

А.Р РЖАНИЦЫН

ПРЕДЕЛЬНОЕ
РАВНОВЕСИЕ
ПЛАСТИНОК
И ОБОЛОЧЕК



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1983

30.121

P 48

УДК 620

Ржаницын А. Р. **Предельное равновесие пластинок и оболочек**.— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983.— 288 с.

В книге излагаются методы расчета пластинок и оболочек по стадии предельного равновесия. В основу положена гипотеза жестко-пластического материала и представления о сосредоточенных деформациях в виде цилиндрических шарниров текучести, сосредоточенных удлинений и сдвигов. Задачи решаются при помощи экстремального принципа минимума внешней нагрузки для действительных форм разрушения. Рассмотрены вопросы расчета железобетонных пластинок на изгиб при различных нагрузках и способах опирания, расчета пластинок на действие сил в их плоскости и расчета оболочек различного вида. Большое внимание уделено использованию в расчетах метода линейного программирования, наиболее удобного для применения вычислительной техники.

Материал книги в основном обобщает работы автора, написанные им в разное время, и в меньшей степени — работы других исследователей.

Книга рассчитана на инженеров-проектировщиков, аспирантов и научных работников.

Табл. 30, илл. 195, библ. 174 назв.

Алексей Руфович Ржаницын

ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ ПЛАСТИНОК И ОБОЛОЧЕК

Редактор А. Г. Мордвинцев

Техн. ред. Л. В. Лихачева

Корректор Н. Б. Румянцева

ИБ № 11521

Сдано в набор 12.05.82. Подписано к печати 08.12.82. Т-20959. Формат 84×108^{1/32}. Бумага тип. № 3. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 15,12. Уч.-изд. л. 14,45. Тираж 2500 экз. Заказ № 179. Цена 2 р. 40 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»
630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25

P 2105000000 — 006
053(02)-83 143-82

(C) Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической
литературы, 1983

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Введение	7
Г л а в а 1. Расчет плит методом предельного равновесия	12
§ 1. Предельное равновесие системы	12
§ 2. Упруго- и жесткопластические тела	15
§ 3. Предельное равновесие пластинок	18
§ 4. Сосредоточенные кривизны	24
§ 5. Условия текучести в металлических пластинках	25
§ 6. Ассоциированный закон текучести	27
§ 7. Железобетонные изотропные пластинки	29
§ 8. Полигональные шарнирно оперты по контуру пластинки	33
§ 9. Пластинки с отверстиями	38
§ 10. Ортотропное армирование плиты	40
Г л а в а 2. Расчет железобетонных пластинок на действие сосредоточенной силы	42
§ 11. Общее решение	42
§ 12. Частные случаи шарнирно опертых пластинок	47
§ 13. Пластинка, оперта внутри своего контура	50
§ 14. Пластинка, оперта по незамкнутому контуру	51
§ 15. Одностороннее опирание пластинки по контуру	55
§ 16. Предельное равновесие консольной плиты, нагруженной сосредоточенной силой	60
§ 17. Пластинки, защемленные по контуру опирания	62
§ 18. Экстремальная форма краевого шарнира текучести	66
§ 19. Формы разрушения с незамкнутым краевым шарниром текучести	68
§ 20. Пластинка с несимметричным армированием, шарнирно оперта по замкнутому контуру	72
Г л а в а 3. Железобетонные пластинки, нагруженные равномерно распределенной нагрузкой	77
§ 21. Пирамидальная форма разрушения	77
§ 22. Прямоугольная пластинка с равномерной нагрузкой	80
§ 23. Прямоугольная пластинка, оперта по трем сторонам	85
§ 24. Квадратная пластинка с отверстием в центре	86
Г л а в а 4. Применение линейного программирования к задаче определения несущей способности пластинки	89
§ 25. Сетка возможных шарниров текучести	89
§ 26. Двойственная задача линейного программирования в расчете пластинки	92

§ 27. Пример расчета пластинки методом линейного программирования	96
§ 28. Упрощение расчета	108
§ 29. Прямоугольная и треугольная сетки шарниров текучести	114
§ 30. Расчет четырехугольных плит производственного очертания	117
§ 31. Статический метод расчета несущей способности пластинок	120
Г л а в а 5. Пластинки переменной толщины и большие прогибы	128
§ 32. Изотропные пластинки переменной толщины	128
§ 33. Учет мембранных напряжений в пластинках	133
§ 34. Устойчивость сжатых пластинок из жесткопластического материала	141
Г л а в а 6. Предельное равновесие пластинок, работающих в своей плоскости	144
§ 35. Дискретные решения задач предельного равновесия	144
§ 36. Сосредоточенные деформации при плоском напряженном состоянии тонких пластинок	148
§ 37. Поперечный изгиб пластинки в ее плоскости	151
Г л а в а 7. Вариационная задача о сосредоточенных деформациях	155
§ 38. Экстремали сосредоточенных деформаций	155
§ 39. Уточненное решение задачи о несущей способности пластинки при поперечном изгибе ее в своей плоскости	159
§ 40. Условие трансверсальности экстремалей сосредоточенных деформаций	164
§ 41. Изгиб клина от равномерно распределенной нагрузки	166
§ 42. Кручение запрессованной шайбы	170
§ 43. Сосредоточенные деформации при условиях текучести Треска — Сен-Венана	173
§ 44. Сопротивление кручению квадратной шайбы в материале, подчиняющемся условиям текучести Треска — Сен-Венана	178
§ 45. Линии сосредоточенных деформаций в железобетонных пластинках	180
Г л а в а 8. Применение линейного программирования к пластинкам, работающим в своей плоскости	182
§ 46. Задача о плоском напряженном состоянии пластинки	182
§ 47. Применение линейного программирования к расчету плоского деформированного состояния	186
Г л а в а 9. Пологие оболочки на полигональном плане	190
§ 48. Предельное равновесие пологой оболочки	190
§ 49. Пологие оболочки, шарнирино оперты по полигональному контуру	193

ОГЛАВЛЕНИЕ

5

§ 50. Прямоугольная в плане пологая оболочка	198
§ 51. Форма разрушения пологой полигональной оболочки с пирамидальной эпюрой прогибов	203
§ 52. Возможность продавливания оболочки	208
§ 53. Пяти- и девятидисковые формы разрушения пологой оболочки на прямоугольном плане	210
§ 54. Устойчивость пологой оболочки	212
Г л а в а 10. Расчет пологих оболочек вращения	220
§ 55. Пологая осесимметрическая оболочка вращения	220
§ 56. Осесимметрическая оболочка постоянной толщины, не подвижно опертая по контуру	222
§ 57. Исследование возможности формы разрушения в виде усеченного конуса	224
§ 58. Исследование возможности конической формы разрушения одной средней части оболочки	227
Г л а в а 11. Цилиндрические оболочки	230
§ 59. Цилиндрический свод-оболочка	230
§ 60. Поперечное сжатие трубы сосредоточенными силами	235
§ 61. Расчет осесимметрических цилиндрических оболочек	236
Г л а в а 12. Применение линейного программирования к расчету оболочек	241
§ 62. Расчет оболочек вращения симплекс-методом	241
§ 63. Расчет арок и арочных сводов	247
§ 64. Расчет цилиндрических сводов-оболочек методом линейного программирования	251
§ 65. Пример расчета цилиндрического свода-оболочки	264
Г л а в а 13. Уточненное решение задачи об осесимметрической цилиндрической оболочке	272
§ 66. Предельное состояние осесимметрически нагруженной трубы	272
§ 67. Предельная зависимость между продольным моментом и кольцевым усилием	275
Литература	278

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время имеется большое число монографий и пособий по общей теории пластичности, в которых рассматриваются задачи «точного» расчета пластинок и оболочек из упруго-пластических материалов. Этот расчет, как правило, приводит к чрезвычайно сложным и громоздким вычислениям, выполнимым только при наличии вычислительных центров.

Существуют, однако, упрощенные методы, использующие экстремальные принципы действительных форм разрушения упруго-пластических систем и дающие приближенные решения, удобные для практических расчетов. В этих методах обычно принимаются представления о средоточенных деформациях и кривизнах в соединении с гипотезой о жесткопластическом материале. Решения эти превосходят по своей простоте и универсальности обычные расчеты по упругой стадии и очень удобны для расчета железобетонных пространственных конструкций. К сожалению, обобщающих работ по данным методам издано еще очень мало.

В настоящей книге собраны в основном результаты собственных разработок автора по расчету пластинок и оболочек в стадии предельного равновесия. Главное внимание уделено расчету железобетонных конструкций, широко применяемых в строительстве. Работы других авторов в книге отражены не столь подробно, на них сделаны ссылки в соответствующих местах книги. Ссылки на литературу, стоящие после заголовков параграфов, указывают на статьи, в которых впервые были получены результаты, изложенные или развитые в данном параграфе.

Автор полагает, что книга может представить интерес не только в теоретическом, но и в практическом отношении.

ВВЕДЕНИЕ

Расчеты пластинок и оболочек методами, основанными на теории упругости, не могут удовлетворить инженеров-проектировщиков по двум причинам. Во-первых, эти расчеты оказываются в большинстве случаев очень сложными и трудоемкими и, во-вторых, что самое главное, не могут ответить на основной вопрос о несущей способности пластиинки или оболочки. Несмотря на это, оболочки до сих пор часто рассчитывают как упругие, чтобы иметь хотя бы какое-то представление об их прочности.

Действительная работа пространственных конструкций типа пластинок или оболочек определяется физическими свойствами материала, подчиняющегося обычно нелинейной зависимости напряжений от деформаций, причем даже не функциональной, а выражаемой интегральными или дифференциальными операторами во времени. Развитие общей теории пластичности и теории ползучести вместе с совершенствованием вычислительной техники создает принципиальную зависимость точного расчета пластин и оболочек с учетом действительных свойств материалов, но пока еще этот путь не пригоден для практики из-за ряда недоработок в теории расчета и сложности вычислительного процесса.

Между тем уже давно разработана условная схема расчета упруго-пластических конструкций по стадии предельного равновесия, основанная на представлении о жестко-пластическом теле, подчиняющемся так называемой диаграмме Прандтля (см. рис. 1 на стр 18). Эта схема, конечно, весьма приблизительно отражает действительное поведение конструкции под нагрузкой, но все же дает качественно более правильные результаты, чем обычный расчет на основе закона Гука. Широкое распространение метод предельного равновесия получил в расчетах железобетонных пластинок.

Расчет по предельному равновесию статически неопределенных балок впервые предложен в 1913 г. венгерским

инженером Казинчи. Для пластинок расчет по схеме разрушения с цилиндрическими шарнирами текучести впервые был дан в 1921 г. в Дании А. Ингерслевым [148]. В начале тридцатых годов нашего столетия этот расчет был существенно развит датским ученым К. Иогансеном [150—154]. В дальнейшем расчетом пластинок по стадии предельного равновесия занимались многие, в том числе Е. Мансфилд [157], М. Нилсен [161], В. Ольшак [83], А. Савчук [170], Соботка и многие другие. В нашей стране этим расчетом занимались А. М. Дубинский [44, 46], А. С. Дехтярь [38—42] и др. Особое значение для развития методов расчета пластинок по стадии предельного равновесия имела работа А. А. Гвоздева [26], в которой он впервые строго доказал экстремальные принципы, дающие оценки сверху и снизу для несущей способности упруго-пластических систем.

Автор получил ряд результатов в области расчета пластинок по предельному равновесию в 1949 г. [93]; в частности, были найдены новые формы разрушения пластинок с криволинейными краевыми шарнирами текучести. Эта работа была повторена в 1957 г. Е. Мансфилдом [157], которому удалось обобщить некоторые задачи, в частности задачу о расчете пластинки, шарнирно опертой по двум сторонам, на действие сосредоточенной силы, приложенной в любой точке. Автором получена также формула (8.6) для двусторонней оценки предельной нагрузки для полигонально опертой пластинки, исходя из заданной формы разрушения [104].

В большинстве работ по расчету пластинок использовался кинематический метод, в котором требуется задаваться формой разрушения. Статический метод предельного равновесия, где задаются статически возможным распределением внутренних условий, развил в применении к пластинкам М. Нилсен [161] в виде так называемого метода узловых точек.

В середине шестидесятых годов к задачам о предельной несущей способности пластинок были применены методы линейного программирования. Первые работы здесь были опубликованы Вольфенсбергером [172], Черадини и Гаварини [138], Купманом и Лансом [156]. В этих работах ставились ограничения для внутренних усилий в соответствии с условиями текучести в отдельных точках

пластиинки. В 1966 г. автор [102] предложил для расчета пластиинок методом линейного программирования регулярную сетку возможных шарниров текучести, из которой получались линии шарниров текучести, близкие к действительным. Этот способ был потом применен в работах В. И. Терехиной [117], Г. Н. Брусенцова [14], А. Э. Боркаускаса [13].

Метод линейного программирования незадолго перед этим получил большое развитие в применении к расчету упруго-пластических стержневых систем в работах Прагера [164], и в особенности А. А. Чираса с его школой в Вильнюсе [133].

Автором еще в 1956 г. [95] была рассмотрена схема деформирования пластиинки в своей плоскости по криволинейным линиям сосредоточенных деформаций. Были найдены экстремали вариационной задачи для этих линий и применены к отдельным вопросам расчета пластиинок. В настоящей работе этот метод обобщен на различные условия текучести.

Для оболочек кинематический метод предельного равновесия был разработан впервые в нашей стране. К самым первым публикациям относятся работы Г. К. Хайдукова по расчету шатровых покрытий [122], Н. В. Ахвledиани и В. Н. Шаншмелашвили [9] по расчету пологих оболочек на круглом плане. Большая экспериментально-теоретическая работа по расчету железобетонных куполов по стадии предельного равновесия была проведена Л. М. Овечкиным [82]. Первая работа автора по предельному равновесию оболочек была опубликована в 1957 г. [167]. Для пологих оболочек в ней было введено понятие плоскости нулевых горизонтальных смещений, в которой расположены взаимные оси вращения отдельных частей оболочки. В 1966 г. [103] автор предложил расчет цилиндрических оболочек методом линейного программирования. Впоследствии этот метод был применен также к расчету осесимметричных куполов, резервуаров и арочных сводов [106]. Для пологих оболочек метод линейного программирования под руководством автора по схеме расчета пластиинки переменной толщины был разработан Д. А. Гонгадзе [33]. Иной метод линейного программирования был применен к расчету пологой оболочки В. И. Себекиной [114]. Упомянем также работу В. В. Шугаева [123], где рассматриваются вопросы

устойчивости железобетонных оболочек на основе анализа форм разрушения, предложенного автором. Ряд работ был проведен в Киеве А. С. Дехтярем, А. О. Рассказовым и другими, а также Б. Ю. Мирзабекяном, А. М. Проценко и многими другими.

Описанные в книге методы являются в основном простыми и приближенными. К недостаткам этих методов относится то, что они, как правило, дают оценку несущей способности сверху. Однако точность этой оценки вполне достаточна для практических целей и может быть компенсирована некоторым снижением показателей прочности материала (что и делается в нормах, вследствие необходимости учета статистического разброса прочностных свойств), а также тем обстоятельством, что схема идеального жесткопластического тела не учитывает упрочнения материала в стадии текучести, т. е. подъема действительной диаграммы работы материала вместо горизонтальной линии диаграммы Прандтля.

Наряду с приближенными универсальными методами расчета по стадии предельного равновесия развивалась более строгая математическая теория расчета пластинок и оболочек на базе общей теории пластичности. Здесь следует прежде всего отметить основополагающую работу А. А. Ильюшина [63], в которой получены точные соотношения между компонентами усилий в сечениях пластинки или в стадии текучести. Существенные результаты в этой области получены также В. В. Соколовским [116], Ю. Р. Лепиком [72], Ю. Н. Работновым [90], В. И. Розенблюром [110], И. С. Цурковым [128], М. И. Ерховым [59] и др. Как правило, расчеты точными методами оказываются очень сложными и могут быть произведены лишь с помощью вычислительных центров и только для достаточно простых случаев загружения и очертания оболочек. В направлении подобных методов автором был разработан сравнительно простой расчет цилиндрической двуслойной оболочки [97].

На расчет жесткопластических систем по стадии предельного равновесия следует смотреть как на вспомогательное средство для анализа работы реальных конструкций, в которых большую роль играет, например, фактор ползучести, создающий зависимость предела текучести от скорости загружения. Поэтому надо с большой

осторожностью переносить методы теории пластичности на динамические задачи. Не решенными для практического применения остаются еще задачи, связанные со сложным загружением, когда соотношения компонент напряжений в точках тела меняются в процессе нагружения. В частности, это относится к вопросам потери устойчивости равновесия неупругих систем.

Большое значение имеют вопросы повторных и переменных загружений, при которых обычно происходит приспособляемость упруго-пластических систем, но может возникнуть и прогрессирующее нарастание деформаций, приводящее к разрушению. Здесь имеют место важные теоремы Г. Блейха [137], Меллана и Койтера [66], принципиально решающие задачу. Использование линейного программирования приводит к простому решению задачи приспособляемости путем введения дополнительных ограничений по уравновешиванию внутренними усилиями всех нагрузок, что было наглядно показано А. А. Чирасом [133].

Но все же, если сравнить результаты разработок теории предельного равновесия жесткопластических систем с тем, что дает для расчета реальных пластинок и оболочек теория упругости, следует считать эти результаты весьма полезными для практики.

Г л а в а 1

РАСЧЕТ ПЛИТ МЕТОДОМ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ

§ 1. Предельное равновесие системы

Потенциал V внешних сил, приложенных к системе, можно представить как произведение внешней обобщенной силы или вектора нагрузки P на соответствующее обобщенное перемещение или вектор перемещений f , отсчитываемый от нулевого уровня в отрицательную сторону:

$$V = -Pf.$$

Работу внутренних сил, произведенную ими от нулевого состояния системы, обозначим через $-T$. В линейно или нелинейно упругих системах эта работа равна потенциалу внутренних сил, взятому с обратным знаком. В пластических и упруго-пластических системах работа $-T$ частично поглощается, переходя в иные виды энергии. Однако в случае простого деформирования, т. е. такого, при котором в каждой точке соотношения между компонентами тензора деформаций остаются постоянными, а сами эти деформации монотонно возрастают, процесс разгрузки не проявляется и поведение упруго-пластической системы идентично поведению нелинейной упругой системы с теми же зависимостями напряжений от деформаций при загружении. Поэтому величину T условно можно считать потенциалом внутренних сил, как если бы энергия T могла возвратиться при разгрузке.

Назовем полным потенциалом системы величину

$$U = T + V = T - Pf.$$

В состояниях устойчивого равновесия должно выполняться условие минимума потенциала U .

Пусть деформированное состояние системы может быть описано n параметрами: x_1, x_2, \dots, x_n . Тогда усло-

вия минимума U будут иметь вид

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.1)$$

Из этих уравнений можно найти величины $x_i = x_i^0$ соответствующие состоянию равновесия, причем любое отклонение величин x_i от значений x_i^0 нарушает условие равновесия. Исключение будет при равенстве нулю определителя системы уравнений (1.1)

$$\begin{vmatrix} U_{x_1 x_1} & U_{x_1 x_2} & \cdots & U_{x_1 x_n} \\ U_{x_2 x_1} & U_{x_2 x_2} & \cdots & U_{x_2 x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_{x_n x_1} & U_{x_n x_2} & \cdots & U_{x_n x_n} \end{vmatrix} = 0, \quad (1.2)$$

в котором вторые производные от U берутся при значениях $x_i = x_i^0$. Тогда становятся возможными перемещения по некоторым направлениям без увеличения потенциальной энергии системы.

Состояние, при котором удовлетворяются условия (1.1) и (1.2), называется *пределным состоянием равновесия*. В математическом отношении это состояние эквивалентно критическому состоянию равновесия, возникающему на границе областей устойчивых и неустойчивых состояний равновесия.

Условие минимума U можно выразить в виде

$$\delta U = \delta T - P \delta f \geq 0.$$

Отсюда

$$P \leq \frac{\delta T}{\delta f}. \quad (1.3)$$

Заданной величине обобщенного перемещения f могут соответствовать различные деформированные состояния, т. е. различные значения x_i^0 , подчиняющиеся равенству

$$f = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0).$$

Поэтому заданному приращению δf соответствуют различные приращения потенциальной энергии внутренних сил

$$\delta T = \delta T(dx_1, dx_2, \dots, dx_n).$$

Очевидно, что неравенство (1.3) должно выполняться при всех возможных соотношениях между параметрами dx_i и может быть записано в виде

$$P \leq P_{\text{пред}} = \min (\delta T / \delta f).$$

В сплошном изотропном теле

$$T = \int \Pi dO, \quad (1.4)$$

где Π — удельная потенциальная энергия внутренних сил, являющаяся функцией главных деформаций $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ и координат точки x, y, z . Интегрирование в формуле (1.4) производится по всему объему тела O .

Варьируя выражение (1.4), получим

$$\delta T = \int \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon_i} d\varepsilon_i dO.$$

На основании принципа Лагранжа

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon_i} = \sigma_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.5)$$

и

$$\delta T = \int \sum_{i=1}^3 \sigma_i \delta \varepsilon_i dO. \quad (1.6)$$

Здесь $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные напряжения.

Величины $\delta \varepsilon_i(x, y, z)$ ($i = 1, 2, 3$) связаны между собой кинематически возможной формой деформации системы, соответствующей обобщенному перемещению f . Введем обозначение:

$$\varepsilon'_i = \delta \varepsilon_i / \delta f,$$

тогда

$$\delta T = \delta f \int \sum_{i=1}^3 \sigma_i \varepsilon'_i dO \quad (1.7)$$

и, согласно (1.3),

$$P \leq \int \sum_{i=1}^3 \sigma_i \varepsilon'_i dO. \quad (1.8)$$

Поскольку понятие потенциала внутренних сил определено здесь лишь для простого деформирования, то мы можем рассматривать лишь случаи сохранения формы деформации системы за все время деформирования по-

следней. Поэтому для геометрически линейно деформируемой системы можно положить

$$\varepsilon_i = \varepsilon'_i f \quad (i = 1, 2, 3)$$

и неравенство (1.8) записать в виде

$$P \leq \frac{1}{f} \int \sum_{i=1}^3 \sigma_i \varepsilon_i dO, \quad (1.9)$$

причем σ_i являются заданными функциями ε_i ($i = 1, 2, 3$) согласно (1.5).

Если система геометрически нелинейна, т. е. компоненты деформаций $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ нелинейно зависят от f , то следует положить

$$\delta \varepsilon_i = \frac{d \varepsilon_i}{df} \delta f \quad (i = 1, 2, 3),$$

и тогда получим из (1.6) вместо (1.7)

$$\delta T = \delta f \int \sum_{i=1}^3 \sigma_i \frac{d \varepsilon_i}{df} dO.$$

Считая справедливым закон простого деформирования, когда

$$\frac{1}{\varepsilon_i} \frac{d \varepsilon_i}{df} = c(f) \quad (i = 1, 2, 3),$$

будем иметь

$$\delta T = \delta f \int c(f) \sum_{i=1}^3 \sigma_i \varepsilon_i dO,$$

откуда

$$P \leq \int c(f) \sum_{i=1}^3 \sigma_i \varepsilon_i dO. \quad (1.10)$$

§ 2. Упруго- и жесткопластические тела

Удельную энергию внутренних сил в изотропном упруго-пластическом теле можно выразить через интегралы

$$\Pi = \int_0^{\varepsilon_i} \sigma_i d\varepsilon_i + \int_0^\theta \sigma_\theta d\theta, \quad (2.1)$$

16 ГЛ. 1. РАСЧЕТ ПЛИТ МЕТОДОМ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ

а полную энергию внутренних сил — интегралом от выражения (2.1), взятым по всему объему тела:

$$T = \int \Pi dO.$$

В формуле (2.1)

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

— интенсивность напряжений,

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} \quad (2.2)$$

— интенсивность деформаций,

$$\sigma_0 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$$

— среднее нормальное напряжение,

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

— объемная деформация, σ_1 , σ_2 , σ_3 и ε_1 , ε_2 , ε_3 — главные напряжения и главные деформации.

Обычно объемные деформации очень малы по сравнению с деформациями изменения формы, поэтому вторым членом в формуле (2.1) пренебрегают и она получает вид

$$\Pi = \int_0^{\varepsilon_i} \sigma_i d\varepsilon_i. \quad (2.3)$$

Полагая на основании равенства нулю объемной деформации

$$\varepsilon_3 = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2,$$

получаем выражение для интенсивности деформаций в виде

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2}. \quad (2.4)$$

Далее, для изотропного материала обычно считают, что интенсивность напряжений σ_i является функцией

только интенсивности деформаций ε_{ii} . Тогда на основании (2.3) и удельная энергия внутренних сил будет функцией только интенсивности деформаций

$$\Pi = \Pi(\varepsilon_{ii}). \quad (2.5)$$

При этом величины напряжений, согласно (1.5) и (2.5), будут равны

$$\sigma_i = \Pi'(\varepsilon_{ii}) \frac{\partial \varepsilon_{ii}}{\partial \varepsilon_i} \quad (i = 1, 2, 3),$$

или, с учетом (2.2),

$$\sigma_i = \frac{2}{3} \Pi'(\varepsilon_{ii}) (\varepsilon_i / \varepsilon_{ii}) \quad (i = 1, 2, 3).$$

Отсюда получаем

$$\sum_{i=1}^3 \sigma_i \varepsilon_i = \frac{2}{3} \Pi'(\varepsilon_{ii}) (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) / \varepsilon_{ii}$$

и, заменяя ε_3 через $-\varepsilon_1 - \varepsilon_2$,

$$\sum_{i=1}^3 \sigma_i \varepsilon_i = \Pi'(\varepsilon_{ii}) \varepsilon_{ii}. \quad (2.6)$$

При этом неравенство (1.9) получает вид

$$P \leq \frac{1}{f} \int \Pi'(\varepsilon_{ii}) \varepsilon_{ii} dO. \quad (2.7)$$

Для геометрически нелинейных систем, подставляя в формулу (1.10) равенство (2.6), получаем

$$P \leq \int c(f) \Pi'(\varepsilon_{ii}) \cdot \varepsilon_{ii} dO = \int c(f) \varepsilon_{ii} \sigma_{ii} dO. \quad (2.8)$$

При простом деформировании

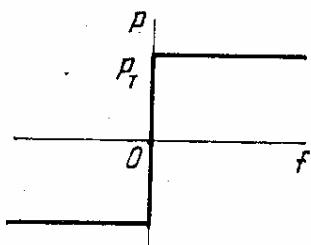
$$\frac{1}{\varepsilon_{ii}} \frac{d\varepsilon_{ii}}{df} = c(f),$$

и формула (2.8) приводится к виду

$$P \leq \int \frac{d\varepsilon_i}{df} \sigma_i dO. \quad (2.9)$$

Для жесткопластического материала принимают зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций в виде диаграммы Прандтля (рис. 1). Упругими деформациями здесь ввиду их малости пренебрегают, а интенсивность напряжений σ_i считают постоянной и равной σ_t — пределу текучести материала при простом растяжении.

Рис. 1.



Тогда, согласно (2.3),

$$\Pi = \sigma_t \varepsilon_i, \quad \Pi'(\varepsilon_i) = \sigma_t.$$

Формула (2.7) для геометрически линейных систем при этом переходит в

$$P \leq \frac{\sigma_t}{f} \int \varepsilon_i dO,$$

а формула (2.9) для нелинейно упругих систем — в формулу

$$P \leq \sigma_t \int \frac{d\varepsilon_i}{df} dO.$$

§ 3. Предельное равновесие пластинок

Расчет плоских пластинок на изгиб производится на основании гипотезы Кирхгофа о сохранении перпендикулярности нормалей к срединной поверхности пластиинки после ее деформации. Из этой гипотезы следует, что

$$\varepsilon_x = \kappa_x z, \quad \varepsilon_y = \kappa_y z, \quad \gamma_{xy} = 2\kappa_{xy} z. \quad (3.1)$$

Здесь ε_x , ε_y и γ_{xy} — составляющие тензора перемещений в плоскости, параллельной срединной поверхности пластиинки, z — расстояние от этой срединной поверхности, κ_x и κ_y — кривизны срединной поверхности после деформации пластиинки в направлениях осей x и y , равные при малых прогибах

$$\kappa_x = -\partial^2 w / \partial x^2, \quad \kappa_y = -\partial^2 w / \partial y^2,$$

κ_{xy} — кручение срединной поверхности пластиинки, равное

$$\kappa_{xy} = -\partial^2 w / \partial x \partial y,$$

w — прогиб пластиинки.

Выражение для интенсивности деформаций (2.4) напишем в произвольных прямоугольных осях x, y . Используя выражения

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \frac{\gamma_{xy}^2}{4}},$$

получаем

$$\varepsilon_i = \frac{2}{V^3} \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_x \varepsilon_y + 0,25 \gamma_{xy}^2},$$

а с учетом (3.1)

$$\varepsilon_i = \frac{2z}{V^3} \sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \kappa_x \kappa_y + \kappa_{xy}^2}.$$

Введя величину

$$\kappa_i = \frac{2}{V^3} \sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \kappa_x \kappa_y + \kappa_{xy}^2}, \quad (3.2)$$

получим выражение работы внутренних сил, приходящейся на элемент поверхности пластиинки

$$dT = -\sigma_t \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon_i dz dF = -\sigma_t \int_{-h/2}^{h/2} z dz \kappa_i dF = -m_t \kappa_i dF,$$

где $m_t = \sigma_t h^2 / 4$ — предельный погонный изгибающий момент в сечении пластиинки, h — толщина пластиинки, F — ее площадь.

Работа внешней нагрузки q равна

$$V = \int qw dF,$$

где интегрирование производится по всей площади пластиинки F .

Из равенств нулю суммы работ внешних и внутренних сил $T + V$ определяется предельная величина нагрузки $q = q_{\text{пр}}$.

Для получения верхней оценки предельной нагрузки можно задаваться приближенно функцией прогиба

$w(x, y)$, которая должна соответствовать условиям закрепления пластиинки. Истинной форме прогиба отвечает минимальное значение $q_{\text{пр}}$, определенное таким образом.

Можно также сформулировать данную задачу определения $q_{\text{пр}}$ и истинной формы прогиба пластиинки $w(x, y)$ как изопериметрическую вариационную задачу о минимуме интеграла

$$-T = \int m_t \kappa_i dF = \int m_t \sqrt{w_{xx}^2 + w_{yy}^2 + 2w_{xx}w_{xy} + w_{yy}^2} dF \quad (3.3)$$

при дополнительном условии

$$V = \int qw dF = \text{const.}$$

В качестве примера рассмотрим круглую симметрично нагруженную пластиинку, деформированное состояние которой осесимметрично и прогиб w является функцией только одного переменного r — расстояния от центра симметрии. В этом случае выражение для κ_i (3.2) получит вид

$$\kappa_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\kappa_r^2 + \kappa_\theta^2 + \kappa_r \kappa_\theta},$$

где κ_r и κ_θ — кривизны изогнутой поверхности пластиинки в направлениях радиуса r и линии, перпендикулярной радиусу. Считая прогибы малыми, имеем

$$\kappa_r = w'', \quad \kappa_\theta = w'/r.$$

При этом

$$\kappa_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{w''^2 + \frac{w'^2}{r^2} + \frac{w'w''}{r}}.$$

Работа внешних сил при осесимметричной нагрузке выражается формулой

$$V = 2\pi \int_0^R qwr dr, \quad (3.4)$$

а работа внутренних сил, согласно (3.3), — формулой

$$T = -2\pi m_t \int_0^R \kappa_i r dr = -\frac{4\pi}{\sqrt{3}} m_t \int_0^R \sqrt{w''^2 r^2 + w'' w' r + w'^2} dr. \quad (3.5)$$

Здесь R — радиус пластиинки.

Рассмотрим теперь случай пластинки, опертой по наружному круглому контуру и загруженной равномерно распределенной нагрузкой q . Представим прогибы функцией [96]

$$w = w_0(1 - r^n/R^n) \quad (n > 0). \quad (3.6)$$

Подставляя (3.6) в выражения (3.4), (3.5), получим

$$V = \pi R^2 q w_0 \frac{n}{n+2}, \quad T = -\frac{4\pi}{\sqrt{3}} m_t w_0 \sqrt{n^2 - n + 1}.$$

Отсюда, полагая $V + T = 0$,

$$q = q_{\text{пр}} = \frac{4m_t}{\sqrt{3} \cdot R^2} \frac{(n+2) \sqrt{n^2 - n + 1}}{n}.$$

Это выражение при $n = 1,147$ имеет минимум, равный

$$\min q_{\text{пр}} = 6,85 m_t / R^2 = 1,712 \sigma_t h^2 / R^2. \quad (3.7)$$

Точное решение [118] дает

$$q_{\text{пр}} = 1,615 h^2 \sigma_t / R^2,$$

что отличается от (3.7) на 6 %.

При нагрузке той же пластинки сосредоточенной центральной силой P работа внешних сил выразится произведением Pw_0 , и при форме прогиба (3.6) получаем

$$P_{\text{пр}} = -\frac{T}{w_0} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} m_t \sqrt{n^2 - n + 1}.$$

Минимум $P_{\text{пр}}$ будет при $n = 0,5$ и равен

$$\min P_{\text{пр}} = 2\pi m_t.$$

Формы прогиба пластинки (3.6) при $n = 0,5$ и $n = 1,147$ показаны на рис. 2.

При $n = 1$ получаем $P_{\text{пр}} = 4\pi m_t / \sqrt{3}$; пластинка при этом должна искривляться по конической поверхности.

Рассмотрим пластинку, опертую по квадратному контуру со стороной a . Пусть поверхность прогиба описывается формулой

$$w = \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{a}.$$

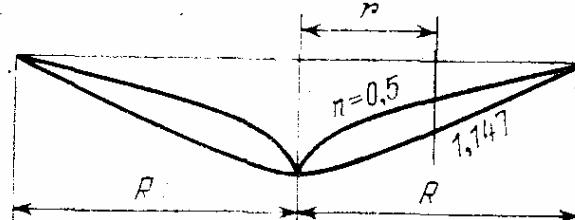


Рис. 2.

Для этой поверхности находим

$$\begin{aligned}\kappa_x &= -w_{xx} = \kappa_y = -w_{yy} = \frac{\pi^2}{a^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}, \\ \kappa_{xy} &= -w_{xy} = -\frac{\pi^2}{a^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a}, \\ \kappa_x^2 + \kappa_y^2 + 2\kappa_x\kappa_y + \kappa_{xy}^2 &= \\ &= \frac{\pi^4}{a^4} \left(3 \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{a} + \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{a} \right), \\ \kappa_n &= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{3 \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{a} + \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{a}}.\end{aligned}$$

Выражение (3.3)

$$T = \frac{2\pi^2 m_r}{\sqrt{3}a^2} \int_F \sqrt{3 \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{a} + \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{a}} dF \quad (3.8)$$

найдем при помощи численного интегрирования. Для грубого подсчета разобьем квадрат сеткой на 36 клеток и

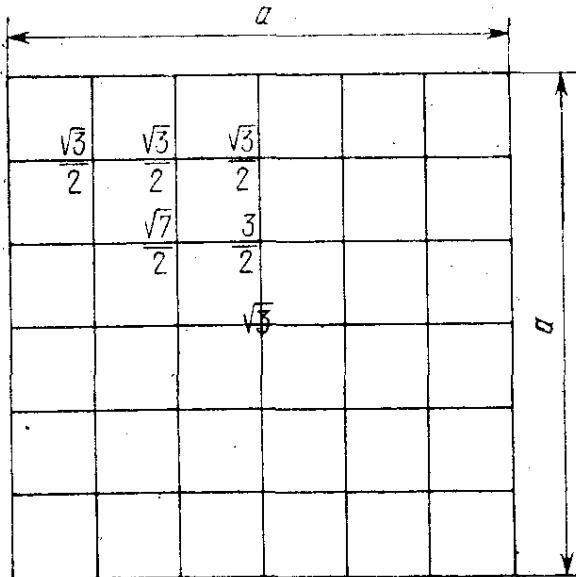


Рис. 3.

определим подынтегральную функцию в (3.8) в каждом узле сетки (рис. 3):

$$1. x = \frac{a}{6}, y = \frac{a}{6}; \sqrt{3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$2. \quad x = \frac{a}{3}, \quad y = \frac{a}{6}; \quad \sqrt{3 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$3. \quad x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{a}{6}; \quad \sqrt{3 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot 0} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$4. \quad x = \frac{a}{3}, \quad y = \frac{a}{3}; \quad \sqrt{3 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

$$5. \quad x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{a}{3}; \quad \sqrt{3 \cdot 1 \cdot \frac{3}{4} + 0} = \frac{3}{2}.$$

$$6. \quad x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{a}{2}; \quad \sqrt{3 \cdot 1 \cdot 1} = \sqrt{3}.$$

Теперь получаем

$$\begin{aligned} \int_F \sqrt{3 \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{a} + \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{a}} dF &\approx \\ &\approx \frac{16\sqrt{3} + 4\sqrt{7} + 4 \cdot 3}{2} + \sqrt{3} = 26,88; \\ -T &= \frac{2\pi^2 m_T}{\sqrt{3}a^2} \cdot \frac{26,88}{36} a^2 = 8,51 m_T. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Если пластина загружена в центре сосредоточенной силой P , то работа внешних сил будет равна

$$Pw\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = P \cdot 1.$$

Отсюда, приравняв ее (3.9), получаем

$$P_{np} = 8,51 m_T.$$

Для равномерно распределенной нагрузки $q = 1 = \text{const}$ работа внешних сил равна

$$V = q \int_F w dF = q \int_0^a \int_0^a \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} dx dy = \frac{4qa^2}{\pi^2},$$

откуда следует

$$q_{np} = \frac{8,51 \pi^2 m_T}{4a^2} = \frac{21,00 m_T}{a^2}.$$

Полученные здесь значения пагрузок дают предельную их оценку сверху. Для уточнения расчета надо ввести в функцию прогиба один или несколько параметров, по которым затем произвести минимизацию предельной нагрузки.

§ 4. Сосредоточенные кривизны

Удобные приближенные решения для различных конфигураций, загружений и опираний пластинки можно получать, рассматривая формы изгиба с сосредоточенными кривизнами, являющимися двугранными углами перелома поверхности пластиинки. Заметим, что сосредоточенное кручение поверхности не может быть осуществлено без нарушения условия неразрывности деформации и поэтому должно быть исключено из рассмотрения. Кроме того, нетрудно показать, что кривизны, сосредоточенные в точках и образующие не двугранные, а многогранные углы дают значения работы внутренних сил бесконечно малые по сравнению с работой внутренних сил на двугранных углах перелома поверхности пластиинки.

Метод расчета пластиинок, основанный на рассмотрении форм их деформаций с сосредоточенными кривизнами был впервые предложен Ингерслевым [148] в 1921 г. и подробно развит Иогансеном (1931 г.) [150—154] применительно к железобетонным пластиинам. Этот метод широко применяется в практических расчетах.

В ребрах перелома (цилиндрических шарнирах текучести) материал работает в условиях плоской деформации и, если расположить ось x вдоль ребра, то $\kappa_x = 0$. При этом из (3.2) получим

$$\kappa_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \kappa_y.$$

Считая ширину ребра перелома Δ бесконечно малой, полагаем, что

$$\kappa_y = \theta/\Delta = \infty,$$

где θ — двугранный угол перелома.

Работу внутренних сил, приходящуюся на элемент длины ребра перелома ds , получим, положив в (3.3)

$$dF = \Delta ds.$$

При этом

$$dT = -m_t \kappa_n \Delta ds = -\frac{2}{\sqrt{3}} m_t \kappa_y \Delta ds = -\frac{2}{\sqrt{3}} m_t \theta ds.$$

Множитель $2/\sqrt{3}$ можно включить в условную величину предельного момента:

$$m_t^* = \frac{2}{\sqrt{3}} m_t = \sigma_t h^2 / 2 \sqrt{3};$$

тогда полная работа внутренних сил будет равна

$$T = - \sum_0^{l_i} m_t^* \theta_i ds_i,$$

где суммирование распространяется на все ребра перелома.

Если пластиинка имеет постоянную толщину и ребра перелома прямолинейные, то $m_t^* = \text{const}$, $\theta_i = \text{const}$ и

$$T = - \sum m_t^* \theta_i l_i,$$

где l_i — длина i -го ребра перелома; суммирование производится по всем ребрам.

§ 5. Условия текучести в металлических пластинах

Классическое условие текучести Губера — Генки — Мизеса, хорошо подтверждающееся для металлов экспериментально, заключается в постоянстве интенсивности напряжений. Через главные напряжения σ_1 , σ_2 , σ_3 это условие записывается в виде

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_t^2, \quad (5.1)$$

где σ_t — предел текучести при одноосном напряженном состоянии.

Для плоского напряженного состояния, которое имеет место в пластинах, $\sigma_3 = 0$ и (5.1) получает вид

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_t^2. \quad (5.2)$$

Переходя к координатам x, y , используем формулы

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2};$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2};$$

тогда вместо (5.2) получим

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_t^2. \quad (5.3)$$

В предельном состоянии изотропной пластиинки

$$m_x = \sigma_x h^2/4, \quad m_y = \sigma_y h^2/4, \quad m_{xy} = \tau_{xy} h^2/4, \quad m_t = \sigma_t h^2/4. \quad (5.4)$$

Поэтому для пластиинки вместо (5.3) можно написать

$$m_x^2 + m_y^2 - m_x m_y + 3m_{xy}^2 = m_t^2.$$

Условия текучести Треска — Сен-Венана ограничивают величину касательных напряжений. В случае плоского напряженного состояния они имеют вид

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm \sigma_t, \quad \sigma_1 = \pm \sigma_t, \quad \sigma_2 = \pm \sigma_t. \quad (5.5)$$

Эти простые условия, выраженные шестью равенствами, можно свести к одному более сложному равенству

$$[\sigma_t^2 - (\sigma_1 - \sigma_2)^2] (\sigma_t^2 - \sigma_1^2) (\sigma_t^2 - \sigma_2^2) = 0,$$

или в развернутой форме

$$\begin{aligned} \sigma_t^6 - 2\sigma_t^4 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2) + \\ + \sigma_t^2 (\sigma_1^4 - 2\sigma_1^3 \sigma_2 + 3\sigma_1^2 \sigma_2^2 - 2\sigma_1 \sigma_2^3 + \sigma_2^4) + \sigma_1^4 \sigma_2^2 - \\ - 2\sigma_1^3 \sigma_2^3 + \sigma_1^2 \sigma_2^4 = 0. \end{aligned}$$

Последнее равенство можно написать также для компонентов напряжений в декартовых координатах x, y :

$$\begin{aligned} \sigma_t^6 - 2\sigma_t^4 (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2) + \sigma_t^2 [\sigma_x^4 - 2\sigma_x^3 \sigma_y + \\ + 3\sigma_x^2 \sigma_y^2 - 2\sigma_x \sigma_y^3 + \sigma_y^4 - 6\tau_{xy}^2 (\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2) + 9\tau_{xy}^4] + \\ + \sigma_x^4 \sigma_y^2 - 2\sigma_x^3 \sigma_y^3 + \sigma_x^2 \sigma_y^4 - 2\tau_{xy}^2 (\sigma_x^3 \sigma_y - 4\sigma_x^2 \sigma_y^2 + \sigma_x \sigma_y^3) + \\ + \tau_{xy}^4 (\sigma_x^2 - 10\sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2) + 4\tau_{xy}^6 = 0. \end{aligned}$$

Обычно в таком виде условия Треска не используются, а берут первое равенство (5.5), преобразуя его к декартовым координатам:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = \sigma_t^2;$$

остальные же два равенства (5.4) приводятся к виду

$$(\sigma_t - \sigma_x)(\sigma_t - \sigma_y) = \tau_{xy}^2$$

или

$$\sigma_t^2 - \sigma_t(\sigma_x + \sigma_y) + \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2 = 0.$$

Для перехода к пластинкам, работающим на изгиб, значения σ_x , σ_y , τ_{xy} и σ_t следует заменить на m_x , m_y , m_{xy} и m_t по формулам (5.4).

§ 6. Ассоциированный закон текучести

Этот закон часто называют постулатом. Одним из первых его сформулировал Драккер [143]. Строгого доказательства этого закона долгое время не существовало. Здесь мы покажем, что данный закон является следствием принципа двойственности статических и геометрических уравнений, справедливого для консервативных систем [107].

Пусть дано условие текучести сплошного трехмерного тела

$$F(s_1, s_2, \dots, s_6) = 0, \quad (6.1)$$

где

$$s_1 = \sigma_x, \quad s_2 = \sigma_y, \quad s_3 = \sigma_z, \quad s_4 = \tau_{xy}, \quad s_5 = \tau_{yz}, \quad s_6 = \tau_{zx}.$$

В шестимерном пространстве $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6)$ условие (6.1) описывает некоторую гиперповерхность (не обязательно выпуклую).

Возьмем какую-нибудь точку на этой поверхности $(s_1^0, s_2^0, s_3^0, s_4^0, s_5^0, s_6^0)$ и разложим функцию (6.1) в ряд Тейлора в окрестности этой точки, причем ограничимся линейными членами разложения:

$$\sum_{i=1}^6 F_{s_i}^0 (s_i - s_i^0) = 0. \quad (6.2)$$

Здесь

$$F_{s_i}^0 = \frac{\partial F}{\partial s_i}(s_1^0, s_2^0, \dots, s_6^0).$$

Уравнение (6.2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} F_{s_1}^0 \cdot s_1 + F_{s_2}^0 \cdot s_2 + \dots + F_{s_6}^0 \cdot s_6 &= \\ = F_{s_1}^0 \cdot s_1^0 + F_{s_2}^0 \cdot s_2^0 + \dots + F_{s_6}^0 \cdot s_6^0 &= C = \text{const.} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Постоянная C представляет собой некоторое обобщенное напряжение, действующее на площадке, где $s_i = s_i^0$ ($i = 1, 2, \dots, 6$). Этому обобщенному напряжению соответствует какая-то обобщенная деформация B , на которой напряжение C производит работу CB . Очевидно, что

$$CB = s_1 e_1 + s_2 e_2 + \dots + s_6 e_6,$$

где

$$\begin{aligned} e_1 &= \varepsilon_x, \quad e_2 = \varepsilon_y, \quad e_3 = \varepsilon_z, \\ e_4 &= \gamma_{xy}, \quad e_5 = \gamma_{yz}, \quad e_6 = \gamma_{zx}. \end{aligned}$$

Деформации B и e_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) считаем бесконечно малыми, тогда доказательство будет справедливо и для геометрически нелинейных систем.

Составим матрицу ограничений данной задачи, заключающихся только в одной формуле (6.3):

	s_1	s_2	\dots	s_6	
B	$F_{s_1}^0$	$F_{s_2}^0$	\dots	$F_{s_6}^0$	C
	e_1	e_2	\dots	e_6	

В верхней строке стоят напряжения s_i , в нижней — взаимные с ними деформации e_i . Транспонируя матрицу согласно принципу двойственности (см. [107]), получим

$$BF_{s_i}^0 + e_i = 0, \quad e_i = -BF_i^0 \quad (i = 1, 2, \dots, 6). \quad (6.4)$$

Сопоставляя выражения (6.3) и (6.4), замечаем, что вектор деформаций

$$e_1 = -BF_{s_1}^0, \quad e_2 = -BF_{s_2}^0, \quad \dots, \quad e_6 = -BF_{s_6}^0 \quad (6.5)$$

в пространстве (e_1, e_2, \dots, e_6), будучи перенесен в пространство (s_1, s_2, \dots, s_6), станет вектором

$$s_1 = -BF_{s_1}^0, s_2 = -BF_{s_2}^0, \dots, s_6 = -BF_{s_6}^0$$

нормальным к плоскости (6.3), а следовательно, и к поверхности (6.1) в точке $(s_1^0, s_2^0, \dots, s_6^0)$.

В этом заключается ассоциированный закон текучести, который имеет довольно общий характер. Например, для дискретных систем шестимерное пространство можно заменить многомерным по числу внутренних усилий,

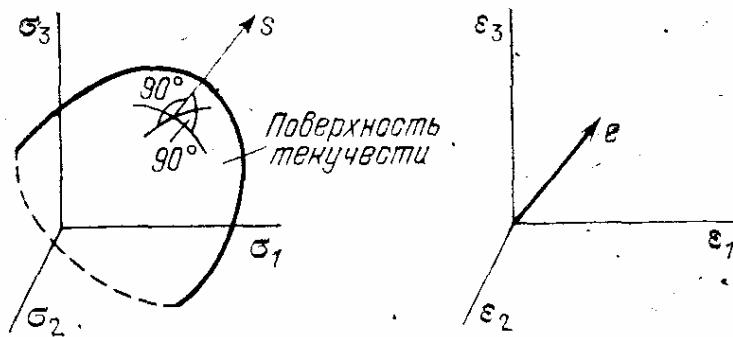


Рис. 4.

входящих в условие текучести. Для изотропных тел условие текучести можно выразить через три главных напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. При этом ассоциированный закон получает простое геометрическое представление в пространствах $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ и $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ третьего измерения (рис. 4).

§ 7. Железобетонные изотропные пластиинки

Обычно железобетонные плиты армируются одной или двумя сетками, в которых арматура идет в двух взаимно перпендикулярных направлениях. В пространственно работающих плитах часто арматура в обоих направлениях укладывается одинаковая. В таких случаях можно говорить об изотропно армированной плите.

Действительно, нетрудно показать, что при этом предельный изгибающий момент

$$m_T = \sigma_a f_a z,$$

где σ_a — предел текучести арматуры, f_a — площадь сечения арматуры, приходящейся на единицу длины сечения, z — плечо пары внутренних сил, отсчитываемое от центра тяжести эпюры σ_b — сжимающих напряжений в бетоне (рис. 5), будет одинаковым для всех направлений сечения плиты. Определим этот момент для сечения, проведенного под углом α к оси x , вдоль которой уложена

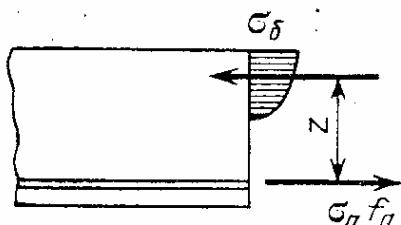


Рис. 5.

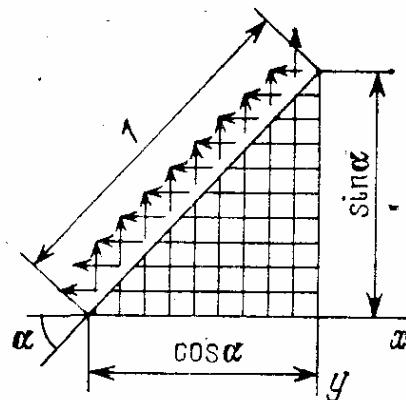


Рис. 6.

продольная арматура (рис. 6). Считая, что и продольная, и поперечная арматуры находятся в состоянии текучести, получаем, проектируя усилия в арматуре па ось, перпендикулярную сечению:

$$m_T(\alpha) = \sigma_a f_a \sin^2 \alpha \cdot z_x + \sigma_a f_a \cos^2 \alpha \cdot z_y.$$

Плечи z_x и z_y пар внутренних сил, вообще говоря, различны, так как продольная и поперечная арматуры уложены в разных уровнях. Однако эта разница невелика, и мы можем положить $z_x = z_y$ или же допустить, что арматура, расположенная ближе к срединной поверхности пластинки уложена несколько чаще (что было бы рационально), так что $f_{ax} z_x = f_{ay} z_y$. При этом окажется, что

$$m_T(\alpha) = m_T = \text{const}$$

и плита в отношении предельных изгибающих моментов будет изотропной. (На самом деле при изломе плиты в косом направлении предельный момент $m_T(\alpha)$ будет несколько отличаться от m_T вследствие искривления арматуры и смятия под ней бетона (рис. 7). Этот эффект мы здесь не будем учитывать.)

Согласно сказанному в предыдущем параграфе условия текучести для плит, одинаково армированных в двух взаимно перпендикулярных направлениях верхней и нижней сетками арматуры, можно принять в виде

$$|m|_{\max} = m_t, \quad (7.1)$$

где $|m|_{\max}$ — максимальный по абсолютной величине изгибающий момент, действующий по любому направлению, m_t — предельное значение этого момента.

Если пластина имеет одиночное армирование, т. е. одну нижнюю сетку арматуры, то, считая бетон не воспринимающим растягивающие напряжения, будем иметь условия текучести

$$m_{\max} = m_t, \quad m_{\min} = 0. \quad (7.2)$$

Условия (7.1) и (7.2) в координатных осях (m_1 , m_2), где m_1 и m_2 — главные изгибающие моменты, изображаются квадратами (рис. 8). Удельная работа внутренних сил в состоянии текучести здесь будет равна

$$\Pi(\kappa_1, \kappa_2) = m_t(|\kappa_1| + |\kappa_2|)$$

при двустороннем армировании и

$$\Pi(\kappa_1, \kappa_2) = \frac{m_t}{2} (\kappa_1 + |\kappa_1| + \kappa_2 + |\kappa_2|)$$

при одностороннем. В дальнейшем все рассуждения будем вести для пластины с симметричным двусторонним армированием.

Полная работа внутренних сил для всей пластины равна

$$T = - \int_F m_t (|\kappa_1| + |\kappa_2|) dF.$$

Работа внутренних сил по-прежнему будет равна

$$V = \int_F qw dF. \quad (7.3)$$

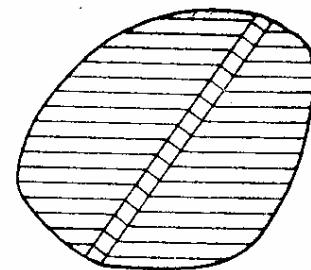


Рис. 7.

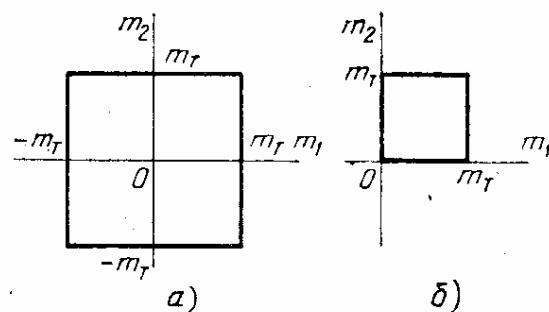


Рис. 8.

Для предельного состояния требуется, чтобы при заданном V абсолютное значение T имело минимальное значение или чтобы при заданном T значение V было максимальным.

Допустим вначале, что кривизны κ_1 и κ_2 имеют везде одинаковый знак, который без ограничения общности можно считать положительным. Тогда при $m_t = \text{const}$

$$T = -m_t \int_F \nabla^2 w dF = -m_t \oint \frac{\partial w}{\partial n} ds. \quad (7.4)$$

В равенстве (7.4) поверхностный интеграл преобразован в контурный, $\partial w / \partial n$ — значения угла наклона деформированной пластиинки на ее контуре по нормалям к последнему.

Задаваясь величинами $\partial w / \partial n$ на контуре, мы величину T однозначно определим. Для того чтобы при этом

получить максимум V при положительной везде нагрузке q , надо прогибам w внутри пластиинки присвоить максимальное значение. Это приведет к поверхности отрицательной гауссовой кривизны (рис. 9), для которой формула (7.4)

будет уже несправедлива.

Положим теперь, что кривизны κ_1 и κ_2 имеют разные знаки. Тогда гауссова кривизна пластиинки будет отрицательной, а работа внутренних сил выразится формулой

$$T = - \int_F m_t |\kappa_1 - \kappa_2| dF.$$

Замечая, что

$$\kappa_{1,2} = \frac{1}{2} [w_{xx} + w_{yy} \pm \sqrt{(w_{xx} - w_{yy})^2 + 4w_{xy}^2}],$$

получим

$$T = - \int_F m_t \sqrt{(w_{xx} - w_{yy})^2 + 4w_{xy}^2} dF.$$

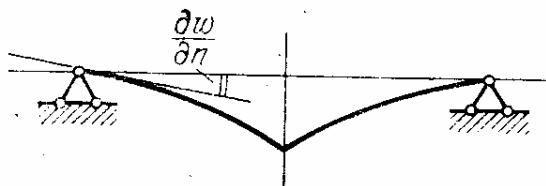


Рис. 9.

Добиваясь, чтобы при заданном V (7.3) величина $|T|$ имела максимальное значение, следует положить

$$w_{xx} - w_{yy} = 0, \quad w_{xy} = 0;$$

при этом $w_{xx} = -\kappa_1 = w_{yy} = -\kappa_2$, и мы будем иметь поверхность положительный гауссовой кривизны.

Итак, допуская, что $\kappa_1 \kappa_2 > 0$, получим, что экстремальное свойство, характеризующее состояние предельного равновесия пластиинки, достигается за пределами этого допущения, точно так же, как и при альтернативном допущении $\kappa_1 \kappa_2 < 0$. Отсюда следует, что состоянию предельного равновесия должно удовлетворять пограничное значение гауссовой кривизны $\kappa_1 \kappa_2 = 0$ во всех точках пластиинки, т. е. деформированная поверхность пластиинки должна состоять из участков нулевой гауссовой кривизны. Другими словами, изогнутая поверхность пластиинки должна быть линейчатой и удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\kappa_1 \kappa_2 = w_{xx} w_{yy} - w_{xy}^2 = 0.$$

§ 8. Полигональные шарнирно опертые по контуру пластиинки [104]

Рассмотрим полигональную пластиинку, шарнирно опертую по контуру и нагруженную произвольной положительной нагрузкой. Форма разрушения такой пластиинки показана на рис. 10. Обозначим углы наклона элементов пластиинки по направлениям, перпендикулярным сторонам опорного контура через ψ_i . Тогда вместо (7.4) получим

$$T = -m_t \sum \psi_i l_i \quad \left(\psi_i = \frac{\partial w}{\partial n_i} \right), \quad (8.1)$$

где l_i — длина i -й стороны опорного контура. С другой стороны, прогибы w поверхности, получившей вид полого-го многогранника, равны

$$w(x, y) = \psi_k z_k, \quad (8.2)$$

где z_k — расстояние от рассматриваемой точки (x, y) до стороны опорного контура, относящейся к той грани

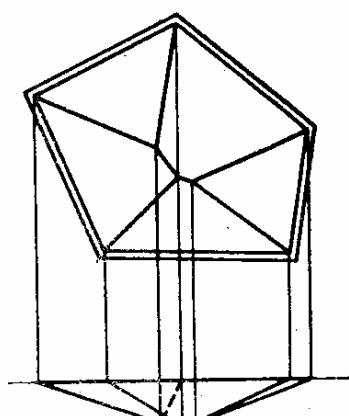


Рис. 10.

поверхности пластинки, где расположена точка (x, y) , k — номер этой грани.

Подставив (8.2) в выражение работы внешних сил (7.3), найдем, что

$$V = \sum \psi_i S_i, \quad (8.3)$$

где S_i — статический момент нагрузки на i -й грани деформированной поверхности, взятый относительно стороны l_i опорного контура.

Условия максимума $V + T$ выразятся теперь в виде

$$\sum \psi_i (S_i - m_t l_i) = \max. \quad (8.4)$$

Для реализации этого условия необходимо приравнять нулю частные производные по ψ_i от левой части выражения (8.4)

$$S_i - m_t l_i + \sum \psi_i \frac{\partial S_i}{\partial \psi_i} = 0.$$

Учитывая, что углы ψ_i являются малыми величинами, в начальной стадии разрушения пластиинки их можно считать стремящимися к нулю, и тогда получим простое условие

$$S_i / l_i = m_t = \text{const.} \quad (8.5)$$

Таким образом, действительная форма разрушения полигональной пластиинки должна обладать тем свойством, что отношение статических моментов нагрузки на каждой грани деформированной поверхности, взятых относительно соответствующих сторон опирания, S_i к длине этой стороны l_i должно быть одинаковым для всех граней. Отметим, что в пластиинке, загруженной силами одного направления, невозможна форма разрушения с гранями, контур которых целиком заключен внутри опорного контура (рис. 11, а). Действительно, продолжив плоскости периферийных граней до взаимных пересечений, как показано на рис. 11, б, получим форму, для которой работа внутренних сил имеет прежнее значение (8.1), поскольку углы ψ_i не изменились, а работа внешних сил (7.3) увеличилась за счет увеличения общего объема эпюры прогибов. Следовательно, вторая форма разрушения (рис. 11, б) будет ближе к истинной и потребует меньшей величины предельной нагрузки.

Из полученного общего критерия (8.5) можно сделать следующие выводы для частных случаев загружения пластиинки.

Если пластиинка загружена сосредоточенной силой, то форма разрушения должна иметь вид пологой пирамиды

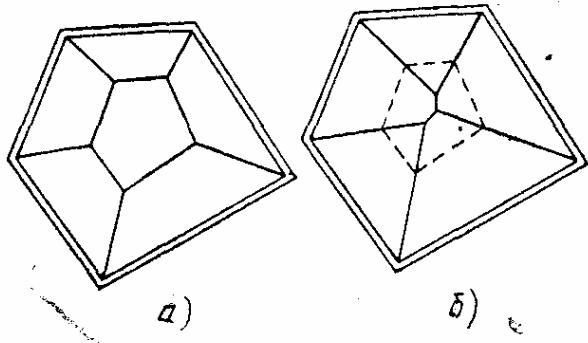


Рис. 11.

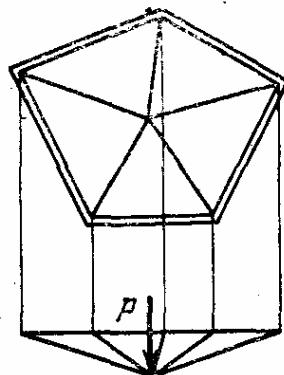


Рис. 12.

с вершиной в точке приложения силы (рис. 12). В противном случае статический момент нагрузки на отдельных гранях будет равен нулю, что противоречит условию (8.5).

Если пластиинка нагружена равномерной нагрузкой, то форма разрушения в виде пологой пирамиды возможна лишь в том случае, если перпендикуляры, опущенные из вершины пирамиды на все стороны контура, будут равны

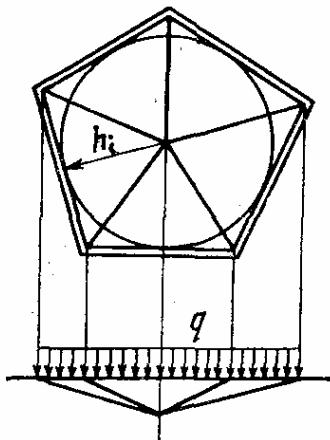


Рис. 13.

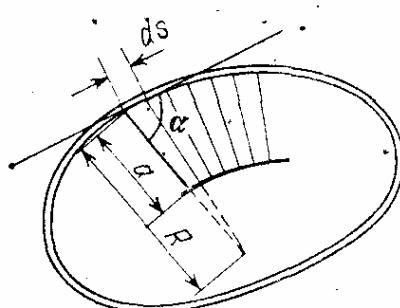


Рис. 14.

между собой, т. е. если в полигональный контур описания можно вписать круг (рис. 13). Это следует из условия, что для треугольной грани

$$S_i = h_i^2 l_i q / 6,$$

где h_i — высота треугольника с основанием l_i .

Для криволинейного контура опирания поверхность пластиинки может быть представлена в виде ряда бесконечно малых граней, имеющих форму четырехугольника с основанием ds и углом наклона боковых сторон к основанию α (рис. 14). Обозначив длину боковых сторон через a , а расстояние от опорного контура до точки пересечения боковых сторон грани через R , получим из (8.5) при $q = \text{const}$

$$l_i = ds,$$

$$S_i = q \, ds \left(\frac{a^2}{6} + \frac{R - a}{R} \frac{a^2}{3} \right) \sin^2 \alpha = \frac{qa^2}{6} \left(3 - \frac{2a}{R} \right) \sin^2 \alpha \, ds.$$

Отсюда следует, что

$$a^2 (3 - 2a/R) \sin^2 \alpha = 6m_t/q = \text{const.}$$

При использовании критерия (8.5) следует иметь в виду иные формы разрушения шарнирно опертой пластиинки, в которых деформируется не вся ее поверхность,

а лишь часть, ограниченная замкнутым шарниром (рис. 15). Для этой части следует исходить из условия разрушения пластиинки, заделанной по контуру. При этом следует учитывать появление моментов другого знака по контуру области разрушения.

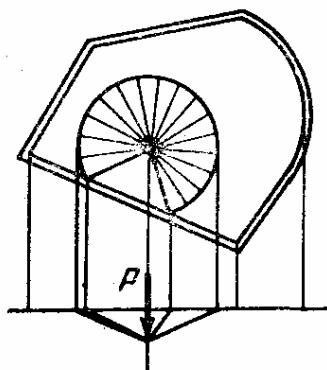


Рис. 15.

Рассмотрим железобетонную пластиинку, заделанную по опорному контуру и армированную двумя сетками арматуры так, что предельный положительный момент равен m_t , а предельный отрицательный момент — m'_t . В частном случае отсутствия верхней сетки арматуры $m'_t = 0$.

В заделанной пластиинке к работе внутренних сил прибавится величина

$$T' = -m'_t \oint \frac{\partial w}{\partial n} \, ds,$$

а общая величина работы внутренних сил будет равна

$$T = -(m_t + m'_t) \oint \frac{\partial w}{\partial n} \, ds.$$

Так как это выражение отличается от выражения для работы внутренних сил в шарнирно опертой пластинке лишь постоянным множителем, то все выводы первой части настоящего параграфа распространяются автоматически на пластинки, заделанные по контуру. Отличием здесь является то, что контур, ограничивающий зону разрушения, может не совпадать с опорным контуром, а находиться полностью или частично внутри него.

Предположим, что зона разрушения ограничена полигональным контуром, удовлетворяющим условию (8.5). Истинное положение этого контура найдется из условия

$$S_i/l_i = \max,$$

так как именно по этому контуру при постепенном пропорциональном возрастании нагрузки раньше всего может произойти разрушение.

Возвращаясь к случаю разрушения всей поверхности пластинки (шарнирно опертой или заделанной), получим простой способ двусторонней оценки величины разрушающей нагрузки. Представим функцию в виде

$$q = q_0 \xi(x, y),$$

где q_0 — коэффициент пропорциональности, подлежащий определению; $\xi(x, y)$ — заданная функция, соответствующая единичной нагрузке $q_0 = 1$.

Работа внешних сил V выразится при этом, согласно (8.3), формулой

$$V = q_0 \sum \psi_i S'_i,$$

где S'_i — статический момент, относящийся к единичной нагрузке.

Работа внутренних сил T остается прежней (8.1).

Из равенства $V = -T$ получаем

$$q_0 = m_t \sum \psi_i l_i / \sum \psi_i S'_i.$$

Очевидно, что минимум q_0 достигается при выполнении критерия (8.5), который в данном случае приобретает вид

$$l_i/S'_i = \text{const.}$$

Сравним истинную форму разрушения, удовлетворяющую критерию (8.5), с какой-либо другой, отличающейся иным очертанием граней поверхности разрушения.

В этой второй форме площадки, поворачивающиеся вокруг каждой из сторон опорного контура, будут иные, причем одни из них будут больше, а другие меньше соответствующих площадей в истинной форме разрушения. То же можно сказать и о статических моментах нагрузки, расположенной на частях пластинки, относящихся к каждой стороне опорного контура. А так как длины сторон в обеих формах разрушения одинаковы, то во второй форме разрушения некоторые из величин l_i/S_i окажутся больше, а некоторые меньше того одинакового для всех сторон значения l_i/S_i , которое имеет место в истинной форме разрушения.

Для любой другой формы разрушения, состоящей из плоских элементов, вращающихся вокруг сторон опорного контура, на основании сказанного будут справедливы неравенства

$$\min l_i/S_i \leq q_0/m_T \leq \max l_i/S_i. \quad (8.6)$$

Таким образом, получаем возможность простой двусторонней оценки величины предельной нагрузки.

Результаты данного параграфа были получены впервые в работе [104].

§ 9. Пластинки с отверстиями

При наличии одного или нескольких отверстий в пластинке (рис. 16) переход от интеграла по площади к



Рис. 16.

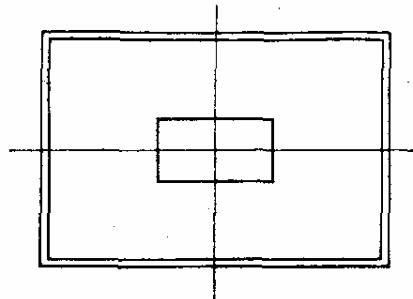


Рис. 17.

интегралу по контуру в формуле (7.4) должен быть произведен следующим образом:

$$\frac{T}{m_T} = \int_F \nabla^2 w \, dF = \oint_{S_H} \frac{\partial w}{\partial n_H} \, ds_H + \sum_B \oint_{S_B} \frac{\partial w}{\partial n_B} \, ds_B.$$

Здесь первый интеграл берется по наружному контуру пластиинки, а интегралы, стоящие под знаком суммы — по контуру отверстий. Обход контуров следует производить так, чтобы пластиинка находилась справа, т. е. для

наружного контура по часовой стрелке, а для контура отверстий — против часовой стрелки.

Рассмотрим, например, шарнирно опертую по контуру прямоугольную пластиинку с прямоугольным же отверстием в центре (рис. 17). Здесь следует рассмотреть две формы разру-

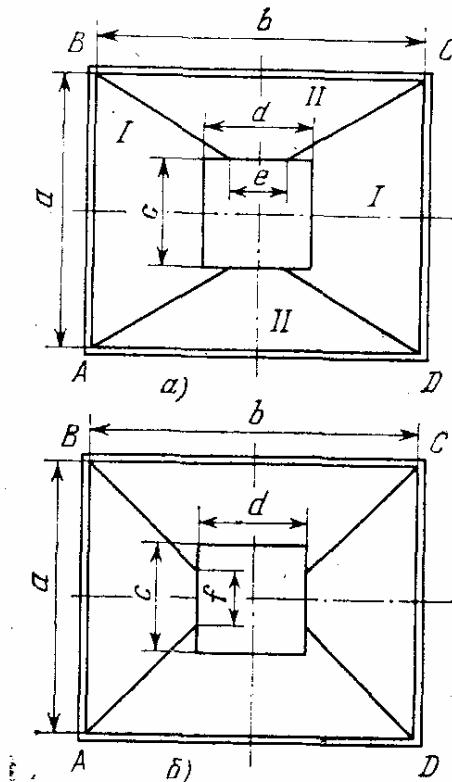


Рис. 18.

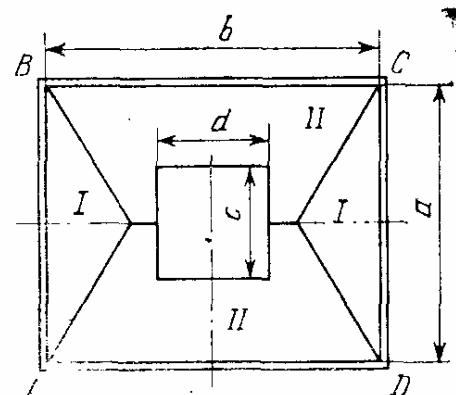


Рис. 19.

шения, показанные на рис. 18, *a* и *б*. Для первой формы разрушения (рис. 18, *a*) работа внутренних сил равна

$$T = 2(\psi_1 a - \psi_1 c + \psi_2 b - \psi_2 d) = 2\psi_1(a - c) + 2\psi_2(b - d),$$

где ψ_1 и ψ_2 — углы наклона граней *I* и *II*, а работа внешних сил равна

$$V = 2(S_1\psi_1 + S_2\psi_2),$$

где S_1 и S_2 — статические моменты внешней нагрузки, расположенной на гранях *I* и *II*, соответственно относительно линий *AB* и *BC*. Длину *e* следует определить из условия, аналогичного (8.5):

$$(a - c)/S_1 = (b - e)/S_2. \quad (9.1)$$

Если условие (9.1) нельзя соблюсти, то следует испытать форму разрушения, показанную на рис. 18, *б*, для которой

должно быть

$$(a - f)/S_1 = (b - d)S_2. \quad (9.2)$$

Возможна также форма разрушения, показанная на рис. 19, для которой нужно удовлетворить условию

$$a/S_1 = (b - d)S_2. \quad (9.3)$$

В зависимости от соотношений размеров пластиинки и отверстия можно выполнить лишь одно из условий (9.1), (9.2) и (9.3), которое и определяет действительную форму разрушения.

Если пластиинка не шарнирно оперта, а заделана по контуру, то условия (9.1)–(9.3) получат вид

$$\begin{aligned} [(1+k)a - c]/S_1 &= [(1+k)b - e]/S_2, \\ [(1+k)a - f]/S_1 &= [(1+k)b - d]/S_2, \\ (1+k)a/S_1 &= [(1+k)b - d]/S_2, \end{aligned}$$

где

$$k = m'_T/m_T.$$

§ 10. Ортотропное армирование плиты

Часто железобетонные плиты армируются различно в направлениях оси x и оси y . Это проявляется как в различном количестве арматуры, укладываемой в этих направлениях, так и в том, что уровень расположения арматурных стержней ввиду их взаимного пересечения оказывается различным для различных направлений. Такие плиты в отношении их расчета по предельному равновесию оказываются ортотропными.

Пусть предельный изгибающий момент в направлении оси x равен m_x , а в направлении оси y — m_y . Тогда работа внутренних сил при пластическом изгибе плиты равна

$$T = - \iint_F (m_x |w_{xx}| + m_y |w_{yy}|) dx dy. \quad (10.1)$$

Работа внешних сил равна, как и ранее,

$$V = \iint_F q w dx dy. \quad (10.2)$$

Введем новые независимые переменные

$$\xi = x/\sqrt{m_x}, \quad \eta = y/\sqrt{m_y}. \quad (10.3)$$

Тогда выражения (10.1) и (10.2) преобразуются в следующие:

$$T = -\sqrt{m_x m_y} \iint_F \left(\left| \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right| + \left| \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right| \right) d\xi d\eta,$$

$$V = \sqrt{m_x m_y} \iint_{F'} q w \, d\xi \, d\eta.$$

Интегрирование здесь производится по преобразованной площади F' , в которую переходит площадь F после линейного преобразования координат (10.3).

Приравнивая сумму работ внешних и внутренних сил нулю, получим условие предельного равновесия

$$\iint_{F'} \left(\left| \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right| + \left| \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right| \right) d\xi d\eta = \iint_{F'} q w \, d\xi \, d\eta.$$

Таким образом, задача расчета ортотропной плиты сводится к расчету изотропной плиты, контур которой получен из контура заданной плиты при помощи линейного преобразования (10.3), причем предельный изгибающий момент в приведенной изотропной плите считается равным единице. Нагрузка q здесь считается отнесенной к единице поверхности заданной плиты.

Г л а в а 2

РАСЧЕТ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПЛАСТИНОК НА ДЕЙСТВИЕ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ

§ 11. Общее решение [93]

Выше было установлено, что форма разрушения железобетонной пластинки, нагруженной сосредоточенной силой и шарнирно опертой по контуру, должна иметь вид пологой пирамиды с вершиной в точке приложения силы. Если контур пластинки не полигональный, а криволинейный, то форма разрушения должна представлять собой пологий конус. Высота пирамиды или конуса, т. е. прогиб под силой P в состоянии текучести является неопределенной величиной, и его можно принимать за единицу. При этом работа внешних сил V равна самой силе P .

Найдем теперь работу внутренних сил

$$T = -m_t \sum \theta_i l_i \quad (11.1)$$

плиты, шарнирно опертой по полигональному контуру.

Для определения двугранного угла θ_i проводим через точку C приложения сосредоточенной силы плоскость, перпендикулярную к линии перелома (рис. 20). Эта плоскость пересечет первоначальную горизонтальную плоскость пластинки по линии AB , перпендикулярной к проекции ребра OC . Прогиб в точке C равен единице, а в точках A и B — нулю.

Угол перелома в точке C линии AB равен двугранному углу θ_i , поскольку он считается малым, расстояние от точки C до линии AB по вертикали можно принять равным вертикальному прогибу в точке C , т. е. единице. При этом получим

$$\theta_i = 1/a_i + 1/b_i,$$

где a_i и b_i — отрезки линии AB .

С другой стороны, из рис. 20 имеем

$$a_i = l_i \operatorname{tg} \alpha_i, \quad b_i = l_i \operatorname{tg} \beta_i.$$

Поэтому

$$\theta_i = (\operatorname{ctg} \alpha_i + \operatorname{ctg} \beta_i)/l_i.$$

Подставив это выражение в (11.1), получим окончательно

$$P = m_t \sum (\operatorname{ctg} \alpha_i + \operatorname{ctg} \beta_i), \quad (11.2)$$

где α_i и β_i — углы, образуемые проекциями линий перелома со сторонами периметра пластиинки.

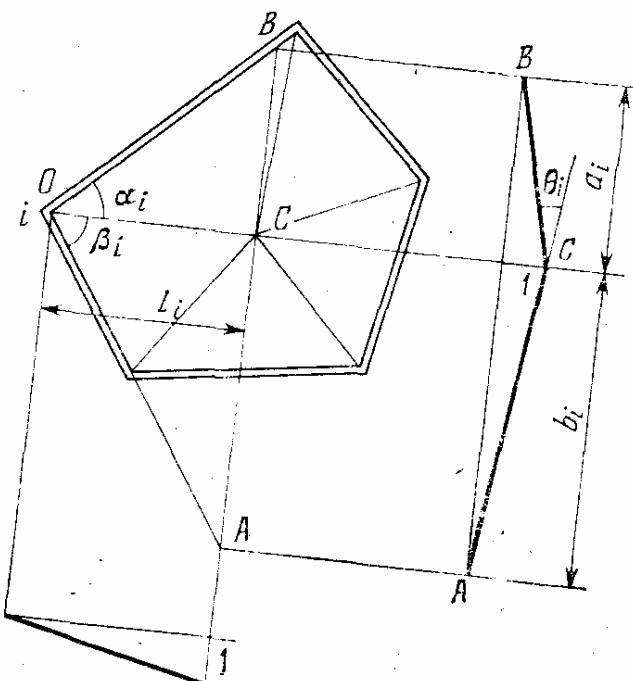


Рис. 20.

В частности, если пластиинка имеет форму правильного многоугольника, а сила P приложена в центре, то

$$P = 2m_t n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n},$$

где n — число сторон многоугольника. Эту формулу легко получить из предыдущей, если представить $\alpha_i = \beta_i = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$. При $n = 3$ получим $P = 10,39$; при $n = 4$ $P = 8$; при $n = 6$ $P = 6,93$. В пределе для круговой пластиинки, загруженной в центре и шарнирно опертой по периметру,

$$P = 2\pi m_t. \quad (11.3)$$

Поверхность пластинки в предельном состоянии здесь образует конус. Ее сплошь заполняют цилиндрические шарниры текучести, направленные по радиусам.

Для прямоугольной пластинки, загруженной в центре, согласно формуле (11.2) имеем

$$P = 4m_t \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right),$$

где a и b — размеры сторон пластинки. При $a = b$ получаем минимальную разрушающую силу P , равную приведенному выше значению $8m_t$ для квадрата.

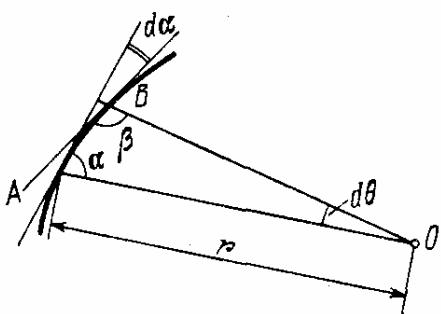


Рис. 21.

Перейдем теперь к общему случаю пластинки с криволинейным контуром, шарнирно опертой и нагруженной сосредоточенной силой. Заменим криволинейный контур пластинки вписанным многоугольником с бесконечно большим числом сторон. Возьмем бесконечно малый сектор с центром в точке приложения силы P и центральным углом $d\theta$ (рис. 21). Подсчитаем работу внутренних сил на изломе ребра OA и применим сюда формулу (11.2) (работу на изломе ребра OB отнесем к соседнему бесконечно малому сектору). При этом учтем, что

$$\alpha + d\alpha + \beta + d\theta = \pi, \quad \beta = \pi - \alpha - d\alpha - d\theta.$$

Получаем

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} (\alpha + d\alpha + d\theta).$$

Отнесем эту работу к единице центрального угла $d\theta$

$$\frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{d\theta} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} (\alpha + d\alpha + d\theta)}{d\alpha + d\theta} \frac{d\alpha + d\theta}{d\theta}. \quad (11.4)$$

Если $d\theta$ стремится к нулю, то и $d\alpha$ стремится к нулю (случай ломаного контура, рассмотренный выше, здесь исключаем). При $d\alpha + d\theta \rightarrow 0$ первая дробь в (11.4) будет стремиться к производной от $\operatorname{ctg} \alpha$ по α с обратным знаком, т. е. к

$$-(\operatorname{ctg} \alpha)' = \sin^{-2} \alpha;$$

вторая же дробь равна $1 + d\alpha/d\theta$. Поэтому выражение (11.4) можно написать в виде

$$\left(1 + \frac{d\alpha}{d\theta}\right) \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

Заметим теперь, что в полярных координатах с полюсом в точке O

$$\operatorname{tg} \alpha = r/r'. \quad (11.5)$$

Здесь $r = r(\theta)$ — уравнение кривой контура пластиинки, штрихом обозначено дифференцирование по θ . Из (11.5) следует

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{r}{r'}, \quad \frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2},$$

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1 + \frac{r'^2}{r^2}, \quad 1 + \frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{r^2 + 2r' - rr''}{r^2 + r'^2}.$$

Поэтому

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \left(1 + \frac{d\alpha}{d\theta}\right) \frac{d\theta}{\sin^2 \alpha} = \left(1 + 2 \frac{r'^2}{r^2} - \frac{r''}{r}\right) d\theta.$$

Наконец, из формулы (11.2) находим, что

$$P = m_T \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{r''}{r} - 2 \frac{r'^2}{r^2}\right) d\theta. \quad (11.6)$$

Представим теперь интеграл (11.6) в несколько ином виде. Воспользуемся выражением для кривизны контура $r(\theta)$ в полярных координатах

$$\frac{1}{R} = \frac{1 + 2 \frac{r'^2}{r^2} - \frac{r''}{r}}{r \left(1 + \frac{r'^2}{r^2}\right)^{3/2}}.$$

Отсюда

$$1 + 2 \frac{r'^2}{r^2} - \frac{r''}{r} = \frac{r}{R} \left(1 + \frac{r'^2}{r^2}\right)^{3/2} = \frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{Rr^2},$$

где R — радиус кривизны контура $r(\theta)$. Далее заметим,

что

$$d\theta \sqrt{r^2 + r'^2} = ds,$$

где ds — дифференциал дуги контура. Поэтому подынтегральное выражение в (11.6) можно представить в виде

$$\frac{r^2 + r'^2}{r^2} \frac{ds}{R},$$

или, согласно (11.5),

$$(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) \frac{ds}{R} = \frac{ds}{R \sin^2 \alpha},$$

где α — угол между касательной к контуру и радиусом-вектором (рис. 21). Таким образом, формулу (11.6) можно представить также в виде

$$P = m_t \int_L \frac{ds}{R \sin^2 \alpha}, \quad (11.7)$$

где интеграл берется по всему контуру L шарнирного опирания плиты. При этом сразу можно видеть, что работа внутренних сил обращается в нуль на прямолинейных участках контура, где $R = \infty$. На этих участках, как мы видели, секторы пластинки в момент разрушения остаются плоскими.

Если контур имеет точку перегиба, то R , а следовательно, и подынтегральные выражения (11.6) или (11.7) должны изменять знак. Это противоречит тому условию, что работа внутренних сил должна всюду иметь один знак. Поэтому формулы (11.6) и (11.7) остаются справедливыми лишь для контуров с постоянным знаком кривизны (в частности, для замкнутых выпуклых). При наличии же перемен знака кривизны контур следует разделить на участки между точками перегиба и для каждого участка вычислять интеграл (11.7) и (11.6) отдельно, придавая ему каждый раз знак плюс. В случае разных значений положительных предельных погонных моментов m_t и отрицательных m_t следует на каждом участке брать абсолютное значение предельного погонного момента.

§ 12. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ШАРНИРНО СПЕРТЫХ ПЛАСТИНОК

Для плит, опертых по замкнутому контуру, интеграл (11.6) можно упростить, представив его в виде

$$P = m_r \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{r'^2}{r^2} \right) d\theta, \quad (11.8)$$

так как разность между интегралами (11.6) и (11.8) в случае интегрирования по замкнутому контуру равна нулю

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{r''}{r} + 2 \frac{r'^2}{r^2} \right) d\theta - \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{r'^2}{r^2} \right) d\theta = \\ = \int_0^{2\pi} \frac{r'^2 - r''r}{r^2} d\theta = - \int_0^{2\pi} d \left(\frac{r'}{r} \right) = - \frac{r'}{r} \Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

§ 12. Частные случаи шарнирно опертых пластинок

В качестве примера возьмем эллиптическую пластинку, нагруженную силой, приложенной в фокусе (рис. 22).

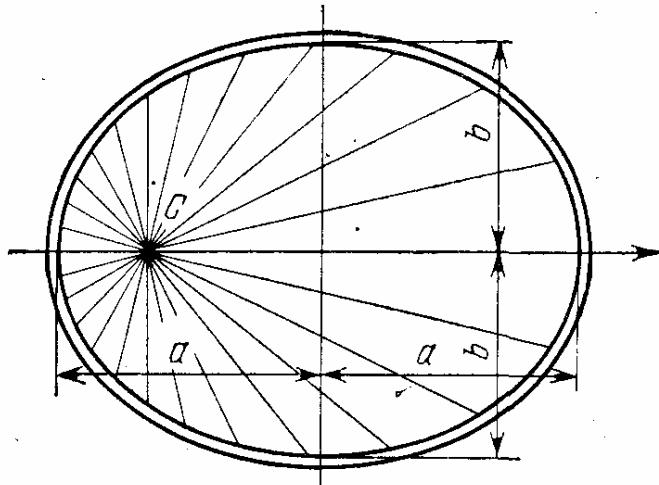


Рис. 22.

Уравнение эллипса в полярных координатах имеет вид

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta},$$

где ε — эксцентриситет эллипса ($\varepsilon < 1$). Производя

вычисления по формуле (11.6), получим

$$\begin{aligned} r' &= \frac{pe \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2}, \quad r'' = \frac{pe (2e - e \cos^2 \theta + \cos \theta)}{(1 + e \cos \theta)^3}, \\ 1 - \frac{r''}{r} + 2 \frac{r'^2}{r^2} &= \frac{1}{1 + e \cos \theta}, \\ P &= m_t \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + e \cos \theta} = \frac{2\pi m_t}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{2\pi a}{b} m_t. \end{aligned} \quad (12.1)$$

Рассмотрим еще случай эллиптической пластиинки, нагруженной силой P в центре эллипса (рис. 23). Урав-

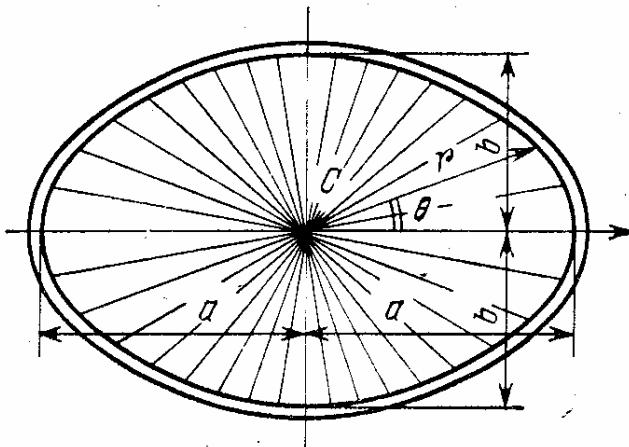


Рис. 23.

нение эллипса в полярных координатах с полюсом в центре эллипса имеет вид

$$r = \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}}. \quad (12.2)$$

Выпишем выражения для производных r' и r''

$$\begin{aligned} r' &= \frac{ab(b^2 - a^2) \sin \theta \cos \theta}{(b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}, \\ r'' &= \frac{[b^2 \cos^4 \theta - a^2 \sin^4 \theta + 2(b^2 - a^2) \sin^2 \theta \cos^2 \theta] ab (b^2 - a^2)}{(b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)^{5/2}}. \end{aligned}$$

После подстановки их в формулу (11.6) получаем

$$P = m_t \int_0^{2\pi} \frac{a^2 b^2 d\theta}{(b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)^2} = \frac{m_t}{a^2 b^2} \int_0^{2\pi} r^4 d\theta.$$

Интеграл $\int_0^{2\pi} r^4 d\theta$ представляет собой учетверенный полярный момент инерции площади, который для эллипса равен:

$$J_p = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} r^4 d\theta = \frac{\pi}{4} ab (a^2 + b^2).$$

Таким образом,

$$P = \pi m_t \frac{a^2 + b^2}{ab}. \quad (12.3)$$

Рассмотрим теперь круглую пластинку, эксцентрично загруженную сосредоточенной силой (рис. 24). Уравнение окружности в полярных координатах с полюсом в точке C имеет вид

$$r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta - R^2 = 0,$$

или

$$r = a \cos \theta + \sqrt{R^2 - a^2 \sin^2 \theta}.$$

Отсюда получаем

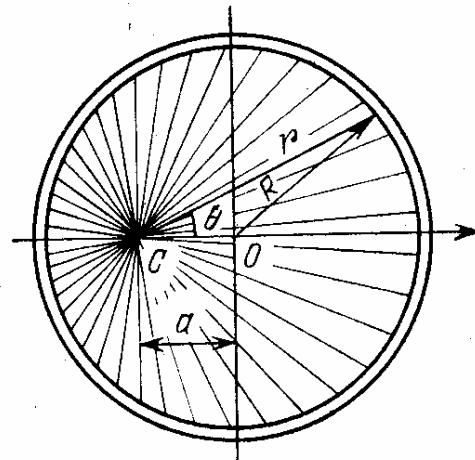


Рис. 24.

$$1 + 2 \frac{r'^2}{r^2} - \frac{r''}{r} = \frac{R^2}{R^2 - a^2 \sin^2 \theta} + \frac{aR^2 \cos \theta}{(R^2 - a^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}.$$

При интегрировании этого выражения от 0 до 2π второй член дает нуль, а первый

$$\int_0^{2\pi} \frac{R^2 d\theta}{R^2 - a^2 \sin^2 \theta} = \frac{2\pi R}{\sqrt{R^2 - a^2}}.$$

Таким образом, разрушающая нагрузка равна

$$P = 2\pi m_t \frac{R}{\sqrt{R^2 - a^2}}. \quad (12.4)$$

Выражения (12.1), (12.3) и (12.4) имеют свои пределы
4 А, Р. Ржаницын

применимости ввиду возможности форм разрушения, охватывающих лишь часть пластиинки и дающих меньшие значения P (см. ниже § 20).

§ 13. Пластиинка, опертая внутри своего контура [93]

Если края пластиинки свешиваются за линию опоры на небольшое расстояние, то форму разрушения от сосредоточенной силы можно по-прежнему считать конической с вершиной в точке приложения силы и основанием по линии опирания.

Пусть уравнение линии опирания, образующей замкнутый контур, будет $r = r(\theta)$, а уравнение края пластиинки $p = p(\theta)$ (рис. 25). Тогда работа внутренних сил, приходящаяся на элементарный угол, при единич-

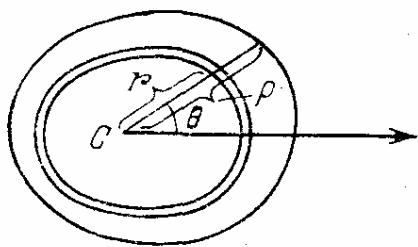


Рис. 25.

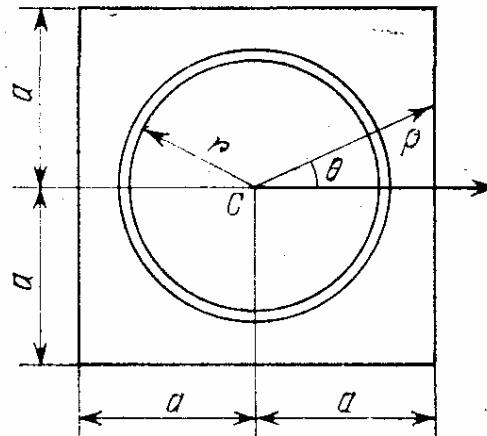


Рис. 26.

ном прогибе под силой равна

$$m_T \left(1 + 2 \frac{r'^2}{r^2} - \frac{r''}{r} \right) \frac{p}{r} d\theta. \quad (13.1)$$

Это выражение получается из подынтегрального выражения в (11.6) путем умножения последнего на отношение длин радиальных шарниров текучести до края пластиинки r и до опоры r . Полная величина разрушающей силы при этом равна

$$P = m_T \int_0^{2\pi} \frac{p}{r} \left(1 + 2 \frac{r'^2}{r^2} - \frac{r''}{r} \right) d\theta. \quad (13.2)$$

Возьмем, например, квадратную пластиинку со стороной $2a$, опертую по окружности радиуса r и нагружен-

ную в центре (рис. 26). Уравнение линии опирания имеет вид $r = \text{const}$, а уравнение внешнего контура пластиинки в пределах $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$

$$p = \frac{a}{\cos \theta}.$$

Подставляя эти значения в формулу (13.1), получаем:

$$P = 4m_t \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{a d\theta}{r \cos \theta} = 8m_t \frac{a}{r} \ln \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} = 7,05 \frac{a}{r} m_t. \quad (13.3)$$

При $a = r$ разрушающая сила $P = 7,05m_t$, т. е. несколько меньше, чем при опирании по периметру квадрата, когда $P = 8m_t$. Таким образом, уменьшение площади контура опирания здесь приводит не к увеличению, а к уменьшению разрушающей силы.

При большой величине свисания пластиинки за контур опирания ее следует считать заделанной по этому контуру (рис. 27) (см. § 16).

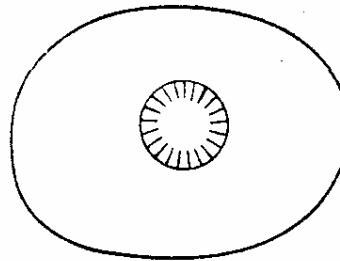


Рис. 27.

§ 14. Пластиинка, опертая по незамкнутому контуру [93]

Считаем, что вне линии опирания пластиинка имеет свободный край. Можно представить, что форма разрушения при наличии свободного края будет такая, как если бы опертый контур проходил на некотором расстоянии за свободным краем пластиинки. Другими словами, считаем по-прежнему шарниры текучести прямолинейными и выходящими из точки положения силы P . Обозначим уравнение фиктивного опорного контура (имеющего нулевой прогиб при разрушении) через $r(\theta)$, а уравнение свободного края пластиинки — через $p(\theta)$. Тогда выражение для разрушающей силы будет иметь вид (13.2), причем на шарнирно опертых участках r принимает заданные значения, а на участках со свободным краем должно быть найдено из условия минимума P .

Уравнение Эйлера — Пуассона для функционала (13.1), имеющее вид

$$\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial r'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial r''} = 0,$$

где

$$F = \frac{P}{r} \left(1 + 2 \frac{r'^2}{r^2} - \frac{r''}{r} \right),$$

дает

$$-\frac{P + P''}{r^2} = 0, \quad r \rightarrow \infty.$$

Это значит, что минимум P достигается при удалении контура $r(\theta)$ в бесконечность. Однако контур r должен

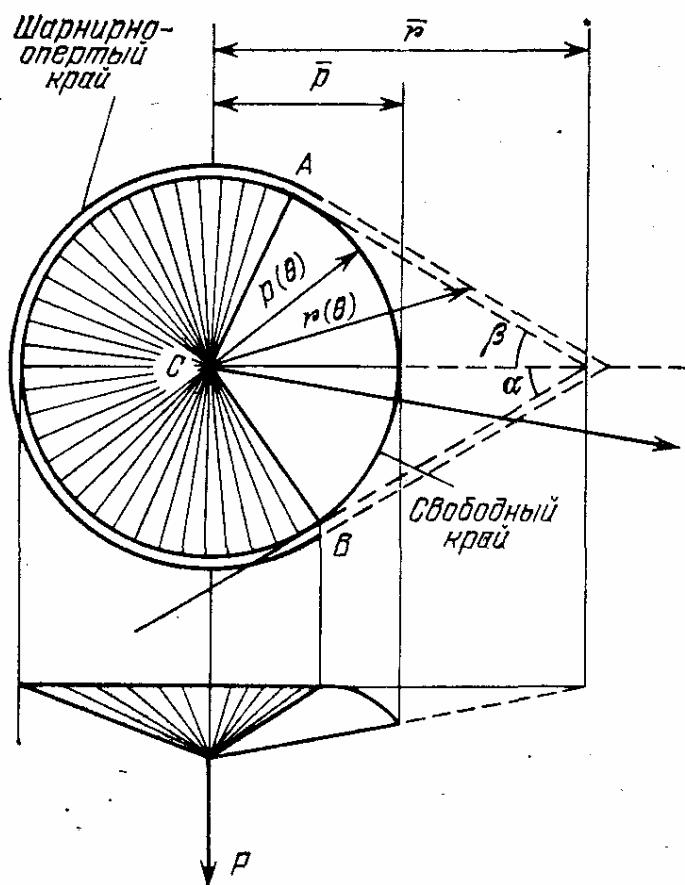


Рис. 28.

быть выпуклым. Поэтому он должен занять крайнее наиболее удаленное положение, совпадающее с касательными к контуру шарнирного опирания в точках обрыва этого опирания и перехода к свободному краю (рис. 28).

В точке встречи касательных происходит перелом контура $r(\theta)$ и в эту точку в большинстве случаев будет направлено ребро перелома пластиинки, обладающее минимальным отношением p/r (точнее, ребро перелома будет направлено в точку, где выражение (13.1) имеет минимум). Часть силы P , потребная для образования ребра перелома, выражается формулой

$$\Delta P = m_t \frac{\bar{p}}{r} (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta),$$

где α и β — углы между ребром перелома и прямолинейными участками контура r , \bar{r} и \bar{p} — расстояния от точки приложения силы P вдоль ребра перелома до контуров r и p . Для объяснения этой формулы достаточно заметить, что форма разрушения здесь такова, что ребро перелома, будучи прямолинейным, пересекает первоначальную, горизонтальную плоскость пластиинки на контуре r и что фактическая длина ребра перелома вместо \bar{r} составляет \bar{p} .

В качестве примера возьмем круглую пластиинку, шарнирно опертую по части внешнего периметра со свободно свисающим остальным краем (рис. 29). Разрушающая сила, приложенная в центре пластиинки, равна

$$P = m_t \int_{\beta}^{2\pi-\beta} d\theta + m_t \frac{p}{r_{\max}} 2 \operatorname{ctg} \alpha,$$

и так как

$$r_{\max} = \frac{p}{\cos \beta}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} \beta,$$

то

$$P = 2m_t(\pi - \beta + \sin \beta). \quad (14.1)$$

Форма разрушения будет коническая в шарнирно опертой части контура, с двумя плоскостями в свободно свисающей части и углом перелома между ними.

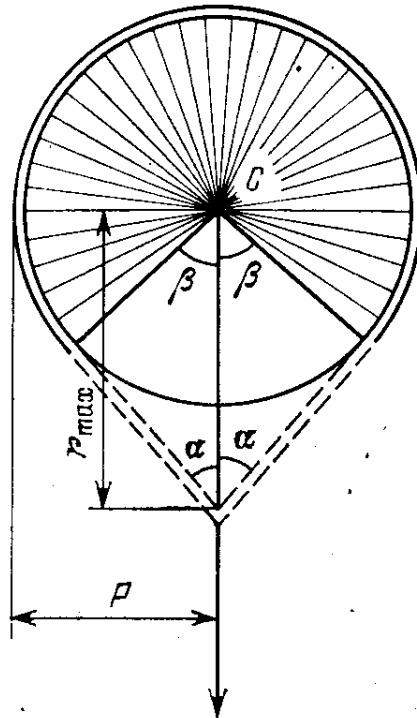


Рис. 29.

При $\beta = 0$ получаем формулу (11.3) для пластиинки, шарнирно опертой по всему контуру.

При $\beta = \pi/2$

$$P = 2m_t(\pi/2 + 1) = 5,146m_t.$$

При $\beta > \pi/2$ форма разрушения может быть другой, например в виде перелома по линии AB (рис. 30), причем в этом случае

$$P = m'_t \frac{l}{p} \operatorname{tg} \beta,$$

где m'_t — предельный момент при изломе пластиинки выпуклостью вверх. Это дает меньшее значение для P , чем по формуле (14.1) при $\beta > 2,03$ (166°) (для $m'_t = m_t$).

Для других очертаний свободного края той же пластиинки форма разрушения может быть иной. Так, для

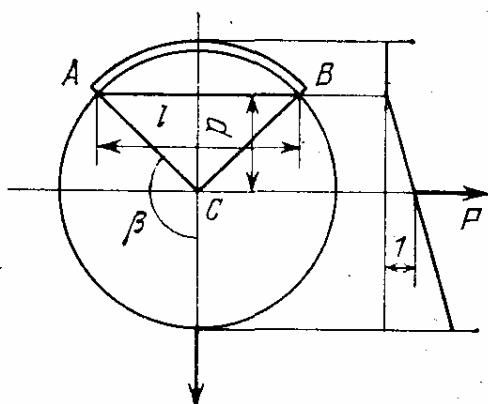


Рис. 30.

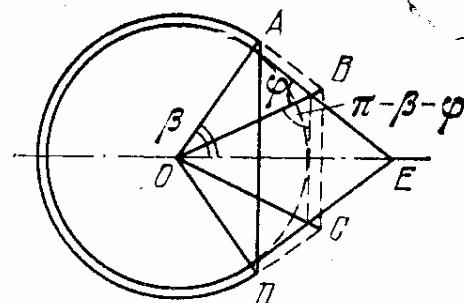


Рис. 31.

пластиинки, изображенной на рис. 31, переломы могут происходить по линиям OA и OB , а фиктивный опорный контур $r(\theta)$ — пойти по линии $ABCD$. Угол φ определится из условия минимума выражения

$$\Phi = \operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} (\pi - \beta - \varphi);$$

отсюда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\sin^2 \varphi} + \frac{1}{\sin^2 (\pi - \beta - \varphi)} = 0, \quad \varphi = \pi - \beta - \varphi, \quad (14.2)$$

т. е. $\angle OBA = \angle OBC$, а линии BC , AB и CD касаются одного и того же круга с центром в точке O .

В последнем примере контур $r(\theta)$ занимает не экстремальное положение AED , что как будто бы противоречит ранее высказанному положению (14.1). Но поскольку здесь на прямолинейных участках контура выражение (13.1) равно нулю и интеграл (13.2) берется лишь в точках

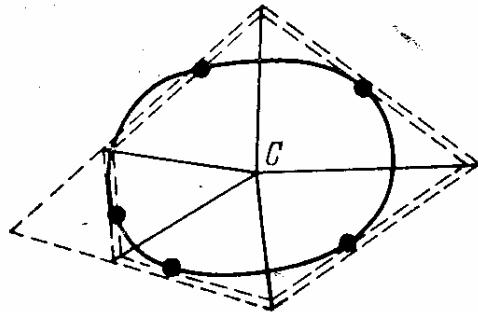


Рис. 32.

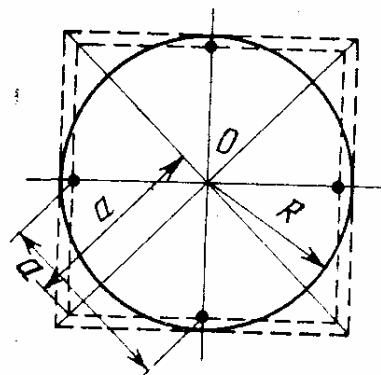


Рис. 33.

перелома контура r , мы можем удовлетвориться тем, что на фиктивном контуре лежали лишь точки перелома B и C , и это в данном решении выполнено.

Если контур пластиинки $p(\theta)$ оперт в отдельных точках, то для определения контура $r(\theta)$ необходимо провести прямые линии через все точки опирания. На многоугольнике, образованном отрезками этих линий, будет лежать фиктивный контур $r(\theta)$, причем линии перелома пластиинки будут направлены в точки перелома этого контура (рис. 32). Точное положение контура $r(\theta)$ определится из условия минимума силы P .

Так, например, круглая пластиинка, оперта симметрично в четырех точках, разрушается так, как показано на рис. 33, причем разрушающая сила равна

$$P = 8 \operatorname{ctg} 45^\circ \cdot \frac{R}{a} m_t = 5,656 m_t,$$

где a — расстояние между соседними опорами, R — радиус пластиинки.

§ 15. Одностороннее опирание пластиинки по контуру

В случае одностороннего опирания пластиинки край ее может свободно подниматься, но не может опускаться. Те части контура, которые поднимаются, можно рас-

сматривать как свободный край. Из условия минимума P нетрудно определить точки, ограничивающие поднимающиеся участки края пластиинки. Например, квадратная пластиинка, свободно опертая по контуру, разрушается так, как показано на рис. 34, причем в углах край пластиинки поднимается. Угол φ наклона линии перелома

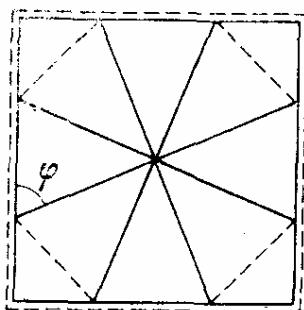


Рис. 34.

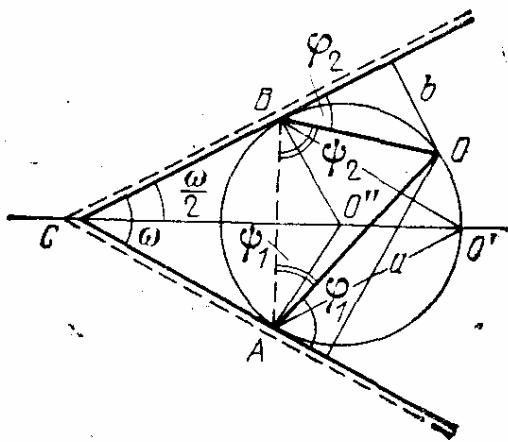


Рис. 35.

к стороне квадрата находится из условия минимума выражения

$$\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \left(\frac{3}{4} \pi - \varphi \right),$$

откуда $\varphi = 3\pi/8$ (см. вывод формулы (14.2)); $P = 6,63m_t$, что значительно ниже разрушающей нагрузки в квадратной пластиинке, углы которой не могут приподниматься, и равно разрушающей нагрузке для равносторонней восьмиугольной пластиинки с неприподнимающимися углами. Отсюда становится понятным результат (13.3) для квадратной пластиинки, опертой по вписанному кругу, для которой $P = 7,05m_t$ и углы также несколько приподнимаются.

Полученный результат может быть обобщен на пластиинки в виде любого правильного многоугольника с приподнимающимися углами. Разрушающая нагрузка для них равна разрушающей нагрузке для пластиинок с неприподнимающимися углами, имеющими вид правильного многоугольника с удвоенным числом сторон. Нагрузка при этом предполагается сосредоточенной в центре.

Пусть угол свободно опертой по краю полигональной пластиинки равен ω , а сила P приложена в точке O , отстоящей от сторон угла на расстояниях a и b (рис. 35). Допустим, что при разрушении пластиинки образуются пластические шарниры по линиям OA и OB , а часть пластиинки от вершины угла ω до линии AB приподнимается. Та часть силы P , которая необходима для образования переломов OA и OB , равна

$$\Delta P = (\operatorname{ctg} \varphi_1 + \operatorname{ctg} \varphi_2 + \operatorname{ctg} \psi_1 + \operatorname{ctg} \psi_2)m_t.$$

Необходимо найти минимум этого выражения при дополнительных условиях

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \psi_1 + \psi_2 = \pi + \omega, \quad (15.1)$$

$$\ln \sin \varphi_1 - \ln \sin \varphi_2 - \ln \sin \psi_1 + \ln \sin \psi_2 = \ln \frac{a}{b}. \quad (15.2)$$

Условие (15.1) легко получается из рассмотрения сумм углов, сходящихся в точках A и B , а условие (15.2) вытекает из равенства отношения сторон OA и OB треугольника OAB отношению синусов противолежащих углов ψ_1 и ψ_2 :

$$\frac{a}{\sin \varphi_1 \sin \psi_2} = \frac{b}{\sin \varphi_2 \sin \psi_1}.$$

Находя условный минимум ΔP , получаем уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 \varphi_1} + \lambda + \mu \frac{\cos \varphi_1}{\sin \varphi_1} &= 0, & \frac{1}{\sin^2 \psi_2} + \lambda + \mu \frac{\cos \psi_2}{\sin \psi_2} &= 0, \\ \frac{1}{\sin \varphi_2} + \lambda - \mu \frac{\cos \varphi_2}{\sin \varphi_2} &= 0, & \frac{1}{\sin^2 \psi_1} + \lambda - \mu \frac{\cos \psi_1}{\sin \psi_1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15.3)$$

Из первых двух уравнений (15.3) можно найти значения множителей Лагранжа λ и μ . Точно такие же значения λ и μ получаются из последних двух уравнений (15.3), но с заменой φ_1 на ψ_2 и φ_2 на ψ_1 . Ввиду однозначности решения можно сделать вывод, что

$$\varphi_1 = \psi_2 \quad \text{и} \quad \varphi_2 = \psi_1.$$

Отсюда получаем

$$\varphi_1 + \psi_1 = \varphi_2 + \psi_2.$$

Это значит, что линия AB должна быть перпендикулярна биссектрисе угла ω .

Далее замечаем, что угол AOB равен

$$\pi - \psi_1 - \psi_2 = \pi - \varphi_1 - \varphi_2 = 0,5(\pi - \omega).$$

Проведем через точки A , O и B окружность (рис. 35). Угол $AO'B$ равен углу AOB , как опирающийся на ту же дугу окружности AB , т. е. он равен $0,5(\pi - \omega)$. Центральный угол $AO''B$ равен удвоенному углу $AO'B$, т. е. $\pi - \omega$. Сумма углов четырехугольника $O''ACB$ равна 2π следовательно, углы $O''AC$ и $O''BC$ равны

$$\frac{2\pi - (\pi - \omega) - \omega}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда следует, что окружность $O'OA B$ касается в точках A и B сторон контура пластиинки.

Таким образом, для того чтобы определить линию вращения диска $OACB$ следует вписать в угол ω окружность так, чтобы она проходила через точку O приложения силы P . Точки касания этой окружности со сторонами угла будут находиться на линии вращения диска. (Этот результат впервые был найден Йогансеном.)

Из равенств

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \psi_1 + \psi_2 = 0,5(\pi + \omega)$$

и

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \varphi_1 \sin \psi_2}{\sin \varphi_2 \sin \psi_1} = \frac{\sin^2 \varphi_1}{\sin^2 \varphi_2}$$

нетрудно найти значения углов φ_1 и φ_2 . Действительно,

$$\begin{aligned} \sin \varphi_2 &= \sin \left(\frac{\pi + \omega}{2} - \varphi_1 \right) = \cos \left(\varphi_1 - \frac{\omega}{2} \right), \\ \frac{b}{a} &= \frac{\cos^2 \left(\varphi_1 - \frac{\omega}{2} \right)}{\sin^2 \varphi_1}, \end{aligned}$$

$$\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{\cos \varphi_1 \cos \frac{\omega}{2} + \sin \varphi_1 \sin \frac{\omega}{2}}{\sin \varphi_1} = \operatorname{ctg} \varphi_1 \cos \frac{\omega}{2} + \sin \frac{\omega}{2},$$

$$\operatorname{ctg} \varphi_1 = \frac{\sqrt{a/b} - \sin \frac{\omega}{2}}{\cos \frac{\omega}{2}}, \quad \varphi_1 = \arctg \frac{\cos \frac{\omega}{2}}{\sqrt{b/a} - \sin \frac{\omega}{2}}.$$

Аналогично

$$\varphi_2 = \arctg \frac{\cos \frac{\omega}{2}}{\sqrt{a/b} - \sin \frac{\omega}{2}}.$$

Часть силы P , вызывающая переломы по линиям OA и OB и подъем вершины угла ω , определяется по формуле

$$\Delta P = 2(\operatorname{ctg} \varphi_1 + \operatorname{ctg} \varphi_2) m_t = \frac{2m_t}{\cos \frac{\omega}{2}} \left(\sqrt{a/b} + \sqrt{b/a} - 2 \sin \frac{\omega}{2} \right).$$

Полученные выводы справедливы и для случаев, когда вершина угла срезана произвольной линией (рис. 36).

В качестве простого примера возьмем прямоугольник с отношением сторон $2:1$, загруженный в центре. Линии излома пойдут так, как

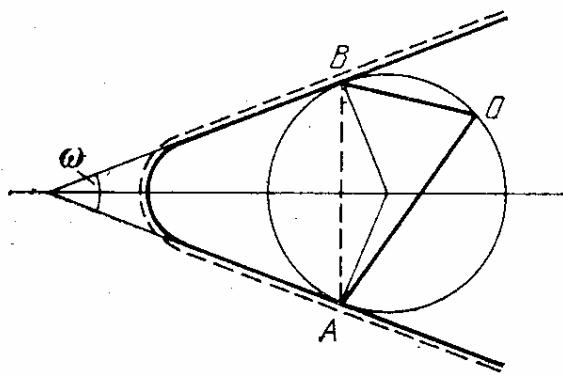


Рис. 36.

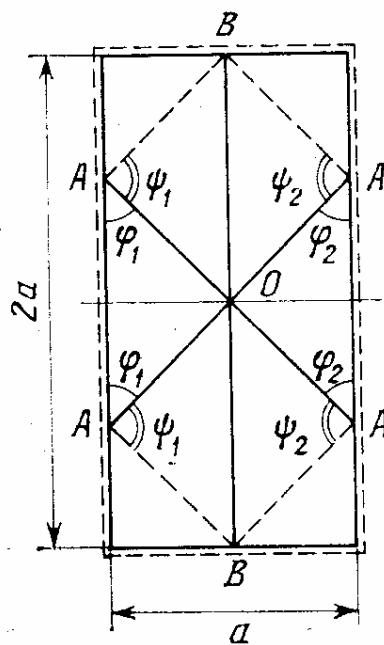


Рис. 37.

показано на рис. 37; $\varphi_1 = \psi_2 = 45^\circ$, $\varphi_2 = \psi_1 = 90^\circ$. Разрушающая нагрузка равна

$$P = 4m_t(\operatorname{ctg} 45^\circ + \operatorname{ctg} 45^\circ + \operatorname{ctg} 90^\circ + \operatorname{ctg} 90^\circ) = 8m_t,$$

т. е. она равна разрушающей нагрузке для квадратной пластинки с неприподнимающимися углами. Если соотношение сторон прямоугольника больше чем $2:1$, то форма разрушения будет иной, именно поднимутся полностью обе короткие стороны пластинки, но сила P останется равной $8m_t$ (рис. 38).

§ 16. Предельное равновесие консольной плиты, нагруженной сосредоточенной силой

Возьмем систему координат x, y , проходящую через конец заделки плиты (рис. 39). Пусть свободный край плиты в этой системе координат описывается уравнением

$$y = y(x).$$

Координаты точки O приложения сосредоточенной силы обозначим x_0, y_0 .

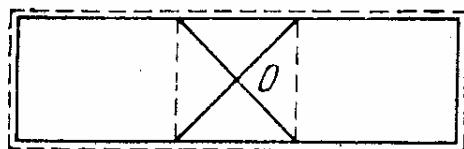


Рис. 38.

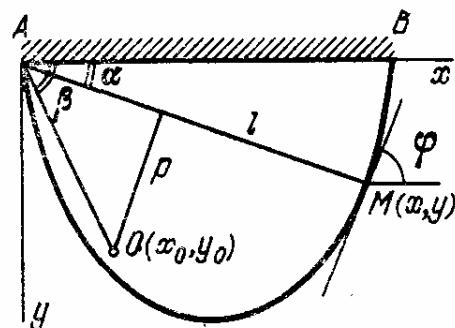


Рис. 39.

Исследуем возможность излома плиты по линии AM . Длина этой линии равна

$$l = \sqrt{x^2 + y^2},$$

а длина перпендикуляра, опущенного из точки приложения силы на эту линию, равна

$$p = -x_0 \sin \alpha + y_0 \cos \alpha,$$

или, поскольку

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{y}{x}, \quad \sin \alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \cos \alpha &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad p = \frac{y_0 x - x_0 y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

Разрушающее значение силы P будет

$$P_{\text{пр}} = \frac{m_{\text{T}} l}{p} = m_{\text{T}} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{xy_0 - yx_0}.$$

Определим точку выхода на край плиты линии излома из условия минимума P :

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dx} &= (xy_0 - yx_0)^{-2} [(xy_0 - yx_0)(2x + 2yy') - \\ &\quad -(x^2 + y^2)(y_0 - x_0 y')] = 0; \end{aligned}$$

отсюда

$$y' = \frac{2xyx_0 - (x^2 - y^2)y_0}{2xyy_0 + (x^2 - y^2)x_0}.$$

Введем обозначение

$$\eta = \frac{2xy}{x^2 - y^2};$$

тогда можно написать

$$y' = \frac{\eta x_0 - y_0}{x_0 + \eta y_0}.$$

Заметив, что

$$\eta = \frac{2}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha,$$

и введя обозначения

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{y_0}{x_0}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} y',$$

получаем

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \operatorname{tg} (2\alpha - \beta),$$

откуда

$$\varphi = 2\alpha - \beta.$$

Таким образом, касательная к свободному краю плиты в точке выхода линии излома на этот край должна быть наклонена к оси x под углом $2\alpha - \beta$.

Например, для прямоугольной плиты, заделанной по линии AB и загруженной в точке O (рис. 40), $\beta = 90^\circ$,

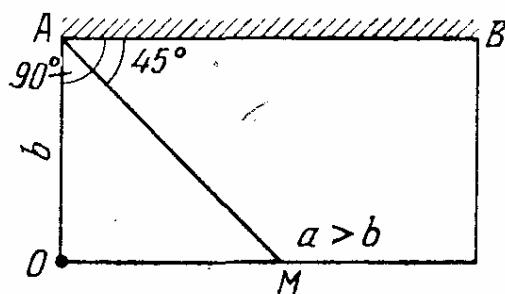


Рис. 40.

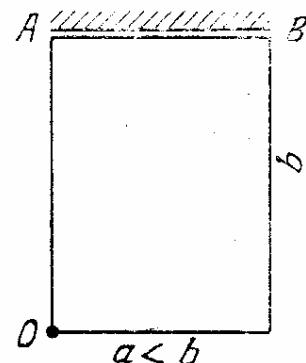


Рис. 41.

и если отношение сторон плиты $a/b > 1$, то угол α равен 45° , причем $\varphi = 0$, а если отношение сторон $a/b < 1$, то $\alpha = 0$ и $\varphi = 90^\circ$ (рис. 41).

Для треугольной пластинки, заделанной в основании AB и загруженной в вершине O (рис. 42), угол φ равен

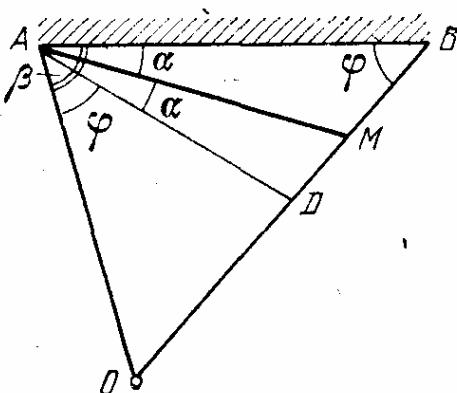


Рис. 42.

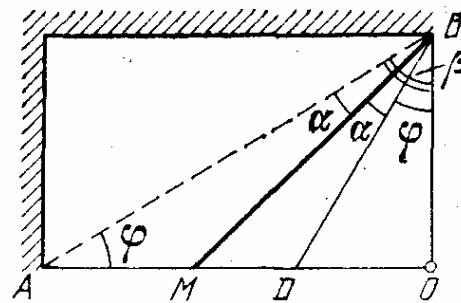


Рис. 43.

углу ABO с обратным знаком. Поэтому направление линии излома, согласно формуле $\alpha = \frac{\beta + \varphi}{2}$, можно получить, откладывая угол $OAD = ABO$ от линии AO вправо и разделив затем полученный угол BAD пополам. Для равнобедренного треугольника $\alpha = 0$.

Заделка не обязательно должна идти по прямой линии. Необходимо только углы α и β отсчитывать от прямой AB , соединяющей концы заделанного участка контура пластинки. Например, прямоугольная пластинка, заделанная по двум смежным сторонам и загруженная в свободной вершине (рис. 43), разрушается так же, как треугольная пластинка ABO , заделанная по линии AB .

§ 17. Пластинки, защемленные по контуру опирания

При нагрузке сосредоточенной силой P для пластинки, защемленной по контуру опирания, можно представить себе такую же форму разрушения, как и для случая шарнирного опирания пластинки. (Ниже мы покажем, что эта форма разрушения не является экстремальной.) Кроме радиальных шарниров текучести, могут образовываться также краевые шарниры, идущие по контуру,

ограничивающему область разрушения. Этот последний контур может совпадать с заданным контуром пластиинки и может лежать внутри него (рис. 44). Для достижения геометрической изменяемости пластиинки достаточно образования одного замкнутого краевого шарнира текучести.

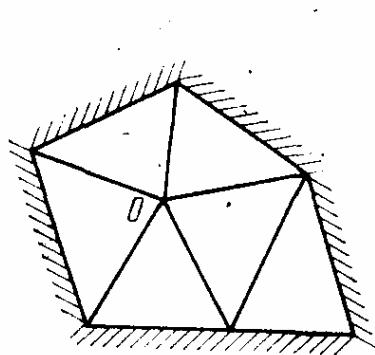


Рис. 44.

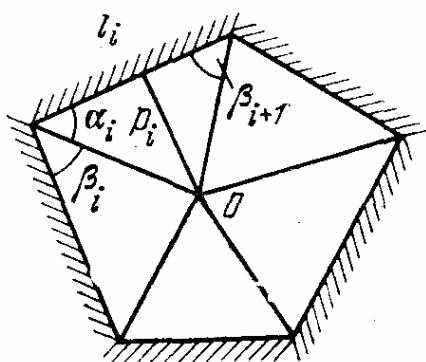


Рис. 45.

Величина работы внутренних сил в радиальных шарнирах текучести будет выражаться той же формулой (14.6), что и для шарнирно опертой пластиинки, с той только разницей, что функция $r(\theta)$ вместо контура оправления пластиинки должна выражать уравнение контура области разрушения, т. е. уравнение краевого шарнира текучести. К этой работе следует прибавить работу предельных моментов в краевых шарнирах.

Следует учитывать, что раскрытие краевых шарниров происходит в сторону, противоположную раскрытию внутренних шарниров, и, что поэтому предельное значение краевых моментов m_t может отличаться от предельной интенсивности моментов внутри контура оправления m_t при различных сетках арматуры вверху и внизу плиты.

Рассмотрим сначала краевые шарниры текучести произвольного очертания, имея в виду в дальнейшем выбрать из них те, которые дают минимальную разрушающую силу.

В случае полигонального краевого шарнира работа предельных моментов в нем будет равна сумме произведений их интенсивности m_t на длину прямолинейного участка контура l_i и на двухгранный угол перелома, равный при единичном прогибе под силой P величине $1/p_i$,

где p_i — длина перпендикуляра, опущенного из точки приложения силы P на сторону l_i (рис. 45). Общая работа предельных моментов во всем контуре шарнира равна

$$m_t' \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{p_i}, \quad (17.1)$$

где n — число сторон контура краевого шарнира.

Выразив l_i/p_i через углы α_i и β_i по формуле

$$l_i/p_i = \operatorname{ctg} \alpha_i + \operatorname{ctg} \beta_i,$$

придадим выражению (17.1) вид

$$m_t' \sum_{i=1}^n (\operatorname{ctg} \alpha_i + \operatorname{ctg} \beta_i). \quad (17.2)$$

Это выражение совпадает с выражением (11.2) для работы предельных моментов в радиальных шарнирах с точностью до постоянного множителя m_t .

Однако предельный переход к криволинейному контуру здесь должен быть произведен иначе, чем для работы в радиальных шарнирах. В

самом деле, если взять прямолинейный участок контура между вершинами многоугольника, то работа радиальных шарниров будет равна нулю, а работа краевого шарнира отлична от нуля и пропорциональна длине участка. Поэтому совпадение формул (17.2) и (11.2) следует считать справедливым лишь для частного случая

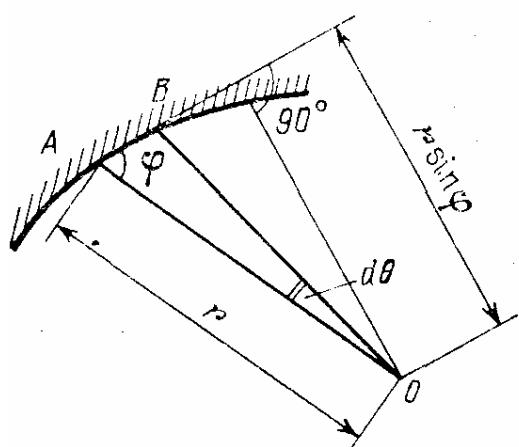


Рис. 46.

полигонального очертания контура с прямолинейными участками.

Для того чтобы вывести формулы для работы предельных моментов в случае криволинейного заделанного края, рассмотрим бесконечно малый сектор $d\theta$ с вершиной в точке приложения силы P (рис. 46). Двугранный угол на бесконечно малом участке AB равен (при единичном прогибе под силой) $\frac{1}{r \sin \varphi}$, где φ — угол между радиусом-

вектором r и касательной к контуру краевого шарнира в точке A . Длина же участка AB равна $r d\theta / \sin \varphi$. Таким образом, работа краевого шарнира текучести на бесконечно малом участке равна

$$m'_T \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{r d\theta}{\sin \varphi} = m'_T \frac{d\theta}{\sin^2 \theta} = m'_T \left(1 + \frac{r'^2}{r^2} \right) d\theta$$

(так как $\tan \varphi = r/r'$). Общая же работа по всему замкнутому краевому шарниру равна

$$m'_T \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sin^2 \varphi} = m'_T \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{r'^2}{r^2} \right) d\theta.$$

Величина разрушающей силы равна сумме работ радиальных и краевых шарниров

$$P = m_T \int_0^{2\pi} \left(1 + 2 \frac{r'^2}{r^2} - \frac{r''}{r} \right) d\theta + m'_T \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{r'^2}{r^2} \right) d\theta,$$

или

$$P = m_T \int_0^{2\pi} \left[1 + k + (2+k) \frac{r'^2}{r^2} - \frac{r''}{r} \right] d\theta, \quad (17.3)$$

где

$$k = m'_T / m_T.$$

Для плит, одинаково армированных вверху и внизу, $k = 1$ и

$$P = m_T \int_0^{2\pi} \left(2 + 3 \frac{r'^2}{r^2} - \frac{r''}{r} \right) d\theta. \quad (17.4)$$

Для плиты, заделанной по замкнутому контуру из равенства (11.8), следует, что вместо формул (17.3) и (17.4) можно написать более простые выражения

$$P = (m_T + m'_T) \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{r'^2}{r^2} \right) d\theta$$

и

$$P = 2m_T \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{r'^2}{r^2} \right) d\theta.$$

Заметим, что предельная сила P будет отлична от нуля и при отсутствии верхней арматуры, когда $m_t' = 0$, и при отсутствии нижней, когда $m_t = 0$.

При $m_t' = m_t$ работа внутренних сил в краевых шарнирах текучести в пластинке, заделанной по замкнутому контуру, будет равна работе внутренних сил в радиальных шарнирах.

§ 18. Экстремальная форма краевого шарнира текучести [93]

Пластинка, заделанная по контуру, может образовывать при разрушении краевые шарниры не по периметру контура заделки, а на некотором расстоянии от него внутрь пластиинки; при этом некоторые зоны у краев остаются неразрушенными. Для того чтобы определить истинную форму краевого шарнира текучести, будем искать уравнение его кривой $r(\theta)$ из условия минимума разрушающей силы P .

Составим условие минимума функционала (17.3):

$$F = 1 + k + (2 + k) \frac{r'^2}{r^2} - \frac{r''}{r},$$

$$\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{d}{d\theta} \frac{\partial F}{\partial r'} + \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{dF}{dr''} = 2(1 + k) \frac{r'^2 - rr''}{r^3} = 0.$$

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$r = A e^{c\theta}, \quad (18.1)$$

где A и c — произвольные постоянные, определяемые из граничных условий. Решение (18.1) представляет собой совокупность логарифмических спиралей с центром в точке приложения силы и в том числе концентрических окружностей, соответствующих значению $c = 0$. Эти кривые являются экстремалями данной задачи и именно по ним должны быть очерчены краевые шарниры текучести в предельном состоянии пластиинки.

В случае замкнутого краевого шарнира текучести последний может быть только окружностью, для которой

$c = 0$, $r = A$, $F = (1 + k)$ и

$$P = m_t \int_0^{2\pi} (1 + k) d\theta = 2\pi(1 + k) m_t. \quad (18.2)$$

Отсюда следует, что разрушение заделанной по всему контуру пластиинки должно происходить лишь в пределах окружности, описанной вокруг точки приложения силы P и лежащей целиком внутри заделанного контура пластиинки (рис. 47). Области, находящиеся дальше от точки приложения силы P , чем ближайшая точка заделанного периметра пластиинки, во всяком случае, не должны подвергаться разрушению.

Значение разрушающей силы (18.2) не может быть превышено и для других видов опирания пластиинки, т. е. для любой пластиинки с любыми краевыми условиями

$$P_{\text{пр}} \leq 2\pi(1 + k)m_t = \max \max P.$$

Излом по логарифмической спирали может быть в том случае, когда краевой шарнир не образует замкнутой кривой, например, когда часть контура пластиинки свободно оперта или имеет свободный край.

Во всех случаях та часть силы P , которая затрачивается на излом сектора, ограниченного краевым шарниром текучести, идущим по логарифмической спирали или окружности, равна, согласно (18.1) и (17.3),

$$\Delta P = m_t \int_0^{\theta_0} (1 + k)(1 + c^2) d\theta = (1 + k)m_t(1 + c^2)\theta_0 = \\ = (m_t + m'_t)(1 + c^2)\theta_0,$$

где θ_0 — центральный угол этого сектора.

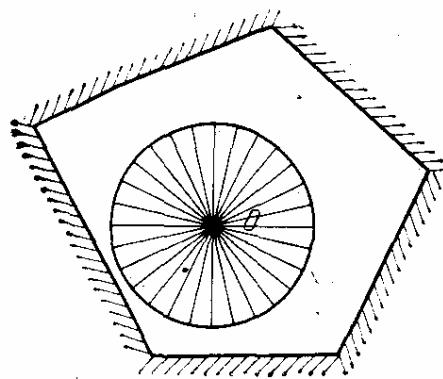


Рис. 47.

§ 19. Формы разрушения с незамкнутым краевым шарниром текучести

Во многих случаях форма разрушения пластинки получается такой, что краевой шарнир текучести выходит в некоторой точке на шарнирно опертый край пластиинки и, таким образом, прерывается. Примером может служить форма разрушения пластиинки под влиянием сосредоточенной силы, приложенной близко к прямолинейному

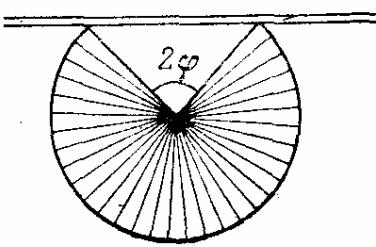


Рис. 48.

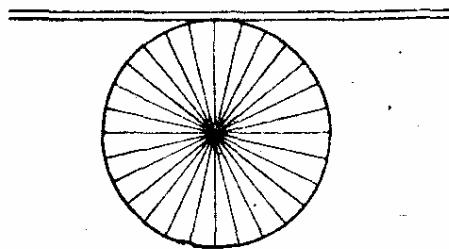


Рис. 49.

участку шарнирно опертого края пластиинки (рис. 48). Остальные участки контура пластиинки могут быть оперты как угодно. Естественно ожидать, что краевые шарниры текучести здесь образуются лишь в непосредственной близости к шарнирно опертому краю вблизи силы P .

Ввиду симметрии задачи краевой шарнир текучести должен быть также симметричным. Это может быть только при $c = 0$, т. е. краевой шарнир должен быть очерчен по окружности. Обозначим через φ половину угла сектора, выходящего на шарнирно опертый край. Тогда разрушающая сила P равна

$$\begin{aligned} P &= (1 + k) m_t (2\pi - 2\varphi) + 2m_t \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \\ &= 2(1 + k) m_t (\pi - \varphi) + 2m_t \operatorname{tg} \varphi. \end{aligned}$$

Минимум P будет при

$$\frac{\partial P}{\partial \varphi} = -2(1 + k) m_t + \frac{2m_t}{\cos^2 \varphi} = 0.$$

Отсюда

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{1+k}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{k} \quad (19.1)$$

и

$$P = 2m_t[(1+k)(\pi - \arctg \sqrt{k}) + \sqrt{k}]. \quad (19.2)$$

При $m'_t = m_t$, $k = 1$ $\varphi = \frac{\pi}{2} = 45^\circ$; $P = (2 + 3\pi)m_t = 11,42m_t$. При $k = 0$, т. е. при отсутствии верхней арматуры $\varphi = 0$ и $P = 2\pi m_t$, а форма разрушения будет

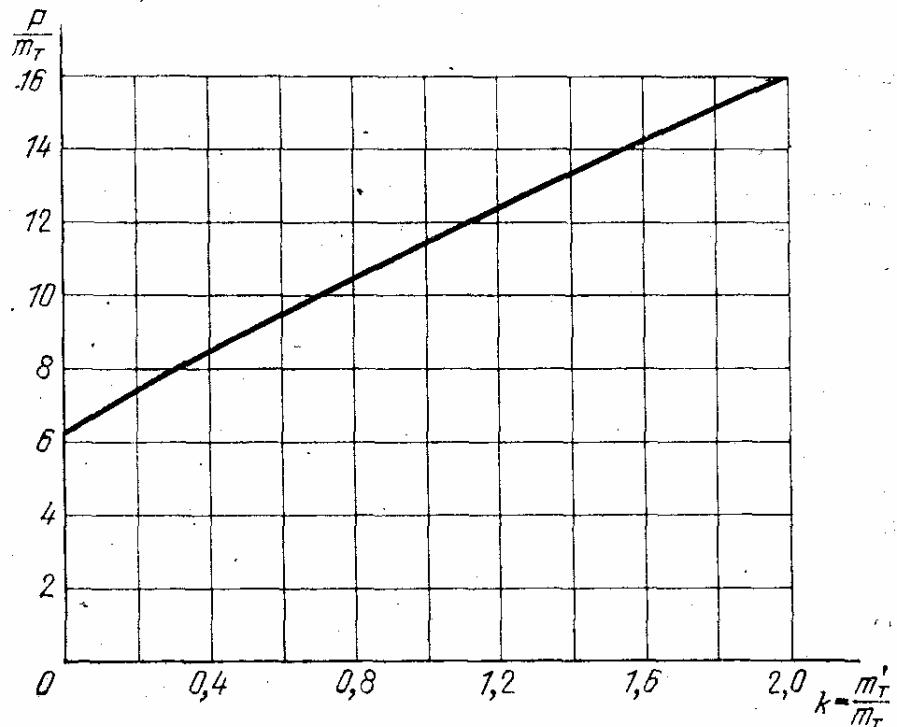


Рис. 50.

иметь вид полного конуса (рис. 49). При отсутствии нижней арматуры $k = \infty$, $m_t = 0$, $km_t = m_t$ получаем $\varphi = 90^\circ$, $P = \pi m_t$ и форма разрушения в плите неограниченных размеров будет иметь угол кругового сектора, стремящийся к 180° . График зависимости P от k дан на рис. 50.

Рассмотрим теперь случай данной пластиинки, шарнирно опертой по сторонам и загруженной в центре сосредоточенной силой (рис. 51). Секторы, ограниченные краевыми шарнирами текучести, имеют центральные углы, равные

$$\gamma = \pi - 2 \arctg \sqrt{k};$$

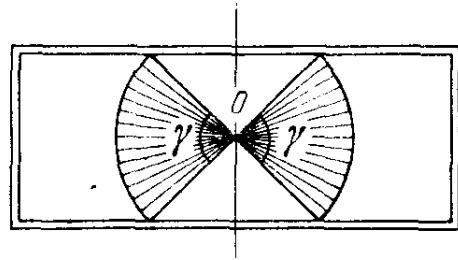


Рис. 51.

отсюда, по аналогии с (19.2) при $c = 0$, получим

$$P = 2m_r[(1 + k)(\pi - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{k}) + 2\sqrt{k}] \quad (19.3)$$

и при $k = 1$

$$\gamma = 90^\circ, \quad P = (2\pi + 4)m_r = 10,28m_r.$$

Зависимость P от k (19.3) графически представлена на рис. 52.

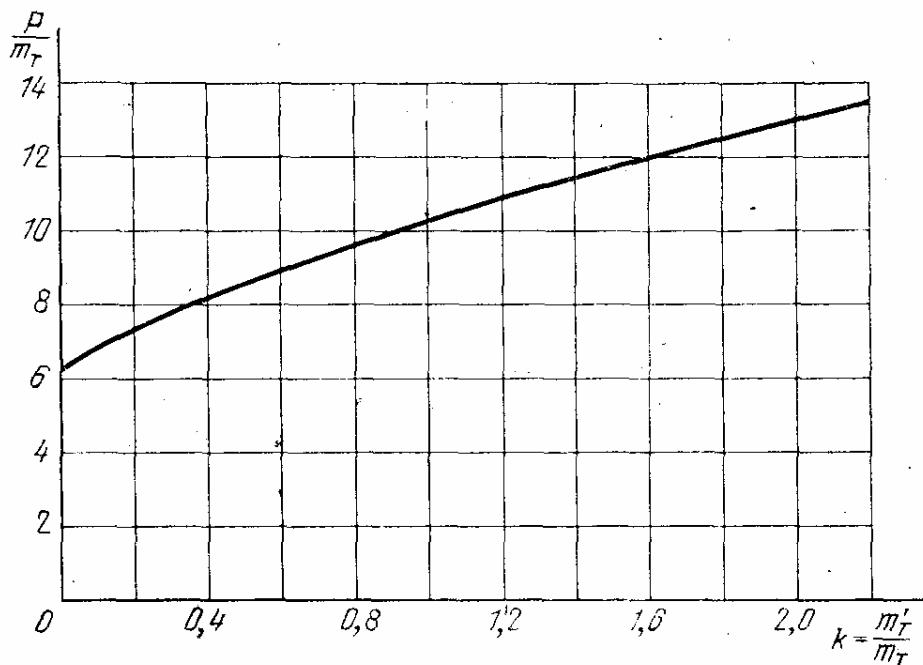


Рис. 52.

Формула (19.3) применима также к задаче о разрушении пластиинки, шарнирно опертой по двум непараллельным линиям, с углом между ними ω (рис. 53) и с силой P , приложенной на биссектрисе угла ω . Действительно, сумма дуг краевых шарниров текучести в угловой мере, а также углы выхода краевых шарниров на края пластиинки здесь такие же, как в предыдущей задаче, и силу P можно определять по формуле (19.3) независимо от угла ω .

При некотором значении угла ω внутренний круговой сектор обращается в линию. Для определения этого угла положим $\omega = 2\varphi$ (рис. 54) и при $c = 0$ найдем

$$\omega = 2 \operatorname{arcctg} \sqrt{k}. \quad (19.4)$$

При $k = 1$ этот угол равен 90° . Если $\omega > 2 \operatorname{arcctg} \sqrt{k}$, то

схема разрушения будет такая же (рис. 55). При этом

$$\gamma = 2\pi - (2\pi - \omega - 2 \operatorname{arcctg} \sqrt{k}) = \omega + 2 \operatorname{arcctg} \sqrt{k}$$

и

$$P = m_t \left[(1+k) (\omega + 2 \operatorname{arcctg} \sqrt{k}) + 2 \sqrt{k} + 2 \operatorname{ctg} \frac{\omega}{2} \right]. \quad (19.5)$$

В частности, при $k = 1$ $P = m_t \left(2\omega + \pi + 2 + 2 \operatorname{ctg} \frac{\omega}{2} \right)$.

При $\omega = \pi$ из (19.5) с учетом, что $\operatorname{arcctg} \sqrt{k} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{k}$, получаем формулу (19.2).

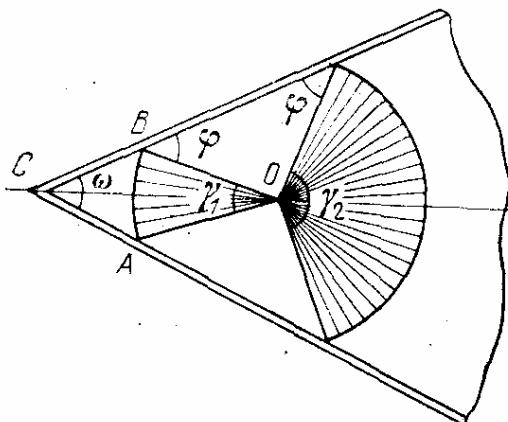


Рис. 53.

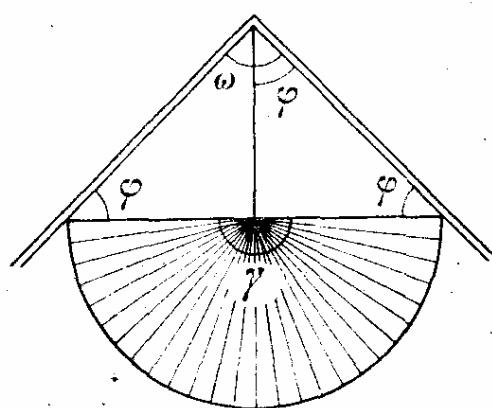


Рис. 54.

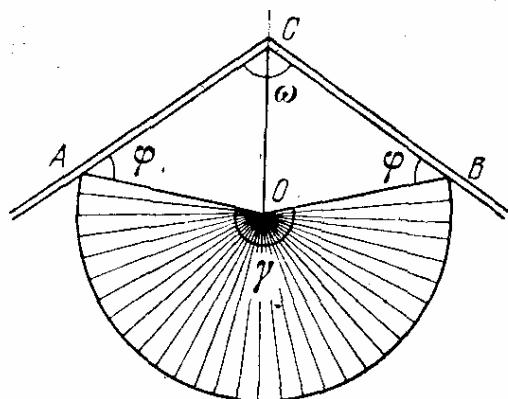


Рис. 55.

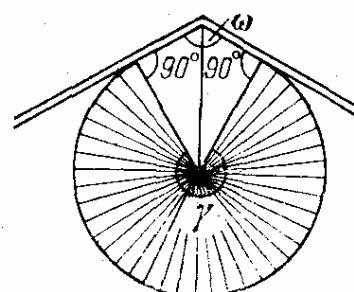


Рис. 56.

При $k = 0$, т. е. при отсутствии верхнего армирования

$$\gamma = \omega + \pi; \quad P = m_t \left(\omega + \pi + 2 \operatorname{ctg} \frac{\omega}{2} \right).$$

Форма разрушения в последнем случае имеет вид, показанный на рис. 56.

§ 20. Пластина с несимметричным армированием, шарнирно опертая по замкнутому контуру

В §§ 11—15 предполагалось, что армирование пластины вверху и внизу одинаковое, и что условия ее текучести (7.1) изображаются квадратом, симметричным относительно начала координат (m_1, m_2) (рис. 8, а). Рассмотрим теперь пластинку, имеющую только нижнюю арматуру и с условиями текучести, изображенными на

рис. 8, б. Такую пластинку можно считать шарнирно опертой относительно любого контура. Из условия минимума разрушающей сосредоточенной силы следует, что разрушение пластины будет происходить так, как если бы она была шарнирно оперта по окружности с центром в точке приложения сосредоточенной силы и что величина разрушающей силы, согласно (11.3), равна $2\pi m_t$. При этом области, находящиеся внут-

ри действительного контура опирания, но за пределом этой окружности, остаются неразрушенными (рис. 57).

Если пластина имеет верхнюю арматуру менее мощную, чем нижнюю, то разрушающая сила будет равна или

$$P_1 = 2\pi m_t (1 + k) \quad (k = m'_t/m_t),$$

или, согласно (9.14),

$$P_2 = m_t \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{r'^2}{r^2} \right) d\theta = 2\pi m_t + m_t \int_0^{2\pi} \frac{r'^2}{r^2} d\theta$$

в зависимости от того, какая из этих двух сил меньше.

Приравнивая $P_1 = P_2$, можно найти максимально необходимое количество верхней арматуры в шарнирно опертой плите, загруженной сосредоточенной силой из уравнения

$$2\pi m_t (1 + k) = 2\pi m_t + m_t \int_0^{2\pi} \frac{r'^2}{r^2} d\theta.$$

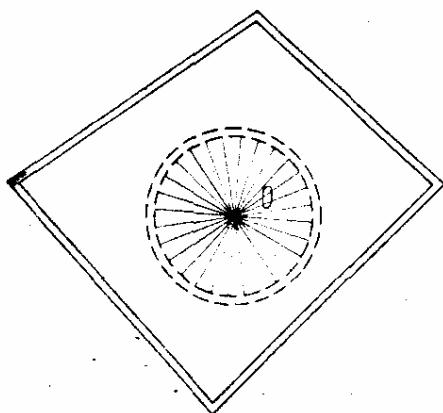


Рис. 57.

Получим

$$k = k_{\max} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r'^2}{r^2} d\theta.$$

Если известна величина P_2 , то необходимое количество верхней арматуры m'_T может быть определено по формуле

$$k_{\max} = \frac{P_2 - 2\pi m_T}{2\pi m_T} = \frac{P_2}{2\pi m_T} - 1, \quad m'_T = \frac{P_2}{2\pi} - m_T.$$

Например, для квадратной пластиинки, загруженной в центре

$$k_{\max} = \frac{8 - 2\pi}{2\pi} = 0,273, \quad m'_T = 0,273m_T.$$

Больше этого количества ставить верхнюю арматуру нецелесообразно. (Имеется в виду сплошное армирование по всей поверхности плиты. В полном решении задачи

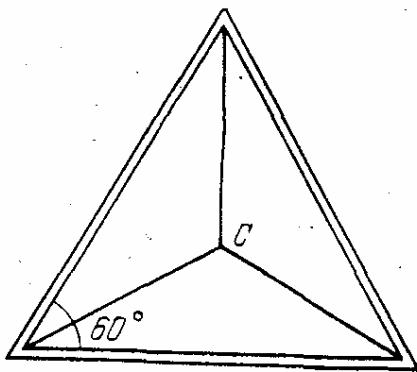


Рис. 58.

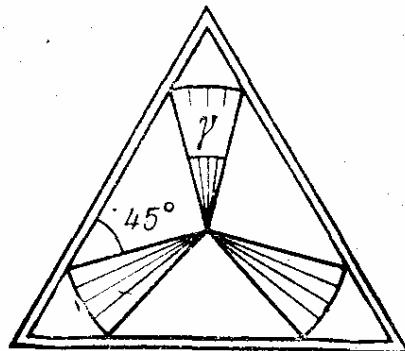


Рис. 59.

об оптимизации арматуры следует учитывать возможные изменения ее густоты в различных точках поверхности пластиинки.)

Рассмотрим теперь некоторые конфигурации контура пластиинки с точки зрения возможности появления краевых шарниров текучести внутри контура опирания. Ограничимся при этом случаем симметричного армирования, когда $k = 1$.

В плите, шарнирно опертой по контуру в виде равностороннего треугольника и загруженной в центре силой

P , в § 11 было получено разрушающее значение силы P , равное $10,39m_t$, соответствующее форме разрушения, показанной на рис. 58. Действительная форма разрушения имеет вид, показанный на рис. 59; при этом угол γ равен 30° , а разрушающая сила

$$P = \left(6 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \frac{\pi}{6} \right) m_t = (6 + \pi) m_t = 9,14 m_t.$$

Мы видим теперь, что в формулу (11.2) для полигональной шарнирно опертой плиты приходится вносить

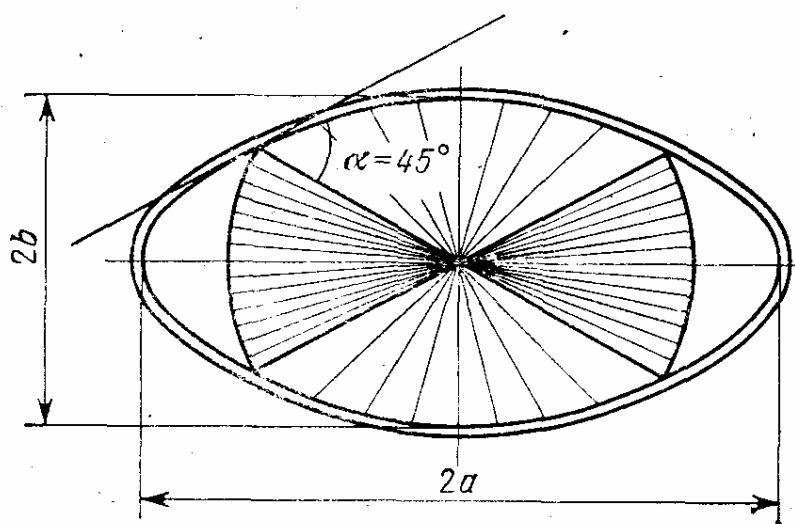


Рис. 60.

поправки, если какая-либо вершина периметра плиты имеет угол меньше чем $2 \operatorname{arcctg} \sqrt{k}$ (19.4) (при расположении силы P на биссектрисе этого угла).

Аналогичные поправки следует вносить и в другие формулы для различных контуров опирания при определенных соотношениях размеров и положения точки приложения сосредоточенной силы. Так, например, для эллиптической пластинки, загруженной в центре, при вытянутом эллипсе происходит разрушение по форме, показанной на рис. 60. Нетрудно определить предел применимости формулы (12.2), выведенной выше в предположении отсутствия краевых шарниров текучести. Появление последних становится возможным при углах наклона α между касательными к контуру и радиусами-векторами менее 45° (при $k = 1$), т. е. при

$$\operatorname{tg} \alpha = r/r' < 1. \quad (20.1)$$

После подстановки выражений для r и r' (12.2) получаем

$$b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta > (b^2 - a^2) \sin \theta \cos \theta,$$

откуда

$$b^2 \operatorname{ctg} \theta + a^2 \operatorname{tg} \theta > b^2 - a^2.$$

Левая часть этого неравенства принимает минимальное значение при

$$\operatorname{tg} \theta = b/a,$$

тогда получаем

$$2ab > b^2 - a^2.$$

Отсюда легко найдем, что

$$a/b > \sqrt{2} - 1 = 0,414,$$

что соответствует эксцентричеситету эллипса

$$\epsilon = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} = 0,91.$$

Если эксцентричеситет больше, то формула (12.2) становится неприменимой, так как дает завышенное значение разрушающей силы.

Таким же образом можно установить пределы применимости формулы (12.3) для внеконтренно загруженной, круглой, шарнирно опертой пластиинки. Здесь неравенство (20.1) приводит к

$$r'^2/r^2 > 1, \quad R^2 - a^2 \sin^2 \theta < a^2 \sin^2 \theta, \quad R^2 < 2a^2 \sin^2 \theta,$$

откуда следует

$$\frac{a}{R} > \min \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin \theta}} = 0,707,$$

т. е. формула (12.3) применима при $a < 0,707R$, когда сила P находится в пределах круга, концентрического с контуром пластиинки и равного по площади половине площади пластиинки. Сила, приложенная вне этого круга, вызывает разрушение по форме, показанной на рис. 61.

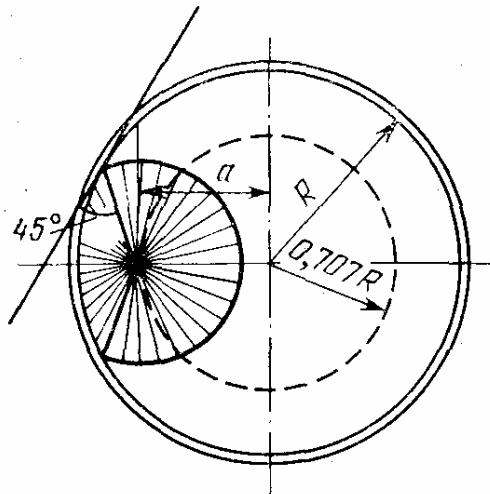


Рис. 61.

Для эллиптической пластиинки, нагруженной в фокусе, точно так же получаем

$$\frac{r}{r'} = \frac{1 + e \cos \theta}{e \sin \theta} < 1, \quad 1 + e \cos \theta < e \sin \theta,$$

$$e > \min \frac{1}{\sin \theta - \cos \theta} = 0,707.$$

Таким образом, максимальный эксцентризитет эллипса, при котором применима формула (12.1), равен 0,707.

Г л а в а 3

ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫЕ ПЛАСТИНКИ, НАГРУЖЕННЫЕ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКОЙ

§ 21. Пирамидальная форма разрушения

Этот вид нагрузки является наиболее распространенным в практике. Однако решения задач получаются более сложными, чем в случае загружения пластинки одной сосредоточенной силой. Рассмотрим сначала пирамидальные и конусоидальные формы пластинки.

Пластинка шарнирно опертая по контуру, имеющему вид правильного n -угольника (рис. 62) разрушается, согласно равенству (8.5), при

$$q = \frac{l_i m_T}{S_i} = \frac{am_T}{\frac{1}{2} ab \cdot \frac{b}{3}} = \frac{6m_T}{b^2}, \quad (21.1)$$

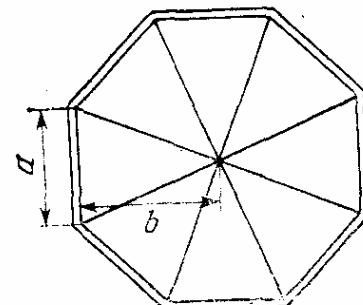


Рис. 62.

где a — сторона, b — апофема многоугольника. Учитывая, что

$$b = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n},$$

получаем, что

$$q = \frac{24m_T}{a^2} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n}.$$

Полная нагрузка на пластинку равна

$$Q = \frac{nab}{2} q = 3nm_T \frac{a}{b} = 6nm_T \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}.$$

В частности, для квадрата

$$n = 4, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1, \quad q = \frac{24m_T}{a^2}, \quad Q = 24m_T,$$

для равностороннего треугольника

$$n = 3, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}, \quad q = \frac{72m_t}{a^2}, \quad Q = 31,18m_t,$$

для равностороннего шестиугольника

$$n = 6, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad q = \frac{8m_t}{a^2}, \quad Q = 20,78m_t.$$

Для круглой пластиинки радиуса r получаем непосредственно из (21.1)

$$b = r, \quad q = \frac{6m_t}{r^2}, \quad Q = 6\pi m_t = 18,85m_t.$$

Аналогичны формы разрушения для пластиинки с полигональным контуром, описанным вокруг круга радиуса r . При этом

$$q = 6m_t/r^2, \quad Q = qF,$$

где F — площадь пластиинки.

Следует сказать, что эти формы разрушения появляются лишь при некоторых дополнительных условиях, а именно при отсутствии возможности приподнимания углов, а также при достаточно сильном верхнем армировании плиты, исключающем возможность появления краевых шарниров текучести.

Рассмотрим, как будет вести себя квадратная пластиинка при возможности поднимания углов. Представим себе форму разрушения, показанную на рис. 63. Здесь мы имеем восемь дисков, из

которых четыре поворачиваются вокруг шарнирно открытых сторон квадрата и четыре относительно усилий, срезающих углы квадрата под 45° .

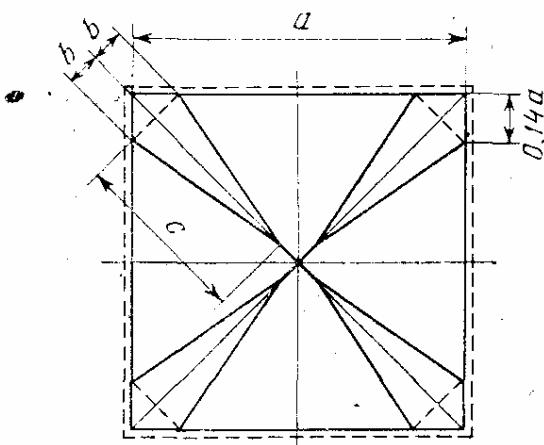


Рис. 63.

Определим статические моменты этих дисков относительно их осей вращения. Для средних дисков

$$\begin{aligned} S_c &= \frac{a^2}{4} \cdot \frac{a}{6} - \frac{1}{2} \cdot 2b \sqrt{2} \frac{b+c}{\sqrt{2}} \frac{b+c}{\sqrt{2}} \frac{1}{3} = \\ &= \frac{a^3}{24} - \frac{b(b+c)^2}{3\sqrt{2}} = \frac{a^3}{24} - \frac{b^3 + 2b^2c + bc^2}{3\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Для угловых дисков

$$S_y = bc \frac{c}{3} - b^2 \frac{b}{3} = \frac{bc^2 - b^3}{3}.$$

Необходимо приравнять нагрузки, получаемые из рассмотрения работы дисков обоих видов

$$\begin{aligned} \frac{m_T}{q} &= \frac{S_c}{a - 2\sqrt{2}b} = \frac{S_y}{2b}, \\ \frac{a^3}{24} - \frac{b^3 + 2b^2c + bc^2}{3\sqrt{2}} &= \frac{(c^2 - b^2)}{6} (a - 2\sqrt{2}b). \end{aligned}$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} ac^2 - ab^2 - 2\sqrt{2}bc^2 + 2\sqrt{2}b^3 &= \\ = \frac{a^3}{4} - \sqrt{2}bc^2 - 2\sqrt{2}b^2c - \sqrt{2}b^3, \\ \frac{a^3}{4} + ab^2 - 3\sqrt{2}b^3 - 2\sqrt{2}b^2c + \sqrt{2}bc^2 - ac^2 &= 0, \end{aligned}$$

или, введя обозначение $\sqrt{2}b/a = \eta$,

$$\frac{1}{4} + \frac{\eta^2}{2} - \frac{3}{2}\eta^3 - \sqrt{2}\eta^2 \frac{c}{a} + (\eta - 1) \frac{c^2}{a^2} = 0.$$

Решив это уравнение относительно c/a , получим

$$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}\eta^2 - \sqrt{8\eta^4 - 8\eta^3 + 2\eta^2 - \eta + 1}}{2(\eta - 1)}.$$

Теперь разрушающую нагрузку можно определить по формуле

$$q = \frac{2bm_T}{S_y} = \frac{6m_T}{c^2 - b^2} = \frac{6m_T}{a^2} \left(\frac{c^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{2} \right)^{-1},$$

причем η надо найти из условия минимума q или

максимума величины

$$\frac{c^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{2} = \frac{1 - \eta - 4\eta^3 + 8\eta^4 - 2\sqrt{2}\eta^2 \sqrt{8\eta^4 - 8\eta^3 + 2\eta^2 - \eta + 1}}{4(\eta - 1)^2}$$

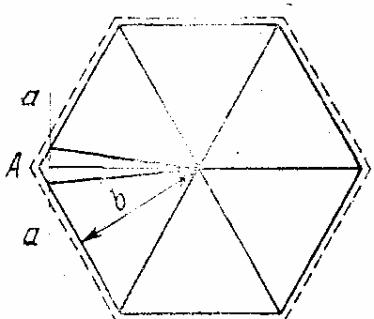
Произведя необходимые вычисления, получим

$$\eta = 0,14, \quad q = 22,2 \text{ } m_t/a^2,$$

что на 7,5% меньше, чем при отсутствии возможности приподнимания углов.

Нетрудно показать, что для любой пластиинки, опертой по полигональному контуру, описанному вокруг круга, углы будут приподниматься при отсутствии соответствующих закреплений. Действительно, выделяя очень узкий сектор, включающий вершину угла (рис. 64), убедимся, что для этого сектора отношение статического момента S , взятого относительно линии поворота $a-a$, к длине этой линии будет большим, чем такое же отношение для основных дисков, равное $b^2/6$, поэтому разрушающая нагрузка будет несколько меньше, чем $6m_t/b^2$, если только углы пластиинки не закреплены от поднимания. Лишь для круглой пластиинки значение $q_{np} = 6m_t/r^2$ будет точным.

Рис. 64.



§ 22. Прямоугольная пластиинка с равномерной нагрузкой

Для прямоугольной пластиинки, шарнирно опертой по контуру и загруженной равномерно распределенной нагрузкой, принимается форма разрушения в виде «конверта» (рис. 65). Расстояние c проще всего находится из выведенного выше критерия (8.5).

Определяя нагрузку по треугольному диску, получаем

$$q_1 = 6m_t/c^2,$$

а по трапециональному диску —

$$q_2 = \frac{am_t}{ab^2/8 - cb^2/6} = \frac{24am_t}{3ab^2 - 4cb^2}.$$

Приравняв q_1 и q_2 , найдем

$$4ac^2 = 3ab^2 - 4cb^2,$$

откуда

$$\frac{c}{b} = \frac{1}{2} (\sqrt{\xi^2 + 3} - \xi),$$

где $\xi = b/a$ — отношение меньшей стороны к большей.

Разрушающая нагрузка равна

$$q = \frac{6m_T}{c^2} = \frac{24m_T}{b^2 (\sqrt{\xi^2 + 3} - \xi)^2}. \quad (22.1)$$

Для квадратной пластиинки $\xi = 1$, $c/b = 0,5$

$$q = \frac{24m_T}{b^2}.$$

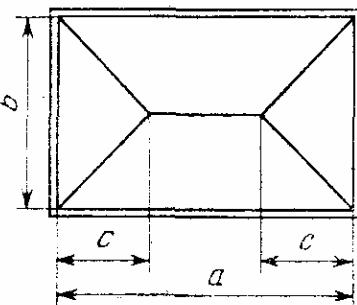


Рис. 65.

Для очень длинной пластиинки $\xi \rightarrow 0$, $c/b = \sqrt{3}/2$

$$q = \frac{8m_T}{b^2}.$$

Если углы пластиинки могут приподниматься, то образуются угловые секторы (рис. 66), как в случае квадратной пластиинки, причем разрушающая нагрузка незначительно снижается.

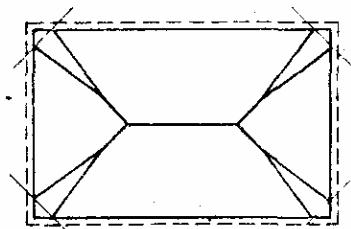


Рис. 66.

Полученное решение (22.1) не является точным, в чем можно убедиться, построив напряженное состояние пластиинки полностью удовлетворяющее условиям текучести в каждой точке, соответствующее истинному предельному состоянию равновесия. При этом следует положить

$$M_x = m_T \left(1 - \frac{4x^2}{a^2} \right), \quad M_y = m_T \left(1 - \frac{4y^2}{b^2} \right), \quad (22.2)$$

$$M_{xy} = -\frac{4xy}{ab} m_T.$$

Границные условия

$$\text{при } x = \pm \frac{a}{b} \quad M_x = 0 \text{ и при } y = \pm \frac{b}{2} \quad M_y = 0$$

здесь удовлетворяются, а главные максимальные изгибающие моменты равны

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{M_x + M_y}{2} + \sqrt{\frac{(M_x - M_y)^2}{4} + M_{xy}^2} = \\ &= m_T \left[1 - \frac{2x^2}{a^2} - \frac{2y^2}{b^2} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{4 \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^2 + \frac{16x^2y^2}{a^2b^2}} \right] = m_T = \text{const.} \end{aligned}$$

Такое напряженное состояние уравновешивается внешней нагрузкой

$$\begin{aligned} q &= - \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \right) = \\ &= m_T \left(\frac{8}{a^2} + \frac{8}{b^2} + \frac{8}{ab} \right) = \frac{8m_T}{ab} \left(1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, здесь мы имеем точное решение

$$q = \frac{8m_T}{b^2} (1 + \xi + \xi^2). \quad (22.3)$$

Значения qb^2/m_T в функции от ξ , определенные по формулам (22.1) и (22.3), приведены в табл. 1. Мы видим, что расхождение между этими формулами не превышает нигде 1,55 %.

Таблица 1

$\xi = b/a$	qb^2/m_T по формуле (22.1)	qb^2/m_T по формуле (22.3)	$\xi = b/a$	qb^2/m_T по формуле (22.1)	qb^2/m_T по формуле (22.3)
0	8,000	8,00	0,6	15,787	15,68
0,1	8,979	8,88	0,7	17,586	17,52
0,2	10,073	9,92	0,8	19,554	19,52
0,3	11,293	11,12	0,9	21,689	21,68
0,4	12,645	12,48	1,0	24,000	24,00
0,5	14,140	14,00			

В случае отсутствия верхней арматуры задачу можно решить также, исходя из формы разрушения, показанной на рис. 67. Здесь должно выполняться равенство (8.5)

$$S_1/d = S_2/1, \quad (22.4)$$

где S_1 — статический момент трапеции $ABCD$ относительно линии AD

$$S_1 = \frac{b^2}{24} (d + 2c), \quad (22.5)$$

а S_2 — статический момент кругового сектора с центром в точке B , радиуса $(a - c)^2/2$, с единичной бесконечно малой дугой, взятый относительно касательной к этой дуге.

$$S_2 = (a - c)^2/24. \quad (22.6)$$

Равенство (22.4) после подстановки в него (22.5) и (22.6) дает

$$2cb^2 + db^2 = (a - c)^2 d. \quad (22.7)$$

Кроме того, для прямоугольного треугольника ABE имеем равенство

$$(d - c)^2 + b^2 = (a - c)^2. \quad (22.8)$$

Решить систему уравнений (22.7) и (22.8) относительно c и d сложно. Поэтому решаем ее относительно a и b :

$$b = (d - c)\sqrt{d/(2c)}, \quad a = c + (d - c)\sqrt{(2c + d)/(2c)}.$$

Ввиду однородности этих уравнений можно задаться значением $d = 1$. Тогда получим

$$b = (1 - c)/\sqrt{2c}, \quad a = c + (1 - c)\sqrt{(2c + 1)/(2c)}. \quad (22.9)$$

Разрушающая нагрузка определится из равенства

$$q = \frac{m_T}{S_2} = \frac{24m_T}{(a - c)^2} = \frac{24m_T}{b^2} \frac{b^2}{(a - c)^2},$$

или

$$q = \frac{m_T}{b^2} \frac{24}{2c + 1}. \quad (22.10)$$

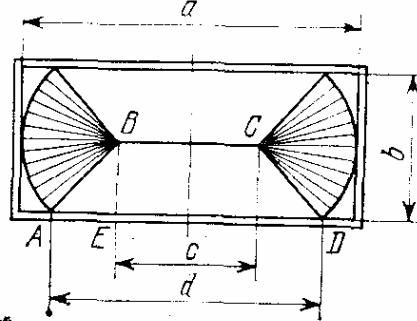


Рис. 67.

Результаты вычислений по формулам (22.9) и (22.10) приводим в табл. 2.

Построив по точкам кривую (22.10) и сравнив ее с кривой (22.3) (рис. 68), мы видим, что при наличии краевых шарниров по схеме рис. 65 разрушающая нагрузка

оказывается меньше. Это объясняется тем, что в напряженном состоянии (22.2) имеют место изгибающие моменты по линиям краевых шарниров текучести, тогда как при отсутствии верхней арматуры этих моментов быть не должно.

Иначе дело обстоит при наличии верхней арматуры. Полагая $m_t = m_{t_0}$, получим вместо уравнения (22.4)

$$S_1/d = S_2/2$$

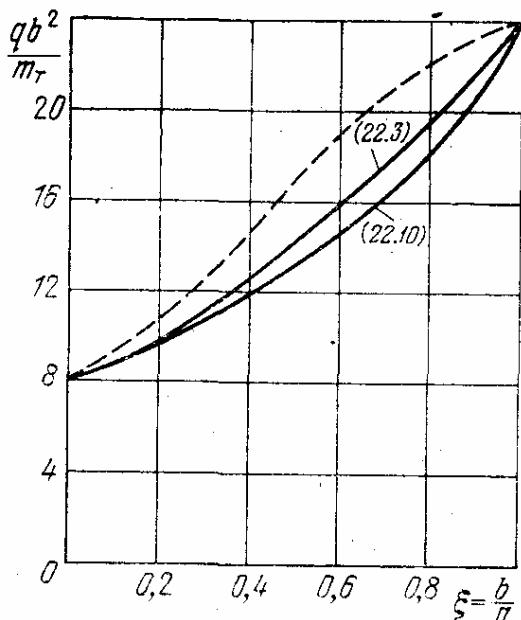


Рис. 68.

сности qb^2/m_t от ξ , показанной на рис. 68 штриховой линией. Поскольку штриховая кривая лежит выше кривых, соответствующих формулам (22.3) и (22.10), то форма разрушения с краевыми шарнирами текучести (рис. 67) в симметрично армированной плине не реализуется.

Таблица 2

d	c	b	a	$\xi = b/a$	qb^2/m_t
1	0			1	24
1	0,1	2,012	2,304	0,873	20
1	0,2	1,2649	1,697	0,745	17,14
1	0,3	0,9037	1,443	0,626	15
1	0,4	0,6708	1,300	0,516	13,33
1	0,5	0,5	1,2071	0,414	12
1	0,6	0,3651	1,1416	0,320	10,91
1	0,7	0,2535	1,0928	0,232	10
1	0,8	0,1581	1,0550	0,150	9,23
1	0,9	0,0745	1,0247	0,073	8,57
1	1,0	0	1	0	8

§ 23. Прямоугольная пластина, опертая по трем сторонам

Прямоугольная пластина, опертая по трем сторонам, может рассматриваться приближенно как половина прямоугольной пластиинки удвоенной длины, разрезанная по перек среднего шарнира (на рис. 69 показана форма разрушения такой пластиинки при $b/a < 2$). При этом в формуле (22.1) ξ должно быть положено равным $-b/(2a)$. Тогда получаем, введя обозначение $\eta = -b/a = 2\xi$,

$$\frac{c}{b} = \frac{1}{4} (\sqrt{\eta^2 + 12} - \eta),$$

$$q = \frac{96m_T}{b^2 / (\sqrt{\eta^2 + 12} - \eta)^2}.$$

(23.1)

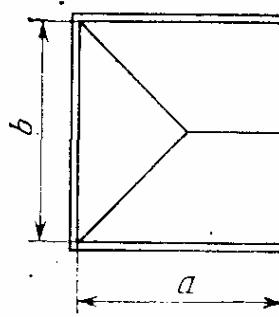


Рис. 69.

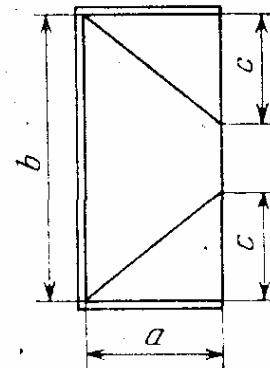


Рис. 70.

Эта формула дает, однако, заведомо завышенные значения q , так как в место разреза вводится момент, оказывающий некоторое сопротивление внешней нагрузке.

При большом отношении b/a можно рассмотреть форму, полученную разрезанием удвоенной прямоугольной пластиинки вдоль среднего шарнира (рис. 70). При этом следует исключить работу внутренних сил в среднем шарнире, вместо которого появляется свободный край. Получаем

$$T = 2 \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) m_T, \quad V = qa \left(\frac{b}{2} - \frac{c}{3} \right), \quad (23.2)$$

$$q = \frac{2 \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) m_T}{a \left(\frac{b}{2} - \frac{c}{3} \right)} = \frac{12m_T(c^2 + a^2)}{a^2(3bc - 2c^2)}.$$

Минимум q будет при

$$\frac{dq}{da} = 0, \quad (3bc - 2c^2)2c - (c^2 + a^2)(3b - 4c) = 0,$$

$$3bc^2 + 4a^2c - 3a^2b = 0;$$

отсюда

$$c = \frac{-2a^2 + \sqrt{4a^4 - 9a^2b^2}}{3b} = \frac{\sqrt{4 + 9\eta^2} - 2}{3\eta^2} b. \quad (23.3)$$

Подставив (23.3) в (23.2), после ряда преобразований получим

$$q = \frac{16m_t}{3b^2\eta^2} \left(1 - \frac{4 - 6\eta^2 - 2\eta^4}{\sqrt{4 + q\eta^2}} \right). \quad (23.4)$$

Построив графики зависимости q от η (рис. 71), находим,

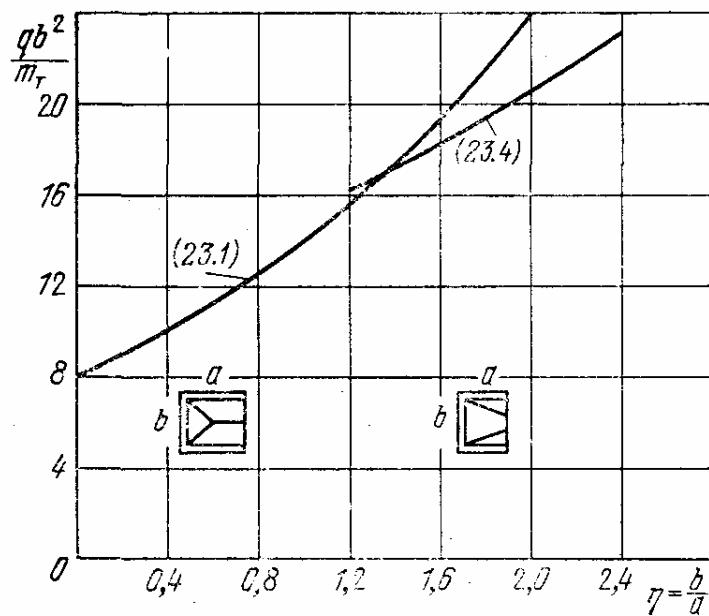


Рис. 71.

что при $\eta < 1,3$ следует пользоваться формулой (23.1), а при $\eta > 1,3$ — формулой (23.4).

§ 24. Квадратная пластиинка с отверстием в центре

Возьмем шарнирно оперту по контуру квадратную пластиинку с квадратным отверстием в центре (рис. 72), нагруженную равномерной нагрузкой q . Согласно § 8 предельное значение q здесь будет равно отношению величины $(a - c)m_t$ к статическому моменту трапеции $ABEF$, взятому относительно стороны AB

$$q = \frac{24(a - c)m_t}{(a + 2c)(a - c)^2} = \frac{24m_t}{(a + 2c)(a - c)} = \frac{24m_t}{a^2(1 + 2\xi)(1 - \xi)}, \quad (24.1)$$

где $\xi = c/a$.

График зависимости q от ζ по формуле (24.1) построен на рис. 73. Мы видим, что при увеличении отверстия

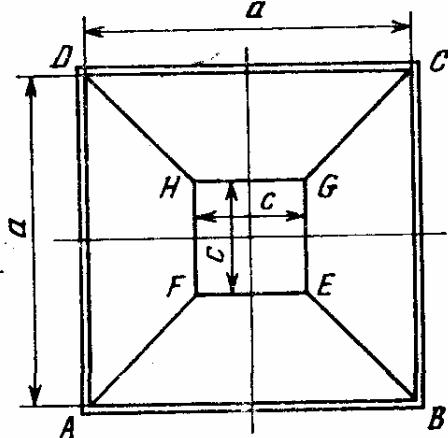


Рис. 72.

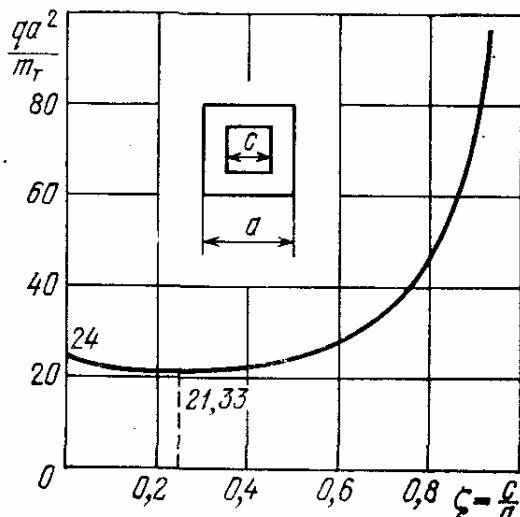


Рис. 73.

пределная нагрузка на единицу площади пластиинки сначала снижается, а потом увеличивается. Наименьшая предельная нагрузка достигается при $\zeta = 0,250$ и равна $\frac{qa^2}{m_r} = 21,33 \text{ m}_r/a^2$.

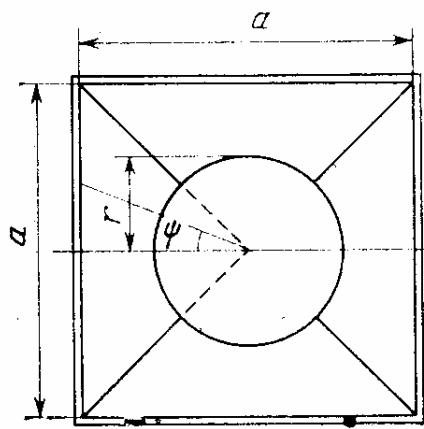


Рис. 74.

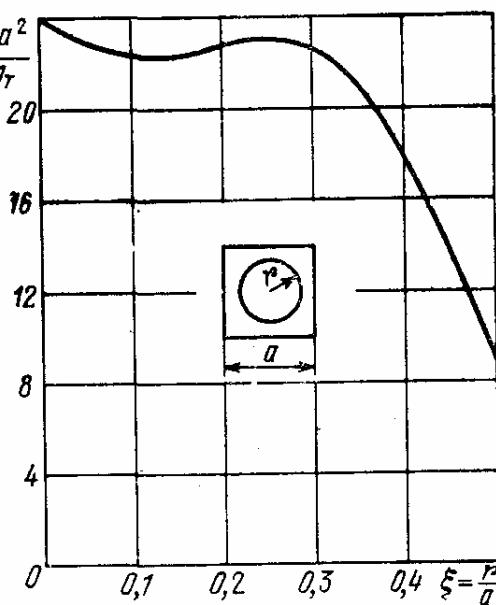


Рис. 75.

Рассмотрим еще случай круглого отверстия в центре шарнирно опертой квадратной пластиинки (рис. 74). Здесь работа внутренних сил, приходящаяся на одну четверть

пластинки, определяется, согласно § 9, по формуле

$$T_1 = m_t \left(\varphi a - \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \varphi \cos \psi \cdot r d\psi \right) = m_t \varphi (a - r \sqrt{2}),$$

где φ — угол наклона граней пластиинки в направлении, перпендикулярном стороне опирания; $\varphi \cos \psi$ — угол наклона в направлении, идущем под углом ψ к оси симметрии грани (рис. 74).

Работа внешних сил равна

$$\begin{aligned} V_1 &= \varphi S_1 = \varphi q \left[\frac{a^3}{24} - \frac{\pi r^2}{4} \left(\frac{a}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} r \right) \right] = \\ &= \varphi q \left(\frac{a^3}{24} - \frac{\pi r^2 a}{8} - \frac{\sqrt{2}}{2} r^3 \right), \end{aligned}$$

где S_1 — статический момент нагрузки, расположенный на четверти пластиинки и взятый относительно линии опирания; $\frac{2\sqrt{2}}{\pi} r$ — расстояние от центра квадрата до центра тяжести площади четверти отверстия.

Из равенства $V_1 = T_1$, получим

$$q = \frac{(a - r \sqrt{2}) m_t}{\frac{a^3}{24} - \frac{\pi r^2 a}{8} - \frac{r^3}{\sqrt{2}}}, \quad \frac{q a^2}{m_t} = \frac{1 - \xi \sqrt{2}}{\frac{1}{24} - \frac{\pi}{8} \xi^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \xi^3},$$

где $\xi = r/a$.

График зависимости q от ξ представлен на рис. 75. Мы видим, что при увеличении радиуса круглого отверстия предельная нагрузка сначала несколько снижается, потом немного поднимается, не доходя до начального значения $q = 24 m_t/a^2$ при $\xi = 0$, и после $\xi = 0,25$ (когда диаметр отверстия равен половине стороны квадрата) снижается до величины $q = 9,189 m_t/a^2$ при отверстии, касающемся сторон квадрата.

Г л а в а 4

ПРИМЕНЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ К ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ПЛАСТИНКИ

§ 25. Сетка возможных шарниров текучести

Экстремальную задачу о нахождении разрушающей нагрузки для жестко пластической пластинки удобно решать методами линейного программирования. Впервые линейное программирование было применено для этой задачи Вольфенсбергером [172], Черадини и Гаварини [138] и Купманом и Лансом [156]. Эти авторы вводили ограничения по условиям текучести в отдельных точках пластинки аналогично методу коллокаций. Нами был предложен иной метод [102, 104] расчета, в котором пластинка заменяется некоторой многократно изменяемой системой, включающей в себя большое количество возможных форм разрушения. При этом при помощи линейного программирования автоматически находятся параметры, определяющие форму разрушения, наиболее близкую к истинной и достаточно точное значение разрушающей нагрузки. Здесь мы изложим этот последний метод.

Зададимся формой разрушения пластинки в виде пологого многогранника, вершины которого расположены в узлах квадратной сетки с диагоналями (рис. 76). При этом работа внутренних сил оказывается равной

$$T = - \sum m_{ti} \theta_i l_i,$$

где θ_i — двугранный угол перелома в i -м ребре многогранника, имеющем длину l_i . Суммирование в формуле (25.1) производится по всем ребрам перелома.

Пределный момент m_{ti} может быть различным для каждого ребра перелома, в частности отрицательным при отрицательных углах перелома.

Углы θ_i полностью определяются значениями прогибов пластиинки в узлах сетки. Имея перед глазами сетку ребер перелома с пронумерованными узлами, это сделать

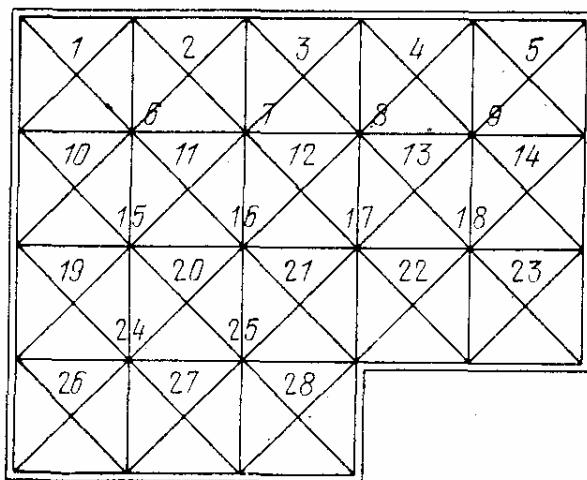


Рис. 76.

очень легко. Например, угол перелома на участке 15—16 сетки, изображенной на рис. 76, равен

$$\theta_{15-16} =$$

$$= \left(w_{15} + w_{16} - 2 \frac{w_{11} + w_{20}}{2} \right) \frac{2}{\lambda} = (w_{15} + w_{16} - w_{11} - w_{20}) \frac{2}{\lambda},$$

где λ — размер стороны квадрата сетки. Точно так же получаем

$$\theta_{7-16} = (w_7 + w_{16} - w_{11} - w_{12}) \frac{2}{\lambda}.$$

Для диагональных участков сетки угол перелома определяется несколько иначе. Например, для участков 6—11 и 13—17 имеем

$$\theta_{6-11} = (2w_{11} - w_7 - w_{15}) \frac{\sqrt{2}}{\lambda},$$

$$\theta_{13-17} = (2w_{13} - w_8 - w_{18}) \frac{\sqrt{2}}{\lambda}.$$

Нетрудно показать, что угол перелома на участках двух полуdiagоналей, например 6—11 и 11—6, всегда один и тот же; поэтому в расчете мы можем иметь дело с целыми диагоналями, не расчленяя их на половины.

Таким образом, определяем, например,

$$\theta_{6-16} = \theta_{6-11} = \theta_{11-16} = (2w_{11} - w_7 - w_{15}) \frac{\sqrt{2}}{\lambda}.$$

Закон составления выражений для θ ясен и нет необходимости записывать его в общем виде.

Работа внутренних сил на прямых участках сетки ребер перелома равна — $m_t \theta \lambda$ или $m'_t \theta \lambda$, а на диагоналях (полных) — $m_t \theta \lambda \sqrt{2}$ или $m'_t \theta \lambda \sqrt{2}$, причем первые выражения берутся в случае $\theta > 0$, а вторые — при $\theta < 0$.

Общая работа внутренних сил равна

$$T = - \sum m_{t_i} \Phi_i,$$

где Φ_i — наибольшая из величин $l_i \theta_i$ и $-\frac{m'_t}{m_t} l_i \theta_i$. Мы имеем, таким образом, неравенства

$$\Phi_{i-k} \geqslant \theta_{i-k} l_{i-k}, \quad \Phi_{i-k} \geqslant -\frac{m'_t}{m_t} \theta_{i-k} l_{i-k}. \quad (25.1)$$

Выражая θ через прогибы w , получим вместо (25.1) ряд неравенств вида

$$\begin{aligned} \Phi_{15-16} &\geqslant 2(w_{15} + w_{16} - w_{11} - w_{20}), \\ \Phi_{15-16} &\geqslant -\frac{2m'_t}{m_t}(w_{15} + w_{16} - w_{11} - w_{20}), \\ \Phi_{6-16} &\geqslant 2(2w_{11} - w_7 - w_{15}), \\ \Phi_{6-16} &\geqslant -\frac{2m'_t}{m_t}(2w_{11} - w_7 - w_{15}), \end{aligned} \quad (25.2)$$

Работа внешних сил в состоянии разрушения равна

$$V = \sum w_i P_i.$$

Здесь P_i — часть вертикальной нагрузки, расположенная на участке пластиинки, тяготеющем к углу i (рис. 77).

Потеря потенциальной энергии системы на заданном перемещении равна алгебраической сумме работ внешних

и внутренних сил

$$U = V + T = \sum w_i P_i - \sum m_t \varphi_{i-k}. \quad (25.3)$$

Во второй сумме суммирование производится по всем участкам сетки возможных ребер перелома.

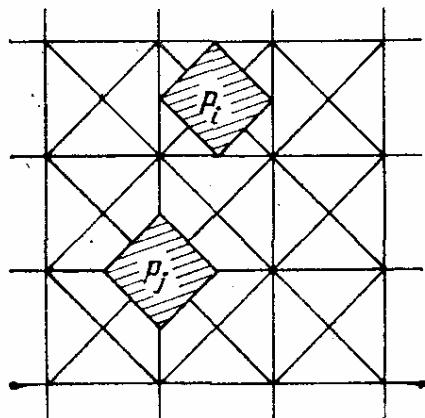


Рис. 77.

Для истинной формы разрушения величина U должна быть максимальной. Кроме того, в состоянии предельного равновесия она обращается в нуль. Таким образом, получаем следующую задачу параметрического линейного программирования. Требуется найти максимум линейной формы U (25.3) при наличии неравенств (25.2), полагая прогиб одного из узлов, равным единице. Далее надо отыскать такое значение параметра нагрузки, т. е. общего множителя при величинах P_i , при котором максимум формы U обращается в нуль. Попутно в процессе решения задачи получаются все данные для нахождения формы разрушения пластиинки.

Эта задача решается при помощи симплекс-метода, для которого имеются готовые программы вычислений на электронно-цифровых машинах.

Вместо параметрического программирования можно применять обычное программирование, заменив условие равенства нулю потенциальной энергии, условием нормированности работы внешних сил $V = 1$ или внутренних сил $T = 1$. При этом соответственно величина T должна быть минимальной или величина V максимальной.

§ 26. Двойственная задача линейного программирования в расчете пластиинки

В матричной форме задача предельного равновесия пластиинки может быть записана в виде [133]

$$\begin{aligned} \varphi - Aw &\geq 0, \\ k\varphi + Aw &\geq 0, \\ -m_t\varphi + Pw &= \max. \end{aligned}$$

Здесь φ — вектор величин φ_{i-k} , w — вектор прогибов, P — вектор внешних нагрузок, m_t — вектор предельных моментов, которые могут быть различными на разных участках сетки шарниров текучести, A — матрица коэффициентов правых частей уравнений (25.2), k — отношение предельных моментов при изгибе в одну и другую сторону.

Как известно, каждой задаче линейного программирования соответствует двойственная задача, которая получается транспонированием таблицы основной задачи. В расчете несущей способности методом предельного равновесия паре двойственных задач линейного программирования соответствует расчет одной и той же системы кинематическим и статическим методами. Поэтому, составив таблицу для кинематического метода, можно автоматически получить ограничения для решения задачи статическим методом. В нашем случае двойственная статическая задача получается из кинематической следующим образом. Столбцы транспонированной матрицы ограничений соответствуют моментам, действующим на отрезках шарниров текучести. Стока функции цели, представляющая собой выражение работы внутренних сил пластинки, переходит в столбец свободных членов, содержащий значения внешних сил и предельных изгибающих моментов; кроме того, меняются знаки неравенств.

Таким образом, получаем схему

$$\left. \begin{array}{l} M^+ + kM^- \leq m_t; \\ A^t M^+ - A^t M^- = P. \end{array} \right\} \quad (26.1)$$

Здесь M^+ — вектор положительных, а M^- — вектор отрицательных моментов, взятых по своей абсолютной величине.

Таким образом, предполагаются неравенства $M_{i-k}^+ \geq 0$ и $M_{i-k}^- \geq 0$. Если один из моментов M_{i-k}^+ и M_{i-k}^- отличен от нуля, то другой обязательно должен быть равен нулю. Поэтому первая строка в (26.1) расшифровывается как условие того, что

$$0 \leq M_{i-k}^+ \leq m_t, \quad 0 \leq M_{i-k}^- \leq m_t/k.$$

Вторая строка в (26.1) представляет собой условия равновесия, точнее, условия обеспечения восприятия нагрузки, приложенной в каждом узле сетки возможных шарниров текучести. Эти условия можно вывести непосредственно из рассмотрения равновесия прилегающих к данному узлу панелей пластиинки. Для узла, образованного

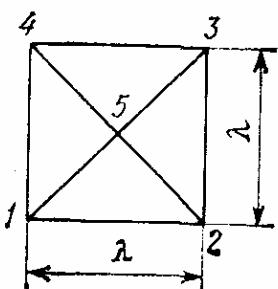


Рис. 78.

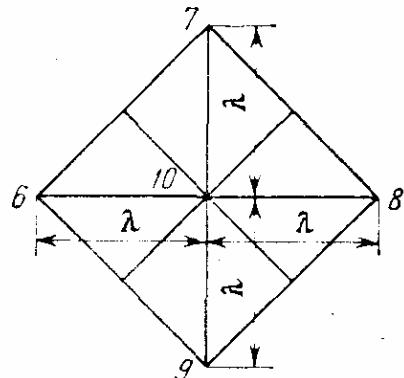


Рис. 79.

пересечением двух диагоналей квадратной сетки, следует составить условия равенства нулю моментов, действующих на каждую прилегающую панель, относительно стороны ее, противоположной узлу (рис. 78):

$$M_{1-4}\lambda - (M_{5-1} - M_{5-4}) \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} + (L_{5-1} - L_{5-4}) \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} + (Q_{5-4} - Q_{5-1}) \frac{\lambda}{\sqrt{2}} r_{1-4} + P_{5,1-4} \frac{\lambda}{2} = 0. \quad (26.2)$$

Здесь $P_{5,1-4}$ — часть внешней нагрузки, приложенной в узле 5, которую можно отнести к панели 5—1—4; L_{i-k} и Q_{i-k} — крутящие моменты и поперечные силы на стороне $i-k$; r_{1-4} — плечо равнодействующей поперечной силы относительно стороны 1—4.

Три аналогичных уравнения для панелей 5—2—1, 5—3—2, и 5—4—3 получаются из (26.2) круговой перестановкой индексов 1, 2, 3, 4. Суммируя эти четыре уравнения, получим после деления на λ

$$M_{1-4} + M_{2-1} + M_{3-2} + M_{4-3} - M_{1-5} - M_{2-5} - M_{3-5} - M_{4-5} + 0,5P_5 = 0.$$

Крутящие моменты L_{i-k} и поперечные силы Q_{i-k} при этом исчезнут из рассмотрения.

Далее следует осреднить моменты на двух половинах каждой диагонали, положив

$$M_{1-5} = M_{3-5} = M_{1-3}, \quad M_{2-5} = M_{4-5} = M_{2-4},$$

и тогда будем иметь

$$M_{1-4} + M_{2-1} + M_{3-2} + M_{4-3} - 2M_{1-3} - 2M_{2-4} + 0,5P_5 = 0. \quad (26.3)$$

Для узла, расположенного в углу квадратной сетки (рис. 79), напишем условие равенства нулю моментов, приложенных к панели 6—7—10, относительно стороны 6—7:

$$\begin{aligned} M_{6-7}\lambda\sqrt{2} - (M_{6-10} + M_{7-10})\frac{\lambda}{\sqrt{2}} + (L_{6-10} - L_{7-10})\frac{\lambda}{\sqrt{2}} + \\ + (Q_{6-10} - Q_{7-10})\lambda r_{6-7} + P_{10,6-7}\frac{\lambda}{\sqrt{2}} = 0, \end{aligned}$$

где $P_{10,6-7}$ — часть нагрузки в узле 10, отнесенной к панели 10—6—7; остальные обозначения аналогичны (26.2).

Складывая это уравнение с тремя такими же, составленными для панелей 7—8—10, 8—9—10 и 9—6—10, получим, разделив на $\lambda\sqrt{2}$,

$$\begin{aligned} M_{6-7} + M_{7-8} + M_{8-9} + M_{9-6} - M_{6-10} - M_{7-10} - M_{8-10} - \\ - M_{9-10} + 0,5P_{10} = 0. \quad (26.4) \end{aligned}$$

Уравнения (26.3) и (26.4) пригодны полностью для положительных моментов M_{i-k}^+ . Отрицательные моменты M_{i-k}^- дадут те же уравнения, но с измененными знаками коэффициентов при всех членах, кроме последних, относящихся к внешней нагрузке. Суммируя влияние положительных и отрицательных моментов, получим равенства типа

$$\begin{aligned} M_{1-4}^+ + M_{2-1}^+ + M_{3-2}^+ + M_{4-3}^+ - 2M_{1-3}^+ - 2M_{2-4}^+ - M_{1-4}^- - \\ - M_{2-1}^- - M_{3-2}^- - M_{4-3}^- + 2M_{1-3}^- + 2M_{2-4}^- + 0,5P_5 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & M_{6-7}^+ + M_{7-8}^+ + M_{8-9}^+ + M_{9-6}^+ - M_{6-10}^+ - M_{7-10}^+ - M_{8-10}^+ - \\
 & - M_{9-10}^+ - M_{6-7}^- - M_{7-8}^- - M_{8-9}^- - M_{9-6}^- + M_{6-10}^- + \\
 & + M_{7-10}^- + M_{8-10}^- + M_{9-10}^- + 0,5P_0 = 0,
 \end{aligned} \quad \dots \quad (26.5)$$

Из каждой пары значений M_{i-k}^+ и M_{i-k}^- одно обязательно равно нулю. Закон образования уравнений типа (26.5) ясен, поэтому не выписываем их в общих обозначениях.

Решая основную задачу линейного программирования, заключающуюся в определении формы разрушения пластиинки, мы одновременно решим и двойственную задачу статического метода, получая при этом значения моментов M_{i-k}^+ и M_{i-k}^- на участках сетки шарниров текучести в предельном состоянии пластиинки.

§ 27. Пример расчета пластиинки методом линейного программирования

Для того чтобы продемонстрировать ход вычислений симплекс-методом предельной нагрузки и наиболее опасной формы разрушения пластиинки, возьмем простой пример, не требующий применения ЭВМ. Квадратная пластиинка с отверстием в середине

в виде повернутого квадрата (рис. 80) разбивается сеткой, как показано на рисунке. Нагрузку предполагаем симметричной относительно всех осей симметрии квадрата и сосредоточенной в узлах сетки. Считаем, что в узлах 3, 4 и 5 приложена сила P , в узле 6 — сила $0,75P$ и в узле 7 — сила $0,5P$. Ввиду симметрии задачи рассматриваем лишь одну восьмую часть квадрата, содержащую поименованные выше узлы сетки.

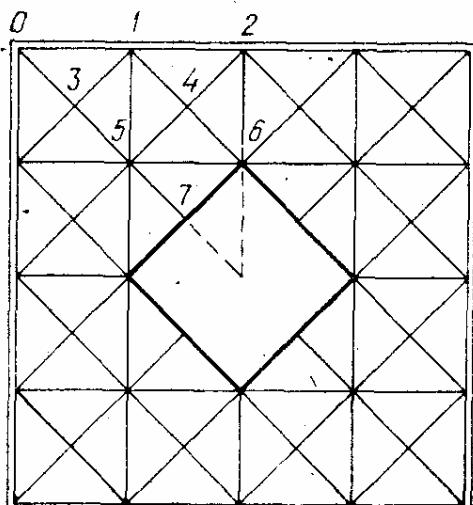


Рис. 80.

Пользуясь формулами типа (25.3) составляем табл. 3/1, исходную для симплекс-метода. Прогибы узлов w_3 , w_4 , w_5 , w_6 и w_7 предполагаем положительными. Если бы

Таблица 3/4

	-51	-62	-65	-50	-75	-64	-31	-52	-w ₃	-w ₄	-w ₅	-w ₆	-w ₇	
1	-1	-4							1	1	-4	-1		$2M_{51}^-$
2									2		-4	-1	1	M_{62}^-
3									4		-4	-1		$2M_{65}^-$
4									4					M_{50}^-
5									-2					$0,5M_{75}^-$
6									-2	1	1			M_{61}^-
7									-2	1				M_{31}^-
8									-2					$2M_{52}^+$
9									-4	-1	1	1		$2M_{51}^+$
10									-4		-2			M_{62}^+
11									-4		-1	1		M_{50}^+
12									-4		1	1		$2M_{75}^+$
13									2		2			$0,5M_{61}^+$
14									2		-1			$2M_{31}^+$
15									2					$2M_{52}^+$
<i>m_T</i>	2	1	2	1	0,5	2	1	2						
<i>P</i>	Φ_{51}	Φ_{62}	Φ_{65}	Φ_{50}	Φ_{75}	Φ_{61}	Φ_{31}	Φ_{52}	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	

была возможность появления отрицательных прогибов, то метод вычисления должен был быть изменен в соответствии с более общим алгоритмом симплекс-метода. Прогиб w_7 полагаем равным единице, а столбец, соответствующий этому прогибу, считаем столбцом свободных членов. Остальные столбцы относятся к величинам $-0,5\varphi_{i-k}$, которые сокращенно будем обозначать просто ik , причем для того, чтобы не спутать эти обозначения с двузначными номерами строк, стоящими в левом столбце, условимся в обозначениях ik ставить впереди больший индекс. Строку функции цели (25.3) разобьем на две: в первой строке выпишем коэффициенты при $0,5t\varphi_{i-k}$, а во второй — коэффициенты при Rw_i . При этом силы в узлах, расположенных на границе выделенного октана берем в половинном размере, так же как и углы поворота по ребрам, идущим по границе октана. Учитываем также длину ребер в пределах октана, уменьшая коэффициенты строки цели при половинной длине диагонали внутри октана. Таким образом, коэффициенты строки цели уменьшаются наполовину в столбцах 62, 50, 31, $-w_3$, $-w_5$, $-w_6$ и $-w_7$, а в столбце 75 — в четыре раза.

Ввиду того, что величины φ_{i-k} могут быть отрицательны, производим перестановки столбцов со строками по правилам модифицированного жорданова преобразования [60] так, чтобы все коэффициенты в столбце свободных членов $-w_7$ были отрицательны. Для этого необходимо произвести две переброски относительно элементов, помещенных в табл. 3/1 и 3/2 в рамки. При каждой переброске таблица перестраивается следующим образом. Элемент AB , относительно которого производится переброска (A — обозначение строки, B — столбца) заменяется своей обратной величиной $1/AB$, в строке A все коэффициенты делятся на элемент AB , а в столбце B — также делятся на элемент AB и меняют знак. Из остальных элементов, например из элемента CD , отнимается величина $CB \cdot AD / AB$. При этой операции обозначения строки A и столбца B меняются местами.

В первых двух перестановках относительно элементов (3.65) и (13.75), помещенных в рамки, величины этих элементов равны -1 . Поэтому коэффициенты строк 3 и 13 получают обратный знак, а коэффициенты столбцов 65 и 75 не изменяются. Остальные коэффициенты изменяются

Таблица 3/2

согласно указанному правилу. Ввиду большого количества нулевых коэффициентов, обозначенных в таблицах пустыми местами и простоты коэффициентов переброска производится при помощи вычислений в уме.

Табл. 3/3 дает уже опорный план поставленной задачи, поскольку в ней нет положительных коэффициентов столбца свободных членов. Элементы строки цели в столбце свободных членов дают

$$3m_t - 0,25P = 0,$$

откуда $P/m_t = 12$. Однако при этом значении P далеко не все коэффициенты строки цели неотрицательны, как это требуется для оптимального плана. Условия неотрицательности коэффициентов строки цели выполняются при следующих неравенствах: $P < 0$, $P/m_t < 2$, $P/m_t < -4$, $P/m_t < -\infty$ (соответствующие цифры поставлены в дополнительной строке, написанной ниже строки цели). Поэтому необходимо произвести ряд перебросок столбцов со строками, чтобы прийти к оптимальному плану.

Начинаем эти переброски со столбца w_6 , определяющего неравенство $P/m_t < -8$. Находим в этом столбце положительный коэффициент так, чтобы частное от деления на него коэффициента столбца свободных членов той же строки было наименьшим по абсолютной величине. Таким элементом можно взять $8, -w_6 = 1$ или $10, -w_6 = 1$, соответствующие коэффициенты столбца свободных членов равны нулю. Выбираем элемент $8, -w_6$. Поскольку он равен единице, то после переброски остальные коэффициенты столбца, соответствующего этому элементу, лишь меняют знак и вместо неравенства

$$-3m_t - 0,375P > 0, \quad P/m_t < -8$$

получаем обратное по знаку неравенство

$$3m_t + 0,375P > 0, \quad P/m_t > -8.$$

Таким образом, приходим к табл. 3/4, в которой обозначения строки 8 и столбца $-w_6$ меняются местами. В этой таблице свободные члены также дают $P/m_t = 12$, а неотрицательность коэффициентов строки цели требует удовлетворения неравенств

$$\begin{aligned} P/m_t < 8/3, \quad P/m_t < 0, \quad P/m_t < -8/7, \\ P/m_t < -4 \text{ и } P/m_t > -8, \end{aligned}$$

Таблица 3/3

Таблица 3/4

 $-8 < P < -4$

	-54	-62	-3	-50	-13	-64	-34	-52	$-w_3$	$-w_4$	$-w_5$	-8	$-w_7$
1	-4	-4							1	4	-4	1	
2		-4							1	1	-1	1	
65			-4						4	1	-4	-1	
4				-4					-2	8		-4	
5					-4				-4				
6						-4			-2				
7							-4		-1				
w_6								-4	-1				
9									4				
10									1				
11									2				
42									2				
75									2				
14									-1				
15									-4				
16									-2				
m_T									-1				
P									-4				
									$-0,375$	$-0,5$	$-1,75$	$-0,5$	$0,375$
									$-0,375$	$-0,5$	$-2,28$	< -4	> -8
									$-2,67$	< 0	$< -2,28$	< -4	> -8
												3	$-0,25$
												12	

Таблица 3/5

 $-4 < P < -2,67$

	-54	-62	-3	-50	-13	-64	-31	-52	$-w_3$	$-w_4$	-7	-8	$-w_7$
1	-1	-4					-1	-1	1	1	1	1	
2			-1					1	2	4	-4	-1	-1
65				-1				4	2	8	-4	-4	
4					-1		-1	-1	-2	-2	1	1	-1
5						-1			2	-2	-1	-4	
6							-1	-1	-2	-2	1	1	
w_5								1	1	-1	-1	-1	
w_6									$\frac{1}{2}$	2	2	-2	
9	-1									4	2	-2	-2
10		-1							2	2	4	1	
11			-1							-2	2	-2	
12				-1						-2	1	1	
75					-1		-1	-1	2	2	4	1	
14						-1	-1	-1	-2	-2	2	-2	
45									2	2	4	1	
16										-4	-4	2	3
m_T											-4	$0,5$	$0,375$
P												$-0,25$	12
									$<-2,67$	$<-2,67$	$<-2,28$	>-4	>-8

Таблица 3/6

	-54	-52	-44	-65	-13	-61	-14	-2	-4	-42	-7	-8	$-w_7$
9	-2	1	$2/3$	$2/3$	$4/3$	$8/3$	$8/3$	$-4/3$	2	-1	-2	$-2/3$	$2M_{51}^+$
10	-6	$2/3$	$4/3$	$4/3$	-1	$8/3$	$-8/3$	$-8/3$	4	-1	$-4/3$	$-4/3$	M_{62}^+
50	-12	$4/3$	$4/3$	$-8/3$	-1	$8/3$	$-8/3$	-2	1	$-1/3$	$-4/3$	$-4/3$	M_{50}^-
4	$4/3$	$4/3$	$-8/3$	-1	-2	$-1/3$	$-1/3$	$-1/3$	-1	1	$-1/3$	$0,5M_{75}^-$	$2M_{61}^-$
5	6	w_5	w_6	w_3	62	3	w_4	w_4	w_4	w_4	w_4	w_4	$2M_{65}^-$
w_5	$2/3$	$2/3$	$2/3$	$1/3$	$1/3$	$1/3$	$1/3$	$1/3$	$1/3$	$1/3$	$1/3$	$1/3$	5
w_6	-2	-2	-2	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	6
w_3	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3
62	1	1	1	-1	-1	-1	-1	$-1/3$	$1/3$	$1/3$	$-1/3$	$-1/3$	62
3	$1/3$	$1/3$	$1/3$	$-4/3$	$-4/3$	$-4/3$	$-4/3$	$-4/3$	-1	-1	-1	-1	$2M_{65}^-$
w_4	$2/3$	$2/3$	$2/3$	2	2	2	2	2	-2	-2	-2	-2	4
75	4	4	4	-2	-2	-2	-2	-2	-1	-1	-1	-1	75
34	2	2	2	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	31
45	4	4	4	-2	-2	-2	-2	-2	2	2	2	2	$2M_{52}^+$
16	6	6	6	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1
m_r	6	6	6	$0,5$	$0,5$	$0,5$	$0,5$	$0,5$	1	1	1	1	1
P	$1,25$	$0,708$	$1,083$	$<0,083$	$0,083$	$0,083$	$<0,12$	$<0,12$	1	$0,5$	$0,5$	$0,5$	$0,5$
Φ_{51}	$>-4,8$	>0	>0	>0	>0	>0	>0	>0	>0	>0	>0	>0	>0
Φ_{52}	Φ_{55}	$2M_{65}^+$	$2M_{65}^+$	$2M_{61}^+$	$2M_{61}^+$	$2M_{61}^+$	$2M_{61}^+$	$2M_{61}^+$	M_{50}^+	M_{50}^+	M_{50}^+	M_{50}^+	M_{51}^-

т. е.

$$-8 < P/m_t < -4,$$

что не соответствует значению $P/m_t = 12$, но уже в меньшей степени, чем в предыдущей таблице неравенств.

Для следующей переброски выбираем элемент в столбце $-w_5$, который дает неравенство $P/m_t < -4$. Подходящим элементом здесь будет $7, -w_5$. После переброски получаем табл. 3/5, из которой следует $P/m_t = 12$ и $-4 < P/m_t < -8/3$.

Поступая таким образом далее, получаем шестнадцать таблиц, из которых приведем последнюю (табл. 3/6). В этой таблице неравенства предпоследней строки уже не противоречат значению $P/m_t = 0,75$, стоящему в нижней клетке столбца свободных членов, что означает оптимальный план задачи, соответствующий минимуму предельной нагрузки.

Соответствующая форма разрушения определяется из столбца свободных членов, который дает при $w_7 = 1, w_5 = 2/3, w_6 = 2/3, w_3 = 1/3, w_4 = 1/3, 0,5\varphi_{5-0} = 2/3, \varphi_{6-2} = 0, 0,5\varphi_{7-5} = 2/3, \varphi_{3-1} = 0$. Кроме того, по смыслу симплекс-метода при оптимальном плане величины, обозначенные в верхней строке двумя цифрами, из которых первая больше второй, равны нулю, т. е. $\varphi_{5-1} = \varphi_{5-2} = \varphi_{6-5} = \varphi_{6-1} = 0$.

Общий вид формы разрушения показан на рис. 81.

Для решения двойственной задачи определения моментов на участках сетки возможных шарниров текучести составим уравнения типа (26.5), учитывая наличие четырех осей симметрии. С добавлением условий первой группы (26.1) при $P = 1$ получим табл. 4/1. Если в этой таблице заменить неизвестные моменты кратными им величинами, указанными сверху таблицы, умножив одновременно ограничения на коэффициенты, указанные слева, то придем к табл. 4/2, матрица которой совпадает с транспонированной матрицей табл. 3/1 симплекс-метода основной задачи.

Таким образом, подтверждается двойственность задач кинематического и статического методов предельного равновесия пластиинки в изложенных выше формах расчета. Далее можно не решать заново двойственную задачу, представленную в табл. 4/1, а использовать имеющееся решение основной задачи, приписав строкам табл. 3/1 значения соответствующих моментов, как показано

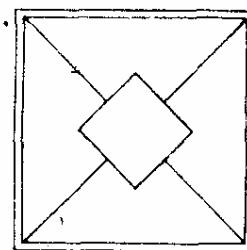


Рис. 81.

-2 -1 -2 -1 0,5 -2 -1 -2

		$-M_{51}^-$	$-M_{62}^-$	$-M_{65}^-$	$-M_{50}^-$	$-M_{75}^-$	$-M_{61}^-$	$-M_{31}^-$	$-M_{52}^-$
-2	7			+1		-0,5			
-2	6		-0,5	-1		+0,5			+1
-2	5	-1		-1			+1	+0,5	
-2	4	+1	+1	+1			-2		-2
-2	3	+1			-1			-1	
-2	52								-1
-1	31							-1	
-2	61						-1		
-0,5	75					-1			
-1	50				-1				
-2	65			-1					
-1	62		-1						
-2	51	-1							

	$+2M_{51}^-$	$+M_{62}^-$	$+2M_{65}^-$	$+M_{50}^-$	$+0,5M_{75}^-$	$+2M_{61}^-$	$+M_{31}^-$	$+2M_{52}^-$
7				1	-2			
6		-1		-1	2			1
5	-1			-1		1	1	
4	1	2		1		-2		-2
3	1				-2		-2	
52								-1
31							-1	
61						-1		
75					-1			
50				-1				
65				-1				
82		-1						
51	-1							

Т а б л и ц а 4/1

$-M_{51}^+$	$-M_{62}^+$	$-M_{65}^+$	$-M_{50}^+$	$-M_{75}^+$	$-M_{61}^+$	$-M_{31}^+$	$-M_{52}^+$	$-P, m_T$
		-1		+0,5				-0,125P
	+0,5	+1		-0,5			-1	-0,1875P
+1		+1			-1	-0,5		-0,25P
-1	-1	-1			+2		+2	-0,50P
-1			1			+1		-0,25P
						-1	-1	$+m_T$
							-1	$+m_T$
					-1			$+m_T$
					-1			$+m_T$
					-1			$+m_T$
					-1			$+m_T$
					-1			$+m_T$
					-1			$+m_T$
-1					-1			$+m_T$

Т а б л и ц а 4/2

$+2M_{51}^+$	$+M_{62}^+$	$+2M_{65}^+$	$+M_{50}^+$	$+0,5M_{75}^+$	$+2M_{61}^+$	$+M_{31}^+$	$+2M_{52}^+$	$-P, -m_T$
		-1		2				+0,25P
	1	1		-2			-1	+0,375P
1		1			-1	-1		+0,5P
-1	-2	-1			2		2	+P
-1			2			2		+0,5P
					-1		-1	$-2m_T$
						-1		$-m_T$
					-1			$-2m_T$
					-1			$-0,5m_T$
					-1			$-m_T$
					-1			$-2m_T$
					-1			$-m_T$
					-1			$-2m_T$
-1					-1			$-m_T$
					-1			$-2m_T$
-1					-1			$-2m_T$

в табл. 3/1 справа. Заключительная табл. 3/6 основной задачи с приписанными в ней обозначениями моментов дает их значение при $P = 0,75/m_t$:

$$M_{6-5}^+ = 0,5 \cdot 1,083 \cdot 0,75 m_t = 0,406 m_t,$$

$$M_{7-5}^+ = 2 \cdot 0,5 m_t = m_t,$$

$$M_{6-1}^+ = 0,5 (0,083 \cdot 0,75 + 1) m_t = 0,531 m_t,$$

$$M_{6-2}^- = m_t,$$

$$M_{5-1}^- = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,75 m_t = 0,187 m_t,$$

$$M_{5-0}^+ = m_t,$$

$$M_{3-1}^- = m_t,$$

$$M_{5-2}^- = 0,5 (-0,708 \cdot 0,75 + 2) m_t = 0,735 m_t,$$

$$M_{5-1}^+ = M_{6-2}^+ = M_{5-0}^- = M_{7-5}^- = M_{6-1}^- = M_{6-5}^- = \\ = M_{3-1}^+ = M_{5-2}^+ = 0.$$

Мы видим, что по линии излома: 7—5, 6—2, 5—0, 3—1 моменты равны своим предельным значениям, а на других линиях сетки они меньше. Легко проверить также совпадение знаков моментов направлений соответствующих углов перелома.

§ 28. Упрощение расчета

Ограниченные возможности вычислительных машин заставляют довольствоваться малым количеством ячеек сетки шарниров, что дает относительно малую точность результатов. Во многих случаях можно заранее предусмотреть характер формы разрушения и в соответствии с ней снять ряд ограничений симплекс-метода. Так, например, в пластинке, шарнирно опертой по всему контуру, обычно все шарниры текучести раскрываются вниз. Ввиду этого ограничения (25.2) можно заменить равенствами

Таблица 5/1

	$-w_7$	$-w_6$	$-w_5$	$-w_4$	$-w_3$	$-w_2$	$-w_1$	$-w_0$
1	-54	-62	-65	-50	-75	-61	-31	-52
2	-4	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
3						2		
4							-1	
5							2	
6							-1	
7							2	
8							-1	
m_T	2	4	2	1	$0,5$	2	4	$-0,5$
P								$-0,375$
								$-0,25$

Таблица 5/2

	-54	-62	-65	-50	-75	-61	-34	-52	$-w_3$	$-w_4$	$-w_5$	$-w_6$	$-w_7$
1	-1								-4	-4	4	4	-1
2		-1							-2	-4	1	1	-2
3			-1						-4	1	2	2	-1
4				-1						$\overline{[2]}$			
5					-4						2	-1	-1
6						1				-4	2	2	-1
7							-4				-1	2	
8								1		4	1	2	
m_T	2	1	2	1	2	1	2	$0,5$	2	1	2	$-0,5$	$-0,375$
p												-1	$-0,25$

Таблица 5/3

Та ближ а 5/4

	-51	-62	-65	-75	-64	-34	-52	$-w_4$	$-w_5$	$-w_7$
w_6	-4	-1	-4	-1		$-0,5$		$\frac{1}{-2}$	$0,5$	-1
w_3	3					$-0,5$		1	1	-2
w_5	5							$\frac{4}{2}$	$-0,5$	
w_6	6								-1	
m_4	50							-1	-1	
m_4	8							-2	1	
P								-2	$-0,75$	$-0,75$
								$-0,25$		
								$-0,375$		

типа (обозначения см. на рис. 76)

$$\varphi_{15-16} = 2(w_{15} + w_{16} - w_{11} - w_{20}),$$

$$\varphi_{6-16} = 2(w_{11} - w_7 - w_{15}),$$

Покажем, к чему приводит это упрощение на примере расчета пластиинки, данном в предыдущем параграфе. Исходная табл. 3/1 получает значительно более компактный вид (табл. 5/1). Верхние восемь строк в ней представляют равенства и носят название нуль-строк. Отрицательность всех коэффициентов в столбце свободных членов достигается здесь не жордановыми преобразованиями, а простой переменой знаков всех коэффициентов, соответствующих нуль-строк (в нашем случае одной лишь строки (табл. 5/2)). Далее жордановыми преобразованиями нуль-строки преобразуются в столбцы, которые немедленно исключаются из рассмотрения, поскольку наверх перебрасываются при этом нули (обозначаемые здесь цифрами 1, 2, ..., 8). Таким образом, перебрасывая столбец $-w_3$ и нуль-строку 4, переходим к табл. 5/3, в которой нуль-столбец 4 уже не пишется и не вычисляется. Затем та-

Таблица 5/5

	-51	-65	-75	-61	-31	$-w_5$	$-w_7$
1	-1			-0,5	-0,5		
w_6		-1		-1		-1	
3			0,5			1,5	-1
w_3				-0,5	-0,5		
5			1			2	-2
w_4				-0,5		-0,5	
50					-1	-1	
m_T	2	2	0,5	1	2		
P				-0,875	-0,25	-1,625	-0,25

ким же способом исключаем нуль-строки 7 и 2 и приходим к табл. 5/4, рассматривая которую замечаем, что в нуль-строке 8 этой таблицы все коэффициенты имеют один знак. В таких случаях столбцы, соответствующие не нулевым членам этой строки могут быть сразу вычеркнуты,

Таблица 5/6

	-65	$-w_5$	$-w_7$
w_6		-1	
3	-1	<u>1,5</u>	-1
w_3		-0,5	
75		2	-2
w_4		-0,5	
50		-1	
m_T	2		1
P		-1,633	-0,25

Таблица 5/7

	-65	$-w_7$
w_6		-2/3
w_5		-2/3
w_3		-1/3
75		-2/3
w_4		-1/3
50		-2/3
m_T	2	1
P	-13/12	-4/3

$$P < 24/13, \quad P = 3/4$$

так как соответствующие неотрицательные множители, стоящие над ними, должны быть равны нулю, в противном случае величина 8 не была бы равна нулю. Вычеркивается также и строка 8. В результате следующая

табл. 5/5 получается значительно меньше, причем в ней также оказывается нуль-строка с коэффициентами одного знака (строка 1). Следующая табл. 5/6 состоит уже лишь из трех столбцов, исключая последнюю нуль-строку 3, мы приходим сразу к оптимальному плану в виде готовой таблицы 5/7 прогибов и углов поворота. Разрушающее значение силы P , получаемое из уравнения $m_t \cdot 1 - P \frac{4}{3} = 0$, оказывается, как и должно быть, тем же, что и в примере § 27.

Можно еще более упростить расчет, если заранее исключить некоторые столбцы, соответствующие углам перелома, величина которых в окончательной форме разрушения заведомо должна быть равна нулю (например, углы по ребрам 1—5, 1—4 и т. п.). Путем такого частичного использования интуиции и опыта можно получить большую точность результатов за счет увеличения густоты сетки шарниров текучести.

§ 29. Прямоугольная и треугольная сетки шарниров текучести [104]

В ряде случаев целесообразно принять вместо квадратной прямоугольную сетку. При этом углы перелома для линий, идущих в направлении оси x , например для линии 3—4 (рис. 82), получают следующее выражение (a и b — стороны ячейки сетки):

$$\theta_{3-4} = 2(w_3 + w_4 - w_5 - w_7)/b.$$

Работа внутренних сил на этом участке сетки равна

$$T_{3-4} = -m_t a \theta_{3-4} = 2(w_3 + w_4 - w_5 - w_7)m_t \cdot a/b$$

или, в случае перелома по линии 3—4, направленного не вниз, а вверх

$$T_{3-4} = 2(w_3 + w_4 - w_5 - w_7)m'_t \cdot a/b.$$

Аналогично, для линий, идущих в направлении оси y , например, для линии 2—4 имеем

$$T_{2-4} = -2(w_2 + w_4 - w_5 - w_6)m_t \cdot b/a$$

или

$$T_{2-4} = 2(w_2 + w_4 - w_5 - w_6)m'_t \cdot b/a.$$

Таким образом, отличие от квадратной сетки здесь заключается в том, что работа внутренних сил на линиях, параллельных оси x , получает множитель a/b , а для линий, параллельных оси y , — множитель b/a .

Для того чтобы подсчитать работу внутренних сил на полудиагонали сетки 1—4, опустим перпендикуляры на эту диагональ из точек 2 и 3 (рис. 82). Длину этих перпендикуляров обозначим через s , а основания их обозначим цифрами 8 и 9. Найдем угол перелома на участке 1—5, для чего обозначим через w_8 прогиб в точке 8, а через w_9 — условный прогиб в точке 9, который был бы в том случае, если бы линия перелома 1—5 продолжалась по своему направлению за точку 5 (т. е. если бы переломы по линиям 3—5 и 2—5 отсутствовали).

Получим

$$\theta_{1-5} = (w_8 + w'_9 - w_2 - w_3)/s.$$

Учтем, что

$$w_8 + w'_9 = 2w_5,$$

поэтому

$$\theta_{1-5} = (2w_5 - w_2 - w_3)/s.$$

Из симметрии этого выражения относительно w_2 и w_3 следует, что

$$\theta_{4-5} = \theta_{1-5} = \theta_{1-4}.$$

Работа внутренних сил на диагонали 1—4 равна

$$T_{1-4} = -m_t \theta_{1-5} \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{или} \quad T_{1-4} = m'_t \theta_{1-5} \sqrt{a^2 + b^2};$$

учитывая, что

$$s = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

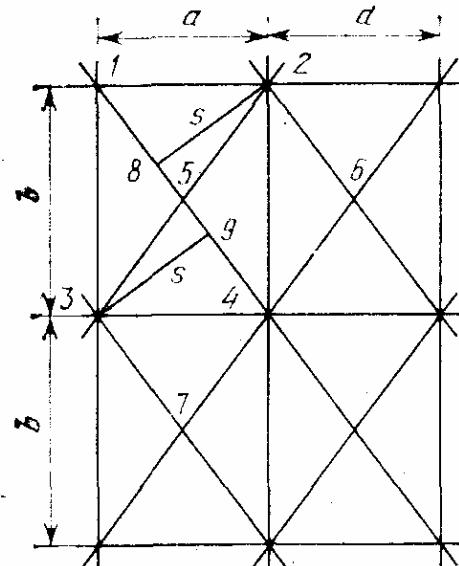


Рис. 82.

получим

$$T_{1-4} = - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) (2w_5 - w_2 - w_3) m_t$$

или

$$T_{1-4} = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) (2w_5 - w_2 - w_3) m'_t.$$

Отличие от квадратной сетки заключается в множителе $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)$, который вводится для всех диагональных участков. На основании изложенного для прямоугольной сетки в таблице симплекс-метода коэффициенты строк, относящихся к линиям, параллельным оси x , умножаются

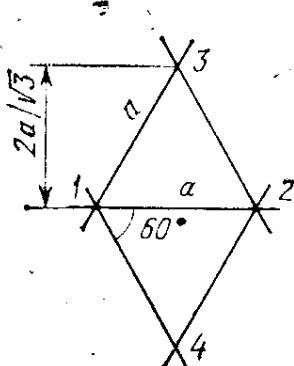


Рис. 83.

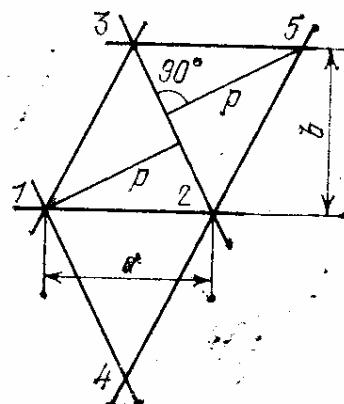


Рис. 84.

на a/b , коэффициенты строк, относящихся к линиям, параллельным оси y — на b/a , а относящихся к диагоналям — на $a/b + b/a$. Такое изменение следует ввести и в строку цели (25.3), введя соответствующие множители a/b , b/a или $a/b + b/a$ перед коэффициентами при φ_{i-k} .

Для треугольной сетки, составленной из равносторонних треугольников (рис. 83), получаем для каждой стороны

$$\theta_{1-2} = 2(w_1 + w_2 - w_3 - w_4)/\sqrt{3} \cdot a$$

и

$$T_{1-2} = - 2(w_1 + w_2 - w_3 - w_4)m_t/\sqrt{3}$$

(при изгибе ребром вниз).

Если треугольники равнобедренные (рис. 84), то для оснований треугольников

$$\theta_{1-2} = (w_1 + w_2 - w_3 - w_4)/b,$$

$$T_{1-2} = -m_t(w_1 + w_2 - w_3 - w_4) \cdot a/b,$$

а для боковых сторон

$$\theta_{3-2} = (w_3 + w_2 - w_1 - w_5)/p,$$

где

$$p = 2ab/\sqrt{a^2 + 4b^2},$$

и далее

$$\begin{aligned} T_{3-2} &= -\theta_{3-2} \cdot 0,5 \sqrt{a^2 + 4b^2} \cdot m_t = \\ &= -\left(\frac{a}{4b} + \frac{b}{a}\right)(w_3 + w_2 - w_1 - w_5)m_t \end{aligned}$$

(все для изгиба ребром вниз, в противном случае m_t заменяется на $-m_t$).

§ 30. Расчет четырехугольных плит произвольного очертания

Если пластинка имеет вид четырехугольника с углами, отличными от 90° , то разбивку ее на поля целесообразно осуществлять следующим образом [108]. Диагоналями AC и BD (рис. 85) пластинка делится на четыре части, каждая из которых разбивается на треугольники линиями, параллельными диагоналям четырехугольника, параллельными стороне четырехугольника и параллельными медиане, опущенной из точки пересечения диагоналей на сторону четырехугольника.

При заданных прогибах в узлах сетки w_i , обозначая через s_{i-k} высоту, опущенную на сторону $i-k$ элементарного треугольника, углы поворота в шарнирах θ_{i-k} можно выразить формулами типа:

а) для линий, параллельных сторонам пластинки,

$$\theta_{10-11} = (2w_{10} - w_3 - w_{17})/s_{10-11} = \theta_{9-10},$$

б) для линий, параллельных диагоналям,

$$\theta_{11-19} = (w_{11} + w_{19} - w_{12} - w_{18})/s_{11-19},$$

в) для линий, параллельных медианам

$$\theta_{11-18} = (2w_{18} - w_{17} - w_{19})/s_{11-18},$$

г) для основных диагоналей четырехугольника

$$\theta_{9-17} = \left(\frac{w_9 + w_{17}}{2} - w_{10} \right)/s_{9-17}^{10} + \left(\frac{w_9 + w_{17}}{2} - w_{16} \right)/s_{9-17}^{16},$$

где s_{9-17}^{10} и s_{9-17}^{16} — высоты двух примыкающих к диагонали 9/17 треугольников.

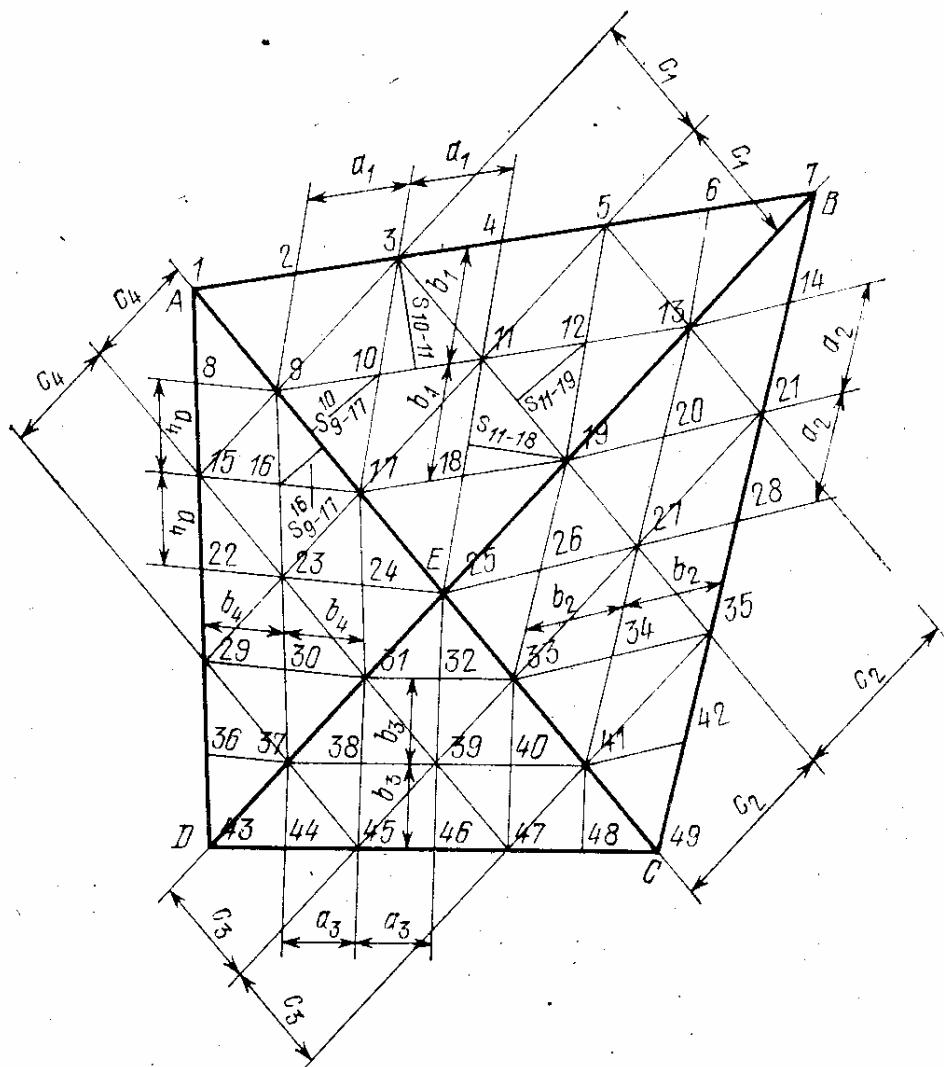


Рис. 85.

Обозначим через F_i ($i = 1, 2, 3, 4$) площади элементарных треугольников, расположенных соответственно в областях AEB , BEC , CED и DEA , а через a_i , c_i и d_i — стороны этих треугольников, параллельные стороне четырехугольника, медиане и диагонали, как показано на рис. 85.

Выразив теперь высоты треугольников через их площади и основания, запишем приведенные выше формулы в виде:

$$\left. \begin{aligned} \theta_{10-11} &= (2w_{10} - w_3 - w_{11}) \cdot a_1 / (2F_1), \\ \theta_{11-19} &= (w_{11} + w_{19} - w_{12} - w_{18}) \cdot b_1 / (2F_1), \\ \theta_{11-18} &= (2w_{18} - w_{17} - w_{19}) \cdot c_1 / (2F_1), \\ \theta_{9-17} &= (w_9 - w_{17} - 2w_{10}) \cdot b_1 / F_1 + (w_9 + w_{17} - 2w_{16}) \cdot b_1 F_4. \end{aligned} \right\} \quad (30.1)$$

Общую задачу линейного программирования для данного случая формулируем следующим образом:

$$U = \sum P_i w_i - \sum m_t \varphi_{i-k} = \max,$$

где P_i — внешняя нагрузка, относящаяся к i -му узлу сетки, при ограничениях

$$\varphi_{i-k} \leq \theta_{i-k} l_{i-k}, \quad \varphi_{i-k} \leq -k \theta_{i-k} l_{i-k}, \quad (30.2)$$

где l_{i-k} — длина шарнира между узлами i и k , и при дополнительном условии

$$U = \sum P_i w_i - \sum m_t \varphi_{i-k} = 0.$$

Здесь $k = m'_t / m_t$ — отношение предельного момента при изгибе пластинки ребром вверх к предельному моменту при изгибе пластинки ребром вниз.

Неравенства (30.2) с учетом (30.1) получают вид

$$\begin{aligned} \varphi_{10-11} &\leq (2w_{10} - w_3 - w_{11}) \cdot a_1^2 / (2F_1), \\ \varphi_{10-11} &\leq -k (2w_{10} - w_3 - w_{11}) \cdot a_1^2 / (2F_1), \\ \varphi_{11-19} &\leq (w_{11} + w_{19} - w_{12} - w_{18}) \cdot b_1^2 / (2F_1), \\ \varphi_{11-19} &\leq -k (w_{11} + w_{19} - w_{12} - w_{18}) \cdot b_1^2 / (2F_1), \\ \varphi_{11-18} &\leq (2w_{18} - w_{17} - w_{19}) \cdot c_1^2 / (2F_1), \\ \varphi_{11-18} &\leq -k (2w_{18} - w_{17} - w_{19}) \cdot c_1^2 / (2F_1), \\ \varphi_{9-17} &\leq (w_9 + w_{17} - 2w_{10}) \cdot b_1^2 / F_1 + (w_9 + w_{17} - 2w_{16}) \cdot b_1^2 / F_4, \\ \varphi_{9-17} &\leq -k (w_9 + w_{17} - 2w_{10}) \cdot b_1^2 / F_1 - \\ &\quad - k (w_9 + w_{17} - 2w_{16}) \cdot b_1^2 / F_4, \end{aligned}$$

§ 31. Статический метод расчета несущей способности пластинок

В применении к системам с конечным числом степеней статической неопределенности статический метод расчета упруго-пластических конструкций формулируется следующим образом. Истиным будет наиболее выгодное распределение внутренних усилий, удовлетворяющее условиям равновесия и условиям пластичности, при котором параметр нагрузки принимает наибольшее значение. В качестве обоснования этого метода приведем некоторые разъясняющие соображения.

Как известно, в статически неопределеных системах внутреннее напряженное состояние, соответствующее одной и той же внешней нагрузке, не является единственным и может быть изменено путем добавления так называемых собственных напряжений, возникающих, например, вследствие предварительного напряжения или ослабления какой-либо связи. В n -кратно статически неопределенной системе собственные напряжения могут быть заданы с точностью до n параметров, соответствующих n «лишним неизвестным» системы. Собственные напряжения уравновешиваются нулевой внешней нагрузкой и образуют напряженное состояние, которое называется состоянием самонапряжения.

Самонапряжение может возникать в статически неопределенной системе при вынужденных деформациях ее элементов, например при температурных деформациях; в частности, оно возникает при деформациях текучести отдельных элементов системы.

Возьмем какое-то напряженное состояние, соответствующее внешней нагрузке, интенсивностью q и будем его пропорционально увеличивать вместе с нагрузкой. При некотором значении интенсивности нагрузки напряжения в каком-то элементе системы достигнут предела текучести и дальнейшее увеличение нагрузки при сохранении данного распределения внутренних усилий окажется невозможным.

Изменим теперь характер распределения внутренних усилий, добавив некоторое состояние самонапряжения так, чтобы в точке, где был достигнут предел текучести, напряжения уменьшились, а во всех остальных точках она

оставалась меньше предела текучести. Это новое напряженное состояние можно еще пропорционально несколько увеличить до такой величины, при которой опять появится хотя бы в одной точке предел текучести, повысив соответственно интенсивность внешней нагрузки. Поступая далее таким же образом, мы в конце концов придем к такому положению, что предел текучести будет достигнут сразу в нескольких точках и, снижая его в одних точках путем добавления состояний самонапряжения, мы неизбежно будем повышать напряжения в других точках, где также уже был достигнут предел текучести. Такое состояние системы будет отвечать максимально возможной для нее интенсивности внешней нагрузки заданного распределения. Это будет наиболее выгодное распределение внутренних усилий в системе.

Поскольку любое напряженное состояние в n раз статически неопределенной системы складывается из любого состояния, находившегося в равновесии с внешней нагрузкой (это состояние назовем частным состоянием равновесия) и линейной комбинации n независимых состояний, самонапряжения, то общее напряженное состояние системы может быть выражено формулой

$$S_i = S_{i0} + \sum_{k=1}^n S_{ik} \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (31.1)$$

Здесь S_i — внутреннее усилие в элементе i , S_{i0} — внутреннее усилие в том же элементе для частного состояния равновесия, S_{ik} — внутреннее усилие в том же элементе для k -го состояния самонапряжения, m — число элементов в системе.

Возможные значения усилий i -го элемента должны удовлетворять условиям plasticности

$$S_{it}^- \leq S_i \leq S_{it}^+ \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (31.2)$$

где S_{it}^- и S_{it}^+ — пределы текучести для i -го элемента соответственно на сжатие и на растяжение.

Представим частное состояние равновесия системы в виде

$$S_{i0}' = q S_{i0},$$

где S_{i0}' — частное состояние равновесия для единичной

нагрузки заданного вида, q — параметр, определяющий величину нагрузки.

Аналогично, состояние самонапряжения выразим в виде

$$S_{ik} = X_k S'_{ik},$$

где S'_{ik} — усилие для k -го единичного состояния самонапряжения, X_k — числовой множитель.

Тогда вместо (31.1) можно написать

$$S_{i0} = qS'_{i0} + \sum_{k=1}^n X_k S_{ik} \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (31.3)$$

Заметим, что усилия $S_{i0} = qS'_{i0}$ можно трактовать как усилия от внешней нагрузки в некоторой статически определимой основной системе, полученной из заданной системы путем отбрасывания лишних связей. Величины S_{ik} при этом следует считать усилиями в основной системе от единичных неизвестных $X_k = 1$.

Условия (31.2) после подстановки в них значений S_i (31.3) дают $2m$ линейных ограничений для величин X_k . Эти ограничения составляют для X_k ($k = 1, 2, \dots, n$) область тем более узкую, чем больше параметр нагрузки q . Наибольшее значение q , при котором еще возможно удовлетворение неравенства (31.2), является предельным значением параметра нагрузки. Таким образом, величина q здесь будет функцией цели в задаче линейного программирования с ограничениями (31.2).

Можно ту же задачу ставить иначе, считая основными неизвестными, подлежащими определению при помощи линейного программирования, не X_k ($k = 1, 2, \dots, n$), а полные усилия в элементах S_i ($i = 1, 2, \dots, m$). Эти усилия подчиняются ограничениям (31.2), а также условиям равновесия с внешней нагрузкой, которые могут быть представлены в виде равенств

$$\sum \alpha_{ij} S_i = P_j,$$

где P_j — составляющая внешней нагрузки, например внешние силы, приложенные в определенных точках системы и действующие по определенным направлениям j , α_{ij} — числовые коэффициенты, определяемые конфигурацией системы. Функцией цели здесь по-прежнему будет па-

метр q , входящий в равенство

$$P_j = qP'_j,$$

где P'_j — внешние силы, соответствующие единичной нагрузке.

Второй вариант статического метода является более предпочтительным в тех случаях, когда трудно построить частное напряженное состояние и состояния напряжений в основной системе. Например, для рам можно рекомендовать первый вариант, а для континуальных систем, в частности для пластинок и оболочек, второй.

Для пластинок статический метод расчета по предельному равновесию впервые получил форму задачи линейного программирования в виде метода коллокаций [156]. Пластина квадратной сеткой разбивалась на ряд точек и в каждой точке определялись неизвестные изгибающие и крутящие моменты M_x , M_y и M_{xy} , из условий равновесия

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = q(x, y) = q_0 \xi(x, y),$$

преобразованных в конечно-разностную форму, и условий, имеющих для стальной пластины вид

$$(M_x - M_y)^2 + 3M_{xy}^2 \leq M_t^2 \quad (31.4)$$

а для железобетонной —

$$M_{1,2} = \pm 0,5 \left[M_x + M_y \pm \sqrt{(M_x - M_y)^2 + 4M_{xy}^2} \right] \leq M_t, \quad (31.5)$$

где M_t — предельное значение изгибающего момента при цилиндрическом изгибе пластины.

Функцией цели является параметр нагрузки q_0 , который должен принимать максимальное значение.

Ввиду того, что ограничения (31.4) или (31.5) не являются линейными, задача сводится к нелинейному математическому программированию. Ее обычно приближенно сводят к линейному программированию, заменяя криволинейные поверхности, ограничивающие области применимости неравенств (31.4) и (31.5) в пространстве координат M_x , M_y , M_{xy} многогранниками, в результате чего каж-

дое неравенство (31.4) или (31.5) заменяется несколькими линейными неравенствами.

Даже при достаточно грубой аппроксимации здесь можно получить вполне приемлемый метод расчета. Учтем, что исходные условия текучести (31.5) также являются довольно приближенными и лишь вследствие большого

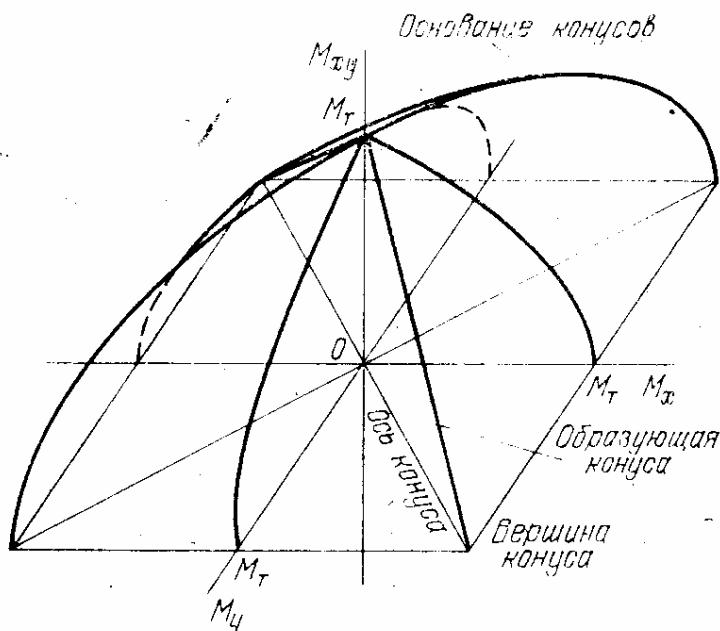


Рис. 86.

разброса свойств бетона не пуждаются в уточнении. Естественно поэтому с той же точностью задаваться поверхностями текучести.

Уравнение граничной поверхности для условий (31.5) в координатах M_x , M_y , M_{xy} получает вид

$$\left[M_t \mp \frac{M_x + M_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{M_x - M_y}{2}\right)^2 + M_{xy}^2} \right] \times \\ \times \left[M_t \mp \frac{M_x + M_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{M_x - M_y}{2}\right)^2 + M_{xy}^2} \right] = 0,$$

или после элементарных преобразований

$$(M_t \mp M_x)(M_t \mp M_y) - M_{xy}^2 = 0. \quad (31.6)$$

В координатах M_x , M_y , M_{xy} граничная поверхность (31.6) представляет собой два эллиптических конуса с вершинами, расположенными в точках

$$M_y = M_x = \pm M_t, \quad M_{xy} = 0$$

с одной общей осью

$$M_x = M_y, \quad M_{xy} = 0$$

и плоскостью пересечения

$$M_x = -M_y$$

(см. рис. 86, где показана верхняя половина граничной поверхности).

Поставим условие, чтобы предел текучести M_t не превышался абсолютными значениями изгибающих моментов M_x и M_y , действующих на линиях $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$, а также на линиях, имеющих направления под углом 45° к осям x и y . Это условие пластичности полностью соответствует описанной выше разбивке пластиинки на равнобедренные прямоугольные треугольники и методу расчета, изложенному в §§ 25—26. Легко видеть из круга Мора (рис. 87), что на линиях, идущих под углом 45° , изгибающий момент имеет значение

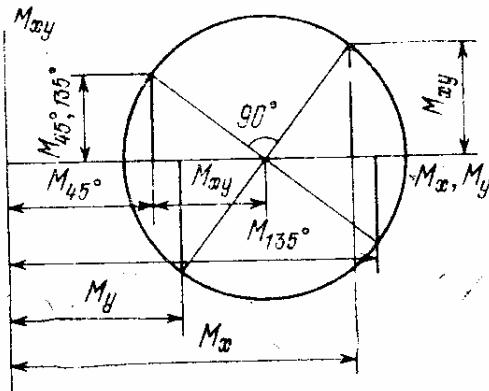


Рис. 87.

Мора (рис. 87), что на линиях, идущих под углом 45° , изгибающий момент имеет значение

$$M_{45^\circ} = 0,5(M_x + M_y) \pm M_{xy}.$$

Поэтому условия текучести в данном случае принимают вид линейных ограничений

$$|M_x| \leq M_t, \quad |M_y| \leq M_t, \quad |0,5(M_x + M_y) \pm M_{xy}| \leq M_t. \quad (31.7)$$

Поверхность текучести в пространстве координат M_x , M_y , M_{xy} здесь представляет собой октаэдр, верхняя половина которого изображена на рис. 88. Конусы (30.6) целиком вписываются в этот октаэдр, касаясь его по линиям $M_x = M_y$, $M_{xy} \pm 0,5(M_x + M_y) = M_t$ и в точке $M_x = M_y = 0$, $M_{xy} = M_t$. Таким образом, здесь мы получаем несколько завышенную несущую способность по сравнению с условиями Иогансена. Это завышение имеет максимальную величину в вершинах октаэдра, не лежащих в плоскости

$M_{xy} = 0$, где

$$M_x = -M_y = M_t, \quad M_{xy} = M_t$$

и главный изгибающий момент равен

$$M = \sqrt{2}M_t,$$

что на 41% превышает условие Иогансена. Если в пластинке нигде не возникают отрицательные изгибающие

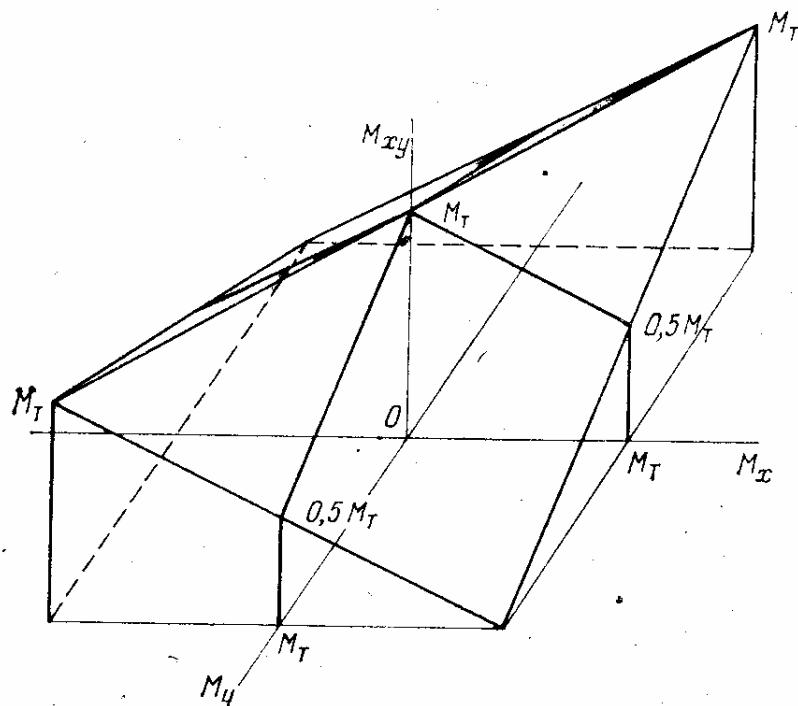


Рис. 88.

моменты, то наибольшая погрешность условий (31.7) по сравнению с условием (31.6) будет в точках, где

$$M_x = M_t, \quad M_y = 0, \quad M_{xy} = 0,5M_t$$

и

$$M = 0,5M_t + \sqrt{0,25M_t^2 + 0,25M_t^2} = 1,207M_t.$$

Однако в подавляющем большинстве точек превышение условий Иогансена будет значительно меньшим и общая погрешность расчета будет невелика.

Поскольку конусы (31.6) оказываются целиком вписанными в октаэдр (31.7), то метод конечных элементов в виде равнобедренных прямоугольных треугольников дает верхнюю оценку несущей способности пластиинки. Гру-

бую нижнюю оценку можно получить сразу, поделив полученные результаты на 1,41, а при отсутствии отрицательных изгибающих моментов на 1,207. Это соответствует равномерному (подобному) уменьшению размеров октаэдра так, чтобы все его точки находились внутри поверхности Иогансена (31.6).

Большое число ограничений в каждой точке и большое число неизвестных не дают возможности широко использовать данный метод расчета, поскольку мощность даже современных вычислительных машин оказывается недостаточной при соблюдении необходимой густоты сетки.

Г л а в а 5

ПЛАСТИНКИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ И БОЛЬШИЕ ПРОГИБЫ

§ 32. Изотропные пластинки переменной толщины

В пластинках переменной толщины следует учитывать переменность предельного изгибающего момента m_t , зависящего от координат x, y . К пластинкам переменной толщины следует относить и железобетонные плиты постоянной толщины, но различно армированные в разных точках поверхности плиты.

Задаваясь формой разрушения пластинки (пространственной эпюрий прогибов) в виде многогранника, запишем работу внутренних сил формулой

$$T = \sum | \theta_i | \int_0^{l_i} m_t ds_i.$$

Здесь θ_i — двугранный угол перелома по i -му шарниру текучести, l_i — длина этого шарнира, по которой производится интегрирование. Суммирование производится по всем шарнирам текучести.

Заметим, что ряд положений, справедливых для изотропных пластинок постоянной толщины, в пластинках переменной толщины отпадает. В частности, поверхность эпюры прогибов не обязательно должна быть линейчатой и внутри контура пластинки могут существовать области, полностью окруженные шарнирами текучести.

Распределим работу внутренних сил T по отдельным граням эпюры прогибов, для чего двугранный угол θ_i , образованный гранями k и l , разделим на две части: θ_{ik} и θ_{il} . Угол θ_{ik} представляет собой угол наклона к горизонтали линии, проведенной на грани k эпюры прогибов, перпендикулярно i -му шарниру текучести, а θ_{il} — такой же угол для продолжения этой линии на грани l (рис. 89).

Угол θ_{ik} может быть выражен через угол φ_k наклона грани k и угол α_{ik} , образованный шарниром i и горизонталью, проведенной на грани k :

$$\theta_{ik} = \varphi_k \cos \alpha_{ik}.$$

При этом получим

$$T = \sum \varphi_k \sum \cos \alpha_{ik} \int_0^{l_i} m_t ds_i.$$

Здесь первое суммирование производится по всем ребрам перелома эпюры прогибов, ограничивающих k -ю грань, а второе — по всем граням эпюры прогибов.

Учитывая, что

$$\cos \alpha_{ik} ds_i = dp_k$$

представляет собой элемент проекций ребра i на вертикальную плоскость, проведенную через горизонтальную ось вращения грани k , можно написать, что

$$T = \sum \varphi_k \int_0^{p_k} m_t dp_k,$$

где p_k — проекция всех ребер перелома, ограничивающих k -ю грань, на вертикальную плоскость, про-

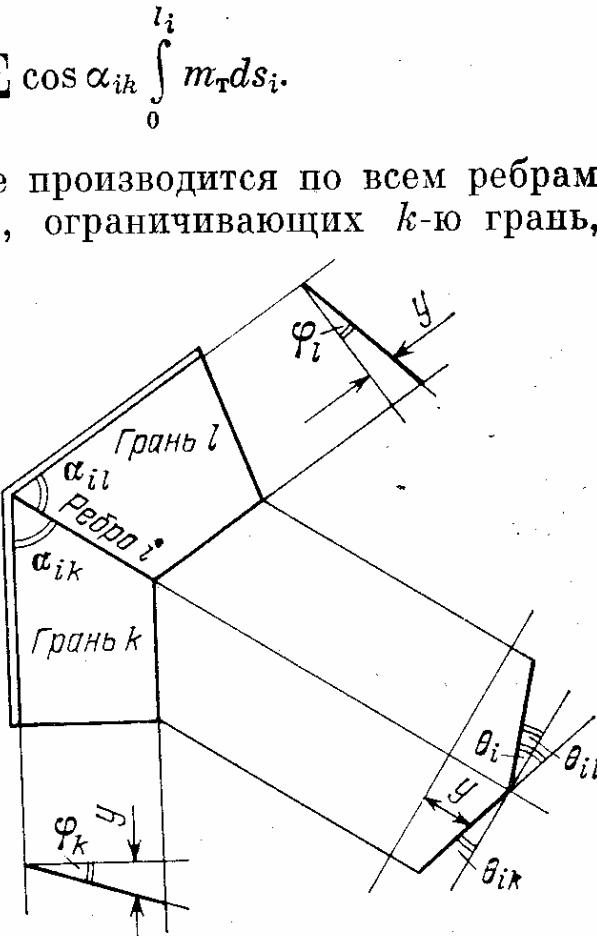


Рис. 89.

веденную через ось вращения этой грани (рис. 90). В случае примыкания грани k к стороне полигонального контура опирания пластиинки проекция p_k численно равна длине этой стороны опирания (рис. 91). В случае, когда грань k не примыкает к контуру опирания, проекция окружающих ее ребер перелома образует сплошную линию переменной толщины. При этом в обратной части проекции для dp_k следует принимать знак минус, поскольку интегрирование здесь ведется в противоположном направлении.

Заметим, что величина

$$\int_0^{p_k} m_t dp_k = M_t^k \quad (32.1)$$

представляет собой момент относительно оси вращения грани всех внутренних сил, действующих на эту грань.

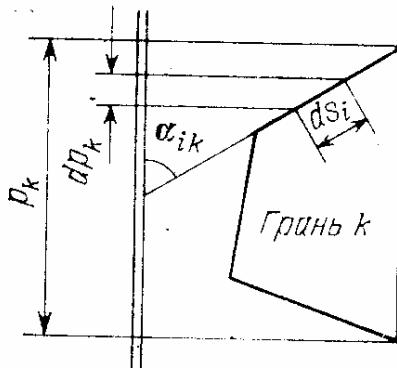


Рис. 90.

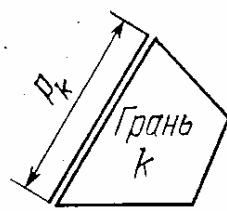


Рис. 91.

В обозначениях (32.1) работа внутренних сил выражается формулой

$$T = \sum \varphi_k M_t^k.$$

Подсчитаем теперь работу внешней вертикальной нагрузки для данной формы разрушения:

$$V = \int_F q w dF.$$

Здесь w — вертикальный прогиб, dF — элемент площади пластиинки.

Часть работы внешних сил, относящуюся к k -й грани, можно представить в виде

$$V_k = \varphi_k S_k,$$

где S_k — статический момент внешней нагрузки, приложенной к k -й грани, взятой относительно оси вращения этой грани.

Представим, кроме того, S_k в виде

$$S_k = P S_k^1,$$

где P — величина нагрузки, которую считаем изменяю-

щейся пропорционально этой величине, S_k^1 — статический момент от единичной нагрузки (при $P = 1$), расположенной на k -й грани, взятый относительно оси вращения последней. При этом полная работа внешних сил выразится формулой

$$V = P \sum \varphi_k S_k^1.$$

Учитывая, что работа внутренних сил отрицательна, а внешних сил положительна, получаем выражение потенциальной энергии системы в виде

$$U = T - V = \sum \varphi_k (M_t^k - PS_k^1).$$

Истинная форма разрушения соответствует минимуму потенциальной энергии, который определяется условиями

$$\partial U / \partial \varphi_k = 0,$$

или, в развернутом виде,

$$M_t^k - PS_k + \sum \varphi_j \frac{\partial}{\partial \varphi_k} (M_t^j - PS_j^1) = 0$$

(суммирование здесь производится по индексам j).

Заметим, что величины, стоящие под знаком суммы, имеют малые множители φ_j и в начальной стадии деформирования могут рассматриваться как бесконечно малые. Поэтому все члены, стоящие под знаком суммы, могут быть отброшены. Остаются условия

$$M_t^k - PS_k^1 = 0,$$

откуда

$$P = M_t^k / S_k^1. \quad (32.2)$$

Так как величина разрушающей нагрузки должна быть одинаковой для всей пластиинки, то выражение (32.2) не должно зависеть от индекса k . Следовательно, для истинной формы разрушения

$$M_t^k / S_k^1 = \text{const.} \quad (32.3)$$

Если мы зададимся формой разрушения, несколько отклоняющейся от истинной, то условие (32.3) выполниться не будет, однако величина разрушающей нагрузки может быть при этом найдена с достаточной степенью

точности из условия равенства работ внешних и внутренних сил $T = V$ по формуле

$$P = \frac{\sum \varphi_k M_t^k}{\sum \varphi_k S_k^1}.$$

Особый случай возникает тогда, когда средняя грань смещается поступательно, без поворотов. При этом работа внешних сил, приходящаяся на эту грань, будет равна

$$V_0 = P_0 y_0.$$

Здесь P_0 — вертикальная равнодействующая нагрузки, расположенной на данной грани, y_0 — вертикальное смещение последней.

Работу внутренних сил здесь следует определить как произведение на прогиб y_0 интеграла от предельных поперечных сил Q_t , взятого по контуру, окружающему поступательно смещающуюся грань:

$$T = y_0 \oint Q_t ds.$$

Отсюда следует, что поперечные силы на границах грани не равны нулю. В пластинках постоянной толщины этого быть не может, так как изгибающие моменты по линиям шарниров текучести в них достигают своего максимального значения, равного m_t , откуда следует равенство нулю поперечных сил по этим линиям. Поэтому в пластинках постоянной толщины все грани эпюры прогибов должны выходить на контур опирания. В пластинках переменной толщины положение шарнира текучести определяется максимальным отношением изгибающего момента к пластическому моменту сопротивления сечения пластиинки, а сам изгибающий момент может быть не максимальным.

Поперечные силы и изгибающие моменты в шарнирах текучести должны удовлетворять условию текучести

$$\Phi(m, Q) = 0,$$

которое в большинстве случаев может быть принято в виде

$$\frac{m^2}{m_t^2} + \frac{Q^2}{Q_t^2} = 1.$$

§ 33. Учет мембранных напряжений в пластинах [95]

Как известно, в упругих пластинах при прогибах, имеющих порядок толщины пластины, большую роль начинают играть осевые или мембранные напряжения, равнодействующие которых располагаются в срединной поверхности пластины. Можно ожидать, что эти напряжения будут оказывать существенное влияние при соответствующей величине прогибов и в случае пластинок из пластического материала.

Подсчитаем работу внутренних сил при наличии мембранных и изгибных напряжений. Пусть деформации в заданной точке поверхности пластины распределяются по закону Кирхгоффа

$$\epsilon_x = \kappa_x z + \epsilon_x^0, \quad \epsilon_y = \kappa_y z + \epsilon_y^0, \quad \gamma_{xy} = 2\kappa_{xy} z + \gamma_{xy}^0.$$

Здесь ϵ_x^0 , ϵ_y^0 и γ_{xy}^0 — мембранные деформации, равномерно распределенные по толщине пластины. Выражение для интенсивности напряжений в общем случае будет иметь довольно сложный вид, поэтому мы ограничимся здесь рассмотрением частного случая равенства отношений

$$\frac{\epsilon_x^0}{\kappa_x} = \frac{\epsilon_y^0}{\kappa_y} = \frac{\gamma_{xy}^0}{\kappa_{xy}} = c.$$

Другими словами, будем считать, что пластина имеет некоторый, смещенный относительно срединной поверхности нейтральный слой, в котором отсутствуют какие-либо деформации. При этом формула для интенсивности деформаций ϵ_u может быть оставлена в виде (3.2), но с заменой z на z^0 — расстояние до нейтрального слоя

$$\epsilon_u = \kappa_u z^0.$$

Величина смещения нейтрального слоя относительно срединной поверхности пластины равна

$$z^0 - z = \frac{\epsilon_u^0}{\kappa_u} = \frac{\epsilon_x^0}{\kappa_x} = c, \quad (33.1)$$

где ϵ_u^0 — интенсивность напряжений на срединной поверхности,

Работу внутренних сил, приходящуюся на элемент поверхности оболочки dF , можно подсчитать по формуле

$$dT = \sigma_t \int_{-h/2}^{h/2} |\varepsilon_i| dz \cdot dF = \sigma_t \kappa_i \int_{-h/2+c}^{h/2+c} |z^0| dz^0 dF.$$

Если величина смещения нейтрального слоя с меньше половины толщины оболочки $h/2$, то при интегрировании следует учесть перемену знака z^0 в пределах интегрирования. В этом случае

$$\begin{aligned} dT &= \sigma_t \kappa_i \left[\frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + c \right)^2 + \frac{1}{2} \left(-\frac{h}{2} + c \right)^2 \right] dF = \\ &= \sigma_t \kappa_i \left(\frac{h^2}{4} + c^2 \right) dF. \end{aligned} \quad (33.2)$$

При $c \geq h/2$ эпюра деформаций по толщине пластиинки знакопостоянна. В этом случае

$$\begin{aligned} dT &= \sigma_t \kappa_i \left[\frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + c \right)^2 - \frac{1}{2} \left(-\frac{h}{2} + c \right)^2 \right] dF = \\ &= \sigma_t \kappa_i h c dF = \sigma_t \varepsilon_i^0 h dF. \end{aligned} \quad (33.3)$$

Легко заметить, что при $\varepsilon < h/2$ первый член в выражении для элементарной работы (33.2) представляет собой работу изгибающих моментов на искривлениях поверхности пластиинки, определенных без учета мембранных удлинений. Второй член в скобках дает добавочную работу внутренних сил, вызываемую мембранными усилиями. При $c > h/2$ в работе внутренних сил влияние изгибающих моментов исчезает и остается только работа осевых деформаций.

Вместо распределенных деформаций можно брать сосредоточенные кривизны θ и сосредоточенные удлинения \mathcal{E} по одним и тем же линиям. При этом надо считать, что

$$\theta/\theta = c, \quad (33.4)$$

а элемент работы внутренних сил dT следует относить к единице длины ребра перелома пластиинки

$$dT = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_t \theta \left(\frac{h^2}{4} + c^2 \right) ds \quad (|c| < h/2), \quad (33.5)$$

$$dT = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_t h \mathcal{E} ds \quad (|c| > h/2). \quad (33.6)$$

Возьмем случай полигональной пластинки, шарнирно опертой по всему контуру и нагруженной сосредоточенной силой P в точке O . Форму деформированной поверхности такой пластинки примем, как и ранее, в виде пологой пирамиды с вершиной, проектирующейся в точку O (рис. 92). Работа внутренних изгибающих моментов на двугранных углах перелома пластинки здесь равна

$$T_M = \frac{2}{\sqrt{3}} f m_t \sum \operatorname{ctg} \alpha_i,$$

где f — прогиб пластинки в точке O , α_i — углы, образованные линиями, идущими из точки O в вершины контура пластинки, и сторонами последней,

$$m_t = \sigma_t h^2 / 4.$$

Для подсчета дополнительной работы, выражающей влияние осевых напряжений, необходимо задаться условиями закрепления края пластинки в ее плоскости. Будем считать сначала, что край пластинки жестко закреплен и не может смещаться внутрь пластинки. Тогда вдоль ребер пирамиды, образованной деформированной поверхностью, появятся сосредоточенные удлинения ϑ (рис. 93), направленные перпендикулярно этим ребрам.

Для определения величины этих сосредоточенных удлинений возьмем точку M на ребре пирамиды OC (рис. 94). Прогиб

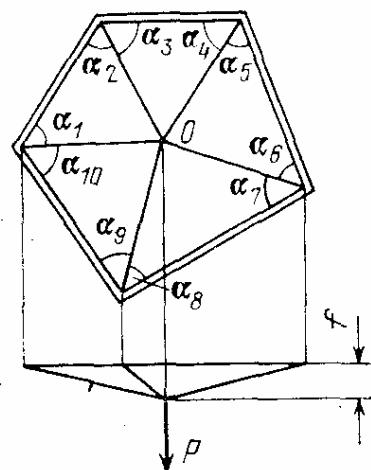


Рис. 92.

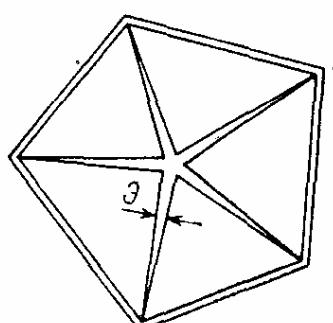


Рис. 93.

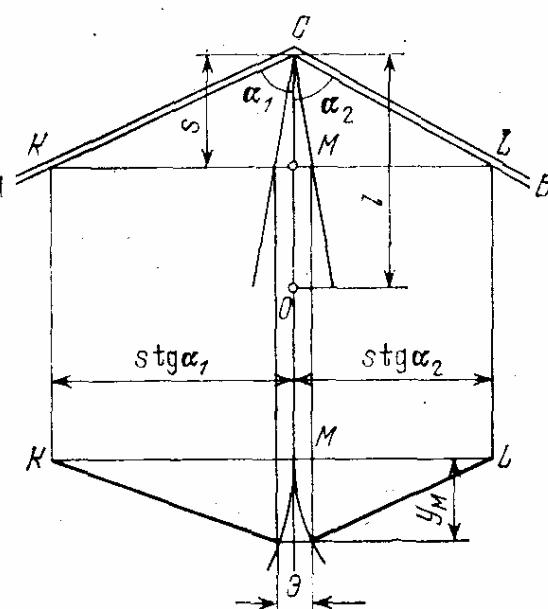


Рис. 94.

в точке M равен

$$y_M = sf/l,$$

где s — расстояние MC , l — длина ребра OC .

Проведем через M прямую KL , перпендикулярную проекции ребра пирамиды, до пересечения со сторонами периметра пластиинки AC и BC . Длина отрезков KM и ML по деформации пластиинки равна $s \operatorname{tg} \alpha_1$ и $s \operatorname{tg} \alpha_2$, а длина их проекций на первоначальную плоскость после деформации равна соответственно

$$\sqrt{s^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_1 - y_M^2} \text{ и } \sqrt{s^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_2 - y_M^2}.$$

Разность между суммой первоначальных длин этих отрезков и суммой их проекций после деформации должна быть отнесена за счет сосредоточенного удлинения \mathcal{E} в точке M . Считая y_M малой величиной по сравнению с s , получаем с точностью до величины второго порядка малости

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= s \operatorname{tg} \alpha_1 \left(1 - 1 + \frac{y_M^2}{2s^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_1} \right) + s \operatorname{tg} \alpha_2 \left(1 - 1 + \frac{y_M^2}{2s^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_2} \right) = \\ &= \frac{y_M^2}{2s} (\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \alpha_2) = \frac{sf^2}{2l^2} (\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \alpha_2). \quad (33.7) \end{aligned}$$

Определим теперь дополнительную работу внутренних сил, приходящуюся на одно ребро пирамиды. Заметив, что

$$\theta = (\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \alpha_2) f/l, \quad (33.8)$$

получим, согласно (33.4), величину смещения нейтрального слоя

$$c = \mathcal{E}/\theta = sf/(2l).$$

Рассмотрим сначала относительно малые прогибы, не превышающие толщины пластиинки h . При этом

$$c > sh/(2l) < h/2$$

и следует применить формулу (33.2). Получим добавоч-

ную работу для одного ребра

$$\Delta T = \int_0^l \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_t \theta c^2 ds = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_t \frac{f}{l} (\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \alpha_2) \times \\ \times \frac{f^2}{4l^2} \cdot \frac{l^3}{3} = \frac{\sigma_t}{6\sqrt{3}} f^3 (\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \alpha_2),$$

а для всех ребер

$$\Delta T = \frac{\sigma_t}{6\sqrt{3}} f^3 \sum \operatorname{ctg} \alpha_i.$$

Полная работа внутренних сил на заданной деформации выражается формулой

$$T = T_M + \Delta T = \frac{\sigma_t h^2}{2\sqrt{3}} f \sum \operatorname{ctg} \alpha_i \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \frac{f^2}{h^2} \right).$$

Ввиду того, что работа внутренних сил здесь нелинейно зависит от прогиба f , для нахождения состояния равновесия пластиинки нельзя приравнивать друг другу полные выражения работы внутренних и внешних сил, а необходимо использовать условие равенства их приращений на бесконечно малом приращении деформации или, другими словами, приравнять производные:

$$\frac{dT}{df} = \frac{dV}{df}. \quad (33.9)$$

Отсюда, заметив, что работа внешних сил V равна Pf , получаем

$$P = \frac{\sigma_t h^2}{2\sqrt{3}} \sum \operatorname{ctg} \alpha_i \left(1 + \frac{f^2}{h^2} \right). \quad (33.10)$$

При прогибах, значительно превышающих толщину пластиинки h , приближенно можно считать, что с больше $h/2$ по всей длине ребер перелома. Тогда работа внутренних сил должна определиться по формуле (33.3). Работа, приходящаяся на одно ребро, равна

$$T = \int_0^l \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_t h \frac{sf^2}{2l^2} (\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \alpha_2) ds = \\ = \frac{\sigma_t h}{2\sqrt{3}} f^2 (\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \alpha_2),$$

а на все ребра —

$$T = \frac{\sigma_t h}{2\sqrt{3}} f^2 \sum \operatorname{ctg} \alpha_i.$$

Из условия равновесия (33.9) получаем для этого случая

$$P = \frac{\sigma_t h}{\sqrt{3}} f \sum \operatorname{ctg} \alpha_i = \frac{\sigma_t h^2}{2\sqrt{3}} \sum \operatorname{ctg} \alpha_i \frac{2f}{h}. \quad (33.11)$$

В промежуточных случаях, когда f незначительно превышает h , на части длины ребер s будет больше $h/2$, а на другой части — меньше. При этом будет иметь место более сложная зависимость P от f , промежуточная между (33.10) и (33.11); ее мы определять не будем.

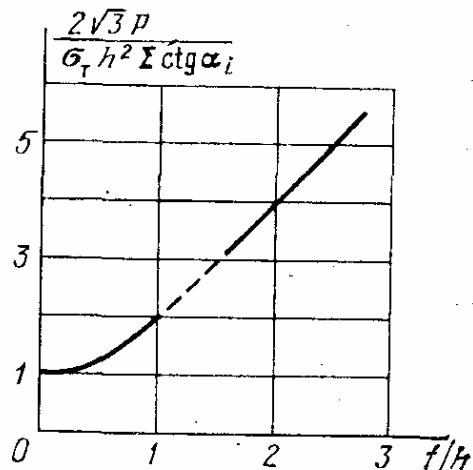


Рис. 95.

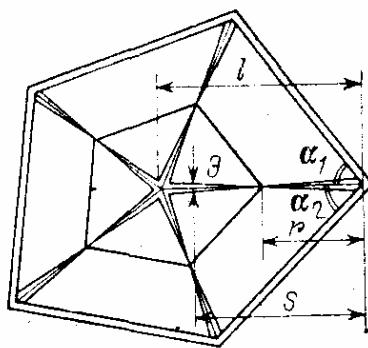


Рис. 96.

Общий вид зависимости P от f , включающей формулы (33.10) и (33.11), показаны на графике (рис. 95). Фактически эта зависимость пойдет несколько ниже вследствие того, что выбранная нами форма деформации лишь приближенно аппроксимирует действительное искривление пластиинки.

Рассмотрим теперь случай, когда края пластиинки могут свободно перемещаться в ее плоскости. При этом можно ожидать, что на участках ребер перелома поверхности пластиинки, расположенных ближе к наружному краю, возникнут сосредоточенные деформации сжатия, а на участках, расположенных ближе к точке приложения силы P , возникнут сосредоточенные деформации растяжения. Очевидно, что где-то в середине ребра будет

точка, в которой осевые сосредоточенные деформации равны нулю. Пусть эта точка находится на расстоянии r от угла пластиинки и отношение r к l — длине ребра перелома — одинаково для всех ребер. Тогда можно выделить контур, геометрически подобный наружному контуру пластиинки и проходящий через точки нулевых осевых деформаций; для этого контура смещения срединной поверхности пластиинки равны нулю (рис. 96).

Для одного ребра сосредоточенные удлинения могут быть подсчитаны по формуле (32.7) с заменой величины s на $s - r$:

$$\vartheta = \frac{(s - r)f^2}{2l^2} (\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \alpha_2).$$

Далее из (33.4) и (33.8) можно определить

$$c = \vartheta/\theta = (s - r)f/2l.$$

В случае прогибов, не превышающих $\max \left| \frac{hl}{s - r} \right|$,ходим дополнительную работу, приходящуюся на одно ребро, согласно формуле (33.5):

$$\begin{aligned} -\Delta T &= \int_0^l \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_t \theta c^2 ds = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_t \frac{f}{l} (\operatorname{ctg} \alpha_1 + \\ &+ \operatorname{ctg} \alpha_2) \frac{f^2}{4l^2} \int_0^l (s - r)^2 ds = \frac{\sigma_t f^3}{6\sqrt{3}l^3} (\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \alpha_2) \times \\ &\times [(l - r)^3 + r^3] = \frac{\sigma_t f^3}{6\sqrt{3}} (\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \alpha_2) (1 - 3\xi + 3\xi^2), \end{aligned}$$

где

$$\xi = r/l.$$

Общая работа внутренних сил, приходящаяся на все ребра деформированной поверхности, равна

$$-T = \frac{\sigma_t h^2 f}{2\sqrt{3}} \sum \operatorname{ctg} \alpha_i \left[1 + \frac{f^2}{h^2} \left(\frac{1}{3} - \xi + \xi^2 \right) \right]. \quad (33.12)$$

Составляем условия равновесия в виде (33.9) или, более последовательно, находим минимум потенциальной

энергии системы:

$$U = T + V = \frac{\sigma_T h^2 f}{2\sqrt{3}} \sum \operatorname{ctg} \alpha \left[1 + \frac{f^2}{h^2} \left(\frac{1}{3} - \xi + \xi^2 \right) \right] - Pf.$$

Получим

$$P = \frac{\sigma_T h^2}{2\sqrt{3}} \sum \operatorname{ctg} \alpha_i \left[1 + \frac{f^2}{h^2} (1 - 3\xi + 3\xi^2) \right].$$

Легко видеть, что минимальные значения P и U будут при $\xi = 0,5$. Поэтому окончательно

$$P = \frac{\sigma_T h^2}{2\sqrt{3}} \sum \operatorname{ctg} \alpha_i (1 + f^2/(4h^2)). \quad (33.13)$$

При больших прогибах работу внутренних сил следует определять согласно (33.6):

$$T = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T h \sum \operatorname{ctg} \alpha_i \int_0^l \frac{|s - r| f^2}{2l^2} ds.$$

При интегрировании здесь необходимо учитывать перемену знака $s - r$ на длине l . С учетом этого обстоятельства получаем

$$\begin{aligned} T &= -\frac{\sigma_T h f^2}{2\sqrt{3}l^2} \sum \operatorname{ctg} \alpha_i [(l - r)^2 + r^2] = \\ &= -\frac{\sigma_T h f^2}{2\sqrt{3}} \sum \operatorname{ctg} \alpha_i (1 - 2\xi + 2\xi^2). \end{aligned} \quad (33.14)$$

Потенциальная энергия системы равна

$$U = \frac{\sigma_T h f^2}{2\sqrt{3}} \sum \operatorname{ctg} \alpha_i (1 - 2\xi + 2\xi^2) - Pf.$$

Из условия минимума U находим

$$\xi = 0,5, \quad P = \frac{\sigma_T h f}{2\sqrt{3}} \sum \operatorname{ctg} \alpha_i. \quad (33.15)$$

Сравнив зависимость P от f , выраженную формулами (33.13) и (33.15), с зависимостью (33.10), (33.11), полученной выше для закрепленных краев пластиинки, заметим, что при смещающихся краях та же внешняя сила вызывает удвоенный прогиб пластиинки.

**§ 34. Устойчивость сжатых пластинок
из жесткопластического материала [95], [98]**

Изложенный метод может быть применен к задаче об устойчивости сжатой пластиинки за пределом упругости с учетом влияния больших прогибов, имеющих порядок толщины пластиинки.

Возьмем снова шарнирно опертую полигональную пластиинку со свободно смещающимися краями после выпучивания ее по пирамидальной поверхности под влиянием усилий, действующих в плоскости пластиинки и равно-

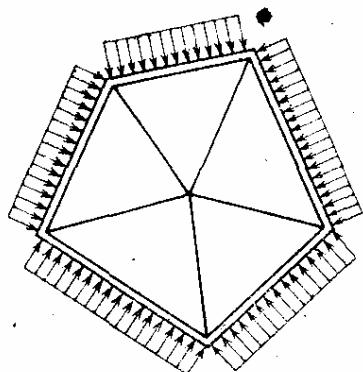


Рис. 97.

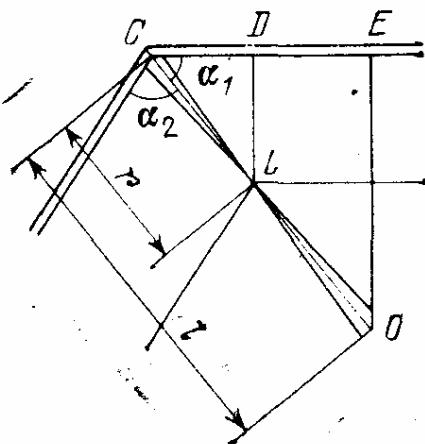


Рис. 98.

мерно распределенных по ее периметру (рис. 97). Работа внутренних сил на заданной деформации будет по-прежнему определяться выражениями (33.12) и (33.14). Для определения работы внешних сил найдем смещения опорного контура внутрь пластиинки.

Опустим из точки нулевых осевых деформаций какого-либо ребра перелома поверхности пластиинки перпендикуляр LD (рис. 98) на сторону опирания, прилегающую к вершине C . Длина этого перпендикуляра равна $r \sin \alpha_1$. Прогиб в точке L равен fr/l ; следовательно, уменьшение проекции линии LD равно

$$\delta = r \sin \alpha_1 - \sqrt{r^2 \sin^2 \alpha_1 - f^2 r^2/l^2} = \\ = r \sin \alpha_1 (1 - \sqrt{1 - f^2/(l^2 \sin^2 \alpha_1)}).$$

При малом прогибе f по сравнению с длиной l имеем

$$\delta \approx r \sin \alpha_1 f / (2l^2 \sin^2 \alpha_1) = rf^2 / (2l^2 \sin \alpha_1).$$

Работа нагрузки q , приложенной на части стороны пластиинки от вершины C до основания перпендикуляра OE , опущенного из вершины пирамиды деформированной поверхности, равна

$$\Delta V = q\delta l \cos \alpha_1 = \frac{qr f^2}{2l} \operatorname{ctg} \alpha_1 = \frac{qf^2}{2} \xi \operatorname{ctg} \alpha_1,$$

а работа всей внешней нагрузки на заданном перемещении

$$V = \frac{qf^2}{2} \xi \sum \operatorname{ctg} \alpha_i.$$

При малых прогибах пластиинки, удовлетворяющих неравенству

$$f < |hl/(s - r)|, \quad (34.1)$$

работа внутренних сил определяется выражением (33.12). Потенциальная энергия пластиинки при этом равна

$$\begin{aligned} U &= T - V = \\ &= \frac{\sigma_T h^2}{2 \sqrt{3}} \sum \operatorname{ctg} \alpha_i \left[f + \frac{f^3}{h^2} \left(\frac{1}{3} - \xi + \xi^2 \right) \right] - \frac{qf^2}{2} \xi \sum \operatorname{ctg} \alpha_i. \end{aligned}$$

В состоянии равновесия потенциальная энергия принимает минимальное значение. Из условия

$$\partial U / \partial f = 0, \quad \partial U / \partial \xi = 0$$

получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_T h^2}{2 \sqrt{3}} \left[1 + \frac{f^2}{h^2} (1 - 3\xi + 3\xi^2) \right] - qf\xi &= 0, \\ \frac{\sigma_T f}{\sqrt{3}} (2\xi - 1) - q &= 0. \end{aligned}$$

Исключив из этих уравнений $\xi = r/l$, найдем зависимость между q и f :

$$\frac{\sigma_T h^2}{\sqrt{3}} + \frac{\sigma_T f^2}{4 \sqrt{3}} = qf + \frac{\sqrt{3}q^2}{4\sigma_T}, \quad (34.2)$$

или

$$1 + \frac{\eta^2}{4} = 2\eta\varphi + \varphi^2, \quad \varphi = \sqrt{1 + \frac{5}{4}\eta^3} - \eta.$$

Здесь введены обозначения

$$\eta = \frac{f}{h}, \quad \varphi = \frac{\sqrt{3}q}{2\sigma_T h}.$$

При $\eta = 0$ $\varphi = 1$, т. е. $q = 2\sigma_t h/\sqrt{3}$. При увеличении f нагрузка q уменьшается, что говорит о неустойчивости состояний равновесия. Минимум φ соответствует $\eta = f/h = 4/\sqrt{5} = 1,79$ и равен $1/\sqrt{5} = 0,447$. Однако при таких значениях прогиба зависимость (34.2) становится уже мало применимой, поскольку неравенство (34.1) в ряде точек может не соблюдаться.

Рассмотрим теперь большие прогибы, для которых можно считать справедливым выражение (33.14). Потенциальная энергия в этом случае равна

$$U = \left[\frac{\sigma_t h f^2}{2\sqrt{3}} (1 - 2\xi + 2\xi^2) - \frac{q f^2}{2} \xi \right] \sum \operatorname{ctg} \alpha_i.$$

Из условия равновесия $\partial U / \partial f = 0$ получаем

$$\left[\frac{\sigma_t h}{\sqrt{3}} (1 - 2\xi + 2\xi^2) - q \xi \right] f \sum \operatorname{ctg} \alpha_i = 0.$$

Это условие соблюдается при любом f , если нагрузка q принимает критическое значение, равное

$$q = \frac{\sigma_t h}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\xi} - 2 + 2\xi \right).$$

Минимум критической нагрузки будет при $\xi = 1/\sqrt{2} = 0,707$ равен

$$q_{\min} = \frac{\sigma_t h}{\sqrt{3}} (2\sqrt{2} - 2) = 0,477 \sigma_t h, \varphi = 0,414. \quad (34.3)$$

Общий вид зависимости φ от η изображен на графике (рис. 99).

Заметив, что при $\varphi < 0,414$ искривленные состояния пластиинки невозможны, мы можем принять выражение (34.3) в качестве условия предельного состояния сжатой пластиинки, получившей по каким-либо причинам значительные прогибы f .

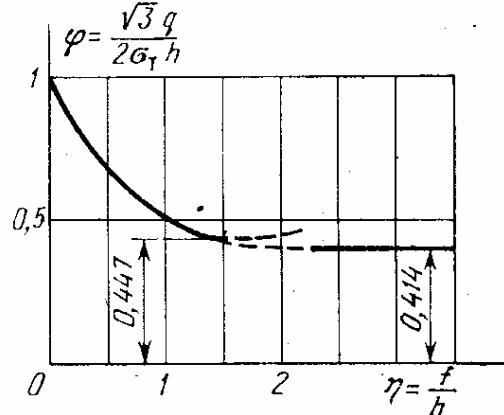


Рис. 99.

Г л а в а 6

ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ ПЛАСТИНОК, РАБОТАЮЩИХ В СВОЕЙ ПЛОСКОСТИ

§ 35. Дискретные решения задач предельного равновесия [95]

Для достижения предельного равновесия не обязательно, чтобы деформации текучести охватили весь объем тела. Неизменяемость системы нарушается уже тогда, когда тело разделится зоной текучести на две независимые области. Примером может служить предельное равновесие простой однопролетной балки, загруженной в середине пролета, с зоной текучести, расположенной вблизи среднего сечения. Для упрощения расчета эту зону часто считают сосредоточенной в одном среднем сечении, переходя к условному понятию шарнира текучести.

Благодаря локальному характеру зон текучести во многих случаях целесообразно считать эти зоны сосредоточенными вдоль некоторых плоскостей или поверхностей, если речь идет о трехмерном теле, или вдоль линий, если речь идет о пластинках или оболочках.

В дальнейшем мы будем пользоваться понятием дискретных, или сосредоточенных, деформаций, к которым отнесем сосредоточенное удлинение — сжатие и сосредоточенный сдвиг. С точки зрения обычных представлений теории упругости здесь будут иметь место бесконечно большие деформации, сосредоточенные в бесконечно тонких слоях. Вместе с тем перемещения, вызванные этими деформациями, должны быть величинами того же порядка малости, что и обычные смещения в упруго-пластических телах. Эти смещения мы считаем достаточно малыми для того, чтобы к ним можно было применять принцип суперпозиции.

Нацовем сосредоточенным удлинением по слою A (рис. 100) такую деформацию, в которой участвует слой,

имеющий бесконечно малую толщину δ , причем по обе стороны от этого слоя тело считается недеформированным. Взаимные перемещения точек, лежащих по одну и по другую сторону от этого слоя, в направлении, перпен-

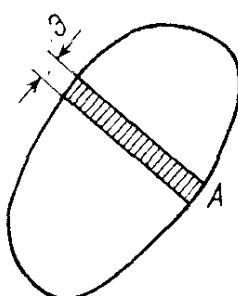


Рис. 100.

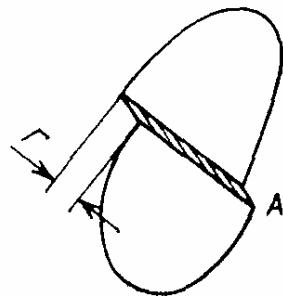


Рис. 101.

дикулярном слою, имеют порядок обычных малых перемещений. Это взаимное перемещение \mathcal{E} мы и будем считать сосредоточенным удлинением.

Аналогично, сосредоточенным сдвигом Γ назовем смещение одной части тела относительно другой в плоскости разделяющего слоя, имеющего бесконечно малую величину δ (рис. 101). Сосредоточенный сдвиг, как и сосредоточенное удлинение, измеряется в единицах длины.

Сосредоточенное удлинение \mathcal{E} и сосредоточенный сдвиг Γ следует относить к площадкам, касательным к слою A . На площадках, проведенных через точки этого слоя, но иначе ориентированных, также будут иметь место сосредоточенные удлинения и сдвиги, которые могут быть найдены по формулам, аналогичным тем, которые применяются для определения обычных деформаций на косых площадках.

Имея в виду пластические деформации, не сопровождающиеся изменением объема тела, следует исключить из рассмотрения сосредоточенные удлинения сплошного трехмерного тела, так как условие отсутствия изменения объема зоны текучести требует возникновения в бесконечно тонком слое текучести конечных перемещений вдоль слоя, имеющих иной порядок величин по сравнению с другими перемещениями точек рассматриваемого тела. Однако схему сосредоточенных удлинений можно использовать при расчете тонких пластин, в которых поперечные укорочения слоя осуществляются за счет уменьшения толщины пластины по линии текучести.

Для сосредоточенного сдвига интенсивность деформаций будет также сосредоточенной, и ее можно определить по формуле

$$E_u = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\frac{3}{2} \Gamma^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} |\Gamma|. \quad (35.1)$$

Для сосредоточенного удлинения Э тонкой пластинки поперечное укорочение в направлении линии текучести равно нулю, а в направлении толщины пластинки равно $-\vartheta$. Поэтому сосредоточенная интенсивность деформаций здесь равна

$$E_u = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\vartheta - 0)^2 + (\vartheta + \vartheta)^2 + (0 + \vartheta)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} |\vartheta|. \quad (35.2)$$

В качестве простого примера рассмотрим сосредоточенный сдвиг сжатой призмы по косой плоскости (рис. 102), наклоненной под углом α к плоскости поперечного сечения призмы. При сближении оснований призмы на величину λ сосредоточенный сдвиг равен

$$\Gamma = \lambda / \sin \alpha,$$

откуда

$$E_u = \frac{\lambda}{\sqrt{3} \sin \alpha}.$$

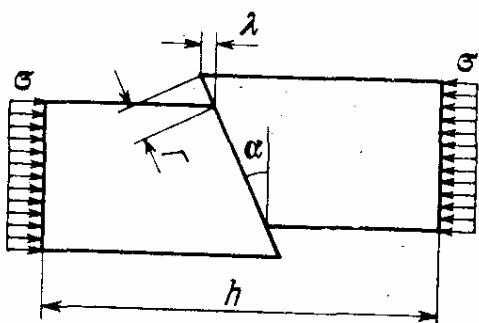


Рис. 102.

Работа внутренних сил выразится формулой —

$$T = -\sigma_t \int_{\omega} E_u d\omega,$$

где интегрирование производится по площади ω слоя, по которому происходит сдвиг. В данном случае

$$\omega = \frac{F}{\cos \alpha}, \quad T = \frac{-\sigma_t \lambda F}{\sqrt{3} \sin \alpha \cos \alpha},$$

где F — площадь поперечного сечения призмы.

Работу T приравняем с обратным знаком работе внешних сил $V = P\lambda$ и получим

$$P = \frac{\sigma_T F}{\sqrt{3} \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_T F}{\sin 2\alpha}.$$

Минимум P достигается при $\alpha = 45^\circ$, когда

$$P = P_{\text{пр}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T F. \quad (35.3)$$

Заметим, что в данном случае отсутствуют деформации в направлении нулевого уклона плоскости сдвига, т. е. имеет место плоская деформация. Для распределенных деформаций призмы, сжимаемой в условиях плоской деформации, имеем

$$\varepsilon_x = \frac{\lambda}{h}, \quad \varepsilon_y = -\frac{\lambda}{h}, \quad \varepsilon_z = 0, \quad \varepsilon_{ii} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\lambda}{h}.$$

Отсюда

$$-T = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \frac{\lambda}{h} F h$$

и

$$P_{\text{пр}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T F.$$

Мы получили то же выражение (35.1), что и в случае сосредоточенного сдвига. Таким образом, дискретная деформация здесь дает ту же величину предельной нагрузки, что и распределенная.

Если верхнее основание призмы не может смещаться относительно нижнего в горизонтальной плоскости, то можно получить тот же результат путем наложения друг на друга двух малых взаимно симметричных сосредоточенных деформаций (рис. 103). Очевидно, что при переходе к такой форме разрушения работа как внешних, так и внутренних сил увеличивается вдвое и величина предельной сжимающей силы остается неизменной.

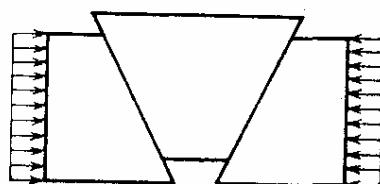


Рис. 103.

§ 36. Сосредоточенные деформации при плоском напряженном состоянии тонких пластинок [95]

В пластинках при плоском напряженном состоянии можно считать равными нулю напряжения σ_z , τ_{xz} и τ_{yz} , а также деформации γ_{zx} и γ_{zy} . Кроме того, из условия постоянства объема имеем равенство

$$\epsilon_z = -\epsilon_x - \epsilon_y.$$

Величина интенсивности деформаций равна

$$\begin{aligned} \epsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_x + 2\epsilon_y)^2 + (\epsilon_y + 2\epsilon_x)^2 + \frac{3}{2}\gamma_{xy}^2} = \\ = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_x\epsilon_y + 0,25\gamma_{xy}^2}. \quad (36.1) \end{aligned}$$

Из дискретных деформаций в пластинке, как указывалось выше, могут возникать не только сосредоточенные сдвиги по линиям, но и сосредоточенные удлинения, которые сопровождаются сужением толщины пластиинки по линиям сосредоточенных удлинений. Интенсивность деформаций при сосредоточенных сдвигах и сосредоточенных удлинениях будет также сосредоточенной и должна определяться по формулам (35.1) и (35.2).

По одной и той же линии могут одновременно возникать и сосредоточенные сдвиги и сосредоточенные удлинения. При этом интенсивность деформаций следует определять по формуле

$$E_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{4\vartheta^2 + \Gamma^2}, \quad (36.2)$$

вытекающей из формулы (36.1), если в последней положить $\epsilon_x = \vartheta$, $\gamma_{xy} = \Gamma$, $\epsilon_y = 0$.

Работа внутренних сил в общем случае сосредоточенных деформаций определяется формулой

$$-T = \sigma_t \int E_i ds = \frac{\sigma_t}{\sqrt{3}} \int \sqrt{4\vartheta^2 + \Gamma^2} ds, \quad (36.3)$$

где интегрирование производится по всем линиям сосредоточенных деформаций.

Возможность сосредоточенных удлинений и комбинаций сосредоточенных удлинений с сосредоточенными сдви-

гами приводит в общем случае к снижению предельной нагрузки на тонкую пластинку по сравнению с аналогичными случаями загружения при плоском деформированном состоянии. Рассмотрим, например, одноосное растяжение прямоугольной пластины (рис. 104). Если ограничиться рассмотрением деформаций в виде сосредоточенных сдвигов (рис. 104, а), то получим формулу (35.3)

$$\sigma_{\text{пр}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_t.$$

Ту же формулу получим при допущении одного только сосредоточенного удлинения по некоторой прямой, пересекающей ширину пластины (рис. 104, б). Действительно, при продольном относительном смещении торцов пластины, равном λ , имеем

$$\vartheta = \frac{\lambda}{\cos \alpha}, \quad E_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\lambda}{\cos \alpha},$$

$$-T = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_t \frac{\lambda}{\cos \alpha} \frac{bh}{\cos \alpha},$$

$$V = \sigma h b \lambda = -T,$$

где b — ширина, h — толщина пластины.

Отсюда

$$\sigma = \sigma_{\text{пр}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sigma}{\cos^2 \alpha}, \quad \min \sigma_{\text{пр}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_t \text{ при } \alpha = 0.$$

Допустим теперь комбинацию сосредоточенного сдвига Γ и сосредоточенного удлинения ϑ по наклонной линии, пересекающей пластинку под углом α (рис. 104, в). Тогда работа внутренних сил равна

$$T = -\frac{\sigma_t}{\sqrt{3}} \sqrt{4\vartheta^2 + \Gamma^2} \frac{bh}{\cos \alpha}, \quad (36.4)$$

а работа внешних сил

$$V = \sigma b h \lambda = \sigma b h (\Gamma \sin \alpha + \vartheta \cos \alpha), \quad (36.5)$$

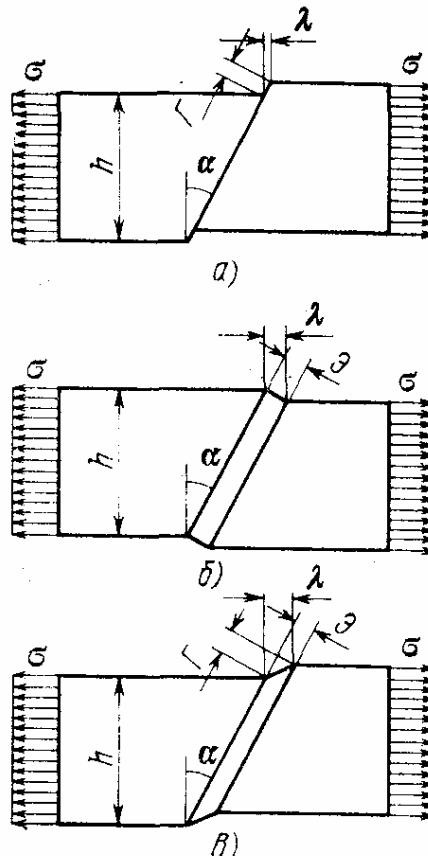


Рис. 104.

Приравняв нулю сумму (36.4) и (36.5), получим

$$\sigma = \sigma_{\text{пр}} = \frac{\sigma_t}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\Gamma^2 + 4\vartheta^2}}{\cos \alpha (\Gamma \sin \alpha + \vartheta \cos \alpha)},$$

или

$$\sigma_{\text{пр}} = \frac{\sigma}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1 + 4\xi^2}}{\cos \alpha (\sin \alpha + \xi \cos \alpha)}, \quad (36.6)$$

где

$$\xi = \vartheta/\Gamma.$$

Будем искать величины ξ и α , при которых правая часть формулы (36.6) принимает минимальное значение. Для этого имеем два условия:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (\cos \alpha \sin \alpha + \xi \cos^2 \alpha) = 0,$$

$$-\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2\xi \cos \alpha \sin \alpha = 0, \quad \xi = \operatorname{ctg} 2\alpha$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\sqrt{1 + 4\xi^2}}{\sin \alpha + \xi \cos \alpha} &= 0, \quad (\sin \alpha + \xi \cos \alpha) \frac{4\xi}{\sqrt{1 + 4\xi^2}} - \\ &- \sqrt{1 + 4\xi^2} \cos \alpha = 0, \quad \xi = \frac{\cos \alpha}{4 \sin \alpha}. \end{aligned} \quad (36.7)$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} 2\alpha &= \frac{1}{4} \operatorname{ctg} \alpha, \quad \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{4}, \\ \operatorname{ctg} \alpha &= \sqrt{2}, \quad \alpha = 35^\circ 17'. \end{aligned} \quad (36.8)$$

Определив из (36.8) и (36.7)

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad \xi = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

и подставив в (36.6), найдем, что

$$\sigma_{\text{пр}} = \sigma_t. \quad (36.9)$$

Таким образом, предельная нагрузка, соответствующая сосредоточенной деформации пластиинки по линии, наклоненной под углом $35^\circ 17'$, равна обычному пределу текучести на растяжение, соответствующему однородной деформации растяжения в одном направлении.

Заметим, что сосредоточенная деформация допускает закрепление концов пластинки от расширения в поперечном направлении по ширине, как при зажиме концов пластинки захватами разрывной машины, в то время как для распределенной деформации такое закрепление должно несколько повысить предельную нагрузку. Таким образом, сосредоточенная деформация имеет преимущество в возможности своего появления перед распределенной деформацией.

Практически сосредоточенные деформации при растяжении тонкой пластинки выражаются в появлении так называемых линий текучести, которые хорошо заметны на шлифованных сторонах металлических образцов, подвергнутых растяжению. Опыт дает хорошее совпадение в угле наклона линий текучести, равном примерно 35° . Эта величина угла наклона неоднократно указывалась в литературе. Выше было получено $\alpha = 35^\circ 17'$, что является подтверждением применимости теории малых пластических деформаций к стальным конструкциям.

Сосредоточенные деформации могут появиться и при незакрепленных от поперечного расширения концах пластинки, вследствие имеющейся неоднородности материала, способствующей возникновению локальных деформаций.

§ 37. Поперечный изгиб пластинки в ее плоскости [95]

Зададимся сосредоточенной деформацией в наиболее напряженном сечении пластинки в виде поворота одной части пластинки относительно другой вокруг центра рассматриваемого сечения на угол φ (рис. 105). При этом возникнут сосредоточенные удлинения по линии сечения, равные

$$\dot{\vartheta} = \varphi u.$$

Сосредоточенные сдвиги при данной деформации отсутствуют. Такая схема разрушения пластинки соответствует представлению о шарнире текучести, возникающем в сечении пластической балки с максимальным изгибающим моментом.

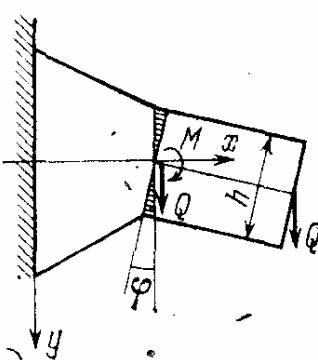


Рис. 105.

Работа внутренних сил на заданном перемещении равна

$$\begin{aligned} T = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_t \int |\mathcal{E}| ds &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_t \varphi \int_{-h/2}^{h/2} |y| dy = \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_t \frac{h^2}{4} \varphi. \end{aligned}$$

Толщину пластиинки здесь считаем равной единице.

Работа внешних сил выражается произведением изгибающего момента M на угол поворота φ :

$$V = M\varphi.$$

Из равенства $T + V = 0$ получаем

$$M_{\text{пр}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_t \frac{h^2}{4}. \quad (37.1)$$

Предельная величина изгибающего момента получилась большей, обычно принимаемой

$$M_t = \frac{\sigma_t h^2}{4}.$$

Это объясняется тем, что в схеме сосредоточенной деформации пластиинка является нерастяжимой по ширине (что соответствует, например, наличию жестких ребер, препятствующих удлинению или укорочению пластиинки в поперечном направлении).

Учтем теперь влияние поперечной силы, которая, например, в консольно заделанной пластиинке может быть отлична от нуля в сечении с максимальным изгибающим моментом. Для этого в наиболее напряженном сечении зададимся сочетанием сосредоточенного удлинения с сосредоточенным сдвигом

$$\mathcal{E} = \varphi y, \quad \Gamma = \psi.$$

Сосредоточенная интенсивность деформаций в данном сечении равна

$$E_u = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\psi^2 + 4\varphi^2 y^2},$$

а работа внутренних сил

$$T = -\frac{\sigma_t}{V^3} \int_{-h/2}^{h/2} V \sqrt{\psi^2 + 4\varphi^2 y^2} dy = \\ = -\frac{\sigma_t}{V^3} \left(\frac{h}{2} V \sqrt{\psi^2 + \varphi^2 h^2} + \frac{\psi}{2\varphi} \operatorname{arsh} \frac{\varphi h}{\psi} \right).$$

Запишем также выражение работы внешних сил

$$V = M\varphi + Q\psi.$$

Приравняв $-T$ и V и введя обозначение

$$\varphi/\psi = \xi,$$

получим следующее уравнение предельного состояния сечения:

$$M\xi + Q = \frac{\sigma_t}{V^3} \left(\frac{h}{2} V \sqrt{1 + \xi^2 h^2} + \frac{1}{2\xi} \operatorname{arsh} \xi h \right). \quad (37.2)$$

В прямоугольных координатах QM при заданном значении ξ (37.2) представляет собой уравнение прямой линии. Огибающая всех таких прямых, соответствующих различным значениям ξ , ограничивает область возможных комбинаций момента M и поперечной силы Q . Для нахождения огибающей дифференцируем уравнение (37.2) по ξ :

$$M = \frac{\sigma_t}{V^3} \left(\frac{h}{2\xi} V \sqrt{1 + \xi^2 h^2} - \frac{1}{2\xi^2} \operatorname{arsh} \xi h \right) \quad (37.3)$$

и исключаем из двух уравнений (37.2) и (37.3) M . Получим

$$Q = \frac{\sigma_t}{V^3} \frac{\operatorname{arsh} \xi h}{\xi}. \quad (37.4)$$

Уравнения (37.3) и (37.4) выражают предельную зависимость между Q и M в параметрической форме. Перепишем ее в виде

$$\frac{Q}{h\sigma_t} = \frac{\operatorname{arsh} \eta}{V^3 \eta}, \quad \frac{M}{h^2 \sigma_t} = \frac{1}{2V^3} \left(\frac{\sqrt{1 + \eta^2}}{\eta} - \frac{\operatorname{arsh} \eta}{\eta^2} \right), \quad (37.5)$$

где

$$\eta = \xi h.$$

Формулам (37.5) можно придать также такой вид:

$$\frac{Q}{h\sigma_t} = \frac{\gamma}{\sqrt{3} \operatorname{sh} \gamma}, \quad \frac{M}{h^2 \sigma_t} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\operatorname{th} \gamma} - \frac{\gamma}{\operatorname{sh}^2 \gamma} \right), \quad (37.6)$$

если положить

$$\eta = \xi h = \operatorname{sh} \gamma.$$

Зависимость (37.5) для предельного состояния сечения балки, подверженного действию изгибающего момента и поперечного сечения, показана графически на рис. 106, где для сравнения дана также окружность, проходящая через точки

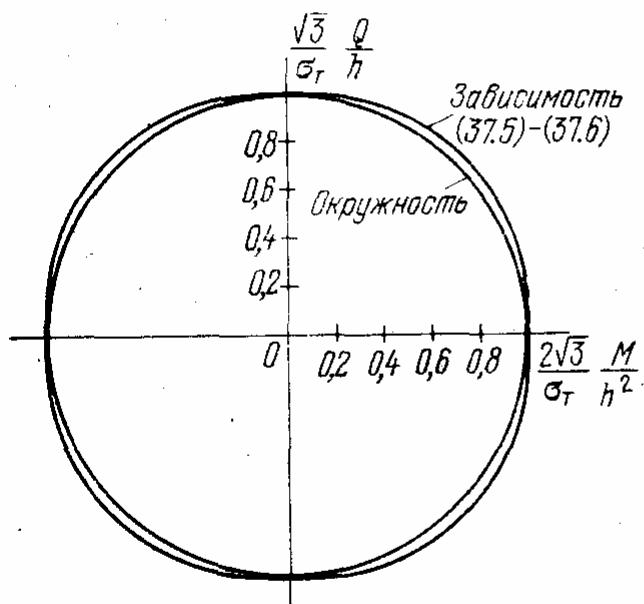


Рис. 106.

также окружность, проходящая через точки

$$0, \pm \frac{\sqrt{3}Q}{\sigma_t h} \text{ и } \frac{2\sqrt{3}M_t}{\sigma_t h^2}, 0.$$

Эта зависимость была найдена нами также иным путем [94] и с тем отличием, что в формулах (37.5) вместо

σ_t стоит величина $\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_t$. Это объясняется, как уже указывалось, тем, что в настоящем решении пластинка считается недеформируемой в поперечном направлении.

Г л а в а 7

ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА О СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

§ 38. Экстремали сосредоточенных деформаций [95]

До сих пор мы задавались линиями сосредоточенных деформаций, идущими по прямым сечениям пластинки. Рассмотрим теперь кривые линии сосредоточенных деформаций. Поставим задачу о нахождении конфигурации кривой линии сосредоточенных деформаций, соответствующей минимальному значению внешней разрушающей нагрузки.

Пусть одна часть пластинки повернулась относительно другой ее части вокруг мгновенного центра вращения O на малый угол φ , образуя по линии раздела сосредоточенные деформации сдвига и удлинения (рис. 107). Уравнение линии сосредоточенных деформаций запишем в полярных координатах θ , ρ с началом в точке O :

$$\rho = \rho(\theta).$$

При взаимном повороте частей пластинки по линии $\rho(\theta)$ возникают сосредоточенные деформации $\dot{\vartheta} = \rho\varphi \cos \psi$, $\Gamma = \rho\varphi \sin \psi$, (38.1)

где ψ — угол между касательной к линии $\rho(\theta)$ и радиус-вектором ρ в точке касания.

Как известно из дифференциальной геометрии,

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\rho}{d\rho/d\theta} = \frac{\rho}{\rho'},$$

откуда

$$\cos \psi = \frac{\rho'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}, \quad \sin \psi = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}. \quad (38.2)$$

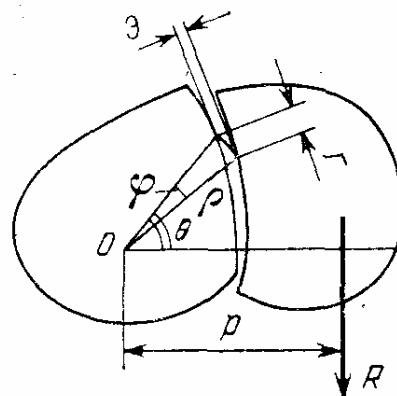


Рис. 107.

Сосредоточенная интенсивность деформаций, согласно формуле (36.2), равна

$$E_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \rho \varphi \sqrt{4 \cos^2 \psi + \sin^2 \psi},$$

или, после подстановки сюда формул (38.2),

$$E_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \rho \varphi \sqrt{\frac{4\rho'^2 + \rho^2}{\rho'^2 + \rho^2}}. \quad (38.3)$$

Для определения работы внутренних сил по формуле (36.3)

$$T = -\sigma_t \int E_i ds$$

необходимо подставить в нее, кроме (38.3), выражение для дифференциала дуги ds в полярной системе координат:

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta;$$

тогда получим

$$T = -\frac{\sigma_t}{\sqrt{3}} \varphi \int \rho \sqrt{4\rho'^2 + \rho^2} d\theta. \quad (38.4)$$

Интегрирование здесь распространяется на всю длину линии сосредоточенных деформаций.

Пусть поворот одной части пластинки относительно другой происходит под действием нагрузки, приложенной к одной части пластиинки, причем равнодействующая этой нагрузки R создает момент относительно центра поворота O , равный

$$M = Rp,$$

где p — длина перпендикуляра, опущенного из точки O на равнодействующую R . Работа внешних сил на данной деформации при этом равна

$$V = M\varphi = Rp\varphi.$$

Приравнивая ее работе внутренних сил (38.4), с обратным знаком находим предельное значение равнодействующей нагрузки:

$$R_{\text{пр}} = \frac{\sigma_t}{\sqrt{3}p} \int \rho \sqrt{4\rho'^2 + \rho^2} d\theta. \quad (38.5)$$

Задача заключается в том, чтобы найти такую линию $\rho(\theta)$, для которой функционал (38.5) имел бы минимальное значение. Для этого необходимо составить и решить уравнение Лагранжа — Эйлера

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \frac{d}{d\theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho'} = 0, \quad (38.6)$$

где Φ — подынтегральная функция (38.5)

$$\Phi = \rho \sqrt{4\rho'^2 + \rho^2}. \quad (38.7)$$

Согласно (38.6) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} &= \sqrt{4\rho'^2 + \rho^2} + \frac{\rho^2}{\sqrt{4\rho'^2 + \rho^2}}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \rho'} = \frac{4\rho\rho'}{\sqrt{4\rho'^2 + \rho^2}}, \\ \frac{d}{d\theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho'} &= \frac{1}{4\rho'^2 + \rho^2} \left[\sqrt{4\rho'^2 + \rho^2} (4\rho''\rho + 4\rho'^2) - \right. \\ &\quad \left. - 4\rho'\rho \frac{4\rho'\rho'' + \rho\rho'}{\sqrt{4\rho'^2 + \rho^2}} \right] = \frac{1}{(4\rho'^2 + \rho^2)^{3/2}} (16\rho'^4 + 4\rho^3\rho''), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \frac{d}{d\theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho'} &= (4\rho'^2 + \rho^2)^{-3/2} [(4\rho'^2 + \rho^2)^2 + \\ &\quad + \rho^2(4\rho'^2 + \rho^2) - 16\rho'^4 - 4\rho^3\rho''] = 0, \\ 16\rho'^4 + 8\rho'^2\rho^2 + \rho^4 + 4\rho^2\rho'^2 + \rho^4 - 16\rho'^4 - 4\rho^3\rho'' &= 0, \\ \rho^2 + 6\rho'^2 - 2\rho\rho'' &= 0. \end{aligned} \quad (38.8)$$

Это и есть дифференциальное уравнение экстремалей сосредоточенных деформаций в пластинке.

Для интегрирования его применим подстановку

$$\rho = u^{-1/2}.$$

Тогда получим вместо (38.8)

$$u'' + u = 0,$$

откуда

$$u = C \sin(\theta - D)$$

и

$$\rho = \frac{A}{\sqrt{\sin(\theta - D)}}. \quad (38.9)$$

Найденный интеграл имеет две произвольные постоянные: $A = C^{-0.5}$ и D .

Формула (38.9) представляет собой уравнение семейства экстремалей сосредоточенных деформаций. Кривые (38.9) имеют вид, показанный на рис. 108.

При $\theta = D$ и $\theta = \pi + D$ величина ρ стремится к бесконечности, следовательно, кривая (38.9) асимптотически приближается к прямой, образованной двумя лучами:

$\theta = D$ и $\theta = \pi + D$. При $\theta = \frac{\pi}{2} + D$ величина ρ имеет наименьшее значение, равное A . Отрицательным значениям корня в (38.9) соответствует вторая ветвь кривой, показанная на рис. 108 штриховой линией.

Для того чтобы определить, соответствуют ли экстремали (38.9) минимуму внешней нагрузки, следует, согласно правилам вариационного исчисления, найти знак второй частной производной $\Phi_{\rho' \rho'}$. В случае

$$\Phi_{\rho' \rho'} > 0$$

имеет место минимум функционала (38.5). Определяя из (38.7)

$$\Phi_{\rho' \rho'} = \frac{4\rho^3}{(4\rho'^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

и подставляя сюда выражение для ρ (38.9), получаем

$$\rho' = \frac{-A \cos(\theta - D)}{2 \sqrt{\sin^3(\theta - D)}},$$

$$4\rho'^2 + \rho^2 = \frac{A^2 \cos^2(\theta - D)}{\sin^3(\theta - D)} + \frac{A^2}{\sin(\theta - D)} = \frac{A^2}{\sin^3(\theta - D)},$$

$$\Phi_{\rho' \rho'} = \frac{4A^3}{\sin^{3/2}(\theta - D)} \cdot \frac{\sin^{9/2}(\theta - D)}{A^3} = 4 \sin^3(\theta - D).$$

При $-180^\circ < \theta - D < 180^\circ$ получаем $\Phi_{\rho' \rho'} > 0$, т. е. минимум разрушающей внешней нагрузки.

Найдем теперь выражение для предельной нагрузки, отвечающей сосредоточенной деформации, направленной по экстремали (38.9). Подставив (38.9) в функционал

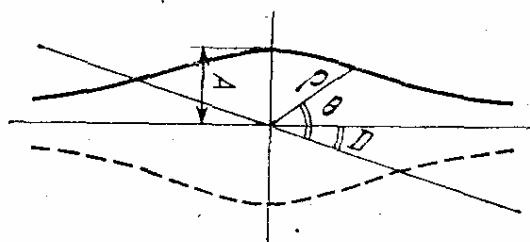


Рис. 108.

(38.5), получим

$$\begin{aligned}
 R_{\text{пр}} &= \\
 &= \frac{\sigma_t b}{\sqrt{3} p} \int \frac{A}{\sqrt{\sin(\theta - D)}} \sqrt{\frac{A^2}{\sin(\theta - D)} + \frac{4A^2}{4} \frac{\cos^2(\theta - D)}{\sin^3(\theta - D)}} d\theta = \\
 &= \frac{\sigma_t b}{\sqrt{3} p} A^2 \int \frac{d\theta}{\sin^2(\theta - D)} = \frac{\sigma_t b}{\sqrt{3} p} \frac{A^2}{p} [\operatorname{ctg}(\theta_1 - D) - \\
 &\quad - \operatorname{ctg}(\theta_2 - D)], \quad (38.10)
 \end{aligned}$$

где θ_1 и θ_2 — координатные углы, соответствующие выходам кривой сосредоточенных деформаций на кромки пластиинки, b — толщина пластиинки. Определяя из (38.9)

$$\sin(\theta - D) = \frac{A^2}{\rho^2}, \quad \operatorname{ctg}(\theta - D) = \frac{\sqrt{\rho^4 - A^4}}{A^4},$$

можно представить формулу (38.10) также в виде

$$R_{\text{пр}} = \frac{\sigma_t b}{\sqrt{3} p} (\sqrt{\rho_1^4 - A^4} - \sqrt{\rho_2^4 - A^4}).$$

Здесь ρ_1 и ρ_2 — радиусы-векторы всех точек выхода линии сосредоточенных деформаций на кромки пластиинки.

§ 39. Уточненное решение задачи о несущей способности пластиинки при поперечном изгибе ее в своей плоскости [95]

Рассмотрим опять прямоугольную пластиинку, заделанную одним концом и загруженную на другом конце силой P (рис. 109). Перемещения пластиинки из ее плоскости будем считать невозможными. Примем линию сосредоточенных деформаций в предельном состоянии пластиинки по экстремали (38.9), выходящей на кромки пластиинки в наиболее напряженных точках у заделки. Центр поворота пластиинки поместим на ее оси на расстоянии t от места заделки. Отсчет углов θ будем производить

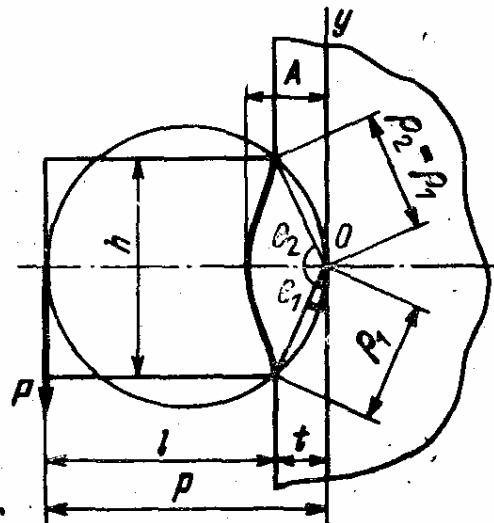


Рис. 109.

от вертикали Oy . Тогда при

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \rho = \min, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - D\right) = 1$$

и, следовательно,

$$D = 0.$$

Радиусы-векторы конечных точек экстремали равны

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{h}{2 \cos \theta_1},$$

где h — высота поперечного сечения пластинки.

Параметр A определяем из условия прохождения экстремали через крайние точки кромок пластинки, расположенные у заделки. Из (38.9) имеем при $\theta = \theta_1$

$$\rho_1 = \frac{A}{\sqrt{\sin \theta_1}} = \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{\cos \theta_1}.$$

Отсюда

$$A = \frac{h \sqrt{\sin \theta_1}}{2 \cos \theta_1}. \quad (39.1)$$

Заметив, что $p = l + t$, получаем из формулы (38.12)

$$P_{\text{пр}} = \frac{\sigma_T b}{\sqrt{3}} \cdot \frac{A^2}{l+t} (\operatorname{ctg} \theta_1 - \operatorname{ctg} \theta_2) = \frac{2\sigma_T b}{\sqrt{3}} \frac{A^2}{l+t} \operatorname{ctg} \theta_1$$

и, подставляя сюда (39.1),

$$P_{\text{пр}} = \frac{2\sigma_T b}{\sqrt{3}} \frac{h^2}{4(l+t)} \cdot \frac{1}{\cos \theta_1}.$$

Учитывая, что

$$t = \rho_1 \sin \theta_1 = \frac{h}{2} \operatorname{tg} \theta_1, \quad (39.2)$$

перепишем эту формулу в виде

$$P_{\text{пр}} = \frac{2\sigma_T b}{\sqrt{3}} \frac{h^2}{4} \frac{1}{\left(l + \frac{h}{2} \operatorname{tg} \theta_1\right) \cos \theta_1}. \quad (39.3)$$

Далее следует искать такое положение центра поворота O , при котором правая часть выражения (39.3) имеет

минимальное значение. Для этого решаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(l \cos \theta_1 + \frac{h}{2} \sin \theta_1 \right) = 0, \quad -l \sin \theta_1 + \frac{h}{2} \cos \theta_1 = 0,$$

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{h}{2l}, \quad \cos \theta_1 = \frac{2l}{\sqrt{h^2 + 4l^2}}. \quad (39.4)$$

Подставив это выражение в формулу (39.2), найдем

$$t = \frac{h^2}{4l}, \quad (39.5)$$

а из формулы (39.3) получим

$$P_{\text{пр}} = \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} \frac{bh^2}{4} \frac{1}{\left(l + \frac{h^2}{4l} \right) \cdot \frac{2l}{\sqrt{h^2 + 4l^2}}} = \frac{\sigma_T bh^2}{\sqrt{3(h^2 + 4l^2)}}. \quad (39.6)$$

Равенство (39.5) показывает, что через центр поворота O , крайние точки заделанного сечения и точку пересечения силы P с осью пластинки можно провести окружность (рис. 109).

В предельном случае $l \rightarrow \infty$, $Pl \rightarrow M$ из (39.6) получим

$$P_{\text{пр}}l = M_{\text{пр}} = \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} \frac{bh^2}{4},$$

т. е. найденное выше значение предельного изгибающего момента в поперечном сечении тонкой пластинки (37.1). При этом, согласно (39.4), $\theta_1 = 0$, а согласно (39.1) — $A = 0$. Это значит, что центр поворота совмещается с центром заделанного сечения, а экстремаль совпадает с плоскостью заделки.

В другом предельном случае

$$l = 0, \quad P_{\text{пр}} = \frac{\sigma_T bh}{\sqrt{3}}, \quad \theta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad A = \infty$$

экстремаль также совпадает с плоскостью заделки, вдоль которой происходит сосредоточенный сдвиг Γ .

В общем случае, согласно (39.6), момент в заделанном сечении равен

$$M_{\text{пр}} = P_{\text{пр}}l = \frac{2\sigma_T bh^2}{\sqrt{3} \cdot 4} \frac{2l}{\sqrt{h^2 + 4l^2}}, \quad (39.7)$$

а поперечная сила —

$$Q_{\text{пр}} = P_{\text{пр}} = \frac{\sigma_t b h^2}{\sqrt{3(h^2 + 4l^2)}}. \quad (39.8)$$

Введем обозначения

$$\bar{M} = \frac{\sigma_t b h^2}{2\sqrt{3}}, \quad \bar{Q} = \frac{\sigma_t b h}{\sqrt{3}}, \quad \xi = \frac{h}{2l}.$$

Тогда формулы (39.7) и (39.8) можно переписать в виде

$$\frac{M}{\bar{M}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \quad \frac{Q}{\bar{Q}} = \frac{\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}},$$

а возведя в квадрат и сложив друг с другом, — в виде

$$\frac{M^2}{\bar{M}^2} + \frac{Q^2}{\bar{Q}^2} = 1. \quad (39.9)$$

Мы получили зависимость между M и Q в предельном состоянии пластинки в виде эллипса в координатах M, Q (или окружности в координатах $M/\bar{M}, Q/\bar{Q}$). Эта зависимость отличается от выведенной нами ранее зависимости между M и Q (37.5) для предельного состояния плоского поперечного сечения пластиинки. Поскольку в настоящем решении не накладываются ограничения на форму поверхности, по которой происходит разрушение, следует считать зависимость (39.9) более правильной и точной, чем зависимость (37.5).

Выводы данного параграфа легко распространяются на балки узкого прямоугольного сечения, загруженные любой вертикальной нагрузкой; для этого необходимо лишь под силой P подразумевать равнодействующую всех сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Возьмем, например, тонкостенный прямоугольный выступ, нагруженный вертикальной равномерно распределенной нагрузкой (рис. 110). Здесь

$$M = \frac{ql^2}{2}, \quad Q = ql.$$

По подстановке в (39.9) получаем

$$\left(\frac{\sqrt{3}ql^2}{\sigma_t b h^2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}ql}{\sigma_t b h} \right)^2 = 1, \quad q = q_{\text{пр}} = \frac{\sigma_t}{\sqrt{3}} \frac{bh^2}{l \sqrt{l^2 + h^2}}. \quad (39.10)$$

Эта формула несправедлива для очень малых выступов, в которых разрушение может происходить по схеме рис. 111, где экстремаль сосредоточенных деформаций

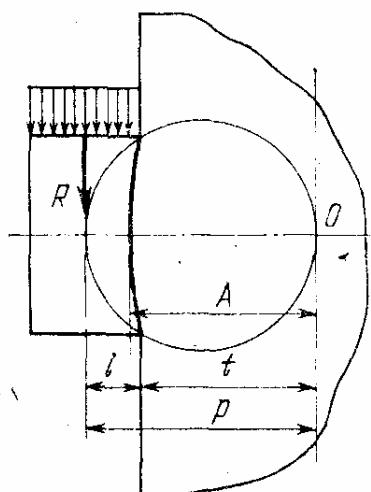


Рис. 110.

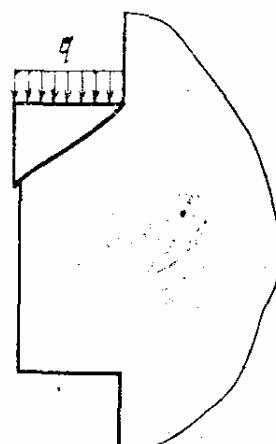


Рис. 111.

выходит на вертикальную грань выступа. Заменив приближенно эту экстремаль прямой линией, идущей под углом $37^{\circ}17'$ к вертикалам, получим, согласно (36.9),

$$q_{\text{пр}} = \sigma_t b. \quad (39.11)$$

Сопоставив формулы (39.10) и (39.11), найдем условие неприменимости формулы (39.10):

$$\frac{h^2}{l \sqrt{3(l^2 + h^2)}} > 1, \quad h^4 > 3h^2l^2 + 3l^4, \quad \frac{h}{l} > \sqrt{\frac{\sqrt{21} + 3}{2}} = 1,95.$$

Данное решение можно приложить к расчету шарниро опертой балки узкого прямоугольного сечения на действие сосредоточенной силы, приложенной в середине пролета (рис. 112). Полагая, что разрушение происходит по экстремаям, показанным на рис. 112, жирными линиями, получаем из

11*

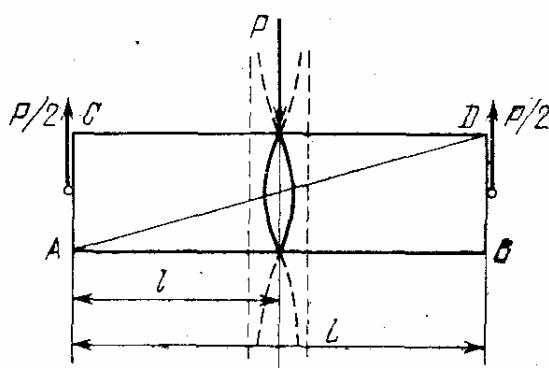


Рис. 112.

формулы (39.6)

$$P = \frac{2\sigma_T}{V^3} \cdot \frac{h^2}{\sqrt{h^2 + 4l^2}} = M_{\text{пр}} \cdot \frac{4}{\sqrt{h^2 + L^2}},$$

откуда

$$M_{\text{пр}} = P \cdot \frac{\sqrt{h^2 + L^2}}{4} \quad (39.12)$$

вместо привычной формулы $M_{\text{пр}} = PL/4$, соответствующей пластическому шарниру текучести в виде прямоугольных эпюр продольных напряжений. Мы видим, что форма разрушения, показанная на рис. 112, дает меньшую разрушающую нагрузку, т. е. более точное значение по-следней. В средней части балки здесь предполагается образование жесткой зоны в виде криволинейного двухугольника.

Формулу (39.12) можно трактовать таким образом, что в качестве расчетного пролета балки следует принимать не длину AB , а диагональ AD .

§ 40. Условие трансверсальности экстремалей сосредоточенных деформаций [95]

Часто выход на кромку пластиинки линий сосредоточенных деформаций не обусловлен конфигурацией периметра пластиинки. В этих случаях приходится искать начальную и конечную точки экстремали, находящиеся на кромках пластиинки. В вариационном исчислении доказывается, что в подобных случаях в точках выхода экстремали на контур следует выполнить условие

$$\Phi(\theta, \rho, \rho') + [r'(\theta) - \rho'(\theta)] \cdot \Phi\rho'(\theta, \rho, \rho') = 0. \quad (40.1)$$

Здесь $\Phi(\theta, \rho, \rho')$ — подынтегральное выражение функционала, для которого ищется минимум, $r(\theta)$ — уравнение контура пластиинки в полярных координатах, $\rho(\theta)$ — уравнение экстремали. Соотношение (40.1) называется условием трансверсальности.

В нашем случае, согласно формуле (38.7),

$$\Phi(\theta, \rho, \rho') = \rho \sqrt{4\rho'^2 + \rho^2},$$

и условие трансверсальности принимает вид

$$\rho \sqrt{4\rho'^2 + \rho^2} + (r' - \rho') \frac{4\rho\rho'}{\sqrt{4\rho'^2 + \rho^2}} = 0.$$

После очевидных упрощений получаем

$$\rho^2 + 4r'\rho' = 0. \quad (40.2)$$

Учитывая, что в искомой точке линии $\rho(\theta)$ и $r(\theta)$ пересекаются и что, следовательно, в ней $\rho = r$, можно представить формулу (40.2) в виде

$$r\rho + 4r'\rho' = 0,$$

или

$$\frac{r}{r'} \cdot \frac{\rho}{\rho'} = -4. \quad (40.3)$$

Заметим теперь, что r/r' представляет собой тангенс угла β между касательной к линии контура и радиусом-вектором, проведенным в точку касания (рис. 113). Точно так же величина ρ/ρ' является тангенсом угла α между касательной к экстремали в рассматриваемой точке и тем же радиусом-вектором. Поэтому можно написать

$$\operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha = -4.$$

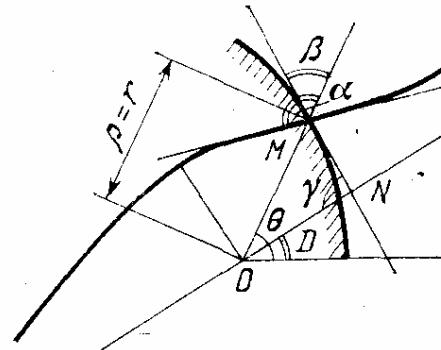


Рис. 113.

Далее определим из уравнения экстремали (38.9)

$$\rho = \frac{A}{\sqrt{\sin(\theta - D)}}, \quad \rho' = -\frac{1}{2} \frac{A \cos(\theta - D)}{\sqrt{\sin^3(\theta - D)}},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\rho}{\rho'} = -2 \operatorname{tg}(\theta - D).$$

Подставив это равенство в (40.3), получим

$$\operatorname{tg}(\theta - D) \cdot \operatorname{tg} \beta = 2. \quad (40.4)$$

Угол D представляет собой, как видно из рис. 113, угол наклона асимптоты экстремали к линии начала отсчета углов θ . Следовательно, угол $\theta - D$ является углом между радиусом-вектором и асимптотой экстремали.

Рассмотрим теперь треугольник ONM (рис. 113). Угол при вершине M в нем равен β , при вершине O равен $\theta - D$, а угол при вершине N , следовательно, равен

$$\gamma = \pi - \beta - \theta + D.$$

Определим тангенс угла γ :

$$\operatorname{tg} \gamma = -\operatorname{tg}(\beta + \theta - D) = -\frac{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg}(\theta - D)}{1 - \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg}(\theta - D)},$$

а с учетом (40.4)

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg}(\theta - D).$$

Таким образом, в треугольнике OMN тангенс угла γ при вершине N равен сумме тангенсов остальных двух углов треугольника.

§ 41. Изгиб клина от равномерно распределенной нагрузки

На рис. 114 показан клин, загруженный вертикальной равномерно распределенной нагрузкой. Каждое вертикальное сечение клина одинаково опасно в отношении разрушения, поскольку прочность сечения на изгиб увеличивается в направлении продольной оси клина в том

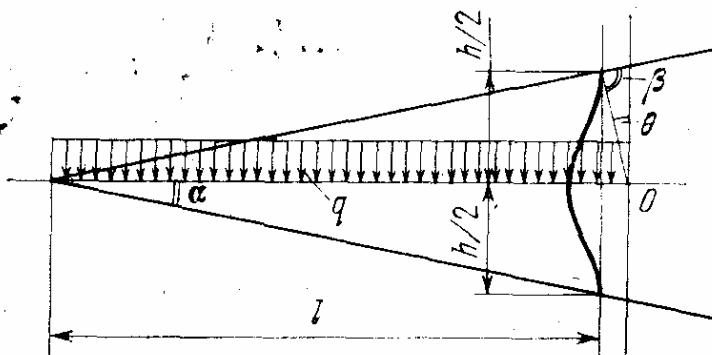


Рис. 114.

же отношении, что и изгибающий момент, а именно, пропорционально квадрату расстояния от вершины клина. Точно так же поперечная сила увеличивается пропорционально расстоянию от вершины, как и прочность вертикальных сечений на сдвиг. Поэтому невозможно заранее определить точки выхода экстремали сосредоточенных деформаций на кромки пластинки.

Для нахождения формы экстремали воспользуемся условием трансверсальности (40.4). Отсчитывая углы θ от асимптоты экстремали, получим $D = 0$, а угол β опре-

деляем из рис. 114:

$$\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha - \theta.$$

Таким образом, получим

$$\operatorname{ctg}(\theta - \alpha) \cdot \operatorname{tg} \theta = 2.$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{ctg} \theta \cdot \operatorname{ctg} \alpha + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \theta} &= 2 \operatorname{ctg} \theta, \quad 2 \operatorname{ctg}^2 \theta - \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \theta + 1 = 0, \\ \operatorname{ctg} \theta &= \frac{\operatorname{ctg} \alpha \pm \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 8}}{4}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \mp \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 8}}{2}. \end{aligned} \quad (41.1)$$

Из двух знаков решения следует выбирать тот, который приводит к минимуму нагрузки. Решение справедливо при

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha > 8, \quad \alpha < 19^\circ 28',$$

когда угол θ получается действительным.

Момент внешних сил относительно центра экстремали O , согласно (38.10) и с учетом симметрии задачи, равен

$$M_O = \frac{2\sigma_T b}{\sqrt{3}} A^2 \operatorname{ctg} \theta. \quad (41.2)$$

Величина A , согласно формуле (39.1), справедливой и в данном случае, равна

$$A = \frac{h}{2} \frac{\sqrt{\sin \theta}}{\cos \theta},$$

где h — высота вертикального сечения, проведенного через точки выхода экстремали на кромки. Поэтому

$$M_O = \frac{2\sigma_T b h^2}{4\sqrt{3}} \operatorname{ctg} \theta \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\sigma_T b h^2}{2\sqrt{3}} \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\sigma_T b h^2}{2\sqrt{3}} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}.$$

Подставляя сюда значение $\operatorname{tg} \theta$ из (41.1), получим

$$M_O = \frac{\sigma_T b h^2}{4\sqrt{3}} \sqrt{2 \operatorname{ctg}^2 \alpha \mp 2 \operatorname{ctg} \alpha \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 8} - 4}. \quad (41.3)$$

Далее определим внешний момент относительно центра экстремали:

$$M_Q = ql \left(\frac{l}{2} + \frac{h}{2} \operatorname{tg} \theta \right) = ql \left[\frac{l}{2} + \frac{h}{4} (\operatorname{ctg} \alpha \mp \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 8}) \right]. \quad (41.4)$$

Приравняв правые части (41.3) и (41.4), находим

$$q = q_{\text{пр}} = \frac{\sigma_T b h^2}{4 \sqrt{3} l} \frac{\sqrt{2 \operatorname{ctg}^2 \alpha \mp 2 \operatorname{ctg} \alpha \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 8} - 4}}{\frac{l}{2} + \frac{h}{4} (\operatorname{ctg} \alpha \mp \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 8})},$$

и поскольку $h/l = 2 \operatorname{tg} \alpha$,

$$\begin{aligned} q_{\text{пр}} &= \frac{\sigma_T b \sqrt{2}}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}^2 \alpha \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha \mp \operatorname{ctg} \alpha \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 8} - 2}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} (1 \mp \sqrt{1 - 8 \operatorname{tg}^2 \alpha})} = \\ &= \sqrt{\frac{8}{3}} \sigma_T b \operatorname{tg} \alpha \frac{\sqrt{1 \mp \sqrt{1 - 8 \operatorname{tg}^2 \alpha} - 2 \operatorname{tg}^2 \alpha}}{2 \mp \sqrt{1 - 8 \operatorname{tg}^2 \alpha}}. \end{aligned} \quad (41.5)$$

Для сравнения найдем предельную нагрузку из условия разрушения клина по плоскому вертикальному сечению:

$$\frac{ql^2}{2} = \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} \frac{bh^2}{4}, \quad q = q_1 = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \frac{bh^2}{l^2} = \frac{4\sigma_T b}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}^2 \alpha. \quad (41.6)$$

Значения q по формулам (41.5) и (41.6) приведены в табл. 6. Там же даны величины углов θ , соответствующих предельным нагрузкам $q_{\text{пр}}$.

Т а б л и ц а 6

α , град	θ , град	$q_{\text{пр}}/\sigma_T$	q_1/σ_T
3	3,0175	0,00631	0,00634
6	6,138	0,02496	0,02551
9	9,495	0,05525	0,05794
12	13,295	0,09611	0,10434
15	17,971	0,14665	0,1658
18	25,036	0,2076	0,2439
19,471	35,264	0,2500	0,2887

Решим ту же задачу другим методом. Из уравнения (38.9) при $D = 0$ и из рис. 144 получаем

$$\rho_1 = \frac{A}{\sqrt{\sin \theta_1}}, \quad h = \rho_1 \cos \theta_1 = \frac{A \cos \theta_1}{\sqrt{\sin \theta_1}},$$

$$c = \rho_1 \sin \theta_1 = A \sqrt{\sin \theta_1}, \quad (41.7)$$

$$l = c - A + h \operatorname{ctg} \alpha = A \left(\sqrt{\sin \theta_1} - 1 + \operatorname{ctg} \alpha \frac{\cos \theta_1}{\sqrt{\sin \theta_1}} \right).$$

Согласно (41.2) имеем

$$M_O = ql \left(\frac{l}{2} + A \right) = \frac{2\sigma_T b}{\sqrt{3}} A^2 \operatorname{ctg} \theta_1,$$

отсюда

$$q = \frac{2\sigma_T b}{\sqrt{3}} A^2 \frac{\operatorname{ctg} \theta_1}{0,5l^2 + Al}.$$

Подставляя в эту формулу значение l (41.7), после некоторых преобразований получим

$$q = \frac{4\sigma_T b \cos \theta}{\sqrt{3} [(\sin \theta_1 + \operatorname{ctg} \alpha \cdot \cos \theta_1)^2 - \sin \theta_1]}: \quad (41.8)$$

Далее находим минимум q , для чего приравниваем нулю производную от q по θ_1 :

$$-[(\sin \theta_1 + \operatorname{ctg} \alpha \cos \theta_1)^2 - \sin \theta_1] \sin \theta_1 -$$

$$-\cos \theta_1 [2(\sin \theta_1 + \operatorname{ctg} \alpha \cos \theta_1)(\cos \theta_1 - \operatorname{ctg} \alpha \sin \theta_1) -$$

$$-\cos \theta_1] = 0.$$

Упрощая, приходим к уравнению

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \theta_1 \cdot \sin \theta_1 - 2\operatorname{ctg} \alpha \cos^3 \theta_1 + 1 - \sin^3 \theta_1 -$$

$$-2\cos^2 \theta_1 \cdot \sin \theta_1 = 0,$$

решая которое получаем

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos^2 \theta_1 \pm \sqrt{1 - \sin \theta_1}}{\cos \theta_1 \cdot \sin \theta_1} \quad (41.9)$$

и, наконец, подставляя (41.9) в (41.8), приходим к фор-

мule

$$q = q_{\text{пр}} = \frac{4\sigma_T b}{\sqrt{3}} \frac{\sin^2 \theta_1 \cdot \cos \theta_1}{2 - \sin \theta_1 - \sin^3 \theta_1 \pm 2 \sqrt{1 - \sin \theta_1}}. \quad (41.10)$$

Из двух знаков перед корнем, очевидно, надо взять плюс.

Т а б л и ц а 7

$\sin \theta_1$	α , град	$q_{\text{пр}}/\sigma_T b$
0,1	2,93	0,00605
0,2	6,030	0,02528
0,3	9,305	0,05925
0,4	12,792	0,10977
0,5	16,55	0,17926
0,6	20,667	0,27158
0,7	25,297	0,39371
0,8	30,738	0,56042
0,9	37,775	0,81264

Уравнения (41.9) и (41.10) дают решение задачи в параметрическом виде (см. табл. 7).

§ 42. Кручение запрессованной шайбы

Пусть в металлический лист запрессована жесткая шайба, требуется определить действующий в плоскости листа крутящий момент, который может воспринять шайба.

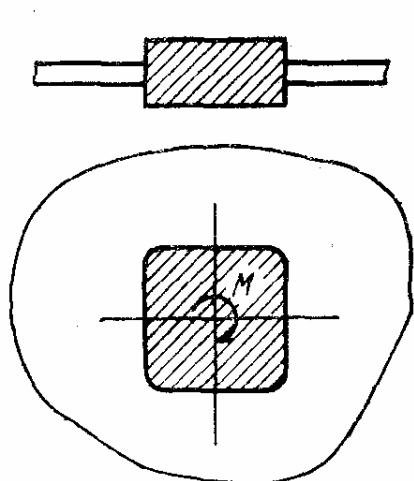


Рис. 115.

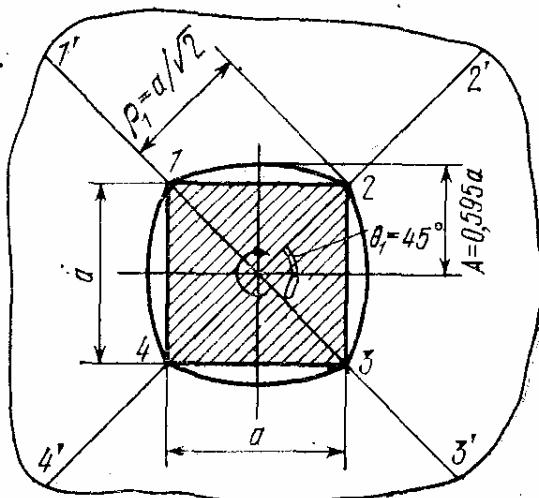


Рис. 116.

ба (рис. 115). Будем считать, что шайба имеет по крайней мере две оси симметрии, так что поворот происходит вокруг ее геометрического центра.

Рассмотрим сначала квадратную шайбу (рис. 116). Линии сосредоточенных деформаций в листе будут иметь асимптотами оси симметрии квадрата, не проходящие

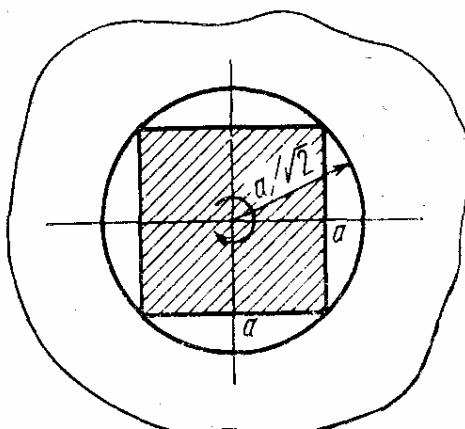


Рис. 117.

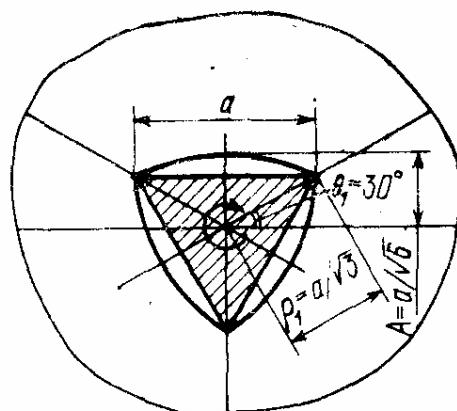


Рис. 118.

через его вершины. Толщину листа принимаем равной единице.

По линиям $1-1'$, $2-2'$, $3-3'$ и $4-4'$ проводим мысленно разрезы, но, поскольку части плоскости $1'122'$, $2'233'$, $3'344'$ и $4'411'$ поворачиваются вокруг центра шайбы на один и тот же угол, деформации по линиям разреза отсутствуют и всю внешнюю часть плоскости можно считать одним жестким целым.

Путем простых преобразований находим для одной стороны квадрата

$$\rho_1 = \frac{A}{\sqrt{\sin \theta_1}}, \quad A = \rho_1 \sqrt{\sin \theta_1},$$

$$M_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T b A^2 \operatorname{ctg} \theta_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T b \rho_1^2 \cos \theta_1. \quad (42.1)$$

Поскольку $\theta_1 = 45^\circ$, то $\rho_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $A = \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{0,5} = 0,5946a$ и $M_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T b \frac{a^2}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sigma_T b a^2}{\sqrt{6}} =$

$= 0,4082\sigma_T ba^2$, а для всех сторон квадрата

$$M_{\text{пр}} = 4M_1 = \frac{4}{\sqrt{6}}\sigma_T ba^2 = 1,633\sigma_T ba^2. \quad (42.2)$$

Для сравнения возьмем деформацию в виде сдвига по кругу, описанному вокруг шайбы (рис. 117). Тогда скручивающий момент равен

$$M_{\text{кр}} = 2\pi r^2 \frac{\sigma_T b}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\sigma_T ba^2 = 1,8138\sigma_T ba^2,$$

т. е. больше, чем при сосредоточенных деформациях по экстремалям на 11,2%.

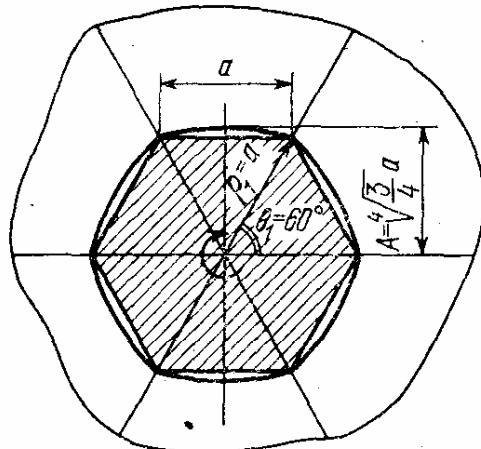


Рис. 119.

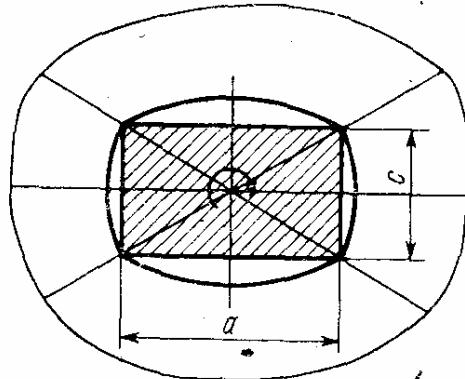


Рис. 120.

Для шайбы в виде равностороннего треугольника (рис. 118) получаем аналогично квадратной шайбе

$$\theta_1 = 30^\circ, \rho_1 = \frac{a}{\sqrt{3}}, A = \frac{a}{\sqrt{6}} = 0,4082a,$$

$$M_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T b \frac{a^2}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sigma_T ba^2}{3}, \quad M_{\text{пр}} = 3M_1 = \sigma_T ba^2.$$

Для шайбы в виде правильного шестиугольника (рис. 119)

$$\theta_1 = 60^\circ, \rho_1 = a, A = a \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 0,9306a,$$

$$M_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T ba^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sigma_T ba^2}{\sqrt{3}},$$

$$M_{\text{пр}} = 6M_1 = 2\sqrt{3}\sigma_T ba^2 = 3,464\sigma_T ba^2.$$

Для шайбы, имеющей форму прямоугольника со сторонами a и c (рис. 120), согласно формуле (42.1), получаем

для длинной стороны

$$\rho_1^2 = \frac{a^2 + c^2}{4}, \quad \cos \theta_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}},$$

$$M_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T b \frac{a^2 + c^2}{4} \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{\sigma_T b}{2\sqrt{3}} a \sqrt{a^2 + c^2};$$

для короткой стороны

$$\rho_1^2 = \frac{a^2 + c^2}{4}; \quad \cos \theta_1 = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}},$$

$$M_2 = \frac{\sigma_T b}{2\sqrt{3}} c \sqrt{a^2 + c^2}.$$

Общий предельный момент равен:

$$M_{\text{пр}} = 2M_1 + 2M_2 = \frac{\sigma_T b}{\sqrt{3}} (a + c) \sqrt{a^2 + c^2}.$$

При $c \rightarrow 0$, т. е. для очень тонкого прямоугольника

$$M_{\text{пр}} = \frac{\sigma_T b}{\sqrt{3}} a^2 = 0,577 \sigma_T b a^2.$$

В последнем случае линии сосредоточенных деформаций идут по длинным сторонам шайбы с отсутствием сдвигов.

§ 43. Сосредоточенные деформации при условиях текучести Треска — Сен-Венана

В материалах, подчиняющихся этим условиям, текучесть начинается после достижения главными касательными напряжениями предельной величины τ_t . В жестко-пластическом теле напряжения τ_t производят работу только в тех точках, где происходят сдвиги, причем величина этой работы равна

$$T = -\tau_t \int \gamma dO_s \quad (43.1)$$

где γ — главный сдвиг, происходящий на одной из площадок, наклоненных к осям главных деформаций под углом 45° . Интегрирование в формуле (43.1) производится по всему объему тела O .

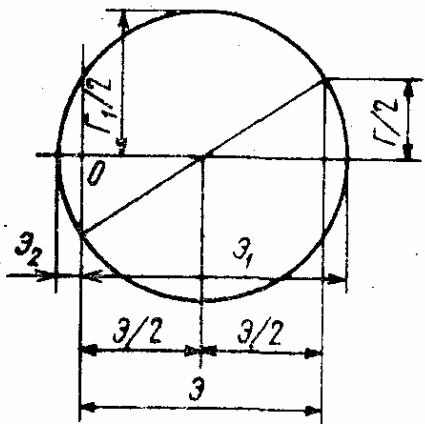


Рис. 121.

В случае сосредоточенной деформации пластиинки вдоль некоторой линии происходит сосредоточенный сдвиг Γ , а поперек — сосредоточенное удлинение ϑ . Кроме того, ввиду отсутствия деформаций объема на этой линии по толщине пластиинки происходит сосредоточенное укорочение — $\dot{\vartheta}$. В направлении линии сосредоточенных деформаций удлинение равно нулю.

Из круга Мора для сосредоточенных деформаций (рис. 121) определим главные удлинения в плоскости пластиинки

$$\vartheta_1 = 0,5(\vartheta + \sqrt{\vartheta^2 + \Gamma^2}), \quad \vartheta_2 = 0,5(\vartheta - \sqrt{\vartheta^2 + \Gamma^2})$$

и главный сдвиг

$$\Gamma_1 = \sqrt{\vartheta^2 + \Gamma^2}.$$

Другой главный сдвиг происходит под углом 45° к направлениям удлинений ϑ_1 и $\vartheta_3 = -\vartheta$

$$\Gamma_3 = \vartheta_1 - \vartheta_3 = 1,5\vartheta + 0,5\sqrt{\vartheta^2 + \Gamma^2}. \quad (43.2)$$

Работа внутренних сил на линии сосредоточенных деформаций равна

$$T = -\tau_t \int \delta \Gamma_{\max} ds,$$

где δ — толщина пластиинки, ds — элемент длины линии сосредоточенных деформаций. В зависимости от соотношения ϑ/Γ максимальным сдвигом может быть Γ_1 или Γ_3 .

Положим, что

$$\Gamma_1 > \Gamma_3.$$

Это будет при

$$\sqrt{\vartheta^2 + \Gamma^2} > 1,5\vartheta + 0,5\sqrt{\vartheta^2 + \Gamma^2}, \quad \vartheta^2 + \Gamma^2 > 9\vartheta^2,$$

$$\vartheta < \frac{\Gamma}{\sqrt{8}} = 0,3536\Gamma.$$

При $\mathcal{E} > 0,3536$ максимальным сдвигом будет не Γ_1 , а Γ_3 .

Для определения величины τ_t рассмотрим сосредоточенную деформацию \mathcal{E} без сдвига. Главный сдвиг, согласно (43.2), здесь равен

$$\Gamma_3 = 2\mathcal{E}.$$

Работа внутренних сил на единицу длины линии сосредоточенных деформаций равна

$$T = -\tau_t \delta 2\mathcal{E},$$

а работа внешних сил

$$V = \sigma_t \delta \mathcal{E},$$

где σ_t — предельное растягивающее напряжение. Приравнивая $T + V$ нулю, получаем

$$\tau_t = \frac{\sigma_t}{2}.$$

При взаимном повороте одной части пластиинки относительно другой на малый угол ϕ (см. рис. 106), согласно (38.1) и (38.2), получаем сосредоточенные деформации удлинения и сдвига

$$\mathcal{E} = \frac{-\rho\rho'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} \phi, \quad \Gamma = \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} \phi, \quad (43.3)$$

где $\rho = \rho(\theta)$ — уравнение линии сосредоточенных деформаций в полярных координатах.

Положим сначала, что $\mathcal{E} < 0,3536\Gamma$. Тогда

$$\Gamma_{\max} = \Gamma_1 = \phi \sqrt{\frac{\rho^2 \rho'^2}{\rho^2 + \rho'^2} + \frac{\rho^4}{\rho^2 + \rho'^2}} = \phi \rho$$

и

$$T = -\frac{\sigma_t \delta}{2} \int \Gamma_1 ds = -\frac{\sigma_t \delta \phi}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta.$$

Работа внешней силы R равна $Rp\phi$, где p — плечо этой силы относительно центра взаимного вращения частей пластиинки. Приравнивая эту работу работе

внутренних сил с обратным знаком, получаем

$$R = \frac{\sigma_T \delta}{2p} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta. \quad (43.4)$$

Для определения экстремалей линий сосредоточенных деформаций составляем для функционала (43.4) уравнение Лагранжа — Эйлера. Это уравнение получается в виде

$$2\rho^2 + 3\rho'^2 - \rho\rho'' = 0. \quad (43.5)$$

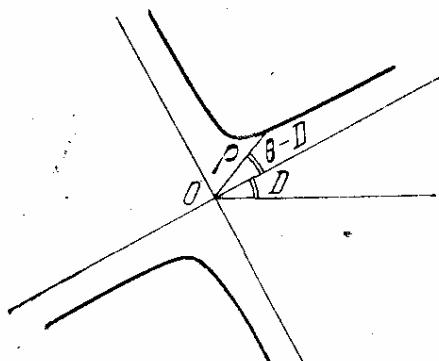


Рис. 122.

Общее решение дифференциального уравнения (43.5) находится при помощи той же подстановки $\rho = u^{-0.5}$ и имеет вид

$$\rho = \frac{A}{\sqrt{\sin(2\theta - D)}}, \quad (43.6)$$

где A и D — произвольные постоянные решения. Вид экстремали (43.6) показан на рис. 122.

Величину разрушающей силы R определяем таким же способом, как в § 38, подставляя общее решение (43.6) в функционал (43.4). После интегрирования получаем

$$R = \frac{A^2 \sigma_T \delta}{4p} [\operatorname{ctg}(2\theta_1 - D) - \operatorname{ctg}(2\theta_2 - D)]. \quad (43.7)$$

Пределы применимости этой формулы определяются точками на экстремали (43.6), в которых отношение \mathcal{E}/Γ равно 0,3536. Подставив в выражения (43.3) величину ρ (43.6), получим после некоторых преобразований

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= A\varphi \frac{\cos(2\theta - D)}{\sqrt{\sin(2\theta - D)}}, \quad \Gamma = A\varphi \sqrt{\sin(2\theta - D)}, \\ \frac{\partial}{\Gamma} &= \pm \operatorname{ctg}(2\theta - D) \end{aligned}$$

и, приравняв

$$\operatorname{ctg}(2\theta - D) = \pm 0,3536 = \pm 1/\sqrt{8},$$

получим два значения θ

$$\theta_1 = 35^\circ 16' + D/2 \quad \text{и} \quad \theta_2 = 54^\circ 44' + D/2$$

и одно значение ρ

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{A}{\sqrt{\sin 70^\circ 32'}} = 1,030A.$$

Для всего среднего участка экстремали, удовлетворяющего условию $\mathcal{E}/\Gamma < 0,3536$,

$$M = Rp = \frac{\sigma_t \delta A^2}{2 \sqrt{8}} = 0,1768 A^2 \sigma_t \delta. \quad (43.8)$$

Перейдем теперь к случаю $\mathcal{E}/\Gamma > 0,3536$. При этом

$$\begin{aligned} \Gamma_{\max} = \Gamma_3 &= 0,5 \Gamma_1 + 1,5 \mathcal{E} = \varphi \left(0,5 \rho - 1,5 \frac{\rho \rho'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} \right), \\ T &= -\frac{\sigma_t \delta}{2} \varphi \int \left(\frac{\rho}{2} - \frac{3}{2} \frac{\rho \rho'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} \right) ds = \\ &= -\frac{\sigma_t \delta \varphi}{4} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\rho \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} - 3\rho \rho' \right) d\theta \quad (43.9) \end{aligned}$$

и

$$R = \frac{\sigma_t \sigma}{4p} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\rho \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} - 3\rho \rho' \right) d\theta. \quad (43.10)$$

Уравнение экстремалей здесь имеет тот же вид (43.6). Сравнивая (43.10) и (43.4), замечаем, что первый член в скобках выражения (43.10) дает после интегрирования половину правой части (43.7), а второй член дает добавку, равную

$$\begin{aligned} \Delta R &= -\frac{\sigma_t \delta}{4p} \cdot 3 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho \rho' d\theta = -\frac{3}{8p} \sigma_t \delta (\rho_2^2 - \rho_1^2) = \\ &= -\frac{3}{8} \frac{\sigma_t \delta A^2}{p} [\sin^{-1}(2\theta_2 - D) - \sin^{-1}(2\theta_1 - D)]. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем для участков, где $\bar{\theta}/\Gamma > 0,3536$,

$$R = \frac{A^2 \sigma_t \delta}{8p} [\operatorname{ctg}(2\theta_1 - D) - \operatorname{ctg}(2\theta_2 - D) + \\ + 3 \operatorname{cosec}(2\theta_2 - D) - 3 \operatorname{cosec}(2\theta_1 - D)]. \quad (43.11)$$

Обычно отсчет углов θ ведется от асимптоты экстремали, и тогда постоянная D становится равной нулю.

§ 44. Сопротивление кручению квадратной шайбы в материале, подчиняющемся условиям текучести Треска — Сен-Венана

Для квадратной запрессованной шайбы может иметь место комбинация экстремалей сосредоточенных деформаций, показанная на рис. 123. Линии 1—1, 2—2, ..., 8—8

представляют собой разрезы, вдоль которых отсутствуют какие-либо деформации, так как вся внешняя часть плоскости поворачивается вокруг центра шайбы на один и тот же угол.

Экстремали, касающиеся середин сторон квадрата, имеют в полярных координатах с осью $\theta_a = 0$, совпадающей с диагональю квадрата, уравнение

$$\rho_a = \frac{0,5a}{\sqrt{\sin 2\theta_a}},$$

а экстремали, касающиеся вершин квадрата, имеют уравнение в полярных координатах с осью $\theta_b = 0$, проходящей через середины сторон,

$$\rho_b = \frac{a/\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2\theta_b}}.$$

Отсчет углов θ_a ведется по часовой стрелке, а отсчет углов θ_b — против.

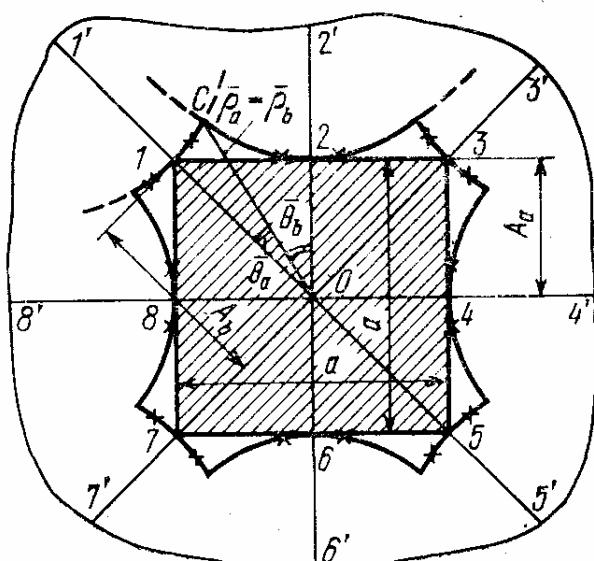


Рис. 123.

Найдем точку пересечения экстремалей $\bar{\theta}_a$, $\bar{\rho}_a$ и $\bar{\theta}_b$, $\bar{\rho}_b$, замечая, что в ней

$$\bar{\theta}_a + \bar{\theta}_b = 45^\circ, \quad \bar{\rho}_a = \bar{\rho}_b.$$

Получаем

$$2\bar{\theta}_b = 90^\circ - 2\bar{\theta}_a, \quad \bar{\rho}_b = \bar{\rho}_a = \frac{a/2}{\sqrt{\sin 2\bar{\theta}_a}} = \frac{a/\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\bar{\theta}_a}},$$

$$4 \sin 2\bar{\theta}_a = 2 \cos \bar{\theta}_a, \quad \operatorname{ctg} 2\bar{\theta}_a = 2, \quad \sin 2\bar{\theta}_a = 0,4472,$$

$$\operatorname{ctg} 2\bar{\theta}_b = 0,5, \quad \sin 2\bar{\theta}_b = 0,8944.$$

Далее, обозначим звездочкой точки экстремалей, в которых $\mathcal{E}/\Gamma = \operatorname{ctg} 2\theta = 0,3536$; θ_a^* , ρ_a^* и θ_b^* , ρ_b^* .

Используя формулы (43.8) и (43.11), находим момент, приходящийся на сектор $C-O-2$:

$$M_1 = A_a^2 \frac{\sigma_t \delta}{8} \left(8 \cdot \frac{0,1768}{2} + \operatorname{ctg} 2\bar{\theta}_a - \operatorname{ctg} 2\theta_a^* - 3 \operatorname{cosec} 2\theta_a^* + \right. \\ \left. + 3 \operatorname{cosec} 2\bar{\theta}_a \right) = \frac{A_a^2 \sigma_t \delta}{8} (0,7071 + 2 - 0,3536 - \\ - 3 \operatorname{cosec} 70^\circ 32' + 3/0,4472) = 5,880 \frac{A_a^2 \sigma_t \delta}{8}.$$

То же для сектора $1-O-C$:

$$M_2 = A_b^2 \frac{\sigma_t \delta}{8} \left(8 \cdot \frac{0,1768}{2} + \operatorname{ctg} 2\bar{\theta}_b - \operatorname{ctg} 2\theta_b^* - \right. \\ \left. - 3 \operatorname{cosec} 2\theta_b^* + 3 \operatorname{cosec} 2\bar{\theta}_b \right) = \frac{A_b^2 \sigma_t \delta}{8} (0,7071 + 0,5 - \\ - 0,3536 - 3 \cdot \operatorname{cosec} 70^\circ 32' + 3/0,8944) = 1,0257 \frac{A_b^2 \sigma_t \delta}{8}.$$

Полный момент, закручивающий шайбу, равен

$$M = 8(M_1 + M_2) = a^2 \sigma_t \delta \left(\frac{5,880}{4} + \frac{1,0257}{2} \right) = 1,983 a^2 \sigma_t \delta.$$

Ранее было получено для материала, подчиняющегося условиям текучести Губера — Генки — Мизеса $M = 1,633 a^2 \sigma_t \delta$ (42.2).

Поскольку предельный момент здесь получился больше момента, закручивающего шайбу по описанному кругу, разрушения вдоль экстремалей в материале, подчиняющимся условиям Треска — Сен-Венана в данном случае не будет.

§ 45. Линии сосредоточенных деформаций в железобетонных пластинах

В железобетонных пластинах, однораково армированных в двух взаимно перпендикулярных направлениях и загруженных так, что по крайней мере одно из главных напряжений в какой-то зоне пластины является растягивающим, можно считать применимым условие текучести Иогансена

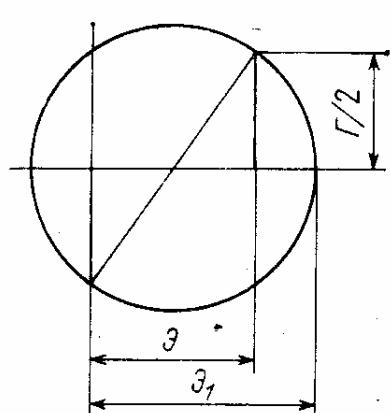


Рис. 124.

где σ_1 — главное растягивающее напряжение, v — процент армирования в одном направлении, деленный на сто, σ_t — предел текучести арматуры.

Согласно закону ассоциированности деформаций текучести работа внутренних сил вдоль линии сосредоточенных деформаций равна

$$T = -\sigma_t v \delta \int \mathcal{E}_1 ds, \quad (45.1)$$

где \mathcal{E}_1 — главные сосредоточенные деформации, δ — толщина пластиинки.

Построим круг Мора для сосредоточенных деформаций, учитывая, что в направлении линии сосредоточенных деформаций последние отсутствуют (рис. 124). Из этого круга определим

$$\mathcal{E}_1 = 0,5(\mathcal{E} + \sqrt{\mathcal{E}^2 + \Gamma^2}).$$

Подставив сюда выражения для \mathcal{E} и Γ (43.3), получим

$$\mathcal{E}_1 = \varphi \left(\sqrt{\frac{\rho^2 \rho'^2 + \rho^4}{\rho^2 + \rho'^2}} - \frac{\rho \rho'}{2 \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}} \right) = \varphi \left(\rho - \frac{\rho \rho'}{2 \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} \right)$$

и из (45.1)

$$T = -\sigma_t \delta v \varphi \int \left(\rho \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} - 0,5 \rho \rho' \right) d\theta.$$

Аналогично рассуждениям § 43, где для работы внутренних сил имело место выражение (43.8), получаем, что линии сосредоточенных деформаций в железобетонной пластинке подчиняются дифференциальному уравнению (43.5) и описываются формулой (43.6)

$$\rho = \frac{A}{\sqrt{\sin(2\theta - D)}}.$$

Внешняя же нагрузка в предельном состоянии железобетонной пластинки должна быть равна

$$R_{\text{пр}} = \frac{A^2 \sigma_t \delta v}{4p} \left[\operatorname{ctg}(2\theta_1 - D) + \frac{1}{2} \operatorname{cosec}(2\theta_1 - D) - \operatorname{ctg}(2\theta_2 - D) - \frac{1}{2} \operatorname{cosec}(2\theta_2 - D) \right]. \quad (45.2)$$

При этом должно выполняться условие $\sigma_1 > 0$, т. е. в пластинке по всей линии сосредоточенных деформаций должно быть растяжение.

Полагая, что в зонах, где оба главных напряжения отрицательны, бетон подчиняется условию текучести Треска — Сен-Венана, можно решать различные задачи предельного равновесия железобетонных пластинок, комбинируя решение (45.2) с решениями (43.7) и (43.11).

Г л а в а 8

ПРИМЕНЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ К ПЛАСТИНКАМ, РАБОТАЮЩИМ В СВОЕЙ ПЛОСКОСТИ

§ 46. Задача о плоском напряженном состоянии пластинки

По аналогии с расчетом пластинок на изгиб, описанным в § 25, положим, что сосредоточенные деформации могут происходить только по линиям, образующим сетку квадратов с диагоналями (рис. 125). Будем считать при этом, что по этим линиям могут возникать только деформации удлинения или укорочения ϑ , а сосредоточенные сдвиги равны нулю [14].

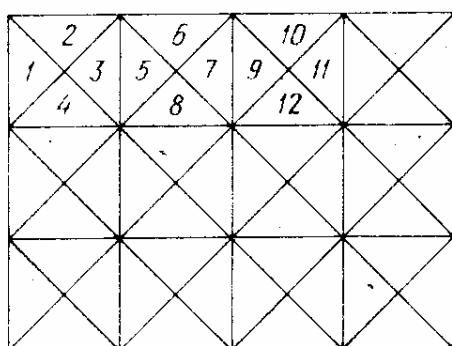


Рис. 125.

u_j , а на вертикальную ось — через v_i и v_j . Положительное направление u примем вправо, а положительное направление v — вниз. Тогда сосредоточенные деформации запишутся в виде (рис. 126):

$$\begin{aligned}
 \vartheta_{ij} &= v_j - v_i && \text{для горизонтальных линий;} \\
 \vartheta_{ij} &= u_j - u_i && \text{для вертикальных линий;} \\
 \vartheta_{ij} &= (u_i - v_i - u_j + v_j)/\sqrt{2} && \text{для диагоналей, идущих направо и вниз;} \\
 \vartheta_{ij} &= (-u_i - v_i + u_j - v_j)/\sqrt{2} && \text{для диагоналей, идущих вправо и вверх.}
 \end{aligned} \tag{46.1}$$

Сосредоточенные сдвиги выражаются формулами:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij} &= u_j - u_i && \text{для горизонтальных линий;} \\ \Gamma_{ij} &= v_j - v_i && \text{для вертикальных линий;} \end{aligned} \quad (46.2)$$

$\Gamma_{ij} = (u_j + v_j - u_i - v_i)/\sqrt{2}$ для диагоналей, идущих вправо вниз;

$\Gamma_{ij} = (u_j - v_j - u_i + v_i)/\sqrt{2}$ для диагоналей, идущих вправо вверх.

Для тонких пластинок, находящихся в условиях плоского напряженного состояния, в частности для изотропно

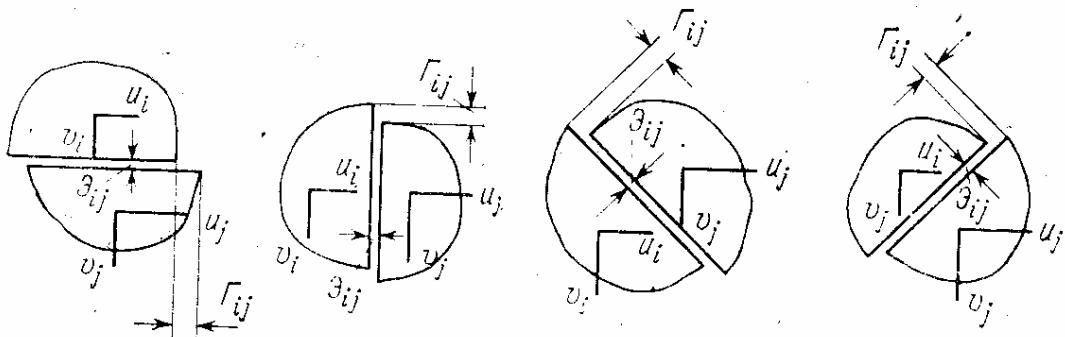


Рис. 126.

армированных железобетонных пластинок, деформирующихся в своей плоскости, можно принять в качестве условия пластического течения отсутствие сдвигов вдоль линий сосредоточенных деформаций:

$$\Gamma_{ij} = 0; \quad (46.3)$$

работа внутренних сил в этом случае выражается формулой

$$T = - \sum_{+} \sigma_t \delta_{ij} \vartheta_{ij} l_{ij} + \sum_{-} \sigma'_t \delta_{ij} \vartheta'_{ij} l_{ij}. \quad (46.4)$$

Здесь δ_{ij} — средняя толщина пластиинки на участке ij сетки линий сосредоточенных деформаций, l_{ij} — длина этого участка, ϑ_{ij} — сосредоточенное удлинение на участке ij , σ_t — предел текучести на растяжение, σ'_t — предел текучести на сжатие (абсолютное значение).

Суммирование в первом члене производится по участкам с сосредоточенным растяжением, а во втором — с сосредоточенным сжатием.

Обозначим

$$\vartheta_{ij}^* = \begin{cases} \vartheta_{ij}\delta_{ij}l_{ij} & \text{при } \vartheta_{ij} > 0, \\ -\vartheta_{ij}\rho\delta_{ij}l_{ij} & \text{при } \vartheta_{ij} < 0, \end{cases} \quad (46.5)$$

где $\rho = \sigma_t'/\sigma_t$ — отношения пределов текучести на сжатие и на растяжение.

Тогда выражение (46.4) для работы внутренних сил можно записать в виде

$$T = -\sum \vartheta_{ij}^* \sigma_t. \quad (46.6)$$

Условия (46.5) можно записать в виде неравенств

$$\vartheta_{ij}^* \geq \vartheta_{ij}l_{ij}\delta_{ij}, \quad \vartheta_{ij}^* \geq -\vartheta_{ij}\rho\delta_{ij}l_{ij}. \quad (46.7)$$

(учитывая, что одно из каждой пары таких неравенств должно обратиться в равенство).

Работа внешних сил равна

$$V = \sum (Q_i u_i + P_i v_i), \quad (46.8)$$

где P_i и Q_i — вертикальные и горизонтальные составляющие внешних сил, приложенных к каждому треугольному участку пластиинки.

Задаваясь условием максимума полной потенциальной энергии $U = V + T$ с дополнительным условием $U = 0$, получаем все необходимые данные для решения задачи параметрического линейного программирования, или обычного линейного программирования, если вместо этих условий взять $T = 1$, $V = \max$ или $V = 1$, $T = \min$.

В параметрическом линейном программировании следует, кроме того, задаться одним из перемещений (например, u_1), равным единице, что уменьшает число неизвестных, подлежащих определению.

Полностью задача параметрического линейного программирования здесь формулируется следующим образом.

Найти максимум линейной формы U , выраженной при помощи формул (46.8) и (46.6) через искомые переменные u_i , v_j и ϑ_{ij}^* при наличии условия $U = 0$ и ограничений в виде неравенств (46.7), в которых переменные ϑ_{ij} выражены при помощи формул (46.1) через u_i и v_i . Кроме

того, должны быть использованы условия $\Gamma_{ij} = 0$. Последние условия могут быть записаны в таблицу симплекс-метода в виде нуль-строк или использованы для исключения значительного числа переменных u_i, v_i . Последнее предпочтительнее, так как благодаря простоте выражений для Γ_{ij} не требует дополнительных сложных преобразований уравнений и неравенств и позволяет при заданной

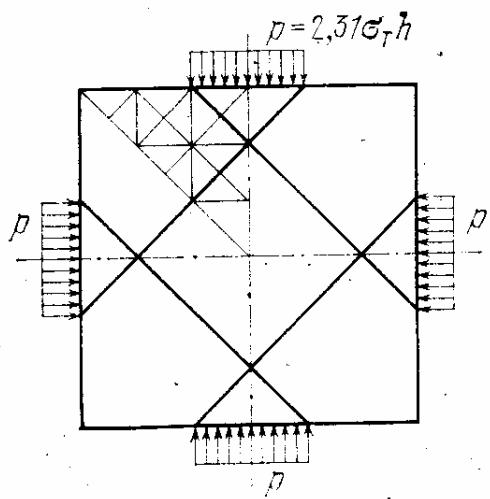


Рис. 127.

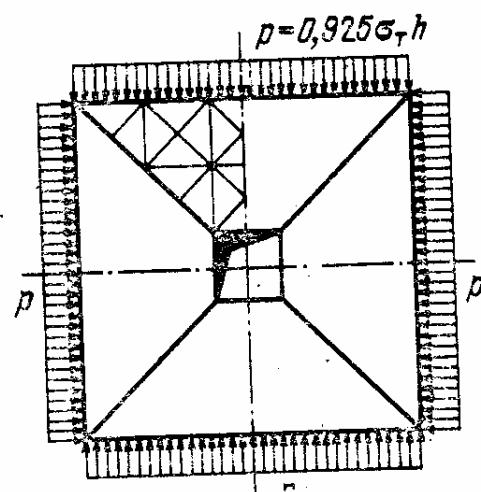


Рис. 128.

мощности типовой программы симплекс-метода существенно увеличить густоту сетки линий сосредоточенных деформаций.

Методика этого расчета была достаточно подробно рассмотрена в §§ 25—27, посвященных расчету железобетонных пластинок на изгиб методом линейного программирования.

На рис. 127 показан результат расчета квадратной пластиинки, симметрично загруженной равномерной нагрузкой p , приложенной в средних третях каждой стороны квадрата. На рис. 128 и 129 показаны результаты расчета квадратной пластиинки с квадратным отверстием в центре на симметричную равномерную нагрузку, приложенную по всему периметру квадрата и в средних участках, равных 0,6 стороны квадрата. На рис. 130 центральное квадратное отверстие пластиинки повернуто на 45° . Схемы разрушения изображены жирными линиями. Эти схемы соответствуют минимальной разрушающей нагрузке, соответствующей принятой сетке возможных

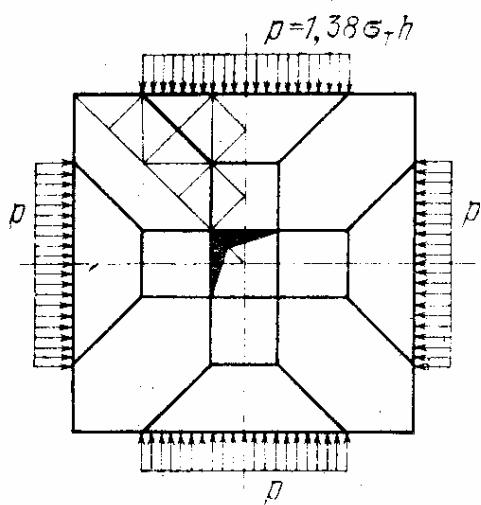


Рис. 129.

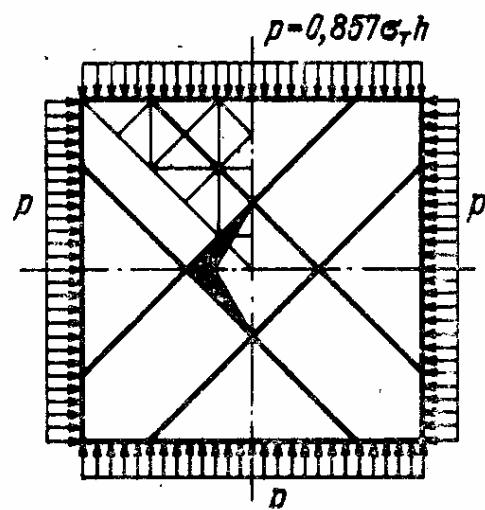


Рис. 130.

линий сосредоточенных деформаций. На рисунках показаны также значения нагрузки для найденных схем разрушения.

§ 47. Применение линейного программирования к расчету плоского деформированного состояния

Массивы, работающие в условиях плоской деформации, также можно рассчитывать по методу сосредоточенных деформаций с применением или без применения линейного программирования. При этом по линиям сосредоточенных деформаций следует обусловить отсутствие сосредоточенных удлинений

$$\mathcal{E}_{ij} = 0,$$

так как в противном случае имело бы место изменение объема массива, что обычно исключается теориями пластичности.

Поэтому работа внутренних сил на единицу толщины массива будет выражаться здесь суммой произведений сосредоточенных сдвигов Γ_{ij} на предельные сдвигающие усилия $\tau_t l_{ij}$

$$T = - \sum \tau_t |\Gamma_{ij}| l_{ij},$$

где l_{ij} — длина участка линий сосредоточенных деформаций, τ_t — предел текучести на сдвиг.

Далее можно ввести величины

$$\Gamma_{ij}^* = |\Gamma_{ij}| l_{ij}$$

и записать для них неравенства

$$\Gamma_{ij}^* \geqslant \Gamma_{ij} l_{ij}, \quad \Gamma_{ij}^* \geqslant -\Gamma_{ij} l_{ij}, \quad (47.1)$$

справедливые при обращении одного из каждой пары таких неравенств в равенство.

При этом работа выражается формулой

$$T = -\sum \Gamma_{ij}^* \tau_{it}. \quad (47.2)$$

Работа внешних сил, как и в случае плоского напряженного состояния, имеет вид (46.7) $V = \sum (Q_i u_i + P_i v_i)$, где Q_i и P_i — составляющие объемных сил, приходящиеся на i -й жесткий диск единичной толщины, u_i и v_i —

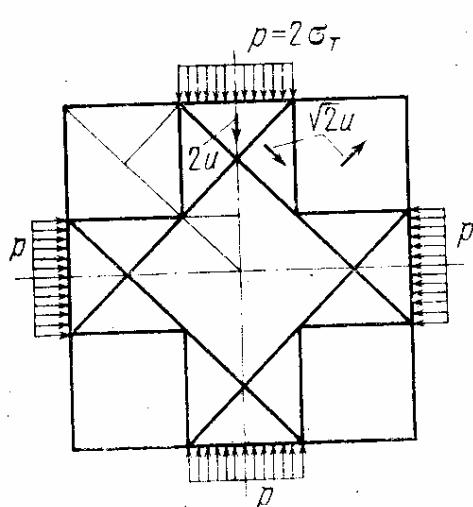


Рис. 131.

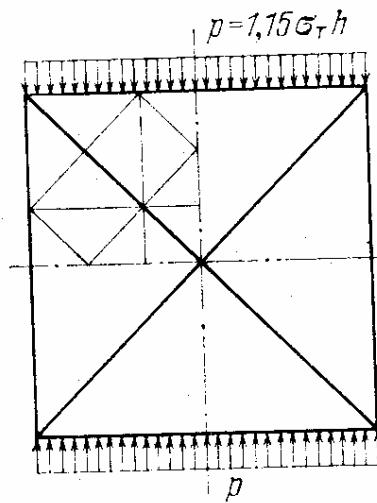


Рис. 132.

горизонтальные и вертикальные смещения этого диска.

Далее можно использовать метод линейного программирования точно так же, как в случае плоского напряженного состояния с той лишь разницей, что вместо условий $\Gamma_{ij} = 0$ (46.3) берутся условия $\dot{\Gamma}_{ij} = 0$, а для работы внутренних сил выражение (46.6) заменяется на (47.2).

В качестве примера приведем результат расчета бруса квадратного сечения, показанного на рис. 131. Нагрузка p , симметричная в пределах средних третей каждой грани и равномерно распределенная по длине бруса. Сетка возможных линий сосредоточенных деформаций показана там же на рисунке. Ввиду симметрии рассматривается один октант.

На основании формул (46.1), (46.2) с учетом симметрии пластиинки записываем:

$$\begin{aligned} u_4 &= u_5 = u_6 = 0, \\ \vartheta_{1,2} &= (u_2 + v_2 - u_1 - v_1) / \sqrt{2}, \\ \vartheta_{2,3} &= u_3 - u_2, \\ \vartheta_{3,4} &= (v_3 - u_3 - v_4) / \sqrt{2}, \\ \vartheta_{3,5} &= (v_5 - v_3 - u_3) / \sqrt{2}, \\ \vartheta_{5,6} &= v_6 - v_5, \\ \vartheta_{1,1} &= (u_1 - v_1) / \sqrt{2}, \\ \vartheta_{2,2} &= (u_2 - v_2) / \sqrt{2}, \\ \vartheta_{6,6} &= v_6 / \sqrt{2}, \end{aligned} \quad (47.3)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{1,2} &= (u_2 - v_2 - u_1 + v_1) / \sqrt{2}, \\ \Gamma_{2,3} &= v_3 - v_2, \\ \Gamma_{3,4} &= (u_3 + v_3 - v_4) / \sqrt{2}, \\ \Gamma_{3,5} &= (-v_5 - u_3 + v_3) / \sqrt{2}, \\ \Gamma_{5,6} &= 0, \quad \Gamma_{1,1} = 0, \\ \Gamma_{2,2} &= 0, \quad \Gamma_{6,6} = 0. \end{aligned}$$

Положив $v_4 = 1$, составим таблицу симплекс-метода (табл. 8). В ней первые восемь строк представляют собой неравенства (47.1), записанные с учетом (47.3). Далее идут восемь нуль-строк $\vartheta_{ij} = 0$. Стока цели содержит работу внутренних сил (47.2) и внешних, равную $V = Pv_4$. Длина стороны клетки λ принята равной единице.

В результате решения задачи, которое здесь может быть проведено вручную, получено распределение перемещений, показанное на рис. 131. Величина $P_{\text{пр}}$ получилась равной

$$P_{\text{пр}} = 4\tau_t = 2\sigma_t.$$

В другом примере рассчитан квадратный брус, сжатый в одном поперечном направлении (рис. 132). Здесь форма разрушения была получена в виде сдвигов по диагоналям сечения.

Таблица 8

Г л а в а 9

ПОЛОГИЕ ОБОЛОЧКИ НА ПОЛИГОНАЛЬНОМ ПЛАНЕ

§ 48. Предельное равновесие пологой оболочки [99], [167]

Возьмем пустотелую пластинку переменной толщины, симметричную относительно срединной плоскости и заполненную внутри материалом, не воспринимающим продольных напряжений, но передающим касательные усилия с верхнего криволинейного слоя пластинки на нижний так, что соблюдается закон прямых нормалей для всей пластинки (рис. 133). Очевидно, что выражения (32.1) и (32.2), выведенные для сплошной пластинки пере-



Рис. 133.

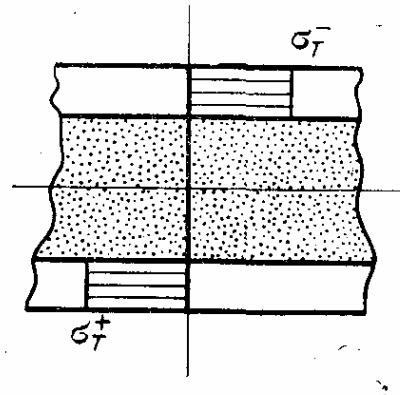


Рис. 134.

менной толщины, будут справедливы и для пустотелой пластинки. Величина предельного момента в заданной точке пластинки определяется из эпюры продольных напряжений, построенной по толщине пластинки (рис. 134). Верхний слой пластинки здесь оказывается равномерно сжатым по толщине напряжениями σ_t^- , а нижний — растянутым напряжениями σ_t^+ .

Разрежем теперь пустотелую пластинку по плоскости ее симметрии. Получим две пологие оболочки, симметрично отражающие друг друга (рис. 135). Напряженное состояние верхней оболочки будет совпадать с напряженным состоянием верхнего слоя пустотелой пластинки.

В плоскости разреза пластиинки оболочки не будет иметь горизонтальных смещений; поэтому здесь мы получили оболочку, закрепленную по краям от горизонтальных смещений (рис. 135, *a*) на высоте срединной поверхности пустотелой пластиинки.

Очевидно, что для пологой оболочки может быть принята та же схема разрушения, что и для пластиинки переменной толщины, например пятидисковая схема, показанная на рис. 136. Предельный момент в ребрах перелома здесь равен

$$m_t = \delta \sigma_t z,$$

где δ — толщина оболочки, σ_t — предел текучести материала, z — расстояние от середины толщины оболочки до

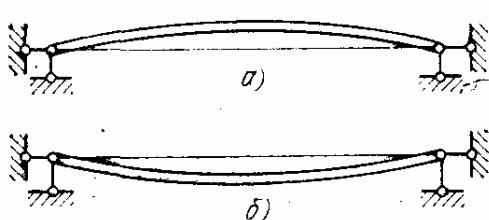


Рис. 135.

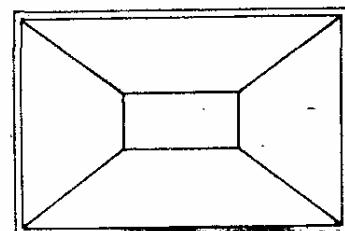


Рис. 136.

опорной плоскости, в которой горизонтальные смещения равны нулю.

Работа внутренних сил при данной схеме разрушения выражается формулой

$$T = -\sigma_t \sum_{i=1}^n \theta_i \int_0^{l_i} \delta z \, dl_i, \quad (48.1)$$

где l_i — длина i -го ребра перелома, θ_i — двугранный угол перелома в этом ребре, n — число ребер перелома.

Линии шарниров текучести пластиинки, проектируясь на поверхность оболочки, образуют линии сосредоточенных, в данном случае сжимающих деформаций. Сетка этих линий определяется в общем случае из условия минимума разрушающей нагрузки q .

Величины

$$\int_0^{l_i} \delta z \, dl_i = S_{ii}$$

входящие в формулу (48.1), можно определить как статические моменты сечений оболочки по плоскостям сосредоточенных деформаций относительно опорной плоскости. Поэтому выражение работы внутренних сил (48.1) можно написать в виде

$$T = -\sigma_t \sum_{i=1}^n \theta_i S_i.$$

В оболочках, имеющих плоский контур опирания и закрепленных по этому контуру от горизонтальных смещений (рис. 135, а), по всем линиям сосредоточенных деформаций будут иметь место сжимающие напряжения,

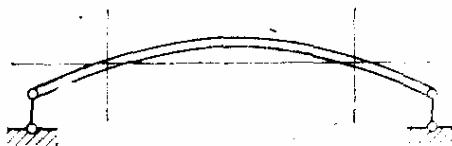


Рис. 137.

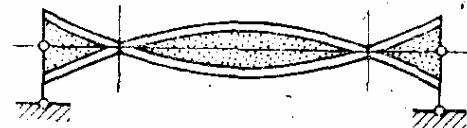


Рис. 138.

равные $-\sigma_t$. Для оболочек постоянной толщины это означает, что и во всех остальных точках оболочки напряжения будут равны $-\sigma_t$. Таким образом, полученное решение для данного случая опирания оболочки имеет тривиальный характер и дает очень высокую оценку ее несущей способности.

Иначе дело обстоит с оболочкой, у которой точки контура или части его могут свободно смещаться по горизонтали (рис. 137). В этом случае работа оболочки будет совпадать с работой половины симметричной пустотелой пластинки иного вида, показанного на рис. 138. Плоскость нулевых горизонтальных смещений, совпадающая со срединной плоскостью пластиинки, будет пересекать оболочку, разделяя последнюю на зоны сжатия, расположенные выше этой плоскости, и зоны растяжения, расположенные ниже этой плоскости.

Таким образом, расчет пологой оболочки вполне идентичен расчету пластиинки переменной толщины и все формулы параграфа сохраняют свою силу и для пологой оболочки.

**§ 49. Пологие оболочки,
шарнирно опертые по полигональному контуру [100]**

Зададимся формой разрушения пологой оболочки с эпюорой прогибов в виде полого многогранника (рис. 139). Сечение оболочки по каждому ребру перелома будет целиком находиться в состоянии текучести, причем зона растяжения будет отделяться от зоны сжатия нейтральной линией, совпадающей с взаимной осью вращения смежных частей оболочки (рис. 140). Малый участок s , в котором ось вращения пересекает толщину оболочки и в котором имеет место двузначная эпюра напряжений, исключаем, считая, что зоны растяжения и сжатия разделяются точкой пересечения срединной поверхности оболочки с взаимной осью вращения. Очевидно, что ошибка, вызываемая таким упрощением, невелика. Величину предельного момента определяем для всего сечения оболочки по ребру перелома. Эта величина в i -м ребре перелома выражается формулой

$$M_t^i = S_i^+ \sigma_t^+ + S_i^- \sigma_t^-,$$

где S_i^+ и S_i^- — статические моменты растянутой и сжатой частей сечения оболочки относительно взаимной оси

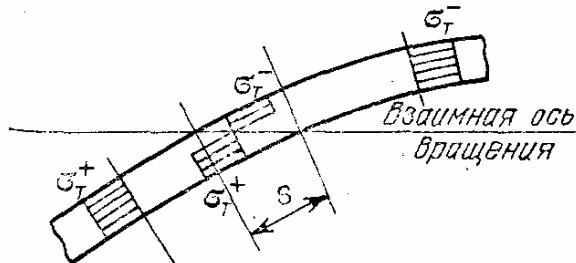


Рис. 140.

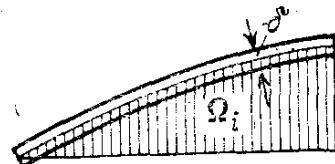


Рис. 141.

вращения, σ_t^+ и σ_t^- — пределы текучести материала на растяжение и на сжатие.

При постоянной толщине оболочки δ статические моменты S_i^+ и S_i^- можно принять равными площадям Ω^+ и Ω^- , ограниченным срединной линией ребра перелома и плоскостью нулевых горизонтальных смещений, отсекаемым вертикальными плоскостями по линиям ребер перелома (рис. 141), умноженным на δ .

Таким образом, получаем следующее выражение для работы внутренних сил:

$$T = - \sum_{i=1}^n (S_i^+ \sigma_t^+ + S_i^- \sigma_t^-) \theta_i, \quad (49.1)$$

а для оболочки постоянной толщины

$$T = - \delta \sum_{i=1}^n (\Omega_i^+ \sigma_t^+ + \Omega_i^- \sigma_t^-) \theta_i. \quad (49.2)$$

Здесь мы считаем, что по линиям перелома оболочки наблюдаются лишь сосредоточенные деформации растяжения или сжатия в направлениях, перпендикулярных линиям перелома, и что деформации сдвига по этим линиям отсутствуют как в плоскости, касательной к поверхности оболочки, так и в вертикальных плоскостях, проходящих через линии перелома. Это предположение соответствует представлению пологой оболочки как пластинки переменной толщины, где деформации сдвига обычно считаются отсутствующими. Из него следует, что мгновенная ось взаимного поворота двух соседних частей оболочки должна быть расположена в плоскости, образованной линией перелома этих двух частей оболочки. Вследствие пологости оболочки эту плоскость можно считать вертикальной, а мгновенную ось поворота — совпадающей в плане с линией перелома.

Нетрудно установить, что все взаимные оси вращения должны пересекаться друг с другом и лежать в одной плоскости. Действительно, пусть поворот элементов оболочки 1 и 3 (рис. 142) относительно элемента 2 происходит вокруг осей AB и AD , не пересекающихся на вертикали A . Тогда движение элемента 3 можно представить в виде суммы вращательного движения вокруг новой оси, параллельной первоначальной и пересекающейся на вертикали A с осью AB , и поступательного движения, пер-

пендикулярного плоскости AD . Это поступательное движение вызовет сдвиги элементов 1 и 3 по плоскости AC , и взаимное движение элементов 1 и 3 не будет представлять собой простое вращение. Таким образом, условие отсутствия сдвигов по ребрам перелома приводит к необходимости пересечения между собой всех взаимных осей вращения элементов, расположенных вокруг одной точки.

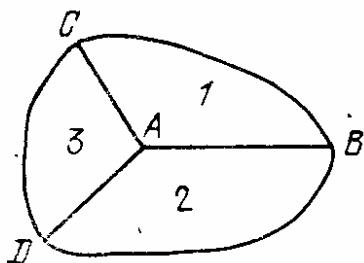


Рис. 142.

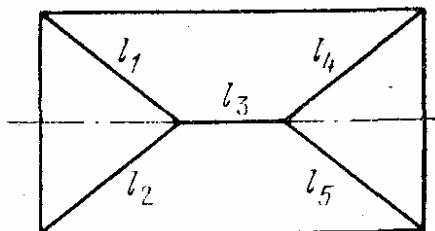


Рис. 143.

Далее, взаимные повороты относительно пересекающихся осей складываются как векторы, направленные вдоль осей вращения и равные соответствующему углу поворота. Отсюда следует, что вектор взаимного поворота элементов 1 и 3 равен разности векторов поворота элементов 1 и 3 относительно элемента 2. Это означает, что все три вектора взаимных поворотов элементов 1, 2 и 3 лежат в одной плоскости. Переходя последовательно ко всем остальным элементам и осям их поворота, найдем, что все взаимные оси поворота жестких элементов оболочки должны находиться в одной плоскости. Эту плоскость мы будем называть плоскостью осей вращения. Для оболочки, находящейся в состоянии предельного равновесия, плоскость осей вращения играет роль нейтрального слоя, так как на этой плоскости точки ребер перелома не получают горизонтальных смещений.

Положение плоскости осей вращения следует определять из условия минимума выражения работы внутренних сил (49.1), так как на вертикальные перемещения w , а следовательно, и на работу вертикальной внешней нагрузки q это положение не влияет.

Если плоскость осей вращения горизонтальна, что имеет место, например, при наличии двух вертикальных осей симметрии оболочки, положение этой плоскости может быть найдено следующим образом. Изобразим одно

за другим все сечения оболочки по заданным ребрам перелома, показанным на рис. 143, умножив горизонтальный масштаб каждого сечения на соответствующий угол перелома (рис. 144), и пересечем все эти сечения прямой, представляющей собой проекцию плоскости осей

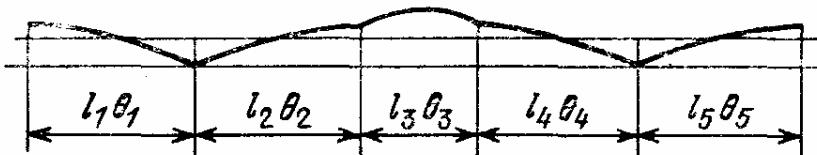


Рис. 144.

вращения. Варьируя положение горизонтальной прямой, разделяющей растянутые и сжатые части сечений оболочки, получим условие минимума (49.1) в виде

$$\sum_{\text{нижн}} (F_i^- \sigma_t^- + F_i^+ \sigma_t^+) = \sum_{\text{верхн}} (F_i^- \sigma_t^- + F_i^+ \sigma_t^+), \quad (49.3)$$

где F_i^+ и F_i^- — растянутая и сжатая части приведенного сечения по i -му ребру перелома, т. е. действительного сечения с горизонтальным масштабом, умноженным на θ_i . Суммирование в левой части равенства (49.3) производится по площадям, расположенным ниже, а в правой части — выше плоскости осей вращения.

Равенство (49.3) следует из известного положения о том, что сумма абсолютных значений статических моментов верхней и нижней частей приведенного сечения относительно оси, разделяющей эти части сечения (пластический момент сопротивления), достигает минимального значения, если площади верхней и нижней частей приведенного сечения равны по величине.

Для пологой оболочки постоянной толщины площади F_i^+ и F_i^- в равенстве (49.3) можно заменить проекциями длин ребер перелома в пределах постоянства знака деформации l_i^+ и l_i^- .

Можно дать другую интерпретацию положения плоскости осей вращения, соответствующего минимума выражения (49.1). Выделим на поверхности оболочки вдоль всех ребер перелома узкую полоску шириной $\varepsilon\theta_i$, где ε — некоторый малый коэффициент, а θ_i — взаимный угол поворота в i -м ребре перелома. Удалив материал оболоч-

ки, находящийся вне выделенных полосок, получим стержневую модель ребер перелома (рис. 145). Плоскость осей вращения должна делить объем этой модели на две части так, чтобы выполнялось равенство

$$\sum_{\text{нижн}} (V_i^- \sigma_t^- + V_i^+ \sigma_t^+) = \sum_{\text{верхн}} (V_i^- \sigma_t^- + V_i^+ \sigma_t^+),$$

где V_i^+ и V_i^- — объемы стержней, соответствующих i -му ребру перелома и находящихся соответственно ниже или

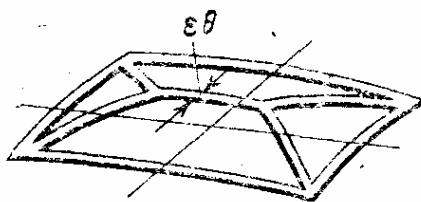


Рис. 145.

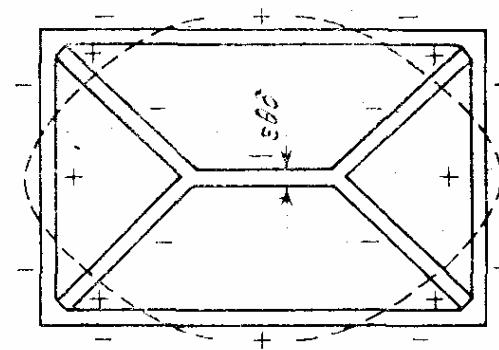


Рис. 146.

выше плоскости осей вращения. Индекс + или - приписывается здесь в зависимости от знака деформации в соответствующей части ребра перелома.

Если известно, что по всем ребрам перелома ниже плоскости осей вращения имеет место растяжение, а выше — сжатие (как в случае оболочки с краями, свободно смещающимися в горизонтальных направлениях), то объем стержневой модели ребер перелома надо просто разделить плоскостью осей вращения в отношении σ_t^+/σ_t^- .

Перекос плоскости осей вращения в несимметричных оболочках можно определить путем варьирования углов наклона этой плоскости. Это варьирование дает минимум выражения (49.1) при равенстве статических моментов верхней и нижней частей стержней модели ребер перелома, взятых относительно двух пересекающихся вертикальных плоскостей. При этом элементы стержневой модели, относящиеся к растянутым частям ребер перелома, должны умножаться на σ_t^+ , а относящиеся к сжатым частям ребер перелома — на σ_t^- . Иначе говоря, центр тяжести части стержневой модели ребер перелома, находя-

щейся выше плоскости осей вращения (с учетом умножения объемов стержней на соответствующий предел текучести), должен находиться на одной вертикали с определенным таким же образом центром тяжести нижней части стержневой модели, находящейся под плоскостью осей вращения.

Пространственная стержневая модель ребер перелома может быть заменена плоской сеткой ребер перелома на горизонтальной проекции оболочки. Ширина ребер перелома на этой сетке принимается равной $\varepsilon\theta\delta$, где δ — толщина оболочки в соответствующей точке ребра перелома. Линия пересечения плоскости осей вращения с поверхностью оболочки должна делить площадь сетки ребер перелома в тех отношениях, о которых говорилось выше (рис. 146).

§ 50. Прямоугольная в плане пологая оболочка [100]

Рассмотрим оболочку постоянной толщины со свободно смещающимися краями по горизонтали, шарнирно опертую по плоскому прямоугольному контуру. Рисунок ребер перелома для такой оболочки примем аналогичным

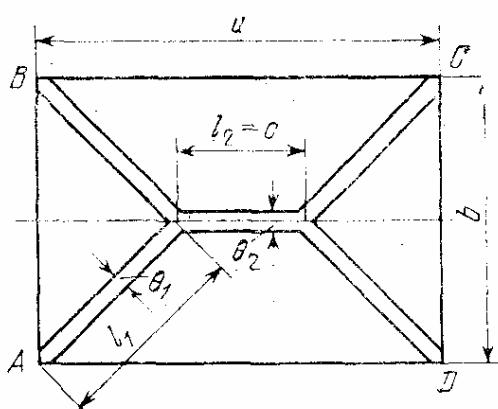


Рис. 147.

рисунку цилиндрических шарниров текучести в прямоугольной шарнирно опертой по краям пластинке. Пространственная стержневая модель ребер перелома оболочки изображена в плане на рис. 147.

Ввиду постоянства толщины оболочки рассмотрение объемов стержней модели ребер перелома можно заменить рассмотрением верхней поверхности стержней этой модели.

Площадь поверхности диагонального стержня модели при единичном прогибе в точках пересечения ребер E и F будет выражаться формулой

$$l_1\theta_1 = \frac{a-c}{b} + \frac{b}{a-c},$$

а площадь поверхности среднего продольного стержня модели — формулой

$$l_2 \theta_2 = \frac{4c}{b}.$$

Общая площадь верхней поверхности стержней модели равна

$$4l_1 \theta_1 + l_2 \theta_2 = \frac{4}{b} \frac{a^2 - ac + b^2}{a - c}.$$

Эту площадь надо разделить плоскостью осей вращения на две части: растянутую и сжатую так, чтобы вся растянутая площадь, помноженная на σ_t^+ , равнялась всей сжатой части, помноженной на σ_t^- . Граница, отделяющая растянутую часть от сжатой, должна совпадать с линией пересечения поверхности оболочки с плоскостью осей вращения. Длину среднего ребра c следует найти из условия минимума предельной нагрузки q , определенной из условия равенства нулю суммы работ внешних и внутренних сил.

Особенно простой расчет получается для цилиндрической пологой оболочки, у которой продольный размер в плане a заметно превышает по-перечный размер b . В этом случае обычно бывает, что поверхность сжатой части модели ребер перелома меньше поверхности одного среднего ребра модели, при этом плоскость осей вращения является касательной к поверхности оболочки по среднему ребру перелома и сжатая часть оболочки в формуле работы внутренних сил не должна учитываться. Согласно (49.1) получим

$$T = -4\sigma_t^+ S_1 \theta_1 = -\frac{4}{3} f \sigma \frac{(a - c)^2 + b^2}{(a - c) b} \sigma_t. \quad (50.1)$$

Здесь f — стрела подъема поверхности оболочки, δ — ее толщина, S_1 — статический момент сечения оболочки по диагональному ребру, взятый относительно горизонтальной плоскости, проходящей через среднее ребро перелома. Для параболического очертания попечного

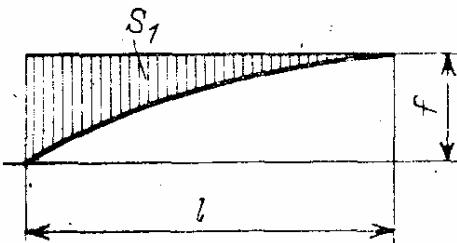


Рис. 148.

сечения оболочки этот статический момент равен $f\delta l/3$ (рис. 148). Для иных очертаний дуги поперечного сечения оболочки данное значение статического момента можно принять в качестве приближенного, так как в пологих оболочках любая дуга поперечного сечения мало отличается от параболы.

Работа внешней равномерно распределенной нагрузки на заданной форме разрушения равна произведению интенсивности нагрузки q на объем эпюры прогиба:

$$V = \frac{q}{6} b (2a + c). \quad (50.2)$$

Приняв сумму выражений (50.1) и (50.2), получим

$$q = \frac{8f\delta\sigma_T^+}{b^2} \frac{(a - c)^2 + b^2}{(a - c)(2a + c)}.$$

Это выражение имеет минимум при

$$c = \frac{3a^2 + b^2 - b \sqrt{9a^2 + b^2}}{3a},$$

равный

$$q = \frac{16}{9} \frac{\sigma_T^+ \delta f}{ab} \left(\frac{b}{3a} + \sqrt{1 + \frac{b^2}{9a^2}} \right). \quad (50.3)$$

Условие того, что диагональные ребра перелома будут целиком находиться в растянутой зоне, имеет вид

$$\frac{a}{b} > \sqrt{\frac{-2 + 3\psi^2 + \psi \sqrt{9\psi^2 - 8}}{6}}, \quad (50.4)$$

где

$$\psi = \frac{2\sigma_T^+ + \sigma_T^-}{\sigma_T^-}.$$

Формула (50.3) остается приближенно справедливой и в случае невыполнения неравенства (50.4), так как вовлечение в сжатую зону части диагональных ребер обычно крайне незначительно снижает положение плоскости осей вращения и изменяет работу внутренних сил T лишь на несколько процентов.

Приближенно формула (50.3) может применяться также для пологих оболочек двоякой кривизны, посколь-

ку среднее ребро перелома в таких оболочках будет незначительно искривлено в вертикальной плоскости и может быть заменено прямолинейным. Стрелку оболочки f целесообразно при этом заменить в формуле (50.3) несколько меньшей величиной, равной расстоянию от плоскости опирания угловых точек оболочки до центра тяжести среднего сжатого ребра перелома.

Для определения несущей способности пологой прямоугольной оболочки целесообразно преобразовать выражение работы внутренних сил, представив его в виде

$$T = \sum T_k,$$

где T_k — работа внутренних сил, относящаяся к k -й грани эпюры прогибов. При этом необходимо разделить каждый угол перелома θ_i по i -му внутреннему ребру на две части, из которых первая — θ_{ik} — представляет собой угол наклона линии, перпендикулярной i -му ребру перелома и лежащей в плоскости k -й грани эпюры прогибов, а вторая — $\theta_{i, k+1}$ — угол наклона такой же линии, лежащей в плоскости, смежной $(k+1)$ -й грани эпюры прогибов. Таким образом,

$$T_k = - \sum M_t^i \theta_{ik},$$

где суммирование производится по всем ребрам перелома, ограничивающим k -ю грань.

Заметим, что

$$M_t^i = \int_+ \sigma_t^+ \delta |z| ds_i + \int_- \sigma_t^- \delta |z| ds_i. \quad (50.5)$$

Здесь $|z|$ — расстояние от срединной поверхности оболочки до плоскости осей вращения. В первом интеграле интегрирование производится по растянутой части i -го ребра перелома, а во втором интеграле — по сжатой части того же ребра.

Обозначим через φ_k — угол поворота k -й грани эпюры прогибов вокруг k -й стороны опорного контура оболочки. Тогда

$$\theta_{ik} = \varphi_k \cos \alpha_{ik},$$

где α_{ik} — угол между горизонтальной проекцией i -го ребра перелома и k -й стороной опорного контура. Отсюда

следует

$$T_k = -\varphi_k \sum M_t^i \cos \alpha_{ik}.$$

Легко видеть, что

$$M_t^i \cos \alpha_{ik} = \int_+ \sigma_t^+ \delta |z| ds_k + \int_- \sigma_t^- \delta |z| ds_k,$$

где ds_k — элемент k -й стороны опорного контура, так как
 $\cos \alpha_{ik} ds_i = ds_k$.

Следовательно, $M_t^i \cos \alpha_{ik}$ представляет собой предельный момент проекции сечения по i -му ребру перелома на вертикальную плоскость, проведенную через k -ю сторону опорного контура. Точно так же $\sum M_t^i \cos \alpha_{ik}$ представляет собой предельный момент той же проекции всего ломаного сечения оболочки, ограничивающего ее часть, которая поворачивается как жесткое целое вокруг k -й стороны опорного контура. Обозначим этот момент через M_{th} :

$$\sum M_t^i \cos \alpha_{ik} = M_{th}.$$

При этом работа внутренних сил выразится формулой

$$T = -\sum \varphi_k M_{th}, \quad (50.6)$$

где суммирование производится по всем сторонам опорного контура.

Работа внешних сил может быть выражена (при условии, что все грани эпюры прогибов выходят на опорный контур) формулой

$$V = \sum \varphi_k S_k,$$

где S_k — статический момент нагрузки, расположенной на части оболочки, поворачивающейся вокруг k -й стороны опорного контура. Вводя единичную нагрузку $\eta(x, y)$ и множитель пропорциональности q_0 для нагрузки:

$$q = q_0 \eta(x, y),$$

можно записать формулу работы внешних сил в виде

$$V = q_0 \sum \varphi_k S'_k, \quad (50.7)$$

где S'_k — статические моменты единичной нагрузки $\eta(x, y)$ на k -й грани относительно k -й стороны опорного контура.

Приравняв друг другу абсолютные значения работы внутренних и внешних сил, получим предельную величину нагрузки

$$q_0 = \frac{\sum \varphi_k M_{tk}}{\sum \varphi_k S'_k}.$$

Ввиду того, что углы φ_k являются независимыми друг от друга, можно искать минимум q_0 из условий

$$\partial q_0 / \partial \varphi_k = 0.$$

При этом получим, имея в виду, что φ_k — малые величины,

$$M_{tk} \sum \varphi_k S'_k - S'_k \sum \varphi_k M_{tk} = 0,$$

или

$$\frac{M_{tk}}{S'_k} = \frac{\sum \varphi_k M_{tk}}{\sum \varphi_k S'_k} = q_0, \quad (50.8)$$

т. е. для истинной формы разрушения отношения M_{tk}/S'_k должны быть одинаковыми для всех сторон опирания k и равными q_0 .

§ 51. Форма разрушения пологой полигональной оболочки с пирамидальной эпюрой прогибов [98]

Зададимся деформацией оболочки, подобной рассмотренной в § 11 деформации плит, при которой некоторая средняя точка оболочки смещается по вертикали на величину f , достаточно малую по сравнению с геометрическими размерами и толщиной оболочки, причем по линиям, идущим из этой точки в углы опорного контура и проектирующимся на горизонтальную плоскость в виде прямых, образуются сосредоточенные осевые деформации. Для простоты здесь положим пределы текучести на сжатие и растяжение равными друг другу:

$$\sigma_t^+ = \sigma_t^- = \sigma_t.$$

Будем считать сначала контур оболочки не смещающимся по горизонтали. Пусть часть поверхности оболочки,

опирающаяся на сторону AB (рис. 149), повернулась на угол $\varphi_1 = f/p_1$ вокруг линии AB , а соседняя часть, опирающаяся на сторону BC , — на угол $\varphi_2 = f/p_2$ вокруг линии BC . Тогда ввиду пологости оболочки получаем дву-

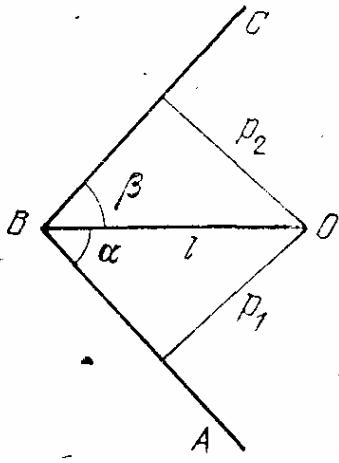


Рис. 149.

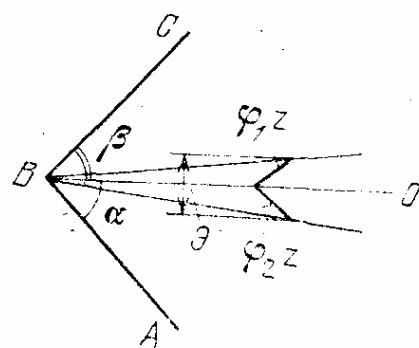


Рис. 150.

гранный угол перелома θ по линии BO , такой же, как для пластиинки того же очертания в плане

$$\theta = \frac{f}{l} (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta). \quad (51.1)$$

Здесь l — длина ребра перелома BO , α и β — углы ABO и BOC .

Кроме угла перелома вдоль линии BO , возникнут сосредоточенные деформации, определяемые следующим образом (рис. 150). Смежные точки, лежащие по обе стороны линии BO , смещаются в направлениях, перпендикулярных сторонам AB и BC , соответственно на величины $\varphi_1 z$ и $\varphi_2 z$. Сосредоточенные удлинения и сдвиги здесь будут равны

$$\begin{aligned} \vartheta &= -z(\varphi_1 \cos \alpha + \varphi_2 \cos \beta), \\ \Gamma &= z(\varphi_1 \sin \alpha - \varphi_2 \sin \beta). \end{aligned} \quad (51.2)$$

Учитывая, что

$$\varphi_1 = \frac{f}{l \sin \alpha}, \quad \text{а} \quad \varphi_2 = \frac{1}{l \sin \beta}, \quad (51.3)$$

получим после подстановки в (51.2)

$$\vartheta = -\frac{f}{l} z (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta); \quad \Gamma = 0. \quad (51.4)$$

Таким образом, по линии BO сосредоточенные сдвиги равны нулю.

Далее воспользуемся методом, примененным нами ранее в задачах о расчете плоской пластинки на изгиб с учетом осевых деформаций (§ 32). Определим из (51.1) и (51.4) величину

$$c = \vartheta/\theta = -z.$$

Поскольку эта величина, как правило, превышает по абсолютной величине $\delta/2$ — половину толщины оболочки, работу внутренних сил, приходящуюся на одно ребро, можно определять, исходя из формулы

$$T = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_t \int_0^l \delta |\vartheta| ds. \quad (51.5)$$

Подставляя сюда выражение (51.4), присваивая ребрам индексы $i = 1, 2, \dots, n$ и суммируя по всем ребрам, получим

$$T = -\frac{2\sigma_t}{\sqrt{3}} f \sum_{i=1}^n \left(\frac{\operatorname{ctg} \alpha_i + \operatorname{ctg} \beta_i}{l_i} \int_0^{l_i} \delta z ds_i \right).$$

Отсюда можно найти предельную сосредоточенную силу P , приложенную в точке O :

$$P = -\frac{T}{f} = -\frac{2\sigma_t}{\sqrt{3}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\operatorname{ctg} \alpha_i + \operatorname{ctg} \beta_i}{l_i} \int_0^{l_i} \delta z ds_i \right). \quad (51.6)$$

В частном случае, когда величина

$$a_i = \frac{1}{l_i} \int_0^{l_i} \delta z ds_i$$

одинакова для всех ребер, формулу (51.6) можно представить в более простом виде:

$$P = \frac{2\sigma_t}{\sqrt{3}} a \sum_{i=1}^n (\operatorname{ctg} \alpha_i + \operatorname{ctg} \beta_i). \quad (51.7)$$

Заметим, что величина

$$\int_0^{l_i} \delta z \, ds_i = S_i$$

представляет собой статический момент сечения оболочки по ребру перелома относительно проекции ребра на плоскость x, y . Поэтому формулу (51.6) можно переписать в виде

$$P = \frac{2\sigma_t}{\sqrt{3}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\operatorname{ctg} \alpha_i + \operatorname{ctg} \beta_i}{l_i} S_i \right),$$

а формулу (51.7) — в виде

$$P = \sigma_t \Psi S / l,$$

где Ψ — безразмерный коэффициент, зависящий от конфигурации и опирания оболочки. В частности, для квадратной шарнирно опертой оболочки $\Psi = 16/\sqrt{3} = 9,25$, для круглой оболочки $\Psi = 7,25$ и l равно радиусу оболочки.

В случае свободного перемещения опорного контура в горизонтальной плоскости задаемся контуром нулевых горизонтальных смещений, геометрически подобным контуру опирания (рис. 151). Обозначим высоту контура нулевых горизонтальных смещений z_0 , тогда формулы для сосредоточенных удлинений и сдвигов (51.2) видоизменяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= -(z - z_0)(\varphi_1 \cos \alpha + \varphi_2 \cos \beta), \\ \Gamma &= (z - z_0)(\varphi_1 \sin \alpha - \varphi_2 \sin \beta). \end{aligned}$$

С учетом (51.3) имеем

$$\mathcal{E} = -\frac{f}{l} (z - z_0) (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta); \quad \Gamma = 0. \quad (51.8)$$

Далее находим

$$c = \mathcal{E}/\theta = z_0 - z$$

и, считая, что $z_0 - z$ в подавляющем большинстве точек

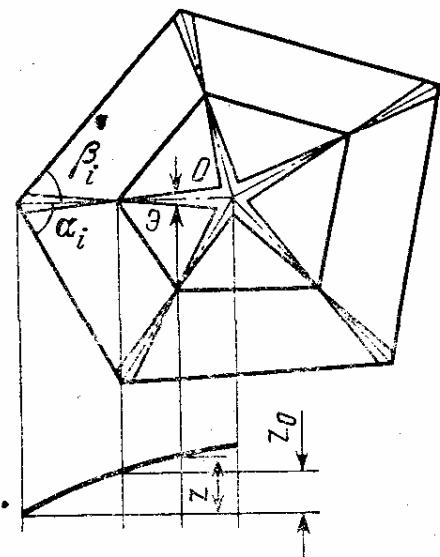


Рис. 151.

ребра перелома превышает по абсолютной величине $\delta/2$, получим из формул (51.5) и (51.8)

$$T = \frac{-2\sigma_t}{\sqrt{3}} f \sum_{i=1}^n \left(\frac{\operatorname{ctg} \alpha_i + \operatorname{ctg} \beta_i}{l_i} \int_0^{l_i} |z - z_0| \delta ds_i \right).$$

Остается найти положение контура нулевых горизонтальных смещений, для которого величина $-T$ будет минимальной. Заметим, что интеграл

$$\int_0^{l_i} |z - z_0| \delta ds_i$$

представляет собой сумму абсолютных значений статических моментов двух половин сечения ребра перелома, разделенных точкой нулевых горизонтальных смещений, относительно уровня этой точки. При изменении положения точки нулевых горизонтальных смещений на бесконечно малую величину dz_0 по вертикали статический момент одной половины сечения ребра увеличится на $F_1 dz_0$, а статический момент другой половины — уменьшится на $F_2 dz_0$, где F_1 и F_2 — площади каждой половины сечения ребра.

Для выполнения условия минимума $-T$ при изменении уровня точки нулевых горизонтальных смещений сумма абсолютных значений статических моментов обеих частей ребра относительного этого уровня не должна меняться. Отсюда следует, что $F_1 = F_2$, т. е. точка нулевых горизонтальных смещений должна делить площадь сечения ребра перелома на две равновеликие части. В частном случае постоянной толщины оболочки контур нулевых горизонтальных смещений должен делить длины ребер перелома пополам. При этом получаем формулу для предельного значения усилия P , приложенного в точке O :

$$P = \frac{-T}{f} = \frac{2\sigma_t}{\sqrt{3}} \sum_{i=1}^n (\operatorname{ctg} \alpha_i + \operatorname{ctg} \beta_i) \frac{W_i}{l_i}, \quad (51.9)$$

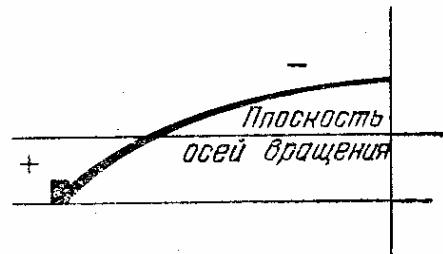


Рис. 152.

где

$$W_i = \int_0^{l_i} \delta |z - z_0| ds_i.$$

Величина W_i представляет собой пластический момент сопротивления i -го ребра перелома.

Формула (51.9) остается справедливой и при наличии опорного кольца или борта по периметру оболочки или по какой-либо иной линии (рис. 152). В этом случае сечение кольца или борта следует включать в площадь ребра перелома.

§ 52. Возможность продавливания оболочки

При действии нагрузки P , распределенной по малой площади, следует считаться с возможностью продавливания оболочки по контуру, ограничивающему площадь приложения нагрузки, или по близкому к нему контуру.

Пусть нагрузка P распределена по площади A , малой по сравнению с площадью поверхности всей оболочки. Периметр площади A обозначим через Π . Представим себе вертикальный сдвиг площадки A на величину f , тогда работа внутренних сил будет равна

$$T = -\Pi \delta \Gamma \sigma_t / \sqrt{3},$$

где Γ — сосредоточенная деформация сдвига, равная f ; $\sigma_t / \sqrt{3}$ — предельная интенсивность касательных напряжений, δ — толщина оболочки.

Приравняв $-T$ работе внешних сил Pf , получим

$$P = \frac{\Pi \delta \sigma_t}{\sqrt{3}}.$$

Для того чтобы сила P , определенная по этой формуле, была больше, чем значение P по формуле (51.9), необходимо выполнение условия

$$\Pi \delta > 2 \sum_{i=1}^n (\operatorname{ctg} \alpha_i + \operatorname{ctg} \beta_i) W_i / l_i. \quad (52.1)$$

При этом периметру Π следует придавать наименьшее значение, учитывая только ту часть нагрузки, которая находится внутри контура Π .

Так, например, если в центре круглой в плане пологой оболочки приложена нагрузка P , равномерно распределенная по небольшому кругу радиуса r , то

$$\Pi = 2\pi r, \quad \sum (\operatorname{ctg} \alpha_i + \operatorname{ctg} \beta_i) = 2\pi, \quad l_i = R, \quad W_i = W$$

и, согласно (52.1),

$$r\delta > 2W/R, \quad (52.2)$$

где R — радиус оболочки в плане.

Представив величину W в виде $F_1 k$, где F_1 — площадь сжатой части радиального сечения оболочки, а k — расстояние по вертикали между центрами тяжести сжатой и растянутой зон меридионального сечения, получим из (52.2)

$$r > \frac{2F_1 k}{R\delta} \quad (52.3)$$

и при постоянной толщине оболочки без бортового элемента, когда $F_1 = F/2 = Rh/2$, где F — полная площадь меридионального сечения,

$$r > k, \quad (52.4)$$

т. е. радиус площади приложения нагрузки должен быть больше расстояния по вертикали между центрами тяжести верхней и нижней половин площади меридионального сечения (в случае свободно смещающихся по горизонтали краев оболочки). В противном случае будет происходить продавливание площади опирания груза.

Для оболочки постоянной толщины с несмещающимися краями $F_1 = R\delta$, а $k = c_0$, где c_0 — расстояние от центра тяжести меридионального сечения до плоскости опирания оболочки, и неравенство (52.3), приобретает вид

$$r > 2c_0. \quad (52.5)$$

При выполнении условий (52.3), (52.4) или (52.5) для соответствующих оболочек возможность продавливания учитывать не следует.

§ 53. Пяти- и девятидисковые формы разрушения пологой оболочки на прямоугольном плане

Экспериментами установлено, что форма разрушения пологих оболочек, свободно опертых по прямоугольному контуру, близка к пятидисковой схеме, показанной на рис. 153. Расчет по этой схеме может быть произведен методом, описанным в § 50.

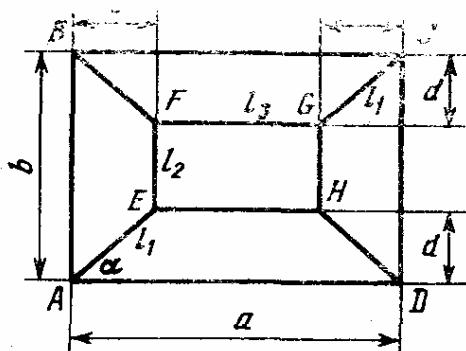


Рис. 153.

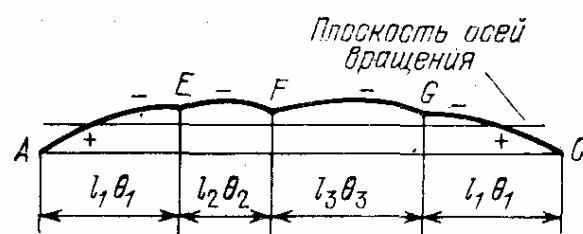


Рис. 154.

Построим все сечения оболочки по ребрам перелома в одной плоскости, умножив длину каждого сечения на соответствующий угол перелома ребра θ . При симметричной нагрузке можно ограничиться половиной всех ребер (рис. 154). Углы перелома по косым ребрам равны

$$\theta_1 = \frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} (90^\circ - \alpha)}{\sqrt{c^2 + d^2}} = \frac{\sqrt{c^2 + d^2}}{cd}.$$

Углы перелома по ребрам, окаймляющим средний диск, равны

$$\theta_2 = 1/c, \quad \theta_3 = 1/d.$$

Величины c и d , так же как положение плоскости осей вращения (плоскости нулевых горизонтальных смещений), следует находить из условия минимума разрушающей нагрузки.

Для определения плоскости осей вращения следует сечения оболочки по ребрам перелома разделить горизонтальной линией на две части, которые относятся друг к другу как пределы текучести на сжатие и на растяжение, точно так, как это было сделано в примере § 50.

Если оболочка закреплена таким образом, что ее торцевые сечения не могут смещаться по горизонтали, то по контуру закрепления возникнут отрицательные углы перелома, равные по абсолютной величине углам перелома по ребрам EF и FG . Сечения по торцевым линиям перелома также можно изобразить на одной плоскости с сечениями по внутренним ребрам перелома (рис. 155). Однако при

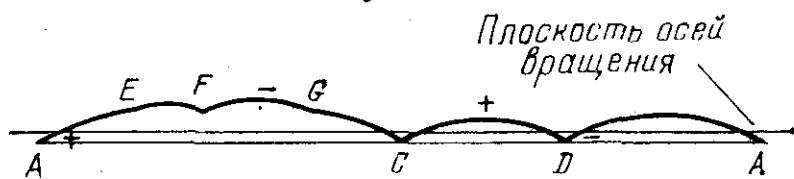


Рис. 155.

разделении этих сечений на две части линией нулевых горизонтальных смещений следует учесть, что в контурных сечениях ниже линии нулевых горизонтальных смещений будет сжатие, а выше — растяжение, т. е. обратное тому, что будет на внутренних ребрах перелома. Надо найти такое положение линии нулевых горизонтальных смещений, чтобы сумма сжатых площадей относилась к сумме растянутых, как σ_t^+/σ_t^- . Длины криволинейных сечений в пологих оболочках можно заменить длинами их горизонтальных проекций, а статические моменты относительно плоскости осей вращения — умноженными на δ_i площадями Ω_i , ограниченными сечениями и линией нулевых горизонтальных смещений (рис. 156). Размеры

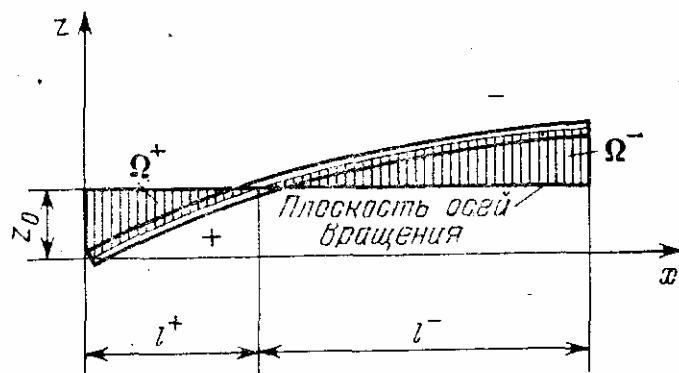


Рис. 156.

внутреннего диска приходится определять обычными численными или аналитическими методами нахождения минимума q_0 (50.8).

В прямоугольных оболочках с несмещающимся контуром часто наблюдается также девятидисковая форма разрушения, показанная на рис. 157. Здесь крайние диски поворачиваются вверх, образуя положительные углы перелома вдоль контура оболочки и отрицательные на диагональных ребрах AE , BF и др. Средняя пятидисковая часть ведет себя так же, как в пятидисковой форме разрушения оболочки.

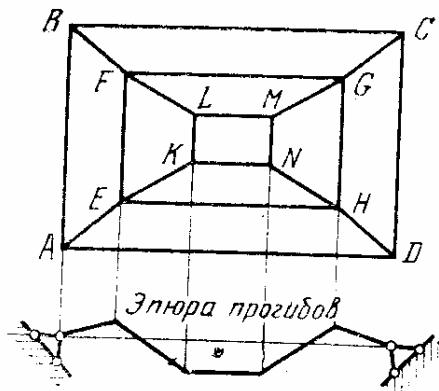


Рис. 157.

При этом образуются две плоскости осей вращения: одна для четырех крайних дисков, а другая — для пяти средних. Расчет при этом довольно сильно усложняется, но не в принципиальном отношении, а в сторону увеличения объема и громоздкости вычислений.

§ 54. Устойчивость пологой оболочки [101]

В очень пологой оболочке вертикальные прогибы могут достигать размеров, сравнимых с высотой оболочки. Тогда необходимо учитывать изменение ординат z срединной поверхности оболочки в процессе ее деформирования. Задача при этом становится нелинейной, и условие равенства работ внутренних и внешних сил $V = -T$, вытекающее из принципа минимума потенциальной энергии $U = V + T$, должно быть заменено условием $dV = -dT$.

Введем общий параметр t , пропорционально которому изменяются все прогибы оболочки и все углы наклона граней эпюры прогибов, и обозначим через φ_k угол наклона k -й грани при единичном значении параметра t . На основании (50.6) и (50.7) имеем

$$T = -t \sum_k \varphi'_k M_{tk}, \quad V = q_0 t \sum_k \varphi'_k S'_k, \quad \varphi'_k = d\varphi_k/dt.$$

Дифференцируя по параметру t , получаем

$$dV = q_0 dt \sum_k \varphi'_k S'_k,$$

$$dT = -dt \left(\sum_k \varphi'_k M_{tk} + t \sum_k \varphi'_k \frac{dM_{tk}}{dt} \right).$$

Используя выражение (50.5)

$$M_{th} = \sum_i \cos \alpha_{ik} \left(- \int_+^+ \sigma_t^+ \delta z \, ds_i + \int_-^- \sigma_t^- \delta z \, ds_i \right),$$

находим

$$\begin{aligned} \frac{dM_{th}}{dt} &= \varphi_k \frac{dM_{th}}{d\varphi_k} = \\ &= \varphi_k' \sum_i \cos \alpha_{ik} \left(- \int_+^+ \sigma_t^+ \delta \frac{dz}{d\varphi_k} \, ds_i + \int_-^- \sigma_t^- \delta \frac{dz}{d\varphi_k} \, ds_i \right). \end{aligned} \quad (54.1)$$

Из рис. 158 видно, что

$$-\frac{dz}{d\varphi_k} = x_k,$$

где x_k — горизонтальные координаты точек сечений оболочки, отсчитанные в направлении, перпендикулярном оси вращения k -й грани. Поэтому выражение (54.1) можно написать в виде

$$\frac{dM_{th}}{dt} = \varphi_k' (\sigma_t^+ S_{k,\text{гор}}^+ - \sigma_t^- S_{k,\text{гор}}^-),$$

где

$$S_{k,\text{гор}}^+ = \int_+^+ \delta x_k \, dp_i,$$

$$S_{k,\text{гор}}^- = \int_-^- \delta x_k \, dp_i$$

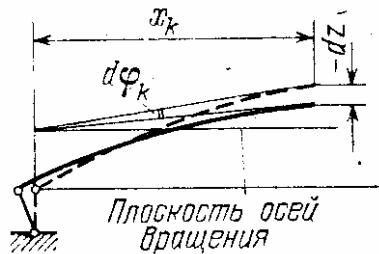


Рис. 158.

— статические моменты проекций сечений, ограничивающих k -ю грань ниже и выше плоскости осей вращения, взятые относительно вертикальной плоскости, проходящей через ось вращения k -й грани;

$$dp_i = ds_i \cos \alpha_{ik}$$

— элемент длины проекции сечения, ограничивающего k -ю грань, на ось вращения последней. (Замечаем, что величины $S_{k,\text{гор}}^+$ и $S_{k,\text{гор}}^-$ не изменяются в процессе деформирования оболочки, поскольку линия пересечения плоскости осей вращения с поверхностью оболочки сохраняет свою форму.)

Теперь можно написать, что

$$dT = -dt \left[\sum_k \varphi'_k M_{tk} + t \sum_k \varphi'_k (\sigma_t^+ S_{k,\text{гор}}^+ - \sigma_t^- S_{k,\text{гор}}^-) \right],$$

и, используя равенство

$$-dV = -q_0 dt \sum_k \varphi'_k S'_k,$$

получим

$$q_0 = \frac{\sum_k \varphi'_k M_{tk} + t \sum_k \varphi'_k (\sigma_t^+ S_{k,\text{гор}}^+ - \sigma_t^- S_{k,\text{гор}}^-)}{\sum_k \varphi'_k S'_k}. \quad (54.2)$$

Поскольку величина

$$\sigma_t^+ S_{k,\text{гор}}^+ - \sigma_t^- S_{k,\text{гор}}^-$$

отрицательна ($S_{k,\text{гор}}^- > S_{k,\text{гор}}^+$), то величина нагрузки q_0 при увеличении t убывает, что означает неустойчивость равновесия. Следовательно, жесткопластическая оболочка после достижения предельной нагрузки

$$q_0 = \frac{\sum_k \varphi'_k M'_{tk}}{\sum_k \varphi'_k S'_k},$$

соответствующей нулевым деформациям ($t = 0$), быстро переходит в иное состояние равновесия (прощелкивает) или разрушается.

Линейная зависимость $q_0(t)$ сохраняется до тех пор, пока средние точки оболочки не перейдут через плоскость осей вращения, тогда в средней зоне оболочки вместо сжатия появится растяжение (рис. 159) и величины S_k^+

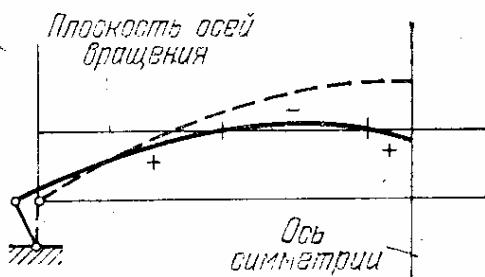


Рис. 159.

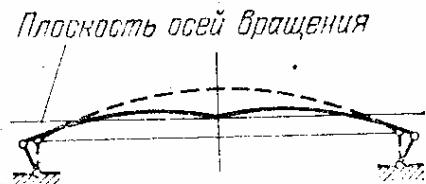


Рис. 160.

и S_k^- изменяется. После этого сопротивляемость оболочки будет уменьшаться в меньшей степени, а затем, перейдя через минимум, начнет возрастать.

Наименьшее значение q_0 , являющееся нижней критической нагрузкой на оболочку, будет несколько ниже того, которое получается из формулы (54.2) при положении оболочки, когда верхняя ее часть опускается до плоскости осей вращения, но растягивающих напряжений в средних частях ребер перелома еще не возникает (рис. 160).

В качестве примера возьмем оболочку в виде пологого параболоида вращения, опертого на квадратный контур таким образом, что торцевые сечения могут свободно смещаться по горизонтали перпендикулярно к плоскости опирания (рис. 161).

Обозначим через $l = a/\sqrt{2}$ длину каждого ребра перелома, идущего от центра к вершине опорного контура, через f — высоту подъема оболочки (ребра перелома), δ — толщина оболочки, $\sigma_t = \sigma_t^+ = \sigma_t^-$ — предел текучести материала, одинаковый на растяжение и на сжатие. Нагрузку q считаем равномерно распределенной по горизонтальной проекции оболочки.

Работа внешних сил равна

$$V = 4qS, \quad (54.3)$$

где S — статический момент треугольника ABO относительно стороны AB (рис. 161), $S = a^3/24$.

Работа внутренних сил равна, согласно (49.2),

$$T = -4\sigma_t\delta(\Omega^+ + \Omega^-), \quad (54.4)$$

где Ω^+ и Ω^- — площади, изображенные на рис. 156.

Приравнивая нулю сумму выражений (54.3) и (54.4), получаем

$$q = \frac{24\sigma_t\delta}{a^3} (\Omega^+ + \Omega^-). \quad (54.5)$$

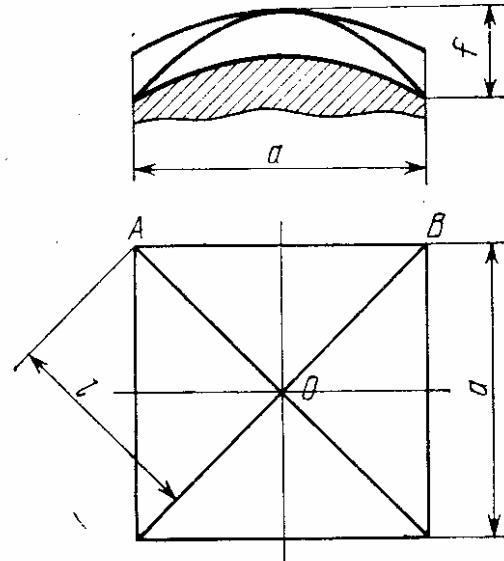


Рис. 161.

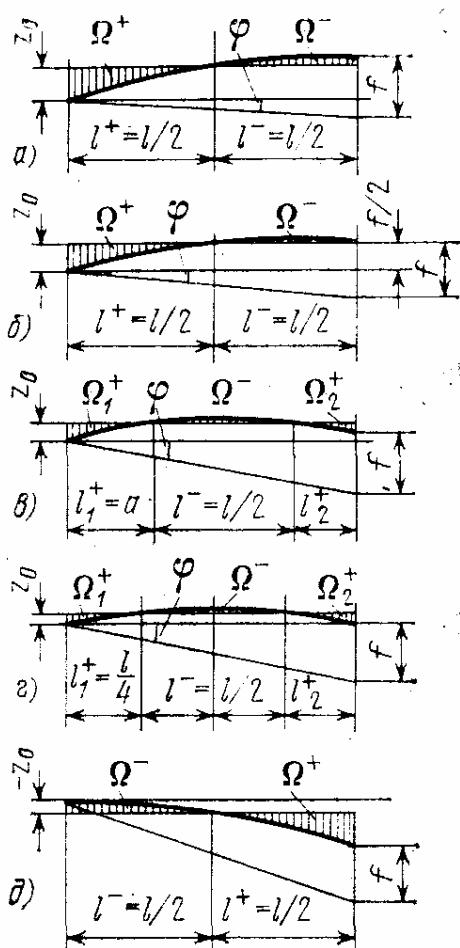


Рис. 162.

Условие (49.3) при постоянном δ требует, чтобы
 $l^+ = l^- = l/2$. (54.6)

Уравнение линии ребра перелома в пологом параболоиде вращения в недеформированном состоянии оболочки имеет вид

$$z = f \left(\frac{2x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right).$$

После поворота граней оболочки вокруг линий опорного контура на угол φ это уравнение получит вид

$$z = f \left(\frac{2x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right) - \varphi x.$$

Согласно (54.6) плоскость осей вращения в первой стадии деформирования пройдет через точку, в которой $x = l/2$ (рис. 162, a):

$$z_0 =$$

$$= f \left(1 - \frac{1}{4} \right) - \varphi \frac{l}{2} = \frac{3}{4} f - \frac{\varphi l}{2}.$$

Ординаты ребра перелома, взятые относительно плоскости осей вращения, равны

$$z_C = z - z_0 = f \left(\frac{2x}{l} - \frac{x^2}{l^2} - \frac{3}{4} \right) - \varphi \left(x - \frac{l}{2} \right). (54.7)$$

Определим теперь площади Ω^+ и Ω^- для этой стадии деформирования:

$$\begin{aligned} \Omega^+ &= \int_0^{l/2} |z_C| dx = \int_0^{l/2} f \left(\frac{2x}{l} - \frac{x^2}{l^2} - \frac{3}{4} - \varphi x + \frac{\varphi l}{2} \right) dx = \\ &= \frac{fl}{6} - \frac{\varphi l^2}{8}, \quad \Omega^- = \int_{l/2}^l |z_C| dx = \frac{fl}{12} - \frac{\varphi l^2}{8} \end{aligned} \quad (54.8)$$

и подставим их значения в формулу (54.5). Получим

$$q = \frac{24\sigma_T \delta}{a^3} \left(\frac{fl}{4} - \frac{\varphi l^2}{4} \right). \quad (54.9)$$

При $\varphi = 0$

$$q = q_{\text{пр}} = \frac{6\sigma_T \delta l f}{a^3} = 3\sqrt{2}\sigma_T \delta \frac{f}{a^2}. \quad (54.10)$$

Первая стадия деформирования заканчивается, когда средняя точка оболочки коснется плоскости осей вращения (рис. 162, б), т. е. при

$$\begin{aligned} z_C(l) &= 0, \quad f \cdot \frac{1}{4} - \varphi \cdot \frac{l}{2} = 0, \quad \varphi = \frac{f}{2l}, \\ q &= \frac{24\sigma_T \delta}{a^3} \cdot \frac{fl}{8} = \frac{3}{\sqrt{2}} \sigma_T \delta \frac{f}{a^2}. \end{aligned}$$

Вторая стадия деформирования будет при $\varphi > f/(2l)$. В этой стадии растянутыми оказываются две зоны у концов ребра излома, средняя же часть ребра будет сжатой (рис. 162, в). Условие (54.6) здесь можно записать в виде

$$l^- = l_1^+ + l_2^+ = l/2.$$

Границы средней, сжатой зоны определяются из уравнения

$$z(d) = z\left(d + \frac{l}{2}\right) = z_0, \quad (54.11)$$

где d — расстояние от начала ребра перелома до начала сжатой его зоны. Уравнение (54.11) дает

$$\begin{aligned} f \cdot \left(\frac{2d}{l} - \frac{d^2}{l^2} \right) - \varphi d &= f \left(\frac{l+2d}{l} - \frac{d^2 + dl + l^2/4}{l^2} \right) - \\ &- \varphi \left(d + \frac{l}{2} \right) = z_0, \end{aligned}$$

откуда

$$\varphi = \left(\frac{3}{2l} - \frac{2d}{l^2} \right) f, \quad z_0 = f \left(\frac{d^2}{l^2} + \frac{d}{2l} \right) \quad (54.12)$$

и

$$z_C = f \left(\frac{x}{2l} - \frac{x^2}{l^2} + \frac{2dx}{l^2} - \frac{d^2}{l^2} - \frac{d}{2l} \right).$$

Далее определяем:

$$\Omega_1^+ = \int_0^d |z_C| dx = f \left(\frac{d^3}{3l^2} + \frac{d^2}{4l} \right),$$

$$\Omega^- = \int_d^{d+l/2} |z_C| dx = \frac{fl}{48},$$

$$\Omega_2^+ = \int_{d+l/2}^l |z_C| dx = f \left(-\frac{d^3}{3l} + \frac{3}{4} \frac{d^2}{l} - \frac{d}{2} + \frac{5l}{48} \right)$$

и

$$q = \frac{24\sigma_T \delta}{a^3} (\Omega_1^+ + \Omega^- + \Omega_2^+) = \frac{24\sigma_T \delta}{a^3} f \left(\frac{d^2}{l} - \frac{d}{2} + \frac{l}{8} \right).$$

Как видим, q во второй стадии деформирования является функцией второй степени от d , а поскольку φ , согласно (54.8), линейно зависит от d , то q будет функцией второй степени и от φ . Минимум q достигается при $d = l/4$ и равен

$$q_{\min} = \frac{24\sigma_T \delta}{a^3} \frac{fl}{16} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \sigma_T \delta \frac{f}{a^2}$$

при $\varphi = f/l$ (рис. 162, ε).

При $d = 0$, $\varphi = 3f/(2l)$ значение q снова достигнет величины $\frac{3}{2\sqrt{2}} \sigma_T \delta \frac{f}{a^2}$, после чего начнется третья стадия деформирования, при которой в середине пластинки возникает растяжение, а по краям — скатие (рис. 162, ∂). При этом снова $l^- = l^+ = l/2$ и будет справедливо уравнение (54.7); однако ввиду перемены знаков величин Ω^+ и Ω^- (54.8) меняется знак и в формуле (54.8):

$$q = \frac{6\sigma_T \delta}{a^3} (\varphi l^2 - fl),$$

т. е. q с увеличением φ увеличивается.

Общий вид зависимости q от φ показан на рис. 163. Нисходящий участок кривой этой зависимости соответствует неустойчивым состояниям равновесия, а восходящий — устойчивым. При постепенном повышении q оболочка деформируется по рассматриваемой схеме, пока не достигнет предельного значения (54.10), после чего, ввиду невозможности неустойчивых состояний равновесия, должен произойти перескок на восходящий участок кривой $q(\varphi)$, как показано на рис. 163 штриховой линией. Практически вследствие ограниченности деформаций пластичности оболочка разрушается, не достигнув устойчивых состояний равновесия с отрицательной стрелой подъема.

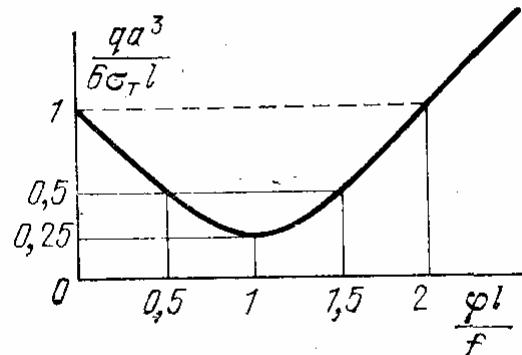


Рис. 163.

Г л а в а 10

РАСЧЕТ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

§ 55. Пологая осесимметрическая оболочка вращения [100]

Оболочку вращения можно рассматривать как предел полигональной в плане оболочки с бесконечным числом сторон контура опиания. Форма разрушения оболочки вращения при осесимметрической нагрузке будет также осесимметрична с бесконечным числом радиальных ребер перелома, образующих сплошную поверхность.

Если форма разрушения оболочки вызывает коническую эпюру прогибов, а края оболочки могут свободно смещаться в горизонтальных радиальных направлениях, то плоскость осей вращения должна делить меридиональное сечение оболочки в отношении пределов текучести на сжатие и на растяжение. В меридиональное сечение оболочки следует включать опорное кольцо, если оно жестко связано с самой оболочкой (рис. 152).

Если края оболочки закреплены против горизонтальных смещений, то необходимо учитывать возможность образования сосредоточенных деформаций по линии закрепления краев оболочки. Стержневая модель ребер перелома для такой оболочки будет состоять из кольцевого ребра, идущего вдоль опорного контура, и из бесчисленного множества числа меридиональных ребер, общая ширина которых равна $m\Delta\theta$, где m — число ребер, $\Delta\theta$ — угол перелома в меридиональном ребре. Величина m стремится к бесконечности, а $\Delta\theta$ — к нулю, произведение же, как нетрудно показать, стремится к величине $2\pi\varphi$, где φ — угол поворота в кольцевом ребре перелома. Поделив на 2π ширину суммарного меридионального ребра и длину кольцевого ребра, получим произведенное сечение всех ребер перелома, показанное на рис. 164. Это приведенное сечение надо разделить горизонтальной линией (изображающей плоскость осей вращения) на

растянутую и сжатые части так, чтобы выполнялось условие (49.3).

При постоянной толщине оболочки эта горизонтальная линия должна пройти через точку опоры меридионального сечения, как показано на рис. 165. При этом оболочка по всем направлениям будет сжата, но в опорном ребре перелома деформации сжатия будут очень малы по сравнению с деформациями сжатия в остальных

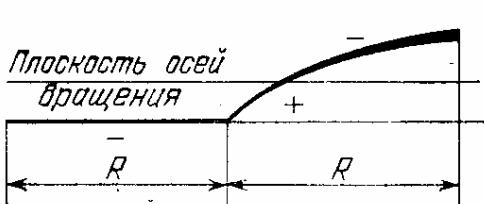


Рис. 164.

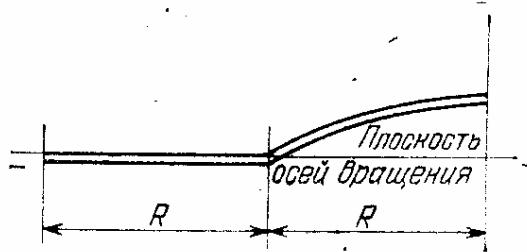


Рис. 165.

частях оболочки. Если толщина оболочки у опор будет больше средней ее толщины, то картина деформаций будет аналогичная, но в опорном ребре появятся сверху растягивающие, а снизу — сжимающие деформации. Если толщина оболочки у опор меньше средней толщины, то плоскость осей вращения пройдет выше опорной плоскости и в нижней части оболочки возникнут растягивающие напряжения.

Работа внутренних сил определяется по формуле (49.1), которая для осесимметричной опертой по контуру оболочки принимает вид

$$T = -2\pi\varphi(R\delta\sigma_T^- z_0 + S_m^+ \sigma_T^+ + S_m^- \sigma_T^-). \quad (55.1)$$

Здесь φ — угол поворота в кольцевом ребре, идущем по линии опирания оболочки, z_0 — расстояние от опорной плоскости до плоскости осей вращения, S_m^+ и S_m^- — статические моменты растянутой и сжатой части меридионального сечения (идущего от центра оболочки), взятые относительно плоскости осей вращения.

Если край оболочки не может смещаться в горизонтальных направлениях и толщина оболочки у опор не меньше средней толщины ее, то z_0 равно половине толщины оболочки у опор и вся оболочка сжата. При этом

$$T = -2\pi\sigma_T^-(R\delta^2/2 + S_m), \quad (55.2)$$

где δ — толщина оболочки у опор, S_m — статический момент всего меридионального сечения относительно плоскости опирания оболочки.

Если край оболочки может свободно смещаться в горизонтальном направлении, то первый член в формуле (55.1) следует исключать, а статические моменты S_m^+ и

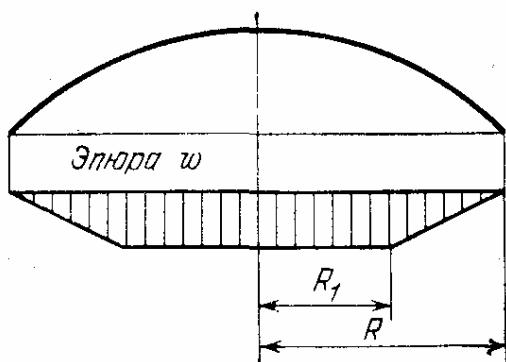


Рис. 166.

S_m^- определять относительно плоскости, делящей площадь меридионального сечения в отношении σ_t^+/σ_t^- .

Работа внешних сил при конической форме разрушения находится по формуле

$$V = 2\pi q_0 \int_0^R \eta r dr,$$

где q_0 — числовой множитель, определяющий интенсивность нагрузки, η — функция распределения нагрузки вдоль радиуса r .

Разрушающая нагрузка определяется из равенства $T + V = 0$.

В некоторых случаях меньшую нагрузку по сравнению с конической формой разрушения дает форма, в которой эпюра прогибов имеет вид усеченного конуса (рис. 166).

§ 56. Осесимметричная оболочка постоянной толщины, неподвижно опертая по контуру [100]

Форму разрушения такой оболочки будем считать сначала конической с вершиной конуса в центре оболочки:

$$w = w_0(1 - r/R).$$

Здесь w — прогиб оболочки на расстоянии r от центра, w_0 — прогиб в центре, R — радиус опорного контура.

Плоскость осей вращения в такой оболочке совпадает с плоскостью ее опирания, а работа внутренних сил на деформациях разрушения выражается формулой (55.2)

$$T = -2\pi\varphi\sigma_t(S_m + R\delta^2/2),$$

где φ — угол поворота в опорном сечении;

$$\varphi = w_0/R;$$

S_m — статический момент меридионального сечения относительно опорной плоскости, σ_t — предел текучести на сжатие (при отрицательной нагрузке, направленной вверх, оболочка работает на растяжение и тогда σ_t — предел текучести на растяжение, но этот случай нагрузки встречается редко).

При постоянной толщине пологой оболочки статические моменты сечения могут быть заменены произведением толщины δ на площадь, ограниченную срединной линией сечения и горизонталью, относительно которой берется статический момент. Поэтому для оболочки вращения с меридиональной кривой в виде параболы n -й степени

$$z = f \left(1 - \frac{r^n}{R^n} \right), \quad (56.1)$$

где f — стрела подъема оболочки, r и z — координаты меридиональной кривой срединной поверхности оболочки,

$$S_m = \frac{n}{n+1} R f \delta. \quad (56.2)$$

Работа внешних сил при данной форме разрушения выражается интегралом

$$V = 2\pi\varphi \int_0^R q(R-r) r dr,$$

который не зависит от очертания дуги оболочки.

В случае равномерно распределенной нагрузки работа внешних сил равна

$$V = \frac{\pi}{3} \varphi R^3 q.$$

В случае нагрузки оболочки силой P , распределенной на небольшой площади вблизи центра, работа внешних сил равна

$$V = \varphi RP.$$

Из равенства $T + V = 0$ найдем предельную равномерно распределенную нагрузку

$$q_{\text{пр}} = \frac{3\sigma_{\text{T}}}{R^3} (2S_m + R\delta^2), \quad (56.3)$$

или, с учетом (56.2),

$$q_{\text{пр}} = \frac{3\sigma_{\text{T}}f\delta}{R^2} \left(\frac{2n}{n+1} + \frac{\delta}{f} \right). \quad (56.4)$$

Аналогично для сосредоточенной нагрузки получаем

$$P_{\text{пр}} = \frac{\pi\sigma_{\text{T}}}{R} (2S_R + R\delta^2) = \pi\sigma_{\text{T}}/\delta \left(\frac{2n}{n+1} + \frac{\delta}{f} \right). \quad (56.5)$$

Для оболочки в виде параболоида вращения ($n = 2$)

$$q_{\text{пр}} = \frac{4\sigma_{\text{T}}f\delta}{R^2} \left(1 + \frac{3\delta}{4f} \right), \quad P_{\text{пр}} = \frac{4\pi}{3} \sigma_{\text{T}}/\delta \left(1 + \frac{3\delta}{4f} \right).$$

Для конической оболочки ($n = 1$) с той же стрелой подъема разрушающие нагрузки равны

$$q_{\text{пр}} = \frac{3f\delta\sigma_{\text{T}}}{R^2} \left(1 + \frac{\delta}{f} \right), \quad P_{\text{пр}} = \pi\sigma_{\text{T}}/\delta \left(1 + \frac{\delta}{f} \right).$$

§ 57. Исследование возможности формы разрушения в виде усеченного конуса [100]

Предположим теперь, что прогибы оболочки распределяются по ее поверхности по закону

$$w = \varphi(R - r) \quad \text{при } r < R_1,$$

$$w = \varphi(R - R_1) = \text{const} \quad \text{при } r < R_1.$$

Эпюра прогибов здесь имеет вид усеченного конуса с основаниями радиуса R и R_1 (см. рис. 166).

Стержневая модель ребра перелома для этой формы разрушения показана на рис. 167. Приведенное обобщенное сечение оболочки по линиям перелома показано на рис. 167.

Плоскость осей вращения здесь по-прежнему совпадает с плоскостью опирания, так что вся оболочка остается сжатой. Отличие конической формы разрушения заключается в очертании приведенного ребра перелома и, следовательно, в величине статического момента, кото-

рый равен здесь умноженной на толщину оболочки δ площади Ω , обозначенной на рис. 168 штриховкой. Очевидно, что срезанная на участке $r < R_1$ горизонталью площадь Ω меньше площади, ограниченной всем меридиональным сечением. Поэтому работа T внутренних сил для формы разрушения в виде усеченного конуса при

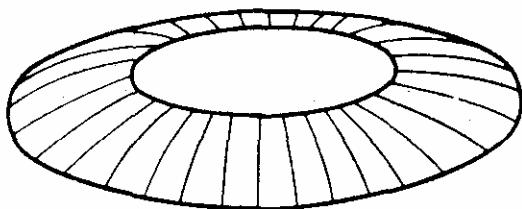


Рис. 167.

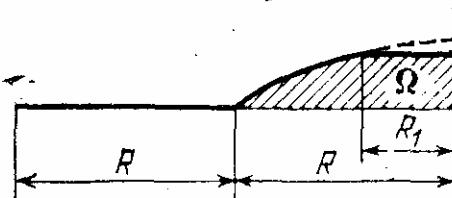


Рис. 168.

одном и том же угле наклона конической поверхности меньше работы T , определенной для формы разрушения в виде неусеченного конуса. С другой стороны, для усеченного конуса уменьшается и работа внешних сил V . Истинная форма соответствует минимуму отношения T/V .

Определим величину разрушающей нагрузки для рассматриваемой формы разрушения. Очертание меридиональной кривой возьмем в виде параболы n -й степени

$$z = f \left(1 - \frac{r^n}{R^n} \right).$$

Статический момент $S_m = \delta\Omega$ согласно рис. 168 равен

$$S_m = \delta \frac{n}{n+1} \left(Rf - Rf \frac{R_1^{n+1}}{R^{n+1}} \right) = \frac{n}{n+1} \delta f R (1 - \xi^{n+1}),$$

где

$$\xi = R_1/R,$$

а работа T равна

$$T = -2\pi\varphi R \delta \sigma_T \left(\frac{n}{n+1} f (-\xi^{n+1}) + \frac{\delta}{2} \right). \quad (57.1)$$

Работа внешней равномерно распределенной нагрузки равна произведению ее величины на объем усеченного конуса эпюры прогибов:

$$V = \frac{1}{3} q\pi\varphi R^3 (1 - \xi^3). \quad (57.2)$$

Приравняв сумму выражений (57.1) и (57.2) нулю, найдем предельную равномерно распределенную нагрузку

$$q_{\text{пр}} = \frac{6\sigma_T \delta}{R^2} \frac{\frac{n}{n+1} f (1 - \xi^{n+1}) + \frac{\delta}{2}}{1 - \xi^3}. \quad (57.3)$$

Величина $\frac{\delta}{2(1 - \xi^3)}$ в интервале $0 < \xi < 1$ имеет минимальное значение при $\xi = 0$. То же можно сказать о дроби

$$\frac{1 - \xi^{n+1}}{1 - \xi^3} = \frac{1 + \xi + \xi^2 + \dots + \xi^n}{1 + \xi + \xi^2}, \quad (57.4)$$

если $n > 2$. Отсюда следует, что минимум $q_{\text{пр}}$ при $n > 2$ достигается при $\xi = 0$, т. е. когда форма разрушения будет конической. При этом формула (57.3) обращается в выведенную выше более простую формулу (56.4). При $n = 2$ дробь (57.4) не зависит от ξ . Следовательно, в этом случае минимум нагрузки будет также при $\xi = 0$, и остается справедливой первая формула (56.5), выведенная для конической формы разрушения.

Случай $n < 2$ требует особого рассмотрения. Можно показать, что минимум $q_{\text{пр}}$ здесь достигается в пределах $0 < \xi < 1$, т. е. при форме разрушения в виде усеченного конуса. Ограничимся рассмотрением конической оболочки, для которой $n = 1$ и

$$q_{\text{пр}} = \frac{3\sigma_T \delta}{R^2} \frac{f(1 - \xi^2) + \delta}{1 - \xi^3}. \quad (57.5)$$

Для нахождения минимума $q_{\text{пр}}$ приравняем нулю производную $dq_{\text{пр}}/d\xi$. Это приводит к уравнению

$$\xi^3 - 3 \left(1 + \frac{\delta}{f}\right) \xi + 2 = 0. \quad (57.6)$$

В интервале $0 < \xi < 1$ имеется один действительный корень уравнения (57.6). Определив его и выразив из (57.6)

$$\delta = \frac{f}{3} \left(\xi^2 + \frac{2}{\xi} - 3\right),$$

можно представить (57.5) в виде

$$\min q_{\text{пр}} = \frac{2f\delta\sigma_t}{R^2\xi} = \frac{2f\delta\sigma_t}{RR_1}.$$

При очень малом отношении δ/f

$$\xi \rightarrow 1, \quad R_1 \rightarrow R, \quad q_{\text{пр}} \rightarrow 0,$$

т. е. пластические деформации концентрируются в узкой зоне вблизи края оболочки (рис. 169), а предельная нагрузка стремится к нулю.

Если оболочка нагружена силой, сосредоточенной вблизи центра оболочки, то работа внешних сил равна

$$V = P_\Phi(R - R_1) = P_\Phi R(1 - \xi).$$

Рис. 169.

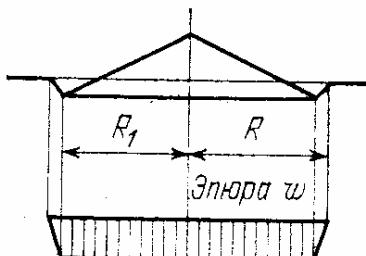
Суммируя это выражение с выражением (57.1) для работы внутренних сил, найдем разрушающее значение силы:

$$P_{\text{пр}} = 2\pi\delta\sigma_t \frac{\frac{n}{n+1} f (1 - \xi^{n+1}) + \frac{\delta}{2}}{1 - \xi}.$$

Это выражение при всех положительных значениях n в интервале $0 < \xi < 1$ имеет минимум при $\xi = 0$. Следовательно, коническая форма разрушения дает меньшую предельную сосредоточенную нагрузку, чем форма разрушения в виде усеченного конуса.

§ 58. Исследование возможности конической формы разрушения одной средней части оболочки [400]

Рассмотрим теперь случай образования кольцевого шарнира текучести в средней части оболочки с разрушением в форме конуса лишь той части оболочки, которая заключена внутри этого кольцевого шарнира (рис. 170). Расчет по этой форме разрушений эквивалентен расчету по конической форме разрушения уменьшенной оболочки, ограниченной кольцевым шарниром текучести и неподвижно опретой по линии этого шарнира. Поэтому для определения нагрузки, вызывающей



этую форму разрушения, следует в формулах (56.3) и (56.4), выведенных для конической формы разрушения всей оболочки, заменить R на R_2 — радиус кольцевого шарнира текучести, а f на f_2 — стрелу подъема поверхности оболочки, ограниченную кольцевым шарниром текучести.

Для поверхности, описываемой уравнением (56.1)

$$f_2 = f \frac{R_2^n}{R^n} = f\eta^n, \quad (58.1)$$

где

$$\eta = R_2/R, \quad (58.2)$$

Рис. 170.

предельная равномерная нагрузка согласно (56.3), (58.1) и (58.2), равна

$$q_{\text{пр}} = \frac{3\sigma_t f \delta}{R^2} \eta^{n-2} \left(\frac{2n}{n+1} + \frac{\delta}{f\eta^n} \right).$$

Для нахождения минимума $q_{\text{пр}}$ исследуем изменение множителя

$$K = \frac{2n}{n+1} \eta^{n-2} + \frac{\delta}{f\eta^2}$$

при изменении η от нуля до единицы. Приравняв нулю производную $\partial K / \partial \eta$, получим

$$\frac{2n(n-2)}{n+1} \eta^{n-3} - \frac{2\delta}{f} \eta^{-3} = 0, \quad \eta^n = \frac{\delta}{f} \frac{n+1}{n(n-2)}. \quad (58.3)$$

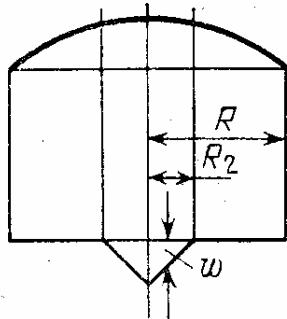
Значение η , определяемое формулой (58.3), может находиться в пределах $0 < \eta < 1$ лишь при $n > 2$. Таким образом, для оболочек в виде конуса и параболоида вращения минимум K достигается при $\eta = 1$, т. е. разрушается вся поверхность оболочки.

В случае $n > 2$, при не слишком больших отношениях δ/f , минимальную нагрузку дает разрушение части поверхности, ограниченной радиусом

$$R_2 = R \sqrt[n]{\frac{\delta}{f} \frac{n+1}{n(n-2)}},$$

причем предельная нагрузка равна

$$q_{\text{пр}} = \frac{3\sigma_t f \delta}{R^2} K_{\min},$$



где

$$K_{\min} = \frac{n}{n-2} \frac{\delta}{f} \sqrt[n]{\left[\frac{f}{\delta} \frac{n(n-2)}{n+1} \right]^2}.$$

Для сосредоточенной силы из (56.5) и (58.1) получаем формулу

$$P_{\text{пр}} = \pi \sigma_t \delta \left(f \cdot \frac{2n}{n+1} \eta^n + \delta \right).$$

Здесь минимум $P_{\text{пр}}$ при любом положительном n соответствует значению $\eta = 0$, что означает разрушение очень малой части поверхности оболочки вблизи точки приложения силы P . Минимальное значение $P_{\text{пр}}$ при этом получается равным

$$\min P_{\text{пр}} = \pi \sigma_t \delta^2. \quad (58.4)$$

Это выражение является неточным, так как в рассмотренных выше формах разрушения мы пренебрегали зоной меридионального сечения, в которой плоскость осей вращения пересекает толщину оболочки и эпюра напряжений по толщине оболочки является знакопеременной. Значение минимума $P_{\text{пр}}$ можно получить также, заменив оболочку плоской пластинкой, для которой

$$P_{\text{пр}} = 4\pi m_t, \quad (58.5)$$

где m_t — предельный изгибающий момент в пластинке. При равных пределах текучести на растяжение и сжатие $m_t = \delta^2 \sigma_t / 4$ и формула (58.5) совпадает с формулой (58.4), однако это совпадение не подтверждает формулы (58.4), поскольку в последней рассматривается принципиально иная схема разрушения с работой материала только на сжатие.

Г л а в а 11

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ

§ 59. Цилиндрический свод-оболочка [98]

Рассмотрим теперь незамкнутую цилиндрическую оболочку, свободно опертую по торцам на две диафрагмы. При достаточной толщине контур ее поперечного сечения можно считать неизменяемым, и тогда расчет оболочки сводится к расчету на изгиб и стесненное кручение тонкостенной балки.

Если толщина оболочки невелика, то контур сечения испытывает деформацию, которую в стадии разрушения можно аппроксимировать следующим образом. Вдоль верхней линии оболочки образуется цилиндрический шарнир текучести, а по среднему поперечному сечению

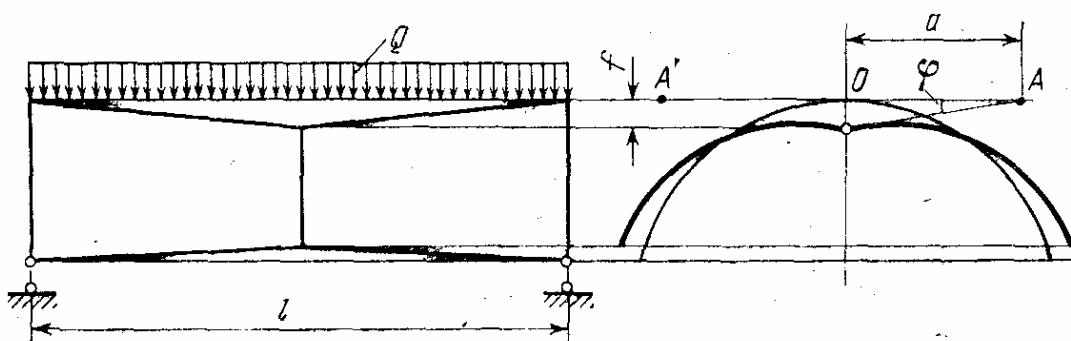


Рис. 171.

возникают сосредоточенные продольные деформации удлинения и сжатия. Каждая половина оболочки, расположенная по одну сторону от цилиндрического шарнира текучести, работает на изгиб и кручение как тонкостенный стержень с недеформируемым контуром сечения. В предельном состоянии в среднем сечении этого тонкостенного стержня образуется изгибно-крутильный шарнир текучести (рис. 171).

Пусть правая половина среднего сечения оболочки повернулась на угол φ вокруг мгновенного центра вра-

щения A . Тогда относительный угол закручивания среднего поперечного сечения половины оболочки равен $2\varphi/l$, где l — пролет оболочки.

Взаимная депланация в среднем сечении дает сосредоточенные удлинения

$$\vartheta = 4\varphi \omega_A / l; \quad (59.1)$$

здесь ω_A — секториальная координата рассматриваемой точки сечения, т. е. удвоенная секториальная площадь, ограниченная радиусами-векторами (проведенными из полюса A в рассматриваемую точку контура C и некоторую начальную точку M), а также дугой контура сечения (рис. 172).

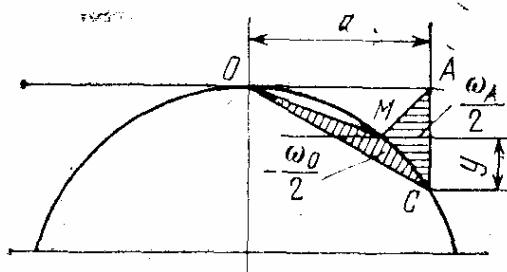


Рис. 172.

Из условия, что точка O перемещается по вертикали, находим, что полюс A расположен на одной горизонтали с точкой O .

Секториальная координата ω_A может быть выражена в зависимости от положения полюса A формулой

$$\omega_A = \omega_o + ay, \quad (59.2)$$

где ω_o — секториальная координата, отсчитанная из полюса O ; y — расстояние от рассматриваемой точки до горизонтальной оси, проходящей через точку M ; a — расстояние от точки O до центра вращения A .

Положение точки M определяется из условия равенства нулю равнодействующей продольных напряжений в сечении. Поскольку в предельном состоянии эти напряжения равны σ_t^+ или σ_t^- , то точка M должна делить половину сечения оболочки в отношении этих величин.

Выражение для работы внутренних сил на заданном перемещении будет иметь член, соответствующий перелому в продольном шарнире текучести — $\vartheta l m_t$, где m_t — предельный изгибающий момент в шарнире текучести, и член, соответствующий продольным деформациям среднего сечения:

$$-\sigma_t^+ \int_{+} \vartheta dF + \sigma_t^- \int_{-} \vartheta dF.$$

В первом интеграле интегрирование производится по растянутой части сечения, а во втором — по сжатой. В дальнейшем для упрощения записи будем объединять эти два интеграла, введя пределы текучести под знак интегрирования и считая, что σ_t может принимать два значения в зависимости от знака деформации. Тогда общее выражение работы внутренних сил с учетом (59.1) и (59.2) может быть записано в виде

$$-T = \varphi l m_t + \frac{4f}{l} \left(\int \sigma_t |y| dF - \frac{1}{a} \int \sigma_t |\omega_0| dF \right). \quad (59.3)$$

Разберем сначала случай линейной нагрузки Q , равномерно распределенной по пролету свода-оболочки вдоль верхней линии. Работа этой нагрузки равна

$$V = \frac{1}{2} Qfl. \quad (59.4)$$

Приравняв выражения (59.3) и (59.4), получим предельное значение Q :

$$Q = \frac{2m_t}{a} + \frac{8}{l^2} \left(\int \sigma_t |y| dF - \frac{1}{a} \int \sigma_t |\omega_0| dF \right). \quad (59.5)$$

Если

$$m_t > \frac{4}{l^2} \int \sigma_t |\omega_0| dF, \quad (59.6)$$

то минимальное значение Q получается при $a = \infty$. Следовательно, при соблюдении неравенства (59.6) оболочка разрушается без образования продольного шарнира как обычная тонкостенная балка.

При несоблюдении неравенства (59.6) минимум Q получается при наименьшем значении a . Однако эпюра ω_A в пределах половины сечения должна иметь не более одной перемены знака, так как после появления второй перемены знака работа внутренних сил увеличивается. Отсюда следует, что центр вращения A при несоблюдении неравенства (59.5) должен занимать крайнее положение, показанное на рис. 173 и определяемое тем, что секториальная координата ω_A крайней нижней точки сечения обращается в нуль. Это положение и необходимое значение a для формулы (59.5) нетрудно найти в каждом отдельном случае графическим путем или аналитически.

Разберем теперь более общий случай равномерно распределенной по пролету нагрузки, образующей в половине каждого поперечного сечения оболочки вертикальную равнодействующую R , которая пересекает горизонтальную касательную к сечению в точке C (рис. 174).

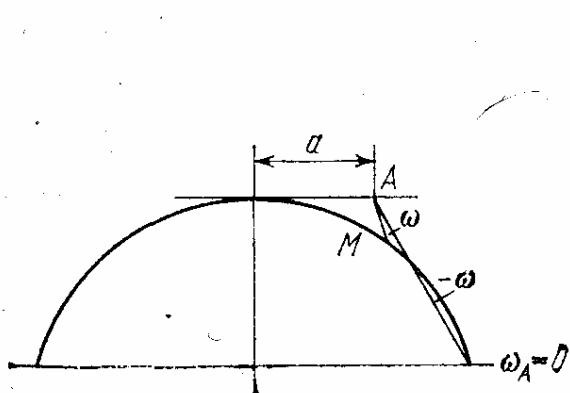


Рис. 173.

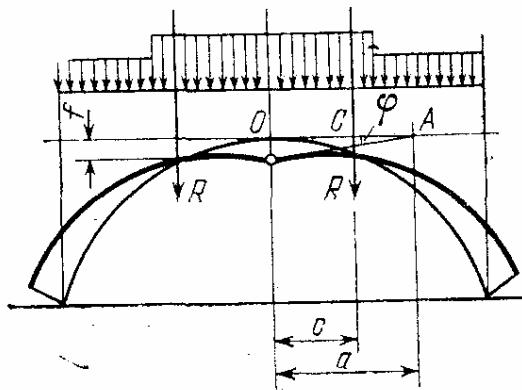


Рис. 174.

Работа такой нагрузки при заданной деформации выражится формулой

$$V = 2S_A \frac{\phi l}{2} = \frac{S_A fl}{a},$$

где S_A — статический момент нагрузки на половину сечения оболочки, взятый относительно точки A и равный

$$S_A = R(a - c).$$

Итак, имея

$$V = Rfl(a - c)/a$$

и приравнивая V работе внутренних сил (59.3), находим

$$R = \frac{m_T}{a - c} + \frac{4}{l^2(a - c)} \left(a \int \sigma_T |y| dF - \int \sigma_T |\omega_0| dF \right). \quad (59.7)$$

Введем в рассмотрение секториальные координаты ω_c с полюсом в точке C и прежней начальной точкой M :

$$\omega_o = \omega_c - cy. \quad (59.8)$$

Знак ω_c в зависимости от положения точки C может совпадать со знаком ω_o или иметь противоположное значение.

Возьмем сначала случай, когда знаки ω_c и ω_o совпадают. Это соответствует расположению точки C в пределах

OO' , показанных на рис. 175, причем крайнее правое положение C отвечает появлению нулевой секториальной координаты ω_c в точке O . Заметим, кроме того, что знаки ω_o и y противоположны.

Подставив (59.8) и (59.7) с учетом знаков ω_c и y , получаем для данного случая

$$R = \frac{m_t}{a - c} + \frac{4}{l^2} \int \sigma_t |y| dF - \frac{4}{l^2(a - c)} \int \sigma_t |\omega_c| dF. \quad (59.9)$$

Рис. 175.

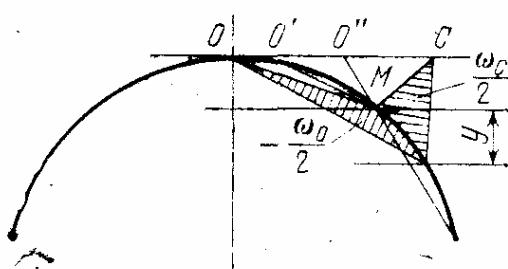
Для минимума R величина $a - c$ должна обращаться в бесконечность, если

$$m_t > \frac{4}{l^2} \int \sigma_t |\omega_c| dF, \quad (59.10)$$

или иметь минимальное значение при противоположном знаке неравенства (59.10). Это минимальное значение определяется наличием в эпюре ω_A не более одной перемены знака в полусечении, откуда следует, что точка A на рис. 174 должна совпадать с точкой O' , показанной на рис. 175. Таким образом, при соблюдении неравенства (59.10) оболочка разрушается без продольного шарнира, как тонкостенная балка, а при несоблюдении — так, как показано на рис. 171 с крайним положением центра A в точке O' , определяемым согласно рис. 175.

Случай противоположных знаков эпюр ω_c и ω_o ограничивается возможностью получения более одной перемены знака в эпюре ω_c на полусечении. Во избежание последнего точка C должна находиться в пределах от O'' до бесконечности. Положение C в точке O'' соответствует появлению нулевой секториальной координаты в нижней точке сечения оболочки (рис. 175).

Учитывая перемену знака в последнем члене правой части (59.9), получим, что минимум R при любом m_t получается при $a = \infty$. Поэтому, казалось бы, в данном случае оболочка всегда разрушается по схеме балки. Однако необходимо принять во внимание возможность отрицательных углов ϕ , когда средняя точка O перемещается вверх, и работа моментов в цилиндрическом



шарнире должна быть взята с противоположным знаком. При этом получаем то же правило, что и для случая одинаковых знаков ω_c и ω_o с тем лишь отличием, что прогибы точки O будут не вниз, а вверх.

Более сложным случаем является прохождение равнодействующей R внутри отрезка $O'O''$, когда эпюра ω_c имеет две перемены знака в полусечении. При этом в формуле (59.9) часть интеграла $\int \sigma_t \omega_c dF$ имеет другой знак. Качественная картина разрушения здесь остается той же самой, но вместо неравенства (59.10) должны быть составлены другие, более сложные.

С уменьшением толщины оболочки становится возможным образование не одного, а нескольких продольных шарниров текучести. Этот случай рассмотрен ниже методами линейного программирования (§. 64).

§ 60. Поперечное сжатие трубы сосредоточенными силами [98]

Решение, данное в предыдущем параграфе, можно использовать для расчета трубы, нагруженной, как показано на рис. 176. Зададимся деформацией трубы с образованием четырех продольных шарниров текучести и

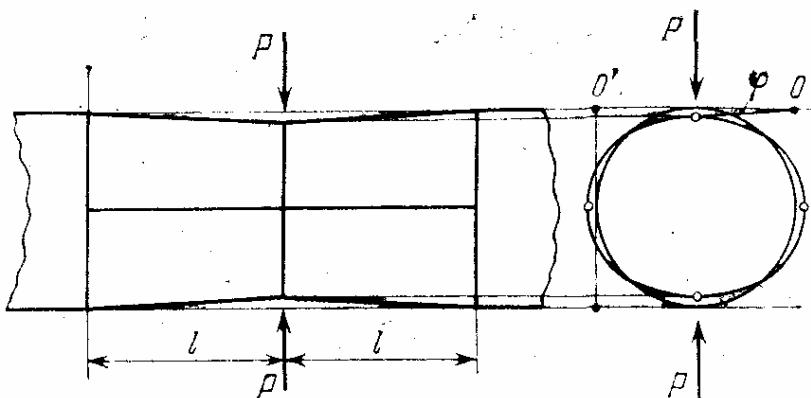


Рис. 176.

трех кольцевых линий сосредоточенных удлинений-сжатий, изменяющихся вдоль этих линий по закону депланации сечения скручиваемых стержней с тонкостенным сечением в виде четверти окружности.

Обозначив через ϕ угол поворота каждой четверти среднего сечения трубы, мы можем написать выражение

работы внутренних сил в виде

$$T = 8m_t l \varphi + \frac{16\sigma_t \varphi}{l} \int_{F/4}^{\pi/4} \omega dF,$$

где ω — секториальная координата с полюсом в мгновенном центре вращения O (рис. 177); $m_t = \sigma_t \delta^2 / 4$; δ — толщина оболочки.

Из рис. 177 нетрудно получить, что

$$\omega = R^2 (\sqrt{2} \sin \psi - \psi);$$

отсюда

$$\int_{F/4}^{\pi/4} \omega dF = 2\delta \int_0^{\pi/4} R^3 (\sqrt{2} \sin \psi - \psi) d\psi = 0,212 R^3 \delta.$$

Таким образом,

$$T = \varphi \left(2\sigma_t l \delta^2 + 3,385 \frac{\sigma_t \delta R^3}{l} \right).$$

Учитывая, что

$$V = 2P_\varphi R,$$

найдем, что минимум P совпадает с минимумом T , для которого следует положить

$$2l\delta^2 = 3,385 \delta R^3 / l,$$

откуда

$$l = \sqrt{1,69 \frac{R^3}{\delta}}, \quad T_{\min} = 20,8 \varphi R m_t \sqrt{\frac{R}{\delta}}$$

и

$$P_{\min} = \frac{T_{\min}}{2\varphi R} = 10,4 \sqrt{\frac{R}{\delta}} m_t.$$

§ 61. Расчет осесимметричных цилиндрических оболочек [95]

Возьмем осесимметричную цилиндрическую оболочку, открытую с одного конца и нагруженную по свободному краю равномерно распределенной радиальной нагрузкой Q .

Зададимся деформацией, при которой на некоторой длине оболочки превращается в усеченный конус, причем в ней возникают кольцевые удлинения ϵ_φ , равные $(c-x)Q/R$ (обозначения показаны на рис. 178). В сече-

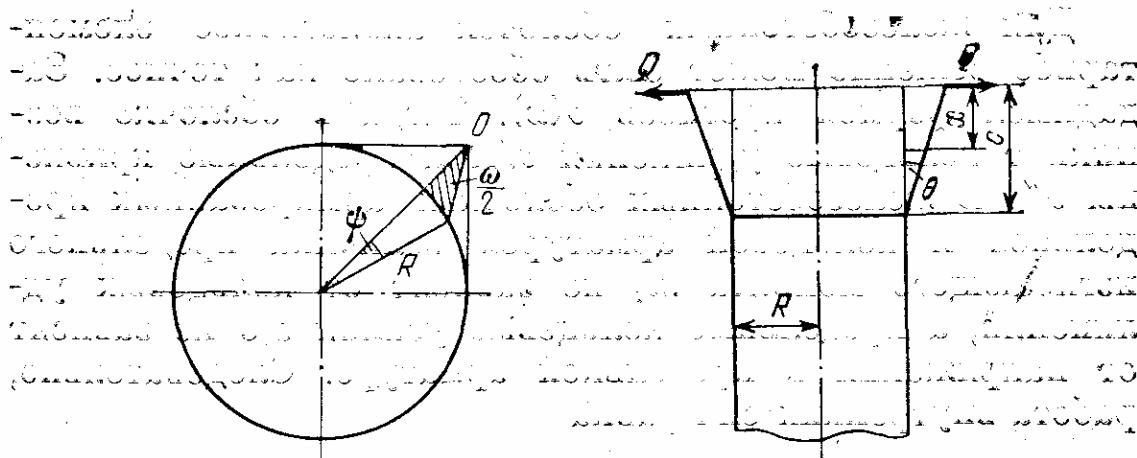


Рис. 177.

Рис. 178.

нии $x = c$ возникает при данной деформации кольцевой шарнир текучести с углом перелома θ .

Нетрудно подсчитать работу внутренних сил на данной деформации. Кольцевые удлинения дают

$$\sigma_t \delta \cdot 2\pi R \int_0^c (c - x) \frac{\theta}{R} dx = \pi \sigma_t \delta c^2 \theta$$

(δ — толщина оболочки), а перелом в кольцевом сечении —

$$\frac{2}{\sqrt{3}} m_t \cdot 2\pi R \theta = \frac{\pi \cdot R \delta^2 \sigma_t \theta}{\sqrt{3}}.$$

Таким образом, полная работа внутренних сил равна

$$T = -\pi \sigma_t \delta \theta (c^2 + R \delta / \sqrt{3}).$$

Работа внешних сил равна

$$V = 2\pi R c Q \theta.$$

Из равенства $V + T = 0$ получаем

$$Q = \frac{\sigma_t \delta}{2R} \left(c + \frac{R \delta}{\sqrt{3} \cdot c} \right).$$

Минимум Q достигается при

$$c = \sqrt{R \delta / \sqrt{3}} = 0,76 \sqrt{R \delta}$$

и равен

$$Q_{\text{пр}} = \frac{1}{4\sqrt{3}} \sigma_t \delta \sqrt{\frac{\delta}{R}} = 0,76 \sigma_t \sqrt{\delta^3 / R}. \quad (64:1)$$

Для железобетонных оболочек аналогичное элементарное решение может быть обосновано как точное. Зададимся формой прогибов $v(x)$. Тогда в оболочке возникнут кольцевые удлинения v/R и продольные кривизны v'' . В железобетонных оболочках, армированных продольной и кольцевой арматурой величина предельного изгибающего момента m_t не зависит от кольцевых удлинений, а предельные кольцевые усилия $\sigma_t \delta$ не зависят от напряжений в продольной арматуре. Следовательно, работа внутренних сил равна

$$T = -2\pi R \delta \int_0^c \sigma_t \frac{v}{R} dx - 2\pi R m_t \int_0^c |v''| dx.$$

Интегрирование здесь ведется в пределах деформированного участка оболочки $0 < x < c$. Работа внешних сил для рассматриваемой нагрузки равна

$$V = 2\pi R v(0) Q. \quad (61.2)$$

Истинной форме разрушения, отвечает минимум суммы двух интегралов:

$$\delta \sigma_t \int_0^c v dx + R m_t \int_0^c |v''| dx = \min \quad (v > 0). \quad (61.3)$$

Первый интеграл равен умноженной на $\delta \sigma_t / R$ площади ω эпюры прогибов v (рис. 179), а второй — умноженному на m_t приращению v' на участке $0 < x < c$, т. е. $m_t v'(0)$. Таким образом, при заданном $v(0)$ следует найти минимум суммы

$$-T/(2\pi) = \delta \sigma_t \omega + R m_t v'(0). \quad (61.4)$$

Если задаться $v'(0)$, то минимум ω будет достигаться при прямолинейной эпюре прогибов (рис. 178), поскольку кривизна v'' не может на протяжении $0 < x < c$ менять знак (при изменении знака кривизны второй интеграл в (61.3) даст уже не $v'(0)$, а большую величину). Таким образом, принятное предположение о конической

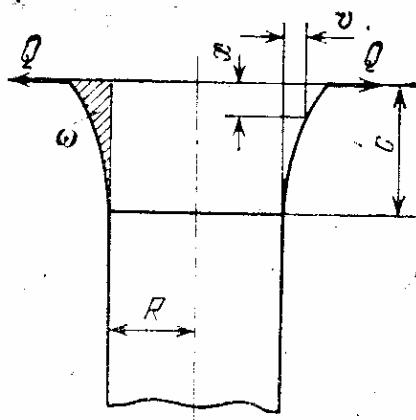


Рис. 179.

менять знак (при изменении знака кривизны второй интеграл в (61.3) даст уже не $v'(0)$, а большую величину). Таким образом, принятное предположение о конической

форме деформационной поверхности оболочки в ее верхней части соответствует истинной форме разрушения железобетонной оболочки, для которой, однако, решение несколько видоизменится за счет иных значений σ_t и m_t . Именно, полагая в (61.4) и (61.2) $v(0) = 1$, $\omega = c/2$, $v'(0) = 1/c$, получим, что

$$Q = \frac{\delta\sigma_t}{R} \cdot \frac{c}{2} + \frac{m_t}{c}$$

и

$$\min Q = Q_{\text{пр}} = 2 \sqrt{\frac{\delta\sigma_t m_t}{2R}}$$

при

$$c = \sqrt{\frac{2Rm_t}{\delta\sigma_t}}.$$

Принцип прямолинейности отрезков эпюры прогибов осесимметричной железобетонной цилиндрической оболочки может быть доказан другим способом. Работа такой оболочки аналогична работе жестко-пластической балки на жестко-пластическом основании. На участках прогибов этой балки отпор основания равен постоянной величине, которая вычитается из внешней нагрузки, и балка оказывается эквивалентной обычной балке с неизменяющейся в процессе деформации нагрузкой. При этом, как известно, в состоянии предельного равновесия ось балки представляет собой ломаную линию с прямолинейными участками, разделенными между собой шарнирами текучести.

На основании данного принципа предельное равновесие замкнутого железобетонного цилиндра с днищем (рис. 180) под действием равномерного внутреннего давления может быть найдено в виде двух усеченных

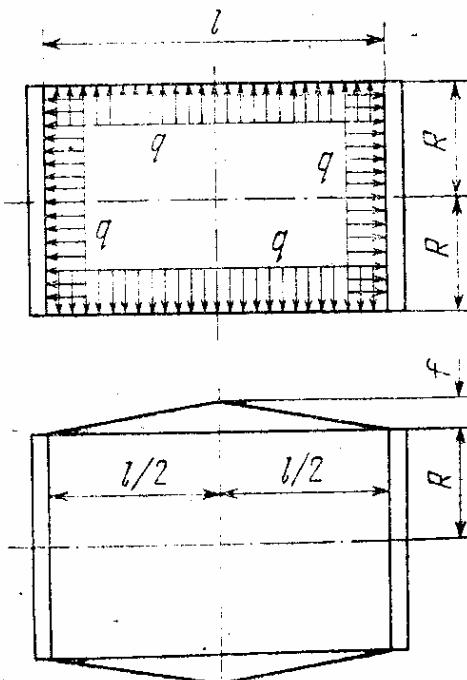


Рис. 180.

конусов с цилиндрическим шарниром текучести в середине оболочки. Считая днища нерастяжимыми в своей плоскости и не сопротивляющимися повороту их краев, получаем работу внутренних сил

$$T = -2\pi R m_t \frac{4f}{l} - 2\pi \delta \sigma_t \frac{fl}{2}.$$

Здесь $4f/l$ — угол поворота в цилиндрическом шарнире текучести, $fl/2$ — площадь эпюры прогибов, f — прогиб в среднем сечении.

Работа внешних сил равна

$$V = 2\pi R q \cdot \frac{fl}{2}.$$

Из условия $T + V = 0$ находим

$$q_{\text{пр}} = \frac{8m_t}{l^2} + \frac{\delta \sigma_t}{R}.$$

При бесконечно большой длине l имеем

$$q_{\text{пр}} = \delta \sigma_t / R.$$

Г л а в а 12

ПРИМЕНЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ К РАСЧЕТУ ОБОЛОЧЕК

§ 62. Расчет оболочек вращения симплекс-методом [105]

Рассмотрим теперь предельное равновесие осесимметричных оболочек вращения. Будем считать возможным в состоянии разрушения образование линий сосредоточенных деформаций по параллелям $1, 2, 3\dots$ (рис. 181);

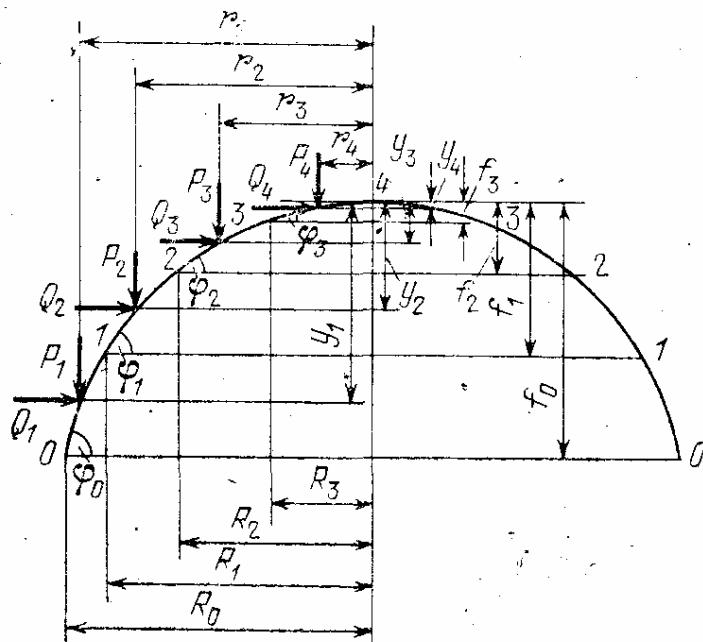


Рис. 181.

между этими линиями предполагаем растяжение или сжатие в кольцевом направлении. Верхнюю линию сосредоточенных деформаций будем считать выродившейся в полюс оболочки. Присвоим ей номер k . По линиям сосредоточенных деформаций оболочка может испытывать сосредоточенное меридиональное удлинение $\bar{\epsilon}_i$ и угол поворота θ_i .

Далее, как обычно в численных методах, будем полагать, что внешняя нагрузка сосредоточена вдоль средних линий, разделяющих меридиональную дугу между двумя соседними линиями сосредоточенных деформаций пополам. Для вычисления работы внешних сил определим горизонтальные v и вертикальные u перемещения точек приложения внешних усилий в каждом поясе оболочки между кольцевыми линиями сосредоточенных деформаций:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \vartheta_0 \cos \varphi_0 + \theta_0 (f_0 - y_1), \\ v_2 &= \vartheta_0 \cos \varphi_0 + \vartheta_1 \cos \varphi_1 + \theta_0 (f_0 - y_2) + \theta_1 (f_1 - y_2), \\ v_3 &= \vartheta_0 \cos \varphi_0 + \vartheta_1 \cos \varphi_1 + \vartheta_2 \cos \varphi_2 + \theta_0 (f_0 - y_3) + \\ &\quad + \theta_1 (f_1 - y_3) + \theta_2 (f_2 - y_3), \\ u_1 &= -\vartheta_0 \sin \varphi_0 + \theta_0 (R_0 - r_1), \\ u_2 &= -\vartheta_0 \sin \varphi_0 - \vartheta_1 \sin \varphi_1 + \theta_0 (R_0 - r_2) + \theta_1 (R_1 - r_2), \\ u_3 &= -\vartheta_0 \sin \varphi_0 - \vartheta_1 \sin \varphi_1 - \vartheta_2 \sin \varphi_2 + \theta_0 (R_0 - r_3) + \\ &\quad + \theta_1 (R_1 - r_3) + \theta_2 (R_2 - r_3), \end{aligned} \right\} \quad (62.1)$$

(Обозначения приведены на рис. 179.) При этом получаем следующее выражение для работы внешних сил:

$$V = 2\pi \sum_{i=1}^k r_i (P_i u_i + Q_i v_i), \quad (62.2)$$

где P_i и Q_i — вертикальные и горизонтальные составляющие внешней нагрузки.

Для определения работы T_1 внутренних сил на меридиональных удлинениях учтем, что при малой толщине оболочки отношение ϑ_i/θ_i по абсолютной величине, как правило, больше $\delta/2$, где δ — толщина оболочки. Иными словами, полагаем, что сосредоточенные удлинения не меняют знака по толщине оболочки. При большом количестве линий сосредоточенных деформаций единичные нарушения этого условия не играют существенной роли. При этом работа T_1 равна

$$T_1 = -2\pi \sum_{i=0}^{k-1} R_i \delta_i |\vartheta_i| \sigma_t^*, \quad (62.3)$$

т. е. повороты θ_i не оказывают на нее влияние, $\sigma_t^* = \sigma_t$ — пределу текучести на растяжение в меридиональном направлении, если $\vartheta_i > 0$, и $\sigma_t^* = \sigma'_t$ — пределу текучести в том же направлении при сжатии, если $\vartheta_i < 0$.

Определяя работу T_2 внутренних сил на кольцевых удлинениях, найдем приближенное выражение T_2 через средние кольцевые удлинения в каждом поясе оболочки $\varepsilon_i = v_i/r_i$:

$$T_2 = -2\pi \sum_{i=1}^k F_i |v_i| \sigma_t^0, \quad (62.4)$$

где F_i — площади меридиональных сечений каждого пояса оболочки, $\sigma_t^0 = \sigma_t$ — пределу текучести в кольцевом направлении при растяжении, если $v_i > 0$; $\sigma_t^0 = \sigma'_t$ — пределу текучести в том же направлении при сжатии, если $v_i < 0$.

Потенциальная энергия системы равна

$$U = V + T_1 + T_2 = \text{min}. \quad (62.5)$$

Учитывая (62.1) и (62.4), представим V и T в виде

$$\begin{aligned} V = & 2\pi r_1 \{P_1[\theta_0(R_0 - r_1) - \vartheta_0 \sin \varphi_0] + \\ & + Q_1[\theta_0(f_0 - y_1) + \vartheta_0 \cos \varphi_0]\} + 2\pi r_2 \{P_2[\theta_0(R_0 - r_2) + \\ & + \theta_1(R_1 - r_2) - \vartheta_0 \sin \varphi_0 - \vartheta_1 \sin \varphi_1] + Q_2[\theta_0(f_0 - y_2) + \\ & + \theta_1(f_1 - y_2) + \vartheta_0 \cos \varphi_0 + \vartheta_1 \cos \varphi_1]\} + 2\pi r_3 \{P_3[\theta_0(R_0 - r_3) + \\ & + \theta_1(R_1 - r_3) + \theta_2(R_2 - r_3) - \vartheta_0 \sin \varphi_0 - \vartheta_1 \sin \varphi_1 - \\ & - \vartheta_2 \sin \varphi_2] + Q_3[\theta_0(f_0 - y_3) + \theta_1(f_1 - y_3) + \theta_2(f_2 - y_3) + \\ & + \vartheta_0 \cos \varphi_0 + \vartheta_1 \cos \varphi_1 + \vartheta_2 \cos \varphi_2]\} + \\ & + \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$T = -2\pi \left(\sigma_t^* \sum_{i=0}^{k-1} R_i \delta_i a_i + \sigma_t^0 \sum_{i=1}^k F_i b_i \right),$$

причем величины a_i и b_i подчиняются условиям

$$a_i \geq \vartheta_i, \quad a_i \geq -\rho \vartheta_i, \quad b_i \geq v_i, \quad b_i \geq -\rho v_i, \quad (62.6)$$

где

$$\rho = \sigma'_t / \sigma_t.$$

Итак, требуется найти минимум целевой функции U (62.5) при ограничениях (62.6). Дополнительным

является условие предельного равновесия

$$U = U_{\min} = 0.$$

Таким образом, задача свелась снова к параметрическому линейному программированию. Соответствующая таблица симплекс-метода для данного случая приводится в табл. 9. В той таблице предстоит сначала путем ряда жордановых преобразований избавиться от величин ϑ_i и θ_i ; в верхней строке, поскольку эти величины могут иметь любые знаки.

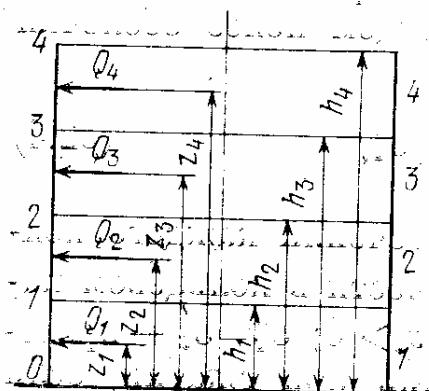


Рис. 182.

Для цилиндрических оболочек вращения, нагруженных только горизонтальной нагрузкой (резервуаров), задача упрощается, так как здесь приходится учитывать только углы поворота θ_i и горизонтальные смещения v_i ,

для которых имеем формулы

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= v_0 + \theta_0 z_1, \\ v_2 &= v_0 + \theta_0 z_2 + \theta_1 (z_2 - h_1), \\ v_3 &= v_0 + v_0 z_3 + \theta_0 z_3 + \theta_1 (z_3 - h_1) + \theta_2 (z_3 - h_2), \end{aligned} \right\} \quad (62.7)$$

(обозначения приведены на рис. 182). Работа внешних сил здесь равна

$$V = \sum_{i=1}^{n-1} Q_i F_i v_i,$$

а внутренних сил

$$T = -2\pi R \sum_{i=0}^{n-1} m_t |\theta_i| - 2\pi \sum_{i=1}^n \sigma_t F_i |v_i|$$

(m_t — предельный момент в кольцевых шарнирах текучести, остальные обозначения прежние). Вводя ограничения

$$\alpha_i \geq \theta_i, \quad \alpha_i \geq -\theta_i, \quad \beta_i \geq v_i, \quad \beta_i \geq -v_i,$$

Таблица 9

	$-a_0$	$-a_1$	$-b_1$	$-b_2$	$-\vartheta_0$	$-\vartheta_1$	$-\theta_0$	$-\theta_1$	φ
A_1	-1	-1	-1	-1	1	1	$f_0 - y_1$	$f_1 - y_2$	
A_2	-1	-1	-1	-1	$-\rho$	$-\rho$	$\cos \varphi_0$	$\cos \varphi_1$	
B_1							$\cos \varphi_0$	$\cos \varphi_1$	
B_2							$\cos \varphi_0$	$\cos \varphi_1$	
C_1							$-\rho \cos \varphi_0$	$-\rho \cos \varphi_1$	
C_2							$-\rho \cos \varphi_0$	$-\rho \cos \varphi_1$	
D_1							-1	-1	
D_2							-1	-1	
							$F_1 \sigma_T^0$	$F_2 \sigma_T^0$	
							$R_1 \delta_0 \sigma_T^{*}$	$R_1 \delta_1 \sigma_T^{*}$	
							$R_0 \delta_0 \sigma_T^{*}$	$R_0 \delta_1 \sigma_T^{*}$	
							$\frac{T}{2\pi} \left\{ \begin{array}{l} V \\ \frac{V}{2\pi} \end{array} \right\}$	$\frac{T}{2\pi} \left\{ \begin{array}{l} V \\ \frac{V}{2\pi} \end{array} \right\}$	

Таблица 10

	$-\theta_0$	$-\theta_1$	$-\theta_2$	α_0	$-\alpha_1$	$-\alpha_2$	$-\beta_0$	$-\beta_1$	$-\beta_2$	\cdot	\cdot
A_1	1										
A_2		1									
A_3			1								
B_1				1							
B_2					1						
B_3						1					
C_1							1				
C_2								1			
C_3									1		
D_1										1	
D_2											1
D_3											
$\frac{T}{2\pi}$											
$\frac{V}{2\pi}$	$-Q_1 F_1 z_1$	$-Q_2 F_2 (z_2 - h)$	$-Q_3 F_3 \times$	$Rm_T^{(0)}$	$Rm_T^{(1)}$	$Rm_T^{(2)}$	$F_1 \sigma_T$	$F_2 \sigma_T$	$F_3 \sigma_T$	\cdot	\cdot
	$-Q_2 F_2 z_2$	$-Q_3 F_3 \times$	$\times (z_3 - h_2)$							$-Q_1 F_1$	
	$-Q_3 F_3 z_3$	$\times (z_3 - h_1)$								$-Q_2 F_2$	
										$-Q_3 F_3$	

запишем функцию цели в виде

$$U = V + T = \sum_{i=1}^n Q_i F_i v_i - 2\pi R \sum_{i=0}^{n-1} m_t \alpha_i - 2\pi \sum_{i=1}^n \sigma_t F_i \beta_i.$$

Тогда таблица симплекс-метода с учетом (62.7) получает вид табл. 10. При отсутствии горизонтальных смещений нижнего сечения оболочки $v_0 = 0$ и последний столбец выпадает.

§ 63. Расчет арок и арочных сводов [106]

Покажем возможность применения линейного программирования к расчету несущей способности арок и цилиндрических сводов, работающих в условиях плоской деформации.

Будем считать приближенно свод двухслойным при различной работе верхней и нижней кромок на сжатие и на растяжение. Один слой образует арматура, а другой — сжатая зона бетона. Если же все сечение целиком сжато, то разделение толщины свода на верхний и нижний слои является условным и служит лишь средством упрощения расчета. Каждый слой считаем бесконечно тонким, но имеющим конечные предельные погонные усилия на сжатие и растяжение: N_b^- и N_b^+ для верхнего и соответственно N_n^- и N_n^+ — для нижнего слоев. Эти предельные усилия, так же как и расстояние между слоями c , могут быть, вообще говоря, переменными по длине свода.

Разделим дугу свода на n частей сечениями, в которых будем предполагать возможным образование со средоточенных продольных деформаций $\bar{\varepsilon}_i^b$ для верхнего $\bar{\varepsilon}_i^n$ для нижнего слоев. Между этими сечениями участки свода будем считать абсолютно жесткими. При достаточном числе участков n погрешность такого представления невелика.

Работа внутренних сил на деформациях верхнего и нижнего слоев отрицательна, независимо от знака деформации. Введем поэтому величины e_i^b и e_i^n , подчиняющиеся

неравенствам

$$\left. \begin{array}{l} e_i^B \geq \mathcal{E}_i^B, \quad e_i^B \geq -\xi \mathcal{E}_i^B, \\ e_i^H \geq \mathcal{E}_i^H, \quad e_i^H \geq -\psi \mathcal{E}_i^H, \end{array} \right\} \quad (63.1)$$

где

$$\xi = N_B^- / N_B^+, \quad \psi = N_H^- / N_H^+.$$

Тогда работа внутренних сил выразится формулой

$$T = - \sum_{i=0}^n (e_i^B N_B^+ + e_i^H N_H^+).$$

Здесь учитывается, что в результате проведенного расчета одно из каждой пары неравенств (63.1) заменится равенством.

В целях некоторого упрощения дальнейших формул целесообразно произвести следующую замену переменных \mathcal{E}_i^B и \mathcal{E}_i^H :

$$\mathcal{E}_i^B = e_i + \frac{c}{2} \theta_i, \quad \mathcal{E}_i^H = e_i - \frac{c}{2} \theta_i,$$

где e_i представляет собой сосредоточенное осевое удлинение в сечении i , а θ_i — угол перелома оси арки в этом сечении. При этом неравенства примут вид

$$\left. \begin{array}{l} e_i^B \geq e_i + \frac{c}{2} \theta_i, \quad e_i^B \geq -\xi e_i - \xi \frac{c}{2} \theta_i, \\ e_i^H \geq e_i - \frac{c}{2} \theta_i, \quad e_i^H \geq -\psi e_i + \psi \frac{c}{2} \theta_i. \end{array} \right\} \quad (63.2)$$

Для определения работы внешних сил определим горизонтальные и вертикальные перемещения точек приложения равнодействующих нагрузок, приложенных к каждому участку арки, возникающие в результате появления сосредоточенных деформаций e_i и θ_i .

Используя обозначения, показанные на рис. 183, получаем

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = e_0 \cos \varphi_0 + \theta_0 (f_0 - y_1), \\ u_2 = e_0 \cos \varphi_0 + e_1 \cos \varphi_1 + \theta_0 (f_0 - y_2) + \theta_1 (f_1 - y_2), \\ u_3 = e_0 \cos \varphi_0 + e_1 \cos \varphi_1 + e_2 \cos \varphi_2 + \theta_0 (f_0 - y_3) + \\ \quad + \theta_1 (f_1 - y_3) + \theta_2 (f_2 - y_3), \\ \dots \end{array} \right\} \quad (63.3)$$

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= -e_0 \sin \varphi_0 + \theta_0 (a_0 - x_1), \\ v_2 &= -e_0 \sin \varphi_0 - e_1 \sin \varphi_1 + \theta_0 (a_0 - x_2) + \theta_1 (a_1 - x_2), \\ v_3 &= -e_0 \sin \varphi_0 - e_1 \sin \varphi_1 - e_2 \sin \varphi_2 + \theta_0 (a_0 - x_3) + \\ &\quad + \theta_1 (a_1 - x_3) + \theta_2 (a_2 - x_3), \\ &\dots \end{aligned} \right\} (63.3)$$

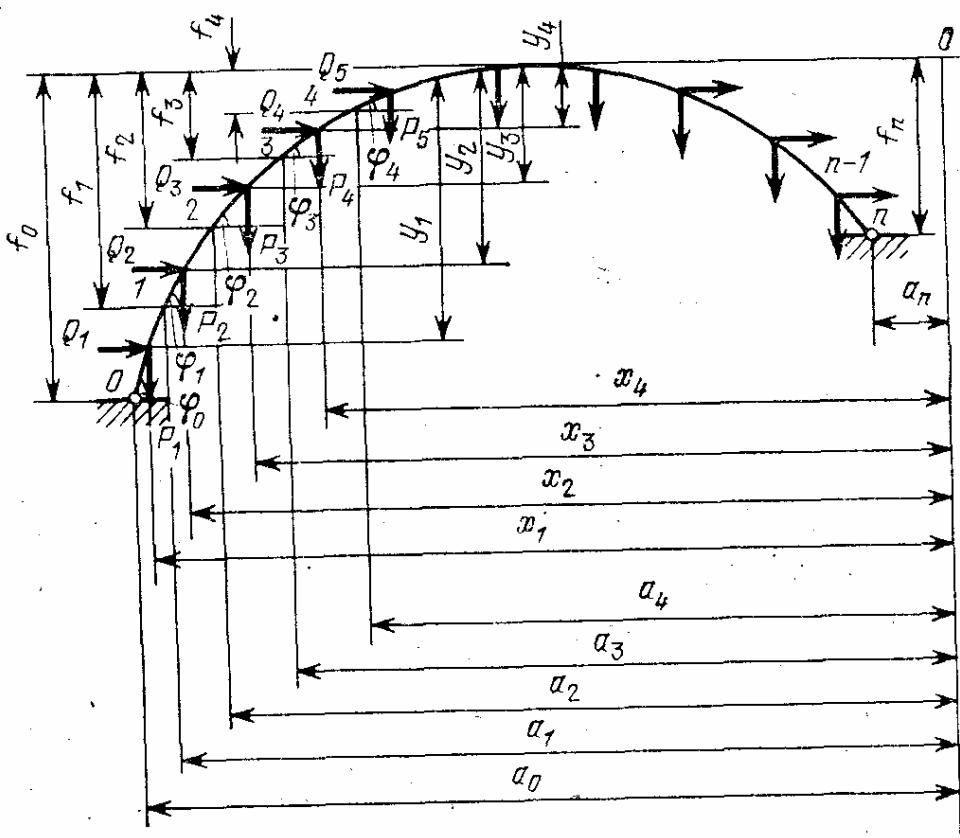


Рис. 183.

Работа внешних сил равна

$$V = \sum_{i=1}^n (P_i v_i + Q_i u_i). \quad (63.4)$$

Подставляя сюда (63.3) и группируя члены, получим

$$V = [(Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots) \cos \varphi_0 - (P_1 + P_2 + P_3 + \dots) \sin \varphi_0] e_0 +$$

$$+ [(Q_2 + Q_3 + \dots) \cos \varphi_1 - (P_2 + P_3 + \dots) \sin \varphi_1] e_1 +$$

$$+ [(Q_3 + \dots) \cos \varphi_2 - (P_3 + \dots) \sin \varphi_3] e_3 +$$

$$+ \dots + \dots + \dots +$$

$$\begin{aligned}
 & + [Q_1(f_0 - y_1) + Q_2(f_0 - y_2) + Q_3(f_0 - y_3) + \dots \\
 & \dots + P_1(a_0 - x_1) + P_2(a_0 - x_2) + P_3(a_0 - x_3) + \dots] \theta_0 + \\
 & + [Q_2(f_1 - y_2) + Q_3(f_1 - y_3) + \dots + P_2(a_1 - x_2) + \\
 & + P_3(a_1 - x_3) + \dots] \theta_1 + [Q_3(f_2 - y_3) + \dots \\
 & \dots + P_3(a_2 - x_3) + \dots] \theta_2 + \dots
 \end{aligned}$$

Итак, имеем задачу линейного программирования, где функцией цели является

$$V + T = \min, \quad (63.5)$$

причем V и T выражаются через переменные e_i и θ_i . Ограничениями являются неравенства (63.2), число которых равно $4(n+1)$. Кроме того, должны выполняться условия взаимности деформаций

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=0}^n [e_i \cos \varphi_i + \theta_i (f_n - f_i)] = 0, \\
 & \sum_{i=0}^n [-e_i \sin \varphi_i + \theta_i (a_n - a_i)] = 0,
 \end{aligned} \quad (63.6)$$

где a_n и f_n — координаты правой опоры арки. Уравнениями (63.6) можно воспользоваться для исключения каких-либо двух переменных, например e_n и θ_n . Но проще их ввести в число ограничений в качестве «нуль-строк», оперируя с ними соответственно алгоритму симплекс-метода [60].

Для определения разрушающей нагрузки следует выразить все внешние силы через один параметр, например P , в виде

$$P_i = P p_i, \quad Q_i = P q_i,$$

где p_i и q_i — безразмерные постоянные величины, характеризующие распределение нагрузок. Поскольку параметр P входит в функцию цели (62.5), следует решать задачу параметрического программирования, причем дополнительным условием будет

$$V + T = 0. \quad (63.7)$$

Это условие выражает равенство по абсолютной величине работ внешних и внутренних сил.

Алгоритм параметрического линейного программирования включает в себя проверку на каждом этапе перехода к новому опорному плану непротиворечия условия (63.7) условиям положительности всех коэффициентов строки цели. При этом общее количество вычислительных операций почти не увеличивается по сравнению с обычным симплекс-методом.

В процессе нахождения оптимального плана автоматически решается также двойственная задача линейного программирования, которая приводит к получению величин внутренних усилий во всех деформируемых сечениях обоих слоев свода. Эти внутренние усилия равны предельным усилиям в тех сечениях, где появляются сосредоточенные деформации, и меньше предельных там, где деформации оказываются равными нулю.

§ 64. Расчет цилиндрических сводов-оболочек методом линейного программирования [103]

Рассмотрим задачу расчета цилиндрического свода-оболочки, оперто го на две торцевые диафрагмы. Продольные борта оболочки могут свободно свешиваться или быть оперты любым образом. Будем считать, что длина оболочки несколько превышает ее ширину, т. е. что оболочка относится к категории оболочек средней длины. Для расчета такой оболочки зададимся классом форм разрушения, удобным для применения линейного программирования.

Примем форму разрушения с сосредоточенными продольными деформациями в среднем сечении оболочки и с цилиндрическими шарнирами текучести вдоль образующих, расположенными настолько часто, что участок оболочки между соседними шарнирами текучести можно считать плоской пластинкой (рис. 184). Каждая такая пластина благодаря малой толщине почти не сопротивляется продольным изгибающим и крутящим моментам, и поэтому влиянием этих моментов можно пренебречь. Кроме того, будем считать оболочку несжимаемой в поперечном направлении, так что в цилиндрических шарнирах текучести возникают только углы поворота, а со средоточенные деформации поперечного удлинения или сжатия отсутствуют. В промежутках между шарнирами

текущести и средним поперечным сечением оболочки пластинки считаются абсолютно жесткими в своей плоскости и на изгиб в поперечном направлении. Такая кинематическая схема, но без сосредоточенных продольных деформаций в одном сечении была использована В. З. Власовым в его практическом методе расчета сводов-оболочек по упругой стадии.

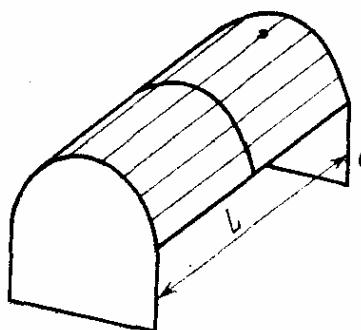


Рис. 184.

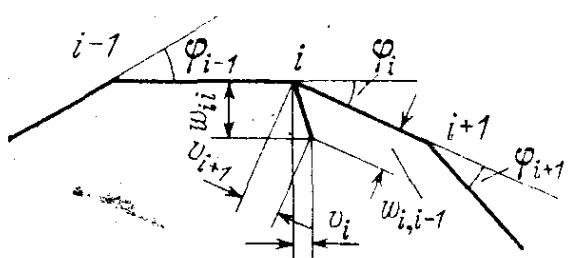


Рис. 185.

В качестве параметров формы разрушения возьмем проекции перемещений каждой пластинки в среднем сечении оболочки на плоскость этой пластинки v_i . Будем нумеровать цилиндрические шарниры текучести, которые сокращенно назовем ребрами, той же цифрой, что и предшествующая им пластинка или, сокращенно, грань (рис. 185). Тогда полное перемещение i -го ребра может быть представлено двумя составляющими v_i и $w_{i,i}$, направленными вдоль и перпендикулярно i -й грани, или же составляющими v_{i+1} , $w_{i+1,i}$, направленными вдоль и перпендикулярно грани $i+1$. (Первый индекс у w относится к грани, а второй к ребру.) Обозначим угол между гранями i и $i+1$ через φ_i . Тогда составляющие v_i , $w_{i,i}$ и v_{i+1} , $w_{i+1,i}$ можно выразить друг через друга следующим образом:

$$v_{i+1} \cos \varphi_i - w_{i+1,i} \sin \varphi_i = v_i,$$

$$v_i \cos \varphi_i + w_{i,i} \sin \varphi_i = v_{i+1};$$

отсюда

$$w_{i+1,i} = -\frac{v_i}{\sin \varphi_i} + v_{i+1} \operatorname{ctg} \varphi_i, \quad w_{i,i} = \frac{v_{i+1}}{\sin \varphi_i} - v_i \operatorname{ctg} \varphi_i.$$

Поворот каждой грани в среднем сечении оболочки

равен

$$\psi_i = \frac{w_{i,i} - w_{i,i-1}}{b_i} = \frac{1}{b_i} \left[\frac{v_{i+1}}{\sin \varphi_i} - v_i (\operatorname{ctg} \varphi_i + \operatorname{ctg} \varphi_{i+1}) + \right. \\ \left. + \frac{v_{i-1}}{\sin \varphi_{i-1}} \right],$$

где b_i — ширина грани. Взаимный угол поворота в i -м ребре равен

$$\theta_i = \psi_{i+1} - \psi_i = \frac{v_{i+2}}{b_{i+1} \sin \varphi_{i+1}} - v_{i+1} \left(\frac{\operatorname{ctg} \varphi_{i+1} + \operatorname{ctg} \varphi_i}{b_{i+1}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{b_i \sin \varphi_i} \right) + v_i \left(\frac{\operatorname{ctg} \varphi_i + \operatorname{ctg} \varphi_{i-1}}{b_i} + \frac{1}{b_{i+1} \sin \varphi_i} \right) - \\ - \frac{v_{i-1}}{b_i \sin \varphi_{i-1}}. \quad (64.1)$$

Выразим теперь сосредоточенные предельные деформации по линии каждого ребра через перемещения v_i . Так как каждая грань ломается только в середине пролета, то угол ее перелома α_i равен (рис. 186)

$$\alpha_i = \frac{4}{L} v_i;$$

его можно выразить формулой

$$\alpha_i = \frac{e_i - e_{i-1}}{b_i},$$

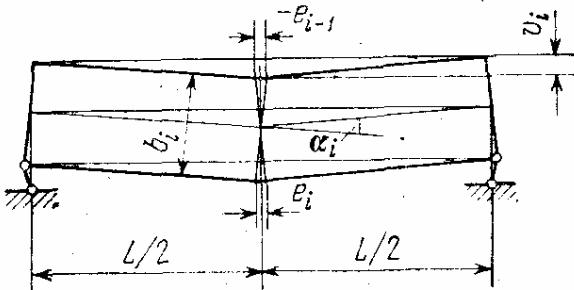


Рис. 186.

где e_i и e_{i-1} — сосредоточенные продольные удлинения вдоль i -го и $(i-1)$ -го ребра (рис. 186). Таким образом, имеем

$$e_i - e_{i-1} = \frac{4b_i}{L} v_i; \quad v_i = \frac{L}{4b_i} (e_i - e_{i-1}). \quad (64.2)$$

Если оболочка оперта только по торцам, то, включая в число продольных ребер ее свободные края, мы будем иметь число продольных деформаций e_i на единицу

больше числа перемещений v_i . Поэтому целесообразно в дальнейшем в качестве независимых параметров формы разрушения брать не прогибы v_i , а сосредоточенные удлинения вдоль e_i . Тогда, подставляя в (64.1) (64.2), получим

$$\theta_i = r_{i,i+2}e_{i+2} + r_{i,i+1}e_{i+1} + r_{i,i}e_i + r_{i,i-1}e_{i-1} + r_{i,i-2}e_{i-2}, \quad (64.3)$$

где

$$\begin{aligned} r_{i,i+2} &= \frac{L}{4b_{i+2}b_{i+1}\sin\varphi_{i+1}}, \\ r_{i,i+1} &= -\frac{L}{4} \left(\frac{1}{b_{i+2}b_{i+1}\sin\varphi_{i+1}} + \frac{\operatorname{ctg}\varphi_{i+1} + \operatorname{ctg}\varphi_i}{b_{i+1}^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{b_{i+1}b_i\sin\varphi_i} \right), \\ r_{i,i} &= \frac{L}{4} \left(\frac{2}{b_{i+1}b_i\sin\varphi_i} + \frac{\operatorname{ctg}\varphi_{i+1} + \operatorname{ctg}\varphi_i}{b_{i+1}^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\operatorname{ctg}\varphi_i + \operatorname{ctg}\varphi_{i-1}}{b_i^2} \right), \\ r_{i,i-1} &= -\frac{L}{4} \left(\frac{1}{b_{i+1}b_i\sin\varphi_i} + \frac{\operatorname{ctg}\varphi_i + \operatorname{ctg}\varphi_{i-1}}{b_i^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{b_ib_{i-1}\sin\varphi_{i-1}} \right), \\ r_{i,i-2} &= \frac{L}{4b_ib_{i-1}\sin\varphi_{i-1}}. \end{aligned}$$

Подсчитаем работу внутренних сил при заданной форме разрушения. В продольных шарнирах текучести образуется постоянный погонный момент m_t , который при симметричном армировании оболочки по толщине будет одинаковым по абсолютной величине как в случае положительных, так и в случае отрицательных углов поворота θ_i . Поскольку двугранный угол поворота смежных граней линейно изменяется по полуупролету оболочки от своей максимальной величины θ_i в среднем сечении до нуля у опорных диафрагм, то работа моментов для всех

ребер i равна

$$T_1 = - \sum \frac{Lm_t}{2} |\theta_i|.$$

На сосредоточенных продольных деформациях e_i , в случае положительного их знака произведут работу продольные растягивающие усилия $\delta\sigma_t$, где δ — толщина оболочки, σ_t — приведенный предел текучести на растяжение (учитывающий продольное армирование). При изменении знака деформации e_i работа производится сжимающими усилиями $\delta\sigma'_t$, где σ_t — приведенный предел текучести на сжатие (учитывающий сопротивление и арматуры, и бетона).

Принимая разные значения пределов текучести σ_t и σ'_t , мы учитываем возможность образования трещин по среднему сечению оболочки в растянутых зонах. Интегрируя по сечению оболочки численным методом трапеций, получим работу предельных сил на деформациях в виде суммы

$$T_2 = - \delta\sigma_t \sum_{+} |e_i| \frac{b_{i+1} + b_i}{2} - \delta\sigma'_t \sum_{-} |e_i| \frac{b_{i+1} + b_i}{2},$$

где в первом члене суммирование производится по всем растянутым ребрам, а во втором по сжатым.

Работу внешних сил легко подсчитать после разложения внешней нагрузки, которую приближенно можно считать сосредоточенной вдоль ребер, на направления, лежащие в плоскостях смежных граней (рис. 187). Тогда, суммируя алгебраически усилия, передающиеся на каждую грань, и обозначая эти суммы через Q_i , найдем, что работа внешних сил равна

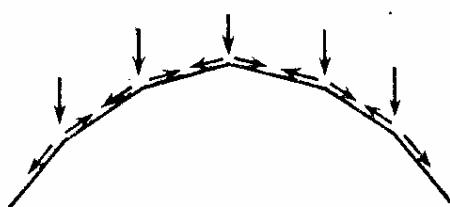


Рис. 187.

$$V = \sum \left[\int_0^{L/2} Q_i v_i \frac{2x}{L} dx + \int_{L/2}^L Q_i v_i \frac{2(L-x)}{L} dx \right]. \quad (64.4)$$

Здесь учтено, что эпюры прогибов каждой грани вдоль пролета оболочки имеют вид треугольника (рис. 186).

Вводя обозначения для параметров внешней нагрузки

$$P_i = \frac{2}{L} \left[\int_0^{L/2} Q_i x dx + \int_{L/2}^L Q_i (L - x) dx \right], \quad (64.5)$$

можно записать выражение (64.4) с учетом (64.2) в виде

$$V = \sum P_i v_i = \frac{L}{4} \sum P_i \frac{e_i - e_{i-1}}{b_i}.$$

Общая величина работы как внешних, так и внутренних сил, представляющая потерю потенциальной энергии системы, выразится формулой

$$U = V + T_1 + T_2 = \frac{L}{4} \sum \frac{P_i}{b_i} (e_i - e_{i-1}) - \frac{Lm_t}{2} \sum |\theta_i| - \\ - \frac{\delta\sigma_t}{2} \sum_+ |e_i| (b_{i+1} + b_i) - \frac{\delta\sigma_t}{2} \sum_+ |e_i| (b_{i+1} - b_i). \quad (64.6)$$

Учитывая (64.3), заметим, что это выражение представляет собой линейную однородную функцию независимых переменных e_i . Можно задаваться одним из этих переменных и тогда остальные нужно будет подобрать так, чтобы величина V принимала максимальное значение. При этом форма разрушения будет наиболее близка к истинной.

Сведем эту задачу к задаче линейного программирования. Для этого запишем выражение (64.6) в виде

$$U = \frac{L}{4} \sum e_i \left(\frac{P_i}{b_i} - \frac{P_{i+1}}{b_{i+1}} \right) + \frac{Lm_t}{2} \sum \theta_i^* - \\ - \frac{\sigma_t \delta}{2} \sum (b_{i+1} + b_i) e_i^* = \max, \quad (64.7)$$

где θ_i^* — наибольшая из величин θ_i и $-\theta_i$, а e_i^* — наибольшая из величин e_i и $-\rho e_i$, где $\rho = \sigma_t / \sigma_T$. Таким

образом, должны удовлетворяться условия

$$\left. \begin{aligned} a_i &= \theta_i^* - \theta_i = \theta_i^* - \sum_{k=i-2}^{i+2} r_{ik} e_k \geq 0, \\ b_i &= \theta_i^* + \theta_i = \theta_i^* + \sum_{k=i-2}^{i+2} r_{ik} e_k \geq 0, \\ c_i &= e_i^* - e_i \geq 0, \\ d_i &= e_i^* + \rho e_i \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (64.8)$$

Условия (64.7) и (64.8) дают возможность определить форму разрушения при помощи симплекс-метода. Для определения параметра разрушающей нагрузки необходимо добавить условие

$$U = 0,$$

которое сводит задачу к параметрическому линейному программированию, алгоритм которого также хорошо известен. Ввиду однородности задачи одной из неизвестных в первой части (64.7) следует задаваться, положив, например, $\theta_1^* = 1$.

Таким образом, для симплекс-метода получаем табл. 11/1. Здесь принято — $\theta_1^* = 1$, в соответствии с чем второй столбец слева считается столбцом свободных членов. Величины θ_i^* и e_i^* неотрицательны, поэтому их можно оставить в верхней строке, что же касается деформаций e_i , которые могут иметь любые знаки, то их следует перебросить в левый столбец, производя жордановы исключения с элементами, равными единице и помещенными в табл. 11/1 в рамки.

Получим табл. 11/2, где строки e_i служат лишь для определения истинных деформаций по найденным в результате расчета вспомогательным величинам θ_i^* , e_i^* и c_i , удовлетворяющим оптимальному плану. Поскольку коэффициенты столбца свободных членов — $\theta_1^* = 1$ табл. 11/2 не положительны, то опорный план получается сразу в виде равенства нулю величин $\theta_2^*, \theta_3^*, \dots, \theta_{n-1}^*, e_i^*$ и c_i ($i = 1, 2, \dots, n$) (n — число граней, на которые разбита оболочка) и табл. 11/2 является исходной для получения оптимального плана.

	θ_1^*	$-\theta_2^*$	$-\theta_3^*$.	.	e_0^*	e_1^*	
a_1	1							
a_2		-1						
a_3			-1					
.								
a_c	1					-1		
b_1		-1						
b_2			-1					
b_3				.		-1		
c_0							-1	
c_1							.	
.							.	
c_7							-1	
d_0							-1	
d_1								-1
.								
d_7								
U	$-0,5Lm_T$	$0,5Lm_T$	$0,5Lm_T$.	$0,5Lm_T$	$0,5\delta\sigma_T b_1$	$0,5\delta\sigma_T \times$ $\times (b_1 + b_2)$	

Таблица 11/1

e_7^*	$-e_0$	$-e_1$	$-e_2$	$-e_3$	\cdot	$-e_7$
	r_{10}	r_{11}	r_{12}	r_{13}	.	
	r_{20}	r_{21}	r_{22}	r_{23}	.	
		r_{31}	r_{32}	r_{33}	.	
			*	*	.	*
					.	r_{67}
	$-r_{10}$	$-r_{11}$	$-r_{12}$	$-r_{13}$.	
	$-r_{20}$	$-r_{21}$	$-r_{22}$	$-r_{23}$.	
		$-r_{31}$	$-r_{32}$	$-r_{33}$.	
			*	*	.	
					.	r_{67}
	[1]					
		[1]				
			[1]			
				[1]		
	$-p$					
		$-p$				
			*			
	-1					
	$0,5\delta\sigma_T b_7$	$-\frac{L}{4} \cdot \frac{P_1}{b_1} \left \frac{L}{4} \left(\frac{P_1}{b_1} - \frac{P_2}{b_2} \right) \right \frac{L}{4} \left(\frac{P_2}{b_2} - \frac{P_3}{b_3} \right) \left \frac{L}{4} \left(\frac{P_3}{b_3} - \frac{P_4}{b_4} \right) \right $.	$-\frac{L}{4} \frac{P_7}{b_7}$		

	θ_1^*	$-\theta_2^*$	$-\theta_3^*$.	$-\theta_6^*$	$-e_0^*$	$-e_1^*$
a_1	1					r_{10}	r_{11}
a_2		-1				r_{20}	r_{21}
a_3			-1				r_{31}
.				.			.
a_6					-1		
b_1	1					$-r_{10}$	$-r_{11}$
b_2		-1		.		$-r_{20}$	$-r_{21}$
b_3			-1	.			$-r_{31}$
.				.			
b_7					-1		
e_0						-1	
e_1							-1
.							
e_7							
d_0						-1 - ρ	
d_1							-1 - ρ
.							
d_7							
U	$-0,5L$	$0,5Lm_T$	$0,5Lm_T$.	$0,5Lm_T$	$\frac{1}{2} \delta \sigma_T b_1 - \frac{L}{4} \frac{P_1}{b_1}$	$\frac{1}{2} \delta \sigma_T (b_1 + b_2) + \frac{L}{4} \times \left(\frac{P_1}{b_1} - \frac{P_2}{b_2} \right)$

Т а б л и ц а 11/2

	$\theta_1^*=1$	$-\theta_2^*$	$-\theta_3^*$	$-e_0^*$	$-e_1^*$
a_1	1			r_{10}	r_{11}
a_2		-1		r_{20}	r_{21}
a_3			-1	$-r_{10}$	$-r_{31}$
b_1				$-r_{20}$	$-r_{11}$
b_2		-1			$-r_{21}$
b_3			-1		$-r_{31}$
d_0				$-1 - \rho$	
d_1					$-1 - \rho$
d_2					
d_3					
U	$0,5Lm_T$	$0,5Lm_T$	$0,5Lm_T$	$\frac{\delta\sigma_T}{2} b_1 - \frac{L}{4} \frac{P_1}{b_1}$	$\frac{\delta\sigma_T}{2} (b_1 + b_2) + \frac{L}{4} \left(\frac{P_1}{b_1} - \frac{P_2}{b_2} \right)$

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^* - c_i$$

В некоторых случаях, при значениях параметра нагрузки меньше разрушающего, минимум U может отсутствовать; это означает, что в предельном состоянии равновесия угол поворота в шарнире θ_1 равен нулю. Тогда за столбец свободных членов следует взять другой, например соответствующий какой-либо величине $-\theta_i^*$ ($i \neq 1$) или e_i^* , приравненной минус единице (лучше последнее, так как нередко бывает, что в предельном состоянии все θ_i равны нулю, т. е. контур сечения оболочки не деформируется).

В случае свободных бортов оболочки и отсутствия приложенных к ним внешних усилий, действующих в плоских крайних гранях, углы поворота θ_i и θ_{n-1} обязательно равны нулю. При этом столбцы θ_1^* и θ_{n-1}^* из табл. 11/2 должны быть исключены, так же как и стро-

Таблица 11/3

$-e_2^*$	$-e_3^*$	$-c_0$	$-c_1$	$-c_2$	$-c_3$
r_{12}	r_{13}	$-r_{10}$	$-r_{11}$	$-r_{12}$	$-r_{13}$
r_{22}	r_{23}^C	$-r_{20}$	$-r_{21}$	$-r_{22}$	$-r_{23}^C$
r_{32}^C	r_{33}^C		$-r_{31}$	$-r_{32}^C$	$-r_{33}^C$
$-r_{12}$	$-r_{13}$	r_{10}	r_{11}	r_{12}	r_{13}
$-r_{22}$	$-r_{23}^C$	r_{20}	r_{21}	r_{22}	r_{23}^C
$-r_{32}^C$	$-r_{33}^C$		r_{31}	r_{32}^C	r_{33}^C
		ρ	ρ	ρ	ρ
$-1-\rho$	$-1-\rho$				
$\frac{\delta\sigma_T}{2}(b_2 + b_1) + \frac{L}{2} \times \left(\frac{P_2}{b_2} - \frac{P_3}{b_3} \right)$	$\frac{\delta\sigma_T}{2}b_3 + \frac{L}{4} \frac{P_4}{b_4}$	$LP_1/4b_1$	$\frac{L}{4} \left(\frac{P_2}{b_2} - \frac{P_3}{b_3} - \frac{P_2}{b_1} \right)$	$-LP_3/4b_3$	

($i=0, 1, 2, 3$)

ки a_1, a_{n-1}, b_1 и b_{n-1} , а за столбец свободных членов можно принять, например, столбец $-e_2^*$.

В случае опирания продольных бортов на сплошные опоры со свободным скольжением вдоль последних краине грани не изгибаются в своей плоскости и необходимо положить

$$\begin{aligned} e_0 &= e_1, \quad e_0^* = e_1^*, \quad c_0 = c_1, \quad d_0 = d_1, \\ e_{n-1} &= e_n, \quad e_{n-1}^* = e_n^*, \quad c_{n-1} = c_n, \quad d_{n-1} = d_n, \end{aligned}$$

причем коэффициенты столбцов, соответствующих равным величинам, аннулируются, а дублирующие строчки могут быть исключены.

Расчет значительно упрощается при наличии симметрии оболочки и нагрузки относительно продольной вертикальной плоскости, так как сильно сокращается

таблица симплекс-метода, принимая вид табл. 11/3. В этой таблице, составленной для $n = 7$, введены новые коэффициенты:

$$r_{23}^c = r_{23} = r_{24}, \quad r_{32}^c = r_{32} = r_{35}, \quad r_{33}^c = r_{34} + r_{33}.$$

Кроме того, строки e_0, e_1, e_2 и e_3 здесь исключены, как не входящие в таблицу симплекс-метода, а служащие лишь для определения величин e_0, e_1, e_3 и e_4 и заменены равенствами $e_i = e_i^* - c_i$ ($i = 0, 1, 2, 3$).

§ 65. Пример расчета цилиндрического свода-оболочки

Цилиндрическая железобетонная оболочка постоянной толщины δ с круговым поперечным сечением радиуса R заменяется приближенно семигранной складкой $n = 7$ с равными гранями шириной $b = 2R \sin(\varphi/2)$. Армирование оболочки будем считать симметричным по толщине

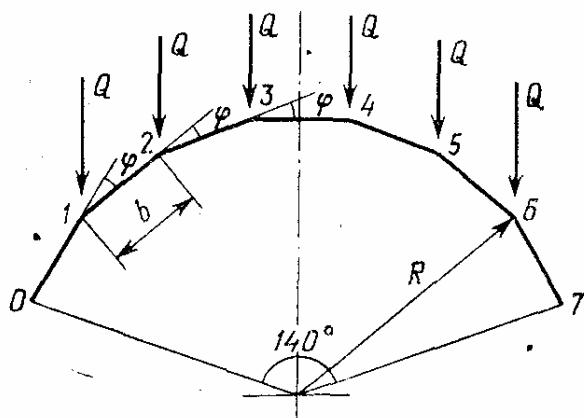


Рис. 188.

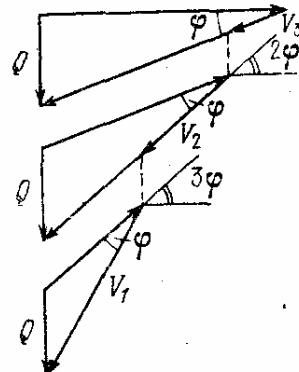


Рис. 189.

с общим процентом армирования 2,5. Нагрузку возьмем симметричную, равномерно приложенную вдоль ребер складки (рис. 188).

Разложив эту нагрузку на направления граней, получим (рис. 189)

$$V_1 = \frac{Q}{(\operatorname{tg} 3\varphi - \operatorname{tg} 2\varphi) \cos 3\varphi},$$

$$V_2 = \frac{Q}{(\operatorname{tg} 2\varphi - \operatorname{tg} \varphi) \cos 2\varphi} - \frac{Q}{(\operatorname{tg} 3\varphi - \operatorname{tg} 2\varphi) \cos 2\varphi},$$

$$V_3 = \frac{Q}{\operatorname{tg} \varphi \cos \varphi} - \frac{Q}{(\operatorname{tg} 2\varphi - \operatorname{tg} \varphi) \cos \varphi},$$

$$V_4 = 0,$$

и, согласно (64.5), для $Q = \text{const}$

$$P_i = LV/4 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

В табл. 12 представлены коэффициенты симплекс-метода для круговой цилиндрической оболочки в безразмерном буквенном выражении. Для проведения вычислений в численном виде зададимся следующими соотношениями размеров оболочки и прочностными характеристиками:

$$L/R = 3, \quad R/\delta = 200, \quad \mu = 2,5\%, \quad R = 12 \text{ м},$$

$$\sigma_{\text{тарм}} = 200 \text{ МПа}, \quad \sigma_t = 0,025 \cdot 200 = 5 \text{ МПа},$$

$$\sigma'_t = 0,025 \cdot 200 + 20 = 25 \text{ МПа},$$

$$m_t = 0,5 \cdot 0,025 \delta \sigma_{\text{тарм}} \cdot \delta \cdot 0,8 = 0,01 \delta^2 \sigma_{\text{тарм}} = 20 \delta^2.$$

При этом

$$\rho = \sigma'_t / \sigma_t = 5, \quad m_t / \sigma_t \approx 0,4 \delta^2, \quad k = 0,025, \quad A = 6320,$$

$$P_1 = 1,120QL, \quad P_2 = 0,610QL, \quad P_3 = 0,372QL, \quad P_4 = 0,$$

$$S_i = LP_i / (4\delta\sigma_t b^2)$$

(выражения этих величин приведены в табл. 12).

Возьмем в качестве параметра нагрузки $S_1 = S$, тогда

$$S_1 = S, \quad S_2 = 0,545 S, \quad S_3 = 0,332 S, \quad S_4 = 0.$$

Продольные края оболочки считаем свободными. В этом случае $\theta_1^* = 0$ столбец θ_1^* табл. 12 исключается, равно как и строки a_1 и b_1 . Полагая $\theta_2^* = 1$ и приняв столбец θ_2^* за столбец свободных членов, получаем после подстановки численных значений коэффициентов табл. 13/1. В этой таблице последняя строка разделена на две строки, причем верхняя дает выражения для работы внутренних сил, а нижняя, которая должна быть умножена на опущенный множитель S , — работу внешних сил.

Поскольку последние три члена нижней строки отрицательны, произведем три преобразования с перестановкой столбцов $c_1/b, c_2/b, c_3/b$ и строк $d_1/b, d_2/b$ и d_3/b .

Получим табл. 13/2. Суммы членов предпоследней строки и последней строки, умноженной на S , положительны (условие оптимального плана, столбец свободных

	$\theta_1^*=1$	$-\theta_2$	$-\theta_3$	$-\frac{\varepsilon_0^*}{b}$	$-\frac{\varepsilon_1^*}{b}$	$-\frac{\varepsilon_2^*}{b}$
a_1	1			$-A$	$A(1+2 \cos \varphi)$	$-A(1+2 \cos \varphi)$
a_2		-1		A	$-2A(1+\cos \varphi)$	$2A(1+2 \cos \varphi)$
a_3			-1		A	$-A(1+2 \cos \varphi)$
b_1	1			A	$-A(1+2 \cos \varphi)$	$A(1+2 \cos \varphi)$
b_2		-1		$-A$	$2A(1+\cos \varphi)$	$-2A(1+2 \cos \varphi)$
b_3			-1		$-A$	$A(1+2 \cos \varphi)$
d_0/b				$-1-\rho$		
d_1/b					$-1-\rho$	
d_2/b						$1-\rho$
d_3/b						
$\frac{U}{\delta\sigma_T b^2}$	$-k$	k	k	$-\frac{1}{2}-S_1$	$1-S_2+S_1$	$1+S_3+S_2$

$$k = Lm_T/(2\delta\sigma_T b^2), \quad A = L/[\delta R \sin(\varphi/2) \sin \varphi],$$

членов не учитывается) при $0 \leq S \leq 0,5$, но при этих значениях такая сумма в столбце свободных членов не равна нулю. Поэтому произведем перестановку столбца ε_0^*/b и строки a_2 . Получаем табл. 13/3. В этой таблице условие оптимального плана выполняется при $0,5 \leq S \leq 0,565$, а максимум работы всех сил обращается в нуль при $S = 0,659$. Производим еще две перестановки строк c_1/b и c_3/b со столбцами d_1/b и d_3/b . Приходим к табл. 13/4, у которой условие оптимального плана $0,567 \leq S \leq 0,862$ выполняется при $U = 0$, $S = 0,659$.

Таким образом, получаем окончательно: $S = 0,659$,

$$P_1 = 4\sigma_T \delta b^2 S / L = 2,636 \delta b^2 / L,$$

$$Q = P_1 / 1,120L = 2,35 \sigma_T \delta b^2 / L^2 = 15,7 \text{ Н/см}.$$

Полагая $\delta = 6$ см, $L = 36$ м, $R = 12$ м, имеем

$$Q_{\text{пп}} = 1,57 \times 6 = 94,2 \text{ Н/см},$$

что соответствует разрушающей нагрузке, приходящейся на единицу площади поверхности оболочки (без половины площади нижних граней)

$$q_{\text{пп}} = 22,6 \text{ МПа.}$$

Таблица 12

$-\frac{\epsilon_3^*}{b}$	$\frac{c_0}{b}$	$-\frac{c_1}{b}$	$-\frac{c_2}{b}$	$-\frac{c_3}{b}$
A	A	$-A(1+2 \cos \varphi)$	$A(1+2 \cos \varphi)$	$-A$
$-A(1+2 \cos \varphi)$	$-A$	$2A(1+ \cos \varphi)$	$-2A(1+2 \cos \varphi)$	$A(1+2 \cos \varphi)$
$2A \cos \varphi$		$-A$	$A(1+2 \cos \varphi)$	$-2A \cos \varphi$
$-A$	$-A$	$A(1+2 \cos \varphi)$	$-A(1+2 \cos \varphi)$	$-A$
$A(1+2 \cos \varphi)$	A	$-2A(1+ \cos \varphi)$	$2A(1+2 \cos \varphi)$	$A(1+2 \cos \varphi)$
$-2A \cos \varphi$		A	$-A(1+2 \cos \varphi)$	$-2A \cos \varphi$
	ρ			ρ
		ρ		
$-1-\rho$				ρ
$1+S_3$	S_1	S_2-S_1	S_3-S_2	$-S_3$

$$b=2R \sin(\varphi/2), S_i=LP_i/(4\delta\sigma_T b^2)$$

Форму разрушения получаем из рассмотрения табл. 13.4, согласно которой при $\theta_2^* = 1, \theta_3 = 0, e_0^* = 0,1582b, e_1^* = e_2^* = e_3^* = 0$.

Таким образом, эпюра продольных удлинений оболочки в среднем ее сечении имеет вид, показанный на рис. 190.

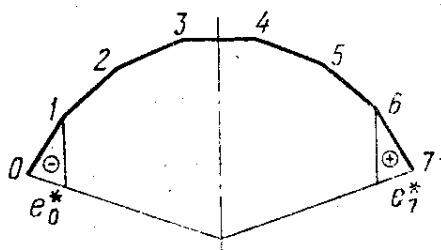


Рис. 190.

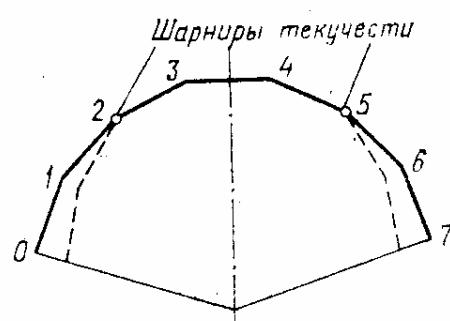


Рис. 191.

На рис. 191 показана эпюра прогибов, представляющая собой форму разрушения оболочки с двумя шарнирами текучести в ребрах 2 и 5.

Таблица 13/1

	$\theta_2^* = 1$	$-\theta_3^*$	$-e_0^*/b$	$-e_1^*/b$	$-e_2^*/b$	$-e_3^*/b$	$-c_0/b$	$-c_1/b$	$-c_2/b$	$-c_3/b$
a_2	1		6,32	-24,50	36,24	-18,12	-6,32	24,50	-36,24	18,42
a_3		-1		6,32	-18,12	14,89		6,32	18,42	-11,89
b_2	1		6,32	24,50	-36,24	18,12	6,32	-24,50	36,24	-48,42
b_3		-1		-6,32	18,12	-14,89		6,32	-18,42	11,89
d_0/b			-6				5		$\overline{[5]}$	
d_1/b				-6					$\overline{[5]}$	
d_2/b					-6					
d_3/b						-6				
$T/(\sigma_T \delta b^2)$	-0,025	0,025	0,5	1	1	1				
$\frac{1}{S} \cdot \frac{V}{\sigma_T \delta b^2}$			-1	0,455	0,243	0,332	1	-0,455	-0,243	-0,332

Таблица 13/2

	$0 < S < 0,5$					
	$\theta_2^* = 1$	$-\theta_3^*$	$-e_0^*/b$	$-e_1^*/b$	$-e_2^*/b$	$-e_3^*/b$
a_2	1		<u>6,32</u>	4,90	-7,248	3,624
a_3	-1			-1,264	3,624	-2,378
b_2	1		-6,32	-4,90	7,248	-3,624
b_3	-1			1,264	-3,624	3,624
d_0/b			-6		2,378	-2,378
c_1/b				-1,2		
c_2/b					-1,2	
c_3/b					1	0,2
$\frac{T}{\sigma_r \delta b^2}$	-0,025	0,025	0,5	1	1	0,2
$\frac{V}{S \sigma_r \delta b^2}$			-1	-0,091	-0,0426	0,0426
					$S < 23,5$	$S < 15,1$
	$S < 0,5$	$S < 11$				$0,0664$

Таблица 13/3

0,5 < S < 0,565

	$\theta_2^* = 1$	$-\theta_3^*$	$-a_2$	$-e_1^*/b$	$-e_2^*/b$	$-e_3^*/b$	$-c_0/b$	$-d_1/b$	$-d_2/b$	$-d_3/b$
e_0^*/b	0,4582		0,4582	0,775	-1,146	0,573	-1	-0,775	1,146	-0,573
a_3	2	-1		-1,264	3,624	-2,378		1,264	-3,624	2,378
b_2		2	1		1,264	-3,624		-1,264	3,624	-2,378
b_3			-1		0,9494	4,65	-6,87	2,378		
d_0/b	0,9494				-1,2		3,435	-4		
c_1/b							-4,65	6,87		-3,435
c_2/b							1,2		0,2	
c_3/b							-4,2			
$\frac{T}{\sigma_r \delta b^2}$	0,1041	0,025	-0,0791	0,612	4,573	0,713		0,5	0,3875	-0,573
$\frac{V}{S \sigma_r \delta b^2}$	0,4582		0,4582	0,684	-1,489	0,507		-0,684	1,189	-0,507
	$S=0,659$		$S>0,5$		$S<1,325$		$S<0,567$	$S>0,482$	$S<0,565$	

Таблица 13/4

0,567 < S < 0,862

	$\theta_2^* = 1$	$-\theta_3^*$	$-a_2$	$-e_1^*/b$	$-e_2^*/b$	$-e_3^*/b$	$-c_0/b$	$-c_1/b$	$-d_2/b$	$-c_3/b$
e_0^*/b	0,4582		0,4582	-3,875	-1,446	-2,864	-1	3,875	1,446	2,864
a_3	2	-4	1	6,32	3,624	11,89		-6,32	-3,624	-11,89
b_2		-4			-6,32	-3,624	-41,89		6,32	3,624
b_3					0,9494	-23,25	-6,87	-17,47	23,25	17,47
d_0/b	0,9494				-6				5	
d_1/b						-4,2			0,2	
c_2/b							-1,2			5
d_3/b										
$T/(\sigma_T \delta b^2)$	-0,4044	0,025	0,0794	2,947	1,573	2,432	0,5	-1,938	-0,573	-1,432
$\frac{V}{S\sigma_T \delta b^2}$	0,4582		0,4582	-3,242	-4,483	-2,535		3,42	1,489	2,532
	S=0,659		S>0,5	S<0,862	S<1,325	S<0,960		S>0,567	S>0,482	S>0,565

Г л а в а 13

УТОЧНЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ [97]

§ 66. Предельное состояние осесимметрично нагруженной трубы

Рассматривая условия равновесия элементарной продольной полоски, выделенной из стенки трубы, получим уравнение

$$M'' - \frac{T}{R} + q = 0. \quad (66.1)$$

Здесь q — внешняя радиальная нагрузка, направленная внутрь, T — кольцевое усилие, M — продольный изгибающий момент, R — радиус срединной поверхности трубы.

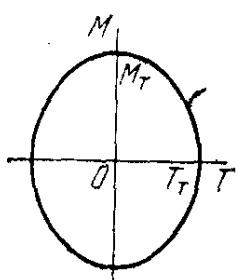
Уравнение (66.1) можно трактовать как обычную зависимость между изгибающими моментами M в балке и поперечной нагрузкой q , к которой присоединяется радиальная нагрузка T/R от кольцевых растягивающих напряжений.

В предельном пластическом состоянии величины M и T связаны зависимостью, которую можно найти из условия текучести материала. Возьмем пока эту зависимость в общем виде $T = T(M)$.

Пусть она имеет в прямоугольных координатах (M, T) вид замкнутой кривой (рис. 192). Для упрощения преобразований введем безразмерные величины

$$m = M/M_t, \quad t = T/T_t, \quad (66.2)$$

Рис. 192. где M_t — предельный момент в стенке трубы при отсутствии кольцевого усилия, T_t — предельное кольцевое усилие при отсутствии продольного момента.



Подставляя выражения (66.2) в уравнение (66.1), имеем

$$M_{\text{т}} m'' - \frac{T_{\text{т}}}{R} t + q = 0. \quad (66.3)$$

В пластической зоне деформации трубы t является известной функцией моментов m : $t = t(m)$.

Введем теперь обозначения

$$c = \frac{T_{\text{т}}}{RM_{\text{т}}}, \quad g = \frac{q}{M_{\text{т}}}.$$

Тогда уравнение (66.3) можно переписать в виде

$$m'' - ct(m) + g = 0. \quad (66.4)$$

Далее вместо координаты x можно ввести безразмерную независимую переменную ξ по формуле

$$\xi = x\sqrt{c} = x\sqrt{T_{\text{т}}/RM_{\text{т}}}.$$

При этом уравнение (66.4) примет вид

$$\frac{d^2m}{d\xi^2} - t(m) + \frac{g}{c} = 0,$$

или

$$\frac{d^2m}{d\xi^2} - t(m) + p = 0, \quad (66.5)$$

где

$$p = \frac{g}{c} = \frac{Rg}{T_{\text{т}}}.$$

Решение уравнения (66.5) при $p = \text{const}$ можно представить семейством кривых, аналогичных фазовым диаграммам, применяемым при исследовании вопросов колебаний. Для этого напишем уравнение (66.5) в виде системы

$$\frac{dm}{d\xi} = n, \quad \frac{dn}{d\xi} = -p + t(m). \quad (66.6)$$

Величина n пропорциональна поперечной силе $Q = -dM/dx$ и равна

$$n = \frac{d}{dx} \left(\frac{M}{M_{\text{т}}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} = Q \sqrt{\frac{R}{M_{\text{т}} T_{\text{т}}}}.$$

Разделив уравнения (66.6) друг на друга, получим

$$\frac{dn}{dm} = \frac{t(m) - p}{n}. \quad (66.7)$$

Последнее равенство дает возможность построить семейство зависимостей n от m в прямоугольных координатах m, n , поскольку в каждой точке плоскости m, n определено направление касательной к кривой $n = n(m)$ через тангенс угла наклона этой касательной.

Формула (66.7) позволяет применить для построения кривых $n(m)$ простой графический прием. Построим над той же осью абсцисс m известную нам кривую $-t(m) + p$ (рис. 193). Тогда направление касательной к кривой $n = n(m)$ в любой точке A плоскости m, n будет перпендикулярно линии

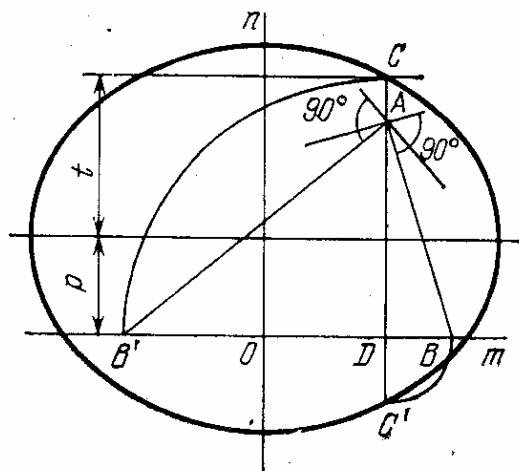


Рис. 193.

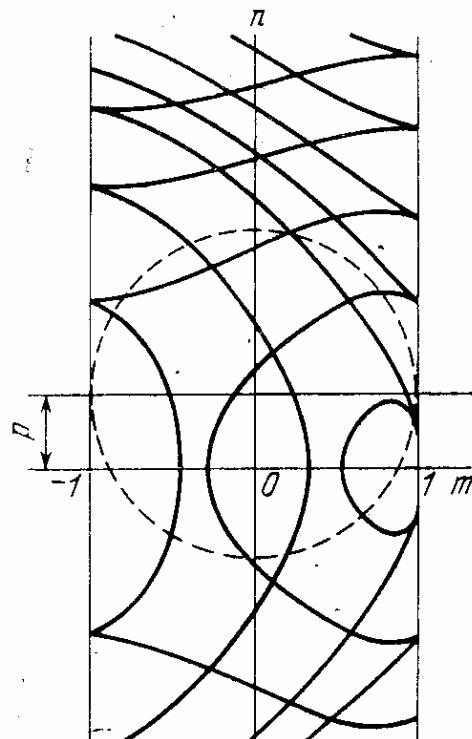


Рис. 194.

AB , проведенной в точку B , которая отстоит от проекции D точки A на ось m на расстоянии $BD = CD = -t(m) + p$. Действительно, тангенс угла наклона линии AB к оси m равен $n/[-t(m) + p]$, а тангенс угла наклона линии, перпендикулярной к AB , обратен по величине и по знаку, т. е. равен dn/dm .

Вследствие двузначности функции $t(m)$ в каждой точке A получаем два направления касательных к кривым двух семейств. Направление касательной к кривой второго семейства перпендикулярно линии AB' , соответствующей нижней половине кривой $t(m) + p$.

Общий вид кривых $n = n(m)$ показан на рис. 194. Все они занимают лишь полосу, образованную двумя вертикальными касательными к замкнутой кривой $-t(m) + p$. Так как при $m = \pm 1$ $p - t(m)$ имеет только одно значение, равное нулю, то на вертикальных линиях $m = \pm 1$ оба семейства кривых имеют одни и те же касательные и переходят друг в друга через точки заострения кривых. В этих точках $t = 0$, что соответствует нулевым значениям радиального перемещения v точек срединной поверхности трубы. Переход через вертикаль $m = 0$ соответствует перемене знака момента, т. е. изменению выпуклости кривой v на вогнутость или обратно.

§ 67. Предельная зависимость между продольным моментом и кольцевым усилием [97]

Функция $t(m)$ имеет довольно сложное аналитическое выражение для сплошной оболочки из материала, подчиняющегося условию текучести Губера — Генки — Мизеса [63]. При отсутствии продольных усилий в трубе эту функцию можно довольно хорошо аппроксимировать окружностью

$$m^2 + t^2 = 1. \quad (67.1)$$

Покажем, что зависимость (67.1) точно соответствует двуслойной оболочке, состоящей из двух тонких поверхностей одинаковой толщины δ и отстоящих друг от друга всегда на одном и том же постоянном расстоянии h . Между слоями оболочки предполагаются какие-то конструктивные элементы, передающие сдвигающие усилия с верхнего слоя на нижний и не воспринимающие нормальных и касательных усилий в плоскости, касательной к срединной поверхности. Кроме того, эти элементы должны обеспечить неизменность расстояния между слоями в процессе деформации оболочки и условие Кирхгофа о сохранении прямолинейности и перпендикулярности к поверхности оболочки линий, нормальных к поверхности оболочки до ее деформации. Такая схема представляет собой двухмерную аналогию схемы идеального двутавра сечения балки, с успехом используемой для вывода и

упрощения ряда зависимостей в работе стержней за пределом упругости.

Обозначим продольные напряжения, возникающие во внутреннем слое двухслойной оболочки через σ_1^B , а в наружном слое — через σ_1^H . Соответственно кольцевые напряжения, действующие во внутреннем и наружном слоях, обозначим через σ_2^B и σ_2^H .

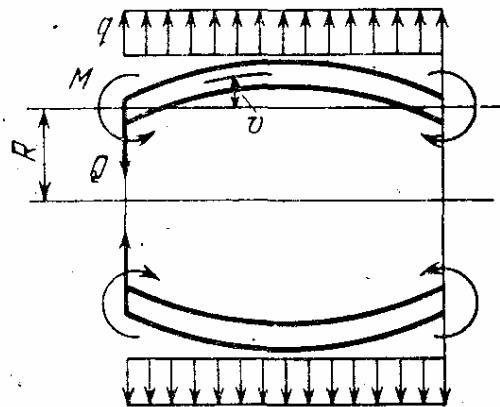


Рис. 195.

Для обоих слоев примем условие текучести Губера — Генки — Мизеса. (Положительный момент даст выпуклость стенки трубы наружу (рис. 195).) Учитывая, что при отсутствии продольного усилия

$$\sigma_1 = -\sigma_1^B = \sigma_1^H = \frac{M}{h\delta} \quad (67.2)$$

получим условие текучести для внутреннего слоя

$$\sigma_1^2 + \sigma_1 \sigma_2^B + (\sigma_2^B)^2 = \sigma_t^2, \quad (67.3)$$

и для наружного

$$\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2^H + (\sigma_2^H)^2 = \sigma_t^2. \quad (67.4)$$

Отсюда имеем

$$\sigma_2^B = -\frac{\sigma_1}{2} \pm \sqrt{\sigma_t^2 - \frac{3}{4}\sigma_1^2},$$

$$\sigma_2^H = \frac{\sigma_1}{2} \pm \sqrt{\sigma_t^2 - \frac{3}{4}\sigma_1^2}.$$

Кольцевое усилие T в предельном состоянии равно

$$T = \delta(\sigma_2^B + \sigma_2^H) = \pm 2\delta \sqrt{\sigma_t^2 - \frac{3}{4}\sigma_1^2},$$

или, учитывая (67.2),

$$T = \pm \sqrt{4\delta^2\sigma_t^2 - 3M^2/h^2}.$$

Отсюда

$$T^2 + 3M^2/h^2 = 4\delta^2\sigma_t^2. \quad (67.5)$$

Введем обозначения:

$$T_{\text{т}} = 2\delta\sigma_{\text{т}}, \quad M_{\text{т}} = \frac{2}{\sqrt[3]{3}} \delta\sigma_{\text{т}} h. \quad (67.6)$$

Тогда уравнение (67.5) можно представить в виде

$$\frac{T^2}{T_{\text{т}}^2} + \frac{M^2}{M_{\text{т}}^2} = 1,$$

или в виде (67.1)

$$t^2 + m^2 = 1,$$

где

$$t = T/T_{\text{т}}, \quad m = M/M_{\text{т}}.$$

Заметим, что равнодействующее кольцевое усилие в данном случае не проходит по срединной поверхности оболочки, и последняя в кольцевом направлении работает как внецентренно растянутая или сжатая.

Переменная ξ , определяемая из формулы (66.4) в данном случае равна

$$\xi = \frac{\sqrt[4]{3 \cdot x}}{\sqrt[4]{Rn}}. \quad (67.7)$$

При этом дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{d^2m}{d\xi^2} + \sqrt{1 - m^2} + p = 0, \quad (67.8)$$

или, в форме системы (66.6),

$$\frac{dm}{d\xi} = n, \quad \frac{dn}{d\xi} = \sqrt{1 - m^2} - p,$$

где

$$n = Q \sqrt{\frac{R}{M_{\text{т}} T_{\text{т}}}} = \sqrt[4]{3} \sqrt{\frac{R}{h}} \frac{Q}{2\delta\sigma_{\text{т}}}, \quad p = \frac{Rq}{T_{\text{т}}} = \frac{Rq}{2\delta\sigma_{\text{т}}}.$$

Деформации двухслойной цилиндрической оболочки и влияние продольных усилий рассмотрены автором в [97].

ЛИТЕРАТУРА

1. А на нь и на А. Н. Осесимметричные деформации цилиндрической оболочки при упруго-пластических деформациях.— Инженерный сборник, 1954, т. 18.
2. А р х и п о в В. А. Несущая способность пологих цилиндрических оболочек и треугольных складок.— В кн.: Расчет тонкостенных пространственных конструкций.— М.: Госстройиздат, 1964.
3. А х в л е д и а н и Н. В. К расчету железобетонных оболочек вращения по методу предельного равновесия.— Сообщ. АН Груз. ССР, 1957, т. 18, вып. 2.
4. А х в л е д и а н и Н. В. Расчет куполов по методу предельного равновесия.— В кн.: Исследования по теории сооружений.— М.: Госстройиздат, 1961, т. X.
5. А х в л е д и а н и Н. В. О несущей способности пологих железобетонных оболочек-покрытий двойкой кривизны.— В кн.: Исследования по теории сооружений.— М.: Стройиздат, 1962, т. XI.
6. А х в л е д и а н и Н. В. О выборе возможных перемещений при составлении уравнений предельного равновесия.— Труды ИСМиС АН ГССР, 1963, в. 9.
7. А х в л е д и а н и Н. В., Даниела швили М. А. Исследование несущей способности армированных оболочек вращения на основе трехпараметровой схемы излома.— В кн.: Бетон и железобетон.— Тбилиси: Мецниереба, 1968, № 2.
8. А х в л е д и а н и Н. В., Даниела швили М. А., Инкрицвели Д. А. Анализ несущей способности армированных оболочек.— В кн.: Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок.— М.: Наука, 1966.
9. А х в л е д и а н и Н. В., Шанши мела швили В. Н. К расчету несущей способности оболочек.— Сообщ. АН Груз. ССР, 1952, т. 13, № 10.
10. Б а з л о в В. П. Несущая способность оболочек вращения при осесимметричном загружении.— Строительная механика и расчет сооружений, 1977, № 5.
11. Б о р з ы х Е. П., Х ай ду к о в Г. К., Ш у га е в В. В. Исследование влияния начальных несовершенств срединной поверхности на напряженное состояние пологих ортотропных оболочек.— В кн.: Труды VIII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок.— М.: Наука, 1973.
12. Б о р к а у с к а с А. Э., Ка рка у с к а с Р. П. Вычислительные аспекты применения методов математического программирования к расчету пластинок и оболочек по предельному состоянию.— Литовский механический сборник. Вильнюс, 1967, № 1.

13. Боркаускас А. Э., Чирас А. А. Расчет пластиноок в упруго-пластическом состоянии с применением линейного программирования.— Литовский механический сборник, Вильнюс, 1967, № 1.
14. Брусяндров Г. Н., Ржаницын А. Р. Применение линейного программирования к задаче предельного равновесия при плоском напряженном состоянии.— Строительная механика и расчет сооружений, 1968, № 5.
15. Быковцев Г. И. О предельном равновесии анизотропных пластин и оболочек вращения.— Известия АН СССР, ОГН, Механика и машиностроение, 1964, № 6.
16. Варвак М. Ш., Дехтярь А. С. Несущая способность систем, образованных из оболочек отрицательной гауссовой кривизны.— В кн.: Исследования по теории сооружений.— М.: Стройиздат, 1970, вып. XVIII.
17. Варвак М. Ш., Дехтярь А. С. Экспериментальное исследование несущей способности пологих оболочек с центральным отверстием.— Прикладная механика, 1970, т. VI, вып. 3.
18. Варвак М. Ш., Дехтярь А. С., Щербенко Э. А. Предельный анализ оболочек вращения.— В кн.: Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластиноок.— М.: Наука, 1970.
19. Варвак М. Ш., Дехтярь А. С., Тютюник А. М. Верхняя оценка несущей способности покрытия, образованного четырьмя гиперболическими параболоидами.— В кн.: Строительное проектирование промышленных предприятий.— М.: Стройиздат, 1969, вып. 4.
20. Варвак М. Ш., Дубинский А. М., Дехтярь А. С. Предельное равновесие пологих оболочек, подкрепленных ребрами.— Прикладная механика, Киев, 1966, т. II, в. 9.
21. Варвак М. Ш., Дубинский А. М., Дехтярь А. С. Несущая способность ребристых оболочек.— В кн.: Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластиноок.— М.: Наука, 1966.
22. Варвак П. М., Варвак М. Ш., Дехтярь А. С., Рассказов А. О. Предельное равновесие оболочек отрицательной гауссовой кривизны.— В кн.: Пространственные конструкции зданий и сооружений.— М.: Стройиздат, 1972, вып. 1.
23. Власов В. З. Строительная механика оболочек.— М.: ОНТИ, 1936.
24. Габбасов Р. Ф. К вопросу о предельном равновесии пологих оболочек вращения.— Известия высших учебных заведений, Строительство и архитектура, Новосибирск, 1963, № 5.
25. Гвоздев А. А. Определение величины разрушающей нагрузки для статически неопределеных систем.— Проект и стандарт, 1934, № 8.
26. Гвоздев А. А. Определение величины разрушающей нагрузки для статически неопределенных систем, претерпевающих пластические деформации.— В кн.: Труды конференции по пластическим деформациям, АН СССР, 1938.
27. Гвоздев А. А. Обоснования § 33 норм проектирования железобетонных конструкций.— Строительная промышленность, 1939, № 3.

28. Гвоздев А. А. О предельном равновесии.— Инженерный сборник, 1948, т. V, вып. 1.
29. Гвоздев А. А. Метод предельного равновесия в применении к расчету железобетонных конструкций.— Инженерный сборник, 1949, т. V, вып. 2.
30. Гвоздев А. А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия.— М.: Стройиздат, 1949.
31. Гвоздев А. А. Устойчивость тонких оболочек.— Бетон и железобетон, 1961, № 10.
32. Геворкян Б. О. Расчет панелей перекрытия в виде пологой оболочки двойкой кривизны, свободно опертой по углам.— Научные сообщ. АИСМ, Исследования по строительным конструкциям, Ереван, 1962.
33. Гонгадзе Д. А. Расчет пологих оболочек методом сетки разрушения.— В кн.: Труды XXXV научно-техн. конф. МИСИ, 1976.
34. Гопкинс Г., Прагер В. Несущая способность круглых пластинок.— Сб. переводов «Механика», 1955, № 3.
35. Григорьев А. С. О несущей способности круглых плит.— Инженерный сборник, 1949, т. V, вып. 2.
36. Григорьев А. С. Изгиб круглых плит переменной и постоянной толщины.— Инженерный сборник, 1954, № 20.
37. Григорьев А. С. О теории оболочек при больших деформациях.— В кн.: Материалы летней школы по проблеме «Модель жесткоупругого тела в теории пластин и оболочек».— Тарту, 1969.
38. Дехтярь А. С. Несущая способность сжатой неосесимметричной оболочки.— Известия высших учебных заведений, Строительство и архитектура, Новосибирск, 1973, № 5.
39. Дехтярь А. С., Варвак М. Ш. Несущая способность пологих оболочек с центральным отверстием.— Прикладная механика, 1968, т. IV, вып. 3.
40. Дехтярь А. С., Варвак М. Ш. Предельное равновесие пологих оболочек при действии нагрузки, распределенной на части поверхности.— В кн.: Исследования по строительной механике.— Тбилиси: Мецниереба, 1970.
41. Дехтярь А. С., Рассказов А. О. Предельное равновесие оболочки типа гиперболического параболоида.— Строительная механика и расчет сооружений, 1971, № 1.
42. Дехтярь А. С., Рассказов А. О. Несущая способность покрытия из гиперболических параболоидов.— Прикладная механика, 1971, т. VII, вып. 10.
43. Дубинский А. М. Расчет перекрестно армированных железобетонных плит по стадии разрушения.— В кн.: Сб. трудов Украинского научно-исследовательского института сооружений.— Киев, 1948.
44. Дубинский А. М. Расчет несущей способности железобетонных плит.— Киев: Госстройиздат, УССР, 1961.
45. Дубинский А. М., Дехтярь А. С. Несущая способность пологих железобетонных оболочек с нерастяжимым контуром.— Строительная механика и расчет сооружений, 1966, № 4.

46. Дубинский А. М., Овсепян Г. А. Шатровые панели пе- рекрытий.—Киев: Госстройиздат УССР, 1962.
47. Дубинский А. М., Исаенко А. Г. Экспериментально-тео- ретическое исследование несущей способности выпуклых оболочек при действии односторонней нагрузки.—В кн.: Оболочки в строительстве.—Киев: Будівельник, 1973.
48. Дубинский А. М., Исаенко А. Г. Несущая способность оболочек положительной гауссовой кривизны с шарнирно не-подвижным опиранием.—В кн.: Пространственные конструкции зданий и сооружений.—М.: Стройиздат, 1975, вып. 2.
49. Дубинский А. М., Шарапов Г. В. Несущая способность оболочек в виде гиперболических параболоидов.—Прикладная механика, 1971, т. VII, вып. 4.
50. Дургарьян С. М. К расчету железобетонных сферических оболочек по стадии разрушения.—Известия АН Арм. ССР, 1950, вып. III, № 7.
51. Ерхов М. И. Конечное соотношение между силами и момен-тами при пластической деформации оболочек.—Строительная механика и расчет сооружений, 1959, № 3.
52. Ерхов М. И. Пластическое состояние оболочек, пластин и стержней из идеально пластического материала.—Известия АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 6.
53. Ерхов М. И. Симметричная деформация цилиндрической оболочки за пределом упругости.—В кн.: Вопросы теории пла-стичности и прочности строительных конструкций.—М.: Гос-стройиздат, 1961.
54. Ерхов М. И. О несущей способности симметрично загружен-ной цилиндрической оболочки.—В кн.: Расчет тонкостенных пространственных конструкций.—М.: Стройиздат, 1964.
55. Ерхов М. И. Предельное равновесие пологих оболочек вра-щения.—Строительная механика и расчет сооружений, 1966, № 4.
56. Ерхов М. И. О несущей способности конической оболочки.— В кн.: Новые методы расчета строительных конструкций.—М.: Стройиздат, 1968.
57. Ерхов М. И. Вопросы прочности идеально пластических оболочек.—В кн.: Строительные конструкции, вып. 4, Исследова-ние прочности конструкций из неупругих материалов.—М.: ЦНИИСК, 1969.
58. Ерхов М. И. Локальное нагружение пологих оболочек вра-щения.—В кн.: Новые методы расчета строительных конст-рукций.—М.: Стройиздат, 1971.
59. Ерхов М. И. Теория идеально пластических тел и конструк-ций.—М.: Наука, 1978.
60. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. Линейное и выпук-лое программирование. Справочное руководство.—М.: Наука, 1965.
61. Ивлев Д. Д. О теории предельного равновесия оболочек при кусочно линейном критерии текучести.—Известия АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 6.
62. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности.—М.: Наука, 1966.

63. Ильюшин А. А. Пластичность.— М.: Гостехиздат, 1948.
64. Карпенко Н. И., Рейтман М. И. Нижняя граница несущей способности и оптимальное проектирование железобетонных плит.— В кн.: Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок.— М.: Наука, 1966.
65. Качанов Л. М. Основы теории пластичности.— М.: Наука, 1969.
66. Койтер В. Т. Общие теоремы упругопластических сред/Перевод с англ.— М.: ИЛ, 1961.
67. Колтынюк В. А. Несущая способность железобетонных пологих оболочек.— Строительное проектирование промпредприятий, 1968, № 3.
68. Коробов Л. А. О прочности железобетонных оболочек положительной кривизны при действии сосредоточенных сил.— Строительная механика и расчет сооружений, 1977, № 1.
69. Кривелев Л. М. Исследование предельного состояния пологих железобетонных оболочек с плоским контуром.— Бетон и железобетон, 1965, № 4.
70. Лауль Х. Х., Лейбур М. Х. Практический метод расчета квадратной в плане железобетонной оболочки типа гиперболического параболоида.— Труды Таллинского политехнического института, 1963, сер. А, вып. 200.
71. Лауль Х. Х., Тярно Ю. А. Некоторые вопросы работы квазицилиндрических и пологих оболочек двойкой кривизны в предельном состоянии.— В кн.: Пространственные конструкции зданий и сооружений.— М.: Стройиздат, 1975, вып. 2.
72. Лепик Ю. Р. Равновесие упругопластических и жесткопластических пластин и оболочек.— Инженерный журнал, 1964, № 4.
73. Либерман А. Д., Стаковиченко Е. И. Исследование короткой цилиндрической оболочки.— Бетон и железобетон, 1968, № 2.
74. Лукаш П. А. Расчет пологих оболочек и плит с учетом физической и геометрической нелинейности.— В кн.: Расчет конструкций, работающих в упруго-пластической стадии.— М.: Госстройиздат, 1961.
75. Лукаш П. А. Предельное состояние конструкций и нелинейная теория.— В кн.: Исследования по теории пластин и оболочек.— М., 1965, № 47.
76. Лукаш П. А. Основы нелинейной строительной механики.— М.: Стройиздат, 1978.
77. Марков А. А. О вариационных принципах в теории пластичности.— Прикладная математика и механика, 1947, т. XI, вып. 3.
78. Милейковский И. Е., Золотов О. Н. К расчету складчатых систем на ЭЦВМ.— В кн.: Строительные конструкции, М.: ЦНИИСК, 1970, вып. 6.
79. Милейковский И. Е., Кашаев Р. И. Напряженное состояние свода-оболочки под действием предельной нагрузки.— Строительная механика и расчет сооружений, 1971, № 2.
80. Мирзабекян Б. В., Рейтман М. И. Определение несущей способности и минимального армирования железобетон-

- ных оболочек методом линейного программирования.— В кн.: Исследования конструкций зданий и сооружений для сельского строительства.— М.: Стройиздат, 1968.
81. Немировский Ю. В. Предельное равновесие многослойных армированных осесимметричных оболочек.— Известия АН СССР, МТГ, 1969, № 6.
 82. Овчинин Л. М. Расчет железобетонных осесимметричных конструкций.— М.: Госстройиздат, 1961.
 83. Ольшак В., Савчук А. Неупругое поведение оболочек/ Перевод с англ.— М.: ИЛ, 1956.
 84. Онат Е. Т. Предельное равновесие пологих конических оболочек.— Сб. переводов «Механика», 1961, № 4, 68.
 85. Онат Е. Т., Прагер В. Предельное равновесие оболочек вращения.— Сб. переводов «Механика», 1955, № 5, 33.
 86. Прагер В., Ходж Ф. Г. Теория идеально пластических тел/Перевод с англ.— М.: ИЛ, 1956.
 87. Проценко А. М. Предельное равновесие пологих оболочек.— В кн.: Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластиночек.— М.: Наука, 1967.
 88. Проценко А. М. Предельное равновесие с учетом деформируемой схемы.— Строительная механика и расчет сооружений, 1969, № 3.
 89. Проценко А. М., Власов В. В. Определение несущей способности арок и куполов с применением ЭВМ.— В кн.: Расчет пространственных конструкций.— М.: Стройиздат, 1971, вып. XIV.
 90. Работнов Ю. Н. Приближенная техническая теория упруго-пластических оболочек.— Прикладная математика и механика, 1951, № 2.
 91. Рассказов А. О., Дехтярь А. С. Несущая способность пологих трехслойных оболочек.— Известия высших учебных заведений. Строительство и архитектура, 1977, № 5.
 92. Рассказов А. О., Дехтярь А. С. Предельное равновесие оболочек.— Киев: Вища школа, 1978.
 93. Ржаницын А. Р. Расчет пластиночек по предельному состоянию на действие сосредоточенной силы.— В кн.: Исследования по теории сооружений.— М.: Стройиздат, 1949, вып. IV.
 94. Ржаницын А. Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов.— 1-е изд.— М.: Стройвоенмориздат, 1949; 2-е изд.— М.: Стройиздат, 1954.
 95. Ржаницын А. Р. Приближенные решения задач теории пластичности.— В кн.: Исследования по вопросам строительной механики и теории пластичности.— М.: Госстройиздат, 1956.
 96. Ржаницын А. Р. Расчет железобетонных оболочек методом предельного равновесия.— Сб. НТО строительной промышленности: Теория расчета и конструирования железобетонных конструкций.— М.: Госстройиздат, 1958.
 97. Ржаницын А. Р. Пластические деформации трубы при осесимметричной нагрузке.— Известия АН СССР, ОТН, 1958, № 9.

98. Ржаницын А. Р. Расчет оболочек методом предельного равновесия.— В кн.: Исследования по вопросам теории пластичности и прочности строительных конструкций.— М.: Стройиздат, 1958.
99. Ржаницын А. Р. Расчет пологих оболочек методом предельного равновесия.— Строительная механика и расчет сооружений, 1959, № 1.
100. Ржаницын А. Р. Пологие оболочки и волнистые настилы. Некоторые вопросы теории расчета.— М.: Госстройиздат, 1960.
101. Ржаницын А. Р. Предельное равновесие пологих оболочек.— В кн.: Пространственные конструкции в СССР (по материалам первого Всесоюзного совещания по сборным железобетонным пространственным конструкциям, состоявшегося 13—17 ноября 1962 г. в Ленинграде).— Стройиздат, 1964.
102. Ржаницын А. Р. Расчет железобетонных плит методом линейного программирования.— В кн.: Труды VI конференции по бетону и железобетону. Материалы, подготовленные ЦНИИСК.— М.: 1966.
103. Ржаницын А. Р. Расчет цилиндрических сводов-оболочек методами линейного программирования.— Строительная механика и расчет сооружений, 1966, № 4.
104. Ржаницын А. Р. Расчет пластиин и оболочек кинематическим методом предельного равновесия.— В кн.: Материалы летней школы по проблеме «Физически и геометрически нелинейные задачи теории пластиин и оболочек».— Тарту, 1966, т. 1.
105. Ржаницын А. Р. Расчет оболочек методом предельного равновесия с применением линейного программирования.— В кн.: Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластиин.— М., 1966.
106. Ржаницын А. Р. Расчет арочных сводов кинематическим методом предельного равновесия с применением линейного программирования.— В кн.: Пространственные конструкции в Красноярском крае, Красноярск, 1968, вып. III.
107. Ржаницын А. Р. Двойственность статических и геометрических уравнений строительной механики.— Известия высших учебных заведений. Строительство и архитектура, 1974, № 11.
108. Ржаницын А. Р., Терехина В. И. Расчет четырехугольных плит произвольного очертания кинематическим методом с применением линейного программирования.— В кн.: Строительные конструкции, вып. 1. Расчет сооружений.— М.: ЦНИИСК, 1969.
109. Рождественский В. В. К вопросу о предельных состояниях сечений тонких оболочек.— В кн.: Исследования по вопросам строительной механики и теории пластичности.— М.: Госстройиздат, 1956.
110. Розенблум В. И. Приближенная теория равновесия пластических оболочек.— Прикладная математика и механика, 1954, № 3.
111. Розенблум В. И. О расчете несущей способности идеально пластических осесимметричных оболочек.— В кн.: Вопросы теории упругости и пластичности.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1965.

112. Рыхлевский Я., Шапиро Г. С. Идеально-пластические пластиинки и оболочки.— В кн.: Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин.— М.: Наука, 1966.
113. Себекина В. И. О предельном равновесии анизотропных оболочек при осесимметричных нагрузках.— Строительная механика и расчет сооружений, 1966, № 4.
114. Себекина В. И. Кинематический метод определения предельного состояния оболочек с применением линейного программирования.— В кн.: Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин.— М.: Наука, 1970.
115. Северов Л. Ф. Предельное равновесие пологих железобетонных оболочек положительной гауссовой кривизны с прямоугольным планом.— Сб. трудов ЛИИЖТ, 1965, вып. 239.
116. Соколовский В. В. Теория пластичности.— 2-е изд.— М.: Гостехиздат, 1950.
117. Терехина В. И. Расчет круглых пластин кинематическим методом с применением линейного программирования.— Строительная механика и расчет сооружений, 1969, № 1.
118. Терехина В. И. Использование двойственности в линейном программировании для расчета круглых пластин.— В кн.: Строительные конструкции, вып. 1. Расчет сооружений.— М.: ЦНИИСК, 1969.
119. Тютюнник А. М. Нижняя граница несущей способности железобетонных оболочек, очерченных по поверхности гиперболических параболоидов.— В кн.: Материалы V Всесоюзной конференции по применению ЭЦВМ в строительной механике.— Тбилиси, 1968.
120. Файнберг С. М. Пластическое течение пологой оболочки для осесимметричной задачи.— Прикладная математика и механика, 1957, № 3.
121. Хазалия Г. И. К вопросу установления экспериментально-теоретическим путем схемы разрушения сферических пологих оболочек.— Сообщения АН ГССР, 1957, т. XVIII, № 11.
122. Хайдуков Г. К. Расчет по предельным состояниям ступенчатовспаршенных панелей.— Научное сообщение НИИЖБ, М., 1960, вып. 7.
123. Хайдуков Г. К., Шугаев В. В. Учет начальной погиби и конечных перемещений при расчете несущей способности пологих железобетонных оболочек методом предельного равновесия.— В кн.: Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин.— М.: Наука, 1970.
124. Хайдуков Г. К., Шугаев В. В. Исследование предельного состояния железобетонных пологих оболочек при больших прогибах.— Бетон и железобетон, 1970, № 3.
125. Халас О. О предельном равновесии железобетонных плит.— Известия АН СССР, ОТН, 1956, № 8.
126. Хилл Р. Математическая теория пластичности/Перевод с англ.— М.: Гостехиздат, 1956.
127. Ходж Ф. Г. Расчет конструкций с учетом пластических деформаций/Перевод с англ.— М.: ИЛ, 1962.

128. Цурков И. С. К вопросу об интегрировании уравнений теории неупругих тонких оболочек.— Сб. трудов МИСИ им. В. В. Куйбышева, М., 1965, № 47.
129. Чарков В. Д. Определение несущей способности осесимметричных оболочек методом линейного программирования.— Известия высших учебных заведений. Машиностроение, 1969, № 5.
130. Чирас А. А. Применение методов линейного программирования к расчету статически неопределеных конструкций.— В кн.: Строительство и архитектура.— Вильнюс, 1963.
131. Чирас А. А. Кинематическая формулировка расчета упруго-пластических одномерных систем в терминах линейного программирования.— В кн.: Строительная механика и конструкции (Доклады XIV научно-технической конференции Каунасского политехнического института).— Вильнюс, 1964.
132. Чирас А. А. Двойственные задачи прямого проектирования и проверочного расчета упруго-пластических рам.— Строительство и архитектура Узбекистана, 1966, № 12.
133. Чирас А. А. Методы линейного программирования при расчете упруго-пластических систем.— Стройиздат, 1969.
134. Чирас А. А., Боркаускас А. Э., Каркаускас Р. П. Теория и методы оптимизации упруго-пластических систем.— Л.: Стройиздат, 1974.
135. Шапиро Г. С. О поверхностях текучести для идеально-пластических оболочек.— В кн.: Проблемы механики сплошной среды.— М.: Изд-во АН СССР, 1961.
136. Шугаев В. В. Влияние граничных условий на несущую способность железобетонных пологих оболочек при местном разрушении.— Строительная механика и расчет сооружений, 1974, № 3.
137. Bleich H. Über die Bemessung statisch unbestimmter Stahltragwerke — Bauingenieur, 1932, № 19/20.
138. Seradini G., Gavarini C. Calcolo a rottura e programmazione lineare. Giornale del Genio Civile, 1965, № 1—2.
139. Charnes A., Herbert I., Greenberg H. Plastic collapse and linear programming.— Bull. of the Amer. Math. Soc., 1951, № 6.
140. Demir H. H., Drucker D. C. An experimental study of cylindrical shells under ring loading.— In: Progress in Applied Mechanics (the Prager annivers volume), № 1.— London; Macmillan, 1963.
141. Drucker D. C., Greenberg H. D., Prager W. Extended limit design theorems for continuous media.— Quart. Appl. Math., 1951, № 9.
142. Drucker D. C. Limit analysis of cylindrical shells under axially symmetric loading.— Proc. Inst. Midwest Conf. Solid Mech., Urbana, 1953.
143. Drucker D. C. Variational principles in the mathematical theory of plasticity.— Proc. Symp. Appl. Math., 1958, 18.
144. Jones L. L. Ultimate load analysis of reinforced and prestressed concrete structures.— London, 1962.

145. Hodge P. C. Plastic analysis of circulas conical shells.— J. Appl. Mech., 1960, 27.
146. Hodge P. C. A comparison of yield conditions in the theory of plastic shells.— Problems in continuum mechanics, SIAM, Philadelphia, 1961.
147. Hopkins H. G. On the plastic theory of plates.— Proc. Roy. Soc. 1957, v. 241.
148. Ingerslew Age. On en elementar Beregningsmetode of krydsarmerede Plader.— Ingeniøren, 1921, v. 30, № 69.
149. Ingerslew Age. The strength of rectangular slabs.— J. Inst. structural eng., 1923, v. 1, № 1.
150. Johansen K. W. Beregning af krydsarmerede Sernibétonpladser Brudmoment.— Bygningsstatiske Meddelelser, 1931, v. 3, № 1.
151. Johansen K. W. Bruchmomente der krenzweise bewehrten Platten.— Mem. Ass. Int. Ponts Charp. 1932, v. 1.
152. Johansen K. W. Brudlineteorien.— Köbenhavn, 1943.
153. Johansen K. W. Pladeformler.— Köbenhavn, 1946.
154. Johansen K. W. Yield line theory.— Cements and concrete assoc., 1962.
155. Koiter W. T. General theorems for elastic-plastic solids.— Chap. in «Progress in solid mechanics», v. 1. Amsterdam, 1960.
156. Koopman D. C. A., Lance R. H. On linear programming and plastic limit analysis.— J. Mech. and Phys. Solids, 1965, v. 13, № 2.
157. Mansfield E. H. Studies in collapse analysis of rigid-plastic plates with a square yield diagram.— Proc. roy. soc., v. 241, 1957.
158. Mansfield E. H. An analysis of slabs supported along all edges.— Concr. constr. eng., 1960, v. LV, № 9.
159. Nielsen M. P. On the calculation of yield line patterns with curved yield lines.— Proc. symposium on the use of computers in civil engineering. Lisbon, 1962, v. 1, paper № 22.
160. Nielsen M. P. Yield conditions for reinforced concrete shells in the membrane state.— Proc. IAASS symposium en non-classical shell problems, Warzaw, 1963.
161. Nielsen M. P. Limit analysis of reinforced concrete slabs.— Copenhagen, 1964.
162. Onat E. T. The plastic collaps of cylindrical shells under axially simmetrical leading.— Quart. Appl. Math., 1955, № 13.
163. Onat E. T., Prager W. Limit analysis of shells of revolution.— Proc. Need. Acad. Wetensch., 1954, 86, № 6.
164. Prager W. Mathematical programming and theory of structures.— J. Soc. Indust. and Appl. Math., 1965, 13, № 1.
165. Prager W., Symonds. Stress analysis in elastic-plastic structures.— Proc. III Symp. Appl. Math. Am. Arbor Michigan, 1949.
166. Prandtl L. Über die Härte plastischer Körper.— Nachr. Ces. Wiss., Göttingen, 1920.
167. Rzhanitsyn A. R. The design of plates and shells by the kinematical method of limit equilibrium.— IX Congr. Intern. de mécanique appliquée. T. VI. Bruxelles, 1957.
168. Rzhanitsyn A. R. Calcul a la rupture et plasticite des constructions.— Paris, 1959.

169. Rzhanitsyn A. R. Calculation of shallow shells by the limit design method.— Proc. of the colloquium on simplified methods of shell structures. Brussel — Amsterdam, 1962.
170. Sawczuk A., Jaeger T. Grenztragfähigkeitstheorie des Platten.— Berlin, 1963.
171. Sawczuk A., Rychlewski I. On yield surfaces for plastic shells.— Arch. Mech. Stos., 1960, № 12.
172. Wolfensberger R. Traglast und optimale Bemessung von Platten.— Diss. doct. tech. Wiss. Eidgenos Techn. Hochschule. Zurich, Stafa, 1964.
173. Wood R. H. Studies in composite construction, Part II.— National building studies. Research paper № 22. London, 1955.
174. Wood R. H. Plastic and elastic design of slabs and plates.— London, 1962.