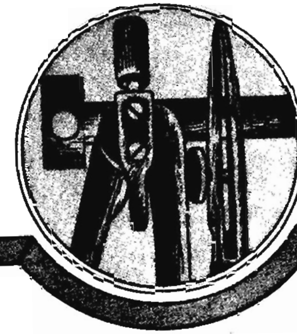
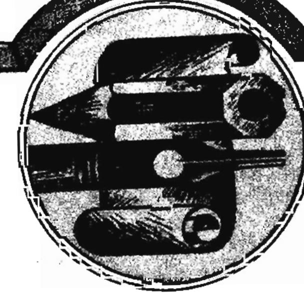
Статика, Гуго,— это учение о равновесии сил, о напряжениях и деформациях в несущих конструкциях, без неё нельзя построить даже негритянскую хижину ...
Г. Бёлль, «Бильярд в половине десятого»



М. И. РЕЙТМАН

ЗАЛОГ ПРОЧНОСТИ

МОСКВА
СТРОЙИЗДАТ
1979



38.112
Р 35
УДК 624.04

Печатается по решению секции литературы по строительной физике и конструкциям редакционного совета Стройиздата.

Научный редактор д-р техн. наук, проф. Я. Г. Пановко

Рейтман М. И.

Р 35 Залог прочности. — М.: Стройиздат, 1979. 136 с. с ил.

Оказывается, в наше время стремительное развитие свойственно не только бионике и кибернетике — не стоят на месте и древние науки, например строительная механика, сопротивление материалов. Вот только следить за их развитием непросто — слишком они ушли вглубь, так что над поверхностью осталось лишь немногое, что инженеры помнят со студенческой поры. Эта книга ставит целью восполнить этот пробел. В ней по возможности доступно рассказывается о современных методах расчета конструкций, о том, что сделано в этой науке за последние десятилетия: здесь и матричные методы, и метод конечных элементов, и статистические подходы. Особое внимание уделено приемам использования ЭВМ и методам получения оптимальных конструкций.

Книга предназначена для широкого круга читателей.

Р $\frac{30205-509}{047(01)-79}$ 89 — 78

38.112
6С1

ПРЕДИСЛОВИЕ НАУЧНОГО РЕДАКТОРА

Настоящая книга представляет собой популярные очерки по современной строительной механике. Принято считать, что научно-популярные издания рассчитаны на массового малоподготовленного читателя, которого нужно наиболее простым путем приобщить к *новым для него* понятиям той или иной научной дисциплины. В наше время такое представление многим кажется устаревшим и чрезмерно узким. С одной стороны, во всеубыстряющемся темпе происходит формирование *объективно новых* научных понятий, концепций и методов, а с другой стороны, бурно растет число квалифицированных читателей, нуждающихся в систематической информации о новых идеях. Естественно, что и этот своеобразный контингент массового читателя (вспомним миллионные выпуски специалистов из высшей школы!) заслуживает, чтобы для него также изыскивались наиболее простые способы изложения новейшей информации.

Постепенно сложился новый стиль современных популярных книг, они освобождены от второстепенных подробностей, ориентированы на достаточно подготовленного читателя — читателя, который вполне разумно не считает свое образование завершенным на вузовской скамье, а стремится идти в ногу с веком. Существует немало сочинений такого рода, в частности, и в области механики. Думается, что у этого вида научно-популярной литературы есть не только определенные достижения, но и особенно широкие перспективы развития.

Имея в виду свой контингент читателей, авторы таких книг в случаях необходимости пользуются не совсем элементарным математическим аппаратом или аппаратом аналитической механики. Тем не менее эти книги относятся к научно-популярной литературе: они адресованы массовому читателю (массовому — не значит малоподготовленному!), а научные положения излагаются со всей возможной простотой. Времена меняются, и ныне отсутствие математических формул перестало служить непременным признаком научно-популярного текста.

К этому жанру относится и настоящая книга, содержащая популярное изложение некоторых новых направлений научной мысли в области строительной механики и расчета сооружений. Автор обладает не только тонким пониманием проблем современной науки, но и литературным талантом,— тем, что называют "легким пером". Сочетание этих качеств в одном лице позволило создать интересную книгу, которая с успехом будет служить популяризации новых идей и расширению кругозора читателей.

Д-р техн. наук, проф. Я. Г. Пановко

Предисловие

Строительная механика возникла давно, но тем не менее это вполне современная наука. Множество учёных отдают ей свой талант и труд, но ещё больше тех, кто непосредственно использует методы этой науки для расчёта строительных конструкций и механизмов. Им-то в основном и адресована эта книга, посвящённая новым направлениям в строительной механике.

Популярными изданиями строительная механика очень бедна*. Задавшись целью восполнить этот пробел хотя бы отчасти, мы столкнулись прежде всего с трудностями отбора. Его результатом явились десять тем, отобранных по следующим признакам: а) они важны для современной практики проектирования конструкций и б) они поддаются относительно элементарному изложению. Конечно, сыграли свою роль и научные интересы автора.

Это популярные очерки, а не учебник и не обзор**. Предполагается, что они адресованы читателю, изучившему сопротивление материалов и строительную механику и желающему сейчас без особого труда узнать, что делается в науке о прочности сегодня. В то же время для специалиста по строительной механике эта книга может представить не только «лёгкое чтиво», но и повод ещё раз обдумать некоторые проблемы современной науки.

Несколько слов о принятой в книге форме изложения. Говорят, когда-то Евклид гордо заявил монарху, вздумавшему легко освоить геометрию, что в науке «нет царского пути». Эту легенду можно понимать по-разному. Не исключено, что она сочинена плохими преподавателями. И гордящиеся отсутствием «царского пути» специалисты отрезают значительной части читателей пути в чертоги знания. Поэтому большое внимание мы уделили доступности изложения. К сожалению, не в нашей власти полностью отказаться от математических выкладок: без них многие важные вопросы строительной механики в принципе не поддаются изложению. Из-за естественных различий между читателями одному из них формула понятна с полувзгляда, а другому представляется неприступной. Чтобы учесть интересы и тех, и других, мы построили книгу так, чтобы из неё можно было извлечь полезную информацию, даже минуя некоторые выкладки.

Любая библиография по столь обширному предмету была бы заведомо неполной, поэтому мы ограничились изданиями, которые особенно полезны для читателя.

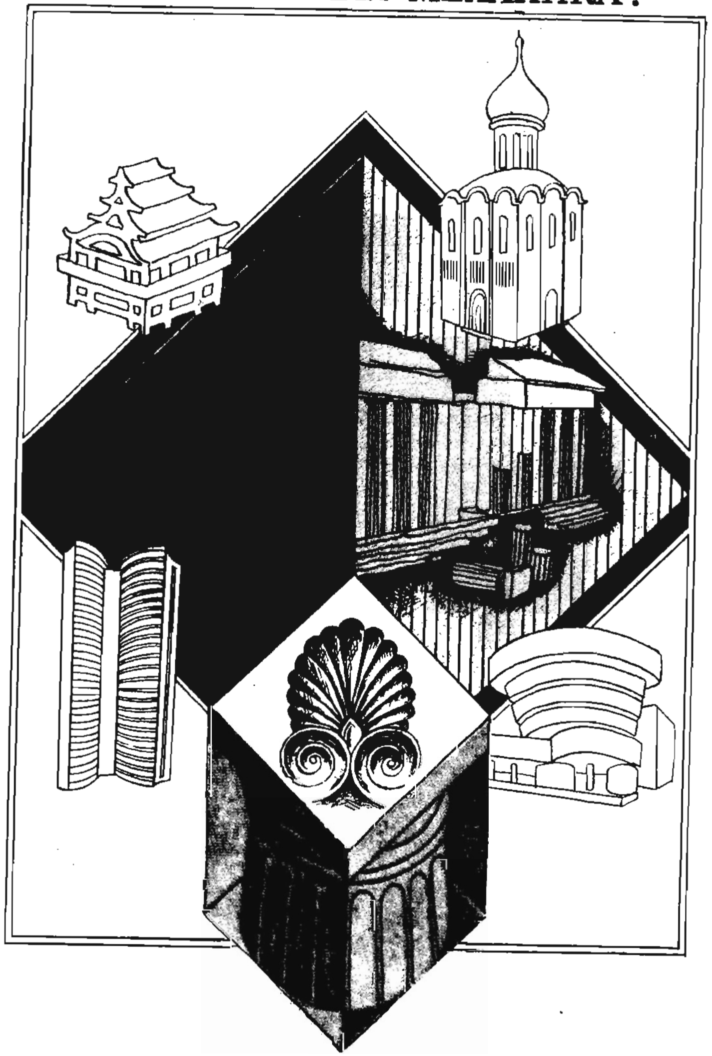
* Под этой рубрикой можно упомянуть лишь книги: М. Гордона [7] (это книга скорее о создании новых материалов, чем о расчёте конструкций), В.И. Феодосьева [21] (книга адресована прежде всего машиностроителям) и Г.Б. Колчина [10] (эта книга наиболее близка по замыслу к данной).

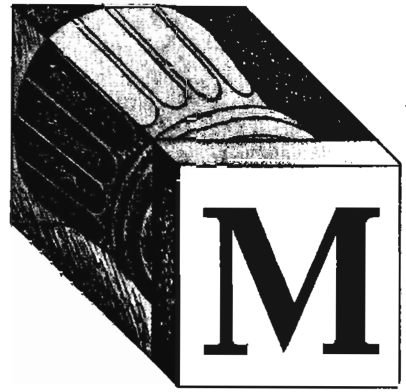
** Такой обзор дан в книге [5].

В список литературы в конце книги вошли издания достаточно широкого профиля, в то время как источники, в которых нас интересует лишь какая-то одна сторона, часто далёкая от строительной механики, вошли в подстрочные примечания.

Если читатель обнаружит в книге какие-либо достоинства, то скорее всего это можно отнести за счёт многих коллег автора, которые охотно оказывали ему помощь. На этапе обсуждения замысла полезны были советы А.Р. Ржаницына и О.В. Лужина, по готовой рукописи особенно содержательными были многочисленные замечания В.Г. Рекача. Г.Б. Колчин представил некоторые статистические данные. К сожалению, автор лишён возможности упомянуть в этом предисловии всех, оказавших ему помощь.

1
ЧТО ТАКОЕ СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА?





Мы хотели бы напомнить читателю как зародилась строительная механика, а также набросать её «информационный портрет», т. е. попытаться взглянуть на неё со стороны.

Механика – древняя наука. Её возраст – десятки веков. Она, несомненно, уже существовала, когда в неё пришёл, чтобы украсить своими трудами, Архимед. Хотя первый шаг в приложении законов механики к проблемам расчёта на прочность был сделан в 17 веке Галилеем, в инженерную практику расчётов механика вошла сравнительно недавно. Ещё в 1826 г. французский учёный Навье писал: «Большинство конструкторов устанавливают размеры частей машин и сооружений по образцу осуществлённых конструкций».

Обычно специалисты из опыта предшественников знали, в каких случаях конструкции выдерживали эксплуатацию, а в каких разрушались, и действовали исходя из опыта. Это было очень неудобно, так как всегда порождало неуверенность в исходе строительства, особенно, когда не было прототипов создаваемой конструкции.

Величественные руины мечети Биби-Ханым в Самарканде показывают, к чему приводили ошибки строителей: мечеть разрушилась через 30 лет после окончания строительства из-за недостаточной прочности кирпича. Таких случаев в древности, надо полагать было немало. Но с разрушением конструкций вследствие ошибок их авторов исчезли сами свидетельства этих ошибок. И в последующие века люди делали ошибочный вывод: в древности всё строили прочно. Но до них просто сохранилось самое прочное! При отсутствии методов расчёта прочности сооружений наиболее ответственна была роль архитекторов. Это нашло отражение в законах древних. Например, вавилонский законодатель Хаммурапи (около 1700 г. до н. э.) писал: «Если строитель построит дом и его творение окажется недостаточно прочным, и случится так, что построенный дом разрушится, вызвав смерть хозяина, то строителя следует предать казни»*. При этом, правда, ничего не говорилось о том, как обеспечить нужную прочность – законы человеческие формулировались задолго до того, как были открыты законы природы. Отголоски этого жестокого закона чувствовались и в гораздо более поздние времена. В 1830 г. зодчий К.И. Росси (1775-1849) при строительстве Александринского театра в Петербурге (сейчас театр им А.С. Пушкина) в ответ на высказанные ему сомнения в прочности железных ферм писал правительству [3]: «... В случае, когда бы в упомянутом здании от устройства металлической крыши произошло какое-либо несчастье, то в пример для других пусть меня тотчас повесят на одной из стропил»**.

Несколько ранее другому русскому зодчему М.Ф. Казакову пришлось в самом деле стоять под спроектированным им куполом здания Московского университета, когда началась разборка кружал – иначе рабочие не соглашались приступить к работе. Этот купол цел и поныне...

Промышленная революция конца 18 в. и последующее бурное развитие техники, в частности транспортной, сделали необходимым перевести решение вопросов прочности на подлинно научную основу. Полуинтуитивные и полуэмпирические способы их решения превращались в серьёзный тормоз прогресса. При создании крупных инженерных сооружений – в первую очередь железнодорожных мостов – уже нельзя было опираться только на опыт и чутьё. Плата за ошибки становилась всё более высокой в прямом и переносном смысле. Так под влиянием нужд практики в двадцатых годах прошлого века сопротивление материалов окончательно оформилось как научная дисциплина; к этому же времени относится и становление теории упругости. В течение всего 19-го столетия успешно развивалась теория стержневых систем, а во второй его половине были най-

* Цитируется по статье A. Baker. Proc. Inst. Civ. Engr., v. 56, 407-427, Nov., 1974.

** В этих словах можно усмотреть скрытое лукавство: в случае несчастья и обрушения стропил вешать Росси было бы не на чем. Впрочем, интуиция и опыт Росси не подвели, фермы выстояли. Конечно, из ферм Росси можно было бы без ущерба для их надёжности убрать часть материала.

дены общие методы раскрытия статической неопределимости. Возникла теория пластин и оболочек, было намечено решение некоторых динамических задач прочности и т.д. Техника получила надёжные основы прогнозирования («предвычисления» по выражению А.Н. Крылова) прочности проектируемых конструкций.

Но типы этих конструкций непрерывно развивались и усложнялись, появлялись новые конструктивные формы и новые конструкционные материалы – практика ставила перед теорией непрерывную череду проблем. Наука о прочности развивалась вширь и вглубь. Развитие её приняло лавинообразный характер и, что особенно важно отметить, сохраняет его и в наши дни*.

Не только телевизионные башни, достигающие в высоту многих сотен метров, не только гигантские мосты, перекрывающие ныне одним пролётом чуть ли не полуторакилометровые расстояния, но и множество более скромных по размерам, но весьма ответственных сооружений и зданий – всё это построенное в нынешнем веке создавалось с учётом рекомендаций строительной механики. Можно было ожидать, что столь важная для цивилизации наука приобретёт и серьёзный общественный престиж. Удивительно, но этого не произошло.

Далёкие от техники слои общества никогда не баловали механику конструкций чрезмерным вниманием (чего не скажешь об электричестве или магнетизме). Мы знаем, что Ф.М. Достоевский и В.Я. Шишков были по образованию инженерами и, следовательно, изучали сопротивление материалов. Но тщетно мы будем искать следы этого в их произведениях. Даже инженер-строитель Н.Г. Гарин-Михайловский в повести «Инженеры» (!) обошёлся без единого упоминания проблем расчёта прочности конструкций**. Вспомним по контрасту, какой яркий отпечаток наложила профессия врача на творчество А.П. Чехова, М.А. Булгакова, В.В. Вересаева или С. Моэма. По справедливости либо нет, но проблемы расчёта конструкций мало волновали общество и выразителей его дум.

* Подробности этого процесса до середины 20-го столетия прослежены в прекрасной книге С.П. Тимошенко [19] (см. также [3, 9]).

** Нам представляется, что в более ранние времена проблемам прочности сооружений в художественной литературе уделялось больше внимания. Так, классик китайской литературы 18 в. Цао Сюэ-Цинь, вспоминая Нюй-гуа (персонаж древней китайской мифологии), пишет: «... чтобы подпереть рухнувшее небо, заготовила она 36 501 камень, каждый в 120 чжанов высотой и 24 чжана в квадрате» (чжан – 3,2 м. *Прим. автора).* По этому описанию можно почти что составить рабочие чертежи конструкции. Более поздние авторы, по-видимому, относили такую информацию уже к техническим деталям и предпочитали подробнее описывать красоту подпираемого неба.

Да, строительная механика – наука неброская, однако в собрании наук она занимает почтенное, хотя и скромное место, как подобает дисциплине, уже справившей своё трехсотлетие. Вопреки мнению скептиков, строительная механика как наука не кончилась. Многое ещё неизвестно в ней учёным*, и не всегда она способна придти на помощь строителю. Вопреки словам героя Г. Бёлля** (см. эпиграф), до сих пор нередко строятся без расчёта или с самым примитивным расчётом не только хижины и не только у экватора. Но нельзя сказать, чтобы это благотворно отражалось на качестве объектов.

Что представляет собой строительная механика сегодня? С информационной точки зрения, это несколько сот тысяч книг, статей, отчётов и рефератов; каждый год в это море вливается ещё 15 тыс. исследований. Наивно было бы искать специалиста, усваивающего всю эту информацию, – разумеется, пятьдесят работ в день не читает никто (а ведь среди этих работ попадаются и многотомные монографии!). Но узкие специалисты всё же умудряются следить за общим движением своей науки, по крайней мере нескольких близких им разделов. Общая эрудиция, опыт, реферативный журнал «Механика» (а может быть и шестое чувство) помогают им выбирать из этого потока особо важные для них струйки. Хуже приходится инженерам-практикам: им очень трудно ориентироваться в этой информации, тем более, что используемый в строительной механике математический аппарат существенно усложнился. В наши дни наряду с дифференциальными уравнениями и алгеброй он включает теорию вероятностей, математическое прог-

* И главное, многое из того, что известно учёным, неизвестно никому, кроме них.

** Кстати, это чуть ли не единственный персонаж – специалист по строительной механике, известный автору настоящей книги. Да и то закрадывается подозрение, что автор хотел оттенить профессией героя его сухость. Вообще-то современная беллетристика густо населена инженерами всех специальностей, даже вымышленных, но своих коллег автор среди них почему-то почти не встречал.

раммирование, программирование для ЭВМ, матричное и векторное исчисление. А чтобы приобщиться к самым современным направлениям строительной механики, не обойтись без математической теории управления, тензорного и функционального анализа, теории групп и алгебраической топологии... Стоит ли продолжать этот список? Когда-то А. Эйнштейн с полушутливым ужасом отметил, что одного из таких направлений математики и без всяких приложений достаточно, чтобы поглотить короткую человеческую жизнь.

Но математические трудности – это не единственный барьер, препятствующий овладению новыми достижениями науки. Есть ещё и препятствия языкового характера. Вот как распределяются по языкам (в процентах) публикации по строительной механике (из материалов реферативного журнала «Механика»):

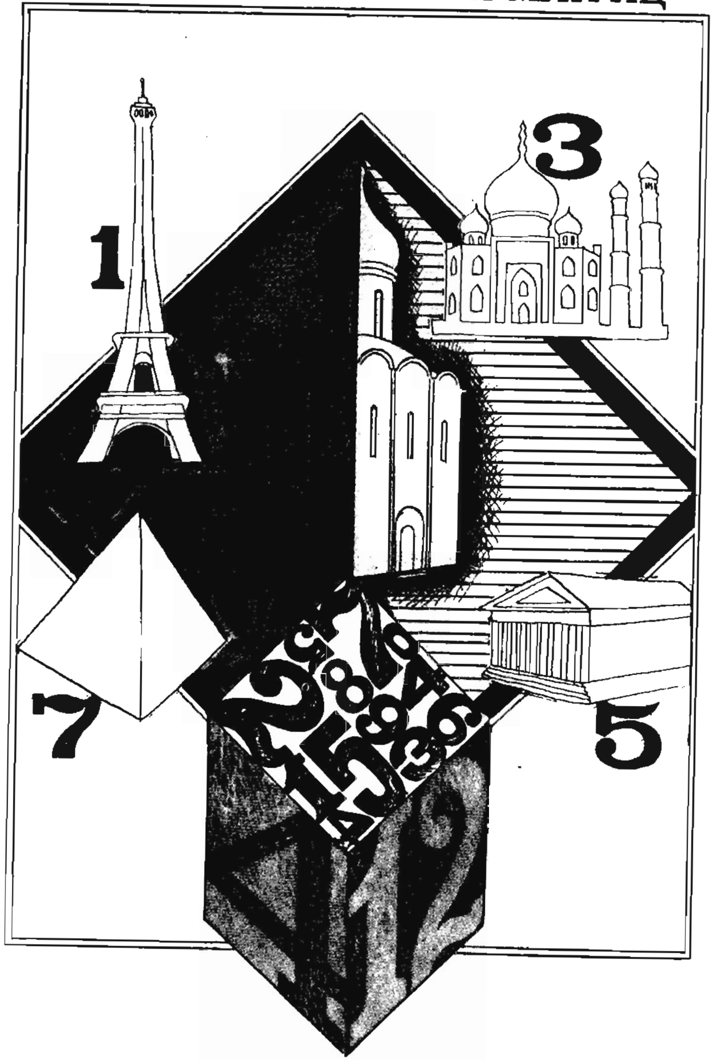
Год	Русский	Английский	Немецкий	Французский	Прочие
1955	28,8	38,8	15,1	8,8	13,5
1965	32,9	45,6	7,9	3,7	9,9
1975	46,5	37	4,4	2,4	9,7

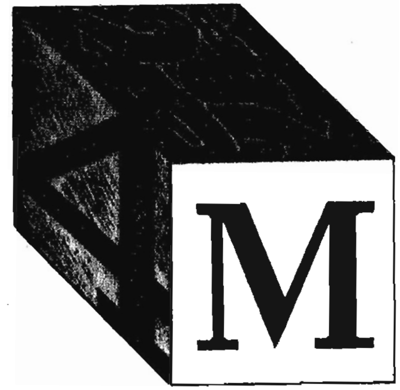
Эти данные свидетельствуют о возрастающей роли русского языка. В наше время для того чтобы следить за литературой по строительной механике, практически достаточно знать два языка – русский и английский.

Как выделить наиболее актуальные направления в строительной механике? Один из признаков даёт современная наукометрия*. Число публикаций в наиболее актуальных областях данной науки растёт быстрее, чем в среднем по отрасли. По строительной механике в целом период удвоения числа публикаций составляет 9 лет, а по оптимальному проектированию конструкций – 4,5 года. Число исследований по расчёту конструкций из неупругих материалов растёт в полтора раза быстрее числа исследований, относящихся к упругим конструкциям. Рекорд в последние годы принадлежит методу конечных элементов: число посвящённых ему публикаций удваивается каждые 3 года. Впрочем, этот критерий не безупречен: многие публикации создают лишь «информационный шум», классификация работ весьма условна, а публикаций по самым новым направлениям науки вчера ещё не было вообще. Однако бесспорно, что к числу наиболее актуальных относятся те проблемы строительной механики, которые связаны с другими научными дисциплинами, в первую очередь с экономикой, вычислительной техникой, теорией вероятностей.

* Налимов В.В., Мульченко З.М. Наукометрия. М., «Наука, 1969.

2
МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МАТРИЦ





Метод перемещений — один из главных методов современной строительной механики. В чём он состоит и как выглядит в современном матричном наряде?

Пусть имеется стержневая система, и u_1, u_2, ..., — обобщённые перемещения её узлов, измеряемые в линейных или угловых единицах. Будем считать, что внешние силы приложены к узлам. («А как быть, если сила приложена посередине стержня?» — спросите вы. Нужно просто считать, что в точке её приложения есть ещё один узел). Итак, пусть к узлам приложены обобщённые усилия P_1, P_2, ... , причем каждое из них отвечает обобщённому перемещению узла с тем же номером. Скажем, u_1 и P_1 — это угол поворота узла A (рис. 1,*а*) и внешний момент, приложенный к этому узлу. Рама, изображённая на рис. 1, характеризуется всего двумя обобщёнными перемещениями — углами поворота узлов A и B. Согласно методу перемещений, прежде всего рассмотрим результаты единичных перемещений $u_1 = 1$ и $u_2 = 1$. Придадим узлу A единичный поворот по часовой стрелке. По известным формулам сопротивления материалов, в стержнях при этом возникнут реактивные моменты:

$$\left.\begin{aligned} M^{(1)}_{A1} = M^{(1)}_{A2} = M^{(1)}_{A3} = \frac{4EJ}{l}; \\ M^{(1)}_{B1} = \frac{2EJ}{l}; \quad M^{(1)}_{B4} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

В то же время единичный поворот узла B даст в стержнях следующие реакции:

$$M^{(2)}_{A1} = \frac{2EJ}{l}; \quad M^{(2)}_{A2} = M^{(2)}_{A3} = 0; \quad M^{(2)}_{B1} = M^{(2)}_{B4} = \frac{4EJ}{l}. \qquad (2.2)$$

Действительные угловые перемещения узлов u_1 и u_2 под действием внешней нагрузки вызывают действитель-

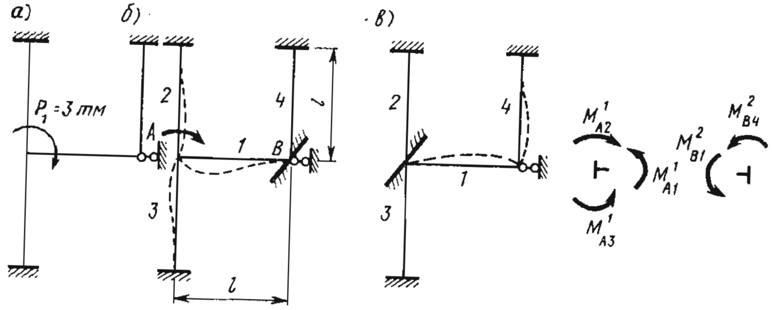


Рис. 1

ные реактивные моменты (рис. 1,*в*) в стержнях, которые должны быть соответственно в u_1 и u_2 раз больше:

$$\left.\begin{aligned} &\text{для узла } A\\ &R_A = r_{11}u_1 + r_{12}u_2 =\\ &= \left(\frac{4EJ}{l} + \frac{4EJ}{l} + \frac{4EJ}{l}\right)u_1 + \frac{2EJ}{l}u_2;\\ &\text{для узла } B\\ &R_B = r_{21}u_1 + r_{22}u_2 =\\ &= \left(\frac{4EJ}{l} + \frac{4EJ}{l}\right)u_2 + \frac{2EJ}{l}u_1 \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

(здесь r_{11} — реактивный момент в первом узле от единичного поворота того же узла; r_{12} — реактивный момент в первом узле от поворота второго узла и т. д.).

А теперь учтём тот факт, что под действием реактивных моментов в стержнях и внешней нагрузки узлы должны оставаться в равновесии. Отсюда

$$\left.\begin{aligned} r_{11}u_1 + r_{12}u_2 &= P_1;\\ r_{21}u_1 + r_{22}u_2 &= P_2. \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

Будем считать, что жёсткости стержней EJ одинаковы и $EJ/l = 1$. Тогда с учётом (2.3) систему (2.4) можно представить в виде:

$$\left.\begin{aligned} 12u_1 + 2u_2 &= 3;\\ 2u_1 + 8u_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

Мы составили канонические уравнения метода перемещений, которые связывают неизвестные перемещения. Решая эти уравнения, получаем $u_1 = 6/23$, $u_2 = -3/46$. Согласно методу перемещений, это и будут истинные угловые перемещения узлов рамы. Примерно в такой форме этот метод был предложен во второй половине прошлого века и дожил до середины настоящего. Однако обнаружилась необходимость представить метод в несколько иной форме, пользуясь векторами и матрицами.

ПРИКАЗ ПО АРМИИ

В строительной механике часто приходится иметь дело с большими массивами чисел и переменных, которые преобразуются сходным образом. Скажем, неизвестные метода сил и перемещений удовлетворяют системе однотипных уравнений. Тем не менее при обычном математическом способе записи каждый член каждого уравнения приходится выписывать отдельно. А нельзя ли оперировать целыми группами величин подобно тому, как военачальники командуют дивизиями, не обращаясь к каждому солдату в отдельности? Можно, с помощью теории матриц. Она широко используется в современной строительной механике.

Пусть между переменными x_1, x_2, ..., и y_1, y_2, ... имеется группа зависимостей:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n;\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n. \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

Чтобы записать эти зависимости покороче, придется ввести несколько специальных понятий: совокупность значений y_1, y_2, ..., y_m и x_1, x_2, ..., x_n назовем *вектором-столбцом* (его будем обозначать с помощью фигурных скобок):

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} y_1\\ y_2\\ \ldots\\ y_m \end{Bmatrix}; \tag{2.7}$$

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix}. \qquad (2.8)$$

Такие векторы подобны отделениям, в которых солдаты выстроены «в затылок». Совокупность коэффициентов $(a_{ij}(i = 1, ..., m;\ j = 1, ..., n)$ назовём прямоугольной матрицей $[a]$:

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1} a_{m2} \dots a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (2.9)$$

(сравните со взводом, который образует n отделений, выстроенных «в затылок»). Операцию, представленную формулами (2.1), определим как умножение матрицы $[a]$ на вектор $\{x\}$. Это позволит записать формулы (2.6) в компактном виде:

$$\{y\} = [a]\{x\}. \qquad (2.10)$$

Не удивляйтесь, если эта зависимость предстанет перед вами в какой-нибудь книге в ином виде, скажем, в таком:

$$y = Ax,$$

где y и x – векторы; A – матрица, не снабжённая специфическим обрамлением.
Мы здесь избрали обозначения, которые распространены в литературе по методу конечных элементов [8].

Таким образом, каждый элемент вектора-столбца произведения $[a]\{x\}$ – есть сумма произведений элементов строки матрицы $[a]$ на элементы вектора-столбца $\{x\}$. Поэтому операция умножения матрицы на вектор имеет смысл лишь тогда, когда число столбцов матрицы равно размерности (числу компонент) вектора-столбца $\{x\}$. В частности, если матрица имеет одну строку

$$[a] = [a_1, \dots, a_n], \qquad (2.11)$$

она называется вектором-строкой и её произведение на вектор столбец $\{x\}$ есть скаляр y.

А теперь вернёмся к военной аналогии и скомандуем взводу «Направо!». Матрица $[a]^T$ называется транспонированной к матрице $[a]$, если столбцы матрицы $[a]^T$ являются строками матрицы $[a]$, а строки $[a]^T$ – столбцами матрицы $[a]$, т.е.

$$a^T_{ji} = a_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots m; \; j = 1, 2, \dots, n). \tag{2.12}$$

В дальнейшем, хотя и ещё нескоро, нам пригодится такая формула матричной теории

$$([a]\{x\})^T = \{x\}^T[a]^T, \tag{2.13}$$

которая проверяется непосредственным раскрытием произведения. Вот, собственно, тот необходимый минимум понятий, который нам понадобится в дальнейшем в этой главе.

А теперь попытаемся применить эти представления к задаче, которую сформулировали в начале главы. Рассмотрим задачу в матрично-векторной форме. Пользуясь введёнными обозначениями, вместо (2.13) получим

$$[r]\{u\} = \{P\}, \tag{2.14}$$

где

$$[r] = \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}; \qquad \{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}; \qquad \{P\} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Для нашего случая преимущества записи вида (2.14) неочевидны. Но положение меняется, если рассматривается система со 100 неизвестными метода перемещений. Ведь в этом случае запись (2.14) эквивалентна уже ста уравнениям!

Матрица $[r]$, которую мы в дальнейшем уже не сможем миновать во многих случаях, определяет жёсткость системы, а потому и называется «матрицей жёсткости».

ПЕРЕМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ

Возможность компактной записи канонических уравнений в виде (2.14) уже сама по себе привлекательна, но матрицы создают и другие возможности. Чтобы с ними познакомиться, придётся использовать произведение матриц. Произведение двух матриц

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{11} a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} a_{m2} \cdots a_{mn} \end{bmatrix} \text{ и } [b] = \begin{bmatrix} b_{11} b_{12} \cdots b_{1l} \\ b_{21} b_{22} \cdots b_{2l} \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_{n1} b_{n2} \cdots b_{nl} \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

определяется как новая матрица

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11} c_{12} \cdots c_{1l} \\ c_{21} c_{22} \cdots c_{2l} \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_{m1} c_{m2} \cdots c_{ml} \end{bmatrix}, \tag{2.16}$$

элементы которой находят по формуле

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}^{*}. \tag{2.17}$$

Иначе говоря, каждый элемент матрицы-произведения есть скалярное произведение вектора-строки первого сомножителя и вектора-столбца второго сомножителя, в которых стоит вычисляемый элемент**. Легко убедиться, что произведение матриц подчиняется сочетательному закону, т.е.

$$[a]\,([b][c]) = ([a][b])\,[c]. \tag{2.18}$$

Матричный наряд: первая примерка

А теперь обратимся к нашему примеру. Введём такую матрицу $[r]^{-1} = [k]$, что

$$[r]^{-1}[r] = [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.19}$$

* «Ага, – скажет здесь более или менее опытный читатель, – с этим приёмом я сталкивался не раз: сначала автор убеждает, что больше никаких знаний для понимания текста не потребуется, а потом выясняется, что нужно прочесть еще пять книг». Автор обязуется в дальнейшем не убаюкивать читателя заявлением, что ничего трудного на его пути не встретится.

** «Строка на столбец» — если пытаться запомнить.

Матрица $[r]^{-1}$ называется обратной матрицей к матрице $[r]$, а матрица $[I]$ – единичной. По определению умножения двух матриц (2.17) нетрудно догадаться, что матрица $[I]$ определяет тождественное преобразование, т. е. умноженный на неё вектор остаётся самим собой. Известный всем скалярный аналог матрицы $[r]^{-1}$ – это обратное число ($r^{-1} = 1/r$, $r^{-1}r = 1$). Умножив обе части уравнения (2.14) на $[r]^{-1}$, получим

$$[r]^{-1}[r]\{u\} = [r]^{-1}\{P\}$$

или

$$\{u\} = [k]\{P\}. \tag{2.20}$$

Зависимость (2.20), где $[k] = [r]^{-1}$ называется *матрицей податливости* системы, позволяет записать в явном виде выражение для перемещений через действующие на систему усилия. Зная $\{P\}$, можно путём умножения матрицы на вектор найти перемещения узлов рамы при любом варианте нагружения. Это большое преимущество, но не следует его переоценивать: ведь для определения $[k]$ приходится обращать матрицу $[r]$, а это ещё труднее, чем решение системы уравнений.

Существуют десятки способов отыскания обратной матрицы и сотни программ, реализующих эти способы, поэтому инженер может подходить к этой проблеме чисто потребительски: считайте, что современная ЭВМ умеет обратить матрицу размером до 10 000 строк, и используйте для этого стандартные программы*.

Итак, допустим, что у нас всегда есть возможность получить обратную матрицу. В нашей задаче это

$$[k] = \begin{bmatrix} 2/23 & -1/46 \\ -1/46 & 3/23 \end{bmatrix}. \tag{2.21}$$

Согласно основным теоремам строительной механики, эта матрица, как и матрица $[r]$, всегда симметрична. Стало быть, выражение для вектора перемещений в нашем случае можно записать в виде

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/23 & -1/46 \\ -1/46 & 3/23 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{2.22}$$

Отсюда по известному уже правилу перемножения матрицы на вектор получаем

$$u_1 = \frac{2}{23}3 + \left(-\frac{1}{46}\right)0 = \frac{6}{23}; \quad u_2 = \left(-\frac{1}{46}\right)3 + \frac{3}{23}0 = -\frac{3}{46}. \tag{2.23}$$

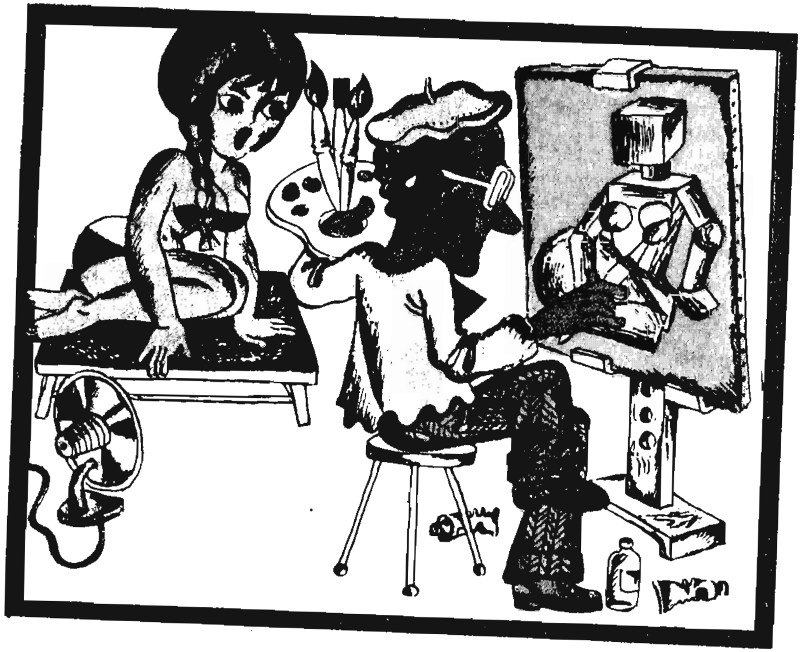
Конечно, то же даёт обычное решение системы уравнений (2.16). Зная перемещения узлов, можно перейти к вычислению усилий, деформаций и всего прочего, с чем всегда приходится иметь дело в строительной механике.

* Лет десять назад представитель американской фирмы «Юнивак», производящей ЭВМ, на вопрос: «В чём главная трудность при использовании ЭВМ на Западе?» ответил: «Все хотят быть авторами программ». Это, конечно, преувеличение; знание методов обращения матриц никому не повредит, но всё же мы не рекомендовали бы увлекаться составлением собственных программ там, где изрядно потрудились многие опытные программисты.

НЕДОСТАТКИ – ЭТО ПРОДОЛЖЕНИЯ ДОСТОИНСТВ

Взвесим преимущества и недостатки матричных методов. Компактность записи не только приятна для глаза, но и полезна. Именно матричная форма записи особенно эффективна при решении задач на ЭВМ. Упрямое нежелание пользоваться матричными понятиями практически почти эквивалентно отказу от использования ЭВМ и, можно сказать, приводит к невозможности решения мало-мальски сложных статически-неопределимых систем.

Но у матричных методов строительной механики есть и свои минусы. Инженеры нередко жалуются, что по матричной записи они не «чувствуют конструкции», что им приходится прикладывать дополнительное умственное усилие, чтобы увидеть в уравнении (2.14) то же, что они без труда видят в уравнении (2.5). И это серьёзный изъян. В своё время академик А. Н. Крылов, участвуя в споре о том, как преподавать инженерам теоретическую механику – в векторной или в скалярной форме, напомнил слова Кельвина: «Векторы экономят мел, но расходуют мозги». И всячески избегал векторов.



Но со временем инженерам (да и не только им) становится доступной всё более высокая степень математической абстракции, и уже сейчас в преподавании теоретической механики восторжествовала векторная форма изложения. Соответственно в строительной механике стало возможным компромиссное решение: основные понятия излагаются «как обычно», а при расчёте примеров студенты переходят к векторам и матрицам. И это, по-видимому, правильно. Если изучающий строительную механику не выстрадает каждую цифру расчёта конструкций, а будет получать их ровными рядами из печатающего устройства компьютера, то неоткуда будет развиваться инженерной интуиции. Ведь недаром молодых мореходов и сейчас обучают на парусниках — после этого их лучше слушаются атомоходы. Конечно, постоянно остаётся спорным вопрос о том, на какой уровень абстракции готовы в настоящий момент под-

няться инженеры в математическом описании явлений. В 18-м веке их страшила алгебра, школьная по нынешним понятиям. Во второй половине нашего столетия прозвучали саркастические слова датского инженера К. Иогансена: «Когда я вижу символизм тензорного исчисления, я всегда вспоминаю сказку Андерсена «Новое платье короля»*. (Тем не менее тензорное исчисление стало теперь обычным аппаратом теории упругости).

Такие резкие суждения — это реакция на нередкие в последнее время проявления в среде инженеров математического снобизма. Действительно, некоторые инженеры предпочитают какой-нибудь простой факт, скажем «задача не имеет решения», непременно выразить в терминах теории множеств («множество решений задачи пусто»).

Нередки случаи (особенно грешат этим аспирантские работы), когда инженеры щеголяют свежезаученной математической фразеологией, облекая тривиальные факты в форму теорем. Некоторые из них при этом глубоко веруют в то, что вносят вклад в математику, хотя в среде математиков это вызывает лишь снисходительные усмешки. Более того, в работах математиков последнего времени наметился отход от «систем теорем» поближе к живому свободному стилю (например, в работах Р. Беллмана).

Есть у матричных методов и ещё один недостаток, который хорошо знают вычислители**. Матричные операции на ЭВМ требуют большого расхода памяти ЭВМ. Однако некоторые ухищрения программистов, которых мы с вами здесь не касаемся, позволяют преодолеть и этот недостаток.

ПОКОНЧИМ С МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Чтобы подсчитать моменты в опасных сечениях рамы M, нужно умножить моменты от единичных пере-

* Второй международный конгресс по тонкостенным оболочкам-покрытиям. М., Госстройиздат, 1960, с. 265.

** Резников Р. А. Решение задач строительной механики на ЭВМ. М., Стройиздат, 1971.

мещений, определённые по формулам (2.1) и (2.2), на истинные перемещения u_1 и u_2 и просуммировать*:

$$\left.\begin{aligned}
\bar{M}_{A1} &= M^{(1)}_{A1} u_1 + M^{(2)}_{A1} u_2 = 4\frac{6}{23} - 2\frac{3}{46} = \frac{21}{23};\\
\bar{M}_{A2} &= M^{(1)}_{A2} u_1 + M^{(2)}_{A2} u_2 = 4\frac{6}{23} - 0\frac{3}{46} = \frac{24}{23};\\
\bar{M}_{A3} &= M^{(1)}_{A3} u_1 + M^{(2)}_{A3} u_2 = 4\frac{6}{23} - 0\frac{3}{46} = \frac{24}{23};\\
\bar{M}_{B1} &= M^{(1)}_{B1} u_1 + M^{(2)}_{B1} u_2 = 2\frac{6}{23} - 4\frac{3}{46} = \frac{6}{23};\\
\bar{M}_{B4} &= M^{(1)}_{B4} u_1 + M^{(2)}_{B4} u_2 = 0\frac{6}{23} - 4\frac{3}{46} = -\frac{12}{23}.
\end{aligned}\right\} \tag{2.24}$$

Взгляните теперь, насколько изящнее выглядит эта группа зависимостей в матричной форме

$$\{\bar{M}\} = [M]\{u\}. \tag{2.25}$$

Правда, сюда придётся добавить расшифровку участвующих в этом соотношении векторов и матриц:

$$\{\bar{M}\} = \begin{Bmatrix} \bar{M}_{A1} \\ \bar{M}_{A2} \\ \bar{M}_{A3} \\ \bar{M}_{B1} \\ \bar{M}_{B4} \end{Bmatrix}; \quad [M] = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 0 \\ 4 & 0 \\ 2 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} \frac{6}{23} \\ -\frac{3}{46} \end{Bmatrix} \tag{2.26}$$

А если к тому же подставить (2.20) в (2.25), то можно получить уравнения для усилий в статически неопределимой системе, выраженные через приложенные к ней нагрузки, вообще не прибегая к перемещениям

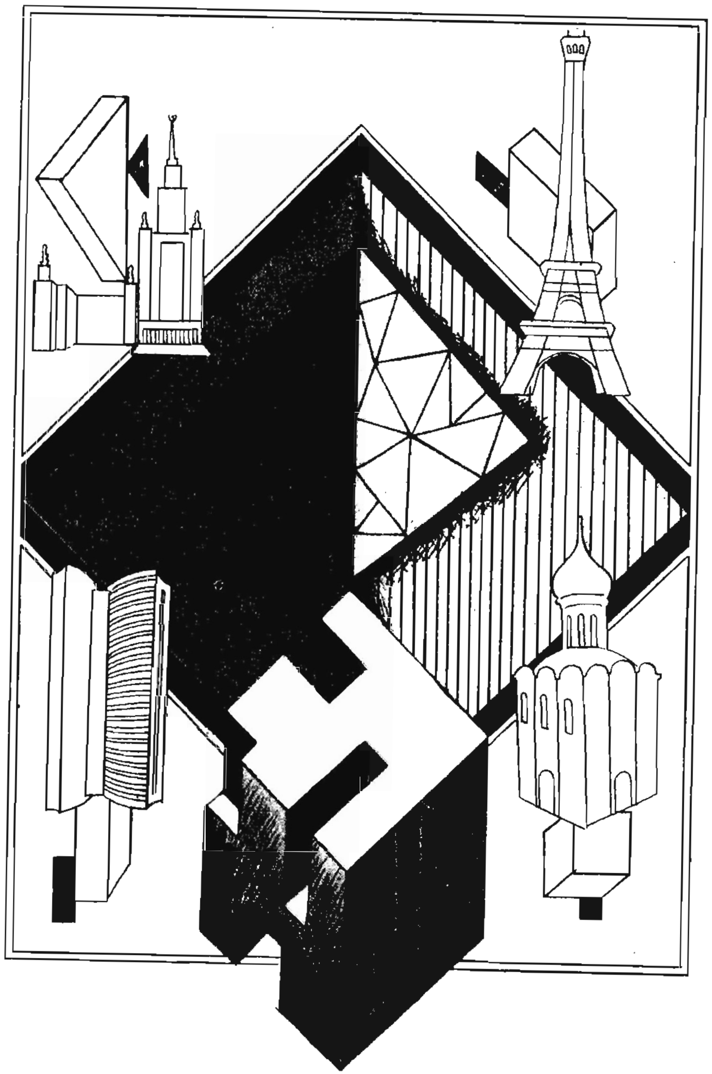
$$\{\bar{M}\} = [M][k]\{P\}. \tag{2.27}$$

* Если бы нагрузки создавали моменты в стержнях основной системы, их, разумеется, следовало также добавить к вычисленным.

Стоит ли удивляться широкому распространению векторно-матричных методов в строительной механике, если многие страницы формул и рассуждений можно заменить одной лаконичной и вместительной формулой*.

* Более подробно с применением теории матриц в строительной механике можно познакомиться по книгам [18, 22].

3
МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ



РАЗДЕЛЯЙ И ВЛАСТВУЙ

Этот метод с непостижимой быстротой завоевал вычислительные центры: именно с его помощью стало возможным рассчитывать сложные детали экскаваторов, арочные плотины, фундаменты замысловатой формы и прочие объекты, перед которыми были бессильны традиционные аналитические методы. В чём же суть этого «чудодейственного» средства? Нам снова придётся вернуться назад. В начале прошлого века Навье сформулировал общую задачу расчёта упругой конструкции как задачу определения перемещений во всех точках конструкций, т.е. такого вектора u (x, y, z), который удовлетворяет уравнениям теории упругости и граничным условиям. Правда, найти эту функцию оказалось непросто. Для тел относительно простой формы это научились делать с помощью приближённых методов Ритца и Бубнова-Галеркина и некоторых других, которые называют прямыми вариационными методами. Сущность этих методов заключается в следующем. Поскольку задача отыскания функции u очень трудна, допустим, что эту функцию можно представить в виде

$$u = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + ... + a_n\varphi_n, \tag{3.1}$$

где $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ – так называемые базисные функции от x, y, z; $a_1, a_2, ..., a_n$ – неизвестные постоянные коэффициенты.

Если задать функции $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ из каких-либо разумных соображений, то задача сведётся к отысканию неизвестных коэффициентов $a_1, a_2, ..., a_n$, а это уже задача попроще.

Вопрос о математической строгости представления (3.1) мы благоразумно обойдём – такие проблемы волнуют математиков и мало трогают инженеров, а поговорим о многочисленных и разнообразных способах определения коэффициентов. Так, в методе Ритца их находят из условия минимума потенциальной энергии системы, в методе коллокаций – из условия удовлетворения дифференциальных уравнений задачи в отдельных точках и т.д. Но эти методы оказались пригодны для расчётов лишь сравнительно простых по конфигурации тел – прямоугольных пластин и оболочек, осесимметричных тел. Однако как только инженеры пытались применить их к более сложным телам (например, гравитационным плотинам), начинались неприятности. Оказалось, что если выбирать функции $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ наобум, то в ряду (3.1) нужно удерживать очень много членов, часто без надежды на успех. Если же назначать функции $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ так, чтобы они полнее отвечали смыслу задачи, то сама проблема назначения этих функций может оказаться не проще исходной.

Решение нашли в ответе на вопрос: обязательно ли во всём объёме тела Ω функция u должна иметь одно и то же аналитическое представление? Быть может, область Ω, занимаемую телом, можно разбить на подобласти, в каждой из которых деформированное состояние является достаточно простым, а затем «сшить» из этих подобластей полную область Ω? Эта простая идея, разделить тело и властвовать над отдельными областями, оказалась чрезвычайно плодотворной, она обогнала по эффективности многие глубокие и тонкие идеи, попросту отменила ряд признанных ранее методов и похоронила для практики некоторые красивые теоретические построения аналитиков. В этом сказалась своеобразная и по-своему жестокая логика современного развития науки: в наш машинный век нередко оказываются самыми эффективными простые «лобовые» приёмы, порой оскорбляющие эстетические чувства учёных, стоящих на классической платформе.

Впрочем, поборников «классики» понять нетрудно. Если стройные цепочки силлогизмов, которые привыкли связывать с классической теорией упругости, заменяются методом, суть которого понятна даже непосвященным и вся его мощь лишь в быстродействии компьютера, тут в пору пожаловаться на вытеснение из науки романтики. Но нам кажется, что романтика не ушла, просто она изменила черты.

Разумеется, строительная механика – это прикладная наука, не её дело открывать нетленные законы, которые

должны со временем перекочевать в школьные учебники. Но всё-таки возникает опасение: не будут ли с развитием численных методов забыты изысканные построения аналитиков, расцвет которых пришёлся на середину нашего века и которые сейчас переживают закат? Не утратят ли инженеры своё мастерство, передоверившись бездушным машинам, так что на ЭВМ легко будут рассчитывать доменную печь на действие землетрясения, а без них – спасуют перед балкой на двух опорах? И под аккомпанемент таких рассуждений внешне невинные численные методы приобретают черты грозных варваров, которые сокрушали своей грубой силой древние цивилизации, губили искусства и низводили ремёсла. Что можно противопоставить этим сомнениям? Веру в диалектическую гармонию и целесообразность научного прогресса, в соответствии с которыми через некоторое время современные машинные методы будут казаться изящными и романтичными, а на смену им придут какие-нибудь другие методы, а вместе с ними и бионические роботы, «неуклюжие» с точки зрения их современников. Эти полумашины-полурастения будут рассчитывать конструкции в миллиард раз лучше, чем «старый добрый компьютер на интегральных схемах».

А теперь вернёмся к методу конечных элементов – посмотрим, как воплощается этот метод в случае двумерных задач теории упругости. Тот, кому вывод приведённых ниже зависимостей покажется трудным для понимания, может перейти к рассмотрению примера на стр. 40.

ТРЕУГОЛЬНЫЕ КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Пусть тело в условиях плоского напряжённого состояния разбито на треугольные конечные элементы (рис. 2,а). Силы могут быть приложены к вершинам элементов – назовём их узлами. Будем считать, что внутри каждого элемента реализуется однородное напряжённо-деформированное состояние. На основе этих допущений можно получить общие зависимости между внешними нагрузками и перемещениями в теле аналогично тому, как это было сделано выше для стержневых систем.

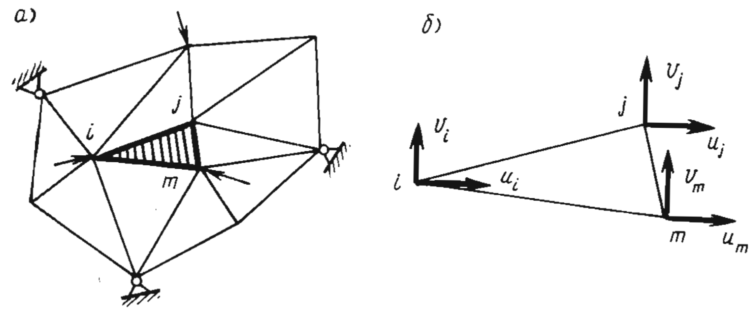


Рис. 2

Пусть перемещения каждой из вершин треугольника i, j, m (рис. 2,б) выражаются компонентами u_i, v_i, u_j, u_m, v_m, которые и будут служить основными неизвестными задачи. Шесть компонент перемещения образуют для каждого элемента шестимерный вектор:

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}. \qquad (3.2)$$

Перемещения в пределах рассматриваемого конечного треугольного элемента ijm будем искать в виде линейных функций от координат x и y:

$$\left.\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y; \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y. \end{aligned}\right\} \qquad (3.3)$$

где α_1, ..., α_6 — коэффициенты, которые в пределах каждого элемента сохраняют постоянные значения. Нетрудно показать, что принятому распределению перемещений отвечает однородная деформация каждого элемента.

Коэффициенты α_1, ..., α_6 можно выразить через перемещения узлов. Ну, скажем, таким путём. Для перемещений u_i, u_j, u_m справедливы уравнения:

$$\left.\begin{aligned} u_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i; \\ u_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j; \\ u_m &= \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m. \end{aligned}\right\} \qquad (3.4)$$

Отыскание из трёх уравнений (3.4) трёх неизвестных α_1, α_2, α_3, как мы надеемся, представляется нашему читателю разрешимой задачей.

Точно так же можно определить и коэффициенты α_4, α_5, α_6. Если решить системы уравнений, т.е. найти из них α_1, ..., α_6 и подставить в (3.3), то получим формулы для u и v:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\Delta}\left[(a_i + b_i x + c_i y)u_i + (a_j + b_j x + c_j y)u_j + \right. \\ &\quad \left. + (a_m + b_m x + c_m y)\,u_m\right]; \\ v &= \frac{1}{2\Delta}\left[(a_i + b_i x + c_i y)\,v_i + (a_j + b_j x + c_j y)\,v_j + \right. \\ &\quad \left. + (a_m + b_m x + c_m y)\,v_m\right], \end{aligned}\right\} \qquad (3.5)$$

где использованы обозначения:

$$\left.\begin{aligned} &a_i = x_i y_m - x_m y_i; \quad b_i = y_j - y_m; \quad c_i = x_m - x_j \\ &\text{и } \Delta - \text{площадь треугольника } ijm \end{aligned}\right\} \qquad (3.6)$$

(остальные подобные формулы легко получаются с помощью циклической перестановки индексов).

Формулы (3.5) позволяют выразить перемещения в любой точке внутри треугольного конечного элемента через перемещения его вершин.

Ещё усилие — и вы владеете методом конечных элементов.

Деформации внутри конечного элемента можно выразить через перемещения с помощью зависимостей Коши (см. любой курс теории упругости и почти любой курс сопротивления материалов, скажем [20] или [2]):

$$
\left.
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\Delta}\left(b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m\right);\\
\varepsilon_y &= \frac{dv}{dy} = \frac{1}{2\Delta}\left(c_i v_i + c_j v_j + c_m v_m\right);\\
\gamma_{xy} &= \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2\Delta}\left(c_i u_i + c_j u_j + \right.\\
&\qquad \left. + c_m u_m + b_i v_i + b_j v_j + b_m v_m\right).
\end{aligned}
\right\} \qquad (3.7)
$$

А теперь, с учётом (3.3), можно переписать (3.7) в матрично-векторной форме:

$$
\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix} b_i 0 \; b_j 0 \; b_m 0 \\ 0 c_i \; 0 c_j \; 0 c_m \\ c_i b_i c_j b_j c_m b_m \end{bmatrix}\{\delta\} \qquad (3.8)
$$

или так

$$
\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\}, \qquad (3.9)
$$

$$
\text{где } [B] = \frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix} b_i 0 \; b_j 0 \; b_m 0 \\ 0 c_i \; 0 c_j \; 0 c_m \\ c_i b_i c_j b_j c_m b_m \end{bmatrix}\{\delta\}
$$

Соотношение (3.9) – это конечноэлементный аналог зависимостей Коши.

Для перехода от деформаций тела к напряжениям используем закон Гука при плоском напряжённом состоянии [2]:

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}\varepsilon_x + \frac{E\nu}{1-\nu^2}\varepsilon_y;\\
\sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}\varepsilon_y + \frac{E\nu}{1-\nu^2}\varepsilon_x;\\
\tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} = \frac{E(1-\nu)}{2(1-\nu^2)}\gamma_{xy}
\end{aligned}
\right\} \qquad (3.10)
$$

или в матричной форме

$$
\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}, \qquad (3.11)
$$

$$
\text{где } [D] = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}
$$

(здесь E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона).

Матрицы $[D]$ и $[B]$ содержат всю информацию о рассматриваемом элементе: матрица $[D]$ определяет

его упругие характеристики, а матрица $[B]$ – геометрические.

Для составления канонических уравнений метода перемещений в нашем случае удобно воспользоваться принципом возможных перемещений. Обозначим через $\{F\}$ вектор узловых нагрузок, которым соответствуют перемещения $\{\delta\}$, так, чтобы компоненты этих векторов совпадали по направлениям. Согласно принципу возможных перемещений, если деформированное тело находится в равновесии, то работа внешних сил на возможных перемещениях по величине равна работе внутренних сил на тех же перемещениях. Придадим узлам конечного элемента возможные перемещения $\{\delta^*\}$, которым отвечают деформации $\{\varepsilon^*\}$. Тогда работа внешних сил составит

$$
\{\delta^*\}^T\{F\}, \qquad (3.12)
$$

а работа внутренних сил – напряжений – в единице объёма тела будет равна

$$
\{\varepsilon^*\}^T\{\sigma\}. \qquad (3.13)
$$

Подставляя (3.9) в (3.13) с учётом (2.8), получаем

$$
\{\varepsilon^*\}^T\{\sigma\} = \left([B]\{\delta^*\}\right)^T\{\sigma\} = \{\delta^*\}^T[B]^T\{\sigma\}. \qquad (3.14)
$$

Чтобы найти работу внутренних сил по всему конечному элементу, нужно умножить последнее выражение на площадь конечного элемента Δ и его толщину t (т. е. на объём элемента). Согласно принципу возможных перемещений, полученная таким образом работа внутренних сил должна равняться работе внешних сил, откуда

$$
\{\delta^*\}^T\{F\} = \{\delta^*\}^T[B]^T\{\sigma\}\Delta t. \qquad (3.15)
$$

Поскольку это уравнение должно выполняться для любых кинематически допустимых значений $\{\delta^*\}$, ему должны удовлетворять покомпонентно векторы $\{F\}$ и $[B]^T\{\sigma\}\Delta t$, т. е.

$$
\{F\} = [B]^T\{\sigma\}\Delta t. \qquad (3.16)
$$

Подставив сюда значение $\{\sigma\}$ из (3.11), получим

$$
\{F\} = [B]^T[D]\{\varepsilon\}\Delta t. \qquad (3.17)
$$

Наконец, подставляя из (3.9) значение $\{\varepsilon\}$, имеем

$$\{F\} = [B]^T[D][B]\{\delta\}\Delta t. \qquad (3.18)$$

Эта матричная зависимость связывает усилия, действующие в узлах конечного элемента, с перемещениями этих узлов. Обычно она записывается в виде

$$\{F\} = [r]\{\delta\}, \qquad (3.19)$$

где матрица

$$[r] = [B]^T[D][B]\Delta t \qquad (3.20)$$

– это матрица жёсткости, с которой мы уже сталкивались, занимаясь методом перемещений. Она не зависит от действующих на элемент нагрузок и поэтому остаётся неизменной для всех нагружений. С физической точки зрения компоненты этой матрицы – это коэффициенты канонических уравнений метода перемещений для расчёта одного элемента.

Теперь от описания одного элемента перейдём к описанию всей совокупности элементов. Если бы тело состояло из одного элемента, то канонические уравнения метода перемещений имели бы вид (3.19). Пусть в узлах системы элементов действуют внешние силы, определяемые вектором $\{P\}$. К каждому i-му узлу сетки примыкает в общем случае n_i конечных элементов, каждый из которых вносит свой вклад в матрицу жесткости. Поэтому для каждого i-го узла суммарная матрица жесткости будет представлять собой сумму элементов матриц жёсткости всех примыкающих к узлу элементов, т.е.

$$[r_i] = \sum_{k=1}^{n_i} [r_k], \qquad (3.21)$$

в то время как узловое перемещение для всех этих элементов будет общим и определится вектором $\{\delta_i\}$. Сумма в (3.21) берётся по всем элементам, примыкающим к узлу i, а их может быть сколько угодно. Введём вектор перемещений всех узлов сетки конечных элементов, который составим из векторов перемещений каждого узла

$$\{\delta^*\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_m \end{Bmatrix}, \quad \{\delta_1\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} \text{ и т.д.} \qquad (3.22)$$

где m – число неопорных узлов сетки.

Рис. 3

Введём также вектор сосредоточенных усилий во всех узлах сетки, кроме, разумеется, опорных:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{Bmatrix}, \quad \{F_1\} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} \text{ и т.д.} \qquad (3.23)$$

Общая матрица жёсткости для всей конструкции выразится в виде

$$[R] = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix} \qquad (3.24)$$

и будет представлять собой симметричную матрицу коэффициентов канонических уравнений метода перемещений. Окончательно зависимость между усилиями $\{P\}$ и перемещениями $\{\delta^\alpha\}$ будет иметь вид

$$\{P\} = [R]\{\delta^\gamma\}. \tag{3.25}$$

Из (3.25) получаем окончательную зависимость перемещений от внешних нагрузок

$$\{\delta^\gamma\} = [R]^{-1}\{P\}. \tag{3.26}$$

Как видим, метод конечных элементов лишь в непринципиальных деталях отличается от метода перемещений. В то же время область применения метода поистине безгранична*.

Хотя использование теории матриц в методе конечных элементов в принципе необязательно, но страшно подумать, как выглядела бы зависимость (3.26) в обычной скалярной форме.

На рис.3 приведён пример конструкции, которую удалось рассчитать методом конечных элементов, при виде её поклонникам аналитических методов остаётся лишь почтительно умолкнуть (впрочем, через несколько страниц эти поклонники ещё получат слово)**

ПРИМЕР ИЛИ ПАРОДИЯ НА НЕГО?

Очень хотелось бы проиллюстрировать метод конечных элементов примерами. Но беда в том, что даже самые простые из них всё же чересчур громоздки. Однако не хочется изменять принципу иллюстрации теории примерами и не без некоторых колебаний (причина которых станет ясна ниже), автор всё же решается представить следующий пример.

* Одной из наиболее доступных (по изложению, а не по возможности «достать») книг о методе конечных элементов является [8].

** Американские учёные Г. Стренг и Дж. Фикс в качестве посвящения к своей книге «Теория метода конечных элементов (М., «Мир», 1977) решили перефразировать всемирно известную французскую поговорку «Cherche la femme» (ищи женщину) в «Cherche la f. e. m.» (f. e. m. – это сокращённо fini element method – метод конечных элементов).

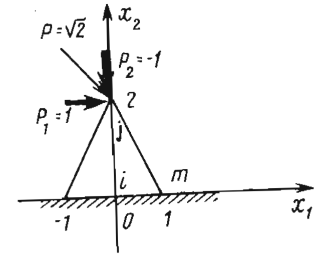


Рис. 4

На конце клина (рис.4) в условиях плоского напряжённого состояния действует сосредоточенная сила с компонентами в 1 кгс. Толщина клина 1 см. Требуется найти напряжения и деформации.

Разобьём клин на два конечных элемента (см. рис.4). Удвоенная площадь каждого из них (они представляют собой прямоугольные треугольники) равна $2\Delta = 1 \times 2 = 2$. Теперь перенесём внимание на правый треугольный элемент. По формулам (3.6) определим вспомогательные геометрические характеристики элемента:

$$\left.\begin{aligned} b_i &= 2 - 0 = 2, & c_i &= 1 - 0 = 1, \\ b_j &= 0 - 0 = 0, & c_j &= 0 - 1 = -1, \\ b_m &= 0 - 2 = -2, & c_m &= 0 - 0 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.27}$$

С их помощью заполним матрицу $[B]$ (3.9):

$$[B] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}; \tag{3.28}$$

определяющую геометрию конечного элемента. Матрица D, характеризующая физические свойства материала, при $\nu = 0$ примет вид (см. 3.11):

$$[D] = E\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Подставим эти значения в формулу (3.20) для матрицы жёсткости элемента $[r]$:

$$[r] = \frac{E}{4}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{E}{4}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{E}{4}\begin{bmatrix} \frac{9}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -4 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad (3.29)$$

Это, пожалуй, самая длинная выкладка в нашей книге, но она необходима, чтобы читатель чувствовал, какой труд кроется за вычислением матрицы жёсткости. К счастью, в дальнейшем нам не нужно использовать всю матрицу: в системе конечных элементов имеется только один свободный узел, и в матрице $[r]$ достаточно удержать лишь часть, обведённую пунктиром. И неизвестными на самом деле служат два компонента перемещения этого узла – u_j и v_j. Так что получить матрицу r_j (матрицу жёсткости всех элементов, прилегающих к узлу j) проще простого: достаточно удвоить матрицу $[r]$. Действительно, даже с точки зрения физики ясно, что ввиду симметрии два конечных элемента будут сопротивляться деформированию вдвое сильнее, чем один, откуда

$$[r_j] = \frac{E}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.30)$$

То же чисто формально получается из (3.23). Ну а коль скоро других узлов в нашей системе просто нет, то нетрудно записать и выражение для матрицы жёсткости всей системы

$$[R] = [r_j] = \frac{E}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (3.31)$$

В более общем случае составление матрицы жёсткости всей системы конечных элементов – самая трудоёмкая часть расчёта по методу конечных элементов. Составим теперь уравнение равновесия (3.25) – все необходимое для этого у нас есть:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \frac{E}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \end{Bmatrix}. \qquad (3.31)$$

Далее можно найти обратную матрицу, но чтобы не утомлять читателя и без того затянувшимся расчётом, сбросим с него (с расчёта, а не с читателя) матричный костюм и представим последнюю систему уравнений в обычной форме:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \frac{E}{4}u_j; \\ -1 &= \frac{E}{2}v_j. \end{aligned}\right\} \qquad (3.33)$$

Отсюда сразу же следуют перемещения единственного узла системы:

$$u_j = \frac{4}{E}; \quad v_j = -\frac{2}{E}. \qquad (3.34)$$

Задача решена. Можно, если этого требуют обстоятельства, перейти к деформациям [формулы (3.7)] и напряжениям [формулы (3.10)]. Но не будем торопиться, а присмотримся к полученному решению. Прежде всего, похоже ли оно на точное? Ведь точное решение для этого случая хорошо известно. И тут нас ждёт первое разочарование: никакого сходства! Как полагается задачам линейной теории упругости, возникающим при действии сосредоточенной силы, перемещение точки приложения этой силы равно ... бесконечности! Навязав системе однородное напряжённое состояние в каждом элементе, мы совершили непростительное насилие над условиями задачи, и последовала неизбежная расплата – полученное решение хотя и является формально верным, лишено всякого смысла. К сожалению, тем же грешат и более сложные примеры, которые порой можно найти в учебниках по методу конечных элементов, только проследить за выкладками в них труднее.

Разумеется, этот архипростой пример никак не может дискредитировать метод (мы, если читатель помнит, предостерегали в отношении его с самого начала), но, к сожалению, недостаточная точность метода конечных элементов нередко давала о себе знать и на практике. Из опыта, этого «сына ошибок трудных» мы знаем, что элементов должно быть непременно много. А сколько? На этот вопрос мы затрудняемся сейчас дать ответ...

Особенно заметно хромает метод конечных элементов вблизи особенностей*, например сосредоточенных сил, углов штампа или концов трещин. Но его можно взять и под защиту, «Особенности, – говорят защитники метода, – это не более чем математические абстракции, которые в натуре невозможны. Кто и когда видел, например, сосредоточенную силу? Выходит, мы сами создаём дракона и потом совершаем подвиги в борьбе с ним» (это защитники МКЭ намекают на бесплодность усилий чистых аналитиков по исследованию особенностей в задачах теории упругости с помощью тонких математических приёмов). «Пусть так, – возражают им поборники аналитических методов в теории упругости. – Но зато, сформулировав точно задачу и применив к ней теорию сингулярных интегральных уравнений, мы можем быть уверены, что застрахованы от большой погрешности». «Если не считать той погрешности, которая вносится, скажем, самим понятием «сосредоточенная сила», – ядовито намекают «вычислители».

Учтите, что такая сила, будь она всё же создана, неминуемо проткнула бы любую конструкцию, даже сверхпрочную, и, не встречая сопротивления, унеслась бы в бесконечность со скоростью света. «Бесконечности

* Особенностью называют всякое нарушение гладкости полей переменных. Особенности встречаются и в других разделах математической физики, например точечные источники тепла или электрические заряды. К сожалению, в строительной механике особенности столь часты, что правильнее было бы назвать их „обычностями".

в пространстве вообще нет, пространство замкнуто, – не упустили бы случая аналитики уличить вычислителя в невежестве. – а сосредоточенная сила, то бишь дельта-функция, – это понятие, без которого не обойтись»...

Мы предоставляем читателю быть судьёй в этом затянувшемся споре.

Разумеется, здесь мы познакомили читателя лишь с принципиальной основой метода. Для его программного воплощения помимо отличного владения программированием необходимо знать ещё немало важных деталей. К примеру, как перейти от системы уравнений с матрицей (3.29) к двум уравнениям (3.32)? Самый примитивный путь состоял бы в выбрасывании всех переменных, которые заведомо равны нулю, и в перенумерации остальных. Оказалось, что при счёте на ЭВМ гораздо выгоднее в таких случаях не выбрасывать переменные, стоящие по главной диагонали, а полагать коэффициент при них равным очень большому числу: тогда в результате решения системы переменная обязательно получится практически равной нулю. Хотя при этом придётся решать систему более высокого порядка [типа (3.29) вместо типа (3.32)], но компьютеру удобнее иметь дело с большим порядком системы, чем возиться с её преобразованием.

ТРИУМФ МЕТОДА. ОКОНЧАТЕЛЬНЫЙ ЛИ?

Вариант метода, изложенный нами, был первым шагом метода конечных элементов. Но этот шаг (середина пятидесятых годов) оказался настолько удачным, что метод нередко и сейчас используется в том же виде. И появившиеся в дальнейшем усовершенствования подчас не выдерживали конкуренции с основным вариантом метода. А усовершенствований было немало: стали использовать элементы разной формы, включая криволинейные, усложнили напряжённое состояние в пределах каждого конечного элемента. Выяснилось, что метод конечных элементов оказался в конце концов не столь уж новым. Его зародыши можно усмотреть уже в работах Пуассона (1829), позднее Генки (1899), да и Эйлера он вряд ли поразил бы, если бы тот познакомился с ним столетием раньше.

К сожалению, до сих пор остаётся открытым вопрос о соответствии истине полученного решения. Ведь на границах конечных элементов могут существовать разрывы напряжений, недопустимые с точки зрения статической теории упругости, поэтому главное внимание в последнее время уделяется ускорению сходимости метода. Именно этому обязано появление «гибридных» элементов – конечных элементов с более сложными напряжёнными состояниями, чем однородное. Если в обычном треугольном конечном элементе мы старались описать напряжённое состояние как можно проще, то гибридный элемент часто выбирается на пределе возможностей аналитического расчёта, и оказывается выгодным «сшивать» конструкцию именно из таких элементов. Например, элементы оболочки можно представить как квадратные плоские пластинки при действии поперечной нагрузки, а также усилий и моментов по контуру. Любопытна такая аналогия. Как известно, строительство зданий сейчас ведут в основном из элементов двух видов: обычных кирпичей и панелей и даже объёмных блоков. А промежуточные модификации (к примеру, обычные крупные блоки) не прижились. Нечто подобное происходит с методом конечных элементов: наряду с очень сложными, гибридными элементами удерживают свои позиции и самые простые – треугольные, прямоугольные.

Часто к открытию метода инженеры и математики идут разными путями, не ведая друг о друге. Так, лишь недавно была установлена связь поздних модификаций метода конечных элементов с теорией сплайнов*. Выяснилось, что неизвестные функции в пределах каждого конечного элемента удобно представлять в виде изогнутой линии стержня или, в двумерном случае, пластинки.

Шестидесятые и семидесятые годы нашего столетия можно без преувеличения назвать годами триумфа метода конечных элементов. О диапазоне его возможностей мы уже говорили выше. Созданы вычислительные системы, которые способны рассчитать практически любую конструкцию в упругой стадии. И для этого вовсе

* «Сплайн» по-английски – это тонкая чертёжная линейка, которую легко изгибать.

необязательно что-либо программировать и тем более вычислять – достаточно лишь задать машине информацию о форме тела и действующих нагрузках. Даже разбиение тела на конечные элементы машина производит сама, да ещё оптимальным образом.

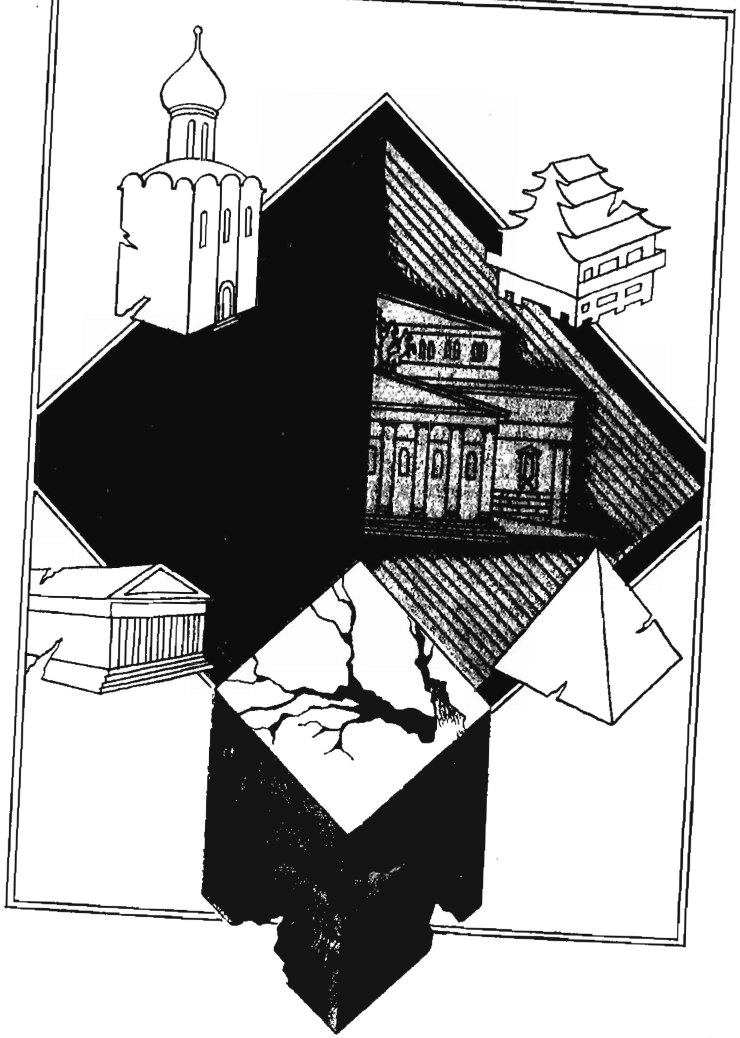
Но надо учесть, что метод конечных элементов – это существенно машинный метод, применение которого требует к тому же наличия у машины дисковой памяти. Если проводить индивидуальное программирование отдельных задач, да ещё использовать маломощную ЭВМ, то легко придти к пессимистической оценке метода конечных элементов.

Тут уместно вспомнить о главном сопернике и ближайшем родственнике метода конечных элементов – методе конечных разностей, который уже заслужил почётный титул «классического». Преимущество метода конечных элементов перед ним состоит в несколько более высоком порядке аппроксимации и в большей точности при учёте граничных условий. Но нужно честно признать, что при расчёте тел достаточно простой конфигурации, скажем прямоугольных и трапецеидальных, это преимущество ощутить трудно. В то же время составление системы канонических уравнений по методу конечных элементов несколько более трудоёмко, чем по методу конечных разностей.

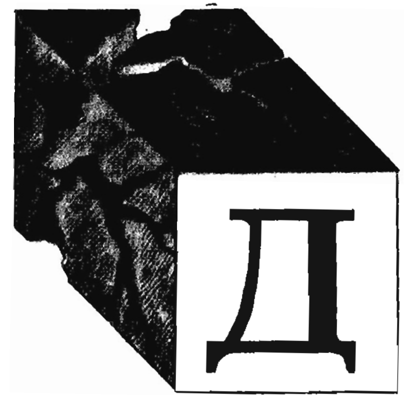
Впрочем и метод конечных разностей продолжает развиваться: возникли методы теории обобщённых функций и динамической релаксации (к сожалению, у нас нет возможности раскрывать эти понятия), и метод конечных разностей стал конкурировать с методом конечных элементов в расчёте тел сложной конфигурации. Так что подводить окончательный итог рано, но промежуточный – в пользу метода конечных элементов*.

* Более подробно с методом конечных элементов можно познакомиться по книге [8].

4
АНАЛИЗ НЕУПРУГИХ КОНСТРУКЦИЙ И ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ



КАК НА САМОМ ДЕЛЕ РАБОТАЕТ КОНСТРУКЦИЯ?



До сих пор конструкции почти всегда рассчитывали в предположении, что конструкция работает лишь в упругой стадии. Хотя из опытов, относящихся к простейшим напряжённым состояниям, известно, что диаграмма зависимости напряжений от деформаций имеет вид, представленный на рис. 5 одной из кривых, и участок этой зависимости, относящийся к линейно-упругой стадии работы, простирается вплоть до точки разрушения лишь для очень хрупких материалов, которые сейчас редко используются в несущих конструкциях. Тем не менее ещё и сейчас инженеры-строители ограничиваются расчётом конструкции в упругой стадии работы, хотя действующие нормы по расчёту стальных конструкций допускают, а железобетонных – требуют учёта пластических деформаций материала. Причин консерватизма, если разобраться, несколько. Во-первых, анализ конструкции в неупругой стадии во многих случаях сложнее расчёта в упругой, его быстренько на линейке не прикинешь, тут нужны ЭВМ, а над проектировщиками висит «дамоклов меч» сроков. Во-вторых, в соответствии с традициями инженеры гораздо лучше осведомлены о возможностях анализа конструкций в упругой стадии: анализ в неупругой стадии ещё нередко играет роль бедного родственника, которого сажают за стол для кворума, но гонят, как только появится гость поименитее. Иными словами, при обучении инженеров на его изучение частенько просто нехватает времени. И наконец, в-третьих, в-четвёртых, в-пятых и т.д., у многих инженеров-строителей существует мнение, почти суеверие, что методы анализа в неупругой стадии ненадёжны, что лучше всё-таки, невзирая на нормы, перестраховаться и «спать спокойно».

Следует с удовлетворением отметить, что наивная вера в то, что расчёт в упругой стадии надёжнее, уходит в прошлое: часто отмечали, что конструкции на основа-

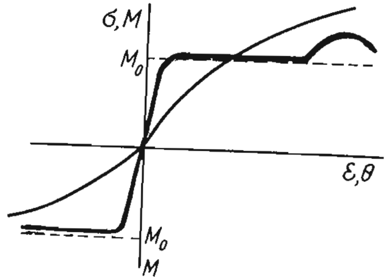


Рис. 5

нии такого расчёта усиливают не там, где им действительно грозит разрушение. Мы начнём знакомство с методами анализа конструкций, работающих в неупругой стадии, с наиболее полно разработанного *расчёта по предельному равновесию.*

НА ПРЕДЕЛЕ

Наиболее простым такой анализ конструкций получается тогда, когда для описания поведения конструкций можно пользоваться жёстко-пластической моделью. Эта модель механического поведения (на рис.5 ей соответствует пунктирная линия) характеризуется следующими зависимостями между обобщёнными усилиями и обобщёнными перемещениями (скажем, моментами M и углами поворота θ):

$$\left.\begin{aligned} &\theta = 0 \text{ при } -M_0 < M < M_0;\\ &\theta \geqslant 0 \text{ при } M = M_0;\\ &\theta \leqslant 0 \text{ при } M = -M_0, \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

где M_0 – предельное значение момента.

Обратите внимание, неравенства в законе (4.1) – нестрогие. Иначе говоря, даже когда усилие достигло предельного значения, деформации может ещё не быть. Такая ситуация характерна для статически неопределимых конструкций, которые необязательно обращаются в пластический механизм при достижении предела текучести в отдельных точках и даже областях.

Заметим, что жёстко-пластическая модель лучше отражает поведение ряда конструкций, например железобетонных, чем упругая модель Гука. В то же время её

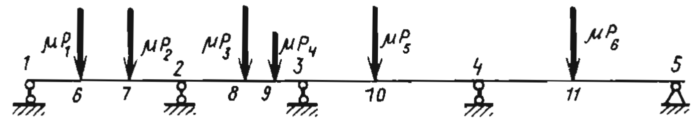


Рис. 6

применение, скажем для стальных конструкций, вряд ли допустимо, так как в них разрушение чаще всего связано с потерей устойчивости. А теперь познакомимся с понятием *несущей способности* конструкции.

Рассмотрим неразрезную балку (рис.6) под действием системы сосредоточенных сил, которые заданы с точностью до некоторого неизвестного множителя μ. Множитель μ, при котором конструкция обращается в механизм, но ещё выполняются условия равновесия, определяет несущую способность конструкции. Если конструкция статически определима, то отыскание μ обычно не вызывает затруднений. Но если конструкция статически неопределима, то уравнений статики уже не хватит для отыскания внутренних усилий и приходится рассматривать всю систему зависимостей [включая (4.1)], а это очень сложно. Теория предельного равновесия позволяет значительно упростить эту задачу.

В состоянии предельного равновесия на конструкцию действуют внешние силы μP_1, μP_2, ..., μP_i, которым соответствуют перемещения $u_1, u_2, ..., u_i$. В ряде опасных сечений конструкции, в нашем случае под сосредоточенными силами и у опор, возникают пластические шарниры. По определению эти величины должны удовлетворять соотношениям (4.1), а также ряду условий, которые (не вполне удачно) разделяют на две группы:

1) статические условия: а) условия равновесия; в) условия прочности;

2) кинематические условия: а) условия совместности деформаций; б) условие равенства работ внешних и внутренних сил. Последнее условие, в сущности, нельзя отнести к кинематическим, поскольку в его формулировке участвуют усилия.

Обратим внимание, что первая группа условий ничего не говорит о соблюдении требования совместности деформаций – оно может и не выполняться. В то же время вторая группа не гарантирует выполнения условий равновесия.

Наряду с действительным рассмотрим некоторое состояние конструкции, характеризуемое внешними силами $\bar{\mu}P_i$ и моментами M_j^-, которые удовлетворяют статическим условиям, но необязательно – кинематическим. Такое состояние называется *статически допустимым*, а множитель $\bar{\mu}$ – *статически допустимым множителем*. Тогда справедлива следующая **статическая теорема***: *статически допустимый множитель определяет нижнюю границу несущей способности* или $\bar{\mu} \leqslant \mu$.

Для доказательства воспользуемся принципом возможных перемещений, применив его к предельному состоянию конструкции:

$$\Sigma M_j\theta_j = \mu\Sigma P_i u_i. \qquad (4.2)$$

Здесь суммирование производится по всем опасным сечениям и по всем внешним силам. А теперь составим уравнение принципа возможных перемещений, взяв кинематически возможные перемещения из действительного предельного, а усилия – из статически допустимого состояния:

$$\Sigma M_i^-\theta_i = \mu^-\Sigma P_j u_j\ . \qquad (4.3)$$

Вычтем (4.3) из (4.2):

$$\Sigma(M_i - M_i^-)\theta_i = (\mu - \mu^-)\Sigma P_j u_j\ . \qquad (4.4)$$

Исследуем выражение, стоящее под знаком суммы в левой части:

$$A_i = (M_i - M^-_i)\theta_i\ . \qquad (4.5)$$

Рассмотрим три случая.

1. При $\theta_i = 0$ имеем $A_i = 0$. Перемещений нет и внутренние силы работы не производят.

2. При $\theta_i > 0$, согласно условию (4.1), моменты в действительном состоянии должны быть равны предельным ($M_i = M_{0i}$), а моменты в статически допустимом состоянии должны удовлетворять условию $M_i \leqslant M_{0i}$. Следовательно, $M^-_i \leqslant M_i$, а отсюда $A_i \geqslant 0$.

3. При $\theta_i < 0$ моменты в действительном состоянии равны предельным со знаком минус ($M_i = -M_{0i}$), а статически допустимые удовлетворяют условию $M_i \geqslant -M_{0i}$. Отсюда $M_i \geqslant M_i^-$ и снова $A_i \geqslant 0$.

Таким образом, в любом случае $A_i \geqslant 0$. Поскольку каждый член суммы не меньше нуля, то не меньше нуля и вся сумма в левой части (4.4):

$$\Sigma(M_i - M_i^-)\theta_i \geqslant 0. \qquad (4.6)$$

Но тогда и правая часть уравнения (4.4) не меньше нуля:

$$(\mu - \mu^-)\Sigma P_j u_j \geqslant 0. \qquad (4.7)$$

Сумма $\Sigma P_j u_j$ – пропорциональна действительной работе внешних сил при деформации жёстко-пластической конструкции с положительным коэффициентом пропорциональности μ и, следовательно, положительна (ведь на деформирование тела тратится энергия, которая переходит в теплоту), поэтому неравенство (4.7) можно разделить на эту сумму, не меняя его знака:

$$\mu - \mu^- \geqslant 0,$$

или

$$\mu \geqslant \mu^-\ , \qquad (4.8)$$

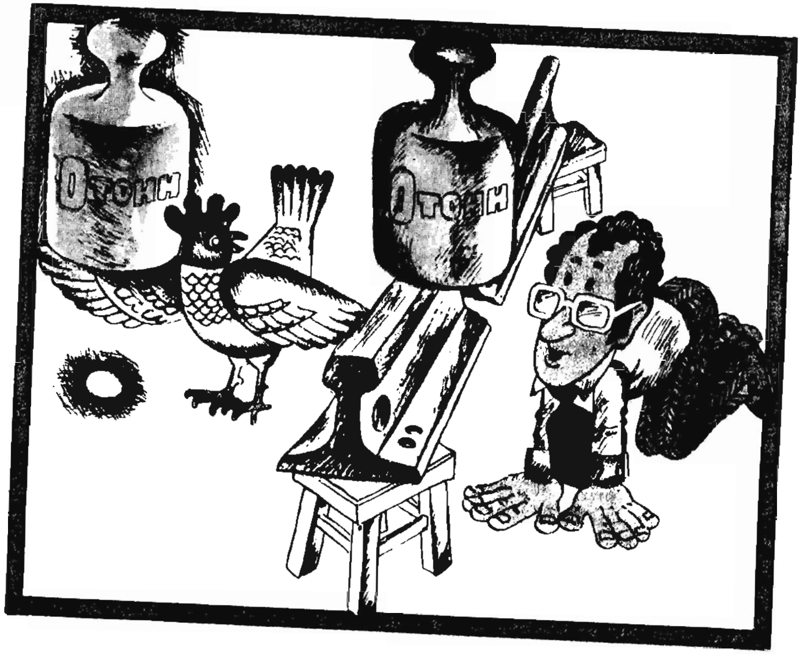
что и служит доказательством теоремы.

В свою очередь *кинематическая теорема* утверждает, что кинематически допустимый множитель μ^+ определяет верхнюю границу несущей способности.

Всякая научная теория, если она хорошо понята изучающим, в какой-то момент начинает казаться ему очевидной и даже тривиальной. Это относится и к теории предельного равновесия. В действительности всё не так просто; укажем хотя бы на то, что эта важная теория справедлива далеко не для всех тел. Например, для конструкций со связями трения статический множитель может стать больше кинематического. А ведь это отнюдь не экзотический тип связей, он характерен, например, для грунтовых оснований.

Обратите внимание на то, что в соответствии с теорией предельного равновесия конструкция как бы сама разыскивает самое удобное для себя распределение внутренних усилий. Впрочем, стоит напомнить, что

* Читатель, наверное, не забыл, как выше мы иронизировали по поводу склонности некоторых инженеров к теоремам. Но, во-первых, это утверждение поистине фундаментально, и, во-вторых, кто встречал до конца последовательного автора книг по строительной механике?



и в упругой области конструкция «находит» минимум потенциальной энергии.

Теоремы теории предельного равновесия были сформулированы в 1936 г. советским учёным А. А. Гвоздевым и явились, как мы теперь знаем, одним из главных достижений теории расчёта конструкций в неупругой стадии [6]. Правда, признание пришло к теории предельного равновесия не сразу*, и долго её использование оставалось трудным делом, давая возможность получать лишь приближенные решения. Положение изменилось лишь тогда, когда стали применять *математическое, в частности линейное,* программирование. Как выяснилось недавно, идея этого метода витала уже давно. Именно на интуитивном использовании теории предельного равновесия основан первый, по-видимому, в истории пример приложения линейного программирования.

* Свидетельством тому служат насмешливые слова одного видного механика тех лет, который сказал, что, по его мнению, «несущая способность бывает только у кур». Впрочем рецидивы такого отношения к расчётам конструкций в неупругой стадии встречаются и сейчас, но они уже не носят эпидемического характера.

ПУШКИ РЕВОЛЮЦИИ

Неизвестно в точности, как родился экстремальный подход к решению задач предельного равновесия. Это позволило З. Я. Тьмеладзе предложить свою версию этого события*. Согласно этой версии, во время одного из сражений с роялистами в период французской революции понадобилось срочно решить, можно ли вкатить тяжёлую пушку на квадратную площадку, приподнятую над землёй на четырёх столбах (рис.7). Каждый столб выдерживал груз в 1 тс, а пушка вместе с ядрами и прислугой весила 2,5 тс, причём поместить её требовалось не посередине, а с эксцентриситетом**. Молодой солдат по имени Жан-Батист предложил провести следующий расчёт. Обозначим усилия в столбах, на которые опирается площадка, через R_1, R_2, R_3, R_4 и потребуем:

$$R_1 \leqslant 1;\ R_2 \leqslant 1;\ R_3 \leqslant 1;\ R_4 \leqslant 1 \tag{4.9}$$

(это и есть условия прочности). Силы R_1, R_2, R_3, R_4 не могут быть любыми: они должны удовлетворять уравнениям равновесия. Два из них можно получить, если приравнять нулю моменты от всех сил, действующих на площадку, относительно линий 1-4 и 1-2:

$$4R_2 + 4R_3 - P = 0; \tag{4.10}$$

$$4R_3 + 4R_4 - 2{,}5\,P = 0. \tag{4.11}$$

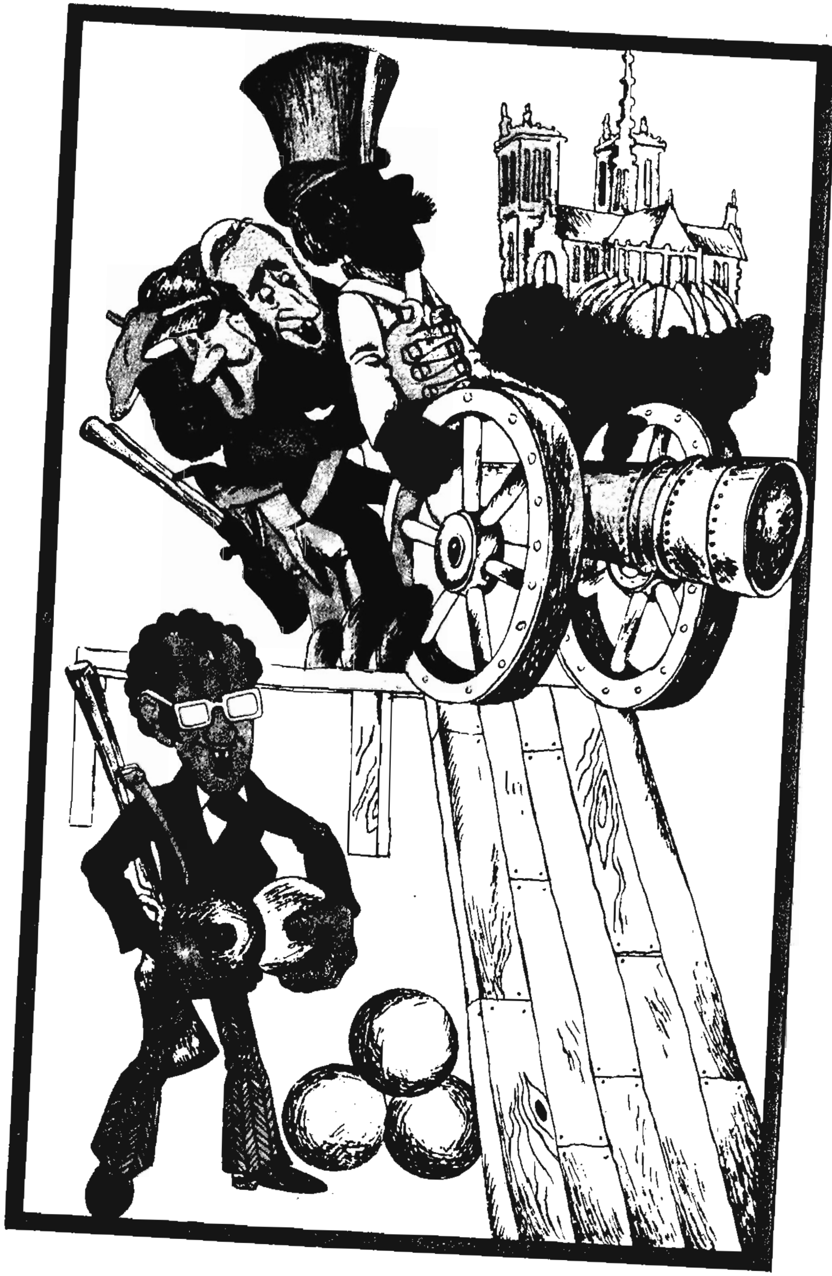
Третье уравнение равновесия можно получить из условия равенства нулю суммы всех вертикальных сил, действующих на площадку:

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - P = 0 \tag{4.12}$$

Из трёх уравнений (4.10), (4.11) и (4.12) четыре неизвестных – R_1, R_2, R_3, R_4, да ещё и P, конечно, не определишь. Но мы можем поставить условие, чтобы сила P была максимальна. Его можно записать так: $z = P \to \max$.

* Тьмеладзе З. Я. Физика и линейные неравенства. «Квант», 1975. № 10.

** Разумеется, если поместить вертикальную сосредоточенную нагрузку посередине площадки и если прочность самой площадки сомнений не вызывает, то конструкция выдержит груз в 4 тс.



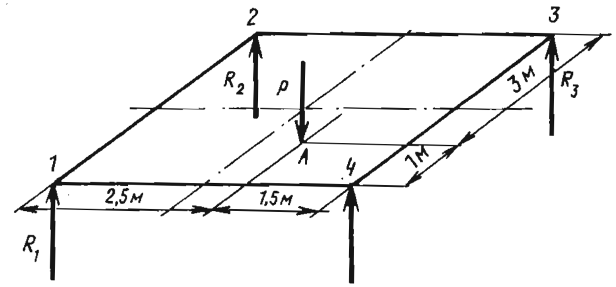


Рис. 7

Задача отыскания пяти неизвестных R_1, R_2, R_3, R_4, P, удовлетворяющих неравенствам (4.9), уравнениям (4.10) – (4.12) и условию максимальности функции $z = P$, является типичной задачей линейного программирования. Для человека, воспитанного на понятиях классического анализа, эта задача выглядит странновато: в курсах математического анализа учат, что линейная функция $z = P$ не имеет максимума. Это не совсем точно: линейная функция не имеет аналитического максимума, который имеет, например, парабола, но она может иметь максимум на границе области допустимых значений неизвестных. В этом мы сейчас убедимся. Для решения получающейся задачи лучше всего воспользоваться графоаналитическим методом. Для этого из уравнений (4.10) и (4.11) найдём выражения R_3 и R_4:

$$\begin{aligned} R_3 &= \frac{1}{4}P - R_2; \\ R_4 &= \frac{1}{4}\left(\frac{5}{2}P - 4R_3\right) = \frac{3}{8}P + R_2 \end{aligned} \tag{4.13}$$

и подставим их в уравнение (4.12), откуда получим

$$R_1 + R_2 + \frac{1}{4}P - R_2 + \frac{3}{8}P + R_2 = P. \tag{4.14}$$

Отсюда можно найти P:

$$P = \frac{8}{3}(R_1 + R_2) \to \max \tag{4.15}$$

и подставить в (4.13), получая:

$$R_3 = \frac{2}{3}(R_1 + R_2) - R_2; \quad R_4 = R_1 + 2R_2. \tag{4.16}$$

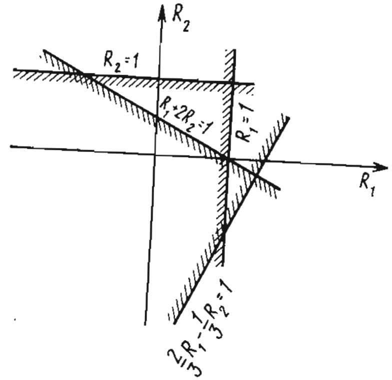


Рис. 8

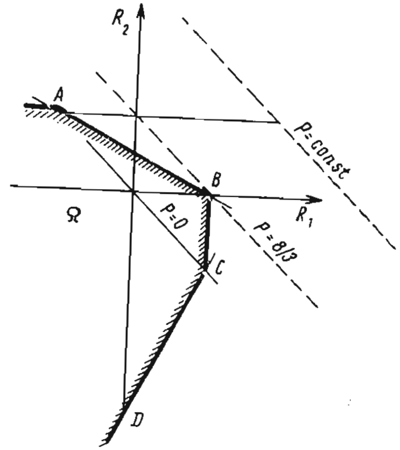


Рис. 9

Теперь неравенства (4.9) можно переписать лишь для двух переменных (три остальных исключены с помощью трёх уравнений):

$$\left.\begin{aligned} &R_1 \leqslant 1, \quad R_2 \leqslant 1; \\ &\frac{2}{3}R_1 - \frac{1}{3}R_2 \leqslant 1; \\ &R_1 + 2R_2 \leqslant 1. \end{aligned}\right\} \tag{4.17}$$

Изобразим эти неравенства графически. Введём оси координат R_1 и R_2 (рис.8). Неравенство $R_1 \leqslant 1$ означает, что допустимые значения R_1 должны лежать не правее линии $R_1 = 1$, а $R_2 \leqslant 1$ – не выше линии $R_2 = 1$. Полагая $R_1 = 0$, из третьего неравенства, переписанного в виде уравнения, имеем $R_2 = -3$, а полагая $R_2 = 0$, получаем $R_1 = 3/2$. Проведя через эти две точки прямую и подштриховав её снизу, получим графический образ третьего неравенства. Наконец, точно так же изображаем и четвёртое неравенство.

Если отбросить ненужные линии, то рисунок примет вид, показанный на рис.9, где через $ABCD$ обозначена допустимая область Ω значений R_1 и R_2, все точки которой удовлетворяют неравенствам (4.17). Но это ещё не всё: в области Ω нужно найти точку, в которой выполняется условие (3.21), т.е. в которой P принимает максимальное значение. Для этого сначала построим

линию $P = \frac{8}{3}(R_1 + R_2) = 0$. Она будет проходить через начало координат, как показано на рис.9. Теперь рассмотрим семейство линий $P = -\frac{8}{3}(R_1 + R_2) = \text{const}$, которые параллельны линии $P = 0$ (ведь угловые коэффициенты у них одни и те же). Из этих линий нужно выбрать такую, которая дальше всего отстоит от линии $P = 0$, но ещё пересекает допустимую область. Это линия $P = \frac{8}{3}(1 + 0) = \frac{8}{3}$, и оптимальная точка области Ω – это точка B с координатами (1, 0).

Последнее соображение допускает весьма наглядную *географическую* интерпретацию. Представьте себе, что $ABCD$ – это граница участка на местности, которая равномерно повышается с юго-запада на северо-восток. Линии $P = \text{const}$ – это горизонтали на географической карте. Чем выше отметка местности, тем больше в ней значение P. Ясно, что самая высокая отметка в точке B, где $P_1 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$. Это больше, чем весит наша пушка ($2\frac{2}{3} > 2\frac{1}{2}$). Значит пушку площадка выдержит. Результат расчёта тут же был подтверждён практикой!

РОЖДЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

И молодой солдат стал вскоре профессором математики созданного в 1794 г. нового высшего учебного заведения – Нормальной школы. Только на склоне лет признанный математик Жан-Батист Фурье (1768-1830), бывший друг Наполеона, префект департамента Изер и создатель теории теплоты выступил во Французской академии с несколько странным по тем временам докладом о линейных неравенствах, где рассказывал постановку и наметил способ решения описанной выше задачи. Но не была ли она ясна ему много раньше, когда юношей он попал в охваченный революцией Париж?

Тем не менее название этой математической задачи – *задача линейного программирования* – родилась лишь в сороковых годах нашего века, после того как её основательно изучили советский математик Л.В. Канторович, американцы Т. Купманс и Б. Данциг.

Современные ЭВМ умеют решать задачи линейного программирования с числом переменных до 1000 (в задаче Фурье их было всего пять). Для этого используются специальные алгоритмы, которых мы сейчас не будем касаться. Для инженера достаточно знать, что решение задачи линейного программирования нынче не проблема. А следовательно, нетрудно определить несущую способность многоэтажных рам, плит и оболочек.

Однако остаётся открытым вопрос о законности жёстко-пластической модели конструкции. Американский учёный Д. Друккер отмечал, что «большую часть реализма, утрачиваемого за счёт принятия модели жёстко-пластического тела, можно восстановить путём соответствующего назначения констант M_0». В отношении железобетонных конструкций это отчасти верно, по крайней мере если в них используется арматура из малоуглеродистой стали. Однако в высокопрочных сталях уже нет ярко выраженной площадки текучести, и основными становятся ограничения по трещинам и деформациям. О методах преодоления этих трудностей мы поговорим ниже. А пока отметим лишь, что нередкое на практике сочетание расчёта железобетонных конструкций в упругой стадии с подбором их сечений по пластической стадии работы явно содержит противоречие и ведёт к неэкономичным проектным решениям.

Попутно у практиков возникает вопрос: не могут ли в условиях пластического расчёта накопиться остаточные деформации таким образом, что разрушение произойдёт после многократного действия нагрузки? Ответить на этот вопрос помогает теория приспособляемости – обобщение теории предельного равновесия на случай, когда на конструкцию действуют многократные нагружения*. Но теория приспособляемости для строительных конструкций малоактуальна, в отличие от конструкций машиностроительных: как считает американский механик Ходж, состояние, близкое к предельному, возникает в жизни конструкции не чаще одного-двух раз, и пластические деформации не успевают накапливаться [23].

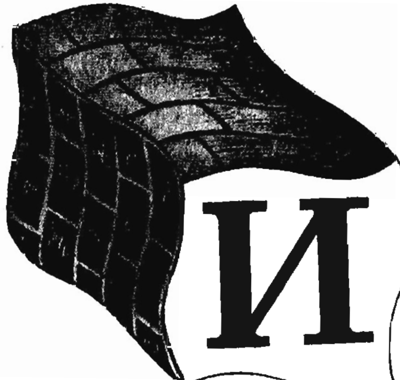
* Кстати, судьба этой теории – прямой контраргумент автору легенды о «царском пути». Эту теорию развил ещё в 30-х годах австрийский учёный Мелан (1890-1963), но сделал это столь замысловато, что в его работах разбирались 20 лет и теорию за это время дважды переоткрыли.

Разумеется, идеально-пластическая модель конструкции – это всего лишь модель, и как всякая модель, она – не точный слепок с действительного объекта. Но тем более это относится к упругой модели. К тому же на стороне идеально-пластической модели – экономичность получаемых с её помощью конструкций. Так что если речь идёт о расчёте на прочность, то идеально-пластическая модель, несомненно, предпочтительнее упругой. Правда, тут существенна оговорка относительно вида расчётов: следует помнить, что деформации жёстко-идеальнопластической конструкции в предельном состоянии формально остаются неопределёнными.

Расчёт по теории предельного равновесия ничуть не сложнее расчёта по упругой стадии: с ним справляются ЭВМ, снабжённые стандартными программами математического программирования. И в то же время этот расчёт поднимает инженера на следующую ступень иерархии расчётных методов, позволяет заглянуть в необычный мир нелинейных эффектов, на пороге которого вынуждена смиренно остановиться теория упругости.

В последние годы область применения расчётов по жёстко-пластической модели постоянно расширялась, несмотря на конкуренцию со стороны методов, использующих упруго-пластическую модель. Особенно полезной оказалась жёстко-пластическая модель при динамических расчётах. Действительно, если даже в условиях статического нагружения, как мы уже видели, предположение о работе конструкции в чисто упругой стадии является расточительством, то тем более оно неоправдано в условиях динамического нагружения. Землетрясение – тяжёлое испытание как для людей, так и для конструкций. Зачем же усугублять их участь, требуя непременно, чтобы ещё и не развивались пластические деформации? Это требование попросту нереально, это всё равно, что потребовать от жертв землетрясения, чтобы они сдавали нормы ГТО. Тем не менее антисейсмический расчёт конструкций в упругой стадии остаётся до сих пор реальностью, оправдываемой лишь ссылками на нормативные документы.

5
АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ



С ЧЕГО НАЧИНАЮТСЯ ТРУДНОСТИ?

Итак, в конечном счёте задача расчёта конструкции состоит в использовании уравнения (2.20), связывающего перемещения узлов и внешние нагрузки. Отыскание деформаций и внутренних усилий после этого, как говорится, дело техники. Однако главные трудности начинаются с того момента, когда расчётчик пытается учесть нелинейности, скажем нелинейность диаграммы, связывающей напряжения и деформации. А без этого не всегда удаётся обойтись. Пример тому – стальные конструкции (да и многие виды железобетонных), к которым теория предельного равновесия, вообще говоря, не применима. Итак, положим, что обобщённые перемещения $\{u\}$ связаны с обобщёнными внешними усилиями $\{P\}$ зависимостью

$$\{u\} = [K]\{P\} = [K(M)]\{P\}, \tag{5.1}$$

т.е. что податливость $[K]$ является функцией от действующих в раме моментов (или для дискретизированной сплошной среды – от напряжений, действующих в каждом элементе). Да, задача непроста! Ведь моменты $\bar{M}$, действующие в раме, в свою очередь зависят от деформаций изгиба, а те – от перемещений $\{u\}$, т.е.

$$\{u\} = [K(u)]\{P\}. \tag{5.2}$$

Таким образом, мы получаем здесь сложное нелинейное уравнение (точнее, систему нелинейных уравнений) относительно переменных перемещений $\{u\}$. Его сложность обусловлена видом зависимости $K\{u\}$, которую и функцией-то называть неловко: часто для её подсчёта при заданном $\{u\}$ требуется целый вычислительный ал-

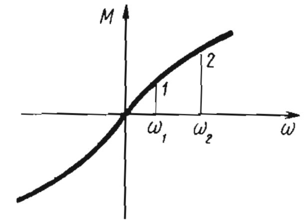


Рис. 10

горитм с логическими ходами и условиями типа «или — или». Как же быть?

Начнём с того, что разобьём стержневую конструкцию на малые конечные элементы, чтобы напряжённое и деформированное состояние в них можно было считать однородным. И будем считать, что уравнения (5.2) относятся именно к таким системам.

Преграды можно форсировать с ходу....

Мы не будем говорить здесь подробно о конкретных нелинейных зависимостях напряжений от деформаций, а рассмотрим общий случай связи между изгибающим моментом в рамной конструкции $\bar{M}$ и кривизной ω. Часто эту зависимость можно, в соответствии с рис. 10, представить в виде степенной функции $\bar{M} = a\omega^{\alpha}$, причём чаще всего $\alpha < 1$. Если записать эту зависимость так:

$$\bar{M} = a\omega^{\alpha-1}\omega, \tag{5.3}$$

то величину $a\omega^{\alpha-1}$ можно трактовать как переменную изгибную жёсткость. В частности, для линейно-упругой конструкции

$$a\omega^{\alpha-1} = EJ.$$

Распространённым методом решения нелинейных задач является *метод последовательных приближений.* Он известен в нескольких модификациях, одна из них, называемая *методом переменной жёсткости,* сводится к следующему. На первом шаге задаются приближённо жёсткостями конструкции EJ (или, что то же самое, величинами $a\omega^{\alpha-1}$), отвечающими каким-то значениям

$\{\bar{M}^1\}$. Чаще всего принимают, что $\{\bar{M}^1\}=0$, т.е. как бы не замечают нелинейности. После этого с помощью зависимостей типа (2.27) находят новое распределение моментов $\{\bar{M}^2\}$. Разумеется, оно будет отличаться от предложенного ранее распределения $\{\bar{M}^1\}$. Найдём максимум этого расхождения и сравним его с допустимой невязкой

$$\max_{\{i\}}|\bar{M}^{2i}-\bar{M}^{1i}|\leqslant\varepsilon. \tag{5.4}$$

Но даже если расчётчик очень везучий человек, всё равно на первом шаге при сколько-нибудь значительной внешней нагрузке условие (5.4) не выполнится. Величину ε всегда назначают сопоставимой с точностью вычислений. Скажем, можно принять ε = 0,1 тс·м. Итак, скорее всего на первом шаге условие (5.4) не выполнится. Тогда делают следующий шаг, на котором жёсткости назначают из условия, что в конструкции реализуется распределение моментов $\{\bar{M}^2\}$, и таким путём находят новое распределение моментов $\{\bar{M}^3\}$. После этого снова производится проверка. И так далее до тех пор, пока на каком-то k-м шаге не выполнится условие

$$\max_{\{i\}}|\bar{M}^{ki}-\bar{M}^{k-1,i}|\leqslant\varepsilon, \tag{5.5}$$

т.е. невязка не окажется в допустимых пределах.

В другой модификации этого метода нелинейность включают в нагрузочные члены, а упругие постоянные $[K]$ оставляют неизменными (А.А. Ильюшин).

Здесь возникает два вопроса. Во-первых, всегда ли описанный процесс будет сходиться? Иначе говоря, всегда ли в конце концов выполнится условие (5.5)? Ведь может случиться и так, что даже бесконечное число шагов не приведёт к приемлемому для нас решению: система будет просто перескакивать из одного состояния в другое. И второй вопрос, будет ли полученное распределение усилий единственным? Т.е. получим ли мы то же решение, если примем иное начальное распределение моментов M^1? К сожалению, в общем случае на оба эти вопроса нельзя ответить утвердительно — всё зависит от вида функции $\bar{M}(\omega)$.

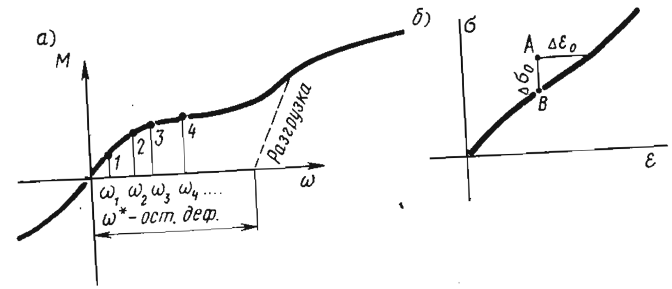


Рис. 11

... А можно вести долговременную осаду.

Шаговый метод основывается на принципиально иной идее. Отметим сначала, что при достаточно малом нагружении материал может считаться упругим. Иначе говоря, вблизи начала координат диаграмму $M-\omega$ можно считать прямолинейной, как и на любом другом малом участке в дальнейшем.

Разобьём нагрузку на малые порции ΔP и будем прикладывать её постепенно. Сначала приложим нагрузку ΔP и произведём упругий расчёт на эту нагрузку при жёсткостях, отвечающих нулевым деформациям изгиба ω (рис. 11).

Полученная деформация в некотором элементе конструкции (или полученный момент) дает новую точку на диаграмме $M-\omega$ — точку *1* (см. рис. 11). Далее нагружаем конструкцию нагрузкой ΔP, а в качестве жёсткостей принимаем те, которые характеризуют точку *1* диаграммы $M-\omega$.

Итак, на каждом шаге к уже имеющейся нагрузке добавляется новая доля, а жёсткости берутся для предыдущего шага нагружения, пока не удастся достигнуть заданного уровня нагружения P.

Такой метод расчёта нелинейных моделей конструкций называется *шаговым* (здесь изложена лишь одна из его модификаций).

По сравнению с методом последовательных приближений он обладает рядом преимуществ: в шаговом методе не так остро стоит вопрос о сходимости, кривая зависимости между напряжением и деформацией может круто загибаться вверх, может становиться пологой, нельзя лишь, чтобы она опускалась. Более того, в процессе перераспределения усилий в конструкции отдельные её элементы могут испытывать разгрузку. Причём диаграмма $\bar{M}-\omega$ при разгрузке может отличаться от той же диаграммы при нагружении, как показано на рис.11. Метод переменной жёсткости этого, к сожалению, учесть не может, поэтому он применим лишь к нелинейно-упругому телу, где разгрузка идёт по тому же закону, что и нагружение, а не к упруго-пластическому.

Расширение круга физических законов – вот основное преимущество шагового метода. Контролировать текущее положение точки на диаграмме $\bar{M}-\omega$ можно как по моменту, так и по деформации изгиба. Беда лишь в том, что когда диаграмма становится пологой, зависимость $\bar{M}-\omega$ малоустойчива, поэтому несущую способность с помощью шагового метода не всегда удаётся определить.

Недостаток метода переменной жёсткости состоит ещё и в том, что на каждом шаге приходится заново вычислять матрицу жёсткости – на эту операцию уходит большая часть машинного времени, поэтому наибольшее распространение в последнее время получили *методы начальных напряжений и начальных деформаций* [8]*. В методе начальных напряжений на каждом шаге приращения нагрузки находят напряжение и деформацию. Пусть они изображаются точкой A (рис. 11,*б*), которая не лежит на заданной кривой $\sigma-\varepsilon$. Для приведения напряжённо-деформированного состояния в соответствие с этой кривой на тело накладываются начальные напряжения $\Delta\sigma_0$, которые на следующем шаге приведут к новой точке B и так далее до достижения сходимости.

В методе начальных деформаций для получения соответствия напряжённо-деформированного состояния и кривой $\sigma-\varepsilon$ на тело накладываются начальные деформации $\Delta\varepsilon_0$ (см. рис.11,*б*). А в остальном всё делается так же. В качестве критерия сходимости на каждом шаге приращения нагрузки обычно используют максимальную невязку в уравнении (2.25) или (3.26).

* Термины не очень удачны и не способствуют пояснению существа методов. На наш взгляд, лучше отражают суть первоначальные названия – метод перераспределения напряжений и метод перераспределения деформаций.

ДОСТОИНСТВА – ЭТО ПРОДОЛЖЕНИЯ НЕДОСТАТКОВ

До сих пор мы говорили о преимуществах шагового метода по сравнению с методом последовательных приближений. Но с определённых точек зрения всякие достоинства непременно оборачиваются недостатками. Так, шаговый метод позволяет проследить весь путь нагружения конструкции – казалось бы, прекрасно! Но зато и погрешности вычислений на каждом шаге в этом методе могут накапливаться, в то время как в методе переменной жёсткости погрешность какого-либо одного шага несущественна в пределах всего процесса. Да и жаль тратить машинное время на вычисления, связанные с промежуточными нагружениями, результаты которых нас, вообще говоря, не интересуют. И в целом метод переменной жёсткости даёт какое-то решение (пусть грубое) на каждом шаге вычислений, в то время как шаговый метод даёт решение (быть может и более точное) лишь на последнем шаге.

В последнее время оба метода обычно комбинируют, нагрузка при этом получает шаговые, конечные приращения и на каждом шаге уточняются жёсткости, взятые из предыдущего шага или экстраполированные по результатам этого шага, так сказать продолженные за его пределы (или уточняют напряжения и деформации). Такие методы позволили решить многие важные задачи, например задачу расчёта железобетонных конструкций с учётом трещин, которые сильно влияют на поведение конструкции. В то же время каждый из методов порознь оказался бессильным: метод переменной жёсткости в таких задачах часто попросту не даёт никакого результата, а шаговый метод в чистом виде требует слишком большого числа шагов.

Судьба обоих методов оказалась в определённом смысле сходной с судьбой других методов, в том числе и метода конечных элементов, в сочетании с которым они часто применяются. Они были предложены механиками, которые основывались на физических соображениях. Но вскоре стало очевидным их родство с рядом уже известных методов. Например, метод переменной жёсткости приходится родственником методу касательных для отыскания корней нелинейных алгебраических уравнений, а шаговый метод – это родной брат метода Эйлера решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Но эти аналоги натолкнули на мысль о дальнейших усовершенствованиях упомянутых методов. Так, в методе шагов по нагрузке можно учитывать результаты нескольких предыдущих шагов (аналог метода Адамса для решения дифференциальных уравнений).

Впрочем, и некоторые недостатки обоих методов являются общими, например трудности учёта многих нагружений и выбор самого опасного нагружения. Ведь принцип независимости действия сил здесь уже неприменим, нельзя рассчитывать конструкцию на ряд нагружений, а затем суммировать получающиеся в ней усилия от разных нагружений и искать опаснейшее. Задача выбора самого опасного нагружения для нелинейных задач расчёта конструкций до сих пор остаётся нерешённой. И любопытная вещь: при огромном размахе исследований по строительной механике, когда некоторые задачи одновременно подвергаются массированной атаке, этой задаче явно не повезло. Лишь несколько человек мужественно штурмуют её.

Здесь впору задуматься над тем, отчего одни задачи расчёта конструкций становятся на время «обязательным ассортиментом» всех научных групп от Арктики до Антарктики, в то время как другие, ничуть не менее актуальные, остаются в тени. Над этим властвуют прихотливые закономерности развития науки, в которых имеют значение не только требования практики и успехи смежных наук, но и система присуждения учёных степеней и званий, да и просто мода, всемогущая мода, прогнозировать которую, как известно, безнадёжное дело.

Мы обсудили методы решения нелинейных задач применительно к расчёту рам. Но наш опыт в обращении с методом конечных элементов должен подсказать нам, что всё сказанное справедливо и по отношению к сплошным телам, если, конечно, их удалось предварительно дискретизировать. Весьма поучительны в этом смысле результаты расчётов железобетонных

плит*. Автор пишет, сравнивая результаты расчётов квадратных плит по теории упругости и с учётом трещин «... моменты в обоих случаях представляют собой величины одного порядка (расхождение 5-30% с увеличением к углам), в то время как прогибы отличаются на порядок (расхождение в 3-12 раз)». Тех, кто не представляет себе иных методов расчёта, кроме методов теории упругости, я призываю вчитаться в контекст и оценить меру пессимизма расчётчика, если уж расхождение в 30% он не считает серьёзным и предостерегает от ещё больших ошибок. Впрочем, в упомянутой книге как раз и излагаются способы борьбы со зловредной нелинейностью.

Конечно, учёт физической нелинейности в конструкции должен непременно быть комплексным. Не стоит ожидать многого от модели конструкции фундамента, в которой до тонкостей детализирована модель основания (учтена и ползучесть, и консолидация грунта, и нелинейность), но зато железобетонная плита изображена грубыми мазками на манер того, как это делается в первых главах учебника сопротивления материалов. К сожалению, такие случаи нередки. В соответствии со своими вкусами (а порой и границаuи своих знаний) расчётчик усложняет до предела один из элементов расчётной модели, оставляя сиротами другие. Нет уж, если вы решили рассматривать фундаментную ленту как упругую балку, то и для основания достаточно принять простейщую модель Винклера!

НЕЛИНЕЙНОСТИ БЫВАЮТ РАЗНЫЕ

Оба описанных метода применимы и тогда, когда источником нелинейности служит существенное изменение геометрической конфигурации конструкции. В этом случае из предыдущего шага берутся не только жесткости, но и перемещения, и такой расчет принято называть расчетом по деформированному состоянию. Учет конечных перемещений приводит нередко и к изменению действую-

* Карпенко Н. И. Теория деформирования железобетона с трещинами. М., Стройиздат, 1976.

щих нагрузок. Ведущим для решения подобных задач является шаговый метод. Необходимо, однако, отметить, что попытки определять таким путем критические нагрузки при расчёте на устойчивость не всегда приводят к успеху. Иногда этому мешает явление *бифуркации* (раздвоения, ветвления) зависимости, связывающей нагрузку и перемещение.

Выше, говоря о методах анализа конструкций за пределами упругости, мы считали, что напряжения и деформации связаны между собой однозначной зависимостью. Такое представление характерно для *деформационной теории пластичности.* Более строгий вариант теории пластичности позволяет учесть возможные неравномерности нарастания нагрузок. В нём напряжения связываются не с деформациями, а с их приращениями. Это особенно важно для конструкций в сложном напряжённом состоянии. Эта теория (она называется *теорией течения, или инкрементальной теорией),* будучи сама основана на приращениях, органично вплетается в шаговый метод.

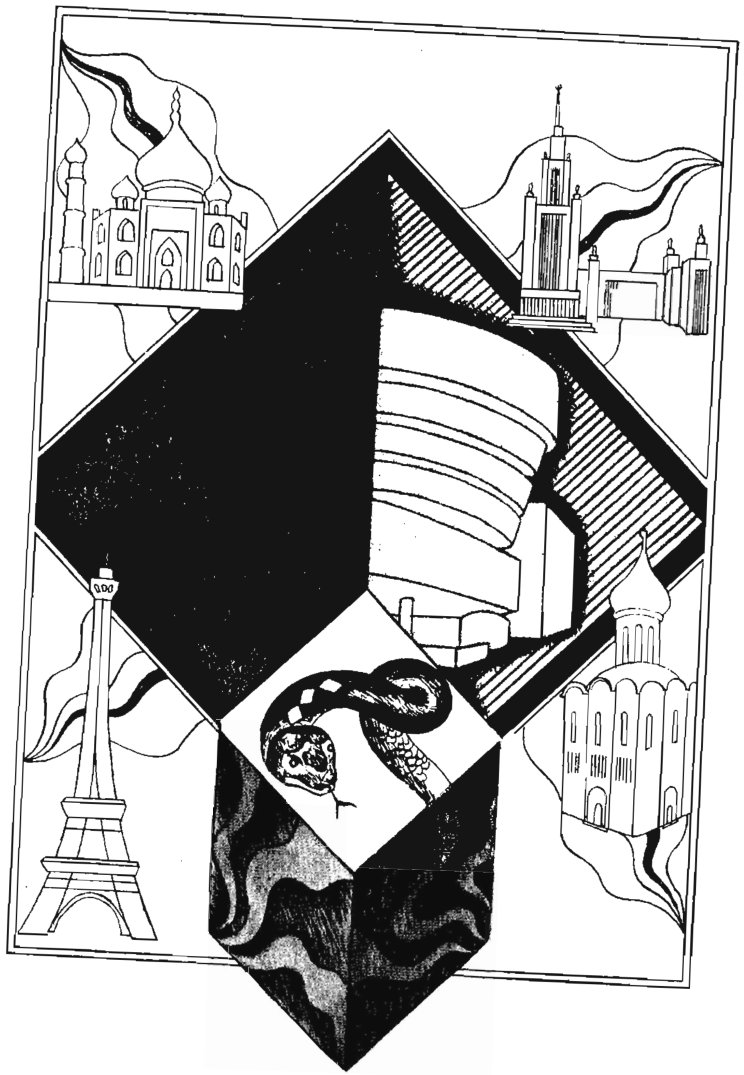
Шаговый метод оказался удобным также при решении динамических задач, но шаговое приращение при этом получает не нагрузка, а время. Время разбивается на конечные малые интервалы и на каждом шаге проводится коррекция деформаций и скоростей движения. Разумеется, при этом нужно уметь произвести по крайней мере расчёт конструкции при заданном статическом нагружении.

К сожалению, расчётчик, вступающий в область нелинейного анализа, и сейчас ещё вынужден спотыкаться о «камни преткновения», которые рассыпаны там довольно щедро. И единственным ориентиром в этой области служит для него опыт: теория пока не способна ответить на ряд важных вопросов.

А между тем нужда в нелинейных методах расчёта конструкций всё растёт. Это связано главным образом с внедрением новых конструкционных материалов. Высокопрочные стали почти с самого начала нагружения ведут себя нелинейно, а если их используют для вантов, то к этому добавляется ещё и геометрическая нелинейность. Особенно «капризны» конструкции из полимеров, которые не желают следовать закону Гука даже при весьма малых нагрузках, а уж если полимерная оболочка опирается на воздух под небольшим давлением, то к ней с обычной линейной теорией упругости вообще не подступайся! Весьма затруднительно решение геометрически

нелинейных задач для конструкций с элементами из резины — в ней деформации могут достигать 10 единиц! Модель такой конструкции — понятие весьма растяжимое как в прямом, так и в переносном смысле, но и с такими материалами инженеры уже научились обходиться с помощью шагового метода.

6
УЧЕТ ПОЛЗУЧЕСТИ



ВСЁ ПОЛЗЁТ!

Явление ползучести известно всем. Книголюбы знают: полки в книжных шкафах рекомендуется периодически переворачивать, сняв с них книги — иначе деформации полок со временем станут заметными и искривлённые ряды книг уже не будут радовать глаз владельца. Это явление связано с деформациями ползучести. Свойство материалов ползти — деформироваться без увеличения нагрузки — было замечено давно. Автор книги «Реология» М. Рейнер эпиграфом для своей книги избрал слова из библии «И по слову господа горы потекли к его ногам». Хотя свойство ползучести было известно ещё во времена фараонов, расчёты ползучести строительных конструкций до сих пор вызывают известные трудности.

В основу теории ползучести положены модели механического поведения материалов, более сложные, чем закон Гука. При этом, однако, одно из достоинств закона Гука —

$$\sigma = E\varepsilon, \tag{6.1}$$

— его линейный характер, старались по мере возможности сохранить. Упругий элемент можно представить себе в виде пружинки (рис. 12,*а*), жёсткость которой определяется модулем упругости E. В то же время вязкий элемент — это элемент тела, в котором напряжение пропорционально скорости деформации

$$\sigma = K\frac{d\varepsilon}{dt}, \tag{6.2}$$

где K — коэффициент вязкости.

Примерно такой закон деформирования моделируется движением поршня, который погружён в цилиндр с жидкостью, если между стенками поршня и цилиндром имеется необходимый зазор. Таким образом, элемент (рис. 12,*б*) моделирует вязкую жидкость. Строить конст-

рукции из вязких элементов бессмысленно: никаких напряжений, компенсирующих внешнюю нагрузку, при постоянной деформации в вязкой жидкости быть не может (при $\varepsilon = \mathrm{const}$ $d\varepsilon/dt = 0$ и отсюда $\sigma = 0$).

Но попробуем теперь составить вместе оба элемента, как показано на рис. 12,*в*. Такой элемент можно уже использовать в конструкции, так как часть напряжения в нём должна сохраниться. Этот элемент именуется моделью Кельвина – Фойхта, для которой напряжение равно сумме правых частей формул (6.1) и (6.2):

$$\sigma = E\varepsilon + K\frac{d\varepsilon}{dt}. \qquad (6.3)$$

Это одна из простейших моделей ползущего материала, которая, естественно, многое не учитывает. Например, не учитывает релаксации, т.е. способности напряжений уменьшаться со временем без изменения деформаций. Такая модель не подскажет нам, отчего со временем ослабла, так и не провернувшись, гайка: при $\varepsilon = \mathrm{const}$ согласно этой модели, получаем и $\sigma = \mathrm{const}$.

Простейшая модель, которая позволяет учесть не только ползучесть, но и релаксацию, – модель Максвелла, которая состоит из двух элементов – упругого и вязкого, соединённых последовательно (рис. 12,*г*). Здесь, очевидно, общая деформация ε будет состоять из упругой ε' и вязкой ε'' частей, каждая из которых будет удовлетворять уравнениям (6.1) и (6.2):

$$\sigma = E\varepsilon'; \quad \sigma = K\frac{d\varepsilon''}{dt} \qquad (6.4)$$

После умножения обеих частей первого уравнения на K/E и дифференцирования по t оно примет вид

$$\frac{K}{E}\frac{d\sigma}{dt} = K\frac{d\varepsilon'}{dt}. \qquad (6.5)$$

Складывая это уравнение со вторым уравнением (6.4), получаем

$$\sigma + n\frac{d\sigma}{dt} = K\frac{d\varepsilon}{dt}, \qquad (6.6)$$

где $n = K/E$ называется временем релаксации.

При постоянном напряжении деформации в модели Максвелла растут линейно. Это справедливо, вообще говоря, лишь до известных пределов, так как в опытах скорость деформации обычно со временем падает. Если деформация постоянна, то правая часть уравнения (6.6) обращается в нуль, и, решая соответствующее дифференциальное уравнение, получаем

$$\sigma = \sigma_0 e^{-t/n}. \qquad (6.7)$$

где σ_0 – напряжение в начальный момент времени.

Как видим, согласно этой формуле, напряжение при постоянной деформации падает, тело Максвелла релаксирует. Когда t становится равным n, показатель степени равен -1 и, следовательно, начальное напряжение уменьшается в e раз (оттого n и называется временем релаксации)*. При $t \to \infty$ напряжение по формуле (6.7) падает до нуля, т.е. наступает полная релаксация. Это уже слишком: в реальных материалах напряжение чаще всего стабилизируется на некотором уровне. Так что модель Максвелла удовлетворительно описывает поведение материала лишь в определённых промежутках времени t, а не во всём диапазоне.

Чтобы сделать более реалистичным описание поведения материала, со временем упругие и вязкие элементы стали соединять в целые гирлянды. Это вызывало появление в законах деформирования вторых, третьих и даже более старших производных. Используются и модели с бесконечным числом элементов, соответствующие интегральным зависимостям между напряжениями и деформациями [11, 13, 16], однако расчёт по таким моделям настолько сложен, что одолеть его можно только с помощью компьютеров.

Линейная интегральная зависимость между напряжениями и деформациями может быть представлена в виде

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_{-\infty}^{t} \sigma(\tau) K(t,\tau)\, d\tau. \qquad (6.8)$$

* Иными словами, это время, за которое напряжение уменьшится в 2,72 раза.

Первый член этой зависимости отражает вклад упругих деформаций, а второй – влияние на деформации всей истории напряжённого состояния, начиная с бесконечно далёких времён и кончая рассматриваемым моментом t. Такое включение всей «родословной» материала в описание его механического поведения позволяет, разумеется, отразить многие важные его черты. Функция $K(t,\tau)$ называется *ядром* интегрального уравнения (6.8) относительно напряжения $\sigma(t)$. Для учёта тех или иных эффектов предлагались разнообразные формы ядер. При этом приходится проявлять большое искусство, чтобы вычисления оказались посильными современному компьютеру.

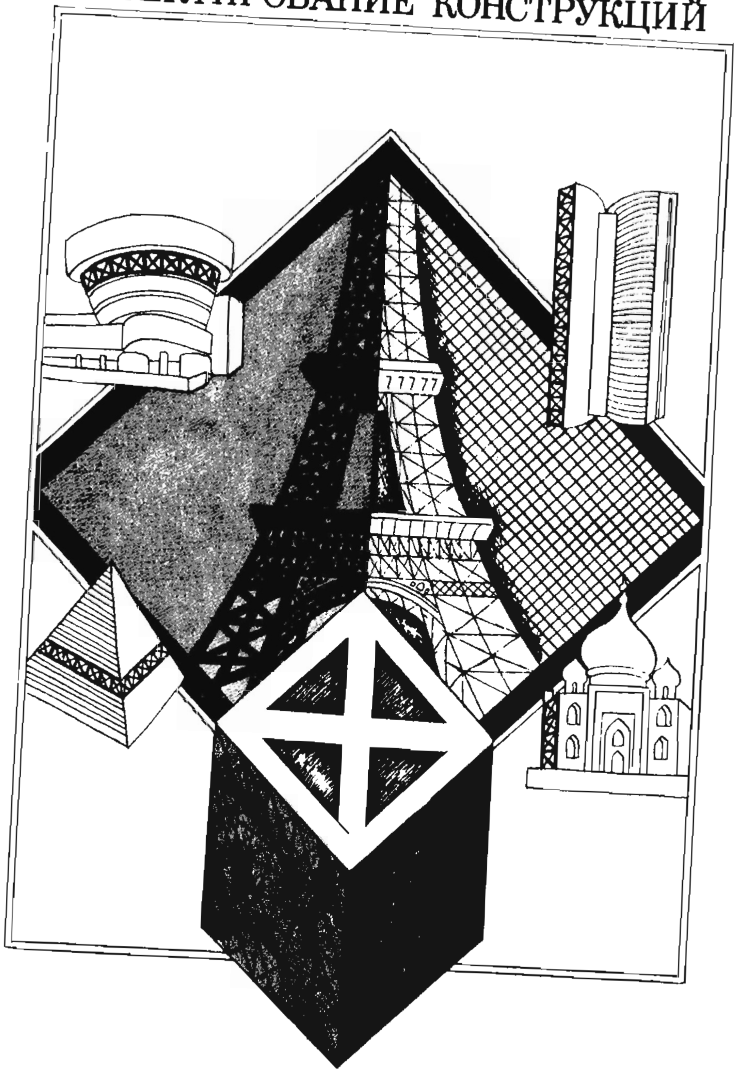
С точки зрения удобства вычисления естественно желание оставаться в рамках линейных моделей. Однако это не всегда возможно. Использовались и нелинейные модели. Последние оказались просто необходимыми при учёте ползучести при высоких температурах, так как температура намного ускоряет процесс ползучести. Неудивительно, что одними из первых расчёты на ползучесть стали производить специалисты по котлостроению. В числе первых исследователей ползучести обычно упоминали испанца Андраде и англичанина Эндрейда. Потом, правда, выяснилось, что это одно и то же лицо (Andrade)*, но в нашей литературе нередко упоминается как два разных автора.

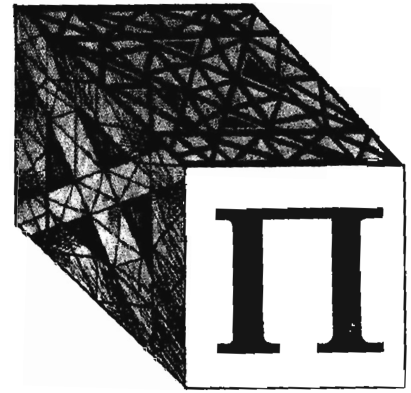
Настоятельно необходимыми оказались расчёты на ползучесть для бетона, в особенности для преднапряжённого, и для полимеров. Но, в отличие от расчётов упругих конструкций, в теории ползучести что ни материал – то свой закон деформирования. Скажем, бетон ползёт медленно, но деформации ползучести в нём не утихают по нескольку десятков лет. В других материалах ползучесть происходит быстро, но зато останавливается на определённом уровне.

Вот почему расчет на ползучесть и сейчас остается еще делом нелегким и не терпящим шаблона. А впрочем, какие терпят?

* Путаница в фамилиях иностранных учёных-механиков – это одно из проявлений языкового барьера, не всегда безвредное. Когда была переведена на английский язык книга Г.Н. Савина «Концентрация напряжений вокруг отверстий», в английской литературе появился новый автор – Lyav. Переводчик-англичанин не догадался, что упоминаемый в книге Ляв и соотечественник переводчика – крупный английский учёный Love – это одно и то же лицо.

7
ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ КОНСТРУКЦИЙ





... А ЧЕЛОВЕК – ГДЕ ЛУЧШЕ

Последние десятилетия в области инженерного дела, а также экономики и планирования характеризуются стремлением перейти от допустимых инженерных и управленческих решений к решениям оптимальным. Оптимальное проектирование конструкций в течение долгого времени не занимало заметного места среди задач строительной механики. Задачи такого типа лишь изредка и случайно встречались в творчестве крупнейших механиков прошлого – Ньютона, Эйлера, Лагранжа. Отчасти это объясняется несовершенством тогдашних математических средств, отчасти – некоторым пренебрежением инженеров прошлого к экономике.

Некоторые свойства оптимальных конструкций были инженерам известны и раньше, например ясно было, что оптимальные конструкции должны быть в том или ином смысле равнопрочными. Так, ещё Галилей в 1638 г. показал, что в оптимальной консоли прямоугольного сечения с заданной шириной b высота h должна изменяться по закону

$$h = C\sqrt{x}, \text{ где } C = \sqrt{\frac{6P}{Rb}}$$

(здесь P – сила, действующая на конце балки; R – расчётное сопротивление; x – абсцисса, отсчитываемая от точки приложения P) (Галилей не употреблял формул, но если изложить его описания современным математическим языком, получатся эти формулы).

Правда, Галилей неверно нашёл выражение для C – сказалась ошибка, которую он допускал при построении теории изгиба*, но зависимость h от x Галилей представлял вполне отчётливо. Отметим, что ус-

* Авторитет Галилея 150 лет мешал другим исследователям обнаружить эту ошибку!

ловие равнопрочности стало весьма расплывчатым, когда в качестве ограничений стали фигурировать условия деформативности, раскрытия трещин и пр. Лишь современная математика снабдила инженера инструментом для получения оптимальных конструкций.

В самом деле, какого сорта задачи оптимизации доступны классическому математическому средству для выяснения экстремумов — дифференциальному исчислению? Рассмотрим для примера одну из них*.

Круговая арка перекрывает пролёт $2l$ и находится под действием равномерно распределённой нагрузки p. Требуется найти оптимальный угол раствора 2φ или связанный с ним радиус арки r (рис. 13), при которых для возведения арки будет затрачен минимум материала.

Объём арки определяется в зависимости от угла φ формулой

$$v = 2F\varphi r\ , \tag{7.1}$$

где F — площадь сечения.

Эта площадь связана с постоянным продольным усилием N и расчетным сопротивлением R зависимостью

$$F = N/R\ . \tag{7.2}$$

Подставим вместо N усилие в арке, выраженное через действующее на арку давление p, по известной формуле**

$$N = pr\ . \tag{7.3}$$

и найдем искомую площадь

$$F = pr/R\ . \tag{7.4}$$

Заменим r его выражением через пролет арки и угол раствора

$$r = l/\sin\varphi\ . \tag{7.5}$$

* Это одна из первых задач оптимального проектирования, нашедших отклик в практике (см. Jorgensen L. R. The constant angle arch. dam. Trans. Am. Soc. Civil Engrs, v. 78, 1915).

** Это так называемая «котельная» формула, которая получила своё название от частого применения при проектировании котлов.

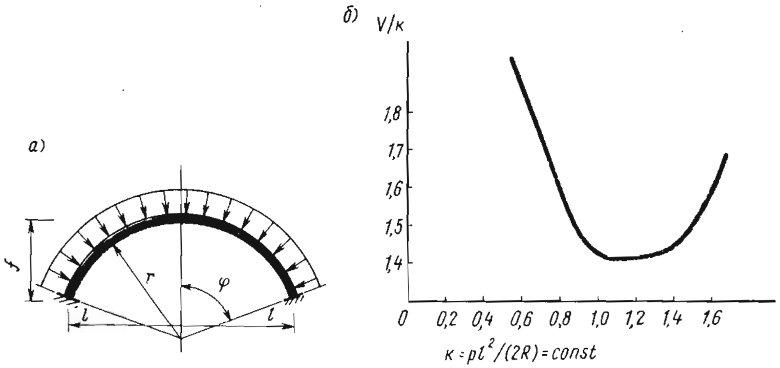


Рис. 13

Подставив (7.5) в (7.4) и (7.1), получаем окончательное выражение для объема арки

$$V = \frac{2pl^2}{R} \cdot \frac{\varphi}{\sin^2\varphi}, \tag{7.6}$$

очевидно, зависящее лишь от угла φ (рис. 13,*а*). Для отыскания минимума функции V решим уравнение

$$\frac{dV}{d\varphi} = \frac{\sin^2\varphi - 2\varphi\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^4\varphi} = 0, \tag{7.7}$$

откуда (при $\sin\varphi \neq 0$ и $\cos\varphi \neq 0$, ибо арка в противном случае просто перестала бы существовать)

$$2\varphi - tg\varphi = 0. \tag{7.8}$$

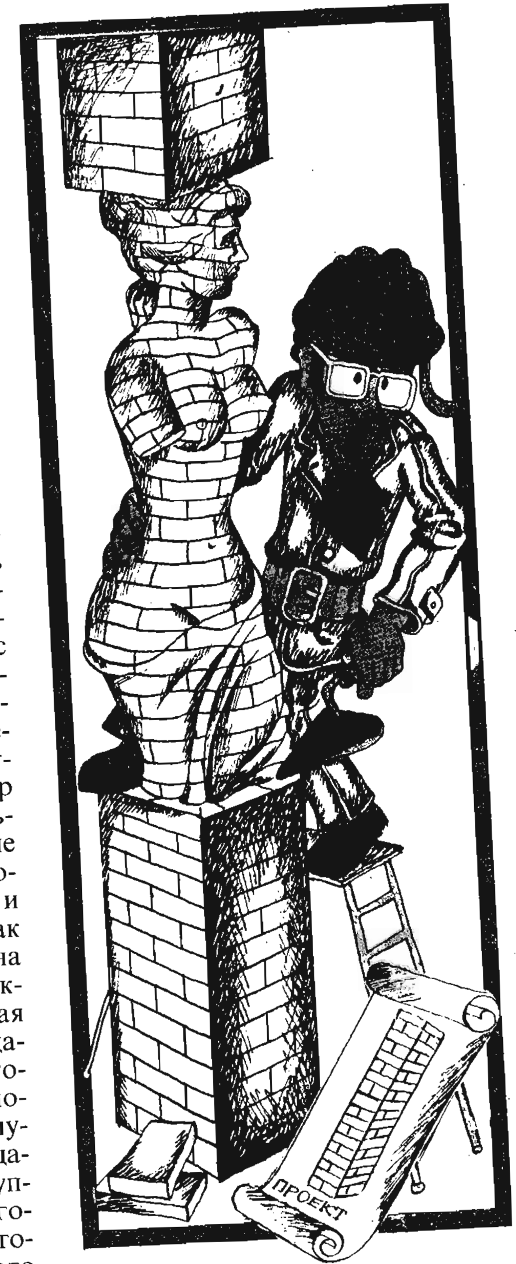
Решение этого тригонометрического уравнения даёт $2\varphi = 133°30'$, или $r = 1{,}09$. Стрела подъёма $f = 0{,}92r$. Всякая другая арка, способная выдерживать заданную нагрузку p, потребует большего количества материала.

На рис.13,*b* приведён график зависимости объёма арки V от φ. Эта зависимость сулит некоторое разочарование тем, кто ждёт чудес от методов оптимального проектирования: вблизи оптимума график весьма полог. Скажем, отклонение от оптимума в φ на 4% (71°45′ вместо оптимального 66°45′) увеличит объём менее чем на 1%. Однако во многих задачах эффект оптимизации превышает 10% по сравнению с интуитивно назначенными параметрами конструкции.

Таким образом, в задачу оптимального проектирования входит отыскание оптимальной конфигурации конструкции и оптимальных её сечений. Но иногда конфигурацию считают заданной. Скажем, при оптимизации рам.

СОРЕВНУЮТСЯ РАМЫ

В предыдущем случае решение существенно облегчалось статической определимостью задачи. Наибольший интерес представляет оптимальное проектирование статически неопределимых конструкций, например рам. Само оптимальное проектирование лежит на стыке строительной механики и экономики, так как вычисление затрат на возведение конструкций — это сложная экономическая задача. Однако в некоторых случаях с помощью разумных допущений эту задачу удаётся существенно упростить. Так, если говорить о раме, то стоимость погонного



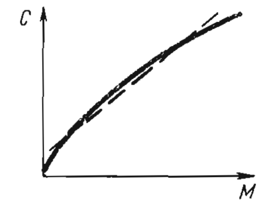


Рис. 14

метра её стержней зависит от площади сечений этих стержней, от которой в свою очередь зависит предельный пластический момент. Поэтому с достаточной точностью стоимость 1 м стержней может быть представлена как функция предельного пластического момента. В общем случае эта функция нелинейна (рис. 14). Однако, зная заранее, в каком диапазоне будут находиться предельные пластические моменты для всех стержней рамы, можно эту зависимость линеаризовать, как показано на рис.14 пунктиром. Тогда стоимость рамной конструкции будет пропорциональна величине

$$z = \sum_{i=1}^{n} M_{0i} l_i \rightarrow \min. \tag{7.9}$$

где M_{0i} — предельные пластические моменты i-го стержня рамы; l_i — длины стержней; n — число стержней.

Функция z определяет цель, которую ставит перед собой конструктор, поэтому ее и назвали *целевой функцией*. А условие $z \rightarrow \min$ носит название *критерия оптимальности* — помимо целевой функции, критерий содержит ещё и информацию о том, что от этой функции требуется — минимум или максимум.

Сейчас мы продемонстрируем способ, с помощью которого при заданной нагрузке и заданной конфигурации стержней можно путём решения задачи линейного программирования найти требуемые оптимальные сечения стержней и действующие в них усилия в предельном состоянии. Согласно теории предельного равновесия (см. гл.4), можно утверждать, что запроектированная таким образом конструкция не разрушится, хотя следствием линеаризации и может быть некоторое отступление от оптимального решения.

Пусть проектируется неразрезная балка из двух пролётов, в каждом из которых сечение должно быть

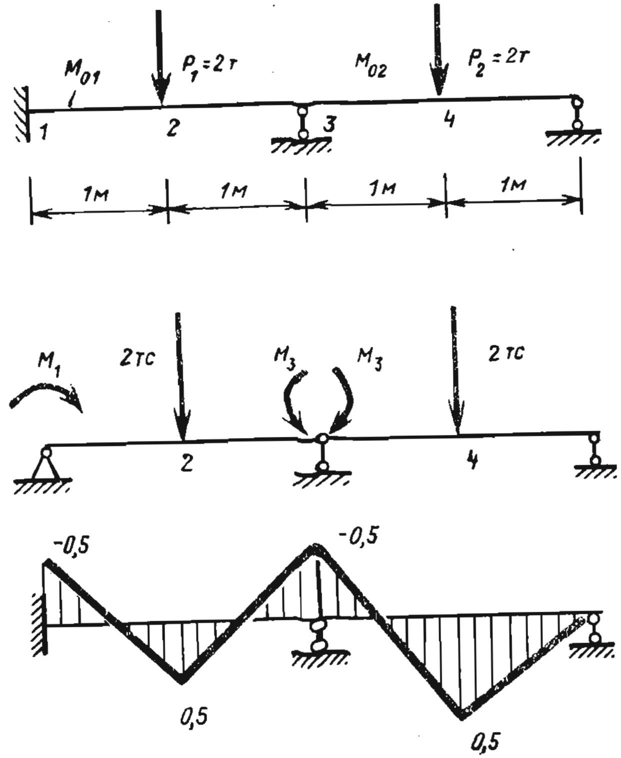


Рис. 15

постоянным. Сечения стержней определяются искомыми предельными пластическими моментами M_{01} и M_{02}. Требуется спроектировать балку так, чтобы добиться минимума целевой функции (рис.15):

$$z = 2M_{01} + 2M_{02}. \tag{7.10}$$

Эта система дважды статически неопределима, так что найти усилия в ней с помощью одних только уравнений статики нельзя. Для решения задачи оптимального проектирования балки примем, что в опасных сечениях *1* и *3* балки (рис. 16) вставлены шарниры. Теперь эту балку можно считать основной системой метода сил. Она статически определима.

В качестве основных неизвестных метода сил выберем действующие в этих сечениях изгибающие моменты M_1

и M_3 (см. рис.16). Теперь составим ограничения по прочности, выразив моменты во всех опасных сечениях через изгибающие моменты M_1 и M_3:

для сечения *1*

$$-M_{01} \leqslant M_1 \leqslant M_{01} ; \qquad (7.11)$$

для сечения 2 $\left(\text{изгибающий момент равен } \frac{2.2}{4} + \frac{M_1 + M_3}{2}\right)$

$$-M_{01} \leqslant 1 + \frac{M_1 + M_3}{2} \leqslant M_{01} ; \qquad (7.12)$$

для сечения *3* придется записать два ограничения, так как мы не знаем заранее в каком пролете в оптимальном варианте понадобится более мощное сечение:

$$-M_{01} \leqslant M_3 \leqslant M_{01} ; \quad -M_{02} \leqslant M_3 \leqslant M_{02} ; \qquad (7.13)$$

для сечения 4 $\left(\text{изгибающий момент равен } \frac{2 \cdot 2}{4} + \frac{M_3}{2}\right)$

$$-M_{02} \leqslant 1 + \frac{M_3}{2} \leqslant M_{02} . \qquad (7.14)$$

Пять двойных неравенств (7.11) -(7.14) образуют ограничения задачи линейного программирования, а условие (7.10) даёт целевую функцию.

Далее читателю представляется выбор: он может или проследить за выкладками, пользуясь каким-либо руководством по линейному программированию*, или, что более вероятно, прочитать следующий ответ:

$$M_{01} = 0{,}5\text{тс}\cdot\text{м};\ M_{02} = 0{,}75\text{тс}\cdot\text{м};\ M_1 = 0{,}5\text{тс}\cdot\text{м};$$
$$M_2 = 0{,}5\text{тс}\cdot\text{м};\ M_3 = -0{,}5\text{тс}\cdot\text{м};\ M_4 = 0{,}75\text{тс}\cdot\text{м}. \qquad (7.15)$$

Эпюра моментов при нагружении оптимальной конструкции показана на рис.17. Обратите внимание на особенность оптимальной конструкции: пластические моменты образуются в ней одновременно во многих

* Мы рекомендуем, например, Д.Б. Юдин, Е.Г. Гольдштейн. Задачи и методы линейного программирования. М., «Советское радио», 1964.

опасных сечениях, т.е. она равнопрочна (стоит ли это приветствовать – мы обсудим ниже). Нелишне отметить, что для решения задач линейного программирования служит математическое обеспечение для ЭВМ всех видов в виде разнообразных программ. К сожалению, это математическое обеспечение до сих пор используется в основном лишь для решения чисто экономических и технологических задач. Укажем на определённую математическую аналогию задач оптимального проектирования и определения несущей способности: и те, и другие сводятся к линейному программированию (см. гл.4).

Чтобы решить задачу, нам пришлось её предварительно линеаризовать. Между прочим, это не столь уж обязательно. Уже разработаны методы нелинейного программирования, которые позволяют решать такие задачи с нелинейной целевой функцией и нелинейными ограничениями. Правда, здесь инженера подстерегает новая серьёзная опасность, имя которой *многоэкстремальность*. Но давайте условимся её не замечать: займись мы ею и эта книга утратит последние права именоваться популярной.

Итак, мы создали у читателя представление о характерных задачах оптимального проектирования конструкций. Их непременной особенностью является направленный поиск оптимальных параметров конструкций.

Не следует путать оптимальное проектирование с *вариантным проектированием* – методикой, при которой сравниваются несколько вариантов конструкции и из них выбирается лучший. При вариантном проектировании оптимальный проект конструкции выявляется лишь в том случае, если он был среди рассматриваемых вариантов, а это бывает очень редко. Хотя вариантное проектирование и служит полезным практическим приёмом, не следует переоценивать его результаты и уж совершенно неверно именовать принятые с его помощью конструкции оптимальными.

НЕ ГОНИМСЯ ЛИ МЫ ЗА МИРАЖЕМ?

Существующие уже программы позволяют оптимизировать не только рамы, но и плиты, оболочки, массивные тела*. Они позволяют снижать стоимость конструк-

* С успехами в решении реальных задач оптимизации можно познакомиться по книгам [14, 17].

ций в среднем на 7-10% против проектируемых на основе интуиции и опыта, как это делалось ранее. Применяя методы оптимального проектирования, инженер-расчетчик из пассивного исполнителя воли архитектора и конструктора превращается в сознательного творца, опирающегося на достижения современной математики. Если раньше от механика-теоретика в лучшем случае ждали ответа на вопрос, разрушится конструкция или нет, а в худшем — прямо переходили к эксперименту, то с внедрением методов оптимального проектирования от него уже стало прямо зависеть, какой должна быть конструкция. И соперничества с экспериментом в этой задаче уже бояться незачем: эксперимент не используется для создания оптимальной конструкции. Кстати, почему не используется? Почему пока почти нет экспериментальных установок, позволяющих выявлять оптимальные параметры конструкции, хотя первые шаги в этом направлении еще в 18-м веке сделал И. П. Кулибин [3]? Трудно сказать почему, но остается фактом, что наиболее развиты сейчас теоретические методы отыскания оптимальной конструкции.

К сожалению, ряд интересных задач оптимального проектирования оказывается пока вне пределов возможного для современных математических методов — не хватает памяти машин и их быстродействия. Есть и другие, принципиальные возражения против бездумного использования методов оптимального проектирования.

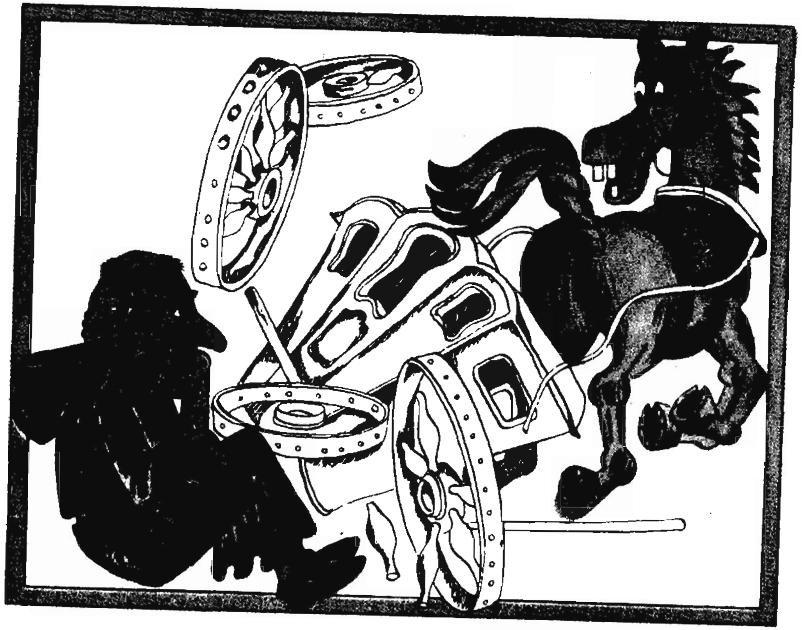
Недавно в США вышли две книги по оптимальному проектированию конструкций. Их авторы Г. Кокс (1965) и Р. Фокс (1971) независимо друг от друга* привели (один полностью, а другой в сокращении) стихотворение мало известного у нас американского поэта прошлого века Оливера Холмса под названием "Одноконный фаэтон". Такое единодушие двух авторов по отношению к одному стихотворению (а стихи не так уж часто включаются в научные монографии) объясняется яркостью, с которой поэт вскрывает недостатки теории оптимального проектирования конструкций, не имея к ней к тому же ни малейшего отношения. Как это уже нередко бывало с литераторами, поэт действительно сумел предугадать беды еще не рожденной научной дисциплины*. Вот это

* Другая причина появления стихотворения сразу в двух книгах, естественно, состоит в том, что Фокс, вероятно, не знал работы коллеги — что поделаешь, обычное следствие информационного взрыва!

стихотворение в русском переводе (автор привязывает время действия к реальному факту — Лиссабонскому землетрясению 1755 г.).*

В тот давний год, лихой и шалый,
Когда судьба сразила Лиссабон,
Один дьячок из деревеньки малой
Чудесный создал фаэтон.
Дьячок не без смекалки был,
И образован был прилично.
А по причине той решил
Он сделать фаэтон "логичным".
"Где, стал быть, тонко,— молвил он,—
Там рвется, это точно.
А потому мой фаэтон
Быть должен равнопрочным".
Изрядной крепости возок:
Прочнейшие оглобли,
Хомут, колеса, передок...
Прочнее быть могло б ли?
Немало миль тот экипаж
Набегал по дорогам.
Он лошадь пережил и аж
Дьячка, притом намного.
Прошло сто лет с поры былой,
Подгнила бричка средне,
А в ней епископ пожилой
Отправился к обедне.
Была уж церковь на виду,
И резво шла гнедая.
Никто не чувствовал беду,
Повозку наблюдая.
Но вот круги в глазах пошли
У старого прелата.
И оказался вдруг в пыли
Епископ скуповатый.
Едва не растерял мозги
В паденьи непривычном —
Возок распался на куски!
Логично? Да, логично!

* Перевод М. Высотского.



Прежде всего, воздадим должное мужественной самоиронии, на которую отважились оба автора книг об оптимальном проектировании. Действительно, если бы фаэтон ломался поэлементно, он не ввергнул бы своего престарелого владельца в столь суровое испытание, хотя в экипаже, возможно, и пришлось бы сменить до срока ряд деталей. Иначе говоря, в задачах оптимального проектирования подчас нельзя близоруко ограничиваться требованием равнопрочности или ему подобными. Ниже мы покажем, что в подобных случаях применим более оправданный вероятностный подход, учитывающий

возможность постепенного выхода из строя отдельных деталей конструкции. Впрочем, это возможно и в рамках детерминированных представлений, как станет ясно из следующей задачи.

НЕОБЫЧНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

Если приведённый стихотворный пример придал мыслям читателя нужное направление, то ему уже ясно, что модели оптимального проектирования конструкций должны носить комплексный характер. В них должны тесно сплетаться разнохарактерные соображения, часто далеко выходящие за традиционные рамки механики. Рассмотрим пример оптимизации конструкции в условиях ползучести.

Начнём с того, что выход конструкции из строя, или как принято выражаться более мягко, её отказ, отнюдь не всегда является непоправимой катастрофой. Ясно, что внезапное обрушение большепролётного моста и обрушение теплицы, из-за которого погибнут только три огурца – это события неравнозначные. Во многих случаях нетрудно определить конкретный экономический ущерб, который вызывается выходом конструкции из строя. Будем считать, что разрушение конструкции не вызывает ни одной человеческой жертвы, что из-за него не погибнет «Сикстинская мадонна» и не возникнет «ни войн, ни катаклизмов, ни бурь». Такие конструкции в последнее время стали называть конструкциями с чисто экономической ответственностью. В самом деле, хотя для многих типов конструкций можно, бесспорно, оценить ущерб, который принесёт их разрушение в денежном выражении, в принципе это возможно не всегда. К примеру, атомные реакторы электростанций в США рассчитывают даже на нагрузку ... от падения на них самолёта в результате авиационной катастрофы. Хотя вероятность появления такой нагрузки, вообще говоря, ничтожна, однако действие её могло бы вызвать последствия прямо-таки ужасные.

Пусть имеется растягиваемый силой P элемент конструкции, где деформации изменяются по закону (6.2). Элемент из заданного материала выходит из строя и подлежит замене на аналогичный, если деформации достигнут величины ε^*. Какой должна быть площадь сечения элемента при условии, что он рассчитывается на бесконечно долгий срок эксплуатации?

Последнее обстоятельство представляется несколько необычным в прочностных расчётах, но, как мы увидим, общий срок службы конструкции играет здесь большую роль. Будем считать, что стоимость элемента пропорциональна площади его сечения F. Время, по прошествии которого элемент придётся заменить, зависит от площади сечения, т.е. $\theta = \theta(F)$. Какова будет стоимость заменяющего элемента? «Странный вопрос, – может ответить читатель. – Разве не было сказано, что заменяющий элемент такой же, как и исходный?» С точки зрения инженера он тот же, а вот экономист рассудит иначе. Экономист считает, что поскольку прошло θ лет, приведённые затраты на заменяющий элемент окажутся меньшими, чем при изготовлении первого элемента, и будут пропорциональны величине $F/(1 + E_н)^{\theta}$, где $E_н$ — нормативный коэффициент приведения затрат к базисному году, который принят равным 0,08 для всего народного хозяйства СССР*. Но относительно величины этого коэффициента среди экономистов ещё не утихли споры (ещё недавно он принимался равным от 0,08 до 0,4), так что мы не будем торопиться подставлять это значение. Однако и принятое сейчас, возможно заниженное значение $E_н$ сильно отражается на наших представлениях о ценности конструкции. В самом деле, если конструкция с чисто экономической ответственностью обрушится через 10 лет, то это обойдётся её владельцу в $(1 + E_н)^{10} = 2{,}16$ раза меньше, чем немедленное обрушение конструкции, а через 20 лет – уже в 4,66 раза меньше (если, конечно, она вообще будет ещё нужна).

Ясно, что приведённая стоимость следующей заменяющей конструкции составит $F/(1 + E_н)^{2\theta}$, ещё одной – $F/(1 + E_н)^{3\theta}$ и т.д. Стоимость всего бесконечного (!) числа элементов, которые будут участвовать в заменах, будет равна

$$z = F + F/(1 + E_н)^{\theta} + F/(1 + E_н)^{2\theta} + F/(1 + E_н)^{3\theta} + \ldots \qquad (7.16)$$

Обратите внимание, хотя число конструкций бесконечно, их общая приведённая стоимость конечна. И её нетрудно подсчитать с помощью формулы для суммы геометрической прогрессии:

* Инструкция по определению экономической эффективности капитальных вложений в строительстве. М., Стройиздат, 1972.

$$z = F\left(1 + \frac{1}{(1 + E_h)^{\theta}} + \frac{1}{(1 + E_h)^{3\theta}} + \frac{1}{(1 + E_h)^{3\theta}} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{F}{1 - (1 + E_h)^{-\theta}} \to \min. \qquad (7.17)$$

Эта цепочка выражений завершается знаком минимума, так как она и выражает критерий оптимальности задачи. А теперь получим явное выражение для функции $\theta = \theta(F)$. Согласно (6.2),

$$\varepsilon^* = \frac{d\varepsilon}{dt}\theta = K\sigma\theta = \frac{KP\theta}{F}, \qquad (7.18)$$

откуда

$$\theta = \frac{F\varepsilon^*}{KP} = \alpha F, \quad a\alpha = \frac{\varepsilon^*}{KP}. \qquad (7.19)$$

Подставляя выражение для θ в целевую функцию (7.17), получаем условие

$$z = \frac{F}{1 - (1 + E_н)^{-\alpha F}} \to \min. \qquad (7.20)$$

Из условия $dz/dF = 0$ получаем трансцендентное уравнение [с учётом $\ln(1 + E_н) \simeq E_н$]

$$(\alpha F E_н - 1)(1 + E_н)^{\alpha F} = 1, \qquad (7.21)$$

из которого находится оптимальная площадь F. Отметим, что оптимальная площадь находится в сильной зависимости от такой «немеханической» характеристики, как нормативный коэффициент приведения затрат к базисному году $E_н$*.

Отказ конструкции может повлечь за собой не только её потерю, но и ряд других нежелательных последствий: порчу урожая в теплице, обрыв проводов электропередачи и прекращение электроснабжения, гниение хранимых овощей и другие беды. Многие из таких явлений нанесут ущерб, который вполне возможно оценить количественно суммой C_1 рублей. Отношение этого ущерба

* Этот экономический параметр в последнее время настолько уверенно входит в расчёты строительных конструкций, что возникает опасение: не придётся ли вскоре во избежание путаницы подумать над новым обозначением для модуля упругости?

к стоимости конструкции C_0, т.е. C_1/C_0, назвали «коэффициентом экономической ответственности».

Очень деликатным вопросом в оптимальном проектировании служит выбор критерия оптимальности*. Чаще всего за него принимают условие минимума массы конструкции. Этот критерий, безусловно, приемлем для конструкций авиационных (каждый лишний килограмм массы воздушного лайнера очень дорого обходится при эксплуатации). Другое дело строительные конструкции. Для них решающим фактором обычно является себестоимость. Но, к сожалению, не всё так просто, когда речь идёт о снижении стоимости конструкции: строители рискуют не выполнить плана, если проектировщики предложат им конструкцию вдвое дешевле – ведь план-то устанавливается в рублях. Да и сами проектировщики пока ещё не заинтересованы в том, чтобы искать оптимальное решение и уменьшить, скажем, расход арматуры в конструкции (в особенности, если это заставит их хотя бы на день задержаться с работой). Оттого порой и оседают в конструкциях мёртвым грузом миллионы тонн дефицитных материалов и сотни миллионов человеко-дней не менее дефицитного труда. Не следует преувеличивать возможности строительной механики в решении этих важных проблем, но кое-что в её силах.

Необходимость выбора единственного показателя качества конструкции нередко приводила проектировщиков в уныние. «А как быть, если мне нужно, чтобы конструкция обладала не только минимумом стоимости, но и минимумом веса, минимумом трудоемкости, максимумом коэффициента сборности, мини...» «Довольно! – обрывали это словоизвержение специалисты по оптимизации. – Критерий оптимальности может быть только единственным.» Но нашлись и такие, кто, внемля мольбам практиков, всё же стал развивать многокритериальные подходы в задачах оптимизации конструкций (или, по другой терминологии, стал производить «векторную» оптимизацию, в отличие от обычной, «скалярной»). А как это сделать?

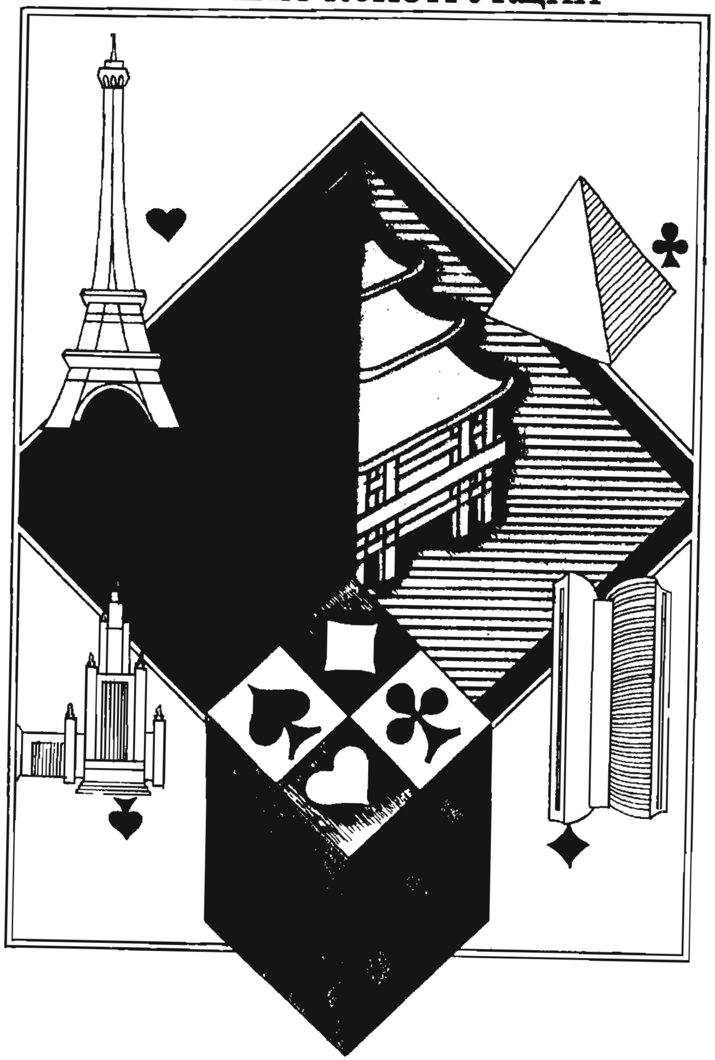
* Выбор критерия часто бывает неожиданным. Например, устроит ли вас в качестве критерия конструкции стула минимум высоты? А между тем: «Я люблю сидеть низко, – заговорил артист, – с низкого не так опасно падать» (М. Булгаков, «Мастер и Маргарита»).

Первым долгом вспомнили идею итальянского экономиста Парето и попытались считать оптимальным такой проект конструкции, для которого любое изменение какого-либо из параметров приводит к ухудшению по крайней мере одного показателя качества. Разочарование в «методе Парето» пришло скоро: во-первых, он даёт обычно не единственный оптимальный проект конструкции, а целое множество, обычно довольно обширное; во-вторых, нет разумных оснований накладывать запрет на ухудшение какого-то маловажного показателя, если при этом удаётся существенно улучшить главный. Так возникла идея «ранжирования» показателей, с помощью которой удаётся сначала отдаться воле главного показателя, затем второго по важности и т.д. Но хорошо, а кто производит ранжирование показателей? Расчётчик? Тогда и результаты оптимизации будут субъективны. Поручить это дело экспертному совету? Но тогда предложите этому совету просто оценивать проекты конструкции и предлагать изменения к ним без всякой там оптимизации. К сожалению, пока ещё не предложено методов решения многокритериальных задач, которые бы легко отразили подобное возражение.

Мы не имеем возможности останавливаться на всех аспектах теории оптимального проектирования конструкций. Отметим лишь, что она развивается семимильными шагами. А точнее, примерно вдвое быстрее, чем строительная механика в целом. Как мы уже отмечали, число публикаций по оптимальному проектированию конструкций удваивается всего за 4,5 года, и можно подсчитать, что через 200 лет вес бумаги этих публикаций превысит вес всех существующих сейчас в мире конструкций*!

* Если вы хотите обнаружить ошибку в этом рассуждении, вам поможет следующая глава.

8
СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ



ЭТОТ СЛУЧАЙНЫЙ МИР КОНСТРУКЦИЙ

Мы говорим: расчетное сопротивление материала составляет 2300 кгс/см^2, нагрузка равна 10 тс. Но эти величины имеют вероятностный характер. Скажем, первое утверждение означает, что вероятность разрушения материала при напряжении менее 23000 кгс/см^2 невелика, меньше какой-то заданной величины, допустим 1/10 000. А второе, если его расшифровать, означает, что вероятность появления нагрузки более 10 тс ниже заданной величины. Понятие вероятности, хотя и не всегда включается в курсы, читаемые инженерам, но близко им по крайней мере интуитивно. Однако мы на всякий случай поясним его. Если мы подбросим одну монету, то вероятность появления орла или решки равна 1/2. Для вероятности разрушения конструкции это слишком много. А как представить себе вероятность 1/10 000? Ну хотя бы так: подбросьте монету 13 раз. Тогда вероятность того, что все 13 раз выпадет решка составит $(1/2)^{13} = 1/8192$, а это близко к 1/10 000.

Статистическим, или *вероятностным*, методам расчёта конструкций посвящена обширная литература*. Главным образом, она посвящена статистическому обоснованию нормативных величин, вводимых в расчёты, — нагрузок, расчётных сопротивлений материалов, геометрических допусков и т.д. Обычно после проведения таких статистических обоснований вводились некоторые уже детерминированные величины, которые использовались в реальных расчётах. Однако в последнее время всё чаще раздаются голоса, что вероятности следует не «запрятывать», в нормативные величины, а использовать непосредст-

* На русском языке можно рекомендовать книги В.В. Болотина [4] и А.Р. Ржаницына [15].

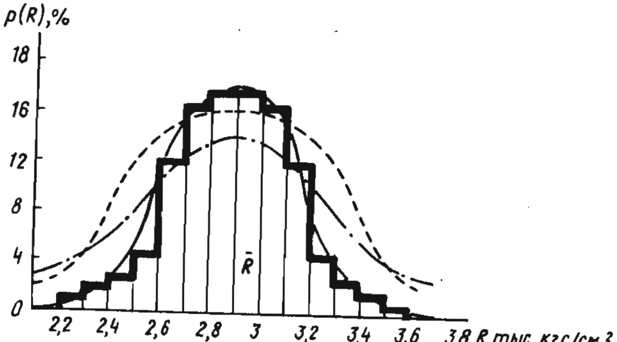


Рис. 16

венно в расчётах. Но для этого расчётчику нужно владеть вероятностными методами расчёта конструкций. С нашей стороны было бы легкомыслием пытаться обучить вероятностным методам в скромных рамках этой книги. Мы попытаемся дать представление о наиболее простых из уже развитых понятий.

Что значит, например, утверждение, с которого мы начали: «Расчётное сопротивление материала равно 2300 кгс/см^2»? Разберёмся в этом поглубже. Проведя опыты, можно построить эмпирическую кривую распределения, т. е. такой график, в котором по оси абсцисс откладывается предел текучести стали, а по оси ординат – его вероятность в процентах. На рис.18 приведена такая опытная кривая распределения. Всмотритесь в неё и вы увидите, что, например, в 13% случаев предел текучести окажется от 3000 до 3100 кгс/см^2 и от 2700 до 2800 кгс/см^2. Чаще всего течение происходило при напряжении 2900 ($\pm$100) кгс/см^2 – это мода распределения*.

Было бы преступным оптимизмом использовать в качестве расчётного распределения среднее значение напряжения, при котором происходило разрушение образцов, т. е. 2900 кгс/см^2 (что привело бы к разрушению половины запроектированных элементов). В то же время, как мы видим, ни один образец не разрушился при

* Кто после этого возразит против того, что мода играет в строительной механике значительную роль?

нагрузке ниже 2100 кгс/см^2. Следовательно, эту величину можно использовать в качестве расчётного сопротивления безбоязненно. Но, может быть, можно назначить и 2300 кгс/см^2? Ведь это позволит сэкономить при проектировании около 10% материала, а если разрушение и произойдёт, то его последствия, быть может, будут не столь губительны, чтобы перевесить экономию в 10%. А может быть и наоборот: ни один образец не разрушился при нагрузке меньше 2100 кгс/см^2 потому, что образцов было недостаточно много. Если бы исследуемая партия была побольше, то среди них нашелся бы и такой образец, который не выдержал бы и 2000 кгс/см^2. Насколько возможен и оправдан риск разрушения конструкции, мы рассмотрим позже, а пока продолжим рассуждения относительно вычисления вероятности разрушения.

В дальнейшем мы будем измерять вероятности не в процентах, а в долях единицы. Распределение вероятностей на рис.18 почти симметрично относительно значения $R_0 = 2900$ кгс/см^2 и имеет вид колокола. Подобное распределение хорошо описывается так называемым нормальным гауссовским законом

$$p(R) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(R-R_0)^2}{2\sigma^2}} \qquad (8.1)$$

Величина σ называется стандартом распределения и показывает, насколько кучно ложатся экспериментальные точки вокруг среднего значения («математического ожидания») R_0, например кривая, показанная пунктиром, характеризует материал, обладающий тем же средним пределом прочности, что и первый, но с большим разбросом данных. Такой материал отличается большим стандартом распределения предела прочности. Из рисунка видно, насколько важен стандарт для определения расчётного сопротивления. При одних и тех же средних значениях для первого материала расчётное сопротивление 2100 кг/см^2 совершенно безобидно, в то время как для второго оно явно небезопасно: некоторое число экспериментальных значений предела прочности оказалось левее этого значения. Отсюда видно, какой большой экономии материала можно достигнуть, если не повы-

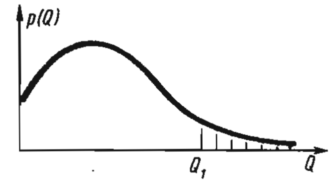


Рис. 19

шать его средний предел прочности R_0, но зато повысить однородность (т.е. понизить σ). Именно этим теоретически обосновывается влияние качества материала на его расчётное сопротивление, а следовательно, и на экономичность.

Итак, нормальное распределение во многих случаях удовлетворительно описывает результаты опытов для большинства материалов. Есть, правда, одно «но»: нормальное распределение имеет «хвосты», которые уходят на бесконечность в обе стороны (как показывает на рис.18 штрих-пунктирная линия). Так что теоретически в соответствии с нормальным распределением возможен (хотя и маловероятен) материал, который обладает пределом прочности 10^{10} кгс/см^2 (материал с пределом прочности 0 кгс/см^2 не столь уж большая редкость). Но в жизни таких материалов не бывает, поэтому иногда используют распределения, которые лежат заведомо по одну сторону от какой-либо границы (например, распределение Пирсона).

Ещё более, чем в отношении механических свойств материала, проявляется вероятностная природа нагрузки. Нагрузки чаще всего имеют распределение вида, показанного на рис.19. На этой кривой распределения по оси абсцисс отложена нагрузка (скажем, снеговая, ветровая, полезная и т.д.), а по оси ординат – вероятность её появления. Для нагрузок гауссовское распределение вероятностей, очевидно, неприменимо, и приходится пользоваться иными законами распределения. В этих целях часто используют распределения Пирсона и Пуассона.

Если известен закон распределения $p(Q)$, то нетрудно подсчитать, какова вероятность разрушения конструкции, которая способна выдерживать лишь нагрузку Q_1 (см. рис.19):

$$P(Q > Q_1) = \int_{Q_1}^{\infty} p(Q)dQ. \tag{8.2}$$

Если вспомнить геометрический смысл интеграла, то вероятность разрушения конструкции при фиксированной несущей способности Q_1 и при заданной вероятности распределения нагрузки $p(Q)$ выразится заштрихованной площадью на рис.19 между кривой $p(Q)$ и горизонтальной осью. Разумеется, эта площадь убегает вправо в бесконечность, но становится столь узкой полоской, что интеграл (8.2) конечен. Более того, он всегда меньше единицы, поскольку единице равна вся площадь между кривой $p(Q)$ и горизонтальной осью: ведь какая-то нагрузка (пусть нулевая!) на конструкцию так или иначе должна подействовать, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(Q)\,dQ = 1. \tag{8.3}$$

Итак, мы уже знаем, как вычислить вероятность разрушения конструкции, если ее несущая способность задана в точности, а нагрузка случайна. Но, как мы видели выше, и несущая способность конструкции, определяемая механическими свойствами материала, тоже является величиной случайной.

Существуют способы подсчитать вероятность разрушения (или неразрушения) конструкции с учетом вероятностного характера всех факторов, в том числе упомянутых. Правда, сделать это непросто; во всяком случае список лиц, делавших это неверно, украшен многими уважаемыми в мире расчета конструкций именами [15]. Слишком заманчивым показалось многим использование простой геометрической интерпретации. Но, как это случалось в науке неоднажды, обманчивое искушение очевидностью лишь уводило от истины.

ТРУДНОСТИ ТОЛЬКО НАЧИНАЮТСЯ

Но пока еще многое не учтено. Например, мы считали, что случайный характер несущей способности конструкции порождается одним только пределом прочности. Однако на самом деле в нее могут внести свой вклад случайные несовершенства элементов конструкции с геометрической точки зрения (искривленные оси, эксцентриситеты нагрузок, меньшие площади сечений и т.д.). В то же время на конструкцию обычно действует не одна, а множество различных нагрузок. Наряду с этим конструкция обычно состоит из ряда элементов, для каждого из которых могут быть свои вероятностные характеристики, определяющие его надежность.

Думаете, это все? Ошибаетесь! На пути расчётчика стоит еще одна существенная трудность — корреляция. Дело в том, что случайные величины, определяющие поведение конструкции, не являются независимыми — они в общем случае взаимосвязаны. Есть сильные, фактически детерминированные связи: например нагрузка от торможения мостового крана может существовать лишь тогда, когда есть вертикальная нагрузка от самого крана — иначе нечему будет тормозить. А вот максимальная снеговая нагрузка вряд ли совпадет во времени с наивысшей ветровой (ветер сдувает снег!) или наибольшей температурной (если, конечно, последняя вызывается жарой; да, впрочем, и зимой под толщей снега теплее). Но есть значительно более тонкие связи. Например, появление трещин в бетоне влияет на несущую способность арматуры — она при трещинах быстрее корродирует. Описать столь сложные связи аналитически (т.е. включить в расчет химические реакции и микроструктурные изменения с учетом, скажем, наведенного тока от ближайшей линии электропередачи) — этого мы пока не умеем. Единственное что остается — это пытаться с помощью некоторых упрощенных моделей произвести статистическую обработку данных опытов.

В книгах [4, 15] можно найти много примеров применения вероятностных методов к расчёту конструкций. Но, к сожалению, возникающие при этом трудности еще во многом остаются непреодоленными, а результаты расчетов спорными. В значительной степени это связано со статическим * характером описанных выше расчетов, т.е. в этих моделях работа конструкции под нагрузкой рассматривается как некоторый единовременный акт, для результатов которого ищется вероятностное выражение. А ведь на самом деле работа конструкции — это процесс, протекающий во времени. Более того, это процесс нестационарный, ибо с течением времени меняются свойства материала конструкции (она, грубо говоря, "стареет", хотя результатом этого старения может быть не только снижение, но и повышение ее прочности; скажем, в результате твердения бетона). Кроме того, во времени изменяются нагрузки: например тенденция к росту веса транспортных средств ведет к постоянному увеличению расчетных нагрузок на мосты. И вообще иногда время заставляет нас пересмотреть наши представления о ценности тех или иных конструкций вплоть до изменения знака у нашего отношения к ним: диалектика истории иногда заставляет попросту взрывать то, что какое-то время назад считалось необходимым **. Для описания такого поведения конструкций уже недостаточно теории вероятностей и приходится использовать теорию случайных процессов.

Используя законы статистики и теории вероятностей, в принципе можно всегда, скажем, при заданных законах распределения нагрузки и предела прочности, найти выражение для несущей способности конструкции. Но мы уже знаем, что между "можно в принципе" и "можно практически" лежит подчас океан технических трудностей. В самом деле, если конструкция — это всего лишь невинный растягиваемый стержень, то достаточно взглянуть на рис. 19 и 20, чтобы пришло решение. А если "конструкция" — это упруго-пластическая оболочка, усиленная ребрами? Тут уже так просто не выйдешь из положения. Более того, для искомой зависимости вообще не существует обозримого аналитического выражения. Как же быть?

* Именно «статическим», а не «статистическим» – мы хотим подчеркнуть это, ибо замена одного слова другим – самая распространённая, по нашим наблюдениям, опечатка в книгах по механике.

** Вспомним «Робинзона Крузо» Д. Дефо: «Вечером штурман и боцман заявили капитану, что для спасения судна нужно срубить фок-мачту».

8-247

Здесь выручает метод статистического моделирования. Машина вырабатывает пределы прочности и нагрузки в виде случайных чисел, распределенных по заданным законам. Затем она производит расчет несущей способности (а для этого, как мы уже знаем, даже компьютеру нужно немало потрудиться). Накопив ряд результатов таких испытаний, ЭВМ (а с ней и мы) получает эмпирическую кривую распределения несущей способности, не имея аналитического выражения для функции, ее описывающей. И эту кривую можно использовать в расчетах. Например, убедившись, что из 10^5 испытаний в 37 случаях несущая способность оказалась ниже действующей нагрузки, мы устанавливаем, что коэффициент надежности этой конструкции равен $1 - 0{,}00037 = 0{,}99963$.

ЛОЖКА ДЕГТЯ

Нам представляется, что было бы дурной услугой инженеру-строителю не сказать о том, что в отношении использования вероятностных методов в строительной механике имеются принципиальные возражения. Остановимся на этих возражениях, хотя, точнее говоря, эти возражения можно отнести ко многим другим приложениям теории. В теории вероятностей ощущается мучительный разрыв между строгостью ее современного здания и зыбкостью тех физических реальностей, которые она призвана описывать. Вообще говоря, в строительной механике то и дело приходится иметь дело с объектами, точная информация о поведении которых отсутствует. Вопрос лишь в том, достаточно ли этого скудного информационного пайка для приготовления доброкачественной теории *.

* Одному специалисту по расчёту конструкций на воздействие ветра принадлежит такое едкое определение: «Строительная механика – это искусство моделировать материалы, работу которых мы не понимаем, в геометрических формах, которые мы не можем в точности проанализировать, под действием сил, которые нам неизвестны, причём делать это так, чтобы ни у кого не зародилось никаких подозрений». Вот так! Гипнозу этого высказывания не следует особенно поддаваться: мы наблюдаем, что готовность к самокритике у механиков порой легко переходит в готовность к самобичеванию. У юристов признание подсудимым своей вины само по себе ещё не подтверждает обвинения – нужны доказательства (см. Parmelee R. A. Wind effects on high – rise buildings. Evanston. Northwestorn Univ. Press, 1971).

Своеобразным отражением применения вероятностных методов является использование методики расчета конструкций по предельным состояниям, которая уже много лет действует в СССР, а позднее получила распространение и за рубежом (кстати, иногда эту методику называют "полувероятностной", более чем прозрачно указывает на родство).

Вместо единого коэффициента запаса, который применялся когда-то и обоснование которого покоилось обычно лишь на столь туманных соображениях, что правильнее всего было бы назвать этот метод «полумистическим», упомянутая методика ввела несколько коэффициентов, каждый из которых имел вероятностную природу.

Так, коэффициент перегрузки относится к внешним нагрузкам, коэффициент однородности — к физическим свойствам материала, коэффициент условий работы — к конфигурации конструкции и принципам её статической работы.

Разумеется, уже количественное изменение отражало известный прогресс в расчётной методике (три коэффициента вместо одного – это почти всегда несколько лучше, пусть не «втрое», но лучше). Но в то же время давала себя знать и ограниченность методики предельных состояний, ее неспособность стать вероятностной и на оставшуюся половину. Как отмечается в [15], "коэффициенты однородности и перегрузки определяются для каждого расчетного фактора независимо от изменчивости других факторов".

Иначе говоря, эта методика неспособна (или почти неспособна) учесть вышеупомянутую корреляцию.

Но справедливости ради стоит подчеркнуть, что и созданные к сегодняшнему дню вероятностные методы расчета конструкций небезупречны.

Одним из самых распространенных доводов против применения теории вероятностей является явная недостаточность многих статистических совокупностей, на которых строятся выводы. Действительно, методы теории вероятностей приложимы, строго говоря, лишь к массовым событиям. А разве можно считать таковым, скажем, разрушение конструкции?" Оно,— заявляют практики,— вообще никогда не должно произойти. А вы пытаетесь его как-то статистически регламентировать. Наконец, чтобы получить обоснованный результат, требуется часто не менее 10000 опытов. А кто видел статистический материал по разрушению 10000 большепролетных мостов от ветровой нагрузки? В мире вообще нет столько большепролетных мостов. И, к счастью, ветер сумел разрушить за всю историю лишь три из них". И так далее ...

Возникающие при этом проблемы настолько серьезны, что ими заинтересовались даже математики, вообще говоря, не жалующие вниманием в последние годы строительную механику.

Правда, от их суждений на этот счет веет убийственным пессимизмом: "...можно совершенно твердо сказать, что никакого научного способа узнать, насколько сильным может быть ветер "один раз в сто лет", мы в настоящее время не имеем.

Проектировщикам сооружений следовало бы найти иной способ для утверждений, какая надежность заложена в их сооружения"*.

Все это говорит по крайней мере о том, что вероятностные методы в строительной механике нуждаются в тщательной и осторожной трактовке, Так, в частности, если утверждение "данная конструкция имеет вероятность разрушения 1/10000" и содержит мало информации (верно ли это значение, 1/10000, а если верно, то много это или мало, если из 10000 конструкций будет разрушаться в среднем одна?), то во всяком случае справедливо такое утверждение:"если вероятность разрушения другой конструкции, рассчитанная по той же методике, равна 1/5000 и конструкция стоит столько же, сколько первая, то первая конструкция лучше". Такой вывод в пользу вероятностных методов использовал В.В. Болотин [4]. Что ж, по-видимому, такими соображениями приходится довольствоваться, если теория вероятностей применяется к относительно редким событиям, для которых она, вообще говоря, не предназначалась. Другие аспекты применения вероятностных методов критически обсуждаются в [5].

Однако в наш текст, который на протяжении всей главы насыщался механическими терминами, нежданно-негаданно снова проникло понятие "стоимости". Увы, в наш век без него не обойдешься.

Поэтому использованию понятия стоимости в сочетании с вероятностными соображениями мы посвящаем следующую главу.

* Тутубалин В.Н. Теория вероятностей в естествознании. Новое в жизни, науке, технике. Серия «Математика, кибернетика», 2/1972, «Знание». Автор не поясняет, где (вне науки) искать этот „иной способ".

9
КОНСТРУКЦИИ С ОПТИМАЛЬНЫМ ЗАПАСОМ

ЕСЛИ ИЗВЕСТНЫ ВЕРОЯТНОСТИ ....

Мы бегло познакомились со статистическими методами описания поведения конструкций. Позади и глава, посвященная оптимизации параметров конструкций, или оптимальному проектированию. Говоря о статистических методах, мы обращали внимание на трудности в установлении нормативных значений расчетных характеристик конструкций, а говоря об оптимальном проектировании, не скрывали нечеткости исходных предпосылок моделей оптимизации.

В последнее время развилось много методов, в которых счастливо сочетаются оптимизационный подход и вероятностные соображения.

Поставим задачу отыскания оптимальной обеспеченности конструкции по А. Р. Ржаницыну*, т. е. оптимальной вероятности того, что конструкция не разрушится за срок эксплуатации. Сам этот срок будем считать достаточно небольшим, чтобы не учитывать отдаление затрат. Примем, что конструкция представляет собой растягиваемый стержень с площадью сечения F, который разрушается, если $F < F_1$, где F_1 — требуемое значение площади сечения. Примем также, что F_1 подчиняется нормальному закону распределения (мы уже знаем, что это возможно, если случайный характер этой площади связан со свойствами материала, а не с нагрузками). Тогда, согласно теории вероятностей,

$$P = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\gamma} e^{-0.5F_1^2}\,dF. \tag{9.1}$$

где верхний предел

* Ржаницын А. Р. «Строительная механика и расчёт сооружений». 1974, № 1.

$$\gamma = \frac{F - \bar{F_1}}{\sigma}. \tag{9.2}$$

Здесь через $\bar{F_1}$ обозначено математическое ожидание F_1, а через σ — стандартное отклонение, которое характеризует разброс возможных значений площади.

Затраты на конструкцию представим в виде суммы первоначальной стоимости конструкции C_0 и ожидаемого ущерба от ее разрушения. Будем считать, что ущерб, вызванный разрушением конструкции, нами подсчитан и составляет C_1 рублей. Поскольку вероятность неразрушения конструкции равна P, вероятность разрушения составит $1 - P$, а математическое ожидание ущерба будет равно $(1 - P)C_1$. Если считать первоначальную стоимость пропорциональной площади F с коэффициентом пропорциональности B, то общие затраты на возведение конструкции и ее последующее восстановление в среднем составят*

$$C = BF + (1 - P)C_1. \tag{9.3}$$

Для отыскания минимума этого выражения продифференцируем его по P и, приравняв производную нулю, запишем уравнение

$$\frac{dC}{dP} = B\frac{dF}{dP} - C_1 = 0. \tag{9.4}$$

Несколько сложнее вычислить dF/dP. Легче найти с помощью (9.1) dP/dF:

$$\frac{dP}{dF} = \frac{dP}{d f_1}\frac{dF_1}{dF}. \tag{9.5}$$

Но, согласно (9.1):

$$\frac{dP}{dF_1} = \frac{1}{2\pi}e^{-0,5F_1^2}, \tag{9.6}$$

* Ввиду малости периода эксплуатации мы считаем невероятным повторное разрушение конструкции.

а из (9.2)

$$dF_1/dF = 1/\sigma. \tag{9.7}$$

Подставляя эти значения в (9.5), получаем

$$\frac{dP}{dF} = \frac{1}{2\pi\sigma}e^{-0,5F_1^2}. \tag{9.8}$$

А отсюда нетрудно найти и обратную величину

$$\frac{dF}{dP} = 2\pi\sigma e^{-0,5F_1^2}. \tag{9.9}$$

Подстановка этого значения в (9.4) позволяет получить окончательное уравнение для определения γ:

$$\sqrt{2\pi}B\sigma e^{0,5\gamma_2} = C_1. \tag{9.10}$$

Право же, это уравнение не столь уж сложно, чтобы препятствовать внедрению такого подхода. Между тем с его использованием получаемый коэффициент запаса перестает быть обезличенным, а привязывается к конкретным условиям эксплуатации конструкции. Пусть, например, выход конструкции из строя вызывает ущерб в 100 000 руб. при $B = 10\,000$ руб/м², $\bar{F_1} = 0,1$ м², $\sigma = 0.01$ м². Подставляя эти величины в уравнение (9.10), находим $\gamma = 3,35$. Этому соответствует обеспеченность конструкции $P = 0,99967$. Отсюда можно подсчитать требуемую площадь. Согласно (9.2),

$$F = 0,1 + 3,45 \cdot 0,01 = 0,135\ \text{м}^2.$$

В более сложных случаях уже не обойдешься простым взятием производной и приходится прибегать к методам математического программирования, однако суть расчета от этого не меняется.

А ЕСЛИ НЕТ ДАЖЕ ВЕРОЯТНОСТИ?

Проведенный расчет основывался помимо стоимостных характеристик на знании математического ожидания требуемой площади $\bar{F_1}$ и ее стандарта σ. И это, конечно, полнее описывает ситуацию, чем, скажем, задание одной только нормативной площади F^*. В последнем случае обычно для преодоления нехватки информации принято назначать F^* больше, чем 0,135 м². Но как быть, если в нашем распоряжении нет вероятностной информации о поведении конструкции? Можно ли в этом случае говорить о каком-либо разумном решении или здесь приходится положиться на волю случая? Оказывается, есть оправданный в какой-то мере способ действий и в такой ситуации, если нам, по крайней мере, известны данные об ущербе при возможных воздействиях нагрузки – пусть вероятность появления этих воздействий даже и неизвестна.

Допустим, имеется три разных варианта конструкции и подсчитаны затраты, которые будут сделаны в каждом из решений при возникновении каждого из четырех возможных вариантов нагружения:

№ конструкции	Вариант нагружения			
	1	2	3	4
1	2	4	3	7
2	5	3	1	1
3	7	5	6	8

Вопроса о методике подсчета этих затрат мы касаться не будем: он требует глубокого анализа хозяйственной деятельности предприятия, к которому принадлежит конструкция *.

Итак, известно, какие могут действовать нагрузки и как они отразятся на экономике конструкции. Не хватает пустяка: неизвестно, какая из нагрузок подействует на конструкцию в действительности. Сразу видно, что третий вариант конструкции невыгоден ни при каких условиях: он всегда даст больше затрат, чем два первых варианта. Но что лучше, первый вариант или второй? Добро бы ещё была известна вероятность наступления каждой из ситуаций.

* Здесь требуется учитывать косвенные затраты, потери прибыли производства и полный ущерб, наносимый выходом конструкции из строя, стоимость ремонта конструкции, стоимость хранения заменяющих конструкций и многое другое, что решительно увело бы нас из области строительной механики в область экономики.

Скажем, нам сказали бы, что все нагрузки равновероятны. в каждом из двух вариантов:

$$Z_1 = (2 + 4 + 3 + 7)/4 = 4{,}0 \text{ тыс. руб.};$$

$$Z_2 = (5 + 3 + 1 + 1)/4 = 2{,}5 \text{ тыс. руб.}$$

Тут, ясно, следует отдать предпочтение второй конструкции. Но, повторяем, вероятностей действия нагрузок в нашем случае нет, мы их «придумали». Выход в этом случае предлагает теория игр. Ее подход неожидан: давайте будем использовать не одну и ту же конструкцию, а обе с неизвестными пока частотами p_1 и p_2. Если бы первая конструкция использовалась во всех случаях, то затраты составили бы 2 тыс. руб. Но поскольку она используется лишь в p_1 случаях, то эти затраты составят в среднем $2p_1$ тыс. руб. В то же время затраты на вторую конструкцию будут $5p_2$. Общие затраты при действии первой нагрузки должны быть не больше пока неизвестной величины v, которая называется «ценой игры»:

$$2p_1 + 5p_2 \leqslant v. \tag{9.11}$$

Это же рассуждение можно повторить и для других нагружений:

$$4p_1 + 3p_2 \leqslant v; \tag{9.12}$$

$$3p_1 + p_2 \leqslant v; \tag{9.13}$$

$$7p_1 + p_2 \leqslant v. \tag{9.14}$$

Кроме того, частоты p_1 и p_2 должны быть в сумме равны единице, поскольку какую-то из конструкций придется ставить в любом случае. Частоты p_1 и p_2 из соотношений (9.11)-(9.15) не определишь, но к ним можно добавить целевую функцию, характеризующую стремление получить возможно большую прибыль, откуда

$$p_1 + p_2 = 1; \tag{9.15}$$

$$v \to \min. \tag{9.16}$$

Система условий (9.11)-(9.16) определяет задачу линейного

программирования, которую можно решить графоаналитическим методом (см. гл. 5). Её решение даёт $p_1 = 4/9$; $p_2 = 5/9$; $v = 3\frac{2}{3}$ тыс. руб. Таким образом, для достижения максимальной прибыли нужно в четырех случаях из девяти ставить первую конструкцию, а в пяти — вторую.

Заметим теперь, что $2\frac{1}{2} < 3\frac{2}{3}$, т. е. затраты на решение,

принятое в условиях известной информации, всегда меньше затрат, которые должны быть сделаны при отсутствии информации. Разница составляет $3\frac{2}{3} - 2\frac{1}{2} = 7/6$ тыс. руб. Недостающую информацию можно как-то получить (например, провести натурные обследования, которые дадут представление о вероятности тех или иных нагрузок). Но это дополнительное обследование имеет смысл проводить тогда, когда его стоимость в расчете на каждую конструкцию будет ниже 7/6 тыс. руб. В противном случае оно не окупится.

Это простое рассуждение показывает, что существует некоторый уровень осведомленности о поведении конструкции, выше которого стоимость поступающей информации уже не окупается повышением качества проектного решения. То же справедливо и в отношении самих методов расчета. Нам представляется, что в некоторых задачах строительной механики такой уровень уже достигнут (например, в теории упругих тонких пластин), но в большинстве задач мы еще далеки от него.

Мы пренебрегли бы принципами, положенными в основу этой книги, если бы не сказали, что игровой подход, примененный выше для оптимизации проектного решения в условиях нехватки информации, страдает многочисленными пороками (не говоря уже о том, что не вполне ясно, как трактовать «смешанную стратегию», которая получается в его итоге). Мы обратились к нему лишь как к способу оценки информации о поведении конструкции.

Статистические методы оптимизации находят себе все новых и новых приверженцев. Исследователей привлекает почти неограниченная свобода творчества, которая открывается в этой области строительной механики, отсутствие каких-либо канонов. Порой дело доходит до абсурда. К примеру, один австралийский исследователь предложил случайным образом распределять арматуру в железобетонной плите (все равно, дескать, нам неизвестны законы, связывающие ее с прочностью конструкции, да и критерий оптимальности — штука спорная)*. Другой ученый

* Чтобы читатель не принял это за анекдот, приводим точную ссылку: M. A. Muspratt. Destructive tests on rationally designed slabs. Magazine of Concrete Research, v. 22, № 70, March, 1970. Это не единственный случай такого рода, но вообще для строительной механики появление подобных работ нехарактерно.

(кстати, земляк и коллега приверженца полного фатализма в расчете конструкций) ядовито заметил по поводу этой работы, что, если пользоваться медицинской аналогией, это аналогично такому способу лечения: врач, выслушав больного, закрывает глаза, берет с полки со многими лекарствами первый попавшийся пузырек и передает его больному.

НЕЛЬЗЯ ВОЙТИ ДВАЖДЫ В ОДИН И ТОТ ЖЕ ПОТОК

Мы напомнили это наблюдение древних для того, чтобы еще раз подчеркнуть: работа конструкций происходит во времени. Есть несколько путей постановки задач оптимизации с учетом этого фактора.

Можно рассмотреть серию ремонтов и замен конструкции в течение какого-то заданного промежутка времени (быть может, бесконечного) подобно тому, как мы это делали при оптимальном проектировании в условиях ползучести. Только срок службы конструкции θ будет определяться не достижением предельных деформаций, а вероятностью появления разрушающей нагрузки.

Наконец, можно представить работу конструкции во времени в виде случайного процесса. Проще всего это сделать тогда, когда можно принять, что конструкция описывается стационарным марковским случайным процессом. Иначе говоря, принять, что переход конструкции из одного состояния в другое (скажем, из неразрушенного в разрушенное) определяется некоторыми неизменными во времени вероятностями перехода (это и есть определение стационарного марковского процесса). В этом случае нетрудно найти оптимальную стратегию ремонтов и замен конструкции, которая гарантирует минимум ожидаемых затрат (или максимум прибыли) за все будущее время [14].

Существует ещё несколько любопытных подходов, цель которых в конечном счете — создание и поддержание конструкции оптимальной надежности. Тому, кто полагает, что все это слишком сложно, чтобы использоваться в повседневной практике проектирования, мы хотели бы заметить, что всякий новый метод неизменно встречался возгласами: “Это чересчур сложно!”. Хотя в дальнейшем обычно выяснилось, что он недостаточно сложен, чтобы описать все особенности поведения конструкции.

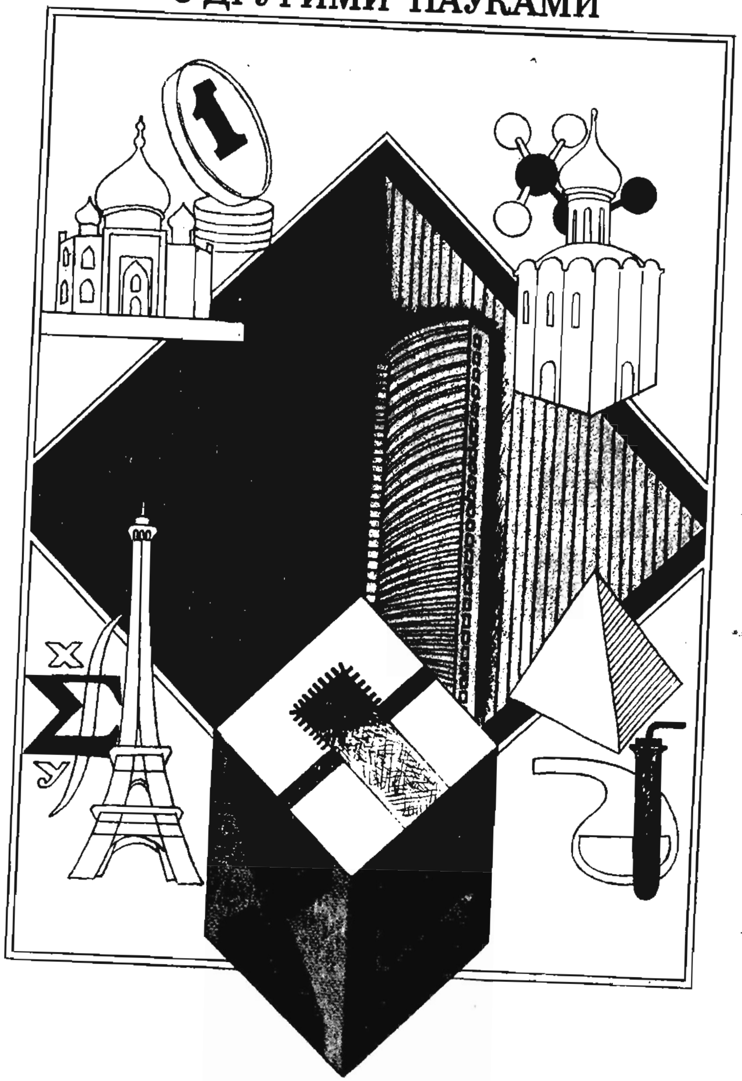
НЕЭКОНОМИЧЕСКАЯ ОТВЕТСТВЕННОСТЬ

Но мы, кажется, слишком увлеклись описанием конструкций с чисто экономической ответственностью, как бы забыв на время, что создатели конструкций несут бремя другой, более высокой ответственности — за жизнь людей, за судьбу их уникальных творений, наконец! Здесь уже договориться до каких-то общеприемлемых позиций сложнее.

Разумеется, проще всего перевести все на деньги, превратить всякую ответственность в экономическую. Экономисты многих стран уже пытались это сделать много раз. Мы не станем здесь приводить предлагавшиеся измерители стоимости человеческой жизни в долларах, марках и злотых, которые нередко представляются оправданными. Ограниченность материальных ресурсов общества, даже самого гуманного, не позволяет пока создавать подземные переходы на каждом перекрестке или застраховать все здания от десятибалльного землетрясения.

Более основательными выглядят соображения, основанные на принципе равного риска. Сделать риск одинаковым для всех (сразу же договоримся, риском ничтожно малым, не идущим ни в какое сравнение с риском погибнуть под колесами и на колесах) — задача особенно актуальная при сейсмическом расчете конструкций. И в этой области сделано уже немало. Мы уже знаем способы так истратить выделенный нам миллион рублей, чтобы понизить риск сильного землетрясения в равной степени для всех жителей строящегося городского района. Правда, при этом придется использовать модель сейсмического воздействия на конструкцию, с которой вы, может быть, не согласитесь и скажете, что это воздействие мало похоже на землетрясение. Что поделаешь, модель всегда строится на абстрагировании отдельных свойств, а математические модели сложных явлений еще нередко доходят в абстрагировании до полного абстракционизма.

10
НА ГРАНИЦАХ С ДРУГИМИ НАУКАМИ



В РЕВНИВОМ СОЮЗЕ НАУК

В науке постоянно происходят два процесса — процесс специализации, обособления каждой отрасли и даже проблемы, и процесс интеграции, стирания граней между направлениями и дисциплинами. Н. Винер утверждал: "...Деление науки на различные дисциплины не более, чем административная условность ... каждый творчески работающий ученый волен ломать любые барьеры, если это нужно для успеха его работы". Быть может, это не совсем точно. В разное время и в разных областях науки один из упомянутых процессов начинает преобладать над другим; например, происходит все большая специализация. Но что касается строительной механики, очевидно, явное преобладание процесса интеграции.

Не стоит лишний раз доказывать, что новое сейчас рождается чаще всего на стыках наук. Гораздо полезнее поискать эти стыки для строительной механики. Многие из них уже дали себя знать, например с экономикой. Но сказанным дело не ограничивается. Сейчас уже ведутся попытки расшатать границы, которые разделяют строительную механику и теорию экономических моделей. Ведь создание конструкции — это некоторое экономическое мероприятие, которое связано с другими экономическими мероприятиями цепочкой зависимостей.

Примером такой связи служит учет технологических соображений при проектировании конструкций. Чтобы найти, какую конструкцию следует поставить на данном месте, мало ее рассчитать в обычном, традиционном смысле слова. Недостаточно и запроектировать ее оптимально в том смысле, о котором мы говорили выше. Требуется совместный учет технологических и механических факторов, которые должны сплестись в рамках единой комплексной модели. Комплексные модели — вот столбовая дорога развития теории расчетов конструкций. В такой модели важно, наряду с модулями упругости и прочими расчетными сопротивлениями, иметь и "немеханическую" информацию: во скольких экземплярах будет построена конструкция, каковы расходы на ее транспортирование от места производства до места монтажа, какова технология монтажа. Такие модели уже создаются. Каким должен быть оптимальный каталог типовых конструкций — вот вопрос, который сейчас волнует конструкторов и ученых. И для ответа на него приходится сплавлять воедино *экономику и механику, технологию и архитектуру, химию и эстетику*. Правда, эта плавка еще идет, и в первых образцах слишком много брака. Причем речь, конечно, не идет о том, чтобы связать какой-нибудь ригель Р-13/2 со всей системой мироздания: модель должна быть в меру компактной, вычислимой.

Традиционная строительная механика имела дело с некими идеальными материалами. Но поведение некоторых реальных конструкций порой не желает укладываться в классические рамки. Это заставляет переходить к специфическим расчетным моделям, особенно для железобетонных конструкций.

Вообще железобетон — до сих пор самый распространенный строительный материал снискал себе печальную славу губителя расчетных теорий. С качественной стороны работа железобетона представляется вполне ясной даже неспециалисту*. А вот ее количественное описание встречается со многими трудностями. Сначала железобетон "забраковал" традиционную теорию ползучести и властно потребовал разработки для него специальной теории. Не удовлетворившись этим, железобетон отверг услуги теории упругости: при деформировании железобетона уже на ранних этапах нагружения появляются трещины, сильно искажающие истинное напряженное состояние по сравнению с предсказаниями теории упругости. В связи с этим была развита теория работы железобетона с

* Технически достаточно грамотно следующее описание:

«... 1) доски, обрубки брёвен, ивовые корзинки, пустые ящики;

2) шкворни, сломаный умывальник, вёдра, консервные жестянки;

3) битый фаянс, битое стекло, пустые бутылки;

4) кости и кирпичи.

Всё это, добросовестно скреплённое палками, землёй и краденым цементом, образовало стену, к которой можно было прислониться с опасностью для костюма и жизни» (А. Грин, «Капитан Дюк»).

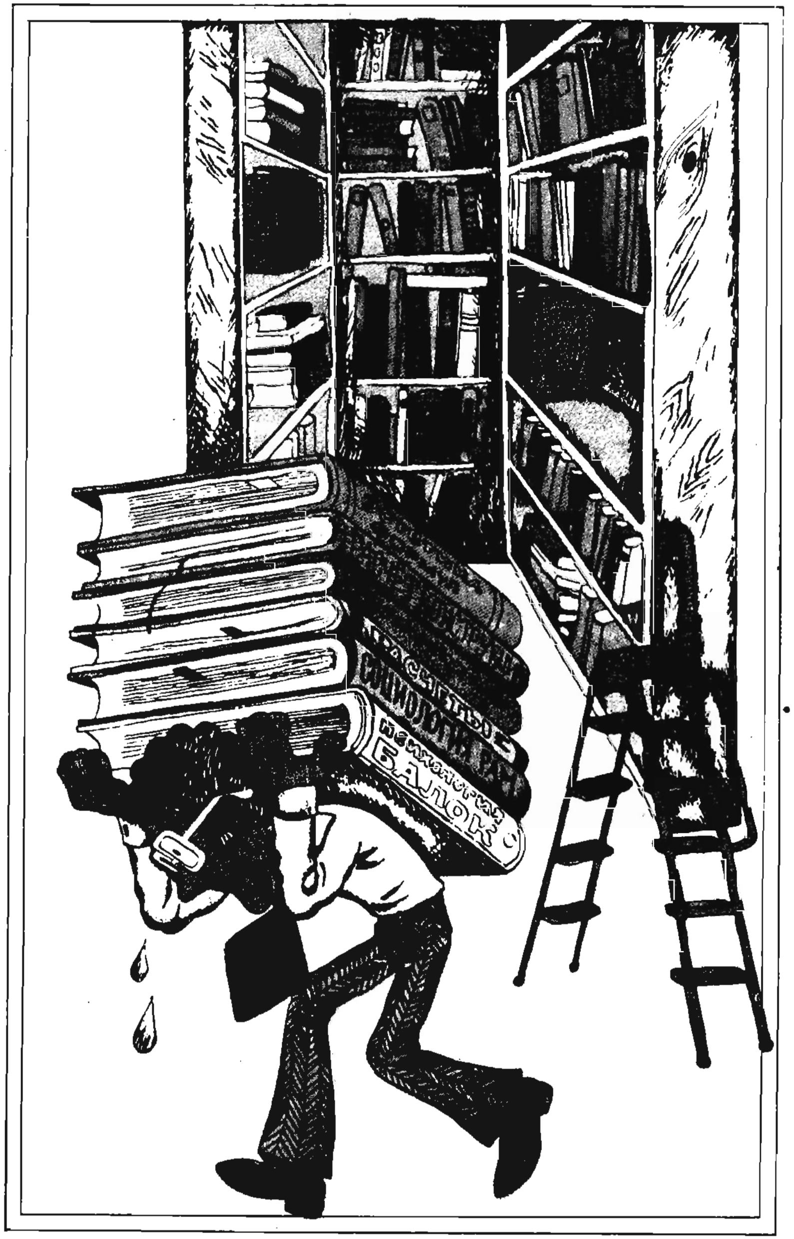
трещинами сначала для изгибаемых балок, а затем и для плит и оболочек. Эта теория позволяет найти физические константы железобетонного тела, дающие возможность свести задачу его расчета к некоторой задаче теории пластичности.

Уже первые результаты показали: можно беспредельно уточнять расчет по упругой стадии и при этом нисколько не приблизиться к подлинному поведению железобетонной конструкции, если не учитывать специфики поведения железобетона.

В столкновении с железобетоном отступила традиционная теория пластичности, так как выяснилось, что железобетон решительно отказывается следовать условиям пластичности Мизеса и Треска. Все это в целом создало широкий пролив, разделяющий строительную механику и теорию железобетона. И в то же время современная теория железобетонных конструкций соединила в себе присущую строительной механике строгость с характерным для теории железобетона практицизмом, ее близостью к запросам строительства. Нынешний специалист по теории железобетона уже не объявит, подобно маститому французскому патриарху железобетона, что он "ненавидит математиков".

Железобетон вправе считать себя пасынком в семье конструкционных материалов. В самом деле, много ли крупных механиков работают над его проблемами? А журналы? Быть может, наряду с журналом "Механика полимеров", вполне оправдывающим свое существование, должны были бы существовать по крайней мере два-три журанал по механике железобетона, но пока нет ни одного.

Если попытки описать поведение железобетонных конструкций привели к пересмотру нескольких традиционных представлений, то с развитием механики полимеров возникли десятки новых теорий. Собственно, полимеры — это не материал, а целый класс материалов, настолько различных по своим механическим свойствам, что механика полимеров равнозначна механике деформируемого твердого тела вообще: полимеры с точки зрения механических свойств могут напоминать и высокопрочную сталь, и творог. Но мало того: один и тот же полимер ведет себя по-разному при разных температурах. Тут уж не обошлось без привлечения *физики и химии*. Да, именно химии, так как описание механического поведения некото-



рых полимеров оказалось совершенно невозможным без одновременного описания происходящих в них при этом химических реакций, в которых участвуют как конструкционный материал, так и окружающая среда.

Ученым подчас трудно предвидеть исход их исследований в будущем. Могли ли, скажем, ученые, разрабатывавшие теорию оболочек, предугадать, что их работами будут пользоваться медики, пытаясь дать механическое описание некоторых сердечно-сосудистых заболеваний, например инфаркта миокарда? А это уже реальность. Но трудно предвидеть результаты разработок и в более близких строительству областях.

Одна из таких состоявшихся реальностей — союз строительной механики и *вычислительной техники.* Первые несмелые попытки использования ЭВМ в расчете конструкций послужили зародышем развивающихся сейчас автоматизированных систем проектирования. Достаточно задать такой системе контуры конструкции и нагрузки, как она выдает распределение усилий, деформаций и даже подбирает сечения без вмешательства человека. Но тут пришлось столкнуться с совершенно новыми проблемами. Выяснилось, к примеру, что рассчитывая раму, машина тратит 70% машинного времени не на составление матриц, решение систем уравнений, построение эпюр и подбор сечений, а на операции информационные — поиск нужных массивов, выборку из них требуемых чисел, засылку массивов в соответствующие места во внешней памяти машины и т.д. И роль таких вспомогательных операций все время растет по мере того, как расширяются функции машин при проектировании. К примеру, стоит ли в расчете использовать величину $\sin x$? С точки зрения ручных методов расчета, безусловно, стоит: ее легко найти в таблицах или с помощью логарифмической линейки. А в программе для ЭВМ на алгоритмическом языке для вычисления этой функции необходима специальная подпрограмма, так как таблиц машина не знает. Вот и получается, что вручную вычислить $\sin x$ проще, чем x^3, а для машины — труднее раз в сто. Так что прежде чем поручать машине суммировать синусоидальный ряд, инженер должен n раз подумать.

Недавно стал выходить новый журнал, посвященный применению ЭВМ в механике*. В редакционной статье,

* Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1975, № 1.

предваряющей первый номер, главные редакторы журнала Дж. Аргирис и В. Прагер отмечали: “Какой бы подход ни использовался в расчете, важно понять, что отделение теоретических основ метода от его машинной реализации было бы огромной ошибкой. ЭВМ должна определять теорию метода”.

Прошли те времена, когда инженер разрабатывал метод расчета, а потом поручал программисту “соорудить” программу. Теперь разработчик метода и программист все чаще выступают в одном лице. И это лучшая гарантия того, что призыв Аргириса и Прагера не будет оставлен без внимания*.

Эти обстоятельства должны еще раз привести к еще одной переоценке методов строительной механики с новых позиций. И такие пересмотры периодически неизбежны: внедрятся машины с дисковой памятью — пересмотр, перевалит число операций за миллиард в секунду — снова пересмотр ...

Особенно много ждут специалисты по расчету конструкций от новых средств ввода информации в вычислительные машины и вывода ее из них. При существующих средствах обмена информацией диалог инженера и машины во многом затруднен. И алгоритмам расчета стараются придать чисто машинный характер, руководствуясь правилом: уж если удалось загнать информацию в машину, то нужно выжать из них обеих как можно больше. В итоге машины часто проделывают много несвойственной им и главное ненужной работы. К примеру, оптимизируя конструкцию, просматривают много заведомо непродуктивных путей изменения ее характеристик. Уже сейчас инженер, снабженный дисплеем (устройством, напоминающим экран телевизора), может обозревать на нем результаты ранней стадии оптимизации и, дотрагиваясь световым пером до изображений отдельных элементов, “подсказывать” машине, какие из них ей стоит постараться улучшить. А касаясь световым пером кодовых слов, которые горят на экране, инженер может руководить процессом оптимизации, включая или отключая блоки самообучения, выбирая тот или иной метод поиска, намечая критерии оценки. Более того, такой диалоговый режим,

* Такой процесс присущ сейчас не одной строительной механике. «Эта классическая схема исследования, разделяющая «заказчика» и «исполнителя», на наших глазах устаревает» (И. Грекова, «Вопросы философии», 1976, № 6).

в котором мощь машины помножается на интуицию инженера, позволит успешнее применять неформальный анализ результатов расчета и преодолеть пресловутую проблему многокритериальности.

Не менее важные цели могут быть достигнуты умелым использованием устройств графического вывода информации (плоттеров). Здесь речь идет не только (и не столько) о рабочих чертежах, в которые машина может воплощать результаты расчетов (доля затрат на этот вид работы в общих расходах на строительство ничтожна), а в возможности получать схемы развития трещин, эпюры усилий и скоростей, поля армирования и другие графические символы, которые нуждаются в тщательном и неформальном анализе.

Для многих специалистов по строительной механике программирование стало уже второй профессией. С начала шестидесятых годов в СССР при расчетах конструкций стали широко применять язык „Алгол”. Без преувеличения, он стал “родным” языком специалистов по теории сооружений. И сейчас он играет большую роль, но ... как сказал один из знатоков программирования, “Алгол” можно потихонечку забывать”: его сейчас все более вытесняет алгоритмический язык „Фортран”. Мы не будем здесь входить в детали многолетнего единоборства этих двух колоссов программирования. Скажем только, что неожиданно вынырнула “темная лошадка”, алгоритмический язык PL/1, который сейчас грозит оставить без работы все прочие языки. Но пока в расчетах конструкций PL/1 используется слабо.

Связь между строительной механикой и *электротехникой* можно проследить на примере обыкновенного провода линии электропередачи. Дело в том, что, с одной стороны, он — электропроводник, а с другой — гибкая нить, находящаяся под действием собственной массы, ветра и возможно массы наледи. Стрелу его провисания как проводника следует стараться сделать поменьше: от этого будет уменьшаться длина, а с нею и омическое сопротивление, да и индуктивное сопротивление будет снижаться. Но зато в интересах прочности провисание нити следует сделать побольше — от этого снизится усилие в ней и сечение можно будет уменьшить, что в свою очередь отразится на сопротивлении. Получается сложный клубок, который можно распутать, лишь сплавив воедино соображения строительной механики и электротехники (не будем забывать, что изменение параметров провода потянет за собой и изменение конструкций опор). А целевой функцией в такой оптимизационной задаче будут суммарные затраты на строительство и потери на эксплуатацию линии.

РОДСТВЕННЫЕ УЗЫ

Строительную механику роднит с другими науками сходство математических описаний ряда явлений, и примеры такого сходства все умножаются. Если классики сумели заметить сходство задач *теории упругости, гидродинамики и электростатики* с точки зрения описывающих их уравнений, то в наше время список таких математических двойников изрядно пополнился. К примеру, одними и теми же зависимостями описываются стержневые конструкции и электрические сети. Но ведь замерять токи куда проще, чем изгибающие моменты, и модель электрической сети намного дешевле модели рамы. Отсюда родились электроаналоговые методы расчета конструкций: вместо расчета составляется некоторая электрическая сеть и замеряются действующие в ней токи и напряжения. Это, так сказать, прямой выход из установленной связи, но есть и косвенные. Прежде всего они касаются математических аспектов проблемы. Скажем, электротехники раньше приспособили для своих нужд топологические методы. А они крайне полезны, если требуется запечатлеть в памяти машины схему электрической сети. Ведь машина при всех своих неоспоримых достоинствах все же пока еще не может просто взглянуть на схему, как мы с вами. Но и при анализе стержневой конструкции расчетчика подстерегает та же проблема. Так, через электротехнику пришли в строительную механику топологические методы и теория графов. В свою очередь и механике было чем поделиться: для электротехники стал сравнительно поздней новинкой метод Бубнова — Галеркина...

Другая интересная связь — между строительной механикой и *математической экономикой*. Математики, занимавшиеся линейным программированием, долгое время не мыслили его себе вне экономических приложений. Это даже наложило отпечаток на соответствующую математическую терминологию. Некоторые из них были серьезно удивлены (если не сказать огорчены), когда выяснили, что

линейное программирование имеет полные права гражданства и в строительной механике. Да что там права — приоритет, как мы уже видели выше!

БЕЛЫЕ ПЯТНА И ПРОСТО ПЯТНА

Значит ли все это, что строительная механика победоносно шагает вперёд и что инженеры не вправе предъявить ей никаких претензий? Нет, такой вывод был бы чересчур розовым. Есть и у строительной механики свои изъяны, белые пятна, шероховатости, но эта книга — не место для их обсуждения, в популярной литературе всякая наука предстает преимущественно парадной стороной. Упомянем лишь главный недостаток — чрезмерный академизм многих исследований, граничащий с попыткой вообще отмежеваться от прикладного характера этой науки. „Мы живем в век прикладных наук",— говаривал Эйнштейн,— и механика, быть может, первой из наук вступила в него, хотя прикладных проблем не чурались ни Л. Эйлер, ни О. Коши. Но до сих пор некоторых механиков мучают приступы "академизма". Поверьте, это не призыв "назад к сохе" и не выпад против использования высшей математики. Просто не припоминается случая, чтобы знание размеров кирпича помешало использовать функциональный анализ. Однако нет-нет да и проявится у механика стремление бежать от проблем практики в бескрайние просторы банаховых пространств. И как реакция на это бегство порой всплывает фигура скептика-практика с уничтожающей ухмылкой: "Знаем мы эти ваши интегралы! Какое отношение это имеет к нуждам строительства? Да для практики куда важнее режим работы ближайшей торговой точки"...

СИЛЫ, КОТОРЫЕ МЫ ВЫБИРАЕМ

Пока для восприятия внешних нагрузок конструкциями использовались только силы *межатомного взаимодействия в твёрдых телах, силы трения* и (гораздо позже и в гораздо меньшей степени) *силы давления воздуха.* Это давление применяется в пневматических конструкциях, обычно носит статический характер и не усложняет картины работы конструкции. Уже давно ведутся разговоры о том, что можно использовать и силы иного характера. Так, при угрозе аварий опор электропередач и некоторых других конструкций в принципе не исключено использование *электромагнитных сил* — ведь электрической энергии там хоть отбавляй, а критические ситуации не столь уж часты, чтобы привести к ее существенным затратам. В других случаях стабилизация конструкций может производиться *аэродинамическими и гидродинамическими силами* путем, скажем, пропускания потока газа или жидкости внутри трубчатой конструкции.

Вы, конечно, наблюдали, как при посадке современного воздушного лайнера раздвигаются его крылья, намного увеличивая свою площадь. Но почему бы не научиться тому же неподвижным несущим конструкциям, воспринимающим ветер? Ведь ветер способен создавать вертикальную составляющую нагрузки, направленную вверх, т.е. в направлении, противоположном большинству других нагрузок. А почему нужно исключить оптимальное автоматическое регулирование напряжений в зависимости от действующих нагрузок путем изменения *поля температур?* Изменилось направление ветра — меняется и схема нагревателей, которые оптимальным образом перераспределяют температурные напряжения в конструкции. От конструкторов еще не поступили конкретные изобретательские заявки на этот счет, но современная строительная механика уже готова к решению подобных задач: развита теория магнитоупругости, весьма продвинулась теория взаимодействия конструкции с потоками жидкости и газа (главным образом в связи с расчетом авиационных конструкций), не стояла на месте и так называемая "связанная" теория термоупругости, в которой рассматриваются совместно механические и тепловые процессы. И необходимость использования математического аппарата теории автоматического регулирования уже не поставит сейчас в тупик специалистов по строительной механике.

А *динамические стабилизаторы?* На новичков производит большое впечатление модель маятника с подвесом ... внизу! Стоит такой маятник толкнуть, как он, покачавшись, снова остановится в вертикальном положении. Устойчивость маятника (он называется маятником П. Л. Капицы) обеспечивается почти незаметными для глаза вертикальными колебаниями точки подвеса*. Сколько усилий тратят конструкторы на борьбу с вибрациями, а здесь так и напрашивается утилизация "вредных отходов производства". Но в качестве стойки этот маятник пока не применяли. Есть немало и других гироскопических устройств, которые взывают к вниманию специалистов по прочности конструкций.

Да мало ли еще сил в природе, если оглядеться, которые пока не сослужили службы прочнистам? *Подъемная сила винта, архимедовы силы, солнечный ветер,* просто *ветер,* в котором до сих пор видели только врага, *силы морского прибоя* — в общем, все, все, все, кроме разве что сил телекинетического характера, поверить в которые автору не удалось.

Наконец, не худо бы разобраться и с обычными силами связности в твердом теле. Давние, но отнюдь не увитые розами связи соединяют строительную механику и *физику твердого тела.* Дело в том, что строительная механика — это, в сущности, чисто феноменологическая наука. Она построена на наблюдениях за испытаниями конструкций, из которых черпается ее основа — физические законы, связывающие напряжения с деформациями. Пока эти законы не имеют строго микрофизического обоснования с количественной стороны. Мы не всегда можем даже качественно предсказать поведение того или иного материала исходя из его химического состава и структуры. Впрочем, инженеров это положение не слишком беспокоит: со времен аббата Мариотта, не дожидаясь формулировок соответствующих философских принципов, они привыкли видеть в эксперименте высшего судью своим мнениям и главного поставщика информации. Недостаточность микрофизических обоснований законов прочности и деформирования больше беспокоит специалистов по строительным материалам: они еще не готовы к направленным и теоретически обоснованным изменениям свойств материалов.

Однако уже имеются попытки оптимизации конструкций с учетом использования в них материала с оптимальными свойствами. Примером такого подхода могут служить задача об оптимальной радиационной обработке материала или об оптимальном химическом закреплении грунта. В последние годы на стыке строительной механики и физики твердого тела наблюдается некоторое оживление, хотя многие специалисты страдают на этот счет устойчивым пессимизмом.

* С математическим описанием этого и ряда других явлений, связанных с динамикой и устойчивостью конструкций, можно познакомиться по книге [12].

КАК ПРОИСХОДИТ РАЗРУШЕНИЕ?

Промежуточное место между строительной механикой и физикой твердого тела занимает теория разрушения. В ней исследователи нередко отказываются от чисто феноменологического подхода, рассматривающего напряжения на конечных площадках, но чаще всего не восходят до молекулярного уровня, а ограничиваются исследованием поведения трещин в материале.

Теория трещин — это одна из самых драматических сопредельных строительной механике дисциплин. Ни в одной другой не кипят такие яростные споры, нигде не встречается такого обилия полярных воззрений на, казалось бы, простые вещи*.

Сколько изобретательности и остроумия проявили специалисты по разрушению, борясь со своими трудностями! Методы статистического моделирования в сочетании с дисплеями ЭВМ уже сейчас позволяют вам воочию наблюдать, как рождаются в теле трещины, как они соединяются, развиваются и замирают, натолкнувшись на поры тела или на твердые включения. Но все это, увы, не в реальном теле, а в его математической модели, насчет которой, как мы уже говорили, нет двух одинаковых мнений.

Специалистам по строительной механике в этих условиях ничего не остаётся, как ожидать, пока "разрушители" заключат мир или по крайней мере договорятся о перемирии с четкой демаркационной линией (в этих условиях применяй это, а в этих то).

Не лучше обстоит дело у физиков и с теоретическим обоснованием других механических свойств материалов — пластичности, упругости, вязкости с (обоснованием количественным, с качественной стороны тут более или менее ясно). А если говорить о теории ползучести, то она насквозь проникнута эмпиризмом. Даже, мы бы сказали, "ползучим эмпиризмом", настолько далеки мы пока от микрофизического обоснования законов ползучести.

* Нечего греха таить: непосвящённым строительная механика нередко кажется наукой серой и пресной «... переключаться, быстро соображать, перестраиваться на ходу. Это не то, что сидеть и изучать сопромат – ух – х!» – таково мнение специалиста по психиатрии. (В. Леви. «Я и мы». М., «Молодая гвардия», 1974). Спасибо и на том!

ГДЕ НЕ СТУПАЛА НОГА КИБЕРНЕТИКА

Кибернетическое вторжение в строительную механику еще очень неглубоко в том смысле, что расчеты конструкций, как мы уже говорили, носят обычно одномоментный характер, в них не используется механизм обратной связи. Между тем преимущества и недостатки того или иного конструктивного решения часто зависят от конкретной ситуации, которая складывается на стройплощадке в связи с непредсказуемыми перебоями в поставках материалов, климатическими и грунтовыми условиями и изменениями в технологии, наличием оборудования для монтажа и т. д. По механизму обратной связи это должно было бы менять проектное решение. Уже имеются математические модели, учитывающие эти связи. Средства для технической реализации уже появляются: ЭВМ третьего поколения с терминалами на каждом прорабском участке просто взывают к использованию таких моделей. В будущем, набрав в соответствии с инструкцией на пульте терминала сведения о конкретной ситуации на стройплощадке прораб сможет получить тут же проект конструкции, оптимальный именно в этих проектных условиях.

По-видимому, это приведет к пересмотру самого понятия "проект" и к замене его более гибкими представлениями. А внедрение таких новшеств послужит конкретным воплощением еще одной связи — строительной механики и *оперативного управления строительством.*

Процесс недавнего развития строительной механики служит иллюстрацией единства науки, поэтому не стоит сожалеть, что и эта наука теряет автономию, что некоторые из ее современных направлений устремляются в сопредельные области знаний. Перефразируя известное определение физики, можно сказать: **"Механика — это то, чем занимаются механики".**

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М. — Л., Гостехтеориздат, 1952.
2. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М., «Высшая школа», 1961.
3. Бернштейн С.А. Очерки по истории строительной механики. М., Госстройиздат, 1957.
4. Болотин В.В. Статистические методы в строительной механике. М., Стройиздат, 1965.
5. Болотин В.В., Гольденблат И.И., Смирнов А.Ф. Современное состояние строительной механики. М., Стройиздат, 1972.
6. Гвоздев А.А. Расчёт несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. М., Стройиздат, 1949.
7. Гордон М. Почему мы не проваливаемся сквозь пол? М., «Мир», 1972.
8. Зенкевич О. Метод конечных элементов. М., «Мир», 1975.
9. История механики (под редакцией А.Т. Григорьяна, И.Б. Погребысского). М., «Наука», 1972 (гл. 2,8).
10. Колчин Г.Б. Расчёт прочности и надёжности строительных сооружений (современный подход). Кишинёв, «Картя Молдовеняска», 1976.
11. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М, «Мир», 1974.
12. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М., «Наука», 1967.
13. Работнов Ю.Н. Теория ползучести. М., «Наука», 1967.
14. Рейтман М.И., Шапиро Г.С. Методы оптимального проектирования деформируемых тел. М., «Наука», 1976.
15. Ржаницын А.Р. Теория расчета строительных конструкций на надежность. М., Стройиздат, 1978.
16. Ржаницын А.Р. Теория ползучести. М., Стройиздат, 1968.
17. Сергеев Н.Д., Богатырёв А.И. Проблемы оптимального проектирования Л., Стройиздат, 1971.
18. Расчёт сооружений с применением вычислительных машин/ Смирнов А.Ф. и др. М., Стройиздат, 1965.
19. Тимошенко С.П. История науки о сопротивлении материалов. М., Гостехтеориздат, 1958.
20. Тимошенко С.П. Гудьер Дж. Теория упругости. М., «Мир», 1975.
21. Феодосьев В.И. Десять лекций-бесед о сопротивлении материалов. М., «Наука», 1974.
22. Филин А.П. Матрицы в статике стержневых систем и некоторые элементы использования ЭВМ. М., Стройиздат, 1966.
23. Ходж Ф.Г. Расчёт сооружений с учётом пластических деформаций. М., Машгиз, 1963.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Марк Исаевич Рейтман

ЗАЛОГ ПРОЧНОСТИ

Редакция литературы по строительным материалам и конструкциям
Зав. редакцией **И. А. Рабинович**
Редактор **И. Г. Захарова**
Мл. редакторы **Л. А. Козий, Л. А. Табачник**
Художественное оформление художника **В. Г. Нагаева**
Технический редактор **В. Д. Павлова**
Корректоры **О. В. Стигнеева, Л. П. Бирюкова**

Сдано в набор 16.03.78 Подписано в печать 20.03.79 Формат 84 × 108/32 Бумага офсетная 75
Гарнитура „Таймс“ Печать офсетная Усл. печ. л., 7,14 Уч.-изд. 6,62 Тираж 20000 экз.
Изд. № AXV-6288 Заказ 247 Цена 50 к.

Стройиздат
103006, Москва, Каляевская ул. 23а.

Можайский полиграфкомбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
143200, Можайск, ул. Мира, 93.