \alpha_{2,7}(t) & \alpha_{2,8}(t) \end{pmatrix}^+ \cdot \\ &\cdot \begin{pmatrix} L_{1,t+2}^* - \alpha_{1,6}(t)u_1(t-1) - \alpha_{1,7}(t)u_2(t-1) \\ L_{2,t+2}^* - \alpha_{2,7}(t)u_1(t-1) - \alpha_{2,8}(t)u_2(t-1) \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (4.2.9)$$

В итоге получаем идеальное управление

$$\begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(t-1) \\ u_2(t-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta v_1(t) \\ \Delta v_2(t) \end{pmatrix}.$$

Далее проектируем решение на прямоугольную область ограничений

$$u_j(t) = \begin{cases} u_{j,1}, & \text{при } v_j(t) \leq u_{j,1}, \\ v_j(t), & \text{при } u_{j,1} \leq v_j(t) \leq u_{j,2}, \quad j=1,2, \\ u_{j,2}, & \text{при } u_{j,2} \leq v_j(t), \end{cases} \quad (4.2.10)$$

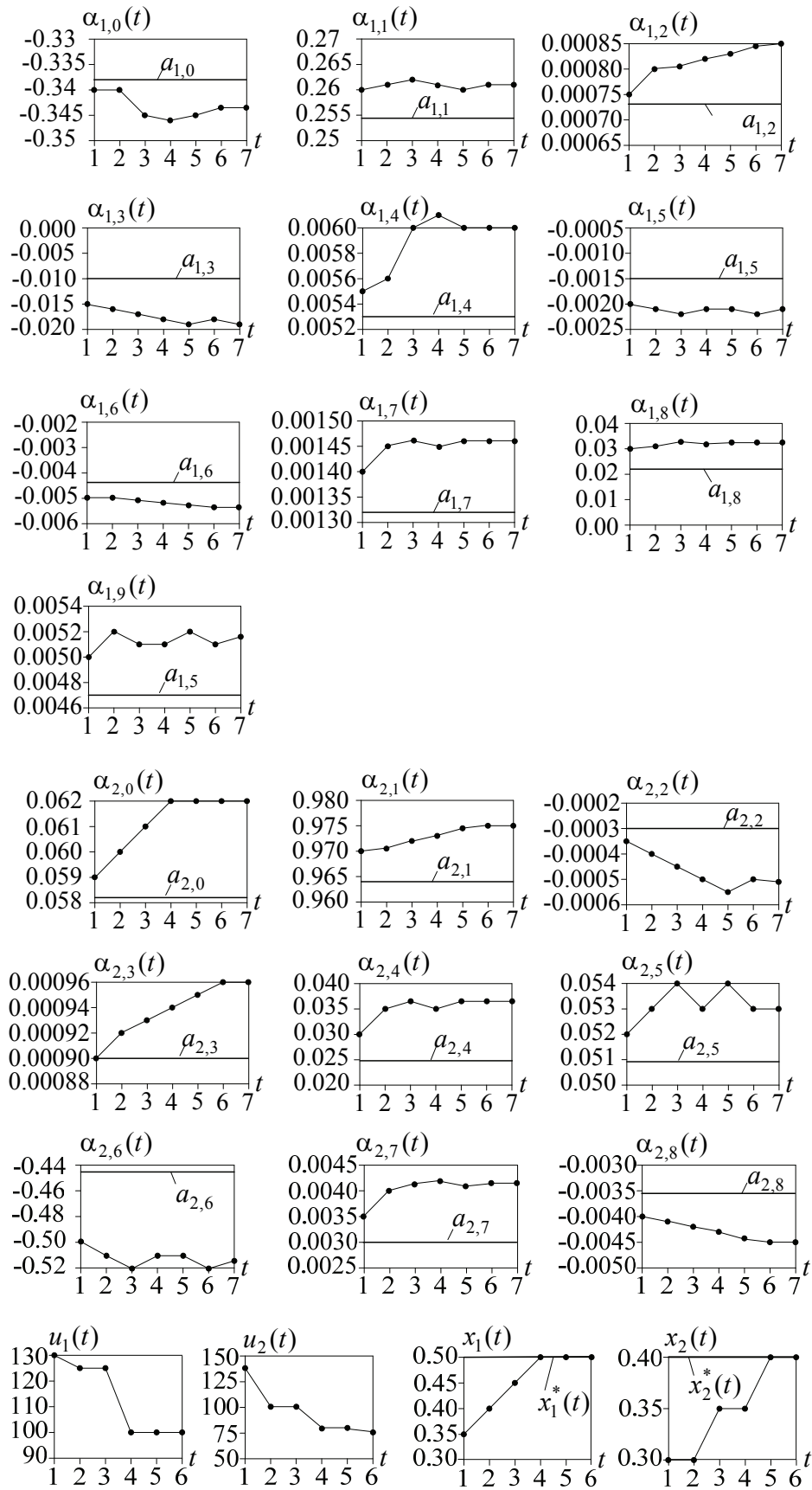


Рис. 4.2.3

**Исследование алгоритма.** Динамическое уравнение (4.2.1) процесса обжига клинкера во вращающейся печи, полученное на основе обработки экспериментальных данных, имеет вид

$$\begin{aligned} x_1(t) = & -0,338 + 0,254x_1(t-1) + 0,00073z_{10}(t) - 0,01z_{11}(t) + \\ & + 0,0053z_4(t-1) - 0,0015z_5(t-1) - 0,0044u_1(t-2) + 0,00132u_2(t-2) + \\ & + 0,022z_1(t-2) + 0,0047z_2(t-2) + e_1(t); \\ x_2(t) = & 0,0582 + 0,964x_2(t-1) - 0,0003z_3(t-1) + \quad (4.2.11) \\ & + 0,000898z_6(t-1) + 0,0246z_7(t-1) + 0,0509z_8(t-1) - \\ & - 0,445z_9(t-1) + 0,003u_1(t-2) - 0,00354u_2(t-2) + e_2(t). \end{aligned}$$

Каждая помеха  $e_1(t)$ ,  $e_2(t)$  не коррелирована во времени и равномерно распределена в интервале  $[-0,01; 0,01]$ .

Желаемые значения выходных переменных постоянны во времени (решается задача стабилизации) и равны величинам  $x_1^*(t) = 0,5$ ;  $x_2^*(t) = 0,4$ .

Интервалы изменения выходных переменных:

$$\begin{aligned} 80 \leq u_1 \leq 130 \text{ [м}^3/\text{ч]}, \quad 70 \leq u_2 \leq 140 \text{ [}^\circ\text{C]}, \\ 33,0 \leq z_1 \leq 33,8 \text{ [\%]}, \quad 1,00 \leq z_2 \leq 1,02 \text{ [\%]}, \quad 780 \leq z_3 \leq 820 \text{ [}^\circ\text{C]}, \\ 76 \leq z_4 \leq 80 \text{ [A]}, \quad 1,0 \leq z_5 \leq 1,4 \text{ [\%]}, \quad 6,2 \leq z_6 \leq 8,2 \text{ [\%]}, \\ 13,7 \leq z_7 \leq 17,0 \text{ [\%]}, \quad 2,8 \leq z_8 \leq 3,5 \text{ [\%]}, \quad 0,77 \leq z_9 \leq 0,90 \text{ [\%]}, \\ 74 \leq z_{10} \leq 78 \text{ [}^\circ\text{C]}, \quad 780 \leq z_{11} \leq 820 \text{ [}^\circ\text{C]}. \end{aligned}$$

Графики изменения параметров модели, управляющих воздействий и выходных координат объекта приведены на рис. 4.2.3. Несмотря на изменение параметров модели от «истинных» параметров сигнальной части выхода объекта, качество предсказания выходных координат по модели хорошее. Этот факт подтверждается высокой эффективностью синтезированных управлений. Выходные координаты объекта достаточно быстро выходят в малую окрестность требуемых уровней стабилизации.

Модели и численное исследование адаптивной системы управления с идентификацией соответствует печи обжига клинкера Ачинского глиноземного комбината.

### 4.3. Схема адаптивного управления многомерными объектами

В п. 4.3 результаты п. 4.2 обобщены на более сложные объекты [4.5].

Разработана схема синтеза алгоритмов адаптивного управления с идентификацией для распределенных динамических объектов с несколькими выходами и с несколькими управляющими и возмущающими воздействиями, приложенными к объекту в фиксированных точках. Динамическими моделями являются разностные уравнения с чистыми запаздываниями по наблюдаемым и управляющим входным воздействиям. На каждом такте принятия решения параметры модели корректируются по текущей информации, затем по модели осуществляется прогноз выходных координат на несколько тактов вперед и на основе локальных критериев оптимальности рассчитываются управляющие воздействия.

**Постановка задачи.** Динамические свойства распределенного объекта, входные и выходные переменные которого соответствуют фиксированным точкам пространственных координат, можно описать динамическими дискретно-временными уравнениями с чистыми запаздываниями. Адаптивная коррекция параметров моделей (по мере поступления информации о входах и выходах объекта) дает возможность применения простых структур моделей. За счет этого получаются сравнительно простые, но эффективные алгоритмы управления.

Рассмотрим распределенные объекты с несколькими выходами. Остановимся на случае двух выходов. Последовательность всех преобразований сохраняется при обобщении на большее количество выходов.

Динамические процессы, происходящие в объекте, описываются системой двух разностных уравнений **с перекрестными связями** по выходным переменным, а в правые части уравнений входят **общие управляющие** входные переменные, приложенные в различных точках распределенного объекта:

$$\begin{aligned} x_1(t) = & a_{1,0} + a_{1,1}z_1(t) + a_{1,2}x_1(t-1) + a_{1,3}x_1(t-2) + \\ & + a_{1,4}x_2(t-1) + a_{1,5}x_2(t-2) + a_{1,6}z_2(t-1) + \\ & + a_{1,7}u_1(t-\tau_1) + a_{1,8}u_2(t-\tau_1) + a_{1,9}z_3(t-\tau_1) + \\ & + a_{1,10}u_3(t-\tau_2) + a_{1,11}u_4(t-\tau_2) + a_{1,12}z_4(t-\tau_2) + \\ & + a_{1,13}u_5(t-\tau_3) + a_{1,14}u_6(t-\tau_3) + a_{1,15}z_5(t-\tau_3) + e_1(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2(t) = & a_{2,0} + a_{2,1}z_1(t) + a_{2,2}x_1(t-1) + a_{2,3}x_1(t-2) + \\
& + a_{2,4}x_2(t-1) + a_{2,5}x_2(t-2) + a_{2,6}z_2(t-1) + \\
& + a_{2,7}u_1(t-\tau_1) + a_{2,8}u_2(t-\tau_1) + a_{2,9}z_3(t-\tau_1) + \\
& + a_{2,10}u_3(t-\tau_2) + a_{2,11}u_4(t-\tau_2) + a_{2,12}z_4(t-\tau_2) + \\
& + a_{2,13}u_5(t-\tau_3) + a_{2,14}u_6(t-\tau_3) + a_{2,15}z_5(t-\tau_3) + e_2(t).
\end{aligned} \tag{4.3.1}$$

Здесь  $x_1, x_2$  – выходные переменные;  $\vec{u}$  – управления;  $\vec{z}$  – возмущающие воздействия;  $e_1, e_2$  – аддитивные помехи, в которые включаются все неточности описания объекта сигнальной частью (без  $e$ ) уравнения (4.3.1). Чистые запаздывания по времени являются целочисленными, и  $1 \leq \tau_1 < \tau_2 < \tau_3$ . Возмущающие воздействия в правой части каждого уравнения могут быть как общими, так и своими.

Сигнальная часть в (4.3.1) строится, например, на основе статистической обработки накопленных экспериментальных данных по методу наименьших квадратов, т. е. осуществляется ретроспективная идентификация объекта. Полученный набор параметров  $\vec{a}$  служит хорошим начальным приближением параметров при адаптивной идентификации параметров модели в синтезируемом адаптивном регуляторе.

Необходимо в каждый текущий момент времени  $t$  с использованием текущих измерений входов и выходов объекта

$$\vec{x}(t), \vec{z}(t); \vec{x}(t-1), \vec{u}(t-1), \vec{z}(t-1); \vec{x}(t-2), \vec{u}(t-2), \vec{z}(t-2); \dots, \tag{4.3.2}$$

рассчитать оптимальные управления  $\vec{u}(t)$ , обеспечивающие наименьшие отклонения выходных координат  $\vec{x}$  от желаемых  $\vec{x}^*$  в соответствующие текущие моменты времени.

**Алгоритм адаптивного управления.** На основе структуры сигнальной части уравнения (4.3.1) движения объекта выписываем структуру модели с переменными параметрами:

$$\begin{aligned}
y_1(k | \vec{\alpha}_1(t)) = & \alpha_{1,0}(t) + \alpha_{1,1}(t)z_1(k) + \alpha_{1,2}(t)x_1(k-1) + \alpha_{1,3}(t)x_1(k-2) + \\
& + \alpha_{1,4}(t)x_2(k-1) + \alpha_{1,5}(t)x_2(k-2) + \alpha_{1,6}(t)z_2(k-1) + \\
& + \alpha_{1,7}(t)u_1(k-\tau_1) + \alpha_{1,8}(t)u_2(k-\tau_1) + \alpha_{1,9}(t)z_3(k-\tau_1) + \\
& + \alpha_{1,10}(t)u_3(k-\tau_2) + \alpha_{1,11}(t)u_4(k-\tau_2) + \alpha_{1,12}(t)z_4(k-\tau_2) + \\
& + \alpha_{1,13}(t)u_5(k-\tau_3) + \alpha_{1,14}(t)u_6(k-\tau_3) + \alpha_{1,15}(t)z_5(k-\tau_3); \tag{4.3.3} \\
y_2(k | \vec{\alpha}_2(t)) = & \alpha_{2,0}(t) + \alpha_{2,1}(t)z_1(k) + \alpha_{2,2}(t)x_1(k-1) + \alpha_{2,3}(t)x_1(k-2) + \\
& + \alpha_{2,4}(t)x_2(k-1) + \alpha_{2,5}(t)x_2(k-2) + \alpha_{2,6}(t)z_2(k-1) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \alpha_{2,7}(t)u_1(k - \tau_1) + \alpha_{2,8}(t)u_2(k - \tau_1) + \alpha_{2,9}(t)z_3(k - \tau_1) + \\
 & + \alpha_{2,10}(t)u_3(k - \tau_2) + \alpha_{2,11}(t)u_4(k - \tau_2) + \alpha_{2,12}(t)z_4(k - \tau_2) + \\
 & + \alpha_{2,13}(t)u_5(k - \tau_3) + \alpha_{2,14}(t)u_6(k - \tau_3) + \alpha_{2,15}(t)z_5(k - \tau_3).
 \end{aligned}$$

Параметры  $\vec{\alpha}$  для каждого уравнения модели свои.

Модель (4.3.3) линейна относительно параметров:

$$y_1(k | \vec{\alpha}(t)) \equiv \varphi^T(k) \vec{\alpha}_1(t), \quad y_2(k | \vec{\alpha}(t)) \equiv \varphi^T(k) \vec{\alpha}_2(t), \quad (4.3.4)$$

$$\begin{aligned}
 \varphi^T(k) = & (1; z_1(k); x_1(k-1); x_1(k-2); x_2(k-1); x_2(k-2); z_2(k-1); \\
 & u_1(k - \tau_1); u_2(k - \tau_1); z_3(k - \tau_1); u_3(k - \tau_2); u_4(k - \tau_2); z_4(k - \tau_2); \\
 & u_5(k - \tau_3); u_6(k - \tau_3); z_5(k - \tau_3) ),
 \end{aligned}$$

$$\vec{\alpha}_1^T(t) = (\alpha_{1,0}(t), \alpha_{1,1}(t), \alpha_{1,2}(t), \dots, \alpha_{1,15}(t)),$$

$$\vec{\alpha}_2^T(t) = (\alpha_{2,0}(t), \alpha_{2,1}(t), \alpha_{2,2}(t), \dots, \alpha_{2,15}(t)).$$

Такой компактный вид записи уравнений модели удобен при идентификации параметров  $\vec{\alpha}(t)$  в каждый текущий момент времени. Например, простейший проекционный алгоритм адаптивной коррекции параметров имеет вид

$$\begin{aligned}
 \vec{\alpha}_i(t) = & \vec{\alpha}_i(t-1) + \frac{x_i(t) - \varphi^T(t) \vec{\alpha}_i(t-1)}{\varphi^T(t) \varphi(t)} \varphi(t), \quad i = 1, 2, \\
 & t = 1, 2, \dots
 \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

Часто при коррекции параметров используется квадратичный критерий с экспоненциальным забыванием информации и некоррелированными неравноточными измерениями выхода объекта

$$\sum_{j=1}^t \sigma_i^{-2}(j) \lambda^{t-j} (x_i(j) - \varphi^T(j) \vec{\alpha}_i(t))^2 = \min_{\vec{\alpha}_i(t)}, \quad i = 1, 2. \quad (4.3.6)$$

Для него рекуррентный алгоритм с забыванием информации имеет вид

$$\vec{\alpha}_i(t) = \vec{\alpha}_i(t-1) + \gamma_i(t) [x_i(t) - \varphi^T(t) \vec{\alpha}_i(t-1)], \quad (4.3.7)$$

$$\gamma_i(t) = \frac{\Gamma_i(t-1) \varphi(t)}{\sigma_i^2(t) \lambda + \varphi^T(t) \Gamma_i(t-1) \varphi(t)},$$

$$\Gamma_i(t) = [E - \gamma_i(t) \varphi^T(t)] \Gamma_i(t-1) \lambda^{-1}, \quad t = t_0 + 1, t_0 + 2, \dots, \quad i = 1, 2.$$

Здесь  $\sigma_i^2(t)$  – дисперсия выхода  $x_i(t)$ ,  $0,9 \leq \lambda \leq 0,995$ ;  $E$  – единичная матрица. Начальные значения  $\alpha_i(t_0)$ ,  $\Gamma_i(t_0)$ ,  $i=1,2$  этой рекуррентной процедуры получаются из решения системы линейных алгебраических уравнений критерия наименьших квадратов при  $t = t_0$ :

$$\left[ \sum_{j=1}^{t_0} \sigma_i^{-2}(j) \lambda^{t_0-j} \varphi(j) \varphi^T(j) \right] \alpha_i(t_0) = \sum_{j=1}^{t_0} \sigma_i^{-2}(j) \lambda^{t_0-j} \varphi(j) x_i(j),$$

$$\Gamma_i(t_0) = \left[ \sum_{j=1}^{t_0} \sigma_i^{-2}(j) \lambda^{t_0-j} \varphi(j) \varphi^T(j) \right]^{-1}, \quad i=1,2. \quad (4.3.8)$$

Рассчитаем теперь оптимальные управления  $u_i(t)$ ,  $i = \overline{1, 6}$ .

Последовательно  $\tau_1$  раз пересчитаем выходные координаты модели (4.3.3) и получим прогнозируемое значение выходов объекта на момент времени  $t + \tau_1$ :

$$\begin{aligned} \underline{y_1(t+1 | \alpha_1(t))} &= \alpha_{1,0}(t) + \alpha_{1,1}(t) \underline{\tilde{z}_1(t+1)} + \alpha_{1,2}(t) x_1(t) + \alpha_{1,3}(t) x_1(t-1) + \\ &+ \alpha_{1,4}(t) x_2(t) + \alpha_{1,5}(t) x_2(t-1) + \alpha_{1,6}(t) z_2(t) + \\ &+ \alpha_{1,7}(t) u_1(t+1-\tau_1) + \alpha_{1,8}(t) u_2(t+1-\tau_1) + \alpha_{1,9}(t) z_3(t+1-\tau_1) + \\ &+ \alpha_{1,10}(t) u_3(t+1-\tau_2) + \alpha_{1,11}(t) u_4(t+1-\tau_2) + \alpha_{1,12}(t) z_4(t+1-\tau_2) + \\ &+ \alpha_{1,13}(t) u_5(t+1-\tau_3) + \alpha_{1,14}(t) u_6(t+1-\tau_3) + \alpha_{1,15}(t) z_5(t+1-\tau_3); \\ \underline{y_2(t+1 | \alpha_2(t))} &= \alpha_{2,0}(t) + \alpha_{2,1}(t) \underline{\tilde{z}_1(t+1)} + \alpha_{2,2}(t) x_1(t) + \alpha_{2,3}(t) x_1(t-1) + \\ &+ \alpha_{2,4}(t) x_2(t) + \alpha_{2,5}(t) x_2(t-1) + \alpha_{2,6}(t) z_2(t) + \\ &+ \alpha_{2,7}(t) u_1(t+1-\tau_1) + \alpha_{2,8}(t) u_2(t+1-\tau_1) + \alpha_{2,9}(t) z_3(t+1-\tau_1) + \\ &+ \alpha_{2,10}(t) u_3(t+1-\tau_2) + \alpha_{2,11}(t) u_4(t+1-\tau_2) + \alpha_{2,12}(t) z_4(t+1-\tau_2) + \\ &+ \alpha_{2,13}(t) u_5(t+1-\tau_3) + \alpha_{2,14}(t) u_6(t+1-\tau_3) + \alpha_{2,15}(t) z_5(t+1-\tau_3); \\ \underline{y_1(t+2 | \alpha_1(t))} &= \alpha_{1,0}(t) + \alpha_{1,1}(t) \underline{\tilde{z}_1(t+2)} + \alpha_{1,2}(t) \underline{y_1(t+1 | \alpha_1(t))} + \alpha_{1,3}(t) x_1(t) + \\ &+ \alpha_{1,4}(t) \underline{y_2(t+1 | \alpha_2(t))} + \alpha_{1,5}(t) x_2(t) + \alpha_{1,6}(t) \underline{\tilde{z}_2(t+1)} + \\ &+ \alpha_{1,7}(t) u_1(t+2-\tau_1) + \alpha_{1,8}(t) u_2(t+2-\tau_1) + \alpha_{1,9}(t) z_3(t+2-\tau_1) + \\ &+ \alpha_{1,10}(t) u_3(t+2-\tau_2) + \alpha_{1,11}(t) u_4(t+2-\tau_2) + \alpha_{1,12}(t) z_4(t+2-\tau_2) + \\ &+ \alpha_{1,13}(t) u_5(t+2-\tau_3) + \alpha_{1,14}(t) u_6(t+2-\tau_3) + \alpha_{1,15}(t) z_5(t+2-\tau_3); \\ \underline{y_2(t+2 | \alpha_2(t))} &= \alpha_{2,0}(t) + \alpha_{2,1}(t) \underline{\tilde{z}_1(t+2)} + \alpha_{2,2}(t) \underline{y_1(t+1 | \alpha_1(t))} + \alpha_{2,3}(t) x_1(t) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \alpha_{2,4}(t) \underline{y_2(t+1 | \alpha_2(t))} + \alpha_{2,5}(t) x_2(t) + \alpha_{2,6}(t) \underline{\tilde{z}_2(t+1)} + \\
 & + \alpha_{2,7}(t) u_1(t+2-\tau_1) + \alpha_{2,8}(t) u_2(t+2-\tau_1) + \alpha_{2,9}(t) z_3(t+2-\tau_1) + \\
 & + \alpha_{2,10}(t) u_3(t+2-\tau_2) + \alpha_{2,11}(t) u_4(t+2-\tau_2) + \alpha_{2,12}(t) z_4(t+2-\tau_2) + \\
 & + \alpha_{2,13}(t) u_5(t+2-\tau_3) + \alpha_{2,14}(t) u_6(t+2-\tau_3) + \alpha_{2,15}(t) z_5(t+2-\tau_3); \\
 & \dots\dots\dots \\
 & \underline{y_1(t+\tau_1 | \alpha_1(t))} = \alpha_{1,0}(t) + \alpha_{1,1}(t) \underline{\tilde{z}_1(t+\tau_1)} + \\
 & + \alpha_{1,2}(t) \underline{y_1(t+\tau_1-1 | \alpha_1(t))} + \alpha_{1,3}(t) \underline{y_1(t+\tau_1-2 | \alpha_1(t))} + \\
 & + \alpha_{1,4}(t) \underline{y_2(t+\tau_1-1 | \alpha_2(t))} + \alpha_{1,5}(t) \underline{y_2(t+\tau_1-2 | \alpha_2(t))} + \alpha_{1,6}(t) \underline{\tilde{z}_2(t+\tau_1-1)} + \\
 & + \alpha_{1,7}(t) u_1(t) + \alpha_{1,8}(t) u_2(t) + \alpha_{1,9}(t) z_3(t) + \\
 & + \alpha_{1,10}(t) u_3(t+\tau_1-\tau_2) + \alpha_{1,11}(t) u_4(t+\tau_1-\tau_2) + \alpha_{1,12}(t) z_4(t+\tau_1-\tau_2) + \\
 & + \alpha_{1,13}(t) u_5(t+\tau_1-\tau_3) + \alpha_{1,14}(t) u_6(t+\tau_1-\tau_3) + \alpha_{1,15}(t) z_5(t+\tau_1-\tau_3); \\
 & \underline{y_2(t+\tau_1 | \alpha_2(t))} = \alpha_{2,0}(t) + \alpha_{2,1}(t) \underline{\tilde{z}_1(t+\tau_1)} + \quad (4.3.9) \\
 & + \alpha_{2,2}(t) \underline{y_1(t+\tau_1-1 | \alpha_1(t))} + \alpha_{2,3}(t) \underline{y_1(t+\tau_1-2 | \alpha_1(t))} + \\
 & + \alpha_{2,4}(t) \underline{y_2(t+\tau_1-1 | \alpha_2(t))} + \alpha_{2,5}(t) \underline{y_2(t+\tau_1-2 | \alpha_2(t))} + \alpha_{2,6}(t) \underline{\tilde{z}_2(t+\tau_1-1)} + \\
 & + \alpha_{2,7}(t) u_1(t) + \alpha_{2,8}(t) u_2(t) + \alpha_{2,9}(t) z_8(t) + \\
 & + \alpha_{2,10}(t) u_3(t+\tau_1-\tau_2) + \alpha_{2,11}(t) u_4(t+\tau_1-\tau_2) + \alpha_{2,12}(t) z_4(t+\tau_1-\tau_2) + \\
 & + \alpha_{2,13}(t) u_5(t+\tau_1-\tau_3) + \alpha_{2,14}(t) u_6(t+\tau_1-\tau_3) + \alpha_{2,15}(t) z_5(t+\tau_1-\tau_3).
 \end{aligned}$$

Здесь  $\tilde{z}_i(k)$  – прогнозируемое на момент времени  $k$  (где  $t+1 \leq k$ ) значение для возмущающего воздействия  $z_i$ . Оно рассчитывается по разработанным в литературе схемам на основе известных к моменту времени  $t$  измерений:  $z_i(t)$ ,  $z_i(t-1)$ ,  $z_i(t-2)$ ,  $\dots$ .

Все прогнозируемые значения в правой части моделей (4.3.9) подчеркнуты.

В правых частях модели (4.3.9) (в момент времени  $t+\tau_1$ ) выделяем интересующие управления  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ , а остальные слагаемые обозначаем групповыми переменными  $L_{1,t+\tau_1}$ ,  $L_{2,t+\tau_1}$ :

$$\begin{aligned}
 y_1(t+\tau_1 | \alpha_1(t)) & \equiv L_{1,t+\tau_1} + \alpha_{1,7}(t) u_1(t) + \alpha_{1,8}(t) u_2(t), \\
 y_2(t+\tau_1 | \alpha_2(t)) & \equiv L_{2,t+\tau_1} + \alpha_{2,7}(t) u_1(t) + \alpha_{2,8}(t) u_2(t). \quad (4.3.10)
 \end{aligned}$$

Для расчета управлений  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  составляем локальный критерий оптимальности

$$I = \sum_{i=1}^2 \left( y_i(t + \tau_1 | \tilde{\alpha}_i(t)) - x_i^*(t + \tau_1) \right)^2 = \min_{u_1(t), u_2(t)}, \quad (4.3.11)$$

где  $u_{1,1} \leq u_1(t) \leq u_{1,2}$ ,  $u_{2,1} \leq u_2(t) \leq u_{2,2}$ ;  $x_1^*(t + \tau_1)$ ,  $x_2^*(t + \tau_1)$  – значения переменных желаемой траектории в момент  $(t + \tau_1)$ . Формула (4.3.11) представляет собой специфичную задачу квадратичного программирования. Заметим, что включение весовых коэффициентов перед квадратичными невязками в (4.3.11) не меняет решения.

Вначале вычислим управляющие воздействия  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$  без учета интервальных ограничений, а затем проектируем их на выпуклую область ограничений.

Необходимое условие минимума (без ограничений) представляет собой равенство выхода модели и желаемой траектории ( $y_i(t + \tau_1 | \tilde{\alpha}_i(t)) = x_i^*(t + \tau_1)$ ,  $i = 1, 2$ ):

$$\begin{aligned} \alpha_{1,7}(t)v_1(t) + \alpha_{1,8}(t)v_2(t) &= x_1^*(t + \tau_1) - L_{1,t+\tau_1}, \\ \alpha_{2,7}(t)v_1(t) + \alpha_{2,8}(t)v_2(t) &= x_2^*(t + \tau_1) - L_{2,t+\tau_1}. \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

Для получения решения применим операцию псевдообращения матриц. Запишем систему (4.3.12) в приращениях  $\Delta v_1(t)$ ,  $\Delta v_2(t)$  относительно управлений предыдущего такта  $u_1(t-1)$ ,  $u_2(t-1)$  (т. е. выполним замену переменных  $v_1(t) = u_1(t-1) + \Delta v_1(t)$ ,  $v_2(t) = u_2(t-1) + \Delta v_2(t)$ ):

$$\begin{aligned} \alpha_{1,7}(t)\Delta v_1(t) + \alpha_{1,8}(t)\Delta v_2(t) &= x_1^*(t + \tau_1) - L_{1,t+\tau_1} - \\ &\quad - \alpha_{1,7}(t)u_1(t-1) + \alpha_{1,8}(t)u_2(t-1), \\ \alpha_{2,7}(t)\Delta v_1(t) + \alpha_{2,8}(t)\Delta v_2(t) &= x_2^*(t + \tau_1) - L_{2,t+\tau_1} - \\ &\quad - \alpha_{2,7}(t)u_1(t-1) + \alpha_{2,8}(t)u_2(t-1) \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

и дополнительно наложим условие минимума квадрата нормы приращений ( $(\Delta v_1(t))^2 + (\Delta v_2(t))^2 = \min$ ). Последнее условие обеспечивает единственность решения задачи расчета приращений  $\Delta v_1(t)$ ,  $\Delta v_2(t)$ . Решение системы (4.3.13) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \Delta v_1(t) \\ \Delta v_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,7}(t) & \alpha_{1,8}(t) \\ \alpha_{2,7}(t) & \alpha_{2,8}(t) \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} x_1^*(t + \tau_1) - L_{1,t+\tau_1} - \\ -\alpha_{1,7}(t)u_1(t-1) - \alpha_{1,8}(t)u_2(t-1); \\ x_2^*(t + \tau_1) - L_{2,t+\tau_1} - \\ -\alpha_{2,7}(t)u_1(t-1) - \alpha_{2,8}(t)u_2(t-1) \end{pmatrix}. \quad (4.3.14)$$

Здесь  $(\cdot)^+$  – операция псевдообращения матрицы.

В итоге получаем идеальное управление

$$\begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(t-1) \\ u_2(t-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta v_1(t) \\ \Delta v_2(t) \end{pmatrix}. \quad (4.3.15)$$

Проектируем его на прямоугольную область ограничений:

$$u_j(t) = \begin{cases} u_{j,1}, & \text{при } v_j(t) \leq u_{j,1}, \\ v_j(t), & \text{при } u_{j,1} \leq v_j(t) \leq u_{j,2}, \\ u_{j,2}, & \text{при } u_{j,2} \leq v_j(t), \end{cases} \quad j = 1, 2. \quad (4.3.16)$$

Расчет управлений  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  завершен.

Находим следующую пару управляющих воздействий  $u_3(t)$ ,  $u_4(t)$ . Для этого на основе модели (4.3.3) последовательно вычисляем прогнозируемые значения выходных координат до момента времени  $t + \tau_2$  включительно. Для момента времени  $t + \tau_2$  в правой части модели будут стоять искомые управления  $u_3(t)$ ,  $u_4(t)$ .

Для момента  $t + \tau_1 + 1$  получаем:

$$\begin{aligned} \underline{y_1(t + \tau_1 + 1 | \alpha_1(t))} &= \alpha_{1,0}(t) + \alpha_{1,1}(t)\underline{\tilde{z}_1(t + \tau_1 + 1)} + \\ &+ \alpha_{1,2}(t)\underline{y_1(t + \tau_1 | \bar{\alpha}_1(t))} + \alpha_{1,3}(t)\underline{y_1(t + \tau_1 - 1 | \alpha_1(t))} + \\ &+ \alpha_{1,4}(t)\underline{y_2(t + \tau_1 | \alpha_2(t))} + \alpha_{1,5}(t)\underline{y_2(t + \tau_1 - 1 | \alpha_2(t))} + \alpha_{1,6}(t)\underline{\tilde{z}_2(t + \tau_1)} + \\ &+ \alpha_{1,7}(t)\underline{u_1(t + 1)} + \alpha_{1,8}(t)\underline{u_2(t + 1)} + \alpha_{1,9}(t)\underline{\tilde{z}_3(t + 1)} + \\ &+ \alpha_{1,10}(t)u_3(t + \tau_1 + 1 - \tau_2) + \alpha_{1,11}(t)u_4(t + \tau_1 + 1 - \tau_2) + \alpha_{1,12}(t)z_4(t + \tau_1 + 1 - \tau_2) + \\ &+ \alpha_{1,13}(t)u_5(t + \tau_1 + 1 - \tau_3) + \alpha_{1,14}(t)u_6(t + \tau_1 + 1 - \tau_3) + \alpha_{1,15}(t)z_5(t + \tau_1 + 1 - \tau_3) \equiv \\ &\equiv L_{1,t+\tau_1+1} + \alpha_{1,7}(t)\underline{u_1(t + 1)} + \alpha_{1,8}(t)\underline{u_2(t + 1)}; \quad (4.3.17) \\ \underline{y_2(t + \tau_1 + 1 | \alpha_2(t))} &= \alpha_{2,0}(t) + \alpha_{2,1}(t)\underline{\tilde{z}_1(t + \tau_1 + 1)} + \\ &+ \alpha_{2,2}(t)\underline{y_1(t + \tau_1 | \alpha_1(t))} + \alpha_{2,3}(t)\underline{y_1(t + \tau_1 - 1 | \alpha_1(t))} + \\ &+ \alpha_{2,4}(t)\underline{y_2(t + \tau_1 | \alpha_2(t))} + \alpha_{2,5}(t)\underline{y_2(t + \tau_1 - 1 | \alpha_2(t))} + \alpha_{2,6}(t)\underline{\tilde{z}_2(t + \tau_1 - 1)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \alpha_{2,7}(t)u_1(t+1) + \alpha_{2,8}(t)u_2(t+1) + \alpha_{2,9}(t)\tilde{z}_3(t+1) + \\
 & + \alpha_{2,10}(t)u_3(t+\tau_1+1-\tau_2) + \alpha_{2,11}(t)u_4(t+\tau_1+1-\tau_2) + \alpha_{2,12}(t)z_4(t+\tau_1+1-\tau_2) + \\
 & + \alpha_{2,13}(t)u_5(t+\tau_1+1-\tau_3) + \alpha_{2,14}(t)u_6(t+\tau_1+1-\tau_3) + \alpha_{2,15}(t)z_5(t+\tau_1+1-\tau_3) \equiv \\
 & \equiv L_{2,t+\tau_1+1} + \alpha_{2,7}(t)u_1(t+1) + \alpha_{2,8}(t)u_2(t+1).
 \end{aligned}$$

Прогнозируемое значение управляющих воздействий  $u_1(t+1)$ ,  $u_2(t+1)$  в (4.3.17) вычисляется по тому же принципу, что и расчет управлений  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  [см. (4.3.11) – (4.3.16)]. Остановимся на этом моменте подробнее, так как последующий расчет прогнозируемых значений для  $u_1$ ,  $u_2$  будет проводиться аналогично.

Из критерия оптимальности

$$I = \sum_{i=1}^2 \left( y_i(t+\tau_1+1 | \alpha_i(t)) - x_i^*(t+\tau_1+1) \right)^2 = \min_{u_1(t+1), u_2(t+1)}, \quad (4.3.18)$$

где  $u_{1,1} \leq u_1(t+1) \leq u_{1,2}$ ,  $u_{2,1} \leq u_2(t+1) \leq u_{2,2}$ , вначале находим идеальные управляющие воздействия (без учета ограничений)

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} v_1(t+1) \\ v_2(t+1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta v_1(t+1) \\ \Delta v_2(t+1) \end{pmatrix}. \\
 \begin{pmatrix} \Delta v_1(t+1) \\ \Delta v_2(t+1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha_{1,7}(t) & \alpha_{1,8}(t) \\ \alpha_{2,7}(t) & \alpha_{2,8}(t) \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} x_1(t+\tau_1+1) - L_{1,t+\tau_1+1} - \\ - \alpha_{1,7}(t)u_1(t) - \alpha_{1,8}(t)u_2(t); \\ x_2(t+\tau_1+1) - L_{2,t+\tau_1+1} - \\ - \alpha_{2,7}(t)u_1(t) - \alpha_{2,8}(t)u_2(t) \end{pmatrix}, \quad (4.3.19)
 \end{aligned}$$

а затем проектируем их на прямоугольную область ограничений

$$u_j(t+1) = \begin{cases} u_{j,1}, & \text{при } v_j(t+1) \leq u_{j,1}, \\ v_j(t+1), & \text{при } u_{j,1} \leq v_j(t+1) \leq u_{j,2}, \\ u_{j,2}, & \text{при } u_{j,2} \leq v_j(t+1), \end{cases} \quad j=1, 2. \quad (4.3.20)$$

Эти и последующие управления нужны только для того, чтобы рассчитать  $u_3(t)$ ,  $u_4(t)$ .

Последовательно увеличиваем время прогноза до  $t+\tau_2$

$$\begin{aligned}
 \underline{y_1(t+\tau_2 | \alpha_1(t))} &= \alpha_{1,0}(t) + \alpha_{1,1}(t)\tilde{z}_1(t+\tau_2) + \\
 &+ \alpha_{1,2}(t)\underline{y_1(t+\tau_2-1 | \alpha_1(t))} + \alpha_{1,3}(t)\underline{y_1(t+\tau_2-2 | \alpha_1(t))} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \alpha_{1,4}(t) \underline{y_2(t + \tau_2 - 1 | \alpha_2(t))} + \alpha_{1,5}(t) \underline{y_2(t + \tau_2 - 2 | \alpha_2(t))} + \alpha_{1,6}(t) \underline{\tilde{z}_2(t + \tau_2 - 1)} + \\
 & + \alpha_{1,7}(t) \underline{u_1(t + \tau_2 - \tau_1)} + \alpha_{1,8}(t) \underline{u_2(t + \tau_2 - \tau_1)} + \alpha_{1,9}(t) \underline{\tilde{z}_3(t + \tau_2 - \tau_1)} + \\
 & + \alpha_{1,10}(t) u_3(t) + \alpha_{1,11}(t) u_4(t) + \alpha_{1,12}(t) z_4(t) + \\
 & + \alpha_{1,13}(t) u_5(t + \tau_2 - \tau_3) + \alpha_{1,14}(t) u_6(t + \tau_2 - \tau_3) + \alpha_{1,15}(t) z_5(t + \tau_2 - \tau_3) \equiv \\
 & \equiv L_{1,t+\tau_2} + \alpha_{1,7}(t) \underline{u_1(t + \tau_2 - \tau_1)} + \alpha_{1,8}(t) \underline{u_2(t + \tau_2 - \tau_1)} + \\
 & + \alpha_{1,10}(t) u_3(t) + \alpha_{1,11}(t) u_4(t); \quad (4.3.21) \\
 & \underline{y_2(t + \tau_2 | \alpha_2(t))} = \alpha_{2,0}(t) + \alpha_{2,1}(t) \underline{\tilde{z}_1(t + \tau_2)} + \\
 & + \alpha_{2,2}(t) \underline{y_1(t + \tau_2 - 1 | \alpha_1(t))} + \alpha_{2,3}(t) \underline{y_1(t + \tau_2 - 2 | \alpha_1(t))} + \\
 & + \alpha_{2,4}(t) \underline{y_2(t + \tau_2 - 1 | \alpha_2(t))} + \alpha_{2,5}(t) \underline{y_2(t + \tau_2 - 2 | \alpha_2(t))} + \alpha_{2,6}(t) \underline{\tilde{z}_2(t + \tau_2 - 1)} + \\
 & + \alpha_{2,7}(t) \underline{u_1(t + \tau_2 - \tau_1)} + \alpha_{2,8}(t) \underline{u_2(t + \tau_2 - \tau_1)} + \alpha_{2,9}(t) \underline{\tilde{z}_3(t + \tau_2 - \tau_1)} + \\
 & + \alpha_{2,10}(t) u_3(t) + \alpha_{2,11}(t) u_4(t) + \alpha_{2,12}(t) z_4(t) + \\
 & + \alpha_{2,13}(t) u_5(t + \tau_2 - \tau_3) + \alpha_{2,14}(t) u_6(t + \tau_2 - \tau_3) + \alpha_{2,15}(t) z_5(t + \tau_2 - \tau_3) \equiv \\
 & \equiv L_{2,t+\tau_2} + \alpha_{2,7}(t) \underline{u_1(t + \tau_2 - \tau_1)} + \alpha_{2,8}(t) \underline{u_2(t + \tau_2 - \tau_1)} + \\
 & + \alpha_{2,10}(t) u_3(t) + \alpha_{2,11}(t) u_4(t).
 \end{aligned}$$

Расчет вспомогательных управлений  $u_1(t + \tau_2 - \tau_1)$ ,  $u_2(t + \tau_2 - \tau_1)$  и искоемых управляющих воздействий  $u_3(t)$ ,  $u_4(t)$  проводится совместно по предыдущей схеме. Из критерия оптимальности

$$I = \sum_{i=1}^2 \left( y_i(t + \tau_2 | \alpha_i(t)) - x_i^*(t + \tau_2) \right)^2 = \min$$

вычисляем идеальные управления (4.3.22) без учета ограничений:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} v_1(t + \tau_2 - \tau_1) \\ v_2(t + \tau_2 - \tau_1) \\ v_3(t) \\ v_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(t + \tau_2 - \tau_1 - 1) \\ u_2(t + \tau_2 - \tau_1 - 1) \\ u_3(t - 1) \\ u_4(t - 1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta v_1(t + \tau_2 - \tau_1) \\ \Delta v_2(t + \tau_2 - \tau_1) \\ \Delta v_3(t) \\ \Delta v_4(t) \end{pmatrix}, \quad (4.3.22) \\
 & \begin{pmatrix} \Delta v_1(t + \tau_2 - \tau_1) \\ \Delta v_2(t + \tau_2 - \tau_1) \\ \Delta v_3(t) \\ \Delta v_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,7}(t) & \alpha_{1,8}(t) & \alpha_{1,10}(t) & \alpha_{1,11}(t) \\ \alpha_{2,7}(t) & \alpha_{2,8}(t) & \alpha_{2,10}(t) & \alpha_{2,11}(t) \end{pmatrix}^+ \times
 \end{aligned}$$

и проектируем их, как обычно, на выпуклую область ограничений.

В итоге дополнительно к  $u_1(t), u_2(t)$  получены  $u_3(t), u_4(t)$ . Далее по аналогии находим  $u_5(t), u_6(t)$ . При дальнейшем последовательном прогнозировании выходных координат на каждом шаге приходится совместно вычислять уже четыре вспомогательных прогнозируемых управления  $u_1 \div u_4$ .

Последовательно увеличиваем время прогноза до  $t + \tau_3$

$$\begin{aligned}
 & \underline{y_1(t + \tau_3 | \alpha_1(t))} = \alpha_{1,0}(t) + \alpha_{1,1}(t) \underline{\tilde{z}_1(t + \tau_3)} + \\
 & + \alpha_{1,2}(t) \underline{y_1(t + \tau_3 - 1 | \alpha_1(t))} + \alpha_{1,3}(t) \underline{y_1(t + \tau_3 - 2 | \alpha_1(t))} + \\
 & + \alpha_{1,4}(t) \underline{y_2(t + \tau_3 - 1 | \alpha_2(t))} + \alpha_{1,5}(t) \underline{y_2(t + \tau_3 - 2 | \alpha_2(t))} + \alpha_{1,6}(t) \underline{\tilde{z}_2(t + \tau_3 - 1)} + \\
 & + \alpha_{1,7}(t) \underline{u_1(t + \tau_3 - \tau_1)} + \alpha_{1,8}(t) \underline{u_2(t + \tau_3 - \tau_1)} + \alpha_{1,9}(t) \underline{\tilde{z}_3(t + \tau_3 - \tau_1)} + \\
 & + \alpha_{1,10}(t) \underline{u_3(t + \tau_3 - \tau_2)} + \alpha_{1,11}(t) \underline{u_4(t + \tau_3 - \tau_2)} + \alpha_{1,12}(t) \underline{\tilde{z}_4(t + \tau_3 - \tau_2)} + \\
 & + \alpha_{1,13}(t) u_5(t) + \alpha_{1,14}(t) u_6(t) + \alpha_{1,15}(t) z_5(t) \equiv \\
 & \equiv L_{1,t+\tau_3} + \alpha_{1,7}(t) \underline{u_1(t + \tau_3 - \tau_1)} + \alpha_{1,8}(t) \underline{u_2(t + \tau_3 - \tau_1)} + \\
 & + \alpha_{1,10}(t) \underline{u_3(t + \tau_3 - \tau_2)} + \alpha_{1,11}(t) \underline{u_4(t + \tau_3 - \tau_2)} + \alpha_{1,13}(t) u_5(t) + \alpha_{1,14}(t) u_6(t); \\
 & \underline{y_2(t + \tau_3 | \alpha_2(t))} = \alpha_{2,0}(t) + \alpha_{2,1}(t) \underline{\tilde{z}_1(t + \tau_3)} + \quad (4.3.23) \\
 & + \alpha_{2,2}(t) \underline{y_1(t + \tau_3 - 1 | \alpha_1(t))} + \alpha_{2,3}(t) \underline{y_1(t + \tau_3 - 2 | \alpha_1(t))} + \\
 & + \alpha_{2,4}(t) \underline{y_2(t + \tau_3 - 1 | \alpha_2(t))} + \alpha_{2,5}(t) \underline{y_2(t + \tau_3 - 2 | \alpha_2(t))} + \alpha_{2,6}(t) \underline{\tilde{z}_2(t + \tau_3 - 1)} + \\
 & + \alpha_{2,7}(t) \underline{u_1(t + \tau_3 - \tau_1)} + \alpha_{2,8}(t) \underline{u_2(t + \tau_3 - \tau_1)} + \alpha_{2,9}(t) \underline{\tilde{z}_3(t + \tau_3 - \tau_1)} + \\
 & + \alpha_{2,10}(t) \underline{u_3(t + \tau_3 - \tau_2)} + \alpha_{2,11}(t) \underline{u_4(t + \tau_3 - \tau_2)} + \alpha_{2,12}(t) \underline{\tilde{z}_4(t + \tau_3 - \tau_2)} + \\
 & + \alpha_{2,13}(t) u_5(t) + \alpha_{2,14}(t) u_6(t) + \alpha_{2,15}(t) z_5(t) \equiv \\
 & \equiv L_{2,t+\tau_3} + \alpha_{2,7}(t) \underline{u_1(t + \tau_3 - \tau_1)} + \alpha_{2,8}(t) \underline{u_2(t + \tau_3 - \tau_1)} + \\
 & + \alpha_{2,10}(t) \underline{u_3(t + \tau_3 - \tau_2)} + \alpha_{2,11}(t) \underline{u_4(t + \tau_3 - \tau_2)} + \alpha_{2,13}(t) u_5(t) + \alpha_{2,14}(t) u_6(t).
 \end{aligned}$$

Из критерия оптимальности

$$I = \sum_{i=1}^2 \left( y_i(t + \tau_3 | \bar{\alpha}_i(t)) - x_i^*(t + \tau_3) \right)^2 = \min$$

вычисляем идеальные управления (без учета ограничений)

$$\begin{pmatrix} v_1(t + \tau_3 - \tau_1) \\ v_2(t + \tau_3 - \tau_1) \\ v_3(t + \tau_3 - \tau_2) \\ v_4(t + \tau_3 - \tau_2) \\ v_5(t) \\ v_6(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(t + \tau_3 - \tau_1 - 1) \\ u_2(t + \tau_3 - \tau_1 - 1) \\ u_3(t + \tau_3 - \tau_2 - 1) \\ u_4(t + \tau_3 - \tau_2 - 1) \\ u_5(t - 1) \\ u_6(t - 1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta v_1(t + \tau_3 - \tau_1) \\ \Delta v_2(t + \tau_3 - \tau_1) \\ \Delta v_3(t + \tau_3 - \tau_2) \\ \Delta v_4(t + \tau_3 - \tau_2) \\ \Delta v_5(t) \\ \Delta v_6(t) \end{pmatrix}, \quad (4.3.24)$$

$$\begin{pmatrix} \Delta v_1(t + \tau_3 - \tau_1) \\ \Delta v_2(t + \tau_3 - \tau_1) \\ \Delta v_3(t + \tau_3 - \tau_2) \\ \Delta v_4(t + \tau_3 - \tau_2) \\ \Delta v_5(t) \\ \Delta v_6(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,7}(t) & \alpha_{1,8}(t) & \alpha_{1,10}(t) & \alpha_{1,11}(t) & \alpha_{1,13}(t) & \alpha_{1,14}(t) \\ \alpha_{2,7}(t) & \alpha_{2,8}(t) & \alpha_{2,10}(t) & \alpha_{2,11}(t) & \alpha_{2,13}(t) & \alpha_{2,14}(t) \end{pmatrix}^+ \cdot$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t + \tau_3) - L_{1,t+\tau_3} - \alpha_{1,7}(t)u_1(t + \tau_3 - \tau_1 - 1) - \alpha_{1,8}(t)u_2(t + \tau_3 - \tau_1 - 1) - \\ - \alpha_{1,10}(t)u_3(t + \tau_3 - \tau_2 - 1) - \alpha_{1,11}(t)u_4(t + \tau_3 - \tau_2 - 1) - \\ - \alpha_{1,13}(t)u_5(t - 1) - \alpha_{1,14}(t)u_6(t - 1); \\ x_2(t + \tau_3) - L_{2,t+\tau_3} - \alpha_{2,7}(t)u_1(t + \tau_3 - \tau_1 - 1) - \alpha_{2,8}(t)u_2(t + \tau_3 - \tau_1 - 1) - \\ - \alpha_{2,10}(t)u_3(t + \tau_3 - \tau_2 - 1) - \alpha_{2,11}(t)u_4(t + \tau_3 - \tau_2 - 1) - \\ - \alpha_{2,13}(t)u_5(t - 1) - \alpha_{2,14}(t)u_6(t - 1) \end{pmatrix}$$

и проектируем только  $v_5(t)$ ,  $v_6(t)$  (так как вспомогательные управления больше не используются) на выпуклую область ограничений:

$$u_j(t) = \begin{cases} u_{j,1}, & \text{при } v_j(t) \leq u_{j,1}, \\ v_j(t), & \text{при } u_{j,1} \leq v_j(t) \leq u_{j,2}, \quad j = 5, 6. \\ u_{j,2}, & \text{при } u_{j,2} \leq v_j(t), \end{cases} \quad (4.3.25)$$

В итоге получены все управления  $u_1(t) \div u_6(t)$ . Они подаются на объект. На следующем такте все повторяется. Измеряются выходные координаты  $\vec{x}(t+1)$  и входные воздействия  $\vec{z}(t+1)$  и по описанной схеме рассчитываются управления  $\vec{u}(t+1)$  и подаются на объект.

**Заключение.** Полученные результаты для сравнительно сложных классов распределенных объектов, описываемых разностными уравнениями

ми с перекрестными связями по выходным переменным и с наличием нескольких запаздываний и управляющих воздействий, включают в себя более простые результаты, приведенные в пп. 4.1 и 4.2 и частично опробованные на технологических процессах обжига извести и клинкера.

Применяемый здесь подход к управлению распределенными технологическими процессами существенно отличается от традиционных подходов, основанных на использовании разностных аналогов соответствующих дифференциальных уравнений в частных производных. Во-первых, распределённые модели существенно сложнее по сравнению с применяемыми в гл. 4 сосредоточенными моделями с чистыми запаздываниями. Во-вторых, на основе разностных аналогов дифференциальных уравнений в частных производных существенно сложнее организовать адаптацию их параметров и осуществлять расчет оптимальных управлений.

Результаты монографии применимы к классам распределённых объектов, описываемых более общими дискретно-аргументными моделями [4.6–4.10].

## 5.1. Алгоритмы квадратичных критериев

Считаем, что измерения выхода объекта некоррелированные неравноточные с дисперсией  $\sigma^2(t)$  для моментов времени  $t$ .

Вначале рассмотрим классический алгоритм наименьших квадратов при линейной (относительно параметров) модели:

$$y(t | \alpha(t)) = \varphi^T(t) \alpha(t), \quad y(t | \alpha(t-1)) = \varphi^T(t) \alpha(t-1). \quad (5.1.1)$$

В первом случае – это выход модели в момент времени  $t$  при новых значениях параметров  $\alpha(t)$ , полученных по измерениям к моменту времени  $t$ :  $x(t); x(t-1), u(t-1); x(t-2), u(t-2); \dots$ . Для разных типов динамических моделей строится вектор  $\varphi^T(t)$  указанных измерений, кроме  $x(t)$ . Во втором случае – это выход модели в момент времени  $t$ , но при значениях параметров  $\alpha(t-1)$ , полученных по измерениям к моменту  $t-1$ :  $x(t-1); x(t-2), u(t-2); x(t-3), u(t-3); \dots$ .

Векторы параметров  $\alpha(t)$  вычисляем по критерию наименьших квадратов

$$\sum_{i=1}^t \sigma^{-2}(i) [x(i) - \varphi^T(i) \alpha(t)]^2 = \min_{\alpha(t)}. \quad (5.1.2)$$

Чтобы на каждом шаге не решать систему линейных алгебраических уравнений, были получены рекуррентные уравнения:

$$\alpha(t) = \alpha(t-1) + \gamma(t) [x(t) - \varphi^T(t) \alpha(t-1)],$$

$$\gamma(t) = \frac{K_{\alpha(t-1)} \varphi(t)}{\sigma^2(t) + \varphi^T(t) K_{\alpha(t-1)} \varphi(t)},$$

$$K_{\alpha(t)} = [E - \gamma(t) \varphi^T(t)] K_{\alpha(t-1)}, \quad t = t_0 + 1, t_0 + 2, \dots \quad (5.1.3)$$

Вывод этих уравнений содержится в примере 5.1.1.

Начальными значениями служат оценка наименьших квадратов  $\alpha(t_0)$  и её ковариационная матрица  $K_{\alpha(t_0)}$ :

$$K_{\alpha(t_0)}^{-1} \alpha(t_0) = \sum_{i=1}^{t_0} \sigma_i^{-2} \varphi(i) x(t), \quad K_{\alpha(t_0)}^{-1} = \sum_{i=1}^{t_0} \sigma_i^{-2} \varphi(i) \varphi^T(i), \quad (5.1.4)$$

при исходном объеме измерений входа и выхода объекта до момента времени  $t_0$ .

При некоррелированных равноточных измерениях выхода объекта меняются весовые коэффициенты в критерии наименьших квадратов

$$\sigma^{-2} \sum_{i=1}^t [x(i) - \varphi^T(i) \alpha(t)]^2 = \min_{\alpha(t)} \quad (5.1.5)$$

и в рекуррентном уравнении (5.1.3):

$$\alpha(t) = \alpha(t-1) + \gamma(t)[x(t) - \varphi^T(t) \alpha(t-1)], \quad (5.1.6)$$

$$\gamma(t) = \frac{K_{\alpha(t-1)} \varphi(t)}{\sigma^{-2} + \varphi^T(t) K_{\alpha(t-1)} \varphi(t)},$$

$$K_{\alpha(t)} = [E - \gamma(t) \varphi^T(t)] K_{\alpha(t-1)}, \quad t = t_0 + 1, t_0 + 2, \dots$$

Здесь  $K_{\alpha(t)}$  – корреляционная матрица для вектора параметров  $\alpha(t)$ .

Если в (5.1.2) взять произвольные весовые коэффициенты  $p_i^{-1}$ , т. е.

$$\sum_{i=1}^t p^{-1}(i) [x(i) - \varphi^T(i) \alpha(t)]^2 = \min_{\alpha(t)}, \quad (5.1.7)$$

то происходит отклонение от классического критерия наименьших квадратов, такой критерий будем называть просто квадратичным критерием. В приведённых ранее рекуррентных уравнениях (5.1.3) структура сохраняется, но  $\sigma^2(t)$  следует заменить на  $p(t)$ , а матрицу  $K_{\alpha(t)}$  обозначить другим символом, так как она не является корреляционной матрицей для параметров (за исключением случая  $p(t) = \sigma^2(t)$ ):

$$\alpha(t) = \alpha(t-1) + \gamma(t)[x(t) - \varphi^T(t) \alpha(t-1)],$$

$$\gamma(t) = \frac{\Gamma(t-1) \varphi(t)}{p(t) + \varphi^T(t) \Gamma(t-1) \varphi(t)},$$

$$\Gamma(t) = [E - \gamma(t) \varphi^T(t)] \Gamma(t-1), \quad t = t_0 + 1, t_0 + 2, \dots \quad (5.1.8)$$

Начальное значение  $\alpha(t_0)$  рассчитывается из системы линейных алгебраических уравнений  $\left( \sum_{i=1}^{t_0} p^{-1}(i) \varphi(i) \varphi^T(i) \right) \alpha(t_0) = \sum_{i=1}^{t_0} p^{-1}(i) \varphi(i) x(i)$ , полученной из критерия (5.1.7) при  $t = t_0$ .  $\Gamma(t_0)$  – это матрица, обратная матрице этой системы:  $\Gamma(t_0) = \left( \sum_{i=1}^{t_0} p^{-1}(i) \varphi(i) \varphi^T(i) \right)^{-1}$ .

С ростом объема измерений  $t$  оценки наименьших квадратов (5.1.3), (5.1.6) стремятся к постоянным величинам  $a$  – параметрам уравнения объекта. Текущие измерения с ростом  $t$  оказывают все меньшее влияние на получаемые параметры модели  $\alpha(t)$ , т. е. обратная связь к измерениям ослабевает и при  $t \rightarrow \infty$  полностью исчезает. Это происходит потому, что построенные алгоритмы ориентированы на отслеживание постоянных параметров объекта. При дрейфующих параметрах объекта приведенные алгоритмы не отслеживают параметры.

Для оценивания дрейфующих параметров объекта в квадратичный критерий оптимальности вводят дополнительные веса. Они наибольшие для последних измерений и убывают для более старых измерений. Примером служит убывающая последовательность  $\lambda^{t-i}$ ,  $i = t, t-1, t-2, \dots$ ,  $0 < \lambda < 1$ .

Корректируем критерий (5.1.7)

$$\sum_{i=1}^t p^{-1}(i) \lambda^{t-i} [x(i) - \varphi^T(i) \alpha(t)]^2 = \min_{\alpha(t)}, \quad (5.1.9)$$

из которого следует рекуррентный алгоритм:

$$\alpha(t) = \alpha(t-1) + \gamma(t) [x(t) - \varphi^T(t) \alpha(t-1)], \quad (5.1.10)$$

$$\gamma(t) = \frac{\Gamma(t-1) \varphi(t)}{p(t) \lambda + \varphi^T(t) \Gamma(t-1) \varphi(t)},$$

$$\Gamma(t) = [E - \gamma(t) \varphi^T(t)] \Gamma(t-1) \lambda^{-1}, \quad t = t_0 + 1, t_0 + 2, \dots$$

Структура алгоритма не меняется, в двух местах лишь добавляются сомножители  $\lambda$  и  $\lambda^{-1}$ . Исследования алгоритма показали, что параметр  $\lambda$  целесообразно выбирать из интервала  $0,9 \leq \lambda \leq 0,995$ .

При **нелинейной** параметризации модели  $y(t | \alpha(t)) = f(\varphi(t), \alpha(t))$  и использовании квадратичного критерия (5.1.9)

$$\sum_{i=1}^t p^{-1}(i) \lambda^{t-i} [x(i) - f(\varphi(i), \alpha(t))]^2 = \min_{\alpha(t)} \quad (5.1.11)$$

объединяем алгоритм метода последовательной линеаризации (с использованием линеаризованной модели) и обычный адаптивный алгоритм для квадратичного критерия и линейной (относительно параметров) модели.

На каждом шаге берём линеаризованную в точке  $\alpha(t-1)$  модель

$$\begin{aligned} y(t | \alpha(t)) &\approx y(t | \alpha(t-1)) + \nabla_{\alpha}^T f(\varphi(t), \alpha(t-1)) (\alpha(t) - \alpha(t-1)) \equiv \\ &\equiv y(t | \alpha(t-1)) + \nabla_{\alpha}^T f(\cdot) \Delta \alpha(t). \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

Здесь  $\nabla_{\alpha} f(\cdot)$  – градиента (вектор-столбец) по параметрам. В итоге приходим к алгоритму (5.1.10) с заменой в нем вектора базисных функций  $\varphi(t)$  на вектор градиента  $\nabla_{\alpha} f(\cdot)$  и выхода линейной модели  $\varphi^T(t)\alpha(t-1)$  – на выход нелинейной модели  $y(t | \alpha(t-1)) = f(\varphi(t), \alpha(t-1))$ :

$$\alpha(t) = \alpha(t-1) + \gamma(t)[x(t) - f(\varphi(t), \alpha(t-1))], \quad (5.1.13)$$

$$\gamma(t) = \frac{\Gamma(t-1)\nabla_{\alpha} f(\varphi(t), \alpha(t-1))}{p(t)\lambda + (\nabla_{\alpha} f(\cdot))^T \Gamma(t-1)\nabla_{\alpha} f(\cdot)},$$

$$\Gamma(t) = [E - \gamma(t)(\nabla_{\alpha} f(\cdot))^T] \Gamma(t-1)\lambda^{-1}, \quad t = t_0 + 1, t_0 + 2, \dots$$

При линейной параметризации модели вектор градиента  $\nabla_{\alpha} f(\varphi(t), \alpha(t-1)) \equiv \nabla_{\alpha} f(\cdot)$  равен вектору базисных функций  $\varphi(t)$ , и (5.1.13) переходит в (5.1.10).

В работах Б. Т. Поляка [5.1] получен простой алгоритм адаптивной коррекции параметров:

$$\bar{\alpha}(t) = \bar{\alpha}(t-1) + \bar{\gamma}(t)p_t^{-1}\nabla_{\alpha} f(\varphi(t), \bar{\alpha}(t-1))[x(t) - f(\varphi(t), \bar{\alpha}(t-1))], \quad (5.1.14)$$

$$\alpha(t) = \alpha(t-1) + t^{-1}(\bar{\alpha}(t) - \alpha(t-1)), \quad t = 1, 2, \dots, \quad \bar{\gamma}(t) = \gamma t^{-1/2}, \quad \gamma > 0.$$

Алгоритм состоит из двух частей. В первой части осуществляется перестройка параметров по простейшему градиентному алгоритму. Во второй части алгоритма производится усреднение полученных оценок:

$$\alpha(t) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \bar{\alpha}(i) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{t-1} \bar{\alpha}(i) + \frac{1}{t} \bar{\alpha}(t) = \frac{t-1}{t} \frac{1}{t-1} \sum_{i=1}^{t-1} \bar{\alpha}(i) + \frac{1}{t} \bar{\alpha}(t) =$$

$$= \alpha(t-1) + t^{-1}(\bar{\alpha}(t) - \alpha(t-1)).$$

Последовательность параметров  $\alpha(1), \dots, \alpha(t), \dots$  имеет те же предельные свойства (в том числе и по скорости сходимости), что и для оценок обычного метода наименьших квадратов.

Рассмотрим теперь подстройку быстроменяющихся (**нестационарных**) параметров **стохастического** объекта.

Считаем, что изменение параметров объекта соответствует известному разностному уравнению

$$a(t) = F(a(t-1)) + v(i), \quad i = 1, 2, \dots, t, \dots, \quad (5.1.15)$$

где  $F(\cdot)$  – известная векторная функция;  $v(i)$  – центрированная некоррелированная во времени помеха с корреляционной матрицей для момента времени  $i$

$$M\{v(i)v(i)^T\} = V(i). \quad (5.1.16)$$

Тогда при адаптивной перестройке параметров в алгоритме (5.1.13) несколько меняются компоненты первого и третьего уравнений:

$$\alpha(t) = F(\alpha(t-1)) + \gamma(t)[x(t) - f(\varphi(t), \alpha(t-1))], \quad (5.1.17)$$

$$\gamma(t) = \frac{\Gamma(t-1)\nabla_{\alpha}f(\varphi(t), \alpha(t-1))}{p(t)\lambda + (\nabla_{\alpha}f(\cdot))^T \Gamma(t-1)\nabla_{\alpha}f(\cdot)},$$

$$\Gamma(t) = [E - \gamma(t)(\nabla_{\alpha}f(\cdot))^T] \Gamma(t-1)\lambda^{-1} + V(t), \quad t = t_0 + 1, t_0 + 2, \dots$$

Более простой алгоритм (5.1.14) для нестационарного случая приобретает вид

$$\bar{\alpha}(t) = F(\bar{\alpha}(t-1)) + \bar{\gamma}(t)p^{-1}(t)\nabla_{\alpha}f(\varphi(t), \bar{\alpha}(t-1))[x(t) - f(\varphi(t), \bar{\alpha}(t-1))], \quad (5.1.18)$$

$$\alpha(t) = \alpha(t-1) + t^{-1}(\bar{\alpha}(t) - \alpha(t-1)), \quad t = 1, 2, \dots, \quad \bar{\gamma}(t) = \gamma t^{-1/2}, \quad \gamma > 0.$$

**Пример 5.1.1.** Получим рекуррентную формулу расчета параметров линейной модели из критерия наименьших квадратов:

$$\sum_{i=1}^t \sigma^{-2}(i)[x(i) - \varphi^T(i)\alpha(t)]^2 = \min_{\alpha(t)}. \quad (5.1.19)$$

Параметры  $\alpha(t), \alpha(t-1)$  удовлетворяют соответственно двум системам линейных алгебраических уравнений:

$$K_{\alpha(t)}^{-1}\alpha(t) = \sum_{i=1}^t \sigma^{-2}(i)\varphi(i)x(i), \quad \text{где } K_{\alpha(t)}^{-1} = \sum_{i=1}^t \sigma^{-2}(i)\varphi(i)\varphi^T(i), \quad (5.1.20)$$

$$K_{\alpha(t-1)}^{-1}\alpha(t-1) = \sum_{i=1}^{t-1} \sigma^{-2}(i)\varphi(i)x(i), \quad \text{где } K_{\alpha(t-1)}^{-1} = \sum_{i=1}^{t-1} \sigma^{-2}(i)\varphi(i)\varphi^T(i). \quad (5.1.21)$$

Вычтем из (5.1.20) уравнение (5.1.21). С учетом

$$K_{\alpha(t)}^{-1} = K_{\alpha(t-1)}^{-1} + \sigma^{-2}(t)\varphi(t)\varphi^T(t), \quad (5.1.22)$$

получим

$$K_{\alpha(t)}^{-1}\alpha(t) = (K_{\alpha(t-1)}^{-1} - \sigma^{-2}(t)\varphi(t)\varphi^T(t))\alpha(t-1) + \sigma^{-2}(t)\varphi(t)x(t). \quad (5.1.23)$$

Отсюда после умножения слева на  $K_{\alpha(t)}$  следует формула рекуррентного пересчета параметров:

$$\alpha(t) = \alpha(t-1) + K_{\alpha(t)}\sigma^{-2}(t)\varphi(t)[x(t) - \varphi^T(t)\alpha(t-1)]. \quad (5.1.24)$$

Найдём теперь рекуррентное уравнение для ковариационной матрицы параметров.

Умножив (5.1.22) слева на матрицу  $K_{\alpha(t)}$ , а справа на  $K_{\alpha(t-1)}$ , получим

$$K_{\alpha(t-1)} = K_{\alpha(t)} + K_{\alpha(t)} \sigma^{-2}(t) \varphi(t) \varphi^T(t) K_{\alpha(t-1)}. \quad (5.1.25)$$

Из него следует, что

$$K_{\alpha(t-1)} \varphi(t) = K_{\alpha(t)} \varphi(t) [1 + \sigma^{-2}(t) \varphi^T(t) K_{\alpha(t-1)} \varphi(t)].$$

Тогда

$$K_{\alpha(t)} \varphi(t) = \frac{K_{\alpha(t-1)} \varphi(t)}{1 + \sigma^{-2}(t) \varphi^T(t) K_{\alpha(t-1)} \varphi(t)}$$

или

$$\gamma(t) \equiv K_{\alpha(t)} \sigma^{-2}(t) \varphi(t) = \frac{K_{\alpha(t-1)} \varphi(t)}{\sigma^2(t) + \varphi^T(t) K_{\alpha(t-1)} \varphi(t)}. \quad (5.1.26)$$

Этот вектор-столбец коэффициентов усиления стоит перед невязкой (выхода объекта и выхода модели) в рекуррентной формуле (5.1.24) пересчета параметров. В правую часть (5.1.26) входит матрица  $K_{\alpha(t-1)}$ , вычисленная на предыдущем такте.

Рекуррентная формула для  $K_{\alpha(t)}$  следует из (5.1.25) с учетом (5.1.26):

$$K_{\alpha(t)} = [E - \gamma(t) \varphi^T(t)] K_{\alpha(t-1)}. \quad (5.1.27)$$

Объединяем (5.1.24), (5.1.27) в единую рекуррентную процедуру (5.1.3) расчета параметров модели и ковариационной матрицы:

$$\alpha(t) = \alpha(t-1) + \gamma(t) [x(t) - \varphi^T(t) \alpha(t-1)], \quad (5.1.28)$$

$$\gamma(t) = \frac{K_{\alpha(t-1)} \varphi(t)}{\sigma^2(t) + \varphi^T(t) K_{\alpha(t-1)} \varphi(t)},$$

$$K_{\alpha(t)} = (E - \gamma(t) \varphi^T(t)) K_{\alpha(t-1)}, \quad t = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$$

**Пример 5.1.2.** Считаем, что измерения выхода *некоррелированные, равноточные*, а выход модели не зависит от входа и имеет вид  $y(t | \alpha(t)) = \alpha(t)$ .

В соответствии с критерием наименьших квадратов (5.1.5)

$$\sigma^{-2} \sum_{i=1}^t [x(i) - \alpha(t)]^2 = \min_{\alpha(t)}$$

получаем, что

$$\sigma^{-2}t\alpha(t) = \sigma^{-2} \sum_{i=1}^t x(i), \quad \alpha(t) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t x(i), \quad \sigma_{\alpha(t)}^2 = (\sigma^{-2}t)^{-1} = \frac{\sigma^2}{t},$$

где  $\alpha(t)$  – оценка математического ожидания выхода объекта. Простейшая рекуррентная формула её расчёта имеет вид

$$\alpha(t) = \frac{t-1}{t} \alpha(t-1) + \frac{1}{t} x(t) = \alpha(t-1) + \frac{1}{t} [x(t) - \alpha(t-1)], \quad t = 1, 2, \dots, \quad (5.1.29)$$

$$\alpha(0) = 0.$$

В то же время из (5.1.6) получаем:

$$\alpha(t) = \alpha(t-1) + \gamma(t)[x(t) - \alpha(t-1)], \quad \gamma(t) = \frac{K_{\alpha(t-1)}}{\sigma^2 + K_{\alpha(t-1)}}, \quad (5.1.30)$$

$$K_{\alpha(t)} = (1 - \gamma(t))K_{\alpha(t-1)}, \quad t = 2, 3, \dots$$

Начальные значения:  $\alpha(1) = x(1)$ ,  $K_{\alpha(1)} \equiv \sigma_{\alpha(1)}^2 = \sigma^2$ .

Убедитесь в эквивалентности этих формул расчёта  $\alpha(t)$ . В отличие от (5.1.29) в формуле (5.1.30) на каждом шаге рассчитываем и дисперсию параметра  $\alpha(t)$ :  $K_{\alpha(t)} \equiv \sigma_{\alpha(t)}^2$ .

**Пример 5.1.3.** Исходные условия те же, что и в предыдущем примере. Получим формулы рекуррентного пересчета параметра  $\alpha$  при забывании информации. Возьмём взвешенный квадратичный критерий

$$\sigma^{-2} \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} [x(i) - \alpha_{\lambda}(t)]^2 = \min_{\alpha_{\lambda}(t)}, \quad 0 < \lambda \leq 1. \quad (5.1.31)$$

Изменение весовых коэффициентов в квадратичном показателе приводит к уклонению от классического критерия наименьших квадратов.

Вес последнего ( $t$ -го) измерения самый большой (равен 1). Для предыдущего измерения он равен  $\lambda$ , для следующего –  $\lambda^2$  и т. д.

Из необходимого условия экстремума следует параметр  $\alpha_{\lambda}(t)$ :

$$\left( \sigma^{-2} \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} \right) \alpha_{\lambda}(t) = \sigma^{-2} \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} x(i), \quad (5.1.32)$$

$$\alpha_{\lambda}(t) = \frac{\sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} x(i)}{\sum_{i=1}^t \lambda^{t-i}} \equiv \frac{A_t}{B_t}$$

Дисперсия этой *линейной* (относительно *некоррелированных* измерений  $(x(1), \dots, x(t))$ ) оценки имеет вид

$$D\{\alpha_\lambda(t)\} = B_t^{-2} \left( \sum_{i=1}^t \lambda^{2(t-i)} \right) \sigma^2.$$

Заметим, что теперь дисперсия оценки не равна обратной величине от коэффициента, стоящего перед  $\alpha_\lambda(t)$  в линейном уравнении (5.1.32).

**Способ 1** рекуррентного пересчета оценки  $\alpha_\lambda(t)$  заключается в рекуррентной коррекции ее числителя и знаменателя (с последующим их делением для каждого  $t$ ):

$$A_t = \lambda A_{t-1} + x(t), \quad B_t = \lambda B_{t-1} + 1, \quad t = 1, 2, \dots, \quad A_0 = 0, \quad B_0 = 0.$$

**Способ 2** состоит в рекуррентной перестройке всей оценки  $\alpha_\lambda(t)$ . Записываем уравнения для  $\alpha_\lambda(t)$  и  $\alpha_\lambda(t-1)$ :

$$\sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} \alpha_\lambda(t) = \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} x(i), \quad (5.1.33)$$

$$\sum_{i=1}^{t-1} \lambda^{t-1-i} \alpha_\lambda(t-1) = \sum_{i=1}^{t-1} \lambda^{t-1-i} x(i).$$

Обозначим через  $B_t \equiv \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i}$  и выпишем рекуррентное соотношение

$$B_t = \lambda B_{t-1} + 1, \quad t = 1, 2, \dots, \quad B_0 = 0.$$

Умножаем второе уравнение в (5.1.33) на  $\lambda$ , вычитаем из первого и учитываем связь между  $B_t$  и  $B_{t-1}$ :

$$B_t \alpha_\lambda(t) = \lambda B_{t-1} \alpha_\lambda(t-1) + x(t) = (B_t - 1) \alpha_\lambda(t-1) + x(t).$$

Отсюда получаем основную рекуррентную формулу пересчета оценки  $\alpha_\lambda(t)$ :

$$\alpha_\lambda(t) = \alpha_\lambda(t-1) + B_t^{-1} [x(t) - \alpha_\lambda(t-1)].$$

В итоге имеем:

$$\alpha_\lambda(t) = \alpha_\lambda(t-1) + B_t^{-1} [x(t) - \alpha_\lambda(t-1)], \quad (5.1.34)$$

$$B_t = \lambda B_{t-1} + 1, \quad t = 1, 2, \dots, \quad \alpha_\lambda(0) = 0, \quad B_0 = 0.$$

**Способ 3** близок к способу 2, но в нем рекуррентно перестраивается [см. (5.1.10)] коэффициент  $\Gamma(t)$ , определяющий обратную связь:

$$\alpha_\lambda(t) = \alpha_\lambda(t-1) + \gamma(t)[x(t) - \alpha_\lambda(t-1)], \quad \gamma(t) = \frac{\Gamma(t-1)}{\sigma^2\lambda + \Gamma(t-1)}, \quad (5.1.35)$$

$$\Gamma(t) = (1 - \gamma(t))\Gamma(t-1)\lambda^{-1}, \quad t = 2, 3, \dots$$

Так как  $\Gamma(t) = \left( \sigma^{-2} \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} \right)^{-1}$ , то из (5.1.32) следует, что  $\alpha_\lambda(t) = \Gamma(t) \sigma^{-2} \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} x(i)$ . Тогда дисперсия *линейной* относительно *некоррелированных, равноточных* измерений  $(x(1), \dots, x(t))$  равна величине

$$D\{\alpha_\lambda(t)\} = \Gamma^2(t) \sigma^{-2} \sum_{i=1}^t \lambda^{2(t-i)}. \quad (5.1.36)$$

**Пример 5.1.4.** Считаем, что измерения выхода *некоррелированные, неравноточные*, а выход модели также не зависит от входа и выхода объекта и равен неизвестному параметру:  $y(t | \alpha(t)) = \alpha(t)$ .

Из критерия наименьших квадратов (5.1.2)

$$\sum_{i=1}^t \sigma^{-2}(i) [x(i) - \alpha(t)]^2 = \min_{\alpha(t)} \quad (5.1.37)$$

получаем уравнение для искомого параметра  $\alpha(t)$ :

$$\sum_{i=1}^t \sigma^{-2}(i) \alpha(t) = \sum_{i=1}^t \sigma^{-2}(i) x(i).$$

Отсюда

$$\alpha(t) = \frac{\sum_{i=1}^t \sigma^{-2}(i) x(i)}{\sum_{j=1}^t \sigma^{-2}(j)}. \quad (5.1.38)$$

Дисперсия этого коэффициента, *линейно* зависящего от *некоррелированных, неравноточных* измерений  $(x(1), \dots, x(t))$ , равна величине

$$D\{\alpha(t)\} = \frac{\sum_{i=1}^t \sigma^{-4}(i) \sigma^2(i)}{\left( \sum_{j=1}^t \sigma^{-2}(j) \right)^2} = \frac{1}{\sum_{j=1}^t \sigma^{-2}(j)}. \quad (5.1.39)$$

Рекуррентный пересчет оценок  $\alpha(t)$  можно осуществлять также двумя способами.

**Способ 1.** В (5.1.38) рекуррентно корректируется числитель и знаменатель:

$$\alpha(t) = \frac{A_t}{B_t} = \frac{A_{t-1} + \sigma_t^{-2} x(t)}{B_{t-1} + \sigma_t^{-2}}, \quad t = 1, 2, \dots, \quad A_0 = 0, \quad B_0 = 0. \quad (5.1.40)$$

**Способ 2.** Рекуррентно пересчитывается вся оценка  $\alpha(t)$  по формуле (5.1.3):

$$\alpha(t) = \alpha(t-1) + \gamma(t)[x(t) - \alpha(t-1)], \quad (5.1.41)$$

$$\gamma(t) = \frac{K_{\alpha(t-1)}}{\sigma^2(t) + K_{\alpha(t-1)}},$$

$$K_{\alpha(t)} = (1 - \gamma(t))K_{\alpha(t-1)}, \quad t = 2, 3, \dots,$$

$$\alpha(1) = x(1), \quad D\{\alpha(1)\} = \sigma^2(1) \equiv K_{\alpha(1)}.$$

**Пример 5.1.5.** При исходных условиях предыдущего примера получим формулы рекуррентного пересчета параметра  $\alpha_\lambda(t)$  при забывании информации. Параметр  $\alpha_\lambda(t)$  удовлетворяет взвешенному критерию наименьших квадратов (5.1.9):

$$\sum_{i=1}^t \sigma^{-2}(i) \lambda^{t-i} [x(i) - \alpha_\lambda(t)]^2 = \min_{\alpha_\lambda(t)}, \quad 0 < \lambda \leq 1, \quad (5.1.42)$$

т. е. линейному алгебраическому уравнению

$$\sum_{i=1}^t \sigma^{-2}(i) \lambda^{t-i} \alpha_\lambda(t) = \sum_{i=1}^t \sigma^{-2}(i) \lambda^{t-i} x(i), \quad (5.1.43)$$

из которого следует искомый параметр

$$\alpha_\lambda(t) = \frac{\sum_{i=1}^t \sigma^{-2}(i) \lambda^{t-i} x(i)}{\sum_{j=1}^t \sigma^{-2}(j) \lambda^{t-j}}. \quad (5.1.44)$$

Дисперсия этого параметра, *линейно* зависящего от измерений выхода объекта, равна величине

$$D\{\alpha_\lambda(t)\} = \frac{\sum_{i=1}^t \sigma^{-2}(i) \lambda^{2(t-i)}}{\left( \sum_{j=1}^t \sigma^{-2}(j) \lambda^{t-j} \right)^2}. \quad (5.1.45)$$

Параметр  $\alpha_\lambda(t)$  рекуррентно пересчитывается по формуле (5.1.10):

$$\alpha_\lambda(t) = \alpha_\lambda(t-1) + \gamma(t)[x(t) - \alpha_\lambda(t-1)], \quad (5.1.46)$$

$$\gamma(t) = \frac{\Gamma(t-1)}{\sigma^2(t)\lambda + \Gamma(t-1)},$$

$$\Gamma(t) = (1 - \gamma(t))\Gamma(t-1)\lambda^{-1}, \quad t = 2, 3, \dots, \quad \alpha(1) = x(1), \quad \Gamma(1) = \sigma^2(1),$$

причём  $D\{\alpha_\lambda(t)\} = \Gamma(t)\sum_{i=1}^t \sigma^{-2}(i)\lambda^{2(t-i)}$  и, естественно, совпадает с (5.1.45).

Если  $\lambda = 1$  (нет забывания информации), то  $D\{\alpha_1(t)\} = \Gamma^2(t)\sum_{i=1}^t \sigma^{-2}(i) = \Gamma(t)$ .

## 5.2. Подстройка робастных параметров

Параметры модели, полученные на основе критерия наименьших квадратов, сильно реагируют на выбросы помех [5.2]. Аномальные отклонения в измерениях очень редки, но амплитуда их велика.

Рассмотрим простейший пример. Выход модели объекта равен одному параметру:  $y(t|\alpha(t)) = \alpha(t)$ . Из критерия наименьших квадратов (5.1.5)

$$\sigma^{-2} \sum_{i=1}^t [x(i) - \alpha(t)]^2 = \min_{\alpha(t)}$$

получим, что  $\alpha(t)$  есть среднее арифметическое измеренных значений выхода объекта:

$$\alpha(t) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t x(i).$$

Считаем, что измерения выхода  $x(1), \dots, x(t)$  упорядочены, и одно измерение, например  $x(t)$ , содержит очень большую помеху. Тогда основной вклад в выход модели вносит слагаемое  $x(t)/t$ , и выброс существенно искажает модель.

Рассмотрим расчет робастных параметров моделей.

Если взять не квадратичный (5.1.5), а модульный критерий [5.2]

$$\sum_{i=1}^t |x(i) - \alpha(t)| = \min_{\alpha(t)}, \quad (5.2.1)$$

то параметром  $\alpha(t)$  является оценка медианы: среднее по номеру значение в *упорядоченной* выборке  $x(1), \dots, x(t)$ . Аномальное измерение  $x(t)$  теперь не меняет параметра  $\alpha(t)$ . Следовательно, критерий (5.2.1) обеспечивает получение более робастных (более крепких по отношению к аномальным измерениям) параметров модели.

Кроме критерия (5.2.1) существуют другие, близкие к нему критерии [5.2–5.4]:

$$\sum_{i=1}^t p^{-1}(i) \psi(e(i)) = \min_{\alpha(t)}, \quad e(i) = x(i) - y(i | \alpha(t)), \quad (5.2.2)$$

где  $p^{-1}(i)$  – известные весовые коэффициенты.

Примерами функций  $\psi(e)$  являются:

$\psi(e) = |e|$  (рис. 5.2.1, а);

$\psi(e) = |e|^\mu$ ,  $0 < \mu < 2$  (рис. 5.2.1, б);

$\psi(e) = \begin{cases} e^2, & |e| \leq \Delta, \\ |e| \Delta, & |e| > \Delta \end{cases}$  (рис. 5.2.1, в).

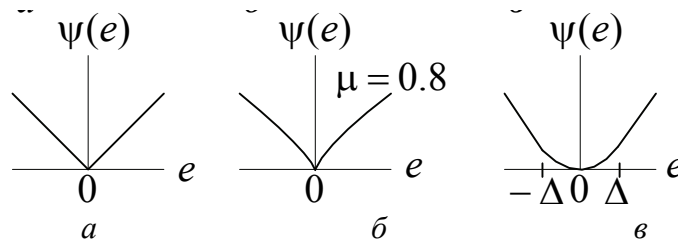


Рис. 5.2.1

Для расчета параметров  $\alpha(t)$  применим метод последовательной линейаризации. Вначале находим квадратичную аппроксимацию функционала [см. (5.2.2)] относительно траектории  $(e(i), i = \overline{1, t})$ , на которой он построен:

$$\sum_{i=1}^t p^{-1}(i) \psi(e(i)) \approx \sum_{i=1}^t [p^{-1}(i) \psi(e^l(i)) |e^l(i)|^{-2}] e^2(i) \equiv \sum_{i=1}^t (k^l(i))^{-1} e^2(i). \quad (5.2.3)$$

Здесь  $l$  – номер итерации;  $e^l(i) = x(i) - y(i | \alpha^l(t))$  – невязка,  $k^l(i)$  – коэффициенты, которые для приведенных на рис. 5.2.1 вариантов равны:

а)  $k^l(i) = p(i) |e^l(i)|$ ,

б)  $k^l(i) = p(i) |e^l(i)|^{2-\mu}$ ,

в)  $k^l(i) = \begin{cases} p(i), & |e^l(i)| \leq \Delta, \\ p(i) |e^l(i)| \Delta^{-1}, & |e^l(i)| > \Delta. \end{cases} \quad (5.2.4)$

Здесь  $\Delta$  – порог, равный среднему квадратичному значению  $\sigma$  помехи, умноженному на коэффициент  $1 \leq \delta \leq 1,8$ , который зависит от процентного содержания выбросов в помехе.

Теперь подставим в правую часть уравнения (5.2.3) (в квадратичный функционал) линейную аппроксимацию выхода модели

$$y(i | \alpha(t)) \approx y(i | \alpha^l(t)) + (\nabla_{\alpha} y(i | \alpha^l(t)))^T \Delta \alpha^{l+1}(t) \quad (5.2.5)$$

и решим обычную задачу наименьших квадратов

$$\sum_{i=1}^t (k^l(i))^{-1} \left( x(i) - y(i | \alpha^l(t)) - (\nabla y(i | \alpha^l(t)))^T \Delta \alpha^{l+1}(t) \right)^2 = \min_{\Delta \alpha^{l+1}(t)} \quad (5.2.6)$$

относительно приращения параметров  $\Delta \alpha^{l+1}(t)$ :

$$\Delta \alpha^{l+1}(t) = \left[ \sum_{i=1}^n (k^l(i))^{-1} \nabla y(i | \alpha^l(t)) (\nabla y(i | \alpha^l(t)))^T \right]^{-1} \cdot \sum_{i=1}^n (k^l(i))^{-1} \nabla y(i | \alpha^l(t)) (x(i) - y(i | \alpha^l(t))). \quad (5.2.7)$$

Следующее приближение параметров вычислим по формуле

$$\alpha^{l+1}(t) = \alpha^l(t) + \gamma^l \Delta \alpha^{l+1}(t), \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (5.2.8)$$

В отличие от обычного квадратичного критерия при использовании неквадратичных критериев (построенных также на невязках выходов объекта и модели) в алгоритме метода последовательной линеаризации меняются лишь весовые коэффициенты в каждом слагаемом. Для измерений с выбросами автоматически понижаются весовые коэффициенты. За счет этого повышается робастность оценок.

Результаты по адаптивной перестройке параметров линейных (5.1.10) и нелинейных (5.1.13) моделей на базе квадратичного критерия (5.1.9) распространены на критерии (5.2.2), обеспечивающие получение робастных (к выбросам помех измерений) параметров моделей. При этом на каждой итерации минимизируются квадратичные аппроксимации функционалов с дополнительными весовыми коэффициентами  $k(i)$ .

В рассмотренных алгоритмах минимизации квадратичных функционалов меняются лишь весовые коэффициенты для соответствующих номеров отклонений выходов объекта и модели. Эти же весовые коэффициенты  $k(i)$  переходят и в алгоритмы адаптивной перестройки параметров:

$$\alpha(t) = \alpha(t-1) + \gamma(t)[x(t) - y(t | \alpha(t-1))], \quad (5.2.9)$$

$$\gamma(t) = \frac{\Gamma(t-1) \nabla_{\alpha} y(t | \alpha(t-1))}{k(t)\lambda + (\nabla_{\alpha} y(t | \alpha(t-1)))^T \Gamma(t-1) \nabla_{\alpha} y(t | \alpha(t-1))},$$

$$\Gamma(t) = [E - \gamma(t)(\nabla_{\alpha} y(t | \alpha(t-1)))^T] \Gamma(t-1) \lambda^{-1}, \quad t = t_0 + 1, t_0 + 2, \dots$$

Для критериев (5.2.2) и функций  $\psi$ , представленных на рис. 5.2.1, коэффициенты  $k_t$  имеют вид (5.2.4).

Существуют другие алгоритмы робастной идентификации [5.2, 5.3]:

$$\alpha(t) = \alpha(t-1) + \gamma(t) \psi'(x(t) - f(\varphi(t), \alpha(t-1))), \quad (5.2.10)$$

$$\gamma(t) = \frac{\Gamma(t-1) \nabla_{\alpha} f(\varphi(t), \alpha(t-1))}{p(t)\lambda + (\nabla_{\alpha} f(\cdot))^T \Gamma(t-1) \nabla_{\alpha} f(\cdot)},$$

$$\Gamma(t) = [E - \gamma(t)(\nabla_{\alpha} f(\cdot))^T] \Gamma(t-1) \lambda^{-1}, \quad t = t_0 + 1, t_0 + 2, \dots$$

Для функций  $\psi(z)$ , представленных на рис. 5.2.1, их производная  $\psi'$  имеет вид

$$\text{а) } \psi'(z) = \text{sgn } z, \quad \text{б) } \psi'(z) = |z|^{\mu-1} \text{sgn } z, \quad \text{в) } \psi'(z) = \begin{cases} z, & |z| \leq \Delta, \\ \Delta \text{sgn } z, & |z| > \Delta. \end{cases} \quad (5.2.11)$$

Здесь  $\text{sgn } z$  – знаковая функция.

Алгоритм (5.1.14) Б. Т. Поляка [5.1] применительно к расчету робастных оценок параметров приобретает вид

$$\bar{\alpha}(t) = \bar{\alpha}(t-1) + \bar{\gamma}(t) p^{-1}(t) \nabla_{\alpha} f(\varphi(t), \bar{\alpha}(t-1)) \psi'(x(t) - f(\varphi(t), \bar{\alpha}(t-1))),$$

$$\alpha(t) = \alpha(t-1) + t^{-1}(\bar{\alpha}(t) - \alpha(t-1)), \quad t = 1, 2, \dots, \quad \bar{\gamma}(t) = \gamma t^{-1/2}, \quad \gamma > 0. \quad (5.2.12)$$

При оценивании нестационарных параметров, удовлетворяющих уравнению (5.1.15), в первом уравнении формул (5.2.12) необходимо  $\bar{\alpha}(t-1)$  заменить на  $F(\bar{\alpha}(t-1))$  (см. (5.1.18), когда использовался квадратичный критерий оптимальности):

$$\bar{\alpha}(t) = F(\bar{\alpha}(t-1)) + \bar{\gamma}(t) p^{-1}(t) \nabla_{\alpha} f(\varphi(t), \bar{\alpha}(t-1)) \psi'(x(t) - f(\varphi(t), \bar{\alpha}(t-1))),$$

$$\alpha(t) = \alpha(t-1) + t^{-1}(\bar{\alpha}(t) - \alpha(t-1)), \quad t = 1, 2, \dots, \quad \bar{\gamma}(t) = \gamma t^{-1/2}, \quad \gamma > 0. \quad (5.2.13)$$

Приведём еще один алгоритм [5.5], близкий к алгоритму (5.2.12):

$$\alpha(t) = \alpha(t-1) + \gamma(t) \psi' \left( \frac{x(t) - f(\varphi(t), \alpha(t-1))}{p(t)\lambda + (\nabla_{\alpha} f(\cdot))^T \Gamma_{t-1} \nabla_{\alpha} f(\cdot)} \right), \quad (5.2.14)$$

$$\gamma(t) = \frac{\Gamma(t-1) \nabla_{\alpha} f(\varphi(t), \alpha(t-1))}{p(t)\lambda + (\nabla_{\alpha} f(\cdot))^T \Gamma(t-1) \nabla_{\alpha} f(\cdot)},$$

$$\Gamma(t) = [E - \gamma(t)(\nabla_{\alpha} f(\cdot))^T] \Gamma(t-1) \lambda^{-1}, \quad t = t_0 + 1, t_0 + 2, \dots$$

В отличие от (5.2.12) в первом уравнении аргумент функции  $\psi'(\cdot)$  делится на  $[p(t)\lambda + (\nabla_{\alpha} f(\cdot))^T \Gamma(t-1) \nabla_{\alpha} f(\cdot)]$ .

### 5.3. Простейшие адаптивные алгоритмы

Стремление получить простые алгоритмы перестройки параметров объектов никогда не оставляло как исследователей, так и инженеров-практиков. Примером этого служат алгоритмы (5.1.14), (5.2.12), и это, несмотря на то, что освоен широкий арсенал алгоритмов для квадратичных критериев.

Здесь рассматривается алгоритм, который относится к одним из первых алгоритмов [5.6], применяемых в реальных системах адаптивного управления. В силу предельной простоты алгоритма и неплохих свойств его применяют и в настоящее время либо в первоизданном виде, либо с небольшими модификациями. Последовательно остановимся на подстройке параметров линейных и нелинейных моделей.

**Линейная параметризация модели:**  $y(t | \alpha(t)) = \varphi^T(t) \alpha(t)$ . В каждый момент времени, например  $t$  и  $t-1$ , параметры модели находим из условия равенства выходов модели и объекта:

$$x(t) = \varphi^T(t) \alpha(t), \quad x(t-1) = \varphi^T(t-1) \alpha(t-1). \quad (5.3.1)$$

Каждому уравнению в пространстве параметров соответствует своя линия (рис. 5.3.1) либо гиперплоскость, т. е. каждому уравнению соответствует бесчисленное множество решений (за исключением скалярного случая). Чтобы получить единственное решение, надо наложить дополнительное условие.

Первое уравнение в (5.3.1) запишем через приращение параметров на соседних итерациях:

$$\begin{aligned} x(t) &= \varphi^T(t) \alpha(t-1) + \varphi^T(t) [\alpha(t) - \alpha(t-1)] \equiv \\ &\equiv \varphi^T(t) \alpha(t-1) + \varphi^T(t) \Delta \alpha(t). \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

Теперь из уравнения (5.3.2) будем отыскивать  $\Delta \alpha(t)$ , наложив на него ограничение

$$\|\Delta \alpha(t)\|^2 = \min. \quad (5.3.3)$$

Оно соответствует минимуму энергетических затрат на изменение параметров.

На рис. 5.3.1 показано, что точка  $\alpha(t)$  выбирается из условия минимума расстояния от  $\alpha(t-1)$  до  $\alpha(t)$ . Из (5.3.2), (5.3.3) следует алгоритм расчета  $\alpha(t)$ :

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \alpha(t-1) + \frac{(x(t) - \varphi^T(t)\alpha(t-1))}{\varphi^T(t)\varphi(t)}\varphi(t) = \\ &= \alpha(t-1) + [x(t) - \varphi^T(t)\alpha(t-1)](\varphi^T(t))^+, \quad t = 1, 2, \dots\end{aligned}\quad (5.3.4)$$

Здесь знак «+» означает псевдообращение (обобщенное обращение) матрицы [5.7]. Последовательное движение на рис. 5.3.1 к точке пересечения прямых (5.3.1) показано линиями. Если помеха  $\xi$  **отсутствует**, то  $x(t) = \varphi^T(t)a$ , и точкой пересечения прямых являются истинные параметры  $a$  объекта.

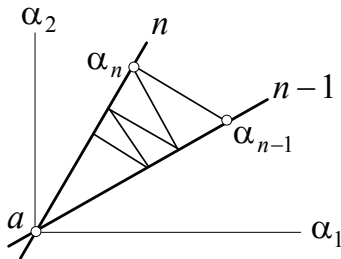


Рис. 5.3.1

Рис. 5.3.1 иллюстрирует сходимость простейшего адаптивного алгоритма (5.3.4) подстройки параметров. Сходимость доказывается и алгебраически. Из рис. 5.3.1 также видно, как можно многократно последовательно использовать два измерения входа и выхода объекта.

Если есть помеха, т. е.  $x(t) = \varphi^T(t)a + \xi(t)$ , то из (5.3.4) получим, что

$$\alpha(t) - a > \frac{\xi(t)}{\varphi^T(t)\varphi(t)}\varphi(t). \quad (5.3.5)$$

Дополнительная помеха в оценках параметров асимптотически не убывает, и для ее нейтрализации необходимо применить дополнительно сглаживание получаемых оценок  $\alpha(1), \alpha(2), \dots, \alpha(t)$ , как это делалось, например, в алгоритме (5.1.14):

$$\hat{\alpha}(t) = \hat{\alpha}(t-1) + t^{-1}[\alpha(t) - \hat{\alpha}(t-1)], \quad t = 1, 2, \dots \quad (5.3.6)$$

Усреднение можно провести с учетом экспоненциального забывания информации:

$$\hat{\alpha}(t) = \left(\sum_{i=1}^t \lambda^{t-i}\right)^{-1} \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} \alpha(i) = \hat{\alpha}(t-1) + \delta^{-1}(t)[\alpha(t) - \hat{\alpha}(t-1)], \quad (5.3.7)$$

$$\delta(t) = 1 + \lambda\delta(t-1), \delta(0) = 0, t = 1, 2, \dots,$$

$$0 < \lambda < 1, \text{ например, } 0,9 \leq \lambda \leq 0,995$$

или с применением скользящего среднего:

$$\hat{\alpha}(t) = k^{-1} \sum_{i=t+1-k}^t \alpha(i) = \hat{\alpha}(t-1) + k^{-1}[\alpha(t) - \alpha(t-k)], t = k+1, k+2, \dots, \quad (5.3.8)$$

Здесь  $k$  – количество усредняемых значений. Алгоритмы (5.3.7), (5.3.8) применимы при подстройке дрейфующих параметров объекта.

Чувствительность к помехам можно уменьшить, вводя в алгоритм (5.3.4) дополнительный положительный параметр [5.7]. Его вводят двумя способами:

$$\alpha(t) = \alpha(t-1) + \gamma \frac{[x(t) - \varphi^T(t)\alpha(t-1)]}{\varphi^T(t)\varphi(t)} \varphi(t), \quad 0 < \gamma, \quad t = 1, 2, \dots; \quad (5.3.9)$$

$$\alpha(t) = \alpha(t-1) + \frac{[x(t) - \varphi^T(t)\alpha(t-1)]}{\gamma + \varphi^T(t)\varphi(t)} \varphi(t), \quad 0 < \gamma, \quad t = 1, 2, \dots \quad (5.3.10)$$

Второй способ часто оказывается предпочтительнее, так как параметр  $\gamma$  осуществляет регуляцию алгоритма, когда  $\varphi^T \varphi$  приближается к нулю.

**Пример 5.3.1.** Для линейной модели  $f(\varphi(t), \alpha(t)) = \alpha_1(t)\varphi_1(t) + \alpha_2(t)\varphi_2(t)$  простейший адаптивный алгоритм перестройки параметров  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$  имеет вид

$$\alpha_1(t) = \alpha_1(t-1) + \frac{x(t) - \alpha_1(t-1)\varphi_1(t) - \alpha_2(t-1)\varphi_2(t)}{\varphi_1^2(t) + \varphi_2^2(t)} \varphi_1(t),$$

$$\alpha_2(t) = \alpha_2(t-1) + \frac{x(t) - \alpha_1(t-1)\varphi_1(t) - \alpha_2(t-1)\varphi_2(t)}{\varphi_1^2(t) + \varphi_2^2(t)} \varphi_2(t),$$

$$t = 1, 2, \dots$$

**Нелинейная модель.** На каждом шаге линеаризуем модель  $y(t | \alpha(t)) = f(\varphi(t), \alpha(t))$

по параметрам и приращения параметров отыскиваем из равенства (эквивалентного (5.3.2) для линейного случая) выхода объекта и выхода линеаризованной модели

$$x(t) = f(\varphi(t), \alpha(t-1)) + \nabla_{\alpha}^T f(\varphi(t), \alpha(t-1)) \Delta \alpha(t) \equiv f(\cdot) + \nabla_{\alpha}^T f(\cdot) \Delta \alpha(t)$$

с учетом критерия (5.3.3). В итоге получим алгоритм перестройки параметров нелинейной модели

$$\alpha(t) = \alpha(t-1) + \frac{x(t) - f(\varphi(t), \alpha(t-1))}{\nabla_{\alpha}^T f(\cdot) \nabla_{\alpha} f(\cdot)} \nabla_{\alpha} f(\cdot), \quad t = 1, 2, \dots \quad (5.3.11)$$

**Векторная линейная модель.** Простейший адаптивный алгоритм (5.3.4) не меняет своей формы при подстройке параметров матрицы  $A$  векторной модели  $f(\varphi(t), A(t)) = A(t)\varphi(t)$ . Здесь  $f(\cdot)$  и  $\varphi(t)$  – векторы-столбцы различных размерностей. Векторная модель состоит из нескольких скалярных моделей, в каждой из которых используются одни и те же базисные функции  $\varphi(t)$ . Выписывая для каждой строки матрицы  $A$  уравнение (5.3.4) и объединяя их в матрицу, получаем простейший адаптивный алгоритм подстройки матрицы параметров в виде

$$\begin{aligned} A(t) &= A(t-1) + \frac{x(t) - A(t-1)\varphi(t)}{\varphi^T(t)\varphi(t)} \varphi^T(t) = \\ &= A(t-1) + [x(t) - A(t-1)\varphi(t)]\varphi^+(t), \quad t = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.3.12)$$

Дальнейшее **обобщение алгоритма** связано с использованием при расчете  $\alpha(t)$  не одного равенства в (5.3.1)  $x(t) = \varphi^T(t)\alpha_n(t)$ , а нескольких (например,  $p$  равенств):

$$x(k) = \varphi^T(k)\alpha(t), \quad k = t, t-1, \dots, t-p+1, \quad p \geq 1. \quad (5.3.13)$$

Перепишем систему равенств (5.3.13), выделяя приращения параметров  $\Delta\alpha(t) = \alpha(t) - \alpha(t-1)$ :

$$\begin{aligned} \Phi(t)\Delta\alpha(t) &= X(t) - \Phi(t)\alpha(t-1), \\ \Phi(t) &= \begin{pmatrix} \varphi^T(t) \\ \dots \\ \varphi^T(t-p+1) \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dots \\ x(t-p+1) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

Для получения единственного решения системы (5.3.13) учитываем ограничение (5.3.3)  $\|\Delta\alpha(t)\|^2 = \min$  и находим приращение параметров:

$$\Delta\alpha(t) = \Phi^+(t)[X(t) - \Phi(t)\alpha(t-1)], \quad (5.3.15)$$

где  $+$  – символ псевдообращения матрицы [5.7].

Затем вычисляем параметры

$$\alpha(t) = \alpha(t-1) + \Delta\alpha(t) = \alpha(t-1) + \Phi^+(t)[X(t) - \Phi(t)\alpha(t-1)]. \quad (5.3.16)$$

Увеличение памяти ( $p > 1$ ) по входам и выходам объекта приводит к увеличению скорости сходимости алгоритма и уменьшению влияния помех на оценки  $\alpha(t)$  параметров  $a$  объекта.

При подстройке матрицы параметров  $A(t)$  векторной линейной (относительно параметров) модели  $f(\varphi(t), A(t)) = A(t)\varphi(t)$  алгоритм с памятью принимает вид

$$A(t) = A(t-1) + [X(t) - A(t-1)\Phi(t)]\Phi^+(t), \quad t = 1, 2, \dots \quad (5.3.17)$$

В работе [5.8] приведён обобщённый алгоритм, который включает в себя набор адаптивных алгоритмов от наименьших квадратов до простейшего алгоритма.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенный метод синтеза алгоритмов адаптивного управления с идентификацией обладает достаточной общностью. Синтезированные алгоритмы имеют простую структуру, в основе их лежит использование математической модели с перестраиваемыми параметрами и структурой. Качество адаптивного управления определяется качеством идентификации главных динамических свойств объектов управления. Метод позволяет исследователю не только вручную осуществлять синтез устройств управления, но также ставить и решать задачу автоматического проектирования систем управления. Это наиболее перспективный путь внедрения теоретических результатов в практику.

Реализация адаптивных систем с идентификатором (АСИ) подтверждает, что можно осуществить достаточно эффективное управление малоизученными объектами, причем одни и те же алгоритмы работы АСИ можно применять для объектов различной природы. За счет этого можно также строить системы автоматизированного проектирования математического обеспечения АСИ. Включение идентификатора в цепь обратной связи приводит к тому, что требования к качеству идентификации ослабевают. Главная цель идентификации направлена теперь только на достижение цели управления.

Метод нуждается в дальнейшем развитии и обобщении на новые классы объектов. Примерами их могут служить распределенные объекты, объекты с упруговязкими элементами, процессы, описываемые дискретно-аргументными динамическими моделями. Важны для практики классы систем с неполной наблюдаемостью фазовых координат, с помехами, содержащими выбросы. Необходимо осуществить детальный сравнительный анализ основных свойств синтезированных алгоритмов и лучших известных алгоритмов управления.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

### *К введению*

В.1. Антонов, В. Н. Адаптивные системы автоматического управления: учеб. пособие / В. Н. Антонов, А. М. Пришвин, В. А. Терехов, А. Э. Янчевский / под ред. В. Б. Яковлева. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1984. – 204 с.

В.2. Справочник по теории автоматического управления / под ред. А. А. Красовского. – М.: Наука, 1987. – 712 с.

В.3. Александров, А. Г. Оптимальные и адаптивные системы: учеб. пособие / А. Г. Александров. – М.: Высш. шк., 1989. – 263 с.

В.4. Уидроу, Б. Адаптивная обработка сигналов / Б. Уидроу, С. Стирнз. – М.: Радио и связь, 1989. – 440 с.

В.5. Фрадков, А. Л. Адаптивное управление в сложных системах: беспоисковые методы / А. Л. Фрадков. – М.: Наука, 1990. – 296 с.

В.6. Цыкунов, А. М. Квадратичный критерий абсолютной устойчивости в теории адаптивных систем / А. М. Цыкунов. – Фрунзе: Илим, 1990. – 156 с.

В.7. Данилов, Ф. А. Адаптивное управление точностью прокатки труб / Ф. А. Данилов, Н. С. Райбман, В. М. Чадеев и др. – М.: Metallurgy, 1973. – 224 с.

В.8. Трапезников, В. А. АСИ – адаптивная система с идентификацией / В. А. Трапезников, Н. С. Райбман, В. М. Чадеев и др. – М.: Ин-т проблем управления, 1980. – 67 с.

В.9. Рубан, А. И. Синтез алгоритмов адаптивного управления с идентификацией / А. И. Рубан // Автоматика и телемеханика. – 1983. – № 10. – С. 128–138.

В.10. Рубан, А. И. Адаптивное управление с идентификацией / А. И. Рубан. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1983. – 135 с.

В.11. Петров, Б. Н. Адаптивное координатно-параметрическое управление нестационарными объектами / Б. Н. Петров, В. Ю. Рутковский, С. Д. Земляков. – М.: Наука, 1980. – 244 с.

В.12. Изерман, Р. Цифровые системы управления / Р. Изерман. – М.: Мир, 1984. – 541 с.

### *К главе 1*

1.1. Эйкхофф, П. Основы идентификации систем управления / П. Эйкхофф. – М.: Мир, 1975. – 683 с.

- 1.2. Райбман, Н. С. Построение моделей процессов производства / Н. С. Райбман, В. М. Чадеев. – М.: Энергия, 1975. – 375 с.
- 1.3. Рубан, А. И. Идентификация нелинейных динамических объектов на основе алгоритма чувствительности / А. И. Рубан. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1975. – 270 с.
- 1.4. Рубан, А. И. Идентификация и чувствительность сложных систем / А. И. Рубан. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1982. – 302 с.
- 1.5. Цыпкин, Я. З. Основы информационной теории идентификации / Я. З. Цыпкин. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
- 1.6. Стрейц, В. Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления / В. Стрейц. – М.: Наука, 1985. – 296 с.
- 1.7. Льюнг, Л. Идентификация систем. Теория для пользователя / Л. Льюнг. – М.: Наука, 1991. – 432 с.
- 1.8. Рубан, А. И. Чувствительность дискретных линейных моделей / А. И. Рубан // Автоматика и телемеханика. – 1991. – № 9. – С. 159–168.

#### *К главе 2*

- 2.1. Рубан, А. И. Адаптивное управление с идентификацией / А. И. Рубан. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1983. – 135 с.
- 2.2. Рубан, А. И. Методы анализа данных: учеб. пособие, – 2-е изд., исправ. и доп. / А. И. Рубан. – Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2004. – 319 с.
- 2.3. Неймарк, Ю. И. Динамика неголономных систем / Ю. И. Неймарк, М. А. Фуфаев. – М.: Наука, 1967. – 519 с.
- 2.4. Соломина, В. К. Адаптивное управление с идентификацией в АСУ ТП сталеплавильной печи / В. К. Соломина // Информатика и системы управления: межвуз. сб. науч. тр. – Красноярск: КГТУ, 1997. – С. 102–108.
- 2.5. Соломина, В. К. Алгоритмы адаптивного управления распределенными объектами (обжигом извести и клинкера во вращающихся печах, плавкой стали в дуговых сталеплавильных печах): дис. ... канд. техн. наук по специальности 05.13.06 «Автоматизация и управление технологическими процессами и производствами» (промышленность). – Красноярск: КГТУ, 2001. – 210 с.

#### *К главе 3*

- 3.1. Рубан, А. И. Адаптивное управление внутриванными процессами гальванопроизводства / А. И. Рубан, А. А. Светлаков // Системы управления и их элементы. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1980. – С. 112–141.
- 3.2. Якубович, В. А. Метод рекуррентных целевых неравенств в теории адаптивных систем / В. А. Якубович // Вопросы кибернетики. Адап-

тивные системы. – М.: АН СССР. Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика», 1976. – С. 32–64.

3.3. Якубович, В. А. Адаптивное субоптимальное управление линейным динамическим объектом при наличии запаздывания в управлении / В. А. Якубович // Кибернетика. – 1976. – № 1. – С. 26–43.

#### *К главе 4*

4.1. Рубан, А. И. Адаптивное управление обжигом извести / А. И. Рубан, В. К. Соломина // Бум. пром-сть. – 1991. – № 12. – С. 21–23.

4.2. Рубан, А. И. Адаптивное управление распределенными объектами с несколькими управлениями и запаздываниями / А. И. Рубан, В. К. Соломина // Оптимальное проектирование, планирование экспериментов и моделирование многофакторных объектов: межвуз. сб. науч. тр. Новосибирск: НЭТИ, 1989. – С. 43–47.

4.3. Рубан, А. И. Адаптивное управление обжигом клинкера во вращающихся печах / А. И. Рубан, В. К. Соломина // Проблемы информатизации региона (ПИР-2000): докл. шестой Всерос. науч.-практ. конф. (21–23 дек. 2000). – Красноярск: Изд-во КГТУ. 2001 – С. 80–90.

4.4. Рубан, А. И. Адаптивное управление распределенными объектами с двумя выходами и с чистыми запаздываниями по входным воздействиям / А. И. Рубан, В. К. Соломина // Информатика и системы управления: межвуз. сб. науч. тр. Вып. 6. – Красноярск: НИИ ИПУ. 2001. – С. 81–89.

4.5. Рубан, А. И. Адаптивное управление многомерными распределенными динамическими объектами / А. И. Рубан // Вестн. Краснояр. гос. техн. ун-та. Математические методы и моделирование. Вып. 37. – Красноярск: ИПЦ КГТУ. 2005. – С. 97–110.

4.6. Rouban, A. I. The synthesis of control algorithms for the stochastic discrete argument systems / A. I. Rouban // Preprints of 2 IFAC Symp. on Stochastic Control. Vilnius, USSR, 1986. – Part 1. – P. 249–252.

4.7. Рубан, А. И. Адаптивное управление распределенными системами с запаздываниями / А. И. Рубан // Автоматическое управление объектами с переменными характеристиками: сб. науч. работ. Новосибирск: НЭТИ, 1986. – С. 47–52.

4.8. Рубан, А. И. Алгоритмы адаптивного управления с идентификацией для дискретных систем с многократными измерениями и запаздываниями / А. И. Рубан // Идентификация, прогнозирование и управление в технических системах: сб. науч. работ. Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1986. – С. 32–37.

4.9. Рубан, А. И. Адаптивное оптимальное управление динамическими распределенными объектами / А. И. Рубан // Кибернетика. – 1987. – № 1. – С. 79–84.

4.10. Рубан, А. И. Алгоритмы адаптивного управления для дискретно-аргументных систем / А. И. Рубан // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1988. – № 1. – С. 192, 193.

*К главе 5*

5.1. Поляк, Б. Т. Новый метод типа стохастической аппроксимации / Б. Т. Поляк // Автоматика и телемеханика. – 1990. – № 7. – С. 98–107.

5.2. Поляк, Б. Т. Robust identification / Б. Т. Поляк, Я. З. Цыпкин // Automatica. – 1980. – Vol. 16. – № 1. – P. 53–65.

5.3. Поляк, Б. Т. Робастные псевдоградиентные алгоритмы адаптации / Б. Т. Поляк, Я. З. Цыпкин // Автоматика и телемеханика. – 1980. – № 10. – С. 91–97.

5.4. Хьюбер, П. Дж. Робастность в статистике / П. Дж. Хьюбер. – М.: Мир, 1984. – 303 с.

5.5. Cipra, T. Robast Smoothing and Forecasting Procedures / T. Cipra, A. Rubio, J. L. Canal // Czechoslovak Journal for Operations Reseach. – 1992. – Vol. 1. – № 1. – P. 41–56.

5.6. Райбман, Н. С. Построение моделей процессов производства / Н. С. Райбман, В. М. Чадеев. – М.: Энергия, 1965. – 376 с.

5.7. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1967. – 575 с.

5.8. Кульчицкий, О. Ю. Адаптивное управление линейными динамическими объектами с помощью модифицированного метода наименьших квадратов / О. Ю. Кульчицкий // Автоматика и телемеханика. – 1987. – № 1. – С. 89–105.

Научное издание

**Рубан** Анатолий Иванович

**АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ  
С ИДЕНТИФИКАЦИЕЙ**

Редактор *Н. А. Варфоломеева*  
Компьютерная верстка *Н. Г. Дербенёвой*

Подписано в печать 16.07.2015. Печать плоская. Формат 60×84/16  
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 8,75. Тираж 500 экз. Заказ № 476

Издательский центр  
Библиотечно-издательского комплекса  
Сибирского федерального университета  
660041, Красноярск, пр. Свободный, 79  
Тел./факс (391) 206-21-49, e-mail: [rio.bik@mail.ru](mailto:rio.bik@mail.ru)

Отпечатано Полиграфическим центром  
Библиотечно-издательского комплекса  
Сибирского федерального университета  
660041, Красноярск, пр. Свободный, 82а  
Тел./факс (391) 206-26-49, тел. 206-26-67  
E-mail: [print\\_sfu@mail.ru](mailto:print_sfu@mail.ru); [http:// bik.sfu-kras.ru](http://bik.sfu-kras.ru)