РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ГОРНОГО ДЕЛА им. Н.А. ЧИНАКАЛА
НОУ (ВУЗ) СИБИРСКИЙ НЕЗАВИСИМЫЙ ИНСТИТУТ

А.Ф. РЕВУЖЕНКО

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФУНКЦИЙ НЕАРХИМЕДОВОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ДЛЯ ОПИСАНИЯ СТРУКТУРНЫХ УРОВНЕЙ ГЕОСРЕДЫ

НОВОСИБИРСК
«НАУКА»
2012

УДК 517.12; 539.37
ББК 22.161
Р 32

Ревуженко А.Ф. Математический анализ функций неархимедовой переменной: Специализированный математический аппарат для описания структурных уровней геосреды / А.Ф. Ревуженко. — Новосибирск: Наука, 2012. — 327 с.

ISBN 978-5-02-019105-1.

В монографии изложен математический анализ, имеющий более высокую степень разрешения, чем классический. Концепция вещественного числа по Кантору распространяется на несчетные фундаментальные последовательности. На этой основе строится неархимедова числовая система, обладающая иерархией масштабных уровней. Описана теория пределов, рядов, производных, неопределенных и определенных интегралов.

В качестве приложений исследованы модели горного массива, обладающего иерархией структурных уровней, элементы неархимедовых геометрии и вариационного исчисления, задачи об измерении углов касания и длины многомасштабной кривой. С учетом принципа Гамильтона — Остроградского рассмотрена неархимедова динамика материальной точки, когда видимые смещения точки складываются из последовательности неподвижных состояний и скачков. В рамках арифметической концепции показано, что на микроуровне пространственные измерения и время перестают быть линейно упорядоченными и становятся многомерными. Обсуждается формула $e^{\pi i \omega} = -j$ как символ неархимедова анализа.

Книга рассчитана на научных сотрудников, интересующихся новыми математическими объектами, а также будет доступна студентам старших курсов, изучившим математический анализ.

Ил. 42. Библиогр.: 138 назв.

Рецензенты

доктор физико-математических наук *Н.В. Белякин*
(Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН)
доктор технических наук *В.Е. Миренков* (Институт горного дела СО РАН)
доктор технических наук *В.М. Серяков* (Институт горного дела СО РАН)

Утверждено к печати Ученым советом
Института горного дела им. Н.А. Чинакала СО РАН

Издание осуществлено при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований по проекту № 12-05-07018

Издание РФФИ не подлежит продаже

ISBN 978-5-02-019105-1

Оглавление

Введение

Цель данной работы — построение математического анализа, который имел бы более высокую степень разрешения, чем классический анализ, и мог быть использован для описания процессов деформирования геосреды, обладающей иерархией структурных уровней, а также для решения других прикладных задач.

У читателя возникают следующие вопросы:

1^0. Что такое степень разрешения классического анализа? Не является ли она теоретически бесконечной? Ведь получив в качестве решения, например, число $\sqrt{2}$, мы можем вычислить его с любой степенью точности.

2^0. Есть ли необходимость в построении нового математического аппарата, даже если и есть такая логическая возможность? Логически возможны многие различные теории, но для того, чтобы заниматься той или иной конкретной теорией, необходимо иметь достаточные основания.

И наконец, третий вопрос связан с названием книги.

3^0. Что такое неархимедова переменная и, в частности, неархимедова прямая? Какое отношение она имеет к реальности и не является ли обычная вещественная прямая достаточно полной моделью наших представлений о пространстве и времени?

В данном введении мы попытаемся коротко ответить на эти вопросы.

1. Разрешающая способность математического анализа. Любой инструмент для физических наблюдений имеет собственную разрешающую способность. Например, разрешающую способность микроскопа можно оценить величиной, обратной к максимальному расстоянию, на котором две различные точки при взгляде через микроскоп воспринимаются как одна точка. В математической реальности точка — это число на вещественной числовой прямой. Разрешающая способность классического анализа определяется следующим известным фактом: если расстояние между точками α и β меньше, чем $1/n$, где n — любое число из натурального ряда

$$1, 2, 3, 4, \ldots n, \ldots, \tag{1}$$

то точки α и β различить между собой невозможно. Иначе это звучит так: если два вещественных числа α и β таковы, что

$$|\alpha - \beta| < 1/n, \tag{2}$$

то $\alpha = \beta$.

Для краткости классический анализ будем называть анализом-1, а положение (2) — Первой аксиомой разрешения. При аксиоматическом построении теории данное положение действительно можно ввести как независимую аксиому, равносильную аксиоме Архимеда.

Из (2) следует, что если придать какой-то смысл длине натурального ряда (1), то длина будет мерой разрешающей способности классического анализа. Поэтому любое увеличение разрешающей способности теории должно предполагать и увеличение длины натурального ряда. Ясно, что такое увеличение возможно только за счет построения новых объектов, которым можно приписать величину, бóльшую величины любого натурального числа из ряда (1). Такие объекты называются актуальными бесконечно большими числами, а величины, обратные им, актуальными бесконечно малыми числами.

2. Основания для построения анализа с большим разрешением, чем классический. Есть ли смысл заниматься увеличением степени разрешения (1), (2)? Есть ли в этом реальная потребность?

2.1. Задача измерения касательных (роговидных) углов. Оказывается, что такая потребность не только есть, но без преувеличения можно сказать, что она была всегда. Если открыть третью книгу «Начал» Евклида [1], то в предложении 10 можно прочитать: «...угол полукруга больше всякого прямолинейного острого угла, а остаток меньше». Остаток угла полукруга — это угол σ между прямой и касательной к ней дугой окружности, прямолинейный угол — угол ε между двумя лучами (рис. 1).

Согласно предложению 10, касательный угол представляет собой положительную величину, которая меньше любого положительного рационального числа ε. Таким образом, угол касания (или роговидный угол) — это не что иное, как актуальная бесконечно малая величина. Причем между величинами такого рода есть свой порядок: бóльшему радиусу R отвечает меньший угол касания τ. Далее путем выбора кривой касания можно построить углы, меньшие угла, соответствующего любому радиусу R, и т.д. [2, 3]. Следовательно, можно сказать, что для измерения указанной упорядоченной системы величин точности обычных вещественных чисел уже недостаточно.

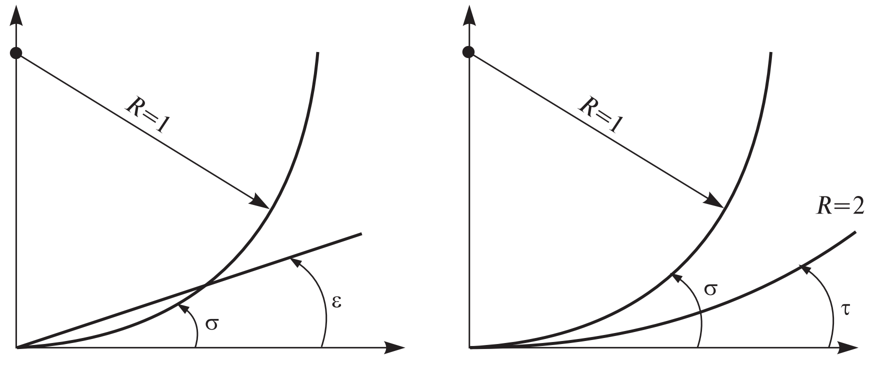

Рис. 1.

Итак, необходимо введение новой числовой системы, которая включала бы в себя актуальные бесконечно малые величины. Последнее влечет за собой необходимость изменений в соответствующем математическом аппарате. Необходимость в подобных изменениях возникает также и в прикладных задачах теории пластичности, механики горных пород и теории оптимального управления.

2.2. Прикладные задачи. Начнем с задач теории пластичности, так как именно они привели автора к необходимости использования в механике неархимедовой числовой системы и соответствующего математического анализа [4–30]. Пусть некоторое твердое тело подвергается простому сдвигу. Ограничимся плоской деформацией. Обозначим через x, y — декартовы координаты, а через u, v — компоненты вектора смещения.

На рис. 2, *а* показана начальная форма тела, на рис. 2, *б* — его конечная форма после сдвига.

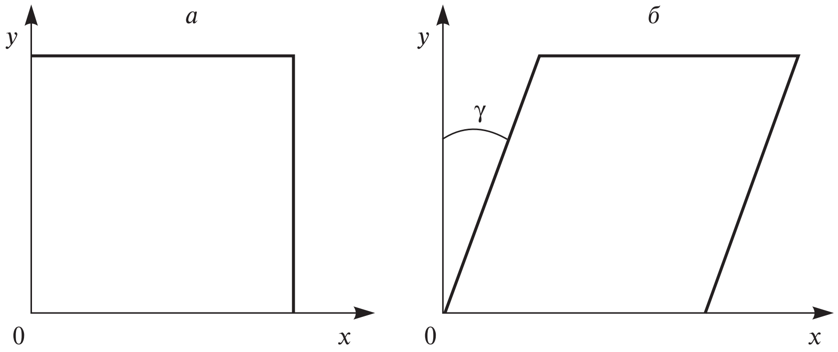

Рис. 2.

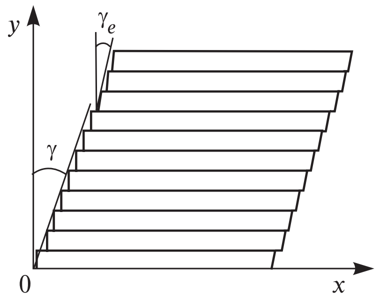

Рис. 3.

Соответствующее поле перемещений можно представить в виде

$$u = \operatorname{tg}\gamma y, \quad v = 0, \quad \gamma = \text{const}.$$

Обратимся к внутреннему механизму сдвига. Один из возможных механизмов такого сдвига связан с тем, что он осуществляется за счет скольжения структурных элементов тела так, как это показано на рис. 3.

Тело в целом похоже на колоду карт. Каждая карта испытывает свой сдвиг γ_e и, кроме того, все карты скользят друг по другу.

О таком профиле смещений можно сказать следующее. При взгляде на него невооруженным глазом профиль выглядит как непрерывная и дифференцируемая кривая. Однако если посмотреть на него через микроскоп, то станут видны мелкие ступеньки (микроразрывы). Возможно, что дальнейшее увеличение обнаружит еще один уровень разрывов и т.д.

Интересно отметить, что необходимость в использовании подобных функций возникает и в теории обработки металлов давлением. Так, в [31] рассматриваются пути нагружения, которые позволяют достичь заданных деформаций тела при наименьших затратах энергии. Показано, что траектории нагружения должны включать в себя вертикальные отрезки, которым соответствует «ударная, ковочная» деформация. При этом деформации должны носить пульсирующий характер: чем больше частота пульсаций, тем меньше общая работа. В пределе переключения должны осуществляться с бесконечно большой частотой.

Аналогичные решения возникают и в теории управления полетом летательных аппаратов [32, 33]. Еще одна иллюстрация связана с поиском оптимальных траекторий движения парусника галсами против ветра. Целый класс подобных задач приводит к необходимости оперирования траекториями, в которых частота переключения бесконечно велика. То есть локально траектория состоит из исчезающе малых отрезков, которые с изломами выстилают обычные гладкие кривые [34].

Ясно, что все перечисленные объекты нельзя назвать функциями (а их графики — кривыми) в обычном смысле слова. Для их описания используются различные приемы. Например, о производной подобной «функции» можно говорить в различных смыслах в зависимости от масштаба, в пределах которого берется приращение аргумента. Поэтому «функцию» можно характеризовать с помощью двух компонент, каждая из которых представляет собой обычную гладкую функцию. Первая компонента и ее производные характеризуют «функцию» в среднем, вторая — производные «функции» на микроуровне [4, 9, 32, 33].

В механике сплошной среды данному подходу соответствует класс математических моделей с внутренними переменными. Указанные переменные описывают дополнительные степени свободы, которые реализуются на микромасштабных уровнях [16, 19, 22, 35–37].

Таким образом, некоторое описание новых объектов можно получить в рамках традиционного математического аппарата путем введения дополнительных переменных. Однако дальнейшие построения порождают новые вопросы. Например, что следует понимать под квадратом указанной «функции», ее интегралом, длиной «кривой», которая соответствует графику «функции» и т.д.? Попытки разрешения указанных вопросов приводят к необходимости наделить структурой саму независимую переменную, а значит, к изменению математического аппарата.

2.3. Задачи с иерархией масштабных уровней. Разрешающая способность классического анализа ограничивается Первой аксиомой разрешения или равносильной ей аксиомой Архимеда. Напомним ее содержание.

Если имеется два положительных вещественных числа α и β, причем $\alpha < \beta$, то всегда найдется такое натуральное число N, что значение $N\alpha$ превзойдет значение β, т.е.

$$0 < \alpha < \beta, \quad N\alpha > \beta. \tag{3}$$

Не будем торопиться с признанием «очевидности» этой аксиомы. Подобная «очевидность» навязана только опытом работы с обычными вещественными числами. В случае преодоления ограничения, связанного с указанной аксиомой, нас ожидают качественно новые возможности.

Действительно, что означает аксиома Архимеда? Она означает следующий простой факт. Если мы выбираем любой шаг, с которым хотим продвигаться вперед, то, шагая таким образом вдоль числовой прямой, мы рано или поздно или, лучше сказать, всегда достигнем любого пункта на нашем пути.

Необходимо сделать только одну оговорку относительно числа 0. Смысл ее станет ясным, если аксиому Архимеда сформулировать несколько иначе: для любого положительного числа α и любого числа $\beta > \alpha$ найдется такое натуральное N, что

$$\alpha > 0, \quad \beta > \alpha, \quad \frac{\beta}{N} < \alpha. \tag{4}$$

Из этой формулировки следует, что, отправляясь от любого числа $\beta > \alpha$ способом (4), мы можем добраться до любого сколь угодно малого числа α. До любого числа, кроме 0. Поэтому число 0 на вещественной оси следует считать особым.

Итак, двигаясь вдоль оси способом (3) или (4), можно достичь любой точки на прямой (кроме точки 0). Об этом факте можно сказать по-другому: при указанном способе движения никаких непреодолимых препятствий на нашем пути не имеется. Можно принять, что все точки вещественной оси (кроме 0) относятся к одному масштабному уровню.

Как изменится эта картина, если снимем ограничения, которые диктуются аксиомой Архимеда? Тогда, отправляясь от заданной точки с фиксированным шагом, некоторые точки на прямой мы достигнем, а некоторые останутся принципиально недостижимыми. Последнее означает, что мы **имеем определенную иерархию масштабных уровней на неархимедовой прямой.** Уже сам по себе этот факт указывает на большую адекватность неархимедовой, а значит, и многомасштабной прямой по сравнению с обычной одномасштабной.

Действительно, наличие иерархии является наиболее универсальным свойством реального мира. Иерархию мы наблюдаем во Вселенной, природе, сообществах животных, человеческом обществе, строении растений, живых существ, материи и т.д. Иерархичность необходима для самого существования сложных систем. Везде царит принцип иерархии и подчинения.

Работы последних десятилетий показывают, что эта общая закономерность простирается и на процессы деформирования твердых тел, горных пород и сыпучих материалов [38–48]. Иерархия строения и функционирования сложных систем приводит к появлению у них целого ряда масштабных уровней. Основное средство их теоретического изучения — математические модели. Адекватные модели и математический аппарат, который лежит в их основе, должны отражать основное свойство реальных объектов — наличие в них различных масштабных уровней. Неархимедовы числовые системы это свойство отражают [49]. Можно ожидать, что и математические модели, построенные на их основе, будут более адекватными реальности, чем модели, построенные в рамках классического аппарата.

2.4. Традиционные задачи механики. Если мы имеем микроскоп, обладающий большим разрешением, чем прежний, то вполне естественно направить его на объекты, которые были исследованы раньше, но с меньшим разрешением. Всегда есть шанс обнаружить что-нибудь новое. Естественно сделать подобный шаг и по отношению к традиционным задачам механики и анализа.

Рассмотрим типичную задачу. Пусть некоторое тело свободно падает вниз без начальной скорости. Тогда траектория падения будет представлять собой прямую линию. Закон движения вдоль этой прямой имеет вид

$$S(t) = \frac{g \cdot t^2}{2}, \tag{5}$$

где $S(t)$ — путь; t — время; g — ускорение свободного падения. Чему равна скорость тела v в момент времени t? Вычислим среднюю скорость тела от t до $t + \Delta t$:

$$\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = gt + g\frac{\Delta t}{2}.$$

Перейдем теперь к пределу при $\Delta t \to 0$. В результате получим

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} g\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) = gt. \tag{6}$$

Так решается поставленная задача в классическом анализе. Но что значит перейти к пределу при $\Delta t \to 0$? Это значит, что промежуток времени Δt необходимо неограниченно уменьшать, т.е. Δt должно стать меньше, чем 10^{-10}, $10^{-20}, \ldots$ с. В соответствии с этим и путь, пройденный телом, становится меньше, чем $5 \cdot 10^{-20}$, $5 \cdot 10^{-40}, \ldots$ м. Но ведь для таких времен и расстояний закон движения (5) никто не проверял! Вполне может оказаться, что здесь закон (5) не действует. Более того, возможно, что и сами понятия расстояния и времени и даже свойство их линейной упорядоченности на малых масштабах должны быть пересмотрены.

Техника кинематографа подсказывает следующую возможность, о которой более 100 лет назад писал Клиффорд [50, 51]. То, что мы принимаем за непрерывное движение, на самом деле может быть быстрой сменой различных неподвижных состояний. В этом случае скорость движения равна нулю. А вот то, что происходит при смене кадров, должно быть описано отдельно. Можно ввести сколько угодно гипотез подобного рода. Вопрос о том, какая из них ближе к реальности — не вопрос математики. Но **математика должна дать в руки аппарат для описания подобных гипотез.** Классический (архимедов) анализ (анализ-1) дает переход от закона (5) к закону (6) и наоборот. Неархимедов анализ (анализ-2) дает бóльшие возможности. Для определенных масштабов в анализе-2 могут быть сохранены законы типа (5), (6). При этом на меньших масштабах возможно описание, например, «кинематографической» реальности с быстрой сменой неподвижных состояний.

Таким образом, вопрос о разрешающей способности математического анализа — это не столько вопрос о степени точности полученных результатов, сколько вопрос о масштабных уровнях реальности, которые можно охватить предлагаемым математическим аппаратом. Числовые результаты, которые дает анализ-1, мы можем вычислить с количеством значащих цифр, равным любому наперед заданному натуральному числу. В анализе-2 количество значащих цифр может быть равно не только любому конечному числу из ряда (1), но и любому актуально бесконечно большому числу из продолжения ряда (1). Сам по себе этот факт особого значения не имеет. Практически всегда достаточно от одной до десяти или, в крайнем случае, до двадцати значащих цифр. Принципиальное значение имеет другой факт, именно то, что процессы, которые происходят на микроуровнях, могут влиять или, более того, полностью определять поведение системы на вещественном масштабном уровне. А это значит, что величины, которые имеют порядок бесконечно малых, могут давать суммарные эффекты порядка 1, 10 и т.д.

3. Подводя итог, отметим, что потребность в создании теории актуальных бесконечно малых возникла очень давно, еще во времена Евклида. Позже она в том или ином виде появлялась в самых различных областях математики, механики и физики. Много поколений математиков различных эпох работало над ее разрешением. Достаточно сказать, что период созревания и становления теории актуально бесконечно малых связан с такими именами, как Веронезе, Гильберт, Кавальери, Лейбниц, Пуассон, Флоренский, Эйлер и многими другими.

Обзор работ данного периода представляет самостоятельную и очень непростую задачу. Здесь мы ограничимся только ссылками на краткие исторические очерки и оригинальные работы [1–3, 52–60]. Кроме того, приведем цитату из книги П.А. Флоренского [57], которая в определенной мере характеризует весь указанный период становления теории: «... ни одна из линий не имеет высоты, или, иначе говоря, высота всякой линии равна нулю; но высоты линий, если брать их до перехода к пределу, стремятся к нулю с различной интенсивностью, с различною быстротою». Ниже со ссылкой на Буссинеска и Лейбница интенсивность стремления к нулю Флоренский называет напряжением. И далее он пишет: «Вот таким-то напряжением и представляем мы себе высоту поверхности, точек и линий. И представление это необходимо, — несистематически же давно существует в науке: разве не так именно мыслятся в физике элементарные магниты, двойной магнитный и электрический слой и т.д. Полное отрицание за ними протяжения просто уничтожило бы их магнитное или электрическое действие, придание же их протяжению конечных размеров нарушило бы элементарный характер этих образований. (Полагаю, что как применительно к этим физическим образованиям, так и в отношении разъясненных образов геометрических следовало бы воспользоваться понятием актуально бесконечно малых...)».

Современная теория актуально бесконечно малых получила название нестандартного анализа (иногда ее называют также неархимедовым, инфинитезимальным [61] или робинсоновым нестандартным анализом [62] в честь основоположника нестандартного анализа А. Робинсона). Согласно [49], «...открытие нестандартного анализа состоит в том, что геометрическая прямая, или континуум, может нести в себе множество точек более богатое, чем множество обычных действительных чисел. Это, кроме всего прочего, дает нам подходящие рамки для геометрического анализа физических явлений со многими масштабами».

Методы нестандартного анализа (в их современном виде) являются сравнительно новыми и уже находят применение для исследования различных задач. Результаты по теории нестандартных методов, ее приложениям и дальнейшие библиографические ссылки можно найти в трудах Робинсона, Альбеверио, Белякина, Бернстейна, Вопенки, Гозе, Гордона, Девиса, Драгалина, Кановея, Кейслера, Кусраева, Кутателадзе, Лаугвица, Линдстрема, Ловягина, Лутца, Люксембурга, Нельсона, Непейводы, Парменова-Зингера, Праздниковой, Строяна, Фенстада, Хуэнг-Крона, Успенского, Шмидена, Энгелера и др. [49, 61–83].

Одно из направлений в этой области связано с использованием p-адических чисел. Теория p-адических чисел и соответствующий неархимедов анализ изложены в трудах Владимирова, Воловича, Зеленова, Коблица, Хренникова и др. [84–90]. Здесь также содержится дальнейшая библиография. Необходимо особо отметить, что в работах Хренникова и его последователей рассматриваются многочисленные приложения неархимедова анализа к теории вероятностей, теоретической физике и т.д. В этом направлении открываются также возможности моделирования некоторых функций сознания [91].

Вопросы, которые исследуются в рамках нестандартного анализа, тесно связаны с проблемами континуума, общими представлениями о «догмате натурального ряда», а также с альтернативной теорией множеств и рядом других смежных областей. Здесь опубликовано значительное число работ. Их обзор выходит за рамки настоящей книги.

Ограничимся только ссылками на книгу Пуанкаре [92], статью Рашевского [93], монографию Вопенки со вступительной статьей Белякина [62], а также ссылками на работы [94–97].

4. В настоящей книге* рассматриваются числовые системы, включающие в себя актуальные бесконечно малые величины. Далее на основе одной из возможных систем строится математический анализ. Основное внимание уделено построению рабочего математического аппарата, который можно использовать для создания математических моделей различных явлений, а также для постановки и решения конкретных задач.

Достаточно простые доказательства ряда утверждений опущены.

Буду признателен за отзывы и пожелания, которые можно направлять по

E-mail: revuzhenko@yandex.ru, http://revuzhenko-af.narod.ru или по тел./факсу 8-383-203-35-31.

* * *

Автор выражает благодарность академику РАН В.М. Фомину, докторам физико-математических наук Н.В. Белякину и С.П. Одинцову за ценные обсуждения результатов, кандидатам физико-математических наук С.В. Лаврикову и О.А. Микениной за проведение геомеханических расчетов с использованием методов неархимедова анализа. Искренне признателен Л.П. Большаковой за большой труд по оформлению рукописи.

Особо хотелось бы сказать о роли академика РАН Евгения Ивановича Шемякина**, который проявлял постоянное внимание к данной работе и поддерживал ее на всех этапах выполнения.

---

* Работа выполнена в Институте горного дела СО РАН и в Сибирском независимом институте при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 99-01-00545-а; 05-05-65253-а; 08-05-00543, № 10-05-91002-АНФа.

** Академик Шемякин Е.И.: Штрихи к портрету http://revuzhenko-af.narod.ru

Глава 1

Вещественные числа. Расщепление вещественных чисел на элементарные составляющие

Первые две главы посвящены построению неархимедовой числовой прямой. Что мы хотим от новой числовой системы? Во-первых, мы хотим, чтобы новая система была пригодна для измерения более широкого класса упорядоченных величин, чем система обычных вещественных чисел. В частности, новая числовая система должна допускать измерение углов касания [1–3]. Во-вторых, она должна быть достаточно богатой, так, чтобы на ее основе можно было развить математический анализ. Кроме того, следуя известному принципу, мы должны принять, что из всех числовых систем, удовлетворяющих сформулированным условиям, предпочтение должно быть отдано такой системе, которая в каком-то смысле будет наиболее близкой к системе обычных вещественных чисел.

Начнем с третьего условия. Согласно этому условию, новая числовая система должна быть как можно ближе к системе обычных вещественных чисел. Поэтому напомним концепцию обычной вещественной прямой.

§ 1. Натуральные, целые и рациональные числа. Число 0

Примем, что натуральные числа

$$1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$$

и арифметические операции над ними заданы изначально. Операция вычитания приводит к отрицательным числам. Совместно с натуральными они образуют целые числа. Операция деления приводит к рациональным числам.

Определение 1.1. *Изначально заданные натуральные, целые и рациональные числа будем называть абсолютными числами.*

В случае необходимости данный факт (факт изначальной заданности) будем подчеркивать индексом «абс». Например, $0_{\text{абс}}$ (абсолютный нуль) означает разность одинаковых натуральных чисел,

$(3)_{\text{абс}}$ означает изначально заданное натуральное число три, $\left(\frac{1}{2}\right)_{\text{абс}}$ — отношение изначально заданных натуральных чисел $1_{\text{абс}}$ и $2_{\text{абс}}$ и т.д. Если по смыслу будет ясно, что речь идет об абсолютных числах, то индекс будем опускать.

§ 2. Вещественные числа

1. Конечные вещественные числа. Понятие бесконечности на вещественной прямой

В руководствах по анализу приводятся различные определения вещественных чисел: по Кантору, Дедекинду, аксиоматическое определение и др. Для наших целей удобнее начать с концепции Кантора [98–101]. Изложим данную концепцию так, чтобы был виден путь дальнейших построений.

Натуральный ряд и рациональные числа r заданы изначально. Это позволяет строить последовательности рациональных чисел

$$r_1,\ r_2, \dots r_n, \dots .$$

О таких последовательностях будем говорить как о счетных последовательностях или как о последовательностях (порядкового) типа 1. Обозначать их будем $\{r_n\}$, r_n или $r(n)$. Определенные совокупности последовательностей абсолютных рациональных чисел называются вещественными числами. Опишем эти совокупности.

Вещественное число $\mathbf{0_{вещ}}$. Пусть последовательность r_n такова, что для любого рационального $\varepsilon > 0$ найдется натуральное N такое, что при $n > \mathrm{N}$ будут иметь место условия $|r_n| < \varepsilon$. Объединим подобные последовательности в один класс, который назовем вещественным числом нуль и обозначим

$$0_{\text{вещ}} = \lim_{n \to \infty} r_n. \tag{1}$$

О последовательностях r_n будем говорить, что они входят в состав числа $0_{\text{вещ}}$.

Бесконечность в области вещественных чисел. Из класса (1) выберем последовательности, в которых $r_n \neq 0$. Образуем последовательности из чисел, обратных к r_n, и объединим их в один класс. Данный класс будем называть бесконечностью в области вещественных чисел и обозначать

$$\infty_{\text{вещ}} = \lim_{n\to\infty} 1/r_n.$$

Из этого класса выделим подкласс $r_n > 0$, для которого используем обозначение

$$+\infty_{\text{вещ}} = \lim 1/r_n.$$

Аналогично определим $-\infty_{\text{вещ}}$.

Конечные вещественные числа. Последовательность рациональных чисел называется фундаментальной, или последовательностью Коши, если для любого рационального числа $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число N такое, что для любых n, $m >$ N будет иметь место неравенство

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Пусть последовательность r_n является фундаментальной. Образуем класс последовательностей, в который включим последовательность r_n и любую другую последовательность r'_n при условии, что $(r_n - r'_n)$ входит в состав числа $0_{\text{вещ}}$. Данный класс будем называть (конечным) вещественным числом и обозначать

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} r_n. \tag{2}$$

Бесконечность также удобно считать одним из вещественных чисел (но уже не конечных).

Значение r_n будем называть приближением α, а α — пределом последовательности r_n. Операции с вещественными числами вводятся через операции с их приближениями. Кроме того, по определению считается, что

$$\text{P}_{\text{абс}} + \lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}(\text{P}_{\text{абс}} + r_n).$$

Аналогично вводятся и другие операции.

В случае необходимости в обозначениях вещественных чисел будем использовать индекс «вещ». Например, числа $0_{\text{абс}}$ и $0_{\text{вещ}}$ — это совершенно различные объекты: $0_{\text{абс}}$ — это Абсолютный нуль, который существует изначально, а число $0_{\text{вещ}}$ — это класс эквивалентных между собой последовательностей (1).

Точно так же и число

$$1_{\text{вещ}} = \lim_{n\to\infty} 1_{\text{абс}}$$

принципиально отличается от числа $1_{\text{абс}}$. Число $1_{\text{абс}}$ задано изначально, а число $1_{\text{вещ}}$ — это соответствующий класс последовательностей. Очевидно, что

$$1_{\text{абс}} + 0_{\text{вещ}} = 1_{\text{вещ}}. \tag{3}$$

Отсюда, однако, не следует, что

$$1_{\text{вещ}} - 0_{\text{вещ}} = 1_{\text{абс}}.$$

На самом деле из (3) следует только равенство

$$1_{\text{вещ}} - 0_{\text{вещ}} = 1_{\text{вещ}}. \quad (4)$$

Образно эту ситуацию можно представить таким образом. Если абсолютное, изначально заданное число попадает в мир вещественных чисел и начинает с ним взаимодействовать, то оно как бы окрашивается от этого взаимодействия и начинает выглядеть уже как обычное вещественное число (результат (3)). Причем никакими «обратными» операциями типа (4) «снять» эту окраску — окраску вещественности — уже невозможно.

2. Принцип стягивающихся отрезков. Первая аксиома разрешения

Выше мы приняли концепцию вещественного числа по Кантору. Хорошо известны и другие концепции вещественного числа. Все они эквивалентны друг другу. Если говорить формально, то ничего нового они не дают. Меняется только роль основных утверждений. То, что в рамках одной концепции было аксиомой или определением, в рамках другой концепции становится теоремой. Однако для неформального понимания новые определения могут дать многое.

Возьмем теперь в качестве основной посылки принцип стягивающихся отрезков [102, 103]. Если $\rho < g$, то отрезком $[\rho, g]$ называется совокупность чисел x, для которых $\rho \leq x \leq g$, где ρ, g и x — абсолютные рациональные числа.

Определение 2.1. *Пусть заданы две монотонные последовательности рациональных чисел, такие, что*

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1.$$

Если для любого рационального ε *существует такое натуральное число* N, *что для* $n > \mathrm{N}$

$$b_n - a_n < \varepsilon,$$

то говорят, что $[a_n, b_n]$ *представляет собой последовательность стягивающихся отрезков.*

Согласно принципу стягивающихся отрезков, существует единственное вещественное число α, которое принадлежит каждому из стягивающихся отрезков. Для наших целей удобнее дать несколько иную формулировку данного принципа. Именно, удобнее вещественное число ввести как идеальный объект, а утверждение о его единственности постулировать в форме отдельной аксиомы. Итак, заданной последовательности стягивающихся отрезков поставим в соответствие некоторый идеальный объект α. По определению данный объект обладает следующим свойством: для любого натурального n

$$a_n \le \alpha \le b_n. \tag{5}$$

Для того чтобы объект α можно было назвать числом, необходимо ввести для него арифметические операции, а также указать правила сравнения α с объектами того же типа, что и α, а также с рациональными числами.

Пусть β — другой объект, который мы соотносим с последовательностью стягивающихся отрезков $[c_n, d_n]$, т.е.

$$c_n \le \beta \le d_n.$$

Тогда под разностью $\alpha - \beta$ будем понимать объект, для которого

$$a_n - d_n \le \alpha - \beta \le b_n - c_n.$$

Аналогично вводятся и другие операции.

Далее, число α будем считать положительным и записывать $\alpha > 0$, если начиная с некоторого номера n рациональные числа a_n положительны. Отсюда $\alpha > \beta$, если $\alpha - \beta > 0$.

Легко понять, что приведенных определений еще недостаточно для однозначной идентификации числа α. Другими словами, изложенные определения неполны, так как ничего не сказано о единственности объекта (5). Смысл проблемы поясним на следующем примере. Пусть

$$0 \le \alpha \le \frac{1}{n},\ \ 0 \le \beta \le \frac{1}{n^2},$$

тогда

$$-\frac{1}{n^2} \le \alpha - \beta \le \frac{1}{n}\ .$$

Можно ли отсюда заключить, что $\alpha = \beta$? Располагая только принятыми выше определениями, дать однозначный ответ невозможно. Необходимо ввести некоторое дополнительное предположение. Для наших целей его удобно ввести в форме аксиоматического утверждения о разрешающей способности теории. Примем следующую аксиому.

Первая аксиома разрешения. Если относительно двух объектов α и β, определяемых двумя последовательностями стягивающихся отрезков, известно, что

$$|\alpha - \beta| < 1/n$$

для любого натурального числа n, то $\alpha = \beta$.

Неформальный смысл аксиомы очевиден. Условия (5) локализуют объект α на числовой прямой. Аксиома разрешения утверждает, что объект этими условиями локализуется однозначно. Точнее было бы сказать наоборот: то, что мы наблюдаем при степени локализации (5), мы и называем «единственным объектом α».

Определение 2.2. *Математические объекты, удовлетворяющие условиям* (5) *и Первой аксиоме разрешения, будем называть вещественными числами.*

Согласно определению 2.2, вещественное число локализуется с помощью двух монотонных последовательностей рациональных чисел. Известно, что для локализации достаточно только одной из указанных последовательностей. Поэтому факт локализации можно выразить символически в одной из следующих форм:

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n, \quad \beta = \lim_{n\to\infty} b_n. \tag{6}$$

Легко доказать, что использование в (6) того же самого символа «lim», что и в равенстве (2), является правомерным.

§ 3. Расщепление вещественного числа на элементарные составляющие — элементарные числа

1. Определение элементарных чисел

В «Началах» Евклида точка определяется как то, что «не имеет частей» [1]. Точка — единый, неделимый объект. Точка на числовой прямой суть вещественное число. Поэтому и вещественное число есть единый, неделимый объект, то, «что не имеет частей». Если вещественное число сравнить с атомом, то можно сказать, что во всех операциях математического анализа данный атом выступает действительно как неделимый объект. То есть полностью соответствует смыслу названия «атом» (неделимый).

Однако задачи, указанные во введении, приводят к мысли, что для создания аппарата с большим разрешением, чем классический, вещественные числа являются слишком грубыми объектами. Их необходимо расщепить на более «тонкие» элементарные части, которые можно было бы использовать в дальнейших построениях. Если вернуться к сравнению вещественного числа и атома, то можно сказать, что речь идет о расщеплении атома.

В физике составляющие атома называются элементарными частицами. «Элементарные частицы в точном значении этого термина — это первичные, далее неразложимые частицы, из которых, по предположению, состоит вся материя. В современной физике термин “элементарные частицы” обычно употребляется не в своем точном значении, а менее строго...» [104]. Согласно современным представлениям, большинство элементарных частиц являются составными.

Элементарные частицы рассматриваемой здесь математической реальности (в точном значении слова «элементарный») — это абсолютные рациональные числа. Мы хотели бы расщепить вещественное число на такие «элементарные частицы», которые, возможно, и были бы составными, но которые в дальнейших построениях расщеплять бы уже не пришлось.

Рассмотрим решение данной задачи на примере неперова числа *e*. В состав вещественного числа *e* входит последовательность $r_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, а также последовательности r'_n, которые отличаются от r_n любым конечным числом членов. Объединим их в один класс, который обозначим как

$$\operatorname*{Lim}_n r_n = \operatorname*{Lim}_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \operatorname*{Lim}_n r'_n. \tag{1}$$

Далее в состав *e* входит последовательность

$$\mathrm{P}_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

а также последовательности P'_n, которые отличаются от P_n конечным числом членов. Также объединим их в один класс, который обозначим

$$\operatorname*{Lim}_n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}. \tag{2}$$

Аналогичным образом поступим с любой последовательностью из состава неперова числа. Ясно, что любая последовательность из состава числа *e* попадет в один и только в один из классов вида (1), (2). Поэтому можно сказать, что само неперово число представляет собой совокупность объектов типа (1), (2). Данные объекты и представляют собой те «элементарные частицы», на которые необходимо расщепить вещественное число. Будем называть их элементарными числами.

Дадим теперь формальное определение. Рассматриваемую числовую систему можно описать как фильтрованное произведение счетно-бесконечной декартовой степени поля рациональных чисел по фильтру Фреше [49]. Пусть заданы две последовательности рациональных чисел $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$. Будем считать их эквивалентными, если найдется такое натуральное число N, что для любого $n > \mathrm{N}$

$$|a_n - b_n| = 0. \tag{3}$$

Определение 3.1. *Классы эквивалентности последовательностей абсолютных рациональных чисел (3) будем называть элементарными числами.*

Если некоторая последовательность $\{a_n\}$ принадлежит классу эквивалентности A, то этот факт будем констатировать с помощью записи:

$$A = \operatorname*{Lim}_n a_n = \operatorname*{Lim}_n (a_1,\ a_2, \dots a_n, \dots). \tag{4}$$

Индекс «n» под знаком Lim соответствует текущему номеру члена последовательности. Если в обозначении a_n фигурирует только один индекс, то будем использовать также сокращенную запись

$$A = \mathrm{Lim} a_n = \mathrm{Lim}(a_1,\ a_2, \dots a_n, \dots).$$

Рациональные числа a_n по отношению к A будем называть приближениями A. Сам объект A по отношению к последовательности $\{a_n\}$ будем называть пределом (в смысле Lim) последовательности. В случае необходимости принадлежность к области элементарных чисел будем отмечать индексом «эл». Например, $1_{\text{эл}} = \mathrm{Lim} 1_{\text{абс}}$ — это класс эквивалентности, в который входит стационарная последовательность $\{1_{\text{абс}}\}$.

Все арифметические операции над элементарными числами $A, B = \mathrm{Lim} b_n$ введем через их приближения:

$$A \pm B = \mathrm{Lim}(a_n \pm b_n); \ A \cdot B = \mathrm{Lim} a_n \cdot b_n; \ \frac{A}{B} = \mathrm{Lim}\frac{a_n}{b_n}, \quad b_n \neq 0.$$

Модуль и целую часть числа A определим как

$$|A| = \mathrm{Lim}|a_n|; \ [A] = \mathrm{Lim}[a_n].$$

Определение 3.2. *Будем считать, что $A \le B$, если начиная с некоторого* N $a_n \le b_n$ *для любого $n > \mathrm{N}$. Если $A \le B$ и $A \neq B$, то будем писать $A < B$.*

Легко видеть, что результаты арифметических операций и отношение $\le$ между элементарными числами от выбора конкретных представителей из соответствующих классов эквивалентности не зависят.

Область элементарных чисел является частично упорядоченной. В ней есть как сравнимые числа, например $\mathrm{Lim}1 < \mathrm{Lim}2$, так и числа, не сравнимые между собой, например Lim0 и $j = \mathrm{Lim}(-1)^{n+1}$.

Везде будем использовать различные вариации исходных определений, если смысл их будет ясен из контекста. Так, запись $B \geq A$ будем считать равносильной записи $A \leq B$, $A^2 = A \cdot A$ и т.д.

Замечание. Непосредственно при расщеплении конечных вещественных чисел мы получаем элементарные числа $\operatorname{Lim}_n r_n$, в которых последовательности r_n являются обязательно фундаментальными. В результате арифметических операций мы приходим к числам, последовательность приближений которых может быть не фундаментальной: например, при делении $\operatorname{Lim}\frac{(-1)^n}{n}$ на $\operatorname{Lim}\frac{1}{n}$. Именно поэтому в определение 3.1 условие фундаментальности не включено.

2. Свойства элементарных чисел

1^0. В области элементарных чисел определены операции сложения и умножения. Данные операции а) коммутативны; б) ассоциативны; в) дистрибутивны.

2^0. В области элементарных чисел есть свои нуль и единица. Они представляют собой следующие классы эквивалентности:

$$0_{\text{эл}} = \operatorname{Lim} 0_{\text{абс}}; \;\; 1_{\text{эл}} = \operatorname{Lim} 1_{\text{абс}}.$$

Аналогичным образом в область элементарных чисел включаются натуральные, целые и любые рациональные числа.

3^0. Определены операции вычитания и деления. Операция деления определена не для всех пар элементарных чисел.

4^0. Среди элементарных чисел отсутствует мнимая и дуальная единицы, т.е. отсутствуют числа i и J такие, что $i^2 = -1$ и $J^2 = 0$ при $J \neq 0$.

5^0. Область элементарных чисел является частично упорядоченной.

Напомним следующее

Определение 3.3. *Числа A и B называются делителями нуля, если $A \neq 0$, $B \neq 0$ и $AB = 0$.*

6^0. Среди элементарных чисел есть делители нуля.

Теорема 3.1. *Для того чтобы число $\operatorname{Lim} a_n \neq 0_{\text{эл}}$ было делителем нуля, необходимо и достаточно, чтобы для любого наперед заданного номера N всегда нашелся хотя бы один номер $m > \mathrm{N}$ такой, что $a_m = 0$.*

• Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть $AB = 0$. Значит, начиная с некоторого номера, $a_n b_n = 0$. Предположим противное: нашелся такой номер N, что для всех $m > \mathrm{N}$ $a_m \neq 0$. Но тогда $b_m = 0$ и, следовательно, $B = 0$, что противоречит определению.

Достаточность. Пусть для любого N существует $m(\mathrm{N})$ такое, что $a_m = 0$. Положим $b_m \neq 0$. Для остальных значений индекса положим $b_n = 0$. Таким образом, число $B = \mathrm{Lim} b_n$ отлично от 0, но произведение $AB = 0$. ■

Проще говоря, для того чтобы элементарное число было делителем нуля, необходимо и достаточно, чтобы число $0_{\text{абс}}$ в его приближениях встречалось сколь угодно далеко.

7^0. В области элементарных чисел невозможно деление на число $0_{\text{эл}}$ и числа, являющиеся делителями нуля.

8^0. В области элементарных чисел есть сколько угодно двойных единиц. Иными словами, уравнение

$$A^2 = 1_{\text{эл}}$$

имеет сколько угодно решений, отличных от ± 1.

Определение 3.4. *Число A назовем положительным (актуально) бесконечно большим числом, если $A > \mathrm{N}$ для любого наперед заданного натурального числа* N.

9^0. Существуют элементарные числа, большие любого наперед заданного натурального числа. Например, число $\mathrm{Lim}\, n^4$.

Определение 3.5. *Число A будем называть положительным бесконечно малым (или актуально бесконечно малым числом), если $0 < A < 1/\mathrm{M}$, где* M *— любое натуральное число.*

Имеет место свойство

10^0. Существуют элементарные числа, которые являются положительными бесконечно малыми числами.

Например, число $\mathrm{Lim} 1/(n^2 + n)$.

Аналогичным образом определим и отрицательные бесконечно большие (малые) числа. Кроме того, примем следующее

Определение 3.6. *Число A называется бесконечно большим (малым), если $|A|$ — положительное бесконечно большое (малое) число.*

Нетрудно доказать, что если бесконечно малое число не является делителем нуля, то число, обратное ему, будет бесконечно большим и наоборот: числа, обратные бесконечно большим, являются бесконечно малыми. Кроме того, бесконечно малые числа — это элементарные числа, полученные в результате расщепления вещественного числа $0_{\text{вещ}}$. Точно так же бесконечно большие числа получены из расщепления объекта $\infty_{\text{вещ}}$.

Таким образом, в области элементарных чисел Первая аксиома разрешения не действует. Следовательно, эту числовую область необходимо отнести к неархимедовой.

3. Эталонные бесконечно большое и бесконечно малое элементарные числа

Каждое бесконечно большое элементарное число связано со своей неограниченно возрастающей последовательностью рациональных чисел (результат расщепления объекта $\infty_{\text{вещ}}$). Есть ли среди них последовательность, которая является в каком-то смысле исключительной, т.е. такая, которая бесспорно выделяется из всевозможных неограниченно возрастающих последовательностей? Представляется, что на этот вопрос можно дать совершенно однозначный положительный ответ: да, есть. Это последовательность натуральных чисел, взятых в своем естественном порядке:

$$1,\ 2,\ 3, \ldots n, \ldots . \tag{5}$$

Выше предполагалось, что натуральные числа заданы изначально и в этом смысле они имеют для нас абсолютное значение. Причем числа заданы в своем естественном порядке (5). Поэтому можно принять, что последовательность (5) также имеет абсолютное значение. Данной последовательности соответствует элементарное число, которое обозначим через ω:

$$\omega = \operatorname*{Lim}_{n} n.$$

Ниже обозначение ω будет использоваться только в указанном смысле. Таким образом, число ω можно принять за эталон бесконечно больших чисел. Последнее равенство дает ответ на следующий вопрос: куда же, собственно, стремится переменная n в своем пределе $\operatorname{Lim} n$? Теперь ясно: переменная n стремится к объекту ω. Это дает основание для того, чтобы уточнить обозначение предела (4) следующим образом:

$$A = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} a_n.$$

В некоторых случаях такая форма удобна для вычисления пределов, например

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\omega}(n^2 + n + 1) = \omega^2 + \omega + 1.$$

Наличие эталона для бесконечно больших чисел однозначно определяет и эталон бесконечно малых чисел, т.е. эталон, равный обратной величине ω:

$$\mathrm{E} = \frac{1}{\omega} = \operatorname{Lim}\frac{1}{n}.$$

4. Соответствие между элементарными числами и обычными функциями классического анализа

Переход от элементарных чисел к обычным функциям классического анализа достаточно прост. Число $A = \mathrm{Lim}\, a_n$ однозначно определяется последовательностью своих приближений. Как обычно, данную последовательность можно рассматривать как функцию дискретного аргумента $a_n = f(x),\ x = 1, 2, \ldots n, \ldots$.

Теперь можно сказать, что каждому элементарному числу A отвечает своя функция $y = f(x)$.

Приведем примеры. Во-первых, конечным натуральным числам соответствуют функции-константы:

$$y = f(x) = 1;\ \ y = 2, \ldots\ \ y = n, \ldots .$$

Далее, числам $\mathrm{E}, \omega - 1, \omega, \ldots \omega^2, \ldots \omega^\omega \ldots$ соответствуют функции

$$y = f(x) = \frac{1}{x};\ \ y = x - 1;\ \ y = x;\ \ldots y = x^2, \ldots\ y = x^x, \ldots .$$

Иногда бывает удобно продолжить данные функции на все вещественные значения x. Это позволяет для исследования элементарных чисел (например, для определения их знака) пользоваться всем арсеналом средств классического анализа.

5. Продолжение натурального ряда в область актуальных бесконечно больших чисел

Итак, мы построили область элементарных чисел. В данную область входят натуральные числа, число ω, а также множество других конечных и бесконечно больших чисел. Возникают следующие вопросы: можно ли указать естественные правила, которые позволили бы продолжить натуральный ряд в область актуальных бесконечно больших чисел? Чем следует руководствоваться при построении такого продолжения?

Прежде всего мы должны обратиться к опыту построения обычных натуральных чисел. Его исходной посылкой был пересчет отдельных предметов. Может ли эта посылка быть главной при решении нашей задачи? Ее явно недостаточно. Даже для конечных совокупностей процесс пересчета является не таким ясным, как это обычно представляется [62, 93]. Тем более трудно говорить о продолжении такого процесса в область актуальных бесконечностей. По-видимому, максимум, что может дать идея пересчета для области бесконечного, так это следующее условие: если продолженному натуральному ряду принадлежит бесконечно большое число ν, то этому ряду должны принадлежать также числа $\nu + 1$, $\nu + 2$, $\nu + 3, \ldots$.

Дальше возникает проблема выбора чисел ν. Для ее решения необходима новая идея. Есть одно правило, которое всегда приводит к нужным идеям. Оно сводится к тому, чтобы ясно сформулировать потребности, ради которых эти трудности должны преодолеваться. В нашей ситуации это означает, что необходимо ответить на вопрос: а что, собственно, мы хотим от нового натурального ряда?

При ответе на него будем исходить из следующей посылки. Известно, что, взяв за основу обычный натуральный ряд и двигаясь по определенному пути, можно прийти к вещественным числам и затем к классическому анализу. Естественно попытаться пройти такой же путь и для неархимедова анализа, взяв за основу натуральный ряд, продолженный в область актуальных бесконечно больших чисел. Поэтому примем условия, благодаря которым продолженный натуральный ряд может служить основой неархимедова математического анализа. (Для удобства продолженный натуральный ряд будем называть также «натуральным» рядом, а его члены — «натуральными» числами). Возникает вопрос, насколько далеко должен простираться «натуральный» ряд в области бесконечных чисел? Для классификации рядов по этому признаку введем два определения:

Определение 3.7. *Будем говорить, что «натуральный» ряд элементарных чисел ограничен числом* L^*, *если любое число* ν *из данного ряда меньше, чем* $\mathrm{L}^*: \nu < \mathrm{L}^*$.

Определение 3.8. *Будем говорить, что «натуральный» ряд неограничен, если в этом ряде всегда найдем число* ν, *которое превосходит любое наперед заданное элементарное число* A.

Кроме того, понадобится еще одно определение.

Определение 3.9. *Если* $\mu = \mathrm{Lim}\,\mu_n$, $\nu = \mathrm{Lim}\,\nu_n$ *и приближения* ν_n *являются числами натуральными, то примем, что* $\mu^{\nu} = \mathrm{Lim}\,\mu_n^{\nu_n}$.

Вначале ограничимся минимальным арсеналом средств для продолжения натурального ряда. Примем следующие условия:

1^0. Продолженному натуральному ряду принадлежат натуральные числа 1, 2, 3,... и эталонное бесконечно большое число $\omega = \mathrm{Lim}\, n$.

2^0. Условие замкнутости. Если продолженному натуральному ряду принадлежат числа μ, ν, то ему принадлежат и числа $\mu + \nu$, $\mu \cdot \nu$, μ^{ν}.

3^0. Условие линейной упорядоченности. Любые два числа μ и ν, принадлежащие продолженному натуральному ряду, должны находиться в одном и только в одном из отношений:

$$\mu = \nu, \ \ \mu < \nu, \ \ \nu < \mu.$$

Условие замкнутости 2^0 является достаточным для выполнения следующего условия.

2^0a. Условие плотности. Если продолженному натуральному ряду принадлежат три числа μ, ν и Γ, то ему должны принадлежать еще два числа α и β такие, что

$$0 < \left| \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\mu}{\nu} \right| < \frac{1}{\Gamma} \ . \tag{6}$$

Действительно, пусть ряду принадлежат три числа μ, ν и Γ. Тогда данному ряду принадлежат и числа

$$\alpha = 2\Gamma\mu + 1, \ \ \beta = 2\Gamma\nu.$$

Указанные числа удовлетворяют неравенству (6).

Рассмотрим процесс развертывания «натурального» ряда и вопрос о линейном порядке между его членами. Условие замкнутости ряда относительно сложения и умножения позволяет развернуть ряд до чисел ω^ρ, где ρ — любое конечное натуральное число:

$$1,\ 2,\ 3,\ldots,\omega,\ldots\omega^2,\ldots,\omega^\rho + k_1\omega^{\rho-1} + \ldots + k_{\rho-1}\omega + k_\rho \ldots, \tag{7}$$

$k_1,\ldots k_\rho$ — конечные натуральные числа.

Легко видеть, что с числами (7) проблем с линейным порядком нет. Действительно, числу (7) отвечает функция

$$y = x^\rho + k_1 x^{\rho-1} + \ldots + k_{n-1}x + k_n.$$

Здесь ρ — фиксированное число, а переменная x — неограниченно возрастает. Поэтому знак многочлена при достаточно больших x определяется знаком старшего члена. Следовательно, числа (7) — положительны. Вычитание двух чисел даст число, знак которого также будет определяться знаком старшего числа. Таким образом, линейный порядок здесь есть.

Перейдем теперь к числу ω^ω и развернем его до многочлена, содержащего любое, но конечное число слагаемых:

$$\omega^\omega + k_1\omega^{\omega-1} + \ldots + k_{\rho-1}\omega + k_\rho.$$

Здесь также знак будет определяться старшим членом и линейный порядок будет всегда. Аналогичная ситуация будет и при переходе к бо́льшим числам. Таким образом, продолженный натуральный ряд можно представить в следующем виде:

$$\begin{gathered}1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ \omega,\ \omega+1, \ldots 2\omega,\ \ldots\ \omega^2 \ldots \\ \omega^\rho + k_1\omega^{\rho-1} + \ldots + k_{\rho-1}\omega + k_\rho, \ldots \\ \omega^\omega + k_1'\omega^{\omega-1} + \ldots + k_g';\ \ldots\ \omega^{\omega^\omega}, \ldots,\end{gathered} \tag{8}$$

где все коэффициенты представляют собой конечные натуральные числа. Главным здесь является то обстоятельство, каждое «натуральное» число представлено конечным числом слагаемых.

Нетрудно показать, что если указанные ограничения снять, то линейный порядок ряда может нарушиться. Для примера возьмем разложение функции

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \ldots .$$

Положим

$$\begin{aligned}&R(x,m) = P(x,m) - Q(x,m),\\ &P(x,m) = (4m)!\left[1 + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots + \frac{x^{4m}}{(4m)!}\right],\\ &Q(x,m) = (4m)!\left[\frac{x^2}{2!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{4m-2}}{(4m-2)!}\right].\end{aligned}$$

Функция $\cos x$ при увеличении x неограниченное число раз меняет свой знак. Ясно, что при увеличении n этим свойством будет обладать и многочлен $R\ (x,\ m)$, если положить $x = n$ и, например, $m = 10n$. Образуем два элементарных числа:

$$P = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} P(n, 10n), \quad Q = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} Q(n, 10n).$$

В выражениях для их приближений фигурируют только операции сложения и умножения конечных натуральных чисел. И тем не менее числа P и Q между собой несравнимы: их разность определенного знака не имеет.

Таким образом, условия 1^0, 2^0 обеспечивают выполнение условия линейной упорядоченности 3^0.

Построенный «натуральный» ряд является ограниченным. Операции сложения, умножения и возведения в степень позволяют продолжить ряд до членов типа $\omega^{\omega^{\omega}}$, где число ступеней может быть любым, но конечным натуральным числом. Следовательно, для любого числа ряда $\nu < L^* = \varepsilon = \omega^{\omega^{\omega}\}\omega\ \text{раз}}$.

Может ли ограниченный ряд служить основой математического анализа? Общий ответ на этот вопрос является положительным. Например, весь классический анализ основан на конструкции самого короткого натурального ряда, ограниченного числом $L^* = \omega$.

Как уже отмечалось, любая теория имеет собственную разрешающую способность. Факт ограниченности ряда и его граница L^* определяют возможности соответствующей теории. Это обстоятельство полно проявляется в конструкции объектов «нуль» и «бесконечность», которые должны быть определены в рамках любой теории. Поясним данное утверждение. Запишем продолженный натуральный ряд в следующем виде:

$$1, 2, 3 \ldots \omega, \ldots \nu, \ldots < L^*. \tag{9}$$

Члены ряда будем использовать для нумерации последовательностей того же порядкового типа, что и сам ряд (9).

Пределы последовательностей такого типа будем обозначать символом limit. При этом ν можно рассматривать как переменную, пробегающую значения (9). Необходимо принять следующее

4^0. Условие достаточной длины продолженного натурального ряда. Для любого «натурального» ряда (9) в рамках теории, которая строится на его основе, понятия «нуль» и «бесконечность» должны быть определены как объекты

$$\operatorname{limit}\frac{1}{\nu},\ \operatorname{limit}\nu.$$

При этом «под достаточностью длины ряда (9)» понимается достаточная содержательность соответствующей ему теории.

Из данного условия следует, что теория заведомо не будет различать числа, если они отличаются на $1/L^*$. Точно так же будут отождествляться (с бесконечностью) числа L^*, $L^* + 1{,}2L^*$ и др. Тем не менее в таком виде условие 4^0 является неопределенным. Ниже его смысл будет уточняться.

Уместно привести следующее сравнение. На заре становления натурального ряда счет велся таким образом: один, два, три, четыре, много. В случае (9) имеем похожую ситуацию: один, два, три, ... $\omega, \ldots \nu, \ldots L^*$ — много, бесконечность. Теперь о содержательности теории. Известно, что уже при $L^* = \omega$ теория является содержательной (классический анализ). Можно надеяться, что и при больших значениях $L^* = \omega^\omega$, ε и т.д. также будут получаться содержательные теории. Остановимся на случае $L^* = \varepsilon$. Ясно, что любые операции типа сложения, умножения, введения в степень и предельного перехода limit будут приводить либо к бесконечности, либо к результату в пределах границы $L^* = \varepsilon$. Единственная операция, которая может дать другой результат — это предельный переход в смысле Lim. Например, предельный переход Lim для следующей подпоследовательности из (9):

$$\mathrm{Lim}\left(2\cdot\omega^{\omega},\ 2\cdot\omega^{\omega^{\omega}},\ 2\cdot\omega^{\omega^{\omega}\}n\text{ раз}}\ldots\right) = 2\varepsilon. \tag{10}$$

В результате такого перехода получается вполне конкретное элементарное число

$$2\varepsilon = \mathrm{Lim}\left(2\cdot 1;\ 2\cdot 2^{2^2},\ 2\cdot 3^{3^3},\ldots 2\cdot n^{n^n\}n\text{ раз}}\ldots\right).$$

То есть для построения любого объекта за границей L^* (равно как и в пределах этой границы) достаточно располагать последовательностями только конечных натуральных чисел.

Таким образом, в теории, основанной на ряде (9), будут иметь место все теоремы, утверждения и формулы, в которых не используются предельные переходы типа (10) и условие неограниченности продолженного натурального ряда. Для решения многих прикладных задач этого будет, по-видимому, достаточно.

Если же возникнет необходимость повышения разрешающей способности теории, то ряд (9) можно продолжить дальше. Операций сложения, умножения и возведения в степень для этого не хватает. Поэтому в арсенал наших средств необходимо добавить еще один — самый эффективный инструмент продолжения ряда:

5^0. Если продолженному натуральному ряду принадлежат числа

$$\nu_1 < \nu_2 <\ldots< \nu_n <\ldots,\ \nu_n = \mathrm{Lim}_m\, \nu_{nm},$$

которые удовлетворяют специальным дополнительным условиям, то этому ряду может принадлежать и число

$$\Lambda = \mathrm{Lim}_n\, \nu_{nn}. \tag{11}$$

Специальные условия сводятся к тому, чтобы новое число Λ не нарушало линейного порядка между числами, которые уже отнесены к «натуральным». Иными словами, за пределами границы $L^* = \varepsilon$ операция (11) сама по себе уже не гарантирует линейного порядка. Поэтому условие линейной упорядоченности 3^0 теперь не вытекает из условия 2^0, 5^0 и должно ставиться независимо.

Рассмотрим примеры. Пусть «натуральный» ряд (9) ограничен числом $L^* = \varepsilon$. Включим это число в состав ряда. Дальше будем пользоваться только условием замкнутости 2^0, т.е. операциями сложения, умножения и возведения в степень. Операцию (11) исключаем. Этими средствами ряд (9) продолжается до членов следующего вида:

$$1,\ 2,\ 3\ldots\omega\ldots\varepsilon,\ldots\varepsilon^{\varepsilon},\ldots\varepsilon^{\varepsilon^{\varepsilon}\}n\text{ раз}},\ldots < L^{*} = \varepsilon_4, \tag{12}$$

где $\varepsilon_4 = \operatorname*{Lim}_n \varepsilon^{\varepsilon^{\varepsilon}\}\omega\text{ раз}}$.

Операция Lim использовалась только для подсчета границы ряда. Включим теперь новую границу ряда в его состав и продвинемся до следующей границы ε_5 и т.д. и т.д. Далее границу можно отодвинуть, применяя операцию (11) к последовательности предыдущих границ рядов:

$$\varepsilon_1 = \omega,\ \ \varepsilon_2 = \omega^{\omega},\ \ \varepsilon_3 = \varepsilon,\ \ \varepsilon_4,\ldots\varepsilon_n,\ldots.$$

Первая граница относится к изначально заданному натуральному ряду. Граница ω^{ω} относится к продолжению ряда с использованием условия 1^0 и операций сложения и умножения. Граница ε относится к ряду (9), граница ε_4 — к ряду (12) и т.д. Дальше получаем границу, которую обозначаем как $\varepsilon_{\omega} = \operatorname{Lim}\varepsilon_n$. Продолжая процесс, мы видим, как ранее построенный ряд постепенно перемещается в индексы границ новых, все более длинных рядов. Ясно, что границы для самих границ рядов на этом пути не существует.

Таким образом, мы всегда можем построить «натуральный» ряд, граница которого превосходит любое наперед заданное элементарное число A. Предположим противное. Каждый член ν построенного (ограниченного) «натурального» ряда (9) меньше числа $A: \nu < A$. Можно принять, что все приближения A есть числа натуральные. Добавим число A к нашему ряду (9). В результате получим новый ряд

$$1,\ 2,\ 3,\ldots\omega,\ldots,\nu,\ldots A,\ A+1,\ldots \tag{13}$$

Числа вида $A+\nu$, $A\cdot\nu$, A^{ν}, ν^{A}, A^{A}, ... превосходят любое число ν из исходного ряда и между ними есть линейный порядок. Поэтому ряд (13) линейно упорядочен и может рассматриваться как новое продолжение натурального ряда. Интересно отметить, что пробел перед числом A в ряде (13) является весьма широким. Он заведомо превышает величину $A - A/\nu$ для любого числа ν из чисел, предшествующих A. Действительно, предположим, что нашлось «натуральное» μ (из ряда, построенного до присоединения числа A) такое, что $A/\nu < \mu$. Следовательно, $A < \nu\cdot\mu$, что противоречит исходному условию замкнутости ряда. Таким образом, граница ряда (13) превосходит наперед заданное число A. Выше речь шла только об ограниченных продолжениях натурального ряда. Такие продолжения являются счетными.

Для теоретических построений представляет интерес неограниченное продолжение натурального ряда. Процесс развертывания такого ряда похож на процесс построения трансфинитных чисел второго числового класса [105]. Есть, однако, и различия. Главное из них состоит в том, что для построения ряда у нас в арсенале имеется гораздо больше средств, чем для построения трансфинитных чисел. Число $\omega = \mathrm{Lim}\, n$ не есть число, непосредственно следующее за числами 1, 2, 3... . За этими числами следуют также числа $\ldots(\omega - 3)$, $(\omega - 2)$, $(\omega - 1)$. Природа числа $\omega = \mathrm{Lim}\, n$ гораздо ближе к природе конечных чисел, чем природа наименьшего трансфинитного числа. Поэтому для продолжения натурального ряда вместе с числом ω можно использовать также числа $(\omega - 1), (\omega - 2), \ldots, \omega!, 2^{\omega}, 10^{\omega}, \omega^{\omega-1}$ и т.д. С другой стороны, не весь этот арсенал нам необходим для построения «натурального» ряда. Можно рассмотреть ряд, в котором числа вида $(\omega - 1)$, $\omega!$ и другие, подобные им, не используются. В результате мы придем к неограниченному «натуральном» ряду, запись которого совпадает с записью натурального ряда, продолженного в область трансфинитных чисел [105]. Различие будет состоять только в смысле символа ω. В [105] ω — это наименьшее трансфинитное число, здесь ω — класс эквивалентности $\mathrm{Lim}\, n$. На мощности множества «натуральных» чисел последнее обстоятельство никак не сказывается. Поэтому утверждение о том, что множество трансфинитных чисел имеет первую несчетную мощность, можно перенести и на неограниченный «натуральный» ряд. Кроме того, к данному ряду можно отнести также и следующее замечание Н.Н. Лузина: «Мы видим, какая имеется громадная разница между натуральным рядом и последовательностью трансфинитных чисел. Но за всем тем, *если мы сделаем гипотезу о существовании всех рассматриваемых трансфинитных чисел*, мы сможем *рассуждать* над ними без того, чтобы уметь определять и обозначать их *все*» [105].

Следует, однако, отметить, что для построения неархимедова анализа и решения многих задач «необозримость» несчетного «натурального» ряда не составляет большого препятствия. Точно так же, как и «необозримость» континуума действительных чисел не является препятствием для вычисления определенных интегралов от функций действительного переменного.

В заключение уточним терминологию. Классический анализ базируется на концепции вещественного числа, которая, в свою очередь, определяется натуральным рядом

$$1, 2, 3 \ldots n, \ldots . \tag{14}$$

Неархимедов анализ опирается на ряд (14), продолженный в область бесконечных чисел:

$$1,\ 2,\ 3\ldots,\omega,\ldots\nu,\ldots\ . \tag{15}$$

Для удобства классический и неархимедов анализы назывались анализом-1 и анализом-2. На этом основании рядам (14), (15) будем приписывать тип 1 и 2.

В тексте будем использовать также названия, которые отражают главное различие в рядах (14) и (15). Оно состоит в том, что ряд (15) качественно длиннее, чем ряд (14). Поэтому ряд (14) будем называть счетным, а ряд (15) — несчетным. Такие же названия будем использовать и для последовательностей, занумерованных числами (14) или (15). Если взять неограниченную версию «натурального» ряда (15), то принятые названия соответствуют и теоретико-множественным характеристикам рядов (14), (15).

Чтобы излишне не усложнять терминологию, оставим те же названия и для ограниченной версии ряда (15) на том основании, что и в этом случае ряд (15) качественно длиннее, чем ряд (14). Тем более что основные результаты от выбора конкретной версии ряда (15) зависеть не будут. Последние аргументы приведены в связи с тем, что с теоретико-множественной точки зрения ограниченный ряд (15) является счетным.

6. Неравномерность шкалы актуальных бесконечно больших натуральных чисел

С помощью конечных натуральных чисел любое рациональное число можно локализовать с точностью до единицы. Поэтому конечные натуральные числа можно представить себе как отметки на некоторой измерительной шкале (линейке). Отметки расположены с шагом, равным единице. Причем этот шаг одинаков на всех участках шкалы. Например, он равен 1 как на участке от 1 до 10, так и на участке от 10^{23} до $10^{23} + 10$.

Обратимся теперь к области бесконечных чисел. Возьмем для определенности отрезок ряда

$$1,\ 2,\ 3,\ldots\omega,\ \omega+1,\ldots,\omega+n,\ldots\ . \tag{16}$$

Посмотрим теперь, в какой степени шкала (16) локализует число $\omega + 2{,}7$.

Очевидно, что

$$\omega + 2 < \omega + 2{,}7 < \omega + 3. \tag{17}$$

Следовательно, на этом участке шаг линейки равен 1.

Возьмем теперь число $\upsilon = 0{,}5\omega$. Здесь шкала (16) дает только следующую степень локализации:

$$N < 0{,}5\omega < \omega, \tag{18}$$

где N — любое сколь угодно большое, но конечное натуральное число. Степень локализации здесь качественно хуже, чем в случае (17). Там шаг между делениями был равен 1, а здесь он равен $(\omega - N)$. Достаточно сказать, что для числа $\upsilon = 0{,}7\omega$ шкала (16) дает ту же самую оценку, что и для числа $0{,}5\omega$:

$$N < 0{,}7\omega < \omega.$$

Таким образом, шкала (16) числа $0{,}5\omega$ и $0{,}7\omega$ совсем не различает, хотя разница между ними составляет бесконечно большое число, равное $0{,}2\omega$.

По мере продвижения вправо ко все большим «натуральным» числам неравномерность шкалы только возрастает. На ней по-прежнему остаются участки, позволяющие локализовать число с точностью до единицы, например участок

$$\omega^2,\ \omega^2 + 1,\ \omega^2 + 2\ldots$$

Есть и участки типа (17):

$$\omega^2 + 1, \ldots \omega^2 + n, \ldots \omega^2 + \omega, \ldots.$$

Однако появляются участки, еще более неравномерные, чем указано выше. Например, участок

$$n\omega, \ldots, \omega^2, \ldots.$$

Попытаемся локализовать числа $0{,}5\omega^2$ и $0{,}7\omega^2$. Для обоих чисел мы получаем один и тот же интервал:

$$n\omega + g < 0{,}5\omega^2 < \omega^2,$$

$$n\omega + g < 0{,}7\omega^2 < \omega^2,$$

где n, ρ, g — любые конечные натуральные числа. Здесь уже шкала не различает числа порядка ω^2. Нетрудно понять, что правее в «натуральном» ряде будут встречаться участки, где невозможно различить числа порядка $\omega^3, \omega^4, \ldots \omega^n, \ldots \omega^\omega \ldots$ и т.д. и т.д. В этом принципиальное отличие «натурального» ряда бесконечных чисел от натуральных конечных чисел.

Более образно об этом можно сказать так. Предположим, что мы располагаем средством передвижения, способным двигаться с шагом, равным единице. Тогда, если мы добрались до отметки на шкале номер N, у нас есть полная уверенность, что мы доберемся и до отметки $N+1$, $2N$, N^2, N^N и т.д. Для нас доступны любые точки нашей шкалы. В этом смысле можно сказать, что натуральный ряд конечных чисел является одномасштабным. (Все точки одинаково доступны, или, говоря по-другому, все точки находятся на одном уровне доступности.)

В случае ряда бесконечных чисел ситуация будет другой. Двигаясь указанным способом из отметки N, мы можем добраться до N^N, но добраться до отметки ω мы не можем в принципе. В этом смысле можно сказать, что номера N^N и ω разделены пропастью (или барьером). Неравенство (18) дает основание для того, чтобы оценку ширины этой пропасти оценить как ω минус любое конечное натуральное число. Конечное число будем отбрасывать. Тогда можно говорить о ширине пропасти, равной ω (или барьере высотой ω).

Предположим теперь, что мы располагаем средством передвижения на шаг, равный единице, и способом преодоления барьера высотой ω. Тогда для нас будут доступными точки

$$1,\ 2,\dots n,\dots \omega,\dots 2\omega,\dots n\cdot\omega, n\omega+1\dots .$$

Однако точка ω^2 остается недоступной. Для ее достижения потребуется преодолеть барьер ω^2 и т.д. Имея в виду это свойство, будем говорить, что «натуральный» ряд является многомасштабным.

7. «Целые» и «рациональные» элементарные числа

Определение 3.10. *Элементарное число называется «целым», если оно представляет собой разность двух «натуральных» чисел.*

Определение 3.11. *Элементарное число называется «рациональным», если оно равно отношению двух «целых» чисел.*

Во многом «рациональные» числа похожи на обычные рациональные числа. Они обладают следующими свойствами:

1^0. Между «рациональными» элементарными числами есть линейный порядок. Так, если

$$\rho_1 = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \rho_2 = \frac{\mu}{\nu},$$

то числа ρ_1 и ρ_2 находятся в одном и только одном из отношений:

$$\rho_1 = \rho_2;\ \rho_1 > \rho_2,\ \rho_1 < \rho_2. \tag{19}$$

Действительно, пусть числа α, β, μ, ν и, значит, числа $\alpha\cdot\nu$, $\beta\cdot\mu$ являются «натуральными». Поэтому числа $\alpha\cdot\nu$ и $\beta\cdot\mu$ между собой сравнимы и условия (19) однозначно определяются следующими условиями:

$$\alpha\nu = \beta\mu, \;\; \alpha\nu > \beta\mu, \;\; \alpha\nu < \beta\mu.$$

Случаи, когда числа α, β, μ, ν — «целые», рассматриваются аналогично.

2^0. Совокупность «рациональных» чисел замкнута относительно операций сложения, умножения и деления (деление на 0 исключается).

3^0. Совокупность «рациональных» чисел можно назвать плотной в том смысле, что для любого «рационального» числа ρ всегда можно найти другое «рациональное» число ρ', которое отличается от ρ на любое сколь угодно малое бесконечно малое «рациональное» и наперед заданное число $\gamma > 0$:

$$0 < |\rho - \rho'| < \gamma. \tag{20}$$

Данное свойство следует из свойства плотности «натурального» ряда. Точнее было бы сказать по-другому: «натуральный» ряд элементарных чисел строился именно таким образом, чтобы «рациональные» числа обладали свойством (20).

§ 4. Внутренняя структура точки на вещественной числовой прямой

Точка на вещественной числовой прямой — это вещественное число. Вещественные числа состоят из элементарных чисел. Между последними есть частичный порядок. Поэтому можно поставить вопрос о внутренней структуре вещественного числа и, значит, о внутренней структуре точки на вещественной прямой.

1. Ореолы и абсолютные ядра рациональных вещественных чисел

Возьмем для примера число $0_{\text{вещ}}$. Данное число состоит из элементарных «частиц» $\mathrm{Lim}\, r_n$ таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0_{\text{вещ}}$. Нельзя сказать, что в своей совокупности они представляют собой «безликую» массу. Среди них, во-первых, выделяется элементарное число нуль $0_{\text{эл}} = \mathrm{Lim} 0_{\text{абс}}$. Во-вторых, выделяются числа, обратные бесконечно большим «натуральным» числам:

$$\frac{1}{\omega}, \; \frac{1}{\omega+1}, \ldots \frac{1}{\omega^2}, \ldots \frac{1}{\omega^\omega}, \ldots, \tag{1}$$

а также другие «рациональные» бесконечно малые числа, например

$$\frac{\omega + 2}{\omega^2 - 7};\ \frac{\omega^2 - \omega + 7}{\omega^{10} - \omega^3 + 1},\ \frac{\omega - 1}{\omega^\omega + \omega},\ldots . \tag{2}$$

В-третьих, можно выделить бесконечно малые числа, которые нельзя отнести к «рациональным», но которые связаны с «рациональными» числами и характерным числом j:

$$j\mathrm{E};\ j\mathrm{E}^\omega,\ \frac{j\omega + 1}{\omega^3 + j},\ldots . \tag{3}$$

Здесь, как и прежде,

$$j = \operatorname*{Lim}_n (-1)^{n+1}$$

представляет собой одну из двойных единиц: $j^2 = 1, j \neq +1, j \neq -1$.

Рассмотрим вопрос о порядке, который имеет место среди различных составляющих числа $0_{\text{вещ}}$. Прежде всего отметим, что между «рациональными» числами (1), (2) линейный порядок есть всегда. Поэтому их можно представить расположенными на оси, в центре которой находится нуль (рис. 1.1).

Далее легко заметить, что между числами (3) и (2) линейного порядка нет, а есть только частичный порядок: некоторые числа сравнимы между собой, а некоторые не сравнимы. Например, числа $j\mathrm{E}$ и $0_{\text{эл}}$ не сравнимы. Однако в любом случае, если в состав $0_{\text{вещ}}$ входит число A, то входит и число $(-A)$. Причем их полусумма равна $0_{\text{эл}}$. Это дает основание для того, чтобы число $0_{\text{эл}}$ назвать абсолютным ядром вещественного числа $0_{\text{вещ}}$ и считать, что абсолютное ядро находится в центре числа $0_{\text{вещ}}$. («Абсолютный» указывает на то, что число $0_{\text{эл}} = \mathrm{Lim}0_{\text{абс}}$ определено через стационарную последовательность абсолютных чисел.)

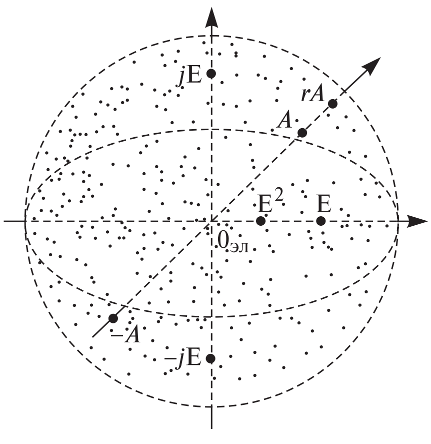

Рис. 1.1.

Совокупность остальных элементарных чисел из состава $0_{\text{вещ}}$ будем называть ореолом абсолютного ядра. Ясно, что если ореолу принадлежит число A, то ему принадлежит и число $r \cdot A$, где r — любое отличное от 0, абсолютное рациональное число. Таким образом, ореол представляет собой лучи, исходящие из центра — абсолютного ядра. Пусть $A_1, A_2 \ldots A_n$ — числа ореола. Если $r_1, r_2 \ldots r_n$ — абсолютные рациональные числа и равенство $r_1 A_1 + \ldots + r_n A_n = 0$ возможно только при $r_1 = \ldots = r_n = 0$, то элементарные числа будем считать линейно независимыми. Далее можно поставить вопрос о базисе и размерности пространства, в которое превратилась точка вещественной прямой. Ясно, что это пространство является бесконечномерным.

Абсолютные ядра и ореолы других вещественных рациональных чисел определяются аналогично и обладают той же структурой, что и число $0_{\text{вещ}}$.

Если элементарные числа принадлежат ореолу одного и того же абсолютного ядра, то между ними есть только частичный порядок. Однако если говорить об ореолах различных вещественных чисел, то между их составляющими линейный порядок всегда есть. Проще говоря, если $p_{\text{абс}} < g_{\text{абс}}$, то данное отношение сохраняется и для любых пар элементарных чисел, входящих в состав чисел $p_{\text{вещ}}$ и $g_{\text{вещ}}$.

2. Ореолы и ядра вещественных чисел

Ореолы и ядра иррациональных чисел. Для определенности остановимся на неперовом числе $e_{\text{вещ}}$.

Как определить ядро числа $e_{\text{вещ}}$? Ясно, что та идея, которая использовалась для рациональных чисел, здесь не проходит, так как среди элементарных чисел, которые входят в состав $e_{\text{вещ}}$, невозможно выделить какое-то одно число, которое чем-то принципиально отличалось бы от других чисел. Поэтому необходимо вернуться к определению абсолютных ядер рациональных вещественных чисел, найти какой-то их формальный признак и затем уже на этой основе попытаться дать определение ядра иррационального числа.

Возьмем, например, число $\left(\frac{1}{3}\right)_{\text{вещ}}$. В его ореол входят два элементарных числа $A < B$, которые соответствуют последовательностям

$$\begin{array}{l} A: 0{,}3;\ 0{,}33;\ 0{,}333;\ \ldots 0,\ \underbrace{3\ldots3}_{n};\ldots \\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ - \\ B: 0{,}33;\ 0{,}333;\ 0{,}3333;\ \ldots 0,\ \underbrace{3\ldots3}_{n+1};\ldots\ . \end{array} \tag{4}$$

Самому же абсолютному ядру числа $\left(\frac{1}{3}\right)_{\text{вещ}}$ соответствует стационарная последовательность

$$\left(\frac{1}{3}\right)_{\text{абс}},\ \left(\frac{1}{3}\right)_{\text{абс}},\ldots\left(\frac{1}{3}\right)_{\text{абс}},\ldots\ . \tag{5}$$

Две последовательности (4) отличаются друг от друга скоростью сходимости: чем скорость сходимости больше, тем ближе элементарное число находится к ядру (5). Самому же ядру соответствует «самая большая» скорость сходимости, которой обладает последовательность (5). Поэтому нашу проблему можно поставить таким образом: необходимо формализовать представление о «самой большой» скорости сходимости (5) и затем воспользоваться данным представлением для описания ядер иррациональных чисел.

Это можно сделать с помощью оператора форсирования. Дадим его определение.

Определение 4.1. *Пусть* $m = f(n)$ *— монотонно возрастающая функция натурального аргумента* $n = 1, 2, 3\ldots$ *такая, что ее значения* m *— конечные натуральные числа и* $m > n$*. Примем по определению, что элементарные числа*

$$A = \operatorname*{Lim}_{n} a(n), \;\; B = \operatorname*{Lim}_{n} a(f(n))$$

связаны между собой оператором форсирования F_f*:*

$$B = F_f A.$$

Будем говорить, что число B получено форсированием числа A. Функция $f(n)$ однозначно характеризует оператор F_f. Будем называть ее характеристической функцией оператора. Индекс f, как правило, опустим. Очевидно, что $a(f(n))$ является подпоследовательностью последовательности $a(n)$. Наличие операторов форсирования вносит дополнительный порядок в скопление элементарных чисел, из которых состоит вещественное число. Теперь в этом скоплении можно устанавливать цепочки «родственных» отношений

$$A,\; F_f A,\; (F_f)^2 A, \ldots (F_f)^n A, \ldots , \tag{6}$$

где $(F_f)^n$ — произведение операторов.

Дополнительные возможности открываются в связи с тем, что между самими операторами форсирования можно установить частичный порядок. Примем, что оператор F_g следует за F_f (или сильнее, чем оператор F_f), если $f(n) < g(n)$ для любого n. Данный факт можно отмечать записями $F_f < F_g$ или $F_g > F_f$. Далее достаточно ограничиться только монотонными последовательностями $a(n)$.

Для таких последовательностей оператор форсирования приводит только к увеличению скорости их сходимости. Но если оператор применить к стационарной последовательности, то характер сходимости не изменится. В этом смысле можно сказать, что здесь мы с самого начала имеем самую большую скорость сходимости (то есть скорость является настолько большой, что любое форсирование увеличить данную скорость уже не может).

Таким образом, задачу поиска ядра числа $e_{\text{вещ}}$ можно сформулировать следующим образом: ядро следует определить так, чтобы применение к нему оператора форсирования оставляло бы ядро без изменения.

Перейдем к решению. Возьмем произвольный элемент из состава числа $e_{\text{вещ}}$, например $\operatorname*{Lim}_n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Выберем оператор форсирования с характеристической функцией $f(n) = n + 1$ и образуем цепочку элементарных чисел вида (6):

$$\operatorname*{Lim}_n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \operatorname*{Lim}_n\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} <\ldots< \operatorname*{Lim}_n\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^{n+k} <\ldots \qquad (7)$$

В состав числа $e_{\text{вещ}}$ входит также элемент $B = \operatorname*{Lim}_n\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}$. Однако продолжить цепочку (7) до этого числа невозможно. Сколько бы раз мы ни применяли оператор с характеристической функцией $f(n) = n + 1$, мы всегда будем получать элемент меньший, чем B. Для того чтобы перейти к B, сменим оператор форсирования на более сильный F_g: положим $g(n) = 2n$. Продолжим цепочку (7) по образцу (6). Затем перейдем к операторам с характеристическими функциями $\mathrm{P}(n) = 3n,\ldots n^2,\ldots n^n\ldots$. В результате получим монотонно возрастающую последовательность, занумерованную числами из продолженного натурального ряда:

$$\begin{aligned}&\operatorname*{Lim}_n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \operatorname*{Lim}_n\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} <\ldots< \\ &< \operatorname*{Lim}_n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} <\ldots< \operatorname*{Lim}_n\left(1+\frac{1}{\nu(n)}\right)^{\nu(n)} <\ldots .\end{aligned} \qquad (8)$$

С увеличением «натурального» номера $\nu = \operatorname{Lim}\nu(n)$ будем получать все бóльшие числа (8). При этом каждому из них будет соответствовать все бóльшая скорость сходимости соответствующей последовательности, сходящаяся к вещественному числу $e_{\text{вещ}}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\nu(n)}\right)^{\nu(n)} = e_{\text{вещ}}.$$

С другой стороны, монотонно возрастающая последовательность (8) ограничена сверху числом 3. Здесь сама собой напрашивается следующая идея: определить ядро неперова числа как некоторый «предел» монотонной ограниченной последовательности элементарных чисел (8). Это, пожалуй, центральное место всех построений.

Основная трудность состоит в том, что искомый предел не может быть никаким элементарным и тем более вещественным числом. Следовательно, это должно быть число новой природы. Перейдем к его описанию.

Прежде всего рассмотрим альтернативу процедуре форсирования последовательностей. Для этого нам понадобится одно новое понятие — понятие непрерывного продолжения последовательностей.

Пусть задана последовательность абсолютных рациональных чисел: $a(n)$, $n = 1, 2, 3 \ldots$. Ранее мы продолжили натуральный ряд вправо на бесконечно большие значения чисел

$$1,\ 2,\ 3,\ldots\omega,\ \omega+1,\ldots\omega^2,\ldots\omega^\omega\ldots.$$

Теперь мы пришли к необходимости и в соответствующем продолжении любой последовательности $a(n)$. В частности, мы пришли к следующему вопросу: если задан ряд значений $a(n)$ при $n = 1, 2, 3\ldots$, то что следует понимать под значением $a(\omega)$? Ясно, что как и при любой экстраполяции функций о значении $a(\omega)$ сказать ничего определенного заранее нельзя. Однако вопрос можно поставить по-другому: можно ли из всех возможных вариантов продолжения $a(\omega)$ выбрать один, в каком-то смысле самый естественный? Безусловно, такой вариант есть. Это следующий:

$$a(\omega) = \underset{n}{\mathrm{Lim}}\, a(n). \tag{9}$$

Так как $\omega = \underset{n}{\mathrm{Lim}}\, n$, то (9) можно записать в форме

$$a(\underset{n}{\mathrm{Lim}}\, n) = \underset{n}{\mathrm{Lim}}\, a(n). \tag{10}$$

В классическом анализе функция $y = f(x)$ считается непрерывной в точке $x = x^0$, если операторы f и lim перестановочны между собой:

$$f(\lim_{x\to x^0} x) = \lim_{x\to x^0} f(x). \tag{11}$$

По форме условия (10) и (11) идентичны. Поэтому условие (10) будем также называть условием непрерывности. Примем следующее

Определение 4.2. *Будем говорить, что последовательность $a(n)$ непрерывно продолжена в точку ω (или на номер ω), если*

$$a(\omega) = \operatorname*{Lim}_n a(n).$$

Значение аргумента будем указывать также в виде индекса:

$$a_\omega = \operatorname*{Lim}_n a_n, \text{ где } a_\omega = a(\omega), \ a_n = a(n).$$

Аналогичным образом будем строить непрерывные продолжения и на другие значения аргумента, например

$$a(\omega+1) = \operatorname*{Lim}_n a(n+1), \ldots a(\omega^\omega) = \operatorname*{Lim}_n a(n^n), \ldots .$$

Если нет специальной оговорки, то под продолженной последовательностью

$$a_1,\, a_2, \ldots a_n \ldots a_\omega, \ldots a_\upsilon \ldots,$$

будем понимать последовательность, продолженную по непрерывности.

Имеет место следующая

Теорема 4.1. *Если последовательность $\{a_n\}$ является монотонной и ограниченной, то последовательность, продолженная по непрерывности, также является монотонной и ограниченной.*

• Доказательство. Пусть имеется монотонная последовательность порядкового типа 1:

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_n \le \ldots \le M. \tag{12}$$

Тогда для любого фиксированного m имеем $a_m \le \operatorname*{Lim}_n a_n$, так как при $n > m$ $a_n \ge a_m$.

Пусть

$$B = \operatorname{Lim} b_n = a_{\omega+1}, \ A = \operatorname*{Lim}_n a_n = a_\omega.$$

Тогда $B \ge A$, так как $b_n = a_{n+1} \ge a_n$.

Аналогично показывается, что $a_\mu \ge a_\upsilon$ при любых $\mu > \upsilon$.

Теперь об ограниченности.

Из ограниченности последовательности $\{a_n\}$ вытекает ограниченность любой ее подпоследовательности. Значит, каждое из приближений числа a_υ ограничено. Поэтому $a_\upsilon \le$ M. Следовательно, цепочку неравенств (12) можно продолжать таким образом:

$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le \ldots \le a_\omega \le \ldots \le a_\upsilon \le \ldots \le M$. Что и требовалось доказать. ■

Теорема 4.2. *Если $[a_n,\, b_n]$ есть последовательность стягивающихся отрезков, то продолженные последовательности $\{a_\upsilon\}$, $\{b_\upsilon\}$ обладают следующим свойством: для любого актуально бесконечно большого* *«натурального» числа $\Gamma > 0$ всегда найдется такой «натуральный» номер Λ, что при любом $\upsilon > \Lambda$ будет иметь место неравенство*

$$b_\upsilon - a_\upsilon < \frac{1}{\Gamma}. \tag{13}$$

• Доказательство.

Пусть $\Gamma = \operatorname*{Lim}_k m_k$. Здесь

$$m_1,\ m_2, \ldots m_k \ldots$$

— заданная неограниченная последовательность конечных натуральных чисел. Последовательность отрезков $[a_n, b_n]$ является стягивающейся (n — конечные номера). Это означает, что для любого рационального числа $\varepsilon_k = \dfrac{1}{m_k}$ найдется номер M_k такой, что для любого $n > M_k$ будет иметь место условие

$$C_n = b_n - a_n < \frac{1}{m_k}.$$

Возьмем теперь последовательность номеров

$$M_1,\ M_2, \ldots M_k \ldots$$

и образуем элементарное число

$$\Lambda' = \operatorname*{Lim}_k M_k.$$

Число Λ', вообще говоря, может и не попасть в ряд «натуральных» чисел. Если остановиться на версии неограниченного «натурального» ряда, то можно утверждать, что среди «натуральных» чисел заведомо найдется число Λ большее, чем Λ'. В выборе номеров $M_1, \ldots M_k \ldots$ всегда есть произвол. Именно, вместо любого номера M_k всегда можно взять другой номер, больший, чем M_k. Поэтому от числа Λ' мы всегда можем перейти к числу Λ, которое будет заведомо «натуральным». Таким образом, по заданному числу $\dfrac{1}{\Gamma} > 0$ мы построили «натуральное» число Λ, которое гарантирует выполнение неравенства (13) при любых $\upsilon > \Lambda$.

Данная теорема будет верна и в случае, если мы располагаем только ограниченной версией продолженного натурального ряда:

$$1,\ 2,\ 3 \ldots n, \ldots \omega, \ldots \omega^{\omega}, \ldots \nu \ldots < L^*. \tag{14}$$

Здесь, как и прежде, L^* — верхняя граница ряда. Фигурально выражаясь, можно сказать, что граница L^* от самого ряда отстоит довольно далеко. По крайней мере, для любого члена ряда ν число L^* / ν также будет верхней границей ряда.

Вместо последовательности стягивающихся отрезков достаточно рассмотреть последовательность их длин:

$$C_1,\ C_2,\ C_3 \ldots C_n, \ldots C_\omega, \ldots C_\nu, \ldots\ . \tag{15}$$

Здесь $C_1, \ldots C_n \ldots$ — последовательность рациональных чисел, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = 0$ в смысле классического анализа. Любой член последовательности (15) с бесконечно большим номером получен непрерывным продолжением C_n. Например,

$$C_\omega = \mathop{\mathrm{Lim}}_n C_n,\ \ C_{\omega+1} = \mathop{\mathrm{Lim}}_n C_{n+1}.$$

$$C_\nu = \mathop{\mathrm{Lim}}_n C_{\nu(n)},\quad \text{где} \quad \nu = \mathop{\mathrm{Lim}}_n \nu(n).$$

Индексы в ряде (15) взяты из ограниченного натурального ряда (14). Пусть теперь $\Gamma < L^*$ — «натуральное» число из ряда (14). Требуется показать, что найдется «натуральное» Λ такое, что для любого $\nu > \Lambda$ будет иметь место следующее неравенство: $|C_\nu| < 1/\Gamma$. Главным является то обстоятельство, что число Λ должно быть «не очень большим». Точнее, Λ должно принадлежать ограниченному ряду (14) и, значит, $\Lambda < L^*,\ L^*/2, \ldots L^*/\mu, \ldots$, где μ — любое число из (14). По теореме 4.1 последовательность (15) является монотонно убывающей и ограниченной снизу числом 0.

Выберем из исходной последовательности ее подпоследовательность (отбросив остальные члены и сделав перенумерацию) так, чтобы имели место неравенства

$$C_1 < \frac{1}{10},\ \ C_2 < \frac{1}{10^2}; \ldots C_n < \frac{1}{10^n}, \ldots\ .$$

Зададим теперь некоторое рациональное число $\varepsilon = 1/m$, m — конечное натуральное. Тогда при любом

$$n > M\left(\frac{1}{m}\right) = [\lg m] + 1 \tag{16}$$

будет иметь $C_n < 1/m$. Правую часть (16) можно заменить на заведомо большее значение m:

$$n > M\left(\frac{1}{m}\right) = m. \tag{17}$$

Берем теперь произвольное число $\Gamma = \underset{k}{\mathrm{Lim}}\, m_k$ из ограниченного ряда (14). Полагаем $\Lambda = \Gamma$. Тогда для любого $\nu > \Lambda$ имеем

$$C_\nu < \frac{1}{\Gamma}.$$

Действительно, необходимо показать, что

$$C_\nu = \underset{k}{\mathrm{Lim}}\, C(\nu(k)) < \underset{k}{\mathrm{Lim}} \frac{1}{m_k}, \text{ или } C(\nu(k)) < \frac{1}{m_k}$$

при $\nu(k) > m_k$. Последнее следует из (17). Таким образом, если Γ взято из ограниченного ряда, то и Λ находится также из ограниченного ряда ($\Lambda = \Gamma$). Что и требовалось доказать. ■

Теперь все готово для того, чтобы ввести понятие ядра вещественного числа.

Определение 4.3. *Если вещественное число α задается последовательностью стягивающихся отрезков $[a_n, b_n]$, то ядром вещественного числа α будем называть идеальный объект α^*, о котором по определению известно, что*

$$a_\nu \le \alpha^* \le b_\nu, \tag{18}$$

где a_ν, b_ν — последовательности, полученные непрерывным продолжением a_n, b_n на любые бесконечно большие натуральные значения ν.

Легко заметить, что запись (18) означает, что

$$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_\omega \le \ldots a_\nu \le \ldots \le \alpha^* \le \ldots \le b_\nu \le \ldots \le b_\omega \le \ldots \le b_2 \le b_1. \tag{19}$$

Будем считать, что объект, определяемый неравенствами (19), является единственным. Значения $a_1, \ldots a_\omega \ldots$ и $b_1, \ldots b_\omega \ldots$ естественно назвать приближенными α^* (снизу и сверху). Все операции между рациональными числами и ядрами вещественных чисел, а также между двумя ядрами введем через их приближения. Например, если β^* — ядро числа $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} d_n$ и

$$c_1 \le \ldots \le c_\omega \ldots \le c_\nu \le \ldots \le \beta^* \le \ldots \le d_\nu \le \ldots \le d_\omega \le \ldots \le d_1,$$

то и под суммой $\alpha^* + \beta^*$ будем понимать объект, о котором известно, что

$$a_1 + c_1 \le \ldots \le a_\nu + c_\nu \le \ldots \le \alpha^* + \beta^* \le \ldots \le b_\nu + d_\nu \le \ldots \le b_1 + d_1. \tag{20}$$

Аналогично определим и другие операции. Здесь прослеживается полная аналогия с теорией вещественных чисел. Различие только в последовательностях приближений: там были последовательности рациональных чисел порядкового типа 1, здесь — последовательности элементарных чисел порядкового типа 2. Изложенное дает основание для того, чтобы объекты вида α^* (то есть ядра вещественных чисел) также называть числами.

Теперь утверждение о единственности объекта, определяемого неравенствами (18), можно сформулировать таким образом:

Вторая аксиома разрешения. Если относительно двух объектов α^* и β^* известно, что

$$|\alpha^* - \beta^*| < \frac{1}{\Gamma} \tag{21}$$

для любого натурального бесконечно большого числа Γ, то объекты α^* и β^* между собой совпадают: $\alpha^* = \beta^*$.

Данная аксиома утверждает, что степени локализации числа (19) достаточно для его однозначной идентификации. Точнее было бы сказать наоборот: то, что наблюдается при степени разрешения (19), мы и будем называть единственным идеальным объектом α^*.

Вернемся теперь к исходной задаче построения ядра иррационального числа. Покажем, что конструкция (19) ее вполне решает. Объект (19) характеризуется последовательностями своих приближений. Для каждого из приближений имеет смысл операция форсирования. Естественно принять следующее

Определение 4.4. *Если объект α^* удовлетворяет неравенствам*

$$a_1 \le \ldots \le a_\nu \le \ldots \le \alpha^* \le \ldots \le b_\nu \le \ldots \le b_1,$$

то под $F\alpha^*$ будем понимать объект, удовлетворяющий неравенствам

$$Fa_1 \le \ldots \le Fa_\nu \le \ldots \le F\alpha^* \le \ldots \le Fb_\nu \le \ldots \le Fb_1,$$

где F — оператор форсирования.

Из монотонности последовательностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ следует корректность определения (операция форсирования не меняет знаки неравенств). Кроме того, имеем

$$|F\alpha^* - \alpha^*| < \frac{1}{\Gamma},$$

где Γ — это любое «натуральное» число. В соответствии со Второй аксиомой разрешения отсюда следует, что $F\alpha^* = \alpha^*$. (Индекс f в обозначении оператора опущен.)

Таким образом, мы добились поставленной цели и нашли объект, форсирование которого не приводит к его изменению. В этом смысле мы можем действительно считать, что если каждому элементарному числу соответствует определенная скорость сходимости, то объекту α^* будет соответствовать предельно большая скорость сходимости. Иными словами, ядру вещественного числа соответствует такая скорость сходимости, которую операцией форсирования увеличить уже невозможно.

Ореолы и ядра вещественных рациональных чисел. Пусть a_n, b_n — монотонно возрастающая и убывающая последовательности, сходящиеся к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0_{\text{вещ}}.$$

Продолжим их по непрерывности и обозначим через 0^* — объект, локализуемый с помощью неравенств (19). Данный объект будем считать ядром вещественного числа $0_{\text{вещ}}$. Аналогично определим и ядра других рациональных чисел. Ясно, что ядра и абсолютные ядра вещественных рациональных чисел — это различные объекты. Их различие того же рода, как и различие чисел $\left(\frac{1}{3}\right)_{\text{абс}}$ и $\left(\frac{1}{3}\right)_{\text{вещ}}$.

3. Ореолы и ядра несобственных вещественных чисел $+\infty$ и $-\infty$

По определению число $+\infty_{\text{вещ}}$ — это класс эквивалентности неограниченных положительных последовательностей абсолютных рациональных чисел. Причем эквивалентность здесь понимается так: любые две положительные и неограниченные последовательности эквивалентны между собой. Объединим теперь последовательности, которые отличаются друг от друга только конечным числом членов. Данные объединения представляют собой бесконечно большие элементарные числа. Именно из этих чисел и состоит объект, обозначаемый как $+\infty_{\text{вещ}}$. Иными словами, $+\infty_{\text{вещ}}$ превращается теперь в совокупность положительных бесконечно больших чисел типа

$$\omega - 1, \omega, \ldots \omega^2 + 10j\omega; \ldots \omega^\omega + j\omega^2, \ldots$$

и т.д. Среди этих чисел есть как «натуральные» числа, так и числа, которые нельзя упорядочить относительно «натуральных». Будем считать, что данные числа составляют ореол некоторого ядра.

Как теперь определить само ядро? Будем действовать так же, как и с иррациональными числами: применим многократно операторы форсирования к некоторому элементарному числу из ореола $+\infty_{\text{вещ}}$. Например, к числу ω. В результате придем к цепочке «натуральных» чисел

$$\omega < \omega + 1 < \ldots < \omega^2 < \ldots < \omega^\omega < \ldots.$$

Интуитивно ясно, что чем правее число находится в этой цепочке, тем оно ближе к ядру. Поэтому определим ядро таким образом.

Определение 4.5. *Ядром числа* $+\infty_{\text{вещ}}$ *будем называть идеальный объект* $+\infty^*$, *о котором известно, что он больше любого бесконечно большого натурального числа* Λ, *т.е. примем по определению, что*

$$\Lambda < \infty^*. \tag{22}$$

Ореол и ядро числа $(-\infty)_{\text{вещ}}$ определяются аналогично.

4. Ядра вещественных чисел как числа, образующие поле, изоморфное полю вещественных чисел

Нетрудно заметить, что определение ядра вещественного числа аналогично определению самого вещественного числа, если опираться на концепцию стягивающихся отрезков. Отличие состоит только в том, что теперь мы должны пользоваться последовательностями, продолженными по непрерывности. Поэтому все операции над ядрами мы ввели, пользуясь этой аналогией.

Пусть α^* и β^* — ядра двух вещественных чисел α и β. Под суммой $(\alpha^* + \beta^*)$ понимается объект, для которого выполняются неравенства (20).

Возьмем теперь вещественное число $(\alpha + \beta)$ и определим его ядро $(\alpha + \beta)^*$. Из свойств элементарных чисел следует: если a_ν — непрерывное продолжение последовательности $\{a_n\}$, а b_ν — последовательности $\{b_n\}$, то число $(a_\nu + b_\nu)$ будет непрерывным продолжением последовательности $\{a_n + b_n\}$. Поэтому для ядра $(\alpha + \beta)$ имеем

$$a_\nu + c_\nu \le (\alpha + \beta)^* \le b_\nu + d_\nu. \tag{23}$$

Сравнивая (20), (23), приходим к заключению, что

$$(\alpha + \beta)^* = \alpha^* + \beta^*.$$

Аналогично

$$(\alpha - \beta)^* = \alpha^* - \beta^*, \quad (\alpha \cdot \beta)^* = \alpha^* \cdot \beta^*, \quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^* = \frac{\alpha^*}{\beta^*}.$$

В последнем случае $\beta \ne 0_{\text{вещ}}$.

Поставим в соответствие каждому вещественному числу его ядро. Тогда имеет место следующая

Теорема 4.3. *Совокупность ядер вещественных чисел образует поле, изоморфное полю вещественных чисел.*

Глава 2

Неархимедова числовая система

§ 5. Область существенных чисел

1. Определение существенных чисел

Исследование строения вещественного числа показало, что оно представляет собой ядро, окруженное ореолом. Ореол — это скопление элементарных чисел, а вот ядро — это число, которое принципиально отличается как от элементарных чисел, так и от абсолютных рациональных чисел, заданных изначально. Ядро вещественного числа — число новой природы. Именно подобные числа необходимы будут для дальнейших построений. Конечно, одних только ядер вещественных чисел недостаточно для построения неархимедова анализа. Требуется описать всю числовую область новых чисел, в которую ядра вещественных чисел вошли бы как часть, подобно каркасу некоторой конструкции. Для этого воспользуемся следующими обстоятельствами.

Пусть вещественное число определяется как идеальный объект, который локализуется с помощью системы стягивающихся отрезков. Согласно Первой аксиоме разрешения, стягивающиеся отрезки определяют вещественное число единственным образом. Обратное неверно. Существуют другие последовательности отрезков, которые приводят к тому же самому вещественному числу. Поэтому в качестве альтернативного варианта само вещественное число можно определять через класс последовательностей координат данных отрезков.

Мы определяли ядро вещественного числа через последовательности стягивающихся отрезков, продолженные по непрерывности. Новая идея состоит в том, чтобы, во-первых, определять ядро альтернативным образом — через класс последовательностей, которым отвечают координаты стягивающихся отрезков, продолженные по непрерывности и, во-вторых, снять условие непрерывности и построить числовую область, которая была бы шире, чем область, изоморфная области вещественных чисел.

Определение 5.1. *Последовательность элементарных чисел*

$$A_1,\, A_2 \ldots A_n, \ldots A_\omega, \ldots A_\nu \ldots$$

называется фундаментальной, если для любого числа Γ, *принадлежащего продолженному натуральному ряду, найдется такое число* Λ *из того* *же натурального ряда, что для любых* μ, $\nu > \Lambda$ *будут иметь место неравенства*

$$|A_\mu - A_\nu| < \gamma, \quad \gamma = 1/\Gamma.$$

Определение 5.2. *Последовательности элементарных чисел*

$$A_1, A_2 \ldots A_n, \ldots A_\omega, \ldots A_\nu \ldots$$

$$B_1, B_2 \ldots B_n, \ldots B_\omega, \ldots B_\nu \ldots$$

будем считать эквивалентными, если для любого «натурального» числа $\Gamma > 0$ *найдется такой номер* Λ, *что для любого* $\nu > \Lambda$ *будет иметь место следующее условие:*

$$|A_\nu - B_\nu| < \gamma, \quad \gamma = 1/\Gamma.$$

Теорема 5.1. *Если последовательность порядкового типа 2 является фундаментальной, то и последовательность, эквивалентная ей, также будет фундаментальной.*

Определение 5.3. *Класс эквивалентности фундаментальных последовательностей порядкового типа 2 будем называть существенным числом. Указанный класс эквивалентности, если он содержит последовательность* $\{A_\nu\}$, *обозначим как*

$$\sigma = \operatorname*{limit}_{\nu} A_\nu. \tag{1}$$

Определение 5.4. *Члены последовательности по отношению к существенному числу* σ *будем называть приближениями* σ, *а число* σ *по отношению к последовательности* $\{A_\nu\}$ *— пределом последовательности.*

В случае необходимости будем использовать различные уточнения названия: например, о σ будем говорить, как о пределе в смысле limit или как о пределе последовательности порядкового типа 2 и т.д.

Объекты (1) названы существенными числами. Для оправдания такого названия необходимо показать, что между данными объектами можно ввести арифметические операции и отношения порядка. Кроме того, мы должны рассмотреть вопрос о том, как новые объекты взаимодействуют с числами, которые мы уже ввели, т.е. с абсолютными рациональными и элементарными числами, а также с ядрами вещественных чисел.

Решение данных вопросов никаких трудностей не вызывает. Его можно изложить в следующем порядке.

Определение 5.5. *Существенным нулем* $0_{\text{сущ}}$ *будем называть класс последовательностей* $\{a_\nu\}$ *порядкового типа 2 таких, что для любого «натурального» числа* Γ *найдется такой номер* Λ *из натурального ряда типа 2, что для любых* $\nu > \Lambda$ *будет иметь место условие*

$$|a_\nu| < \gamma, \quad \gamma = 1/\Gamma.$$

Более коротко это же определение можно изложить следующим образом: существенным нулем называется существенное число, равное

$$0_{\text{сущ}} = \underset{\nu}{\text{limit}}\, 0_{\text{эл}} = \underset{\nu}{\text{limit}}\, \underset{n}{\text{Lim}}\, 0_{\text{абс}}.$$

Определение 5.6. *Под суммой, разностью, произведением и частным двух последовательностей* $\{a_\nu\}, \{b_\nu\}$ *порядкового типа 2 понимаются последовательности*

$$\{a_\nu + b_\nu\}, \ \{a_\nu - b_\nu\}, \ \{a_\nu \cdot b_\nu\}, \ \left\{\frac{a_\nu}{b_\nu}\right\}.$$

В последнем случае предполагаем, что $b_\nu \neq 0.$

Теорема 5.2. *Сумма, разность и произведение двух фундаментальных последовательностей типа 2 также будет фундаментальной последовательностью типа 2. Частное двух фундаментальных последовательностей* $\{a_\nu\}, \{b_\nu\}$ *будет последовательностью фундаментальной, если последовательность* $\{b_\nu\}$ *не входит в состав существенного нуля, т.е.* $\underset{\nu}{\text{limit}}\, b_\nu \neq 0_{\text{сущ}}.$

• Доказательство. Фундаментальная последовательность ограничена. Пусть для любого ν

$$|a_\nu| < M, \ |b_\nu| < M.$$

Зададим сколь угодно малое бесконечно малое число $\gamma > 0$, $\gamma = 1/\Gamma$, Γ — «натуральное». Тогда существует такое Λ, что при любых $\nu, \mu > \Lambda$

$$|a_\nu - a_\mu| < \frac{\gamma}{2M}, \quad |b_\nu - b_\mu| < \frac{\gamma}{2M}.$$

Отсюда

$$|a_\nu b_\nu - a_\mu b_\mu| < \gamma.$$

Последнее означает фундаментальность произведения последовательностей. Аналогичным образом, используя схему [101], можно получить доказательства и остальных случаев. ■

Из данной теоремы следует корректность следующего определения.

Определение 5.7. *Если*

$$\alpha = \operatorname*{limit}_{v} a_v, \quad \beta = \operatorname*{limit}_{v} b_v$$

— два существенных числа, то под их суммой, разностью, произведением и частным будем понимать следующие существенные числа:

$$\alpha \pm \beta = \operatorname*{limit}_{v} (a_v \pm b_v),$$

$$\alpha \cdot \beta = \operatorname*{limit}_{v} (a_v \cdot b_v),$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \operatorname*{limit}_{v} \frac{a_v}{b_v}.$$

В последнем равенстве предполагается, что $b_v \neq 0$.

Определение 5.8. *Примем, что числа*

$$\alpha = \operatorname*{limit}_{v} a_v, \quad \beta = \operatorname*{limit}_{v} b_v$$

сравнимы между собой, если существует такой номер Λ, *что для любых* $v > \Lambda$ *приближения* a_v *и* b_v *между собой сравнимы и знак неравенства с увеличением* v *не меняется. В противном случае существенные числа будем считать несравнимыми между собой.*

Например, $\alpha \leq \beta$, если $a_v \leq b_v$ при $v > \Lambda$. Как обычно, считаем, что данная запись эквивалентна записи $\beta \geq \alpha$, кроме того, $\alpha < \beta$, если $\alpha \leq \beta$ и $\alpha \neq \beta$. В частности, число α считаем положительным, если $\alpha \neq 0$ и начиная с некоторого Λ приближения α положительны, т.е. $\alpha_v > 0$ при $v > \Lambda$. Имеет место

Теорема 5.3. *Если* $\alpha > 0$, *то начиная с некоторого номера* $v = \Lambda$ *выполняются условия* $\alpha_v > 0$. Доказательство следует из определений.

Обратное неверно. Например, $\operatorname{limit} 1/v = 0$, хотя для любых $v \geq 1$ $1/v > 0$.

Рассмотрим теперь арифметические операции между существенными числами и абсолютными числами, которые заданы изначально.

Примем по определению, что

$$\alpha + r_{\text{абс}} = \operatorname*{limit}_{v}(a_v + \operatorname{Lim} r_{\text{абс}}).$$

Образуем теперь стационарную последовательность порядкового типа 2, каждый член которой равен $\operatorname*{Lim}_{n} r_{\text{абс}}$. Класс эквивалентности, в который входит данная последовательность, обозначим как $r_{\text{сущ}}$:

$$r_{\text{сущ}} = \operatorname*{limit}_{v} \operatorname*{Lim}_{n} r_{\text{абс}}.$$

Очевидно, что

$$r_{\text{абс}} + 0_{\text{сущ}} = r_{\text{сущ}}.$$

Из данного равенства, конечно, не следует, что

$$r_{\text{абс}} = r_{\text{сущ}} - 0_{\text{сущ}},$$

а следует только равенство

$$r_{\text{сущ}} - 0_{\text{сущ}} = r_{\text{сущ}}.$$

Например, $1_{\text{абс}}$ и $1_{\text{сущ}}$ — это различные числа: $1_{\text{абс}}$ — изначально заданное натуральное число, $1_{\text{сущ}}$ — класс эквивалентности (1), в который входит стационарная последовательность $\operatorname{Lim} 1_{\text{абс}}$. Здесь мы имеем такую же ситуацию, что и в области вещественных чисел. Ее можно представить таким образом. Если абсолютное, изначально заданное число попадает в мир существенных чисел и начинает с ним взаимодействовать, то оно как бы окрашивается от этого взаимодействия и начинает выглядеть уже как любое другое существенное число. Причем никакими обратными операциями «снять» приобретенную «окраску» — «окраску» существенности — уже невозможно. Поэтому далее, где это возможно, числа $r_{\text{абс}}$ и $r_{\text{сущ}}$ мы различать не будем.

Обратимся теперь к ядрам вещественных чисел. Имеет место

Теорема 5.4. *Ядра вещественных чисел принадлежат к области существенных чисел.*

• Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем некоторое вещественное число α и последовательность его рациональных приближений r_n: $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} r_n$. Последовательность r_n является последовательностью Коши. Это значит, что для любого конечного натурального числа M найдется другое конечное натуральное число N, что для любых номеров $p, g > \mathrm{N}$ будут иметь место условия

$$|r_p - r_g| < 1/\mathrm{M}. \tag{2}$$

Продолжим счетную последовательность r_n по непрерывности до несчетной последовательности

$$r_1,\, r_2 \ldots r_n, \ldots r(\omega), \ldots r(\omega^2) \ldots r(v) \ldots r(\mu) \ldots .$$

Здесь

$$r(\omega) = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} r(n), \ldots r(v) = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} r(v(n)) \ldots . \tag{3}$$

Из условий (2), (3) следует фундаментальность несчетной последовательности. Необходимо отметить, что данный факт не зависит от того, используем мы ограниченную или неограниченную версию «натурального» ряда. Доказательство фактически такое же, как и доказательство теоремы 4.2. Таким образом, продолженная последовательность является фундаментальной и, следовательно, можно ввести существенное число

$$\sigma = \underset{v}{\mathrm{limit}}\, r(v).$$

Данное число совпадает с ядром вещественного числа $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} r_n$. ■

Операции между ядрами вещественных чисел и существенными числами в особых определениях не нуждаются и делаются по общим правилам.

Итак, ядра вещественных чисел выделяются из области существенных чисел одним признаком — условиями непрерывности (3). Для ядра вещественного числа требуется, чтобы несчетная последовательность его приближений была не просто фундаментальной, но такой, чтобы ее можно было получить непрерывным продолжением обычной (счетной) последовательности Коши.

Для произвольного существенного числа требуется только фундаментальность несчетной последовательности без принятия каких-либо условий непрерывности. Это обстоятельство чрезвычайно расширяет числовую область. В нее через стационарные последовательности входят все элементарные числа $A_{\text{эл}} = \mathrm{Lim}\, r_n$:

$$A_{\text{сущ}} = \underset{v}{\mathrm{limit}}\, A_{\text{эл}} = \underset{v}{\mathrm{limit}}\, \underset{n}{\mathrm{Lim}}\, r_n.$$

Пространство элементарных чисел можно представить себе как каркас пространства существенных чисел. Пространство элементарных чисел не является полным. Пространство существенных чисел представляет собой пополнение пространства элементарных чисел и является уже полным. Любая несчетная фундаментальная последовательность элементарных или существенных чисел будет в этом пространстве сходящейся. (Доказательство относительно последовательностей существенных чисел будет дано ниже.) Таким образом, в целом пространство существенных чисел является непрерывным и бесконечномерным.

2. Понятие бесконечности в области существенных чисел

В области вещественных чисел определено понятие бесконечности. Потребность во введении аналогичного понятия есть и в области существенных чисел. Здесь, правда, возникает терминологическая трудность, связанная с тем обстоятельством, что в этой области есть актуальные бесконечно большие числа. Поэтому мы приведем одну характеристику указанных чисел, которая позволяет соотнести их с конечными вещественными числами. Введем следующее

Определение 5.9. *Существенное число σ будем называть ограниченным, если найдется такое число Λ, принадлежащее продолженному натуральному ряду, что будет иметь место неравенство $|\sigma| < \Lambda$.*

Ограниченные числа в существенной области аналогичны конечным числам в вещественной области. Таким образом, далее рассматривается задача описания объекта, который по отношению к ограниченным числам существенной области играл бы ту же роль, что и объект «бесконечность» $\infty_{\text{вещ}}$ по отношению к конечным числам вещественной области.

Определение 5.10. *Класс последовательностей $\{1/a_\nu\}$ порядкового типа 2 таких, что $\underset{\nu}{\operatorname{limit}}\, a_\nu = 0_{\text{сущ}}$ и $1/a_\nu$ существуют, будем обозначать как $\infty_{\text{сущ}}$ и называть бесконечностью в области существенных чисел.*

Данный класс будем иногда обозначать как $1/0_{\text{сущ}}$ и относить к области существенных чисел. Если последнее обстоятельство необходимо подчеркнуть особо, то будем говорить о расширенной области существенных чисел.

Определение 5.11. *Факт принадлежности некоторой последовательности $\{b_\nu\}$ к классу $\infty_{\text{сущ}}$ будем отмечать следующим образом:*

$$\underset{\nu}{\operatorname{limit}}\, b_\nu = \infty_{\text{сущ}}, \text{ или } b_\nu \to \infty_{\text{сущ}}.$$

О самой последовательности $\{b_\nu\}$ будем говорить как о пути, ведущем к $\infty_{\text{сущ}}$. Например,

$$\underset{\nu}{\operatorname{limit}}\, \nu = \infty_{\text{сущ}},\ \underset{\nu}{\operatorname{limit}}(-\nu) = \infty_{\text{сущ}},\ \underset{\nu}{\operatorname{limit}}(-1)^{\nu} \cdot \nu^3 = \infty_{\text{сущ}}.$$

Определение 5.12. *Последовательность $\{a_\nu\}$ порядкового типа 2 называется положительной, если начиная с некоторого индекса Λ для любых $\nu > \Lambda$ члены последовательности сравнимы с нулем и $a_\nu > 0$.*

Последовательность $\{a_\nu\}$ называется отрицательной, если последовательность $\{-a_\nu\}$ положительна.

Пусть Λ — произвольное число из продолженного натурального ряда. Последовательность называется знакопеременной, если начиная с некоторого индекса ее члены сравнимы с нулем и для любого Λ существуют хотя бы два индекса μ и γ такие, что $a_\mu > 0$ и $a_\gamma < 0$ при $\mu, \gamma > \Lambda$.

Последовательность называется несравнимой с нулем, если для любого Λ найдется хотя бы одно $\nu > \Lambda$ такое, что число a_ν будет несравнимо с нулем. В соответствии с указанными признаками разобьем класс последовательностей $\infty_{\text{сущ}}$ на четыре подкласса, которые обозначим соответственно через $+\infty_{\text{сущ}}$, $-\infty_{\text{сущ}}$, $\infty^{\pm}_{\text{сущ}}$, $\infty^{0}_{\text{сущ}}$. Если $a_v \to \infty_{\text{сущ}}$ и, кроме того, известен характер последовательности $\{a_v\}$, то вместо $\infty_{\text{сущ}}$ будем указывать обозначение соответствующего подкласса. Например,

$$\begin{aligned} &\operatorname*{limit}_v v = +\infty_{\text{сущ}}, \quad \operatorname*{limit}_v (-v) = -\infty_{\text{сущ}}, \\ &\operatorname*{limit}_v (-1)^v \cdot v^3 = \infty^{\pm}_{\text{сущ}}; \quad \operatorname*{limit}_v j \cdot v^2 = \infty^{0}_{\text{сущ}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Объект $+\infty_{\text{сущ}}$ совпадает с объектом $+\infty^*$, который в п. 3 § 4 был введен как идеальный.

Таким образом, если бесконечность в области вещественных чисел складывается из трех составляющих $+\infty$, $-\infty$ и $\pm\infty$, то здесь имеем четыре составляющие $+\infty_{\text{сущ}}$, $-\infty_{\text{сущ}}$, $\pm\infty_{\text{сущ}}$ и $\infty^{0}_{\text{сущ}}$. При этом подкласс $\infty^{0}_{\text{сущ}}$ чрезвычайно широкий. Последнее связано с тем обстоятельством, что область вещественных чисел является линейно упорядоченной (и, значит, сводится к вещественной прямой), в то время как область существенных чисел упорядочена только частично и представляет собой бесконечномерное образование.

Первое равенство (4) позволяет ответить на вопрос: куда, собственно, стремится переменная v в записи предельного перехода $\operatorname*{limit}_v$. Ответ такой: переменная v стремится к плюс бесконечности $+\infty_{\text{сущ}}$. Поэтому исходное обозначение предела можно уточнить таким образом:

$$\operatorname*{limit}_v b_v = \operatorname*{limit}_{v \to +\infty_{\text{сущ}}} b_v.$$

Индекс «сущ» и знак «+» будем опускать.

3. Делители нуля и числа, обратные делителям нуля

Выше мы рассмотрели область элементарных чисел вида $A = \operatorname*{Lim}_n a_n$, где $\{a_n\}$ — произвольная последовательность абсолютных рациональных чисел. Подобно тому, как абсолютные рациональные числа r входят в область вещественных чисел посредством процедуры $r_{\text{вещ}} = \lim\limits_{n\to\infty} r$, так и каждое элементарное число A входит в область существенных чисел посредством процедуры

$$A_{\text{сущ}} = \operatorname*{limit}_v A.$$

Проще говоря, числу $A_{\text{сущ}}$ отвечает класс эквивалентности, который содержит стационарную последовательность $\{A\}$ и множество других последовательностей $\{A_{\nu'}\}$ таких, что

$$\operatorname*{limit}_{\nu}(A - A_{\nu'}) = 0_{\text{сущ}}.$$

Возьмем, например, два элементарных числа

$$\frac{1+j}{2},\ \frac{1-j}{2},$$

где по-прежнему $j = \operatorname*{Lim}_{n}(-1)^{n+1}$. Перейдем к существенным числам

$$\beta_1 = \operatorname*{limit}_{\nu}\frac{1+j}{2},\quad \beta_2 = \operatorname*{limit}_{\nu}\frac{1-j}{2}.$$

Очевидно, что $\beta_1 \cdot \beta_2 = 0_{\text{сущ}}$, т.е. β_1, β_2 — делители нуля. Таким образом, область существенных чисел включает в себя делители нуля.

Можно ли построить числа, обратные делителям нуля? Это можно сделать, взяв за образец способ построения числа $1/0_{\text{сущ}}$. Примем следующее

Определение 5.13. *Класс последовательностей* $\{1/a_\nu\}$ *порядкового типа 2 таких, что*

$$\operatorname*{limit}_{\nu} a_\nu = \beta,$$

где β *— делитель нуля и обратные величины* $1/a_\nu$ *существуют, будем считать числом, обратным делителю нуля* β, *и обозначать как* $1/\beta$:

$$\frac{1}{\beta} = \operatorname*{limit}_{\nu}\frac{1}{a_\nu},\quad a_\nu \neq 0.$$

Например, пусть

$$\beta = \operatorname*{limit}_{\nu}\operatorname*{Lim}_{n}(1, 0, 1, 0, \ldots). \tag{5}$$

Число $\operatorname*{Lim}_{n}(1, 0, 1, 0, \ldots)$ обратного не имеет, поэтому его нельзя использовать в конструкции $1/\beta$. Однако в класс (5) входит последовательность $\frac{1}{\nu} + \operatorname*{Lim}_{\nu}(1, 0, 1, 0, \ldots)$, которая уже имеет обратную. Следовательно, можно записать

$$\frac{1}{\beta} = \operatorname*{limit}_{\nu}\operatorname*{Lim}_{n}\left[\frac{\nu(1)}{1+\nu(1)},\ \nu(2),\ \frac{\nu(3)}{1+\nu(3)},\ \nu(n), \ldots\right],$$

где

$$\nu = \operatorname*{Lim}_{n}\nu(n) = \operatorname*{Lim}_{n}(\nu(1),\ \nu(2), \ldots \nu(n), \ldots).$$

Очевидно, что числа, обратные делителям нуля, являются неограниченными. Тем не менее в состав бесконечности $\infty_{\text{сущ}}$ данные числа не входят. Это суть новые объекты, которые необходимо выделить в отдельную категорию. Можно сказать, что числа данной категории имеют двойственную природу. С одной стороны, они имеют общие черты с ограниченными существенными числами, с другой — общие черты с бесконечностью.

В соответствии с изложенным есть все основания ограниченные существенные числа также разбить на отдельные категории. К первой категории отнесем число $0_{\text{сущ}}$, ко второй — делители нуля, к третьей — остальные ограниченные числа.

В заключение отметим одно обстоятельство. Выше мы использовали один и тот же символ «limit» для обозначения классов последовательностей с различными условиями эквивалентности:

1) сходящихся к ограниченным существенным числам, например

$$\operatorname*{limit}_{\nu\to\infty} \frac{1+\nu}{\nu} = 1_{\text{сущ}};$$

2) образующих бесконечность:

$$\operatorname*{limit}_{\nu\to\infty} \nu^2 = \infty_{\text{сущ}};$$

3) образующих числа, обратные делителям нуля:

$$\operatorname*{limit}_{\nu\to\infty} \frac{1}{a_\nu} = \psi.$$

Из контекста всегда будет ясно, какому именно условию эквивалентности соответствует символ «limit». Аналогичная ситуация с обозначениями имеет место и в классическом анализе, например

$$0_{\text{вещ}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}, \quad e_{\text{вещ}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n + \frac{1}{n^2}\right] \neq$$

$$\neq \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n + n^2\right].$$

Однако

$$\infty_{\text{вещ}} = \lim_{n\to\infty} n = \lim_{n\to\infty}\left(n+\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}(n+n^2).$$

В обоих случаях добавление последовательности $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ результата не меняет. Но добавление последовательности $\{n^2\}$ меняет результат качественно в первом случае, а во втором случае также не меняет. Таким образом, в указанных примерах символ «lim» соответствует разным условиям эквивалентности.

4. Свойства существенных чисел

Перейдем к описанию основных свойств, включая и некоторые свойства, которые уже упоминались. В области ограниченных существенных чисел

1) определены операции сложения и умножения, которые обладают свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности;

2) есть нуль и единица:

$$0_{\text{сущ}} = \underset{v}{\text{limit}}\, 0_{\text{эл}} = \underset{v}{\text{limit}}\, \underset{n}{\text{Lim}}\, 0_{\text{абс}};\;\; 1_{\text{сущ}} = \underset{v}{\text{limit}}\, 1_{\text{эл}} = \underset{v}{\text{limit}}\, \underset{n}{\text{Lim}}\, 1_{\text{абс}};$$

3) каждое существенное число α имеет противоположное число $(-\alpha)$ и обратное число α^{-1}, если $\alpha \neq 0$ и α — не делитель нуля:

$$\alpha + (-\alpha) = 0_{\text{сущ}},\;\; \alpha \cdot \alpha^{-1} = 1_{\text{сущ}}.$$

Таким образом, область существенных чисел образует числовое поле. Далее,

4) любое элементарное число A входит в область существенных чисел через стационарную последовательность как объект $\underset{v}{\text{limit}}\, A$.

Например,

$$j_{\text{сущ}} = \underset{v}{\text{limit}}\, j = \underset{v}{\text{limit}}\, \underset{n}{\text{Lim}} (-1)^{n+1}$$

(индекс будем опускать);

5) в области существенных чисел отсутствуют а) дуальная единица ($J \neq 0$, $J^2 = 0$), б) мнимая единица ($i^2 = -1$); но содержатся: в) двойные единицы и делители нуля; г) числа, сравнимые и несравнимые между собой; д) подобласть, изоморфная полю вещественных чисел (ядра вещественных чисел).

Таким образом, область существенных чисел является частично упорядоченной;

6) в области вещественных чисел имеет место аксиома Архимеда, которая эквивалентна Первой аксиоме разрешения. В области существенных чисел аксиома не действует, поэтому данная область не является архимедовой. Взамен аксиомы Архимеда здесь действует Вторая аксиома разрешения.

Область существенных чисел:

7) содержит актуальные бесконечно большие и бесконечно малые числа;

8) далее будет показано, что область существенных чисел является полной, т.е. каждая несчетная фундаментальная последовательность существенных чисел (порядкового типа 2) является сходящейся. (Сходимость несчетных фундаментальных последовательностей элементарных чисел следует из самого определения существенных чисел.) Таким образом, область существенных чисел можно считать непрерывной (сплошной).

В заключение отметим, что

9) область существенных чисел расширяется за счет введения следующих неограниченных чисел: 1^0) $\infty_{\text{сущ}}$ и его составляющих; число $\infty_{\text{сущ}}$ (бесконечность) строится как число, обратное числу $0_{\text{сущ}}$; 2^0) чисел, которые строятся как числа, обратные делителям нуля.

§ 6. Неархимедова (существенная) прямая

Для построения математического анализа рассмотренной числовой области вполне достаточно. Принципиальное отличие данной области от области вещественных чисел состоит не столько в неархимедовости, сколько в ее размерности. Область вещественных чисел одномерна, т.е. линейно упорядочена, так что можно говорить о вещественной прямой. Область существенных чисел — многомерна. Здесь есть только частичный порядок. Если в эту область добавить мнимую единицу (а рано или поздно это придется сделать), то далее (в § 8) будет показано, что использование многомерной области с делителями нуля является и необходимым условием для построения анализа.

Неархимедов анализ будем строить, используя в качестве образца классический анализ. Поэтому в ряде определений удобнее брать не всю многомерную область существенных чисел, а только ее одномерную подобласть, которую можно назвать неархимедовой (существенной) прямой. Поставим задачу построения числовой прямой, которая пронизывает многомерную область существенных чисел.

В физическом (точнее, арифметическом) пространстве можно построить сколько угодно прямых. Пространство изотропно, поэтому все подобные прямые будут равноправными. В пространстве же существенных чисел это не так. Здесь можно построить сколько угодно прямых (т.е. числовых подобластей с линейным порядком). Но из всех этих прямых есть только одна прямая (ось), которая отличается от всех остальных принципиально. Это ось, которая содержит в себе изначально заданные натуральные числа и эталонное число ω.

Данную прямую будем называть неархимедовой (существенной) прямой или числовой осью. Имея в виду, что ось принадлежит многомерному пространству существенных чисел, будем говорить, что направление оси — это магистральное направление в указанном многомерном пространстве (см. гл. 11).

При построении числовой прямой (числовой подобласти) будем руководствоваться следующими условиями: числовая подобласть

1^0) яляется линейно упорядоченной;

2^0) содержит в себе продолженный натуральный ряд чисел;

3^0) образует числовое поле;

4^0) удовлетворяет условию неразрывности: если в области существенных чисел находится число, которое может быть отнесено к числовой подобласти, удовлетворяющей условиям 1^0–3^0, то данное число в указанную подобласть включается.

Как следствие, рассматриваемое числовое поле удовлетворяет

5^0) условию полноты: если полю принадлежит фундаментальная последовательность типа 2, то ему принадлежит и предел этой последовательности;

6^0) поле содержит в себе подполе, изоморфное полю вещественных чисел и не содержит делителей нуля и, значит, двойных единиц. Кроме того, в рассматриваемой подобласти имеет место аналог аксиомы Архимеда;

7^0) для любых чисел подобласти $0 < \alpha < \beta$ всегда найдется число Λ из продолженного натурального ряда такое, что будет иметь место неравенство $\Lambda \cdot \alpha > \beta$.

Перейдем к построению неархимедовой прямой. Опыт классического анализа показывает, что для построения вещественной прямой достаточно использовать фундаментальные последовательности рациональных чисел, модуль которых равен отношению двух чисел из натурального ряда. Причем данной прямой оказывается достаточно для удовлетворения всех потребностей классического анализа. Казалось бы, что, повторяя эту процедуру для «рациональных» чисел, мы должны прийти к аналогичному результату, т.е. к неархимедовой прямой, которая обеспечит все потребности неархимедова анализа. Однако это не так. Поэтому пополнение «рациональных» чисел мы не будем называть неархимедовой прямой, а примем, что операция пополнения — это только шаг в созидании этой прямой. Итак,

Определение 6.1. *Примем, что совокупность существенных чисел вида*

$$\sigma = \operatorname*{limit}_{v} \rho_v, \tag{1}$$

где ρ_v — фундаментальные последовательности «рациональных» чисел, принадлежит к неархимедовой (существенной) прямой по определению.

Совокупность «рациональных» чисел является линейно упорядоченной. Поэтому линейно упорядоченным будет и ее пополнение (1). Легко доказать, что определение не противоречит и остальным условиям, которые приняты для неархимедовой прямой.

Необходимо подчеркнуть, что символ «limit» объединяет класс последовательностей, близких друг к другу в смысле определения 5.3. Отсюда не следует, что каждая из последовательностей, принадлежащая данному классу, должна быть обязательно последовательностью «рациональных чисел». Определение 6.1 требует только, чтобы хотя одна из последовательностей этого класса была последовательностью «рациональных» чисел.

Далее возникает следующий вопрос. В области существенных чисел есть подобласть, представляющая собой совокупность ядер вещественных чисел. Данная подобласть изоморфна области вещественных чисел и, значит, обладает всеми их свойствами. В частности, она является линейно упорядоченной. Необходимо ответить на два вопроса: 1) содержит ли совокупность (1) ядра вещественных чисел? 2) в случае отрицательного ответа, необходимо понять, можно ли ядра вещественных чисел упорядочить относительно чисел вида (1). Ответ можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 6.1. *Числовая область (1) содержит ядра только рациональных вещественных чисел и не содержит ядер иррациональных чисел. Ядра вещественных иррациональных чисел могут быть упорядочены относительно чисел вида (1) и, следовательно, могут быть включены в состав неархимедовой прямой.*

• Доказательство. Далее потребуется определение стандартной части существенного числа.

Определение 6.2. *Пусть σ — некоторое конечное существенное число. Если найдется рациональное или иррациональное вещественное число α с ядром α^* такое, что разность $|\sigma - \alpha^*|$ будет числом бесконечно малым, включая нуль, то α^* будем считать стандартной частью σ:*

$$\alpha^* = st\sigma. \tag{2}$$

По определению стандартной частью бесконечно больших чисел будем считать объект $\infty_{\text{сущ}}$.

Нетрудно указать правило для вычисления стандартной части любого «рационального» числа ρ:

$$\rho = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} \frac{P(n)}{Q(n)};$$

здесь P и Q — «целые» числа, т.е. разности «натуральных» чисел, $Q \neq 0$. Например,

$$\rho = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} \frac{3n^n - 2n^3}{7n^n - 8n^{100}}.$$

Подсчитаем следующий предел (в обычном смысле классического анализа):

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}.$$

Многочлены содержат конечное число слагаемых. Порядок их роста всегда определяется старшим членом. Значит, указанный предел всегда существует и равен либо конечному числу, либо $\pm\infty$. Коэффициенты в многочленах P и Q — целые числа. Тогда, если α — конечное число, то α будет рациональным вещественным числом. Обозначим его ядро через α^*. Из определений следует, что $\alpha^* = st\rho$.

Таким образом,

$$st \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} \frac{P(n)}{Q(n)} = \alpha^*, \quad \text{где} \quad \alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} Q.$$

Следовательно, стандартная часть «рационального» числа, если она конечна, будет обязательно числом рациональным. (Ниже достаточно ограничиться только конечным случаем.)

Возьмем несчетные последовательности «рациональных» чисел и их стандартных частей:

$$\rho_1,\ \rho_2, \ldots \rho_\omega, \ldots \rho_v, \ldots, \tag{3}$$

$$st\rho_1,\ st\rho_2, \ldots st\rho_\omega, \ldots st\rho_v, \ldots. \tag{4}$$

Последовательность (3) — фундаментальна. Значит, начиная с некоторого номера разность между соседними членами в (3) становится меньше, чем $E = 1/\omega$. Отсюда сразу следует, что последовательность рациональных (без кавычек) чисел (4) начиная с некоторого номера становится стационарной. Данное рациональное число и будет стандартной частью предела (3). Таким образом, стандартные части чисел пополнения (1) — это всегда числа рациональные. Иными словами, ядра иррациональных чисел в область (1) не входят. Неформально можно сказать так: пополнение (1) уплотняет область «рациональных» чисел, но это уплотнение происходит в пределах ореолов только рациональных вещественных чисел. Таким образом, первая часть теоремы доказана.

Доказательство второй части проще всего получить, если воспользоваться концепцией Дедекинда [106–109].

Пусть α — некоторое иррациональное вещественное число, т.е.

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} r(n) = \lim_{n\to\infty} r'(n), \tag{5}$$

где $r(n)$, $r'(n)$ — абсолютные рациональные числа: $r(n)$ — монотонно возрастающая, $r'(n)$ — монотонно убывающая последовательности. Разобьем пополнение (1) на два класса. Число σ будем относить к верхнему классу, если $st\sigma > \alpha^*$, и к нижнему классу, если $st\sigma < \alpha^*$. Так как $st\sigma$ — рационально, то α^* есть сечение в области (1). Следовательно, ядра иррациональных чисел можно упорядочить относительно чисел вида (1). Поэтому их можно поместить на неархимедову прямую. Вторая часть теоремы доказана. ■

Замечание. Описанная процедура похожа на определение вещественного числа по Дедекинду, но не более того. Есть принципиальные отличия. Сечение по Дедекинду определяет единственное иррациональное число. Здесь это не так. Например, если к верхнему (нижнему) классу отнести числа σ такие, что $\sigma^2 > 2$ ($\sigma^2 < 2$), то данное сечение определит не только ядро вещественного числа $(\sqrt{2})^*$, но и множество чисел ореола $(\sqrt{2})^*$. Иными словами, в каждую щель совокупности (1) можно поместить бесконечно много чисел, связанных с ядрами иррациональных вещественных чисел.

Второе принципиальное отличие тесно связано с указанным выше и состоит в следующем. В классическом анализе дедекиндово сечение можно описать через приближения, которые принадлежат к верхнему и (или) нижнему классам. В неархимедовом случае это не так: ни числа ρ_v, ни числа пополнения σ для этой цели недостаточны. Фигурально выражаясь, они отстоят слишком далеко от чисел, которые мы разместили внутри обнаруженных щелей области (1). Тем не менее проблема описания приближений легко решается.

Обратимся, например, к объекту (5). Продолжим последовательности (5) по непрерывности. В результате получим последовательность порядкового типа 2:

$$r_1,\, r_2, \ldots r_n = r(n), \ldots, r_\omega = r(\omega) = \operatorname*{Lim}_n r_\omega(n) = \operatorname*{Lim}_n r(n); \ldots$$
$$\ldots r_{\omega^2} = r(\omega^2) = \operatorname*{Lim}_n r_{\omega^2}(n) = \operatorname*{Lim}_n r(n^2); \ldots$$
$$\ldots r_v = r(v) = \operatorname*{Lim}_n r_v(n) = \operatorname*{Lim}_n r(v(n)), \ldots$$

Аналогичную последовательность имеем и для r'. Процедуру непрерывного продолжения можно проиллюстрировать кривыми, показанными на рис. 2.1.

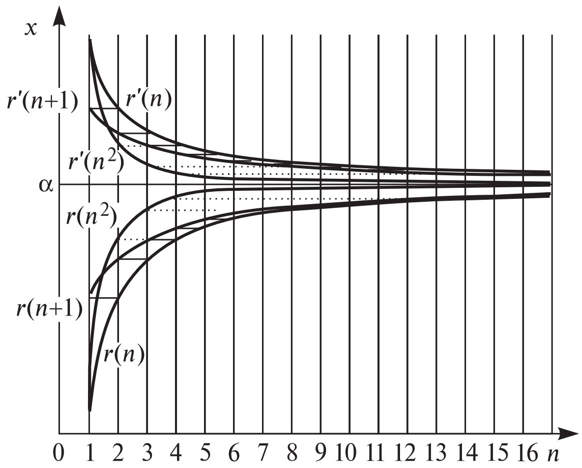

Рис. 2.1.

Указанные приближения однозначно определяют ядро

$$\alpha^* = \operatorname*{limit}_{\nu\to\infty} r(\nu) = \operatorname*{limit}_{\nu\to\infty} r'(\nu).$$

При этом для иррациональных α последовательности $r(\nu)$, $r'(\nu)$ к последовательностям «рациональных» чисел ρ_ν не сводятся.

Пусть теперь $x_{-m},\ldots x_0,\ldots,x_n$ — переменные, которые пробегают ядра вещественных чисел, рациональных и иррациональных. Числовая область

$$X = x_{-m}\omega^m + \ldots + x_0 + x_1\mathrm{E} + \ldots + x_n\mathrm{E}^n \qquad (6)$$

будет линейно упорядоченной. Поместим все числа вида (6) на неархимедову прямую. Здесь n и m — произвольные конечные натуральные числа. Следующий шаг заключается в том, чтобы рассмотреть суммы вида (6) для бесконечного числа слагаемых. Для этого необходимо построение теории рядов. Следующие этапы построения неархимедовой прямой отложим до § 18 гл. 4.

§ 7. Вещественная прямая в области существенных чисел

Полученные результаты позволяют дополнить наши представления об обычной вещественной прямой. У нас все готово для того, чтобы ответить на вопрос: что представляет собой классическая вещественная прямая, если ее рассматривать как часть области существенных чисел. Прежде всего, опишем область существенных чисел в целом.

Данная область характеризуется следующими свойствами: она является 1) многомасштабной; 2) непрерывной и 3) многомерной. Первое свойство означает, что в данной области содержатся числа, отношения между которыми равны актуальным бесконечно малым или бесконечно большим числам. Второе свойство — непрерывность, или сплошность, полнота — связывается со следующим фактом. Вместе с каждой фундаментальной последовательностью чисел, принадлежащих к области существенных чисел, к данной области принадлежит и предел данной последовательности. Проще говоря, каждая фундаментальная последовательность в области существенных чисел является сходящейся. (Для последовательностей элементарных чисел это верно по построению. Для последовательностей существенных чисел этот факт, как уже отмечалось, будет доказан ниже.) Наконец, многомерность области связывается с тем фактом, что в данной области линейного порядка нет, а есть только частичный порядок.

Таким образом, в целом область существенных чисел можно представить как непрерывную (сплошную) среду, которая на бесконечном числе масштабных уровней заполняет бесконечномерное пространство. Тогда существенную прямую можно представить себе как ось, которая, подобно спице, пронизывает область существенных чисел. Причем сама существенная прямая также является многомасштабной и непрерывной. Однако в отличие от области в целом существенная прямая является одномерной: между ее элементами линейный порядок есть.

Обратимся теперь к вещественной прямой. Каждое вещественное число (то есть каждая точка данной прямой) представляет собой совокупность последовательностей рациональных чисел. Некоторые последовательности мы объединяли в классы, которые назвали элементарными числами. Элементарные числа входят в область существенных чисел через стационарные по v последовательности. Например,

$$\mathrm{E}_{\text{сущ}} = \underset{v}{\mathrm{limit}}\,\mathrm{E} = \underset{v}{\mathrm{limit}}\,\underset{n}{\mathrm{Lim}}\frac{1}{n},$$

$$A_{\text{сущ}} = \underset{v}{\mathrm{limit}}\,\underset{n}{\mathrm{Lim}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n},\quad B_{\text{сущ}} = \underset{v}{\mathrm{limit}}\,\underset{n}{\mathrm{Lim}}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \dots . \tag{1}$$

Правило (1) позволяет включить любое элементарное число вещественной прямой в область существенных чисел. Если мы на эту прямую смотрим со степенью разрешения, принятой в классическом анализе, то каждая ее точка представляется неделимым объектом. В целом прямая выглядит непрерывной и линейно упорядоченной. При взгляде же с большим разрешением мы видим совершенно другую картину. Каждое вещественное число распадается на совокупность существенных чисел типа (1). Причем между данными числами линейного порядка уже нет. Например, в состав $e_{\text{вещ}}$ наряду с числами (1) входит и число

$$C_{\text{сущ}} = \underset{v}{\text{limit}}\,\underset{n}{\text{Lim}}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}+\frac{(-1)^{n}}{n}\right]. \qquad (2)$$

Данное число несравнимо с числами A и B. Но, с другой стороны, числа $A_{\text{сущ}} - C_{\text{сущ}}$ и $B_{\text{сущ}} - C_{\text{сущ}}$ являются бесконечно малыми. (Именно в этом смысле будем говорить, что точки типа (2) удалены от существенной прямой на бесконечно малые расстояния.)

Таким образом, для точек вещественной прямой нарушения линейного порядка наблюдаются только локально, на микромасштабных уровнях. На уровнях бо́льших масштабов линейный порядок восстанавливается. Доказательство почти очевидно. Пусть $\alpha_{\text{вещ}}$ и $\beta_{\text{вещ}}$ — два различных вещественных числа, σ_{α} — существенное число, которое входит в состав числа $\alpha_{\text{вещ}}$, σ_{β} — входит в состав $\beta_{\text{вещ}}$. Если $\alpha_{\text{вещ}} < \beta_{\text{вещ}}$, то аналогичное условие будет иметь место и для любых элементарных чисел, входящих в состав $\alpha_{\text{вещ}}$ и $\beta_{\text{вещ}}$. Операция перехода к существенным числам типа (2) знак неравенства не меняет. Поэтому $\sigma_{\alpha} < \sigma_{\beta}$ и, следовательно, на данных масштабах линейный порядок есть.

Далее ясно, что при данной степени разрешения вещественная прямая уже не выглядит непрерывной. Можно указать сколько угодно последовательностей элементарных чисел, входящих в состав вещественных чисел, которые, будучи фундаментальными, тем не менее предела не имеют. Например, в первоначальном составе вещественного числа $e_{\text{вещ}}$ нет ни одного объекта, который можно считать пределом последовательности (1), т.е. ядром неперова числа. Поэтому естественно построить соответствующее пополнение и новые точки также включить в состав вещественной прямой. Новые точки (числа) будем называть точками (числами) пополнения. Точки (числа), которые входили в состав вещественной прямой изначально на основе определения Кантора и процедуры (1), будем называть точками (числами) первоначального состава вещественной прямой. Например, числа вида (1) —

это числа первоначального состава вещественного числа $e_{\text{вещ}}$, а числа вида

$$\sigma = \operatorname*{limit}_{v} A_v \tag{3}$$

— числа пополнения. Здесь A_v — числа первоначального состава $e_{\text{вещ}}$ и последовательность A_v к стационарной не сводится.

Очевидно, что некоторые из чисел первоначального состава и чисел пополнения попадают на существенную прямую, а некоторые — нет. Например, числа (1) и число

$$e = \operatorname*{limit}_{v} \operatorname*{Lim}_{n} \left[1 + \frac{1}{v(n)}\right]^{v(n)} \tag{4}$$

принадлежат существенной прямой, а число (2) — не принадлежит. Как отмечалось, число (4) играет особую роль. Оно является ядром числа $e_{\text{вещ}}$ и служит представителем этого числа в области существенных чисел.

Обратимся теперь к вещественному числу $+\infty_{\text{вещ}}$. В рамках классического анализа это число (точка на вещественной прямой) представляет собой единый неделимый объект. Однако при взгляде на него с большим разрешением обнаруживаем множество актуальных бесконечно больших чисел вида

$$D = \operatorname*{Lim}_{n} d_n, \quad D_{\text{сущ}} = \operatorname*{limit}_{v} \operatorname*{Lim}_{n} d_n,$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = +\infty_{\text{вещ}}$. Некоторые из данных чисел попадают на существенную прямую, некоторые — нет. Здесь также есть только частичный порядок. Пополним данную совокупность чисел. Одна из точек пополнения играет особую роль. Это точка $+\infty_{\text{сущ}}$ — положительная бесконечность в области существенных чисел. (Ядро числа $+\infty_{\text{вещ}}$.) Аналогично можно сделать пополнение чисел из совокупностей $-\infty_{\text{сущ}}$ и $\infty_{\text{сущ}}$.

Таким образом, мы выделили специальную подобласть области существенных чисел. Числа, которые включены в данную подобласть, либо входят в первоначальный состав вещественных чисел, либо принадлежат пополнению этого состава. Данная подобласть включает в себя существенную прямую. На этом основании указанную подобласть можно назвать существенной прямой с ореолом. По определению ядро α^* вещественного числа α является стандартной частью любого существенного числа σ, входящего в состав пополнения вещественного числа α: $\alpha^* = st\sigma$. Стандартная часть положительных (отрицательных) бесконечно больших чисел — это $+\infty_{\text{сущ}}$ ($-\infty_{\text{сущ}}$), например $st\omega = \infty_{\text{сущ}}$.

Неформально всю картину можно себе представить таким образом. Возьмем пространство элементарных чисел. Каждое вещественное число в этом пространстве представляет собой совокупность определенных чисел, что-то вроде туманности с размытой внешней границей. Например, число $0_{\text{вещ}}$ — это совокупность чисел 0, E, 2E, 3E,… Ej и т.д. Процедура (3) пополнила данное пространство, а процедура типа (4) позволила «в центре» каждого вещественного числа поставить «точку». При этом существенная прямая прошила, подобно спице, все туманности вещественных чисел.

Еще нагляднее сделать сравнение, используя следующие образы. Пусть вещественной прямой соответствует ряд шарообразных тел, которые соприкасаются друг с другом в диаметрально противоположных точках. Между шарами никаких зазоров нет, поэтому вставить между ними (в точке контакта) ничего невозможно. На этом основании будем считать, что данное свойство соответствует свойству непрерывности вещественной прямой. Каждый шар имеет свое индивидуальное имя. Такую конструкцию назовем линейкой 1. Если при измерении некоторого отрезка левый его конец помещается в пределах шара $0_{\text{вещ}}$, а правый — в пределах шара под именем α, то мы говорим, что длина отрезка равна α. Линейка 2 представляет собой такую же конструкцию, но только с шарами гораздо меньшего диаметра. Данной линейке соответствует существенная прямая. Тот факт, что малые шары также контактируют между собой, соответствует непрерывности существенной прямой. Один из шаров линейки 2 назовем именем $0_{\text{сущ}}$. Совместим теперь две линейки так, чтобы центр малого шара $0_{\text{сущ}}$ попал точно в центр большого шара $0_{\text{вещ}}$, а остальные шары расположились так, как показано на рис. 2.2, т.е. контакт между большими шарами совпал бы с одним из контактов между малыми шарами. (Значит, отношение диаметров шаров должно быть числом нечетным.) Маленьким шарам мы будем давать уже два имени: первое — индивидуальное имя, причем малый шар, который находится точно в центре большого шара α, будем называть

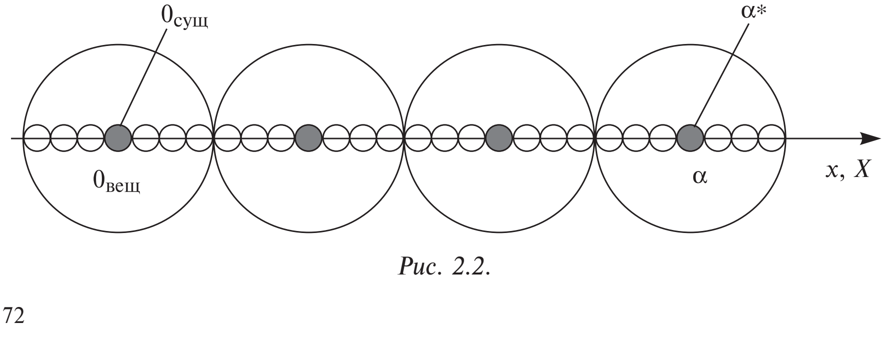

Рис. 2.2.

α^*-ядром вещественного числа α. Второе имя — неиндивидуальное: если малые шары попадают в большой шар α, то всем им присваивается одно и то же имя α.

Измерим теперь некоторый отрезок линейкой 2. Если будем пользоваться индивидуальными именами, то получим результат более точный, чем при измерении линейкой 1. Но если пользоваться неиндивидуальными именами, то результат будет, очевидно, тем же, что и при измерении линейкой 1.

Теперь естественно взять линейку номер 2 и удалить из нее все шары, которые оказались не в центре больших шаров. Такую конструкцию можно назвать линейкой 1′. Функционально она ничем не отличается от линейки 1. Однако теперь у нее шары между собой не контактируют. Поэтому между ними можно помещать другие такие же шары и постепенно идти к линейке 2. Ясно, что линейка 1′ соответствует подобласти области существенных чисел, изоморфной полю вещественных чисел.

Таким образом, если концепцию Кантора считать именно определением, а не моделью вещественного числа, то о существенных числах можно сказать, что они помещаются «внутри» вещественных чисел. При этом обе прямые — и вещественная, и существенная — являются непрерывными. Если же исходить из аксиоматического определения вещественного числового поля, а построение ядер вещественных чисел рассматривать только как модель для данной системы аксиом, то можно утверждать, что «на самом» деле вещественная прямая непрерывной не является (линейка 1′), но кажется нам такой только в силу степени разрешения, с которой мы на нее смотрим. (Как отмечалось, степень разрешения определяется аксиомой Архимеда и равносильной ей Первой аксиомой разрешения.)

Выводы. 1) область существенных чисел является 1^0) непрерывной, 2^0) бесконечномерной и 3^0) неограниченно простирается во всех своих измерениях; 2) вещественная прямая, рассматриваемая как подобласть области существенных чисел, является 1^0) непрерывной, 2^0) бесконечномерной и 3^0) содержит в качестве своей подобласти и одного из своих измерений числовую существенную прямую. Вдоль данного измерения вещественная прямая простирается неограниченно; вдоль остальных измерений (их можно назвать «боковыми») — только на бесконечно малые расстояния; 3) существенная прямая является 1^0) непрерывной, 2^0) одномерной (линейно упорядоченной) и 3^0) неограниченно простирается вдоль одного своего измерения.

Настоящий параграф посвящен подобласти 2, т.е. вещественной прямой как подобласти области существенных чисел.

Данная подобласть представляет интерес как инструмент для дальнейших исследований, так как по степени сложности она занимает промежуточное положение между весьма сложной областью существенных чисел и линейно упорядоченной существенной прямой. В рассматриваемой подобласти линейный порядок нарушается только на микромасштабных уровнях. На больших масштабах линейный порядок есть. Можно надеяться, что это даст подходящий инструмент для построения моделей пространства и времени, в которых на микроуровнях линейной упорядоченности нет, а на макроуровнях линейный порядок восстанавливается. Подробнее этот вопрос рассматривается в гл. 11.

§ 8. На основе какой числовой системы должен строиться математический анализ?

Классический анализ строится на основе системы действительных чисел. Данная числовая система линейно упорядочена. Поэтому можно говорить не просто о системе действительных чисел, а о действительной числовой прямой.

Насколько далеко от этого образца должна уходить новая теория? Первая позиция сомнений не вызывает: новая теория должна обладать бóльшей разрешающей способностью, чем классический анализ. Для этого мы расщепили действительные числа на элементы — элементарные числа. Расщепление действительного числа нуль дало бесконечно малые числа, расщепление бесконечности — бесконечно большие числа. Расщепление конечных действительных чисел дало конечные элементарные числа. С помощью бесконечных чисел мы продолжили натуральный ряд. Это дало возможность пополнить пространство элементарных чисел и построить неархимедову область существенных чисел. Данную область нельзя назвать числовой прямой, так как она не является линейно упорядоченной. Область представляет собой бесконечномерное пространство, которое «одинаково далеко» простирается вдоль каждого из своих измерений.

В данном пространстве естественным образом выделяются две числовые подобласти. Первая представляет собой не что иное, как обычную действительную прямую. Но теперь мы ее рассматриваем с бóльшим разрешением, чем в классическом анализе. Поэтому у прямой обнаруживаются новые свойства, главным из которых является отсутствие линейного порядка в малом. В одном своем измерении действительная прямая простирается неограниченно далеко. В то же время в бесконечном числе «боковых» измерений (их наличие как раз и приводит к неупорядоченности) область простирается только на бесконечно малые расстояния. На этом основании действительную прямую будем называть неупорядоченной локально. В целом ее можно представить в виде бесконечно длинного цилиндра. Ось цилиндра — это неархимедова (существенная) прямая. Цилиндр в направлении оси простирается до бесконечности. Поперек оси он простирается только на бесконечно малые расстояния, причем внешняя его граница является размытой.

Следующая характерная числовая подобласть представляет собой существенную прямую, т.е. ось упомянутого цилиндра. Существенная прямая обладает всеми свойствами действительной прямой, кроме тех, которые связаны с аксиомой Архимеда.

Любая из трех описанных выше областей может служить базой математического анализа. Выбор в качестве базы существенной прямой означает, что мы делаем только один шаг в обобщении классического анализа — снимаем ограничения, диктуемые аксиомой Архимеда, но сохраняем линейный порядок. Выбор же в качестве основы анализа действительной прямой означает дополнительный отказ от линейной упорядоченности, но отказ от упорядоченности только в малом, локально. Выбор всего пространства существенных чисел означает переход к числовой области, которая неупорядочена уже глобально. В двух последних случаях числовые области обязательно должны содержать делители нуля.

Построение анализа проще всего начать на основе линейно упорядоченной числовой системы (существенной прямой). Однако ограничиться только этим вариантом не удастся. Внутренняя логика теории приводит к тому, что все равно придется переходить в неупорядоченную числовую область и, значит, вводить делители нуля. Это связано с тем, что линейно упорядоченная область не является замкнутой по отношению к некоторым операциям, в которых участвуют бесконечно большие числа.

Здесь необходимо сделать короткое отступление и рассмотреть данный вопрос подробнее. Известно, что понятие числа развивалось так, чтобы в рамках числовой системы можно было выполнять все необходимые операции. Вначале сформировалось понятие натурального числа. Далее:

1) в области натуральных чисел не всегда выполняется операция вычитания, поэтому вводятся целые числа;

2) в области целых чисел не всегда выполняется операция деления, поэтому вводятся рациональные числа;

3) в области рациональных чисел не всегда выполняется операция предельного перехода, поэтому вводятся действительные числа;

4) в области действительных чисел не всегда выполняется операция извлечения квадратного корня, поэтому вводятся комплексные числа.

Здесь ставится точка. Область комплексных чисел дальше уже не расширяется. В данной области выполняются любые операции, и она удовлетворяет всем потребностям анализа. Казалось бы, круг замкнулся. Но это не совсем так. Теперь мы обращаем внимание на разрешающую способность теории в целом. Мы повышаем разрешающую способность и для этого вводим в числовую систему новое число ω — эталонное актуально бесконечно большое число. Рассмотрим прежние операции, но уже с участием числа ω. Вычислим, например, $e^{\pi i\omega}$. Так как $\omega = \mathrm{Lim}\, n$, то можно дать обоснование следующим выкладкам:

$$e^{\pi i\omega} = e^{\pi i \mathrm{Lim}\, n} = \mathrm{Lim}\, e^{\pi i n} =$$

$$= \mathrm{Lim}\,(\cos\pi n + i\sin\pi n) = \mathrm{Lim}\,(-1)^n = -j.$$

Тогда

$$e^{\pi i\omega} = -j, \quad j^2 = 1. \tag{1}$$

Здесь, как и прежде, j — двойная единица, а $(j+1)$, $(j-1)$ — делители нуля. Приближения двойной единицы колеблются между $+1$ и -1: $j = \mathrm{Lim}\,(1, -1, 1, -1, \ldots)$. Таким образом, объект j не может быть линейно упорядочен относительно рациональных чисел. Ситуацию можно представить так, что j «стоит в стороне» от существенной числовой оси, т.е. находится в некотором новом измерении.

Формула (1) означает, что в области существенных комплексных чисел $\mathrm{X} + i\mathrm{Y}$ (X, Y принадлежат существенной числовой прямой) операция возведения в степень выполнима не всегда. Иными словами, указанный выше список операций 1–4 теперь можно дополнить следующим пунктом:

5) в неархимедовой области комплексных чисел $\mathrm{X} + i\mathrm{Y}$ операция возведения в степень выполняется не всегда. Поэтому в числовую область вводятся двойные единицы и, значит, делители нуля.

Есть еще один аргумент в пользу того, что в числовой системе неархимедова анализа следует допускать отклонения от линейного порядка. Он связан с тем, что с точки зрения неархимедова анализа сама действительная прямая не является линейно упорядоченной (локально). Поэтому если заниматься поиском скрытых законов, которые проявляются затем на вещественном уровне, то естественно вначале обратиться к существенной прямой, а затем уже на новом уровне вернуться опять к действительной прямой.

Таким образом, формула (1) показывает, что рано или поздно нам придется обратиться к числовой области, в которой линейного порядка уже нет. Какой должна быть размерность этой области? Если речь идет только об операциях типа (1), то достаточно конечномерной области. (Например, функция $\exp(r \cdot \pi i n)$ для рационального r имеет конечный период.)

Пусть

$$
\begin{aligned}
j_1 &= \text{limit Lim}\,(1, 0 \ldots 0; 1, 0 \ldots),\\
j_2 &= \text{limit Lim}\,(0, 1 \ldots 0; 0, 1 \ldots),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
j_N &= \text{limit Lim}\,(0, \ldots, 1; 0, \ldots)
\end{aligned}
$$

— это базис. Здесь N — размерность и все приближения имеют период N. В приближениях числа j_1 единица стоит на первом месте, на остальных местах — нули. Затем все повторяется. В j_2 единица стоит на втором месте и т.д. Возьмем подпространство пространства элементарных чисел

$$A = \Gamma_1 j_1 + \Gamma_2 j_2 + \ldots + \Gamma_N j_N,$$

где $\Gamma_1 \ldots, \Gamma_N$ — «натуральные» числа. Дальше, действуя по указанному выше алгоритму, нетрудно построить соответствующую подобласть области существенных чисел. В этой подобласти можно ввести все понятия анализа. Единственное ограничение будет состоять в том, что операции типа $\exp(\alpha \pi i \omega)$, где α — не рациональное число, из указанной области будут выводить. Поэтому в общем случае необходимо располагать бесконечномерной областью существенных чисел и анализ строить на основе числовой системы общего вида.

Глава 3

Пределы числовых последовательностей

Напомним определение предела, которое дается в классическом анализе. Пусть

$$r_1,\ r_2 \ldots r_n, \ldots \tag{1}$$

— фундаментальная последовательность рациональных чисел. Все фундаментальные последовательности разбиваются на классы эквивалентности. Класс эквивалентности, которому принадлежит последовательность r_n, обозначается как

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} r_n. \tag{2}$$

Далее о том же самом факте (принадлежности последовательности r_n к классу эквивалентности α) говорится по-другому. Сам класс эквивалентности объявляется действительным числом α, а о равенстве (2) говорится так: «действительное число α является пределом последовательности рациональных чисел r_n». Последнее выглядит как тавтология, и это действительно так. Однако уже следующий шаг — поиск ответа на вопрос, что является пределом последовательности действительных чисел — приводит, как известно, к содержательной теории. Таким образом, понятие предела строится на основе концепции действительного числа.

В неархимедовом анализе мы будем действовать точно так же. Вернемся к концепции неархимедовых чисел и построим на этой основе теорию пределов. Здесь мы сразу сталкиваемся с принципиально новым моментом. Концепция неархимедовых чисел опирается на два типа классов эквивалентности рациональных чисел. Классы эквивалентности первого типа получаются в результате расщепления действительных чисел (2). Эти классы мы обозначили как

$$A = \mathrm{Lim}\, r_n. \tag{3}$$

Данная запись означает, что в класс A наряду с другими последовательностями входит и последовательность (1). Далее о факте принадлежности r_n к классу A говорилось по-другому. Сам класс эквивалентности A назывался элементарным числом, а о равенстве (3) говорилось так: «элементарное число A является предметом последовательности рациональных чисел r_n в смысле Lim». Это, конечно, тавтология. Задача состоит в том, чтобы, отталкиваясь от определения (3), развить содержательную теорию пределов в смысле Lim.

Далее, классы эквивалентности второго типа состоят из несчетных последовательностей элементарных чисел:

$$A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots A_\omega, \ldots A_v, \ldots . \tag{4}$$

Класс эквивалентных фундаментальных последовательностей, который включает последовательность (4), обозначался как

$$\sigma = \operatorname*{limit}_{v} A_v . \tag{5}$$

Иначе о факте принадлежности последовательности (4) к классу (5) можно сказать так. Класс σ назовем существенным числом, а о равенстве (5) скажем, что σ есть предел (в смысле limit) последовательности (4). На этом шаге данное утверждение также является тавтологией. Задача состоит в том, чтобы развить теорию пределов в смысле limit.

Итак, концепция неархимедовых чисел приводит к понятиям предела в двух совершенно различных смыслах: в смысле Lim и в смысле limit. Далее будет видно, что этот факт связан исключительно с многомасштабностью неархимедовой прямой. Оба понятия пределов дополняют друг друга.

Отметим также, что понятие предела Lim применимо только к счетным последовательностям, а понятие limit — только к несчетным последовательностям. Это позволяет упростить изложение. Если говорится о пределе счетных последовательностей, то можно не подчеркивать, что речь идет о пределе в смысле Lim. Точно так же, говоря о пределах несчетных последовательностей, можно опускать ссылку на то, что предел берется в смысле limit.

Перейдем к реализации указанной программы.

§ 9. Пределы счетных последовательностей элементарных чисел

В определении элементарного числа $A = \operatorname{Lim} r_n$ оператор Lim применяется к последовательности рациональных чисел. Во многих случаях возникает необходимость применения данного оператора к последовательностям самих элементарных чисел

$$A_1, A_2, A_3, \ldots A_s, \ldots . \tag{1}$$

Пусть
$$A_s = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} r_{sn} = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} f(s,n). \tag{2}$$
Следовательно, речь идет о том, чтобы придать смысл повторному пределу
$$A^* = \operatorname*{Lim}_{s\to\omega} A_s = \operatorname*{Lim}_{s\to\omega}\operatorname*{Lim}_{n\to\omega} f(s,n). \tag{3}$$

Похожая проблема возникает и в классическом анализе. Равенство (2) из введения к данной главе определяет предел последовательности только рациональных чисел. Следом возникает вопрос о пределе последовательности вещественных чисел
$$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s, \dots, \tag{4}$$
где $\alpha_s = \lim\limits_{n\to\infty} r_{sn}$. Ясно, что этот вопрос состоит в придании смысла повторному пределу
$$\alpha^* = \lim_{s\to\infty}\lim_{n\to\infty} r_{sn}.$$
Последовательности (4) отвечает бесконечная матрица рациональных чисел (r_{sn}). В принципе, на роль предела α^* можно было бы взять класс эквивалентности матриц. После этого, однако, возникает вопрос о пределе последовательности подобных матриц и т.д. Понятно, что каждый раз вводить в качестве предела объект новой природы — бесперспективно. В классическом анализе данный процесс останавливается на первом шаге: предел последовательности рациональных чисел представляет собой объект более сложной природы, чем рациональное число. Но предел последовательности вещественных чисел уже имеет ту же самую природу, что и любое из чисел данной последовательности.

Примем аналогичный принцип и для пределов элементарных чисел. Следовательно, результатом перехода к повторному пределу должно быть элементарное число той же природы, что и каждое из чисел последовательности (1).

Можно сформулировать ряд естественных условий, которым должно удовлетворять определение повторного предела. Во-первых, должно быть выполнено условие согласованности: если $A_s = r_s$, где r_s — рациональные числа, то определение (3) должно сводиться к обычному пределу
$$\operatorname*{Lim}_{s\to\omega}\operatorname*{Lim}_{n\to\omega} r_s = \operatorname*{Lim}_{s\to\omega} r_s. \tag{5}$$

Во-вторых, естественно потребовать, чтобы предел стационарной последовательности $A_s = A$ совпадал с A, т.е.
$$\operatorname*{Lim}_{s} A = A. \tag{6}$$

Далее необходимо, чтобы понятие предела обладало известными арифметическими свойствами:

$$\begin{aligned}
&\operatorname*{Lim}_{s}(A_s \pm B_s) = \operatorname*{Lim}_{s} A_s \pm \operatorname*{Lim}_{s} B_s, \\
&\operatorname*{Lim}_{s} A_s \cdot B_s = \operatorname*{Lim}_{s} A_s \cdot \operatorname*{Lim}_{s} B_s, \\
&\operatorname*{Lim}_{s} \frac{A_s}{B_s} = \frac{\operatorname{Lim} A_s}{\operatorname{Lim} B_s}, \quad B_s \neq 0, \ \operatorname{Lim} B_s \neq 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь предполагается, что все пределы существуют.

Перейдем теперь к построению повторного предела. Начнем с решения самой простой задачи — описания предела стационарной последовательности $A_s = \omega$. Расположим приближения чисел A_s в виде матрицы:

$$\begin{array}{cccccccc}
A_1 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n & \cdots \\
A_2 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n & \cdots \\
A_3 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n & \cdots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
A_s & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n & \cdots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Результат нам заранее известен: в качестве предела мы должны получить величину ω. Причем для этого мы должны использовать материал всех строк данной матрицы. Виден только один путь получения числа ω из представленного материала — это взятие предела последовательности элементов, расположенных на диагонали матрицы. Данная идея приводит к следующей формуле:

$$\operatorname*{Lim}_{s\to\omega} \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} f(s,n) = \operatorname*{Lim}_{m\to\omega} f(m,m). \tag{8}$$

Решает ли данная формула проблему? Ответ будет положительным, если ввести дополнительные ограничения. Легко заметить, что объект (8) удовлетворяет условию согласованности (5), условию (6), а также обладает всеми необходимыми арифметическими свойствами (7).

Тем не менее в некоторых случаях формула (8) может дать неверный результат. Приведем пример. Пусть $A_s = \omega$ и требуется найти предел стационарной последовательности A_s, т.е. $\operatorname*{Lim}_{s\to\omega} A_s$. Что такое число $A_s = \omega$? Это класс определенных последовательностей. В частности в класс A_s входит последовательность

$$f(s,n) = \begin{cases} 0 & \text{при } 1 \le n \le s, \\ n & \text{при } n > s. \end{cases}$$

Здесь для любого фиксированного s имеем равенство

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\omega} f(s,n) = \omega.$$

Но с другой стороны,

$$\operatorname*{Lim}_{m\to\omega} f(m,m) = 0.$$

Поэтому формула (8) приводит к парадоксу:

$$\operatorname*{Lim}_{s\to\omega} \omega = 0. \tag{9}$$

Для его разрешения обратимся к опыту классического анализа. Пусть требуется найти предел последовательности вещественных чисел, например предел стационарной последовательности $\alpha_s = 0_{\text{вещ}}$:

$$0_{\text{вещ}},\ 0_{\text{вещ}},\ 0_{\text{вещ}},\ \dots\ .$$

По определению каждое из вещественных чисел α_s является классом эквивалентности последовательности рациональных чисел:

$$\alpha_s = \lim_{n\to\infty} r_{sn}.$$

Следовательно, вычисление предела $\lim\limits_{s\to\infty} \alpha_s$ — это всегда вычисление повторного предела. Формула, аналогичная формуле (8), имеет вид

$$\lim_{s\to\infty}\lim_{n\to\infty} r_{sn} = \lim_{m\to\infty} r_{mm}. \tag{10}$$

Ясно, что любое разумное определение предела для стационарной последовательности нулей должно давать число нуль: $\lim\limits_{s\to\infty} 0_{\text{вещ}} = 0_{\text{вещ}}$. Пусть $r_{sn} = s/n^2$. Тогда формула (10) действительно дает число $0_{\text{вещ}}$.

Выберем теперь из состава числа α_s последовательность $r_{sn} = s/n$. Для любого фиксированного s имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s}{n} = 0_{\text{вещ}}.$$

Однако в данном случае формула (10) также приводит к парадоксу:

$$\lim_{s\to\infty}\lim_{n\to\infty} \frac{s}{n} = \lim_{s\to\infty} 0_{\text{вещ}} = \lim_{m\to\infty} \frac{m}{m} = 1.$$

Причина этого хорошо известна. Все дело в том, что те последовательности, которые мы выбрали в качестве представителей классов эквивалентности α_s, сходятся к своим пределам недостаточно быстро. Поэтому на выбор представительных последовательностей должно быть наложено специальное ограничение.

Для наших целей решение данной проблемы удобно описать таким образом. Вначале делаем выбор последовательностей r_{sn}, руководствуясь любыми правилами без каких-либо ограничений. Подсчитываем диагональный предел (10). Затем каждую из последовательностей форсируем, т.е. переходим к ее подпоследовательности при фиксированных значениях s = const. Опять подсчитываем диагональный предел. Возможно, что полученное значение будет отличаться от предыдущего. Однако в конце концов мы придем к такому значению диагонального предела, которое при дальнейшем форсировании уже не меняется. Данное значение мы и будем считать пределом последовательности вещественных чисел.

Вернемся теперь к нашему случаю. Непосредственно процедуру форсирования здесь использовать нельзя, так как любое форсирование нестационарной последовательности $\{a_n\}$ приводит к изменению элементарного числа $\operatorname{Lim}_n a_n$. Тем не менее основную идею, связанную с учетом скорости сходимости, можно использовать и здесь.

По определению элементарное число — это класс последовательностей, которые отличаются друг от друга конечным числом членов. Как описать такой класс? Проще всего задать одну конкретную последовательность и остальные последовательности строить путем изменения первого члена исходной последовательности, затем первых двух членов и т.д. Исходную последовательность будем называть базовой. Предположим, что любое элементарное число, которое фигурирует в наших построениях, задается путем указания именно базовой последовательности. Естественно позаботиться о том, чтобы базовые последовательности чисел

$$A \pm B,\ A \cdot B,\ \ A / B$$

были получены в результате соответствующих операций с базовыми последовательностями чисел A и B.

Теперь главное. Если в каких-либо построениях требуется выбрать последовательность, которая представляла бы класс последовательностей, образующих элементарное число A, то всегда должна выбираться последовательность, являющаяся базовой. Например, если речь идет о базовой последовательности числа ω, то это может быть последовательность $a_n = n$ (именно она фигурирует в определении числа ω). Однако в качестве базовой можно было бы взять и последовательность

$$a_n = \begin{cases} 0, & 1 \le n \le 10^{10}, \\ n, & n > 10^{10}\ . \end{cases}$$

Главным является только то обстоятельство, что базовая последовательность зафиксирована раз и навсегда. Поэтому никаких парадоксов типа (9) теперь возникнуть не может.

Введенное выше правило выбора полностью решает проблему предела последовательности элементарных чисел. Примем следующее

Определение 9.1. (*Диагональное определение повторного предела*). *Пусть задана счетная последовательность элементарных чисел*

$$A_1,\ A_2,\ A_3 \ldots A_s, \ldots,\ A_s = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} f\,(s,\ n).$$

Под ее пределом Lim будем понимать элементарное число

$$A^* = \operatorname*{Lim}_{s\to\omega} A_s = \operatorname*{Lim}_{m\to\omega} f(m,m), \tag{11}$$

где последовательности $f(s,n)$ являются базовыми последовательностями чисел A_s.

В заключение рассмотрим вопрос о переходе к пределу Lim в неравенствах.

Пусть начиная с некоторого номера M имеют место неравенства

$$r_s \geq 0,$$

где r_s — рациональные числа. Тогда можно утверждать, что и

$$\operatorname*{Lim}_{s\to\omega} r_s \geq 0.$$

Таким образом, в указанных неравенствах переход к пределу возможен. Доказательство непосредственно следует из определения.

Возьмем теперь последовательность элементарных чисел

$$A_1, A_2, \ldots A_s, \ldots .$$

Пусть $A_s \geq 0$. Требуется выяснить, в каких случаях в цепочке неравенств $A_s \geq 0$ можно перейти к пределу $\operatorname*{Lim}_{s}$. Сразу ясно, что это можно делать не всегда. Например, для любого фиксированного s имеет место неравенство

$$A_s = \omega - 10s > 0.$$

Однако переход к пределу приводит к тому, что знак неравенства меняется на противоположный:

$$\operatorname*{Lim}_{s\to\omega} A_s = \omega - 10 \operatorname*{Lim}_{s} s = -\ 9\omega < 0.$$

Выясним условие, при котором в неравенствах предельный переход возможен. Пусть начиная с некоторого номера M для любого $s > M$ имеют место неравенства

$$A_s = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} f(s,n) \geq 0, \tag{12}$$

где $f\ (s,\ n)$ — базовые последовательности чисел A_s. Следовательно, для любого фиксированного $s > M$ существует конечное натуральное число $N(s)$ такое, что при $n > N(s)$ выполняются неравенства $f(s,n) \geq 0$.

Теорема 9.1. *Для того чтобы из неравенств (12) следовало неравенство*

$$\operatorname*{Lim}_{s\to\omega} A_s \geq 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы существовало конечное натуральное число M' такое, что при любых $s > M'$ имели место условия

$$N(s) < s. \tag{13}$$

• Доказательство следует из диагонального определения повторного предела (11):

$$A_1 = \mathrm{Lim}\{\underline{f(1,1)},\ f(1,2)\ldots f(1,n)\ldots\} \geq 0,$$
$$A_2 = \mathrm{Lim}\{f(2,1),\ \underline{f(2,2)}\ldots f(2,n)\ldots\} \geq 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_s = \mathrm{Lim}\{f(s,1),\ f(s,2)\ldots \underline{f(s,s)}\ldots\} \geq 0.$$

Примеры.

1^0. Пусть $A_s = \omega - 10s$. Ясно, что $A_s > 0$, так как $A_s = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega}(n - 10s)$ и $n - 10s > 0$ при $n > 10s$. Значит, $N(s) = 10s$. Однако условие (13) нарушается и переход к пределу в неравенствах невозможен.

2^0. Если $A_s = 5\omega - 4s$, то $N(s) = \frac{4}{5}s < s$.

Условие (13) выполняется и, следовательно, переход к пределу в неравенствах становится возможным. ■

§ 10. Пределы счетных последовательностей существенных чисел

Необходимость во введении такого понятия возникает уже с первых шагов построения неархимедова анализа. Например, пусть требуется вычислить положительный корень уравнения

$$x^2 - \omega = 0,\ \ x > 0.$$

Так как $\omega = \operatorname*{Lim}_{n} n$, то естественным кандидатом на роль корня было бы число $\operatorname*{Lim}_{n}\sqrt{n}$. Проблема, однако, состоит в том, что в нашем арсенале таких чисел пока нет. В исходном определении под знаком

Lim фигурируют только абсолютные рациональные числа. Формальное расширение определения $\operatorname{Lim} a_n$ трудностей не представляет. Зададим некоторую последовательность существенных чисел порядкового типа 1:

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots \sigma_s, \ldots . \tag{1}$$

Под символом $\operatorname*{Lim}_s \sigma_s$ будем понимать совокупность последовательностей, отличающихся от последовательности (1) конечным числом членов. Все операции и отношения порядка введем по аналогии с определениями гл. 1. Отсюда сразу следует, что квадрат числа $\operatorname*{Lim}_n \sqrt{n}$ равен ω. Но в таком виде полученный результат мало что дает. Нужно выяснить главный вопрос: принадлежит ли объект $\operatorname*{Lim}_n \sqrt{n}$ к области уже определенных выше существенных чисел или нет? Иными словами, является ли область существенных чисел замкнутой по отношению к операции извлечения корня из положительного числа или нет?

В более общей формулировке задача ставится следующим образом. Пусть задана последовательность существенных чисел (1). Требуется придать смысл символу $\sigma^* = \operatorname*{Lim}_s \sigma_s$ и выяснить, можно ли его отождествить с каким-либо существенным числом.

Естественно потребовать, чтобы конструкция объекта σ^* удовлетворяла следующим условиям:

1^0) условию согласованности: если последовательность σ_s сводится к последовательности рациональных чисел r_s, т.е. $\sigma_s = r_s$, то объект σ^* должен совпадать с элементарным числом $\operatorname*{Lim}_s r_s$;

2^0) если $\vartheta^* = \operatorname*{Lim}_s \vartheta_s$ другой объект той же природы, что и σ^*, то должны иметь место равенства

$$\sigma^* \pm \vartheta^* = \operatorname*{Lim}_s (\sigma_s \pm \vartheta_s); \;\; \sigma^* \cdot \vartheta^* = \operatorname*{Lim}_s \sigma_s \cdot \vartheta_s,$$

$$\frac{\sigma^*}{\vartheta^*} = \operatorname*{Lim}_s \frac{\sigma_s}{\vartheta_s} \quad \text{при} \quad \vartheta_s \neq 0, \; \vartheta^* \neq 0;$$

3^0) если взять две стационарные последовательности $\{\sigma^*\}$: одну порядкового типа 1, а другую порядкового типа 2, то должны иметь место равенства

$$\operatorname*{Lim}_s \sigma^* = \sigma^*, \quad \operatorname*{limit}_v \sigma^* = \sigma^*.$$

Приступим теперь к построению объекта $\sigma^* = \operatorname*{Lim}_s \sigma_s$. Начнем с того, что посмотрим на определение существенного числа с практической точки зрения. Что значит задать некоторое существенное число σ? Это значит, что необходимо задать одну фундаментальную последовательность элементарных чисел порядкового типа 2:

$$A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots A_\omega, \ldots A_v, \ldots A_\mu, \ldots . \qquad (2)$$

Зависимость от индекса v удобнее указать в виде аргумента: $A_v = A(v)$. Аргумент v представляет собой «натуральное» число $v = \operatorname*{Lim}_k v(k)$. Здесь $v(k)$ — уже обычная функция натурального аргумента $k = 1, 2, 3, \ldots$. Значения функции являются также натуральными числами. Более того, вид самой функции определяется специальным списком, рассмотренным в гл. 1 (v принадлежит продолженному натуральному ряду).

Таким образом, можно записать

$$A_v = A\,[v(1),\ v(2), \ldots v(k), \ldots].$$

Далее, каждый член последовательности (2) представляет собой некоторое элементарное число:

$$A_v = \operatorname*{Lim}_m f\,[v\,(1),\ v\,(2), \ldots v\,(k), \ldots; m].$$

Здесь f — конечные рациональные приближения; номер приближения $m = 1, 2, 3, \ldots$ указан в виде отдельного аргумента. Таким образом, задать существенное число

$$\sigma = \operatorname*{limit}_v A_v = \operatorname*{limit}_v \operatorname*{Lim}_m f\,[v(1), \ldots v(k), \ldots; m]$$

— это значит задать закон

$$f\,[v(1), v(2), v(3) \ldots v(k), \ldots; m].$$

Данный закон можно рассматривать либо как функционал от функции $v(k)$ и натурального аргумента m, либо как функцию от бесконечного числа аргументов $v(1), v(2) \ldots v(k) \ldots$ и еще от одного аргумента m. При переходе к (1), т.е. к последовательностям подобных законов, у функции f появляется еще один аргумент s, который будем указывать в виде индекса:

$$\sigma_s = \operatorname*{limit}_v A_s\,(v) = \operatorname*{limit}_v \operatorname*{Lim}_m f_s\,[v(1), v(2), \ldots; m]. \qquad (3)$$

Наглядно соответствие между существенными числами σ_s и их приближениями $A_s(v)$ можно изобразить в виде следующей таблицы:

$$\begin{array}{ccccc|c}
A_1(1) & A_2(1) & \cdots & A_s(1) & \cdots & B(1) \\
A_1(2) & A_2(2) & \cdots & A_s(2) & \cdots & B(2) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
A_1(\nu) & A_2(\nu) & \cdots & A_s(\nu) & \cdots & B(\nu) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
A_1(\mu) & A_2(\mu) & \cdots & A_s(\mu) & \cdots & B(\mu) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\hline
\sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_s & \cdots & \sigma^*
\end{array}$$

Устройство таблицы очевидно: при движении вдоль фиксированного столбца s сверху вниз мы постепенно приближаемся к числу σ_s. Наша задача состоит в том, чтобы найти способ перехода к пределу Lim вдоль последней горизонтальной строки, т.е. вычислить $\sigma^* = \operatorname*{Lim}_s \sigma_s$. Для последовательности σ_s данная операция пока не определена. Однако она определена для приближений σ_s. Поэтому естественно вначале перейти к пределу по строкам приближений и полученные пределы рассмотреть как приближения объекта σ^*.

1^0. Предположим, что для любого фиксированного v существует предел

$$B(v) = \operatorname*{Lim}_s A_s(v). \tag{4}$$

Условие 1^0 исключает последовательности типа

$$A_s(v) = \frac{1}{\omega - s} + \frac{v}{2v+1}.$$

В соответствии с диагональным оределением 9.1 предел (4) равен

$$B(v) = \operatorname*{Lim}_s \operatorname*{Lim}_m f_s\,[v(1), v(2), \ldots; m] = \operatorname*{Lim}_s f_s\,[v(1), v(2), \ldots; s]. \tag{5}$$

Следовательно, условие 1^0 означает, что начиная с некоторого конечного значения $s = s^{\text{o}}$ приближения

$$f_s\,[v(1), v(2), \ldots; s]$$

должны существовать. Таким образом, переход к пределу Lim по каждой из строк таблицы приводит к некоторой последовательности порядкового типа 2:

$$B(1),\ B(2), \ldots\ B(\omega), \ldots\ B(v), \ldots$$

(правый столбец таблицы). Естественно поставить вопрос, при каких условиях данная последовательность будет фундаментальной?

Каждая из последовательностей $A_s(v)$ при фиксированном s является фундаментальной. Последнее означает, что для любого наперед заданного «натурального» числа Γ найдется такое «натуральное» число $\Lambda(s)$, что для любых v, $\mu > \Lambda(s)$ имеют место неравенства

$$|A_s(v) - A_s(\mu)| < 1/\Gamma. \tag{6}$$

Любая подпоследовательность фундаментальной последовательности является фундаментальной и сходится к тому же самому пределу, что и исходная последовательность. Поэтому скорость сходимости фундаментальной последовательности можно менять по собственному усмотрению.

2^0. Примем, что с самого начала приближения чисел σ_s таковы, что условие (6) выполняется при любых v, $\mu > \Lambda$, где Λ зависит от Γ, но не зависит от s. Для выбора Λ можно использовать позиционную систему записи чисел σ_s (см. § 18).

Рассмотрим теперь условия (6) подробнее. Перейдем в них к рациональным приближениям

$$\operatorname*{Lim}_m |f_s\,[v(1),\, v(2),\ldots;\, m] - f_s\,[\mu(1),\, \mu(2),\ldots;\, m]| < \operatorname*{Lim}_m \gamma(m). \tag{7}$$

Здесь $\gamma(m)$ — приближение числа $1/\Gamma$, $v(1), v(2),\ldots \mu(1), \mu(2),\ldots$ — приближения чисел v, μ, т.е.

$$\operatorname*{Lim}_m \gamma(m) = \frac{1}{\Gamma}, \quad \operatorname*{Lim}_m v(m) = v, \quad \operatorname*{Lim}_m \mu(m) = \mu.$$

Неравенства (7) означают, что для любого заданного s найдется конечный номер $N(s)$ такой, что для любого

$$m > N(s) \tag{8}$$

будут иметь место следующие неравенства:

$$|f_s\,[v(1),\, v(2),\ldots;\, m] - f_s\,[\mu(1),\, \mu(2),\ldots;\, m]| < \gamma(m). \tag{9}$$

Предположим теперь, что имеет место следующее условие:

3^0. Для известного счетного набора чисел σ_s можно указать такой набор их приближений, что найдется такое конечное значение s^*, что для любого $s > s^*$ будет иметь место неравенство

$$N(s) < s,$$

где смысл $N(s)$ дается условиями (8), (9).

В этом случае можно утверждать, что для любого $s > s^*$

$$|f_s\,[v(1),\, v(2),\ldots; s] - f_s\,[\mu(1),\, \mu(2),\ldots; s]| < \gamma(s). \tag{10}$$

В данных неравенствах f_s, $\gamma(s)$ — конечные рациональные числа, поэтому можно перейти к пределу $\underset{s}{\mathrm{Lim}}$. Сопоставляя (10) и (5), приходим к выводу о том, что при $v, \mu > \Lambda$

$$|B(v) - B(\mu)| < 1/\Gamma.$$

Таким образом, последовательность $B(v)$ является фундаментальной. Фундаментальной последовательности соответствует некоторое существенное число, которое обозначим через τ:

$$\tau = \underset{v}{\mathrm{limit}}\, B(v). \tag{11}$$

Следовательно, если выполняются указанные выше условия 1^0–3^0, то объект, который можно в будущем отождествить с σ^*, существует.

Рассмотрим теперь вопрос о единственности данного объекта. В силу линейности операторов limit и Lim вопрос о единственности сводится к вопросу о несуществовании значений $\tau \neq 0$ при условии, что $\sigma_s = 0$ для каждого значения s.

Итак, пусть для любого s имеем $\sigma_s = 0$. Обратимся к равенству (3) и пройдем по всей цепочке выкладок к равенству (11). Легко показать, что в результате мы получим $\tau = 0$. Следовательно, единственность есть.

Отметим, что изначально у нас заданы только существенные числа σ_s, т.е. заданы именно классы эквивалентности соответствующих последовательностей. Данные классы задаются через указание некоторых их конкретных представителей. С другой стороны, для построения объекта τ мы пользовались также конкретными представителями классов последовательностей σ_s. Легко понять, что представители, описывающие σ_s, в некоторых случаях могут не годиться для построения предела τ. Например, пусть требуется вычислить предел Lim стационарной последовательности

$$0_{\text{сущ}},\ 0_{\text{сущ}}, \ldots\ 0_{\text{сущ}}, \ldots .$$

Здесь $\sigma_s = 0_{\text{сущ}}$ при любом $s = 1, 2, \ldots$. В принципе, имеем

$$\sigma_s = \underset{v}{\mathrm{limit}} \frac{1}{(\omega - s)v} = \underset{v}{\mathrm{limit}}\, \underset{m}{\mathrm{Lim}} \frac{1}{(m - s)v(m)} = 0. \tag{12}$$

Однако в данном случае диагонального члена $s = m$ просто не существует. Другой пример: при фиксированном s

$$\sigma_s = \underset{v}{\mathrm{limit}}\, v^{s-\omega} = \underset{v}{\mathrm{limit}}\, \underset{m}{\mathrm{Lim}}\, [v(m)]^{s-m} = 0. \tag{13}$$

Если проигнорировать условие 3^0 и вычислить τ, то мы получим заведомо неверный результат: $\tau = 1$. Условие 3^0 как раз исключает подобные варианты. Ясно, что, переходя к другим представителям классов эквивалентности (12), (13), легко добиться выполнения условий 1^0, 3^0 и получить необходимый предел.

Подведем итог.

Теорема 10.1. *Если*

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots$$

есть последовательность существенных чисел порядкового типа 1, т.е.

$$\sigma_s = \operatorname*{limit}_{v} \operatorname*{Lim}_{m} f_s\,[v(1), v(2)\ldots; m]$$

и выполняются условия 1^0–3^0, *то предел*

$$\tau = \operatorname*{limit}_{v} \operatorname*{Lim}_{s} \operatorname*{Lim}_{m} f_s\,[v(1),\ v(2)\ldots;\ m]$$

существует, единственен и равен

$$\tau = \operatorname*{limit}_{v} \operatorname*{Lim}_{s} f_s\,[v(1),\ v(2)\ldots;\ s].$$

Далее необходимо рассмотреть вопрос о том, какие есть основания для того, чтобы предел τ отождествить с объектом $\operatorname*{Lim}_{s} \sigma_s$. Начнем с конкретного примера.

Вернемся к задаче построения объекта $\sqrt{\omega}$. Положим $\sigma_s = \sqrt{s}$. Пусть $r_s(m)$ — рациональное приближение числа $\sqrt{s}$ с m десятичными знаками после запятой.

Тогда существенное число $\sqrt{s}$ можно описать с помощью следующей последовательности порядкового типа 2:

$$r_s(1), r_s(2), \ldots r_s(m), \ldots \operatorname*{Lim}_{m} r_s(m), \ldots ,$$

$$\operatorname*{Lim}_{m} r_s(m^2), \ldots \operatorname*{Lim}_{m} r_s\,[v(m)], \ldots .$$

Устройство данной последовательности является чрезвычайно простым. Например, для $s = 2$ на первом месте стоит рациональное число 1,4, на втором и третьем — 1,41 и 1,414, на m-месте стоит число 1, 41421 ... с m десятичными знаками после запятой и т.д. Далее на месте номер ω стоит элементарное число

$$\operatorname*{Lim}_{m} r_2(m) = \operatorname{Lim}(1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414, \ldots),$$

на месте номер ω^2 — число

$$\operatorname*{Lim}_{m} r_2(m^2) = \operatorname{Lim}(1{,}4;\ 1{,}4142;\ 1{,}414213562; \ldots).$$

Здесь под знаком Lim на первом месте стоит приближение $\sqrt{2}$ с одним знаком, на втором месте — с четырьмя знаками, на третьем месте — с девятью десятичными знаками и т.д. Наконец, на месте номер

$v = \operatorname*{Lim}_m v(m)$ стоит число $\operatorname*{Lim}_m r_2\,[v(m)]$. Таким образом, в рассматриваемом примере функционал, записанный в равенстве (3), сводится к одной функции одного переменного:

$$f_s\,[v(1), v(2), \ldots v(k), \ldots; m] = r_s\,[v(m)].$$

Данный случай относится к числам, которые являются ядрами вещественных чисел. Итак, в нашем примере

$$\sigma_s = \sqrt{s} = \operatorname*{limit}_v \operatorname*{Lim}_m r_s\,[v(m)]$$

и, значит,

$$\tau = \operatorname*{limit}_v \operatorname*{Lim}_s r_s\,[v(s)].$$

Последовательность приближений существенного числа τ устроена следующим образом: на первом месте $v = 1$ стоит элементарное число

$$\operatorname*{Lim}_s r_s\,(1) = \operatorname{Lim}(1{,}0;\ 1{,}4;\ 1{,}7;\ 2{,}0, \ldots).$$

Здесь с одним десятичным знаком записаны приближения для $\sqrt{1},\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{4}, \ldots$. На втором месте стоят приближения тех же чисел с двумя десятичными знаками и т.д. Далее на месте номер $v = \omega$ стоит элементарное число

$$\operatorname*{Lim}_s r_s\,(s) = \operatorname{Lim}(1{,}0;\ 1{,}41;\ 1{,}732; \ldots).$$

Здесь под знаком Lim на месте номер s стоит приближение числа $\sqrt{s}$ с s десятичными знаками. Аналогично для числа с индексом $v = \omega^2$ под знаком Lim на месте номер s будет стоять приближение числа $\sqrt{s}$ с s^2 десятичными знаками после запятой и т.д. и т.д. Построенная последовательность является фундаментальной и, более того, монотонно возрастающей и ограниченной. Значит, она действительно определяет некоторое существенное число τ. Подсчитаем теперь разность

$$\omega - \tau^2 = \operatorname*{limit}_v \operatorname*{Lim}_s \{s - r_s^2\,[v(s)]\}.$$

Начнем с разностей $2 - r_2^2(m)$:

$$2 - 1{,}4^2 = 0{,}04;\ 2 - 1{,}41^2 = 0{,}0119;\ 2 - 1{,}414^2 = 0{,}000604, \ldots.$$

Здесь в первой разности после запятой стоит один нуль и затем идут значащие цифры, в третьей разности стоят три нуля и затем идут значащие цифры. Подправим приближение $r_2(m)$ так, чтобы и во второй разности стояли два нуля, а затем шли значащие цифры. Аналогичные поправки сделаем и для других приближений. Обозначения для приближений сохраним прежними. (Очевидно, что внесенные поправки никаких выводов не затронут.) В соответствии с изложенными построениями числу $\omega - \tau^2$ отвечает следующая последовательность порядкового типа 2:

$$10^{-1} \cdot R(1),\ 10^{-2} \cdot R(2), \ldots 10^{-\omega} \cdot R(\omega) \ldots 10^{-\nu} \cdot R(\nu), \ldots, \tag{14}$$

где

$$R(1) = \operatorname*{Lim}_{s} 10\,(s - r_s^2(1)), \ldots$$

$$R(\omega) = \operatorname*{Lim}_{s} 10^{\omega}\,[s - r_s^2(s)] =$$

$$= \operatorname*{Lim}_{s} [10\,(1 - r_1^2(1)),\ 10^2(2 - r_2^2(2)) \ldots 10^s\,(s - r_s^2(s)), \ldots], \ldots .$$

Ясно, что для любого v

$$0 \leq R(v) \leq 1.$$

Следовательно, последовательность (14) сходится к нулю. Поэтому $\tau^2 = \omega$, что дает основание для утверждения о том, что $\tau = \sqrt{\omega}$. (По построению $\tau > 0$. Это обстоятельство здесь также использовано.)

Перейдем теперь к общему случаю. Выше символом

$$\sigma_s = \operatorname*{limit}_{v} A_s\,(v)$$

был обозначен класс эквивалентности, содержащей последовательность $A_s\,(v)$. Ничто не мешает символ limit трактовать как предельный переход от $A_s\,(v)$ к σ_s. Тогда можно показать, что

$$|A_s\,(v) - \sigma_s| < \gamma \tag{15}$$

при $v > \Lambda(\gamma)$. Здесь $\gamma = 1 / \Gamma$ — сколь угодно малое бесконечно малое наперед заданное число. (Подробнее свойства операции limit будут рассмотрены ниже.) При указанных выше условиях 1^0–3^0 в неравенствах (15) можно перейти к пределу $\operatorname*{Lim}_{s}$. В результате получим $|B(v) - \sigma^*| < \gamma$. С другой стороны, таким же свойством обладает и число $\tau = \operatorname*{limit}_{v} B(v)$:

$$|B(v) - \tau| < \gamma$$

при $v > \hat{\Lambda}(\gamma)$. Из последних двух неравенств заключим, что

$$|\tau - \sigma^*| < 2\gamma.$$

На основании Второй аксиомы разрешения отсюда следует, что $\tau = \sigma^*$. Подведем итог.

Теорема 10.2. *Если*

$$\sigma_1,\ \sigma_2, \ldots \sigma_s \ldots, \sigma_s\ = \operatorname*{limit}_{\nu} A_s(\nu)$$

— последовательность существенных чисел порядкового типа 1 и выполняются условия 1^0–3^0, то

$$\operatorname*{Lim}_{s} \operatorname*{limit}_{v} A_s(v) = \operatorname*{limit}_{v} \operatorname*{Lim}_{s} A_s(v). \tag{16}$$

Таким образом, при выполнении известных условий операторы limit и Lim являются перестановочными. В более рабочем варианте формула (16) выглядит так:

$$\begin{aligned}&\operatorname*{Lim}_{s} \operatorname*{limit}_{v} \operatorname*{Lim}_{m} f_s\,[v(1),\ v(2), \ldots m] = \\ &= \operatorname*{limit}_{v} \operatorname*{Lim}_{s} f_s\,[v(1),\ v(2), \ldots s]\,.\end{aligned} \tag{17}$$

Таким образом, при выполнении некоторых ограничений предел $\operatorname{Lim}\sigma_s$ существует и равен вполне определенному существенному числу. Формула (17) значительно облегчает технику вычислений и позволяет ввести множество чисел, с которыми можно работать без обращения к их приближениям. К таким относятся числа

$$\sqrt{\mathrm{E}},\ e^{\mathrm{E}},\ \omega^{\mathrm{E}},\ e^{\omega}$$

и т.д. Например, по определению

$$\omega^{\mathrm{E}}\ = \operatorname*{Lim}_{s} \sqrt[s]{s}. \tag{18}$$

Пусть $\rho_s(m)$ — рациональное приближение $\sqrt[s]{s}$ с m десятичными знаками. Тогда в соответствии с формулой (17)

$$\omega^{\mathrm{E}}\ = \operatorname*{limit}_{v} \operatorname*{Lim}_{s} \rho_s\,[v(s)]. \tag{19}$$

Ясно, что все выкладки с представлением (18) гораздо удобнее, чем с приближениями (19).

§ 11. Сравнение предела в смысле Lim с понятием предела классического анализа

Предел в смысле Lim обладает теми же арифметическими свойствами, что и классический предел lim. Например,

$$\operatorname{Lim}(a_n + b_n) = \operatorname{Lim}a_n + \operatorname{Lim}b_n.$$

Рассмотрим вопрос о характере сходимости последовательности $\{a_n\}$ к своему пределу

$$A = \operatorname*{Lim}_{n} a_n. \tag{1}$$

Равенство (1) можно переписать в следующем виде:

$$\operatorname*{Lim}_{n} (a_n - A) = 0. \tag{2}$$

Аналогичное равенство имеет место и в области вещественных чисел: если $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, то

$$\lim_{n \to \infty} (a_n - a) = 0. \tag{3}$$

Поэтому в тех выкладках, где используются только арифметические свойства пределов и свойства (2) или (3), результаты, полученные с применением операции lim, будут аналогичны результатам, полученным с применением операции Lim.

Необходимо, однако, подчеркнуть, что сходимость последовательности $\{a_n\}$ в (2) и (3) носит совершенно различный характер. Например, если α — конечное число, то (3) означает, что модуль разности $(a_n - \alpha)$ неограниченно уменьшается. Если же $\alpha = \infty$, то (3) означает, что a_n — неограниченно увеличивается.

Предел (2) дает более тонкий результат.

Примеры.

1^0. Возьмем две последовательности

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = \frac{1}{n^2}.$$

Операция lim не различает их предельное поведение: в обоих случаях предел равен 0:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Операция Lim пределы a_n и b_n уже различает:

$$\operatorname*{Lim}_{n} \frac{1}{n} = \mathrm{E}, \quad \operatorname*{Lim}_{n} \frac{1}{n^2} = \mathrm{E}^2.$$

2^0. Аналогичное различие наблюдается и при описании бесконечных пределов. Пусть

$$a_n = n, \quad b_n = n^2.$$

С точки зрения классического анализа обе последовательности стремятся к одинаковому пределу — бесконечно большому вещественному числу ∞:

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} n^2 = \infty.$$

В неархимедовом анализе мы получаем различные пределы:

$$\operatorname*{Lim}_{n} n = \omega, \quad \operatorname*{Lim}_{n} n^2 = \omega^2.$$

Таким образом, в первом примере мы из области конечных рациональных чисел с помощью операции lim попадаем в одно и то же число $0_{\text{вещ}}$, а с помощью операции Lim — переходим к различным бесконечно малым числам Е и Е^2. Аналогично во второй группе равенств с помощью операции lim мы «совершаем прыжок» в одну и ту же бесконечно удаленную точку ∞, в то время как с помощью операции Lim «совершаем прыжки» в различные бесконечно большие числа.

Интересно отметить, что операция lim не позволяет сделать «обратный прыжок», т.е. «прыжок» из бесконечности в конечную точку. Результатом любой операции типа

$$\lim_{n\to\infty}(1 - n + \lim_{n\to\infty} n) = \lim_{n\to\infty}(1 - n + \infty)$$

будет неопределенность. Между тем операция Lim позволяет совершить «обратный прыжок» от бесконечно большого числа. Например,

$$\operatorname*{Lim}_{n}(1 - n + \operatorname*{Lim}_{n} n) = \operatorname*{Lim}_{n}(1 - n + \omega) = 1.$$

Есть еще одно, может быть, самое важное различие в операциях lim и Lim. Первая операция применима только к фундаментальным последовательностям рациональных чисел, вторая же — к любым последовательностям, включая, конечно, и фундаментальные. Это приводит к тому, что в области существенных чисел естественным образом появляются делители нуля, двойные единицы и множество других объектов, которые образуют многомерное пространство. Последнее обстоятельство значительно расширяет возможности математического аппарата.

3^0. Можно указать еще одну общую черту у пределов в смыслах lim и Lim. И в том и в другом случае применение процедуры предельного перехода приводит к появлению нового качества. Например, от последовательности рациональных чисел с помощью процедуры lim можно перейти либо к иррациональному числу, либо к бесконечности на вещественной прямой:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e_{\text{вещ}}; \quad \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \infty.$$

Аналогично предельный переход Lim позволяет перейти от вещественного уровня к любым мегауровням:

$$\mathrm{Lim}\, n = \omega, \quad \mathrm{Lim}\, n^n = \omega^\omega.$$

Далее операция lim может быть применена к неравенствам. Правда, операция lim может ослабить неравенство: из строгого неравенства можно получить равенство, но не более того. Как было показано выше, операция Lim может «идти дальше» и изменить знак неравенства на противоположный: $\omega - n^2 > 0$, но $\mathrm{Lim}(\omega - n^2) < 0$.

Далее, если некоторая последовательность $\{a_n\}$ сходится к вещественному числу a, то к этому числу сходится и любая подпоследовательность $\{a_n\}$. Для пределов Lim это принципиально не так: например, последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ сходится к числу E, а ее подпоследовательность $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ — к числу E^2. (Исключением являются только стационарные последовательности.)

В заключение попытаемся неформально понять, какой образ отвечает понятию «сходится» в смысле Lim. В классическом анализе ситуация является ясной: «сходится» — это значит неограниченно приближается в смысле уменьшения модуля разности $|a - a_n|$.

Для сходимости в смысле Lim ситуация другая. Пусть

$$\mathrm{Lim}\, n = \omega, \quad \mathrm{Lim}(\omega - n) = 0.$$

Здесь при любом фиксированном n значение $\omega - n$ больше любого конечного натурального числа. Поэтому прежнее представление о сходимости необходимо чем-то заменить.

Адекватной представляется следующая картина, изображенная на рис. 3.1.

Слева изображена пушка. На ее ствол нанесены деления, соответствующие расстоянию от основания ствола. Пушка стреляет ядрами. Ее устройство позволяет задавать разные законы движения

Рис. 3.1.

ядра по стволу: $L = L(t)$, L — расстояние от начала ствола, t — дискретное время $t = 1, 2, 3\ldots$. Ядро сначала движется по стволу, затем покидает его и приземляется на каком-то расстоянии от точки старта. Ясно, что ядро, которое разгоняется быстрее, например по закону $L(t) = t^3$, должно приземлиться дальше, чем ядро, которое разгоняется медленнее, например по закону $L(t) = t$. Первое ядро достигнет точки $X = \omega^3$, второе — точки $X = \omega$. Как теперь представить полет ядра с момента покидания им ствола до момента приземления? Точнее всего представить его как прыжок через бездну, которая разделяет между собой качественно различные уровни неархимедовой прямой.

Например, в рассматриваемом случае — область конечного и область бесконечного.

Таким образом, сходимость в смысле Lim можно представить как полет ядра, которое разгоняется по закону $X = X(n)$ и в своем полете достигает качественно нового уровня:

$$X^* = \operatorname{Lim} X(n).$$

Указанный образ помогает «примириться» и с парадоксальным на первый взгляд фактом: возможным изменением знака неравенств в результате операции предельного перехода Lim.

На рис. 3.2 изображены две пушки. Ствол первой располагается на отрезке $1, 2, \ldots n, \ldots$, ствол второй — на отрезке $2\omega + 1, 2\omega + 2 \ldots 2\omega + n, \ldots$. Таким образом, вторая пушка располагается впереди первой. Пусть первая пушка является более дальнобойной, чем вторая. Причем различие в дальнобойности превышает расстояние между пушками. Тогда ядро из первой пушки упадет дальше, чем ядро из второй пушки.

На этих образах смена знака неравенства $n^2 < 2\omega + n$ при переходе к пределу Lim выглядит вполне естественной. Пушка, расположенная левее, имеет дальнобойность до точки ω^2, так как $\operatorname{Lim}_n n^2 = \omega^2$. При этом пушка, расположенная правее, имеет дально-

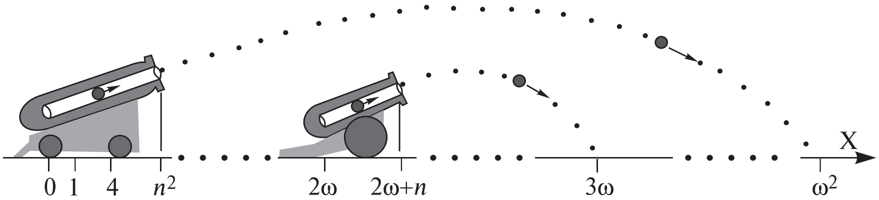

Рис. 3.2.

бойность ω. Ядро из нее достигает точки 3ω: $\mathrm{Lim}(2\omega + n) = 3\omega$. Причем вклад в общее расстояние, равный 2ω, связан только с расположением пушки, а вклад величины ω — с собственной ее дальнобойностью.

§ 12. Пределы несчетных последовательностей существенных чисел

Пусть

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_\omega, \ldots \sigma_\mu, \ldots \sigma_\nu, \ldots \tag{1}$$

— несчетная последовательность существенных чисел, где

$$\sigma_\nu = \operatorname*{limit}_{\mu} A_\nu(\mu). \tag{2}$$

Определение 12.1. *Примем по определению, что последовательность (1) сходится к числу $0_{\text{сущ}}$, если для любого наперед заданного числа* Γ *из продолженного натурального ряда найдутся числа* $\mathrm{N}(\Gamma)$ *и* $\mathrm{M}(\Gamma, \nu)$ *из этого же ряда такие, что при любых*

$$\nu > \mathrm{N}(\Gamma), \quad \mu > \mathrm{M}(\Gamma, \nu) \tag{3}$$

будут иметь место неравенства

$$|A_\nu(\mu)| < 1/\Gamma.$$

Данный факт будем фиксировать записью

$$\operatorname*{limit}_{\nu} \sigma_\nu = 0$$

и говорить, что число 0 является пределом последовательности (1).

Определение 12.2. *Последовательность (1) называется сходящейся, если найдется такое существенное число* σ^*, *что* $\operatorname*{limit}_{\nu}(\sigma_\nu - \sigma^*) = 0$. *Число* σ^* *будем считать пределом последовательности* σ_ν *и записывать* $\sigma_\nu \to \sigma^*$, *или* $\sigma^* = \operatorname*{limit}_{\nu} \sigma_\nu$.

Доказательство корректности принятых определений не представляет никаких трудностей. Легко также доказать эквивалентность определения 12.2 и следующего определения предела.

Определение 12.3. *Существенное число* σ^* *называется пределом несчетной последовательности (1), если для любого* Γ *можно найти такое* Λ, *что при* $\nu > \Lambda$

$$|\sigma_\nu - \sigma^*| < 1/\Gamma,$$

где Γ, Λ *принадлежат продолженному натуральному ряду.*

Определение 12.4. *Несчетная последовательность существенных чисел (1) называется фундаментальной, если для любого числа* Γ *из продолженного натурального ряда найдется число* Λ, *принадлежащее тому же ряду, такое, что для любых* $\mu, \nu > \Lambda$

$$|\sigma_\nu - \sigma_\mu| < 1/\Gamma.$$

Теорема 12.1. *Необходимым и достаточным условием сходимости несчетной последовательности существенных чисел является ее фундаментальность.*

Теорема 12.2. *Любая несчетная подпоследовательность сходящейся последовательности является также сходящейся и имеет тот же самый предел, что и исходная последовательность.*

Все доказательства нетрудно провести, используя схему [101]. Из последней теоремы следует, что всегда можно выбрать $A_\nu(\mu)$ в равенстве (2) так, чтобы предел последовательности (1) можно было вычислять как предел диагональной последовательности

$$\sigma^* = \operatorname*{limit}_{\nu} \sigma_\nu = \operatorname*{limit}_{\nu} \operatorname*{limit}_{\mu} A_\nu(\mu) = \operatorname*{limit}_{\nu} A_\nu(\nu). \tag{4}$$

Теорема 12.3. *Если*

$$\operatorname*{limit}_{\nu\to\infty} \sigma_\nu > 0,$$

то найдется «натуральное» Λ *такое, что при* $\nu > \Lambda$ *будут иметь место следующие неравенства:* $\sigma_\nu > 0$.

Доказательство следует из теоремы 5.3 и равенства (4).

§ 13. Сравнение предела в смысле limit с пределом классического анализа lim

Во-первых, оба предела обладают одинаковыми арифметическими свойствами:

$$\lim_{n\to\infty}(p_n + q_n) = \lim_{n\to\infty} p_n + \lim_{n\to\infty} q_n,$$
$$\operatorname{limit}(A_\nu + B_\nu) = \operatorname{limit} A_\nu + \operatorname{limit} B_\nu$$

и др. Во-вторых, есть аналогия и в характере сходимости. Если $A_\nu \to \sigma$, то

$$\operatorname*{limit}_{\nu}(\sigma - A_\nu) = 0$$

и, следовательно, разность $|\sigma - A_\nu|$ с увеличением ν становится меньше сколь угодно малого бесконечно малого числа λ.

Таким образом, понятие предела limit в области существенных чисел аналогично понятию предела lim в области вещественных чисел. Есть также аналогия и в соответствующих теоремах и их доказательствах.

§ 14. Наличие двух типов переменных (т.е. неактуальных) бесконечно малых величин

В анализе-1 сначала вводится понятие предела последовательности, а затем выделяется особый класс последовательностей, предел которых равен нулю. Последовательности, принадлежащие к этому классу, называются бесконечно малыми величинами. Коль скоро речь идет о последовательностях, то название можно было бы уточнить и говорить о «переменных бесконечно малых величинах». Так как актуальных бесконечно малых величин в классическом анализе нет, то указанное уточнение, как правило, не используется. В неархимедовом анализе такое уточнение необходимо, так как здесь есть актуальные бесконечно малые величины Е, E^2 и др., которые во всех вычислениях используются «на равных» с обычными числами типа $1/3, \pi$ или e.

Определение 14.1. *Несчетную последовательность* (*порядкового типа 2*)

$$\mathrm{X}_1,\ \mathrm{X}_2,\ldots \mathrm{X}_\omega,\ldots \mathrm{X}_\nu,\ldots$$

будем называть переменной бесконечно малой величиной типа 2, *если*

$$\operatorname*{limit}_{\nu\to\infty} \mathrm{X}_\nu = 0.$$

Определение 14.2. *Счетную последовательность* (*порядкового типа 1*)

$$\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots \mathrm{X}_n,\ldots$$

будем называть переменной бесконечно малой величиной типа 1, *если*

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\omega} \mathrm{X}_n = 0.$$

Будем использовать также различные вариации указанных названий, например вместо номера типа будем указывать на тип предельного перехода или характер последовательности. Там, где возможно, будем опускать даже уточнение «переменная» бесконечно малая величина.

Определение 14.3. *Бесконечно малые типа 2* Y_v, X_v *или типа 1* Y_n, X_n *будем считать эквивалентными, если*

$$\underset{v\to\infty}{\text{limit}}\frac{Y_v}{X_v}=1 \quad \text{или} \quad \underset{n\to\omega}{\text{Lim}}\frac{Y_n}{X_n}=1.$$

Для не эквивалентных бесконечно малых можно ввести их шкалу по образцу анализа-1. Бесконечно малые типа 2 аналогичны бесконечно малым классического анализа. Поэтому все определения анализа-2, связанные с пределами (непрерывность и др.), могут быть изложены на языке бесконечно малых типа 2. Для бесконечно малых типа 1 аналога в классическом анализе нет. Это связано с тем, что для «переменных бесконечно малых величин» операция типа $\lim\limits_{n\to\infty}(\infty - x_n)$ не определена, хотя сама операция $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ имеет некоторые общие черты с операцией Lim анализа-2.

Примеры.

1^0. Эквивалентные бесконечно малые типа 2:

$$X_v=\frac{1}{v},\quad Y_v=\frac{v}{v^2+1}.$$

2^0. Не эквивалентные величины типа 2:

$$X_v=\frac{1}{v},\quad Y_v=\frac{2}{v} \quad \text{или} \quad \frac{\omega^2}{v},\ \frac{E^\omega}{v},\ \frac{1}{v^2}.$$

3^0. Эквивалентные бесконечно малые типа 1:

$$X_n=\omega-n;\quad Y_n=(\omega-n)+(\omega-n)^2;$$

$$X_n=\frac{1}{n}-E;\quad Y_n=\frac{1}{n}-E+\left(\frac{1}{n}-E\right)^2.$$

4^0. Не эквивалентные бесконечно малые типа 1:

$$X_n=\omega-n,\quad Y_n=\omega(\omega-n).$$

§ 15. О точных гранях ограниченных числовых множеств. О неархимедовом аналоге леммы Больцано — Вейерштрасса

1. Точные грани бесконечных множеств

В классическом анализе имеет место следующая теорема: любое ограниченное сверху множество вещественных чисел имеет точную верхнюю грань. Если множество сверху не ограничено, то в качестве точной верхней грани берется несобственное число $+\infty$. Например, точной верхней гранью совокупности чисел

$$x_n = 1 - \frac{1}{n}, \tag{1}$$

где $n = 1, 2, 3\ldots,$ является число 1. Точной верхней гранью совокупности

$$x_n = n^2 \tag{2}$$

считается число $+\infty$ и т.д. Данная теорема является довольно простым следствием принятой концепции вещественного числа. Однако можно сказать и по-другому: утверждение о существовании точной верхней грани является составной частью самой концепции вещественного числа. (При аксиоматическом изложении теории вещественных чисел наличие точной грани постулируется как аксиома [102].)

В неархимедовом анализе ситуация сложнее. Здесь можно указать сколько угодно ограниченных сверху множеств, для которых точная верхняя грань существует. Однако возможна и противоположная ситуация: множество сверху ограничено, но точной верхней грани нет. (Для нижних граней ситуация аналогична.) Пусть, например,

$$\mathrm{X}_\nu = 1 - \frac{1}{\nu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots .$$

Данное множество ограничено сверху числом 1 и 1 — его точная верхняя грань. Ситуация аналогична классической. Примеры отсутствия верхней грани приведены далее. Рассмотрим одно достаточное условие существования верхней грани.

Теорема 15.1. *Любая строго монотонно возрастающая ограниченная несчетная последовательность чисел, принадлежащих неархимедовой прямой, имеет точную верхнюю грань.*

Требование монотонности можно ослабить, но совсем исключить нельзя. Действительно, последовательность

$$A_\nu = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{\nu} & \text{при } \nu = 1, 2, \ldots n, \ldots, \\ \dfrac{1}{\nu} & \text{при } \nu = \omega, \omega + 1, \ldots \end{cases}$$

имеет тип 2 и ограничена снизу и сверху числами 0, 1. Однако точной верхней грани здесь нет. Перейдем к доказательству теоремы.

• Доказательство. Вначале предположим, что все члены последовательности суть элементарные числа и Σ — их верхняя грань:

$$A_1 < A_2 < \ldots < A_\omega < \ldots < A_\nu < \ldots < A_{\nu+\mu} < \ldots < \Sigma. \qquad (3)$$

Пусть

$$A_\nu = \operatorname*{Lim}_{\kappa} r_\nu(\kappa),\ \ \Sigma = \operatorname*{Lim}_{\kappa} \Sigma(\kappa),\ \ \kappa = 1,\ 2,\ 3\ldots\ .$$

Зафиксируем κ и рассмотрим последовательность

$$r_1(\kappa) < \ldots < r_\omega(\kappa) < \ldots < r_\nu(\kappa) < \ldots < r_{\nu+\mu}(\kappa) < \ldots < \Sigma(\kappa). \qquad (4)$$

Последовательность принадлежит к типу 2 и состоит только из абсолютных рациональных чисел. Она монотонна, ограничена и по теореме классического анализа сходится в том смысле, как это понимается в классическом анализе. Следовательно, (4) является последовательностью Коши. Тогда по любому заданному рациональному числу $\varepsilon(\kappa)$ можно найти, вообще говоря, бесконечно большой номер $M(\kappa)$ такой, что для любого $\nu > M(\kappa)$ и любых «натуральных» μ будет иметь место неравенство

$$r_{\nu+\mu}(\kappa) - r_\nu(\kappa) < \varepsilon(\kappa). \qquad (5)$$

Возьмем убывающую последовательность значений $\varepsilon(\kappa)$, которая соответствует некоторому наперед заданному «натуральному» числу $\Gamma = \operatorname*{Lim}_{\kappa} 1/\varepsilon(\kappa)$. Тогда последовательность номеров $M(\kappa)$ будет монотонно возрастающей:

$$M(1) < M(2) < \ldots < M(\kappa) < \ldots\ .$$

Положим

$$\Lambda = \operatorname*{Lim}_{\kappa} M(\kappa).$$

Число Λ всегда можно заменить на большее, поэтому его можно считать «натуральным» с самого начала. (Здесь предполагается, что «натуральным» ряд не ограничен.) Пусть $\nu > \Lambda$. Тогда при любом κ имеет место неравенство (5) для числа Λ, не зависящего от κ. Поэтому в (5) можно перейти к пределу. В результате получим

$$|A_{\nu+\mu} - A_\nu| < \frac{1}{\Gamma}.$$

Следовательно, последовательность (3) является фундаментальной и, значит, существует ее предел

$$\sigma^* = \operatorname*{limit}_{\nu\to\infty} A_\nu.$$

Легко доказать, что число σ^* и будет точной верхней гранью множества (3).

Рассмотрим второй случай, когда монотонная последовательность состоит из существенных чисел, принадлежащих неархимедовой прямой:

$$\sigma_1 = \operatorname*{limit}_{\mu} A_1(\mu) < \sigma_2 = \operatorname*{limit}_{\mu} A_2(\mu) < \ldots < \sigma_\nu = \operatorname*{limit}_{\mu} A_\nu(\mu) < \ldots < \Sigma. \quad (6)$$

Сделаем анализ. Предположим, что последовательность (6) сходится, т.е. объект

$$\sigma^* = \operatorname*{limit}_{\nu} \sigma_\nu = \operatorname*{limit}_{\nu} \operatorname*{limit}_{\mu} A_\nu(\mu) \quad (7)$$

существует. Например, если

$$A_\nu(\mu) = \frac{\nu}{\mu} + 1 - \frac{1}{\nu},$$

то

$$\sigma_\nu = \operatorname*{limit}_{\mu\to\infty}\left(\frac{\nu}{\mu} + 1 - \frac{1}{\nu}\right) = 1 - \frac{1}{\nu} \quad \text{и} \quad \sigma^* = 1.$$

Возьмем последовательность диагональных членов. В данном случае она будет монотонной:

$$A_1(1) < A_2(2) < \ldots < A_\nu(\nu) < \ldots < \Sigma, \quad (8)$$

так как $A_\nu(\nu) = 2 - 1/\nu$. Предел этой последовательности с пределом (7) не совпадает. Если же в (7) при фиксированных ν переходить к подпоследовательностям по μ (то есть увеличивать скорость сходимости к σ_ν), то придем к ситуации, когда

$$\sigma^* = \operatorname*{limit}_{\nu} \operatorname*{limit}_{\mu} A_\nu(\mu) = \operatorname*{limit}_{\nu} A_\nu(\nu). \quad (9)$$

Данная ситуация характеризуется тем, что дальнейшее увеличение скорости сходимости правую часть (9) уже не меняет.

Перейдем теперь к доказательству теоремы. Обратимся к неравенствам (6). Из классов эквивалентности σ_ν выберем такие представители последовательностей $A_\nu(\mu)$, чтобы из (6) всегда следовала цепочка неравенств (8). Здесь мы попадаем в условия (3) и можем утверждать, что диагональный предел

$$\tau^* = \operatorname*{limit}_{\nu} A_\nu(\nu)$$

существует. Будем теперь увеличивать скорость сходимости $A_\nu(\mu)$ к σ_ν и, значит, приближать $A_\nu(\nu)$ к σ_ν. В результате придем к значению τ^*, которое при дальнейшем увеличении скорости сходимости больше не меняется. Данное значение можно обозначить как σ^* и утверждать, что σ^* — это и есть точная верхняя грань последовательности (6).

Что и требовалось доказать. ■

Обсудим теперь данную теорему неформально. Главным (точнее, необходимым, но не достаточным) признаком существования точной грани является «количество» элементов в ограниченном множестве. Их должно быть достаточно много. Нетрудно понять, «сколько» именно элементов необходимо для существования точной грани. Можно ожидать, что их должно быть не меньше, чем элементов в продолженном натуральном ряде чисел. Это соображение основано на следующем. Точная верхняя грань должна конструироваться из элементов числового множества, которое эта грань ограничивает. То есть грань — это число на неархимедовой прямой. С другой стороны, данное число — это класс последовательностей, занумерованных числами продолженного натурального ряда, т.е. ряда типа 2. Поэтому исходного материала для такой конструкции должно быть не меньше, чем элементов в последовательности типа 2.

Если исходного материала недостаточно, то грани не существует. Например, возьмем то же самое множество рациональных чисел (1), но расположенных уже на существенной прямой. Значение $x^* = 1_{\text{сущ}}$ по-прежнему будет его верхней гранью. Но теперь это значение уже не будет точной верхней гранью, так как кроме числа 1, можно указать еще сколько угодно верхних граней. Например,

$$1 - \mathrm{E}^{\omega},\ 1 - \mathrm{E}^2,\ 1 - \mathrm{E},\ 1 - 2\mathrm{E},\ 1 - 3\mathrm{E}, \ldots .$$

Такая же ситуация будет и для множества (2). Число $\infty_{\text{сущ}}$ будет для (2) верхней гранью. Однако верхней гранью будет и любое актуальное бесконечно большое число. Например,

$$\omega^{\omega},\ \omega^2,\ \omega,\ \frac{\omega}{2},\ \frac{\omega}{3}, \ldots \frac{\omega}{n}, \ldots . \tag{10}$$

Ряд (10) можно продолжать сколько угодно на любые значения n. Ясно, что никакой точной грани здесь не обнаружится. Фигурально выражаясь, можно сказать так: конечное (2) и бесконечное (10) не могут сомкнуться в какой-то конкретной точке. Между ними всегда есть пропасть, обозначаемая знаком пробела. Формально это означает, что на неархимедовой прямой у множества (2) точная верхняя грань отсутствует. Ту же самую природу имеет и факт отсутствия точной нижней грани у ограниченного снизу множества $x_n = 1/n$. Последнее означает, что миры конечного и актуально бесконечно малого также разделены пропастью. (Конечное и бесконечно малое не могут сойтись в какой-то точке, которая и была бы тогда точной гранью.) В гл. 8, § 36 будет введено понятие точки горизонта, которое заменяет понятие точной грани в указанных ситуациях.

2. О неархимедовом аналоге леммы Больцано — Вейерштрасса

В классическом анализе большую роль играет лемма Больцано — Вейерштрасса, согласно которой «из любой ограниченной последовательности (1) всегда можно извлечь такую частичную последовательность (4), которая сходилась бы к конечному пределу» [103]. Последовательности, обозначенные в данной цитате как (1) и (4), имеют порядковый тип 1, ограниченность означает существование конечного натурального числа, которое превосходит модуль любого члена последовательности. И наконец, под конечным пределом понимается некоторое вещественное число. В неархимедовом анализе исходная последовательность и ее подпоследовательность имеют порядковый тип 2. Ограниченность означает существование конечного или бесконечно большого «натурального» числа, которое превосходит модуль любого члена последовательности. Сходимость означает наличие существенного числа, которое является пределом некоторой подпоследовательности. Выше было показано, что главным условием существования точной грани является «количество» элементов в ограниченном множестве. Это обстоятельство — основное и для существования сходящейся частичной последовательности. Ясно, что она должна иметь порядковый тип 2. Этого, однако, может быть недостаточно. Последнее проще всего показать, рассматривая процедуру определения предельной точки.

Предварительно введем два понятия. Хорошо известно, какое большое значение в математике имеют символические обозначения и различные правила манипулирования с ними. Запишем символ

$$\operatorname*{limit}_{\nu\to\infty} \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} r_\nu(n). \tag{11}$$

Предположим, что последовательность под знаком limit ограничена числами

$$P = \operatorname{Lim} p(n),\ \ Q = \operatorname{Lim} q(n),$$

$$P < A_1 = \operatorname*{Lim}_n r_1(n), \ldots A_\nu = \operatorname*{Lim}_n r_\nu(n) < Q.$$

Если дополнительно известно, что данная последовательность является фундаментальной, то символ (11) обозначает некоторое число на неархимедовой прямой. В противном случае «предела не существует» и (11) — только некоторый символ. Переставим в (11) знаки пределов и запишем новый символ:

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\omega}\left[\operatorname*{limit}_{\nu} r_{\nu}(n)\right]. \tag{12}$$

В рамках введенных понятий выражение в квадратных скобках смысла не имеет. Каждый из членов $r_{\nu}(n)$ — это абсолютное рациональное число. Можно сказать так: абсолютные рациональные числа отстоят друг от друга слишком далеко, чтобы можно было ставить вопрос о пределе их последовательности в смысле limit. Однако можно поставить вопрос по-другому: последовательность

$$p(n) < r_1(n),\ \ r_2(n),\dots r_{\omega}(n),\dots r_{\nu}(n),\dots < q(n)$$

бесконечна и ограничена (в ней n — фиксированный параметр). По теореме классического анализа она имеет точные нижнюю и верхние грани $\alpha(n),\ \beta(n),$ где α и β — вещественные числа. «Более точного» результата классический анализ дать не может. Здесь он, однако, и не требуется. Коль скоро последовательность $r_{\nu}(n)$ определяет два вещественных числа, то, следовательно, она определяет и ядра вещественных чисел $\alpha^*,\ \beta^*.$ А эти объекты уже принадлежат к неархимедовой прямой и могут быть введены в арсенал средств неархимедового анализа. Дадим следующее

Определение 15.1. *Если r_{ν} — ограниченная последовательность абсолютных рациональных чисел и вещественные числа α и β — ее точные нижняя и верхняя грани, то ядра данных вещественных чисел будем обозначать как*

$$\alpha^* = \underline{\operatorname{limit}}\, r_{\nu},\ \beta^* = \overline{\operatorname{limit}}\, r_{\nu}$$

и называть наименьшим и наибольшим пределом последовательности r_{ν}. Под знаком предела в случае необходимости будем помещать символ ν или $\nu \to \infty$.

Теперь символу (12) можно приписать два смысла:

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\omega}\underline{\operatorname{limit}}\, r_{\nu}(n) = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega}\alpha^*(n),$$
$$\operatorname*{Lim}_{n\to\omega}\overline{\operatorname{limit}}\, r_{\nu}(n) = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega}\beta^*(n).$$

Перейдем теперь к аналогу леммы Больцано — Вейерштрасса. Пусть имеется ограниченная последовательность чисел, принадлежащих неархимедовой прямой:

$$P_1 \le \sigma_1,\ \ \sigma_2,\dots \sigma_n,\dots \sigma_{\omega},\dots \sigma_{\nu},\dots \le Q_1. \tag{13}$$

В классическом анализе не требуется, чтобы все члены последовательности были различными. Лемма будет верна и в этом случае. В неархимедовом анализе это не так. Если, например, есть совпадающие члены и последовательность фактически сводится к типу 1, то предельной точки заведомо не существует. Поэтому предположим, что все значения σ_ν различны. Пусть числа (13) расположены на оси OX. Отобразим ее на ось OY с помощью линейного преобразования:

$$\mathrm{Y} = \frac{\mathrm{X}}{Q_1 - P_1} + \frac{P_1 + Q_1}{2(Q_1 - P_1)}.$$

На оси OY все числа попадают на единичный отрезок $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Применим к данному отрезку процедуру Больцано. Разделим отрезок пополам. В классическом анализе считается, что всегда можно определить ту половину отрезка, в которую попало бесконечное число точек. Примем, что в неархимедовом анализе всегда можно определить половину отрезка, в которую попало несчетное число точек. Выберем именно эту половину. Если возникает произвол, то всегда будем выбирать левую половину. Повторим эту процедуру 1, 2, 3… к,… раз. В результате придем к последовательности стягивающихся отрезков. Данная последовательность определяет вещественное число δ_1. Если предельная точка существует, то она либо совпадает с ядром числа δ_1, т.е. с точкой δ_1^*, либо находится в ореоле этого ядра. Иными словами, стандартная часть предельной точки должна быть равна δ_1^*. Сделаем замену $\mathrm{Z} = \mathrm{Y} - \delta_1^*$. Отбросим все точки σ_ν, для образов которых σ'_ν на оси OZ $st\sigma'_\nu \neq 0$. Точки с нулевой стандартной частью перенумеруем заново и обозначим как σ'_ν. Таким образом, теперь для любого ν $st\sigma'_\nu = 0$. Пусть

$$\sigma'_\nu = \underset{\mu}{\mathrm{limit}}\, \underset{n}{\mathrm{Lim}}\, r_\nu(\mu, n).$$

Для бóльшей ясности предположим, что σ_ν — это элементарные числа. (В общем случае результаты аналогичны.) Тогда $\sigma_\nu = \underset{n}{\mathrm{Lim}}\, r_\nu(n)$ и проблема сводится к анализу совокупности функций $r_\nu(n)$ (рис. 3.3).

Аргумент пробегает конечные натуральные значения 1, 2, 3,… . Значения функции — обычные (т.е. абсолютные) рациональные числа. Индекс ν — идентификатор конкретной функции из заданной их совокупности. Так как для любого ν имеет место условие $\lim\limits_{n\to\infty} r_\nu(n) = 0$, то график каждой из функций стремится к горизонтальной асимптоте $\mathrm{Z} = 0$. Рассмотрим точки пересечения графиков с

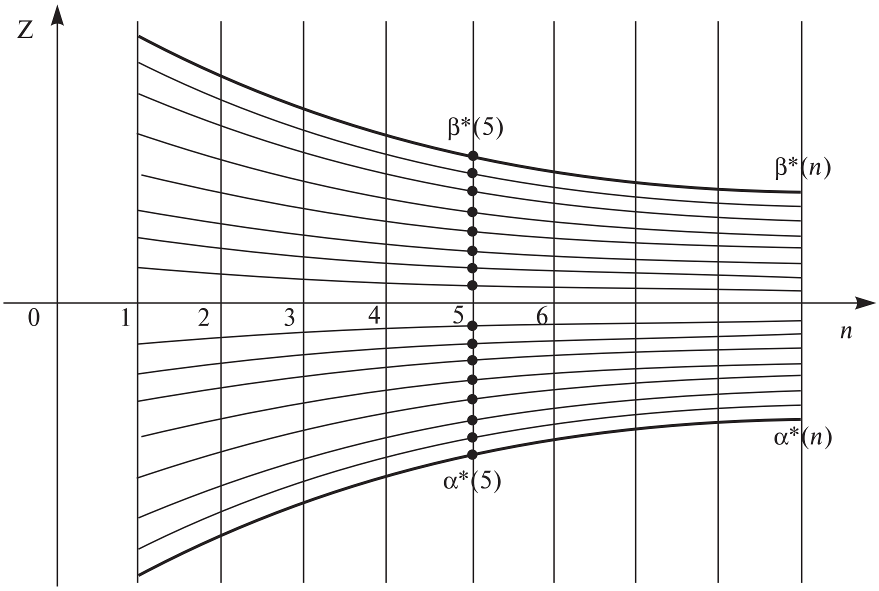

Рис. 3.3.

фиксированной вертикальной прямой n = const. Пусть α_1 и β_1 — точная нижняя и верхняя грани данной совокупности, α_1, β_1 — обычные вещественные числа. Их ядра, согласно Определению 15.1, обозначены как

$$\alpha_1^*(n) = \underline{\text{limit}}\, r_\nu(n), \qquad \beta_1^*(n) = \overline{\text{limit}}\, r_\nu(n).$$

Теперь можно утверждать, что для любого ν

$$\operatorname*{Lim}_n \alpha_1^*(n) \le \sigma'_\nu \le \operatorname*{Lim}_n \beta_1^*(n). \tag{14}$$

Указанные границы — бесконечно малые числа. Поэтому интервал (14) лежит внутри ореола числа $0_{\text{вещ}}$ и дает новые границы для положения предельной точки. Возвращаясь к исходной прямой OX, вместо (13) теперь можно записать

$$P_2 \le \sigma_\nu \le Q_2,$$

где

$$P_2 = (Q_1 - P_1)\left(\delta_1^* + \operatorname*{Lim}_n \alpha_1^*(n)\right) + \frac{P_1 + Q_1}{2}, \tag{15}$$

$$Q_2 = (Q_1 - P_1)\left(\delta_1^* + \operatorname*{Lim}_n \beta_1^*(n)\right) + \frac{P_1 + Q_1}{2}.$$

Отсюда

$$Q_2 - P_2 = (Q_1 - P_1)\,\underset{n}{\mathrm{Lim}}\left(\beta_1^*(n) - \alpha_1^*(n)\right). \qquad (16)$$

Растянем теперь интервал $[P_2, Q_2]$ до единичного и применим к нему процедуру Больцано. В результате придем к формулам (15), (16), в которых нижние индексы увеличены на единицу. И так далее. Таким образом на первом этапе приходим к последовательности интервалов с границами $[P_\kappa, Q_\kappa]$, где $\kappa = 1, 2, 3\ldots$ Перейдем теперь к пределу $\underset{\kappa}{\mathrm{Lim}}$. В результате получим интервал $[P_\omega, Q_\omega]$. Растянем его до единичного интервала, проделаем те же процедуры и придем к формулам (15) с индексами $\omega + 1$ и ω. То есть вычислим $[P_{\omega+1}, Q_{\omega+1}]$. Дальше переходим к индексам $\omega + 2, \ldots \omega^2, \ldots \omega^\omega \ldots, \nu$ и т.д.

На любом шаге мы можем получить ситуацию, когда на очередном интервале не окажется достаточного запаса точек. В алгоритме это проявится в том, что левая часть равенства вида (16) обратится в нуль. На данном шаге вся процедура останавливается и делается заключение о том, что предельной точки не существует. Если же этого не происходит, то процесс продолжается. В таком случае из формул (16) (с соответствующими индексами) видно, что $\underset{\nu\to\infty}{\mathrm{limit}}(Q_\nu - P_\nu) = 0$. Следовательно, предельная точка существует и предложенный алгоритм позволяет вычислить ее координату.

Для вещественной прямой имеется исчерпывающая характеристика исходного множества, которая гарантирует существование предельной точки: множество должно быть, по крайней мере, счетно-бесконечным.

На неархимедовой прямой ситуация гораздо сложнее:

1) во-первых, если ограниченная последовательность является счетной и принадлежит к типу 1, то предельной точки заведомо нет (ее не будет, даже если потребовать монотонность последовательности);

2) далее ясно, что в общем случае предельной точки не будет, если опираться на ограниченный «натуральный» ряд, который используется для нумерации чисел последовательности σ_ν. Такие ряды являются счетными;

3) более того, даже если допустить, что индекс ν принадлежит неограниченному и, значит, несчетному «натуральному» ряду, то это также не гарантирует существования предельной точки;

4) предельной точки может не быть, даже если допустить континуум элементов в ограниченном множестве.

Действительно, возьмем, например, ограниченное множество ядер вещественных чисел из отрезка [0,1]. Значит, $P_1 = 0$, $Q_1 = 1$. Пройдем по описанному выше алгоритму. В результате получим $\delta_1 = 0_{\text{вещ}}$ и $\delta_1^* = 0_{\text{сущ}}$. Дальше мы должны отбросить все числа, стандартная часть которых отлична от нуля. Следовательно, мы отбросим все числа, кроме самого числа $\delta_1^* = 0_{\text{сущ}}$. То есть уже на первом шаге необходимый запас точек исчерпывается. Таким образом, даже континуального запаса точек для наших целей оказалось недостаточно.

Полученный отрицательный результат имеет, тем не менее, положительное следствие. Видно, что отсутствие предела связано с тем фактом, что не только рациональные, но и ядра вещественных чисел образуют на неархимедовой прямой весьма разреженное множество: в окрестности $(\alpha^* - E,\ \alpha^* + E)$ ядра любого вещественного числа α не содержится ни одного ядра другого вещественного числа.

Данное обстоятельство открывает новые возможности для дальнейших построений. На интуитивном уровне их можно описать следующим образом. Коль скоро неархимедова прямая в области конечных натуральных чисел распадается на отдельные отрезки (длиной 2E) и каждый из отрезков содержит ядро только одного вещественного числа, то можно поставить вопрос о «количестве» этих отрезков и, следовательно, о «количестве» вещественных чисел. (Между отрезками есть интервалы прямой, которые вообще не содержат ни одного ядра вещественного числа.) Подробнее этот вопрос рассматривается ниже (§ 55 гл. 14).

Глава 4

Ряды в области существенных чисел

В классическом анализе теория рядов — это теория пределов последовательностей, изложенная на языке бесконечных сумм. Естественно сделать подобный шаг и в неархимедовом анализе. Это значит, что теорию пределов теперь необходимо изложить на языке бесконечных сумм. В неархимедовом анализе есть актуальные бесконечно большие числа и есть собственно бесконечность ∞. В соответствии с этим можно рассматривать либо суммы с числом слагаемых, равным актуальному бесконечно большому числу (ряды типа 1, или счетные ряды), либо суммы с неограниченным числом слагаемых (ряды типа 2, или несчетные ряды).

§ 16. Счетные ряды

1. Непрерывный случай

Вначале рассмотрим суммы рациональных чисел. В качестве исходного возьмем определение предела $s = \mathrm{Lim}\, s_n$. Предел s — это класс эквивалентности последовательностей, в который входит последовательность

$$s_1,\ s_2, \ldots s_n, \ldots\ . \tag{1}$$

В данный класс могут входить также последовательности, которые отличаются от указанной последовательности любым конечным числом членов.
Положим

$$p_1 = s_1,\ p_2 = s_2 - s_1, \ldots p_n = s_n - s_{n-1}.$$

Тогда

$$s_n = p_1 + p_2 + \ldots + p_n. \tag{2}$$

Следовательно, вместо исходной последовательности (1) мы имеем последовательность сумм

$$p_1,\ p_1 + p_2;\ p_1 + p_2 + p_3, \ldots p_1 + p_2 + \ldots + p_n, \ldots\ . \tag{3}$$

Данные суммы будем называть частичными суммами. Таким образом, можно записать

$$s = \operatorname*{Lim}_{n \to \omega} s_n = \operatorname*{Lim}_{n \to \omega} (p_1 + p_2 + \ldots + p_n). \tag{4}$$

Здесь сумма (2) играет роль представления закона изменения s_n от n. Некоторые свойства (4) следуют непосредственно из определения предела $\operatorname*{Lim}_{n \to \omega} s_n$. Ясно, что значения предела не изменятся, если добавить, например, одно слагаемое, равное 0, либо объединить два слагаемых в одно:

$$\operatorname*{Lim}_{n \to \omega} (p_1 + p_2 + \ldots + p_n) = \operatorname*{Lim}_{n \to \omega} (0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_n),$$

$$\operatorname*{Lim}_{n \to \omega} (p_1 + p_2 + \ldots + p_n) = \operatorname*{Lim}_{n \to \omega} [(p_1 + p_2) + \ldots + p_n].$$

Если мы дадим вариацию любому из слагаемых с фиксированным номером, то предел изменится на величину данной вариации. Действительно, заменим, например, p_3 на $p_3 + q_3$. Тогда на эту величину изменится третий и все последующие члены последовательности (3). Поэтому предел получит приращение q_3:

$$\operatorname*{Lim}_{n \to \omega} [p_1 + p_2 + (p_3 + q_3) + p_4 + \ldots + p_n] =$$

$$= \operatorname*{Lim}_{n \to \omega} (p_1 + p_2 + \ldots + p_n) + q_3.$$

Можно дать вариацию каждому из слагаемых. В результате получим

$$\begin{aligned} &\operatorname*{Lim}_{n \to \omega} [(p_1 + q_1) + (p_2 + q_2) + \ldots + (p_n + q_n)] = \\ &= \operatorname*{Lim}_{n \to \omega} (p_1 + p_2 + \ldots + p_n) + \operatorname*{Lim}_{n \to \omega} (q_1 + q_2 + \ldots + q_n). \end{aligned} \tag{5}$$

Так как под знаком Lim всегда стоит сумма конечного числа слагаемых, то слагаемые в (5) можно записать в каком угодно порядке и с какими угодно скобками. Например,

$$\operatorname*{Lim}_{n \to \omega} [(p_1 + q_1) + \ldots + (p_n + q_n)] =$$

$$= \operatorname*{Lim}_{n \to \omega} [p_1 + p_2 + \ldots + p_n + q_1 + q_2 + \ldots + q_n] =$$

$$= \operatorname*{Lim}_{n \to \omega} [p_n + q_n + p_{n-1} + q_{n-1} + \ldots + p_1 + q_1].$$

Выше неоднократно использовалось понятие непрерывного продолжения функции. Если функция $f(n)$ определена при конечных натуральных значениях n, то непрерывным продолжением ее в точку $v = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} v(n)$ называлось следующее число:

$$f(v) = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} f(v(n)).$$

В частности,

$$f(\omega-2) = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} f(n-2), \quad f(\omega-1) = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} f(n-1),$$
$$f(\omega) = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} f(n), \ldots f(\omega^2) = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} f(n^2). \tag{6}$$

Таким образом, сумма (4) по определению представляет собой не что иное, как непрерывное продолжение частичных сумм s_n в точку ω:

$$s = s_\omega = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega}(p_1 + p_2 + \ldots + p_n).$$

В соответствии с (6) непрерывное продолжение в точку $\omega - 1$ равно

$$s_{\omega-1} = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} s_{n-1} = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega}(p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1}).$$

Отсюда

$$s_\omega - s_{\omega-1} = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} p_n = p_\omega, \tag{7}$$

$$s_\omega = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega}(p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} + p_n) = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega}(p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1}) + p_\omega. \tag{8}$$

Аналогично

$$s_\omega = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega}(p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-2}) + p_{\omega-1} + p_\omega$$

и т.д. С другой стороны ряда имеем

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\omega}(p_1 + p_2 + \ldots + p_n) = p_1 + \operatorname*{Lim}_{n\to\omega}(p_2 + p_3 + \ldots + p_n). \tag{9}$$

Все это дает основание для применения оператора Lim к каждому из слагаемых в сумме, стоящей под знаком Lim:

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\omega}(p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} + p_n) = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} p_1 + \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} p_2 + \ldots$$
$$+ \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} p_{n-1} + \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} p_n = p_1 + p_2 + \ldots + p_{\omega-1} + p_\omega.$$

Читая последние равенства справа налево, мы приходим к следующему определению.

Определение 16.1. *Пусть записан символ*

$$s = p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots + p_{\omega-1} + p_\omega, \tag{10}$$

где каждое из слагаемых с конечным натуральным номером n представляет собой заданное рациональное число p_n, *а любое из слагаемых* *с бесконечным номером — непрерывное продолжение последовательности слагаемых с конечными номерами*, *т.е.*

$$p_\omega = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} p_n,\quad p_{\omega-1} = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} p_{n-1},\quad p_{\omega-2} = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} p_{n-2},\ldots .$$

Тогда символ s будем называть суммой счетного ряда (*ряда типа 1*) *и под s по определению будем понимать следующий предел*:

$$s = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} (p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} + p_n).$$

Корректность данного определения следует из (7)–(9). Таким образом, о равенстве (10) теперь можно говорить как о сумме, число слагаемых в которой равно ω. Смысл записи (10) необходимо обсудить подробнее. Обратимся снова к последовательности (3) и перепишем ее еще раз:

$$p_1;\ p_1 + p_2;\ p_1 + p_2 + p_3;\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4,\ldots;\ p_1 + \ldots + p_n;\ldots . \qquad (11)$$

Закономерность перехода от заданного члена последовательности к следующему члену очевидна. Поэтому кажется естественным вместо длинной записи (11) использовать более короткую запись

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + \ldots + p_{n-1} + p_n + \ldots . \qquad (12)$$

Запись (12) имеет уже бóльший смысл, чем просто сумма каких-то слагаемых. Она устроена таким образом, что первое слагаемое в ней обязательно должно быть равно первому члену последовательности (11), сумма первых двух слагаемых должна быть обязательно равна второму члену последовательности (11) и т.д. То есть здесь становится важным не только величина слагаемого, но и место, которое оно занимает в сумме (12). В некоторых случаях на номер места может указывать индекс слагаемого. Однако, с другой стороны, индекс — это идентификатор самого числа, поэтому в случае перестановок слагаемых он может не соответствовать номеру места. В подобных случаях, если в этом есть необходимость, номер места будем указывать отдельно. Например, если в сумме (12) первые два слагаемых объединить, то мы придем к последовательности

$$p_1 + p_2;\ p_1 + p_2 + p_3;\ \ldots;p_1 + p_2 + \ldots + p_{n+1},\ldots .$$

Вместо (12) здесь имеем

$$(p_1 + p_2) + p_3 + p_4 + \ldots + p_n + p_{n+1} + \ldots$$

или более точно

$$\frac{(p_1 + p_2) + p_3 + p_4 + \ldots + p_n + p_{n+1} + \ldots}{1 \qquad 2 \qquad 3 \quad \ldots \quad n-1 \qquad n, \quad \ldots} .$$

Результат очевиден: объединение первых двух слагаемых в одно приводит к изменению предела:

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\omega}(p_1 + p_2 + \ldots + p_n) \neq \operatorname*{Lim}_{n\to\omega}[(p_1 + p_2) + \ldots + p_{n+1}]. \tag{13}$$

Новый предел равен

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\omega}[(p_1 + p_2) + \ldots + p_{n+1}] = s_\omega + p_{\omega+1} = s_{\omega+1}.$$

Полученный результат вполне естествен. Оператор Lim чувствителен к «скорости сходимости» последовательности. Объединение слагаемых увеличивает «скорость сходимости». Поэтому увеличивается и значение предела (на конкретную величину, равную $p_{\omega+1}$). Аналогично добавление нуля к сумме вида (12) уменьшает «скорость сходимости» и, значит, уменьшает предел Lim на вполне определенную величину, равную p_ω. Действительно, сумме

$$0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots$$

соответствует следующая запись:

$$\frac{0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_{n+1} + p_n + \ldots}{1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots \quad n \quad n+1 \ldots}.$$

Отсюда

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\omega}(0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1}) = s_\omega - p_\omega = s_{\omega-1}.$$

Определение 16.1 легко распространить на суммы, содержащие любое актуальное бесконечно большое число слагаемых $v = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} v(n)$. Запишем номера слагаемых в виде аргументов и примем следующее

Определение 16.2. *Пусть записан символ*

$$s = p(1) + p(2) + \ldots + p(v-1) + p(v), \tag{14}$$

где любое из слагаемых с конечным натуральным номером представляет собой заданное абсолютное рациональное число, а любое из слагаемых с бесконечным номером — непрерывное продолжение последовательностей слагаемых с конечными номерами, т.е.

$$p(v) = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} p(v(n)),\ p(v-1) = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} p(v(n)-1), \ldots .$$

Тогда символ s будем называть суммой ряда типа 1 и под s понимать следующий предел:

$$s = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega}[p(1) + p(2) + \ldots + p(v(n))]. \tag{15}$$

Для сумм вида (15) будут иметь место свойства, аналогичные свойствам (13). По своей природе данные суммы близки к суммам конечного числа слагаемых. Например, в классическом анализе рассматриваются суммы конечного числа слагаемых, а также суммы с бесконечным числом слагаемых (ряды). Последние определяются как предел частичных сумм. Одно из свойств таких сумм состоит в том, что

$$\lim_{n\to\infty}(p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} + p_n) = \lim_{n\to\infty}(p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1}).$$

То есть отбрасывание последнего слагаемого под знаком предела на результате суммирования не сказывается. В случае (14) это не так. Здесь отбрасывание последнего слагаемого уменьшает сумму на вполне определенное число. Таким образом, счетные ряды неархимедового анализа по своей природе аналогичны суммам конечного числа слагаемых классического анализа.

Итак, мы рассматривали пределы сумм рациональных чисел и пришли к суммам, в которых на местах с бесконечно большими номерами должны стоять обязательно элементарные числа, например число $p_\omega = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} p(n)$ и т.д. Возникает необходимость также в вычислении сумм, в которых уже и на конечных номерах стоят элементарные или существенные числа. В этом случае все изложенные выше построения остаются в силе. Поэтому ограничимся только итоговым определением.

Определение 16.3. *Пусть записан символ*

$$s = Q(1) + Q(2) + \ldots + Q(v - 1) + Q(v), \tag{16}$$

где $Q(1), \ldots Q(n), \ldots$ — *заданные элементарные или существенные числа, а любое из слагаемых с бесконечным номером получено непрерывным продолжением последовательности слагаемых с конечными номерами, т.е.*

$$Q(\omega) = \operatorname*{Lim}_{n} Q(n), \quad Q(\omega + 1) = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} Q(n + 1), \ldots$$

$$\ldots Q(v - 1) = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} Q(v(n) - 1), \quad Q(v) = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} Q(v(n)),$$

$$v = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} v(n).$$

Тогда символ s будем называть суммой ряда и под s понимать следующее число:

$$s = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} [Q(1) + Q(2) + \ldots + Q(v(n))].$$

Далее возникает необходимость в определении сумм несколько более общего вида, чем суммы (16), а именно сумм вида

$$s = Q(\mu + 1) + Q(\mu + 2) + \ldots + Q(v - 1) + Q(v), \tag{17}$$

где

$$\mu = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} \mu(\nu) < v = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} v(n). \tag{18}$$

Предположим, что каждое из слагаемых (17) представляет собой непрерывное продолжение ряда

$$Q(1),\ \ Q(2), \ldots\ \ Q(n), \ldots, \tag{19}$$

т.е.

$$Q(\mu+1) = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} Q(\mu(n)+1), \ldots Q(\nu) = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} Q(\nu(n)). \tag{20}$$

Примем следующее

Определение 16.4. *Если выполняются неравенство* (*18*) *и условия непрерывности* (*20*), (*19*), *то под суммой* (*17*) *будем понимать следующий предел*:

$$s = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} [Q(\mu(n)+1) + Q(\mu(n)+2) + \ldots + Q(\nu(n))].$$

Проверим корректность данного определения на конкретном примере. Пусть

$$s = Q(1) + Q(2) + \ldots + Q(\omega) + Q(\omega+1) + \ldots + Q(2\omega).$$

Данную группу можно рассматривать как сумму вида (16). Тогда

$$s = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} [Q(1) + \ldots + Q(n) + Q(n+1) + \ldots + Q(2n)].$$

Но ее можно также рассматривать и как сумму, например, двух рядов:

$$s_1 = Q(1) + \ldots + Q(\omega) = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} [Q(1) + \ldots + Q(n)],$$

$$s_2 = Q(\omega+1) + \ldots + Q(2\omega) = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} [Q(n+1) + \ldots + Q(2n)].$$

Принятые определения дают следующий результат: $s = s_1 + s_2$. Аналогично проверяется выполнение и других необходимых свойств. Доказательство корректности в общем случае трудностей не представляет.

2. Общий случай

Для определения суммы ряда необходимо (и достаточно) уметь вычислять его частичные суммы. Если слагаемые выписаны явно, то сумму можно считать известной. Вся проблема состоит в слагаемых, которые мы не можем выписать явно и поэтому заменяем знаком пробела. Например, для частичной суммы s_ω имеем

$$s_\omega = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_{\omega-2} + p_{\omega-1} + p_\omega.$$

Для таких случаев мы должны предположить, что для невыписанных слагаемых задан закон, по которому можно вычислить любое из подобных слагаемых.

Будем считать, что для невыписанных слагаемых (замененных многоточием) действует только один закон — закон непрерывного продолжения. Номер слагаемого, где непрерывность нарушается, должен быть точно известен, так чтобы всегда можно было вычислить отклонения от непрерывного продолжения (т.е. величину разрыва). Например, пусть непрерывность имеет место до слагаемого номер ω включительно, а для слагаемого номер $(\omega + 1)$ и последующих слагаемых имеют место разрывы

$$s_{\omega+k} = p_1 + p_2 + \ldots + p_{\omega-1} + p_\omega +$$
$$+(p_{\omega+1} + q_1) + (p_{\omega+2} + q_2) + \ldots + (p_{\omega+k} + q_k).$$

Здесь по-прежнему $p_{\omega+1}, \ldots$ получены непрерывным продолжением, а $q_1, \ldots q_k$ — известные величины разрывов. Предположим, что нам необходимо вычислить ряд из 2ω слагаемых. Значит, необходимо задать еще один закон — закон изменения слагаемых от любого номера $\omega + k$ до номера 2ω. Предположим, что имеет место непрерывность для величины самих разрывов, т.е.

$$q_\omega = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} q_n, \quad q_{\omega-1} = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} q_{n-1}, \ldots .$$

Тогда

$$s_{2\omega} = p_1 + \ldots + p_{2\omega} + q_1 + \ldots + q_\omega =$$
$$= \operatorname*{Lim}_{n\to\omega}(p_1 + \ldots + p_{2n}) + \operatorname*{Lim}_{n\to\omega}(q_1 + \ldots + q_n).$$

Аналогичным образом можно рассмотреть и более сложные законы изменения частичных сумм.

§ 17. Несчетные ряды

Предположим, что мы располагаем данными для того, чтобы вычислить сумму ν слагаемых для любого ν:

$$s_\nu = p_1 + p_2 + \ldots + p_\omega + \ldots + p_\nu .$$

Здесь условия непрерывности необязательны. Разрывы явно не выделены. Предположим, что существует предел

$$s = \operatorname*{limit}_{\nu\to\infty} s_\nu .$$

Данный предел будем называть суммой ряда

$$s = p_1 + p_2 + \ldots + p_\nu + \ldots . \tag{1}$$

Ряды (1) назовем несчетными рядами, или рядами типа 2, так как последовательность индексов слагаемых имеет порядковый тип 2 (т.е.

порядковый тип продолженного натурального ряда). Ряды (1) аналогичны рядам классического анализа

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n \to \infty} (a_1 + \ldots + a_n).$$

Это следует из аналогии операции предельного перехода в смысле limit и предельного перехода классического анализа lim. По аналогии в неархимедову область можно перенести большинство результатов по теории рядов классического анализа. В частности, в сумму (1) можно добавлять нулевые слагаемые или объединять скобками слагаемые (1). Результат от этого не изменится. Доказательство следует из теоремы 12.2.

§ 18. Позиционная система счисления в области неархимедовых чисел

В области вещественных чисел большую роль играет позиционная система их записи. Оказывается, что подобную систему можно ввести и в неархимедовой числовой области. Вначале изложим схему построения обычной позиционной системы так, чтобы ею можно было воспользоваться и в неархимедовом случае:

1^0. В качестве первого шага констатируем: вещественное число α — это класс эквивалентности фундаментальных последовательностей рациональных чисел. Последовательность принадлежит типу 1, т.е. является счетной последовательностью.

2^0. Определяем знак числа α: $s = \mathrm{sign}\alpha$ и полагаем $\alpha = s \cdot |\alpha|$.

3^0. Определяем число p — порядок числа $|\alpha|$:

$$|\alpha| = 10^p \cdot \beta; \;\; 0 \le \beta < 10,$$

β — вещественное число, p — натуральное.

4^0. Для идентификации класса эквивалентности β достаточно указать только одну последовательность из данного класса. Выберем ее так, чтобы ряд

$$\beta = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$$

состоял только из неотрицательных членов и был строго иерархичен. Под строгой иерархичностью понимается следующее: любой отличный от нуля и нормированный член ряда должен давать вклад в сумму ряда не меньший, чем совокупный вклад всех остальных членов ряда, стоящих правее его. Например, в ряде 0,72345… вклад члена 0,7 больше, чем всех остальных членов: 0,7 > 0,0234… . Нормировка означает, что цифра 7 заменяется цифрой 1. Однако и в этом случае имеет место неравенство 0,1 > 0,0234... . Только в одном крайнем случае в пределе допускается равенство: например, 0,1 = 0,0999... .

5^0. Выбирается основание G и ряд записывается в виде

$$\beta = C_0 + \frac{C_1}{10} + \frac{C_2}{10^2} + \dots .$$

Здесь $G = 10$; $C_0, C_1 \dots = 0, 1, 2 \dots 9$ — цифры. Окончательный результат состоит в представлении:

$$\alpha = s \cdot 10^p \lim_{m\to\infty}\left(C_0 + \frac{C_1}{10} + \dots \frac{C_m}{10^m}\right) = s \cdot 10^p \left(C_0 + \frac{C_1}{10} + \frac{C_2}{10^2} + \dots\right). \quad (1)$$

Закон $C_m = C(m)$ должен быть известен. Именно он идентифицирует число α. Для рациональных α функция $C(m)$ либо равна нулю начиная с некоторого $m = N(\alpha)$, либо представляет собой периодическую функцию, например

$$\frac{1}{3} = \lim_{m\to\infty}\left(\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \dots + \frac{3}{10^m}\right).$$

1. Позиционная система записи элементарных чисел

Элементарное число — это класс последовательностей абсолютных рациональных чисел $r(n)$:

$$A = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} r(n). \quad (2)$$

Поэтому для каждого из приближений можно сразу воспользоваться результатом (1), продолженным по непрерывности на актуальные бесконечно большие «натуральные» числа:

$$r(n) = s(n) \cdot 10^{p(n)} \operatorname*{limit}_{\nu\to\infty}\left[C_0(n) + \frac{C_1(n)}{10} + \frac{C_2(n)}{10^2} + \dots \frac{C_\nu(n)}{10^\nu}\right] =$$

$$= s(n) \cdot 10^{p(n)} \cdot \left[C_0(n) + \frac{C_1(n)}{10} + \frac{C_2(n)}{100} + \dots\right]. \quad (3)$$

Подставим (3) в (2) и в каждом из слагаемых перейдем к пределу в смысле Lim. Пусть

$$s(\omega) = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} s(n), \quad p(\omega) = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} p(n); \quad (4)$$

$$C_0(\omega) = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} C_0(n), \quad C_1(\omega) = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} C_1(n), \dots . \quad (5)$$

Указание на аргумент ω будем иногда опускать. Тогда выражение

$$A = s(\omega)\cdot 10^{p(\omega)}\left[C_0(\omega)+\frac{C_1(\omega)}{10}+\frac{C_2(\omega)}{100}+\ldots\right] \tag{6}$$

представляет собой запись элементарного числа A в позиционной системе счисления с основанием 10. Коэффициенты (5) будем называть «цифрами», так как их приближения — это обычные цифры и, кроме того, в записи (6) они играют именно роль цифр. Элементарное число (4)

$$p = p(\omega) = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega}(p_1,\ p_2,\ldots p_n,\ldots)$$

естественно назвать порядком числа A. Приближения p — конечные целые числа. Поэтому вполне может оказаться, что $|p(\omega)|$ либо равен 0, либо принадлежит к продолженному натуральному ряду. Например, если $p(\omega)=\omega$, то можно сказать, что «цифра» $G_0(\omega)$ относится к $(\omega+1)$ разряду числа A. Таким образом, если $p(\omega)$ — число «натуральное», то оно указывает на место «цифры» $C_0(\omega)$ в десятичном разложении элементарного числа.

Типичной, однако, будет совсем другая ситуация, когда порядок числа A в список «натуральных» чисел вообще не попадает и, более того, число $p(\omega)$ оказывается неупорядоченным относительно неархимедовой прямой. Возьмем, к примеру, десятичное разложение числа ω. Здесь $p(n) = [\lg n]$ и, значит, для самого числа ω

$$p(\omega) = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega}(0,\ [\lg 2],[\lg 3],\ldots[\lg n],\ldots).$$

Квадратными скобками обозначена целая часть числа. Начиная с $n = 10$ приближения числа $p(\omega)$ являются натуральными числами, однако само число $p(\omega)$ относительно «натуральных» чисел неупорядочено. Такая ситуация является типичной.

В общем случае взятие целой части от элементарного числа всегда выводит его в новое измерение. Например,

$$\frac{\omega}{2}-\left[\frac{\omega}{2}\right] = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega}\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\ldots\right).$$

Поэтому, если в записи (6) мы по-прежнему хотели бы считать, что порядок числа определяет место «цифры» C_0 в позиционной записи, то теперь под «позицией» цифры мы должны понимать не только некоторый пункт среди линейно упорядоченной совокупности чисел, а более широко — некоторый пункт в бесконечномерном пространстве. Данный пункт совместно с информацией о знаках $s(\omega)$

является довольно существенной характеристикой элементарного числа. Тогда число, равное

$$\mathrm{H}(A) = s(\omega) \cdot 10^{p(\omega)}, \qquad (7)$$

назовем характеристикой числа A. Под нормированным числом будем понимать отношение исходного числа к его характеристике:

$$\overline{A} = A / \mathrm{H}(A),$$

$$\overline{A} = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega}\left(C_0(1) + \frac{C_1(1)}{10} + \frac{C_2(1)}{100} + \ldots;\ \ldots C_0(n) + \frac{C_1(n)}{10} + \frac{C_2(n)}{100} + \ldots,\ \ldots \right). \qquad (8)$$

Каждое из приближений $\overline{A}$ представляет собой рациональное число из интервала (0, 10).

Подведем итог. Запись элементарного числа в позиционной системе счисления выглядит так:

$$A = s(\omega) \cdot 10^{p(\omega)}\left(C_0(\omega) + \frac{C_1(\omega)}{10} + \frac{C_2(\omega)}{10^2} + \ldots + \frac{C_v(\omega)}{10^v} + \ldots \right). \qquad (9)$$

Теперь все готово для того, чтобы перейти к следующему разделу.

2. Позиционная система записи существенных чисел

Пусть исходное существенное число представлено в виде ряда

$$\sigma = A_1 + A_2 + \ldots + A_\omega + \ldots + A_v + \ldots . \qquad (10)$$

Ряд понимается как предел в смысле $\operatorname*{limit}_{v\to\infty}$. В манипулировании данным рядом (без изменения его суммы) есть достаточно большая свобода. Объединяя или разбивая слагаемые на отдельные суммы, можно увеличивать или уменьшать скорость сходимости ряда. Кроме того, любой член можно уменьшить на некоторое число, увеличив на это же число другие его члены, и т.д.

Из сходимости ряда следует, что для любого $\Gamma > 0$ найдется $\Lambda > 0$, что для любых $v > \mu + 1 > \Lambda$ будем иметь неравенство

$$|A_{\mu+1} + A_{\mu+2} + \ldots + A_v| < 1/\Gamma. \qquad (11)$$

Здесь все числа Γ, Λ, μ и v принадлежат продолженному натуральному ряду. Пусть B_μ — сумма первых μ членов ряда:

$$B_\mu = A_1 + A_2 + \ldots + A_\mu$$

и $\mathrm{H}(\mu)$ — характеристика числа B_μ. Попытаемся использовать $\mathrm{H}(\mu)$ в качестве характеристики самого существенного числа σ. Для этого на величину μ необходимо наложить дополнительные условия (их смысл состоит в том, что частичная сумма B_μ должна быть достаточно представительной частью полной суммы σ). Используем $1/\mathrm{H}(\mu)$ как нормировочный множитель для σ:

$$\overline{\sigma} = \frac{\sigma}{\mathrm{H}(\mu)} = \frac{B_\mu}{\mathrm{H}(\mu)} + \frac{A_{\mu+1}}{\mathrm{H}(\mu)} + \ldots \frac{A_v}{\mathrm{H}(\mu)} + \ldots .$$

В новых обозначениях, где

$$D_0 = \frac{B_\mu}{\mathrm{H}(\mu)}, \quad D_1 = \frac{A_{\mu+1}}{\mathrm{H}(\mu)}, \ldots \; D_2 = \frac{A_{\mu+2}}{\mathrm{H}(\mu)}, \ldots ,$$

последняя запись несколько упрощается:

$$\overline{\sigma} = D_0 + D_1 + \ldots + D_v + \ldots . \tag{12}$$

По своему построению первый член имеет структуру нормированного числа вида (8):

$$D_0 = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega}\left(d_0^{(0)}(1) + \frac{d_1^{(0)}(1)}{10} + \ldots ;\;\; d_0^{(0)}(n) + \frac{d_1^{(0)}(n)}{10} + \ldots \right). \tag{13}$$

Верхний индекс в скобках совпадает с индексом у D_0. Также по построению $0 \le D_0 < 10$. Последовательность (10) из класса эквивалентности σ можно выбрать так, чтобы $D_0 \ge 0,\; D_1 \ge 0, \ldots, D_2 \ge 0, \ldots$. Кроме того, пользуясь свойством фундаментальности (11), номер μ можно взять таким, чтобы имели место условия

$$0 \le D_1 < 1; \;\; 0 \le D_2 < 10^{-1}, \ldots 0 \le D_\omega < 10^{-\omega+1}, \ldots . \tag{14}$$

Данные условия обеспечивают иерархичность последовательности (12). Запишем приближения чисел (14):

$$D_1 = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega}\left(\frac{d_1^{(1)}(n)}{10} + \frac{d_2^{(1)}(n)}{10^2} + \ldots \right),$$

$$D_2 = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega}\left(\frac{d_2^{(2)}(n)}{10^2} + \frac{d_3^{(2)}(n)}{10^3} + \ldots \right), \ldots$$

и т.д.

Вернемся теперь к числу D_0 в записи (13). Проведем с ним операцию, которую естественно назвать операцией округления. Примем по определению оператора $<\ldots>$ следующее равенство:

$$<D_0> = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega}(d_0^{(0)}(1); \ldots d_0^{(0)}(n) \ldots). \tag{15}$$

Разность $D_0 - <D_0>$ добавим к числу D_1. В результате получим

$$D_1 + D_0 - < D_0 > = \operatorname*{Lim}_{n \to \omega} \left(\frac{d_1^{(1)}(1) + d_1^{(0)}(1)}{10} + \frac{d_2^{(1)}(1) + d_2^{(0)}(1)}{100} + \ldots; \right). \quad (16)$$

Данное число заведомо меньше, чем 2. В крайнем случае цифры в приближении D_1 могут быть одними девятками и цифры в приближении $D_0 - <D_0>$ также могут быть одними девятками. Тогда мы получим в пределе число 2. Дальнейшие действия сводятся к следующим. Если в одном из приближений (16) приближение превысило единицу, то единицу мы прибавляем к соответствующему приближению числа $<D_0>$ в запись (15) и, естественно, отнимаем от приближения (16). Таким образом, мы добиваемся того, чтобы

$$0 \le d_1^{(1)}(1) + d_1^{(0)}(1) \le 9.$$

Очевидно, что если добавление единицы к одному из приближений (15) привело к тому, что приближение стало равным 10, то 10 мы заменяем на 1 и увеличиваем на 1 соответствующее приближение у порядка числа $p(\omega)$.

Далее округляем число (16), т.е. заменяем его на число

$$\operatorname*{Lim}_{n \to \omega} \left(\frac{d_1^{(1)}(1) + d_1^{(0)}(1) - 10 \cdot k(1)}{10}, \ldots \right). \quad (17)$$

Здесь $k(1) = 0$, если описанный выше перенос не потребовался, и $k(1) = 1$ в противном случае и т.д. Разницу между числами (16) и (17) прибавляем к D_2 и все повторяем снова. Указанные операции можно назвать шлифовкой ряда (13), когда каждый его член мы доводим до статуса «цифры» в десятичном разложении числа $\overline{\sigma}$.

Окончательный результат можно записать в следующей форме:

$$\sigma = s(\mu) \cdot 10^{q(\mu)} \left[a_0(\omega) + \frac{a_1(\omega)}{10} + \frac{a_2(\omega)}{10^2} + \ldots + \frac{a_\nu(\omega)}{10^\nu} + \ldots \right], \quad (18)$$

где приближения $q(\mu)$ либо совпадают с приближениями $p(\mu)$, либо больше их на 1 в случае, когда этого потребовала «шлифовка» ряда. Процедуры определения $s(\mu)$ и самого μ описаны выше; $a_0(\omega) \ldots a_\nu(\omega) \ldots$ — это «цифры». Их приближения равны $0, 1, 2 \ldots 9$.

3. Позиционная система счисления с основанием, равным ω

Ясно, что все описанные процедуры можно реализовать, взяв за основание любое конечное натуральное число $G > 1$. Будем представлять себе величину G как параметр, который можно неограниченно увеличивать. Возьмем разложение элементарного числа (9). Теперь у каждой «цифры», а также у порядка числа $p(\omega)$ и его знака $s(\omega)$ появился новый параметр — основание системы счисления G. Воспользуемся (9) и запишем число A через его приближения:

$$A = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} s(n,G)10^{p(n,G)}\left[C_0(n,G) + \frac{C_1(n,G)}{G} + \frac{C_2(n,G)}{G^2} + \ldots\right]. \qquad (19)$$

Переход к пределу Lim при $n \to \omega$ никаких трудностей не представляет. Однако теперь мы хотим сделать переход к пределу также для числа $G \to \omega$. При фиксированном значении n число под знаком Lim в (19) от величины G вообще не зависит. Это некоторое рациональное число, которое можно записывать в какой угодно форме. Если вычислить все его цифры и характеристику как функции параметра G и провести все выкладки, то величина G везде сократится или уничтожится. Поэтому переход $G \to \omega$ — это переход только в форме записи числа. Делая его, мы придем к следующему результату:

$$A = s(\omega,\omega)10^{p(\omega,\omega)}\left[C_0(\omega,\omega) + \frac{C_1(\omega,\omega)}{\omega} + \frac{C_2(\omega,\omega)}{\omega^2} + \ldots\right]. \qquad (20)$$

Здесь «цифры» могут меняться от 0 до $(\omega - 1)$.

Для существенных чисел (18) результат будет аналогичным.

4. Позиционная система счисления как инструмент для описания неархимедовой прямой

Выше все построения делались для самого общего случая, а именно для бесконечномерной (частично упорядоченной) области существенных чисел. В позиционной системе записи «неодномерность» (точнее сказать — неординарность) числа сосредоточена в его характеристике (7). Если же $s(n) \equiv 1$ или $s(n) \equiv -1$ и, кроме того, q — число «натуральное», то мы имеем разложение числа, принадлежащего существенной прямой. Для основания $G = 10$ имеем

$$\sigma = \pm 10^q \cdot \left[a_0(\omega) + \frac{a_1(\omega)}{10} + \frac{a_2(\omega)}{10^2} + \ldots + \frac{a_\nu(\omega)}{10^\nu} + \ldots\right]. \qquad (21)$$

Здесь $a_0(\omega), \ldots a_\nu(\omega), \ldots$ — «цифры». Запишем теперь (21) для произвольного основания G и перейдем к пределу Lim при $G \to \omega$ (см. равенства (19), (20)). В результате получаем

$$\alpha = \pm 10^q \cdot \left[a_0(\omega,\omega) + \frac{a_1(\omega,\omega)}{\omega} + \ldots \frac{a_\nu(\omega,\omega)}{\omega^\nu} + \ldots\right]. \qquad (22)$$

Здесь «цифры» $a_0, \ldots a_\nu \ldots$ могут меняться от 0 до $(\omega - 1)$.

Таким образом, мы получили полное описание чисел неархимедовой прямой, которое аналогично описанию обычных вещественных чисел с помощью конечных или бесконечных десятичных дробей.

Представления (21), (22) удобны для записи конкретных чисел неархимедовой прямой. Однако использовать их для построения математического аппарата неудобно. (В классическом анализе ситуация такая же. Например, понятие производной никак не опирается на позиционную систему представления чисел.)

Здесь есть еще обстоятельство, которое необходимо отметить. Свобода в выборе «цифр» в (21), (22) является чрезвычайно большой. Поэтому неархимедова прямая является весьма сложным объектом. Представляет интерес построение различных упрощенных конструкций прямой (за счет появления на ней купюр). С одной стороны, такие конструкции должны быть обозримыми, с другой — они должны быть достаточными для построения содержательной теории и приложений. Позиционные системы записи дают в руки подходящий инструмент для описания подобных конструкций. Переходим к их описанию. Отметим еще раз, что число σ определяется несчетной фундаментальной последовательностью своих приближений:

$$\begin{aligned} &A_1,\, A_2, \ldots A_n, \ldots A_\omega,\, A_{\omega+1}, \ldots A_\nu, \ldots, \\ &A_\nu = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} A_\nu(n), \quad \sigma = \operatorname*{limit}_{\nu\to\infty} \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} A_\nu(n). \end{aligned} \tag{23}$$

Степень произвола в выборе таких последовательностей чрезвычайно широка. Любые условия, которые так или иначе связывают члены последовательности между собой, степень произвола уменьшают. Практически это означает, что из области (23) мы выделяем различные подобласти, которые в силу выбранных ограничений являются уже более обозримыми, чем исходная область. Наиболее естественны условия непрерывности.

Пусть первый отрезок $A_1,\, A_2, \ldots A_n \ldots$ последовательности (23) состоит из абсолютных рациональных чисел. Максимально возможная степень непрерывности несчетной последовательности состоит в следующем: каждый член последовательности с бесконечно большим номером представляет собой непрерывное продолжение начального отрезка:

$$\begin{aligned} &A_\omega = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} A_n, \quad A_{\omega+1} = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} A_{n+1}, \ldots, \\ &A_\nu = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} A_{\nu(n)}, \ldots, \end{aligned} \tag{24}$$

где, как обычно, $\nu = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} \nu(n)$. Условия непрерывности уменьшают произвол в выборе (23). Теперь произвол сводится к выбору членов только счетной последовательности A_n. Если десятичное разложение числа A_n имеет вид

$$A_n = \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{10^2} + \ldots + \frac{p_n}{10^n},$$

то десятичное разложение σ суть

$$\sigma = \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{10^2} + \ldots + \frac{p_n}{10^n} + \ldots + \frac{p_\omega}{10^\omega} + \frac{p_{\omega+1}}{10^{\omega+1}} + \ldots + \frac{p_\nu}{10^\nu} + \ldots,$$

где

$$p_\omega = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} p_n, \ldots p_\nu = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} p_{\nu(n)}, \ldots . \qquad (25)$$

Здесь $p_n = 0, 1, 2, \ldots 9$ — это цифры. Числа (25) тоже были названы «цифрами». Условия непрерывности (25) означают, что σ — ядро вещественного числа. Ядрам вещественных чисел соответствуют максимально возможные условия непрерывности.

Таким образом, непрерывность означает, что цифры, стоящие на местах с бесконечными номерами, однозначно определяются цифрами на местах с конечными номерами. В этом отношении ситуация похожа на изображение рациональных чисел периодическими десятичными дробями. Для последних существует конечное натуральное число N такое, что цифры на любых местах, бóльших N, однозначно определяются первыми N цифрами. С этой точки зрения вещественные числа по уровню сложности можно считать непосредственно примыкающими к рациональным числам (ср. с классом «гиперрациональных» чисел [77]).

Следующие классы чисел будем получать, постепенно ослабляя условия (24). Предположим, что непрерывность есть до члена номер ω и дальше она нарушается:

$$\sigma = \frac{p_1}{10} + \ldots + \frac{p_{\omega-1}}{10^\omega} + \frac{p_\omega}{10^\omega} + \left[\frac{q_{\omega+1}}{10^{\omega+1}} + \ldots + \frac{q_\nu}{10^\nu} + \ldots\right],$$

где

$$p_{\omega-1} = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} p_{n-1}, \quad p_\omega = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} p_n,$$
$$q_{\omega+1} \neq \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} p_{n+1}, \ldots .$$

Основная идея состоит в том, чтобы выделить из суммы в скобках непрерывное продолжение (25). Пусть

$$q_{\omega+1} = p_{\omega+1} + R_1, \quad q_{\omega+2} = p_{\omega+2} + R_2, \ldots,$$

где по-прежнему $p_\omega, \ldots$ определяются равенствами (25). Тогда

$$\sigma = \alpha_0 + \frac{1}{10^{\omega}}\left[\frac{R_1}{10} + \frac{R_2}{10^2} + \ldots + \frac{R_{\omega}}{10^{\omega}} + \ldots + \frac{R_{\nu}}{10^{\nu}} + \ldots\right].$$

Предположим, что R_n — это рациональные числа. Пусть разрывы устроены так, что разрыв R_{ω} равен пределу Lim от последовательности разрывов R_n. Значения остальных разрывов получаются аналогично:

$$R_{\omega} = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} R_n,\quad R_{\omega+1} = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} R_{n+1}, \ldots . \tag{26}$$

Тогда выражение в скобках — ядро некоторого вещественного числа α_1 и, значит,

$$\sigma = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10^{\omega}} .$$

Действуя дальше таким же образом, можно строить более сложные типы чисел, включая сюда числа с бесконечным разложением по степеням 10^{ω}:

$$\sigma = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10^{\omega}} + \frac{\alpha_2}{10^{2\omega}} + \frac{\alpha_3}{10^{3\omega}} + \ldots + \frac{\alpha_{\nu}}{10^{\nu\omega}} + \ldots . \tag{27}$$

Данная запись соответствует позиционной системе с основанием 10^{ω}:

$$\sigma = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2, \ldots \alpha_{\nu}, \ldots .$$

Здесь «цифры» представляют собой уже ядра вещественных чисел.

Результат (26) можно обобщить. Предположим, что начальный отрезок последовательности представляет не рациональные числа, как это было принято выше, а элементарные числа: $A_n = \operatorname*{Lim}_{m\to\omega} a_n(m)$. Пусть имеют место те же самые условия непрерывности (25):

$$A_{\omega} = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} A_n = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega}\operatorname*{Lim}_{m\to\omega} a_n(m) = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} a_n(n); \ldots$$

$$A_{\nu} = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} A_{\nu}(n) = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} a_{\nu(n)}(n), \ldots .$$

Стартовая последовательность A_n должна быть такой, чтобы продолженная последовательность A_{ν} была фундаментальной.

По аналогии с (27) можно рассмотреть класс существенных чисел, которые можно записать в форме (27), но в системе с основанием, равным ω. Здесь мы ограничимся только такими числами, которые имеют следующее представление:

$$\begin{aligned}\sigma &= x_{-\mu}\omega^{\mu} + \ldots + x_{-\omega}\omega^{\omega} + \ldots + x_{-1}\omega + x_0 + x_1\mathrm{E} + \ldots + x_{\nu}\mathrm{E}^{\nu} + \ldots = \\ &= \eta_{\mu} + \eta_{\mu-1} + \ldots + \eta_1 + x + \xi_1 + \ldots + \xi_{\nu} + \ldots,\end{aligned} \tag{28}$$

где

$$\eta_\mu = x_{-\mu}\omega^\mu, \ldots \eta_1 = x_{-1}\omega,\ x = x_0,\ \xi_1 = x_1 \mathrm{E}, \ldots \xi_\nu = x_\nu \mathrm{E}^\nu, \ldots, \qquad (29)$$
$$x_{-\mu}, \ldots x_0, \ldots x_\nu, \ldots$$

суть ядра вещественных чисел. Числа (28) принадлежат неархимедовой (существенной) прямой, но, конечно, не исчерпывают данную прямую полностью, так как ядра вещественных чисел не могут быть увеличены до $\omega - 1$. Следовательно, если отметить на прямой числа вида (28), то между ними будут наблюдаться пробелы различных масштабов. Тем не менее числовая область (28) является наиболее удобной для приложений и поэтому ниже данный случай будет основным наряду с самым общим случаем, когда переменная X пробегает все значения на неархимедовой прямой без купюр.

Обозначения вида (28), (29) будем использовать для пространственных осей.

Для масштабных уровней неархимедова времени будем использовать следующие обозначения:

$$T = t_{-\mu}\omega^\mu + \ldots + t_{-1}\omega + t_0 + t_1 \mathrm{E} + \ldots + t_\nu \mathrm{E}^\nu + \ldots =$$
$$= \vartheta_\mu + \ldots + \vartheta_1 + t + \tau_1 + \ldots + \tau_\nu + \ldots,$$

где

$$\vartheta_\mu = t_{-\mu}\omega^\mu, \ldots t_0 = t, \ldots, t_\nu \mathrm{E}^\nu = \tau_\nu, \ldots, t_{-\mu}, \ldots t_0, \ldots t_\nu \ldots$$

— ядра вещественных чисел.

Глава 5

Непрерывность неархимедовых функций

Напомним определение непрерывности, которое дается в классическом анализе. Пусть функция $f(x)$ задана на действительной оси Ox и пусть x_n — некоторая сходящаяся последовательность. Предположим, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*, \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right). \tag{1}$$

Если данное равенство имеет место для любой последовательности $x_n \to x^*$, то $f(x)$ считается непрерывной в точке x^*. Данные условия носят локальный характер, поэтому непрерывную функцию можно назвать также локально-непрерывной функцией.

Пусть теперь функция непрерывной не является, но, тем не менее, для некоторых последовательностей x_n из первого условия (1) следует второе условие. В таких случаях функцию f будем считать непрерывной в точке x^* по пути x_n. Если равенства (1) имеют место для некоторых классов путей, то можно говорить о непрерывности относительно данных классов путей.

Ничто не мешает распространить определение (1) также на случай, когда $x^* = \infty$. В анализе-1 это, однако, не принято. Более того, в своем известном учебнике [110, с. 96] Н.Н. Лузин пишет: «Как пример ложного задания функции полезно указать фразу: “Функция $f(x)$ равна нулю для всякого конечного x, $f(x) = 0$, и равна единице для x бесконечного положительного, $f(\infty) = 1$”. Такое задание функции $f(x)$ бессмысленно, потому что бесконечность не есть число и, значит, численного значения аргумента, равного $+\infty$, быть не может. И тот, кто пишет $f(+\infty) = 1$, должен иметь в виду, что есть просто сокращенный способ писать $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. В данном случае это невозможно, поскольку $f(x) = 0$ для всякого конечного x, и, значит, имеем $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, а не 1».

В неархимедовом анализе отношение к понятию «бесконечность» совершенно другое. Здесь бесконечно большие числа имеют точно такой же статус, как и обычные, т.е. конечные числа. Во всех выкладках они фигурируют вместе с конечными числами вполне «на равных». Эти обстоятельства дают основания для того, чтобы и бесконечность классического анализа «уравнять в правах» с обычными числами. Формальных препятствий для этого нет: любое конечное вещественное число x — это класс эквивалентности последовательностей рациональных чисел. Бесконечность также представляет собой класс эквивалентности последовательностей рациональных чисел. Поэтому будем считать, что значение $f(\infty)$ можно задавать независимо от величины предела $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Ясно, что значение $f(\infty)$ может совпадать с пределом, но может и отличаться от него. Предположим, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right). \tag{2}$$

Если последнее равенство имеет место для любой последовательности $x_n \to \infty$, то функцию можно считать непрерывной в бесконечно удаленной точке. Функцию $f(x)$ будем считать непрерывной в точке $x = \infty$ по некоторому пути $x_n \to \infty$, если равенства (2) имеют место именно для данного пути x_n.

Равенства (1), (2) одинаковы по форме, но между ними есть одно принципиальное различие. Равенства (1) можно переписать так:

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x^* - \Delta x) = f(x^*), \quad \Delta x = x^* - x_n.$$

Однако для равенств (2) подобная запись

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(\infty - \Delta x) = f(\infty), \quad \Delta x = \infty - x_n$$

смысла не имеет. Все дело в различном характере сходимости последовательностей x_n к своему пределу. Для конечного предела запись $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$ означает неограниченное уменьшение разности $(x_n - x^*)$. Если же $x^* = \infty$, то характер стремления к пределу становится другим. Пусть, например, $x_n = n$. Прибавляя на каждом шаге к значению аргумента единицу, можно продвинуться до любого числа, но только не до числа $x = \infty$. Конечные числа и бесконечность всегда разделены чем-то, что можно назвать барьером, пропастью или особой зоной перехода. Если попытаться изобразить действительную ось вместе с бесконечно удаленной точкой, то без многоточия не обойтись. Такое же многоточие будет и в иллюстрации предела ∞ с помощью ряда

$$1,\ 2,\ 3,\ldots\infty. \tag{3}$$

Многоточия обозначают упомянутую выше особую зону. Поэтому можно сказать, что переход к пределу $x = \infty$ — это всегда прыжок через «многоточие», через особую зону перехода.

Таким образом, мы приходим к следующему выводу. Для функций классического анализа имеют место два различных определения их непрерывности.

1. Определение первого типа относится к понятию непрерывности в конечных точках. Оно дается равенствами (1).

2. Определение второго типа относится к понятию непрерывности в бесконечно удаленной точке. Оно дается равенствами (2).

Условия (1) относятся к точкам одного и того же масштабного уровня действительной прямой. И эта ситуация является типичной. Условия же (2) относятся к точкам разных масштабных уровней. И это исключительный случай. В неархимедовом анализе в смысле «типичности» картина будет совершенно другой. Здесь типична именно вторая ситуация. Собственно каждая точка неархимедовой прямой играет две роли. В первой она является бесконечно удаленной для точек меньшего масштаба, во второй — служит одним из пунктов пути к бесконечно удаленной точке большего масштаба. Например, точка $X = 1$ является бесконечно удаленной для точек $X = E, 2E, 3E, \ldots$. С другой стороны, точки $X = 1, 2, \ldots$ — это отметки на пути к значению $X = \omega$. По-другому можно сказать так: переход с одного масштабного уровня неархимедовой прямой на другой ее уровень — это всегда прыжок того же типа, что и в (3).

Далее, непрерывность функции всегда ассоциируется с непрерывностью ее графика. Тогда если мы говорим о графике над осью OX, содержащей в своем изображении «многоточия», то каким-то образом надо описать непрерывность этого графика и над особой зоной, обозначенной многоточием. Это можно сделать, используя инструмент предельного перехода в смысле Lim. Именно здесь есть аналогия с понятием непрерывности обычной функции в бесконечно удаленной точке.

Инструмент предельного перехода в смысле limit позволяет описать непрерывность, аналогичную непрерывности обычных функций в конечных точках.

Все это, конечно, только аналогии, которые позволяют понять ситуацию неформально. Для дальнейших построений необходимы формальные определения. Перейдем к их изложению.

В неархимедовом анализе есть два типа неактуальных бесконечно малых величин (см. § 14). При использовании бесконечно малых первого типа будем говорить о непрерывности функций по типу 1. При использовании бесконечно малых второго типа будем говорить о непрерывности по типу 2.

§ 19. Непрерывность по типу 2 — локальная непрерывность функций

Пусть X, Y — переменные, принимающие значения в области существенных чисел, $F(\mathrm{X})$ — заданная функция, $\mathrm{Y}^0, \mathrm{X}^0$ — некоторые значения X и Y. Предположим, что две несчетные последовательности

$$\begin{aligned} &\mathrm{X}_1,\ \mathrm{X}_2, \ldots \mathrm{X}_\omega, \ldots \mathrm{X}_\nu, \ldots, \\ &\mathrm{X}'_1,\ \mathrm{X}'_2, \ldots \mathrm{X}'_\omega, \ldots \mathrm{X}'_\nu, \ldots \end{aligned} \tag{1}$$

сходятся к точке X^0, т.е.

$$\operatorname*{limit}_{\nu\to\infty} \mathrm{X}_\nu = \mathrm{X}^0, \quad \operatorname*{limit}_{\nu\to\infty} \mathrm{X}'_\nu = \mathrm{X}^0.$$

Будем считать, что значения (1) принадлежат области определения функции, так что можно говорить о следующих двух последовательностях:

$$\begin{aligned} &F(\mathrm{X}_1),\ F(\mathrm{X}_2), \ldots F(\mathrm{X}_\omega), \ldots F(\mathrm{X}_\nu), \ldots, \\ &F(\mathrm{X}'_1),\ F(\mathrm{X}'_2), \ldots F(\mathrm{X}'_\omega), \ldots F(\mathrm{X}'_\nu), \ldots . \end{aligned} \tag{2}$$

Определение 19.1. *Примем, что предела у функции* $F(\mathrm{X})$ *при* $\mathrm{X} \to \mathrm{X}^0$ *не существует, если 1) найдется хотя бы одна последовательность* X_ν *такая, что предела* $\operatorname*{limit}_{\nu} F(\mathrm{X}_\nu)$ *не существует, либо 2) найдется хотя бы две последовательности (1) такие, что*

$$\operatorname*{limit}_{\nu} F(\mathrm{X}_\nu) \neq \operatorname*{limit}_{\nu} F(\mathrm{X}'_\nu).$$

Определение 19.2. *Если для любых двух последовательностей (1), сходящихся к* X^0, *существуют пределы последовательностей (2) и эти пределы совпадают между собой, т.е.*

$$\operatorname*{limit}_{\nu} F(\mathrm{X}_\nu) = \operatorname*{limit}_{\nu} F(\mathrm{X}'_\nu) = \mathrm{Y}^0, \tag{3}$$

то будем считать, что предел функции $F(\mathrm{X})$ *при* $\mathrm{X} \to \mathrm{X}^0$ *существует. Значения предела будем полагать равными значению (3). Перечисленные факты будем констатировать с помощью записи*

$$\operatorname*{limit}_{\mathrm{X}\to\mathrm{X}^0} F(\mathrm{X}) = \mathrm{Y}^0.$$

Может оказаться, что функция в самой точке X^0 также определена. Тогда введем следующее

Определение 19.3. *Если предел функции при* $X \to X^0$ *существует и равен значению* $F(X^0)$:

$$\operatorname*{limit}_{X \to X^0} F(X) = F(X^0),$$

то будем считать, что функция $F(X)$ *в точке* X^0 *является непрерывной по типу 2. В противном случае считаем, что функция является разрывной (по типу 2) в точке* X^0*. Величина разрыва полагается равной разности*

$$R = F(X^0) - \operatorname*{limit}_{X \to X^0} F(X).$$

Непрерывную по типу 2 функцию будем называть также локально-непрерывной или limit-непрерывной функцией.

Для определения непрерывности в бесконечно удаленной точке необходимо положить $X^0 = \infty$.

Определение 19.4. *Если функция* $F(X)$ *локально-непрерывна в каждой точке некоторой подобласти* D *области существенных чисел, то будем говорить, что она непрерывна по типу 2 в* D.

На языке бесконечно малых определение непрерывности сводится к следующему:

Определение 19.5. *Функция* $F(X)$ *считается в точке* X *непрерывной по типу 2, если любое изменение аргумента на бесконечно малую величину типа 2 приводит к изменению функции на бесконечно малую типа 2.*

Выпишем два равенства:

$$\operatorname*{limit}_{\nu \to \infty} \Delta X_\nu = 0, \quad \operatorname*{limit}_{\nu \to \infty} [F(X) - F(X - \Delta X_\nu)] = 0.$$

Утверждение о том, что из первого равенства следует второе, эквивалентно приведенному определению. Аналогично формулируются определения limit-непрерывности функции в области D и limit-непрерывности по отдельным путям. Таким образом, понятие непрерывности неархимедовой функции по типу 2 — это аналог понятия непрерывности анализа-1.

§ 20. Непрерывность по типу 1 — непрерывность функций на стыке различных масштабных уровней

Неархимедова прямая является многомасштабной. Поэтому переход аргумента с одного масштабного уровня на другой — это всегда переход через особую зону («многоточие»). Основным инструментом исследования непрерывности в зонах перехода служит оператор Lim.

Пусть функция $F(\mathrm{X})$ определена при всех X, которые потребуются ниже. Смысл операции Lim виден из определения эталонных бесконечно большого и бесконечно малого чисел:

$$1,\ 2, \ldots n, \ldots\ \operatorname*{Lim}_{n} n = \omega;\ \ 1,\ \frac{1}{2}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots\ \operatorname*{Lim}_{n} \frac{1}{n} = \mathrm{E} = 1/\omega.$$

Все числа 1, 2, 3... принадлежат к вещественному масштабному уровню, а число $\operatorname*{Lim}_{n} n$ — к первому мегауровню; все числа 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$... принадлежат к вещественному уровню, а число $\operatorname*{Lim}_{n} \frac{1}{n}$ — к первому микроуровню. И вообще, если у нас заданы последовательность X_n и ее предел в смысле $\operatorname*{Lim}_{n} \mathrm{X}_n$:

$$\mathrm{X}_1,\ \mathrm{X}_2,\ \mathrm{X}_3, \ldots \mathrm{X}_n, \ldots\ \operatorname*{Lim}_{n} \mathrm{X}_n = \mathrm{X}^*,$$

то члены последовательности и ее предел принадлежат, как правило, к разным масштабным уровням. Исключением являются стационарные последовательности. Все построения будут верны и для этого случая. Однако, имея в виду правило, а не исключение, о последовательности и ее пределе будем говорить как об объектах, которые принадлежат к различным масштабным уровням числовой области.

Определение 20.1. *Примем, что функция* $F(\mathrm{X})$ *в точке* X^* *является непрерывной по типу 1, если*

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\omega} \mathrm{X}_n = \mathrm{X}^*, \quad \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} F(\mathrm{X}_n) = F\left(\operatorname*{Lim}_{n\to\omega} \mathrm{X}_n\right) \tag{1}$$

для любых последовательностей X_n, *сходящихся к точке* X^*.

Как правило, равенства (1) будут выполняться не для любых, а только для некоторых последовательностей, сходящихся к X^*. Для таких случаев введем

Определение 20.2. *Если равенства (1) имеют место для некоторой последовательности* X_n, *то функцию* $F(\mathrm{X})$ *будем называть непрерывной в точке* X^* *по типу 1 и пути* X_n. *Будем говорить также о непрерывности между масштабными уровнем* X_n *и уровнем* X^* *(в точке* X^**). Если непрерывности нет, то можно говорить о разрыве типа 1, равном*

$$R(\mathrm{X}^*; \mathrm{X}_n) = F(\mathrm{X}^*) - \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} F(\mathrm{X}_n).$$

Разрыв R относится как к точке X^*, *так и к пути* $\{\mathrm{X}_n\}$, *ведущему в эту точку.*

Таким образом, понятие непрерывности на стыке масштабных уровней неархимедовой прямой — это примерный аналог непрерывности функций классического анализа в точке бесконечность.

На языке бесконечно малых определение непрерывности выглядет так:

Определение 20.3. *Функция является непрерывной по типу 1, если любое изменение аргумента на бесконечно малую величину типа 1 приводит к изменению функции на бесконечно малую типа 1.*

Запишем два равенства:

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\omega} \Delta X_n = 0, \quad \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} [F(X) - F(X - \Delta X_n)] = 0.$$

Непрерывность типа 1 означает, что из первого равенства следует второе.

§ 21. Непрерывные функции

Определение 21.1. *Если в области D функция является одновременно непрерывной по типу 1 и по типу 2, то будем ее называть непрерывной в области D.*

Таким образом, непрерывность функции означает одновременное выполнение условий

$$\operatorname*{limit}_{v\to\infty} F(X_v) = F\left(\operatorname*{limit}_{v\to\infty} X_v\right),$$

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\omega} F(X'_n) = F\left(\operatorname*{Lim}_{n\to\omega} X'_n\right),$$

где

$$X_1,\ X_2 \ldots X_\omega, \ldots X_\nu \ldots$$

фундаментальная последовательность типа 2, а

$$X'_1,\ X'_2 \ldots\ X'_n \ldots$$

— последовательность типа 1. Члены последовательностей и их пределы принадлежат области D.

Термин «непрерывная функция» вводится в классическом анализе. Для того чтобы использовать такой же термин в неархимедовой области, нужны определенные основания. Такие основания есть. Одно из главных свойств непрерывных функций классического анализа состоит в том, что такие функции достаточно задать только в рациональных точках. В остальных точках они определяются однозначно условием непрерывности. Точно такое же свойство имеет место и в неархимедовой числовой области.

Теорема 21.1. *Пусть в некоторой области D существенных чисел функция F является непрерывной в смысле определения 21.1. Предположим, что известны значения функции в рациональных точках r. Тогда данные значения и условия непрерывности однозначно определяют функцию F во всей области D.*

• Доказательство. Предположим, что указанным условиям отвечают две различные функции $F_1(\mathrm{X})$ и $F_2(\mathrm{X})$. Пусть $F(\mathrm{X}) = F_1(\mathrm{X}) - F_2(\mathrm{X})$. Функция $F(\mathrm{X})$ является непрерывной (это легко доказать) и, кроме того, в рациональных точках $F(r) \equiv 0$. Предположим, что аргумент X есть некоторое элементарное число $A = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} r_n$. Из непрерывности функции по типу 1 следует, что

$$F(A) = F\left(\operatorname*{Lim}_{n\to\omega} r_n\right) = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} F(r_n) = 0.$$

Возьмем некоторое существенное число $\mathrm{X} \in D$, которое является пределом элементарных чисел A_ν:

$$\mathrm{X} = \operatorname*{limit}_{\nu\to\infty} A_\nu.$$

Из непрерывности F по типу 2 заключаем, что

$$F(\mathrm{X}) = F\left(\operatorname*{limit}_{\nu\to\infty} A_\nu\right) = \operatorname*{limit}_{\nu\to\infty} F(A_\nu) \equiv 0.$$

Таким образом, для любого X имеем $F(\mathrm{X}) \equiv 0$ и, значит, $F_1(\mathrm{X}) \equiv F_2(\mathrm{X})$. Теорема доказана. ■

Далее, для функций, непрерывных в смысле классического анализа, имеет место теорема Больцано — Коши. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, то найдется точка $c \in [a, b]$ такая, что $f(c) = 0$. Это, пожалуй, главное свойство, которое дает нам неформальное, интуитивное понимание непрерывности. Причем непрерывности не только графика $y = f(x)$, но и непрерывности самого отрезка $[a, b]$. Тот факт, что всегда найдется точка пересечения графика и отрезка означает отсутствие на них вакансий. Функции, которые мы назвали непрерывными в неархимедовом анализе, обладают аналогичным свойством.

Теорема 21.2. *Пусть функция* $\mathrm{Y} = F(\mathrm{X})$ *является непрерывной на отрезке неархимедовой прямой* $[\alpha, \beta]$. *Если* $F(\alpha) < 0$, $F(\beta) > 0$, *то всегда найдется точка* γ, *в которой* $F(\gamma) = 0$. *При этом точка* γ *может принадлежать отрезку* $[a, b]$, *но может и не принадлежать ему.*

• Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Пусть $\mathrm{X} = r$ — рациональные значения аргумента.

Случай 1. Предположим, что функция такова, что ее значения в рациональных точках представляют собой рациональные числа. Запаса рациональных чисел вполне достаточно, чтобы к функции $F(r)$ можно было применить процедуру деления отрезка пополам. Возьмем точку $X = \frac{1}{2}$. Если $F\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, то теорема доказана. Если $F\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, то положим $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, в противном случае положим $\beta_1 = \frac{1}{2}$ и т.д. В результате придем к последовательности отрезков

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \ldots\ldots < \beta_n < \ldots < \beta_2 < \beta_1 < 1$$

таких, что для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$F(\alpha_n) < 0, \; F(\beta_n) > 0. \qquad (1)$$

При этом для любого натурального числа M можно найти такое N, что для $n > N$

$$\beta_n - \alpha_n < 1/M.$$

Возьмем теперь некоторое число $v = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} v(n)$ из продолженного натурального ряда. Из последовательностей α_n, β_n выберем подпоследовательности $\alpha_{v(n)}$, $\beta_{v(n)}$. Заменим в неравенствах (1) индекс n на $v(n)$ и перейдем к пределу Lim при $n \to \omega$. В результате получим

$$F\left(\operatorname*{Lim}_{n\to\omega} \alpha_{v(n)}\right) < 0, \; F\left(\operatorname*{Lim}_{n\to\omega} \beta_{v(n)}\right) > 0. \qquad (2)$$

Переходить в неравенствах к пределу Lim, вообще говоря, нельзя. Например, для любого $n = 1, 2, 3\ldots$ имеют место неравенства $(1/n - 10E) > 0$. Но, тем не менее, $\operatorname*{Lim}_{n\to\omega}(1/n - 10E) = -9E < 0$. Однако в рассматриваемом нами случае, когда значения $F(r)$ — это рациональные числа, переход к пределу в неравенствах возможен.

Последовательность отрезков $[\alpha_v, \beta_v]$ является стягивающейся. Пусть

$$\gamma = \operatorname*{limit}_{v\to\infty} \alpha_v = \operatorname*{limit}_{v\to\infty} \beta_v.$$

Перейдем в неравенствах (2) к пределу limit при $v \to \infty$. В результате получим

$$F(\gamma) = 0.$$

Теорема для случая 1 доказана. Кроме того, можно утверждать, что в случае 1 точка $\gamma \in [\alpha, \beta]$, так как по построению γ является ядром обычного вещественного числа, равного $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n$.

Случай 2. Пусть в рациональных точках значения F представляют собой определенные элементарные числа

$$F(r) = \operatorname*{Lim}_{m\to\omega} f_m(r).$$

Тогда начиная с некоторого m

$$f_m(0) < 0,\ f_m(1) > 0.$$

Для фиксированного m мы попадаем в условия случая 1. Заменим γ на γ_m и запишем

$$F(\gamma_m) = 0.$$

Пусть $\operatorname*{Lim}_{m\to\omega}\gamma_m = \gamma$. Перейдем к пределу Lim при $m \to \omega$ и воспользуемся непрерывностью F. В результате получим

$$\operatorname*{Lim}_{m\to\omega} F(\gamma_m) = F\left(\operatorname*{Lim}_{m\to\omega}\gamma_m\right) = F(\gamma) = 0.$$

Теорема для случая 2 доказана.

Теперь, однако, нельзя утверждать, что точка γ обязательно принадлежит отрезку прямой $[\alpha, \beta]$. Например, для функции

$$F(\mathrm{X}) = \mathrm{X} - \mathrm{E}^{\omega},\quad F(0) < 0,\quad F(1) > 0,\quad F(\mathrm{E}^{\omega}) = 0$$

точка $\gamma = \mathrm{E}^{\omega}$ принадлежит отрезку $[0, 1]$, а для функции

$$F(\mathrm{X}) = -1 + [3 + (-1)^{\omega}]\mathrm{X},\quad F(0) < 0,\quad F(1) > 0,\quad F(1/(3 + (-1)^{\omega})) = 0 \qquad (3)$$

точка $\gamma = (3 - j)^{-1}$ отрезку $[\alpha, \beta]$ уже не принадлежит. Последнее связано с тем, что сами значения функции $F(\mathrm{X})$ выходят за пределы существенной прямой OY. Неформально об этом случае можно сказать так. Рассматривая аналитическое выражение (3) для линейной функции $F(\mathrm{X})$ и представляя себе ее график в многомерном числовом пространстве, у нас нет никаких сомнений в том, что тип графика полностью согласуется с нашими представлениями о непрерывности. При этом график не имеет общих точек с отрезком $[\alpha, \beta]$ не потому, что сам график или отрезок $[\alpha, \beta]$ имеют какие-то купюры, а только потому, что в многомерном числовом пространстве график «обходит» отрезок $[\alpha, \beta]$ и не пересекает его. Иными словами, из точки, где $F < 0$, в точку, где $F > 0$, график $F(\mathrm{X})$ проходит мимо отрезка $[\alpha, \beta]$.

В принципе, подобные функции можно из анализа-2 исключить. Однако это сузит возможности аппарата. Кроме того, подобные функции появляются самым естественным образом, например через тригонометрические функции. Так, значения функции Y = cosX при X конечных всегда принадлежат прямой OY, а при X бесконечном могут уже выходить в новое измерение. Например, $\cos\pi\omega = (-1)^{\omega}$. Поэтому подобные функции исключать не будем.

Случай 3. Пусть

$$F(r) = \operatorname*{limit}_{v\to\infty} \operatorname*{Lim}_{m\to\omega} f_{mv}(r).$$

Начиная с некоторых v и m

$$f_{mv}(0) < 0, \quad f_{mv}(1) > 0.$$

Найдем значение γ_{mv} такое, что

$$F(\gamma_{mv}) = 0.$$

Зафиксируем v и перейдем к пределу Lim при $m \to \omega$. В результате получим

$$\gamma_v = \operatorname*{Lim}_{m\to\omega} \gamma_{mv}, \quad F(\gamma_v) = 0. \tag{4}$$

При любом фиксированном r из замкнутого промежутка [0,1] последовательность порядкового типа 2

$$\operatorname*{Lim}_{m\to\omega} f_{m1}(r), \ldots \operatorname*{Lim}_{m\to\omega} f_{mn}(r), \ldots \operatorname*{Lim}_{m\to\infty} f_{mv}(r) \ldots$$

будет фундаментальной. Последовательность

$$\gamma_1, \gamma_2 \cdots \gamma_\omega, \cdots \gamma_v \cdots$$

также будет фундаментальной. Следовательно, ее предел

$$\gamma = \operatorname*{limit}_{v\to\infty} \gamma_v$$

существует. Переходя к пределу limit при $v \to \infty$ в (4), получим

$$F(\gamma) = 0.$$

Теорема доказана. ■

Итак, понятия непрерывности в анализе-1 и анализе-2 аналогичны между собой. В частности, и в том и в другом случае непрерывная функция однозначно определяется своими значениями в рациональных точках. Это значит, что условия непрерывности чрезвычайно сильные. Ведь область существенных чисел является бесконечномерной и многомасштабной. Поэтому многообразие произвольных функций, которые можно задать в такой области, практически необозримо. Задача состоит в том, чтобы, отправляясь от непрерывных функций, постепенно продвигаться к классам все менее гладких функций. Причем степень продвижения в этом направлении должна диктоваться теми или иными потребностями теоретического или прикладного характера.

§ 22. Примеры

Принятые выше определения дают классификацию функций, связанную с различными степенями их непрерывности. В рабочем варианте проверка непрерывности сводится к проверке истинности двух утверждений:

если $\lim\limits_{v\to\infty}\mathrm{it}\,\Delta X_v = 0$, то $\lim\limits_{v\to\infty}\mathrm{it}\,[F(X) - F(X - \Delta X_v)] = 0$;

если $\mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{n\to\omega}\Delta X_n = 0$, то $\mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{n\to\omega}[F(X) - F(X - \Delta X_n)] = 0$.

Операторы limit и Lim обладают одинаковыми свойствами:

$$\mathop{\mathrm{limit}}_{v\to\infty}(A_v + B_v) = \mathop{\mathrm{limit}}_{v\to\infty}A_v + \mathop{\mathrm{limit}}_{v\to\infty}B_v,$$

$$\mathop{\mathrm{limit}}_{v\to\infty}A_v \cdot B_v = \mathop{\mathrm{limit}}_{v\to\infty}A_v \cdot \mathop{\mathrm{limit}}_{v\to\infty}B_v,$$

$$\mathop{\mathrm{limit}}_{v\to\infty}A_v / B_v = \mathop{\mathrm{limit}}_{v\to\infty}A_v / \mathop{\mathrm{limit}}_{v\to\infty}B_v;$$

$$\mathop{\mathrm{Lim}}_{n\to\omega}(A_n + B_n) = \mathop{\mathrm{Lim}}_{n\to\omega}A_n + \mathop{\mathrm{Lim}}_{n\to\omega}B_n,$$

$$\mathop{\mathrm{Lim}}_{n\to\omega}A_n \cdot B_n = \mathop{\mathrm{Lim}}_{n\to\omega}A_n \cdot \mathop{\mathrm{Lim}}_{n\to\omega}B_n,$$

$$\mathop{\mathrm{Lim}}_{n\to\omega}A_n / B_n = \mathop{\mathrm{Lim}}_{n\to\omega}A_n / \mathop{\mathrm{Lim}}_{n\to\omega}B_n.$$

Предполагается, что все пределы существуют и все знаменатели отличны от нуля. Различие процедур limit и Lim состоит в характере переменных ΔX_v, ΔX_n. Возможно, что

$$\Delta X_v = \frac{1}{v} \quad \text{или} \quad \frac{1}{v^{\omega}};\ \Delta X_n = \omega^{\omega} - \omega^{n},\ \omega - n,\ \mathrm{E} - \frac{1}{n}.$$

В первом случае с увеличением v переменная $|\Delta X_v|$ становится меньше Е, E^2 … и т.д. Во втором случае с увеличением n переменная ΔX_n может быть бесконечно большой или оставаться на вещественном масштабном уровне и т.д.

Для довольно широкого класса функций данное различие никакого значения не имеет.

1. Пусть $F(X) = X^2$. Тогда

$$F(X) - F(X - \Delta X) = 2X\Delta X - (\Delta X)^2.$$

Величина ΔX здесь не важна. Имеет значение только структура выражения. Применяя к нему оператор limit или Lim (и приписывая ΔX индекс v или n), мы в обоих случаях получим нуль.

Ясно, что этим свойством будут обладать многочлены по X, а также функции, раскладывающиеся в степенные ряды с достаточным радиусом сходимости.

Таким образом, для указанных функций непрерывность по типу 2 влечет за собой непрерывность по типу 1 и наоборот. Данные функции являются непрерывными.

Класс разрывных функций гораздо более широкий. Пусть $F(\mathrm{X})$ определена при

$$\mathrm{X} = \eta + x + \xi = x_{-1}\omega + x_0 + x_1\mathrm{E},$$

где x_{-1}, x_0 — ядра вещественных чисел, а $|x_1| \leq 10$ может принимать значения вещественного уровня, а также любых микро- и промежуточных уровней неархимедовой прямой.

2. Положим

$$F(\eta + x + \xi) = \eta^3 + (x + \xi)^2.$$

Рассмотрим непрерывность по типу 2. При $|\Delta\mathrm{X}_v| < \mathrm{E}$ приращение $\Delta\mathrm{X}_v$ — это приращение ξ. Поэтому

$$F(\mathrm{X}) - F(\mathrm{X} - \Delta\mathrm{X}_v) = 2(x + \xi)\Delta\mathrm{X}_v - (\Delta\mathrm{X}_v)^2 \to 0$$

при $\Delta\mathrm{X}_v \to 0$. Функция является непрерывной по типу 2 (локально непрерывной).

Теперь о непрерывности по типу 1. Рассмотрим переход с вещественного масштабного уровня прямой на ее первый мегауровень:

$$\mathrm{X}_n = x^*n,\ \mathrm{X}^* = x^*\omega,\ \ \Delta\mathrm{X}_n = x^*(\omega - n).$$

В области определения вида $\mathrm{X} = \eta + x + \xi$ предельной точке X^* соответствуют значения $\eta = x^*\omega$, $x = 0$, $\xi = 0$. Самой последовательности X_n соответствуют $\eta = 0$, $x = x^*n$, $\xi = 0$. Отсюда

$$F(\mathrm{X}^*) - F(\mathrm{X}_n) = (x^*)^3 \cdot \omega^3 - (x^*)^2 \cdot n^2.$$

При $n \to \omega$ выражение к 0 не стремится. Следовательно, при переходе с вещественного уровня на мегауровень функция разрывна и скачок ее равен

$$R = (x^*)^3 \cdot \omega^3 - (x^*)^2 \cdot \omega^2.$$

Рассмотрим теперь переход с первого микроуровня на вещественный масштабный уровень прямой. Пусть

$$\mathrm{X}^* = x^*;\ \ \mathrm{X}_n = x^* \cdot n \cdot \mathrm{E},\ \ \Delta\mathrm{X}_n = x^*(1 - n\mathrm{E}). \qquad (1)$$

Здесь $x^* \neq 0$ — ядро некоторого вещественного числа. В области определения $\mathrm{X} = \eta + x + \xi$ последовательности X_n отвечают значения

$\eta = 0$, $x = 0$, $\xi = x^* \cdot n \cdot \mathrm{E}$. Предельной точке X^* соответствуют значения $\eta = 0$, $x = x^*$, $\xi = 0$. Отсюда и (1) видно, что

$$F(\mathrm{X}^*) - F(\mathrm{X}_n) = (x^*)^2 \cdot (1 - n^2\mathrm{E}^2).$$

Ясно, что при $n \to \omega$ имеем $n^2\mathrm{E}^2 \to 1$ и предел Lim правой части равен 0. Следовательно, переход с первого микроуровня на вещественный уровень прямой совершается без скачка.

Рассмотрим теперь обратный переход — с вещественного уровня прямой на ее первый микроуровень. Положим

$$\mathrm{X}^* = x^*\mathrm{E};\quad \mathrm{X}_n = \frac{x^*}{n},\quad \Delta\mathrm{X}_n = x^*\left(\mathrm{E} - \frac{1}{n}\right),$$

где по-прежнему $x^* \neq 0$ — ядро вещественного числа. Тогда

$$F(\mathrm{X}^*) - F(\mathrm{X}_n) = x^*\left(\mathrm{E}^2 - \frac{1}{n^2}\right) \to 0$$

при $n \to \omega$. Непрерывность есть.

3. Нетрудно привести примеры функций, разрывных по типу 2 и непрерывных по типу 1. Пусть

$$F(\eta + x + \xi) = (\eta + x)^2 + \operatorname{sign}\xi.$$

Функция разрывна по типу 2, так как при $|\Delta\mathrm{X}_v| < \mathrm{E}$ приращение аргумента X — это приращение ξ. Непрерывность типа 1 между вещественным и первым мегауровнем имеет место, а между вещественным и первым микроуровнем непрерывности типа 1 нет.

Глава 6

Моделирование неархимедовых функций, их производных и интегралов на обычной действительной прямой

Хорошо известно, какую большую роль в математике и прикладных науках играют аналогии. Оказывается, что некоторые свойства неархимедовой прямой можно промоделировать на обычной действительной прямой. Это позволяет построить модели основных операций неархимедова анализа. Поэтому вначале обратимся к таким моделям, а затем на их основе рассмотрим конструкции производных и интегралов от неархимедовых функций.

§ 23. Область неординарных действительных чисел как модель многомерной неархимедовой числовой области

Выше было показано, что имеет место формула

$$e^{\pi i \omega} = -j,$$

где $j^2 = 1$ — двойная единица. Двойная единица неупорядочена относительно чисел, принадлежащих одномерной неархимедовой прямой. Это значит, что неархимедов математический анализ должен строиться на основе многомерной числовой системы. Промоделировать такую систему на одномерной действительной прямой невозможно. Можно, однако, несколько обобщить концепцию действительного числа и получить необходимую многомерную числовую область.

Обратимся к концепции вещественного числа по Кантору. Изменим в этой концепции только одну позицию — снимем требование фундаментальности последовательностей, которые служат материалом для построения действительных чисел. Заменим его менее жестким требованием ограниченности последовательностей.

Определение 23.1. *Неординарным вещественным числом* α *будем называть класс эквивалентности последовательностей рациональных чисел* a_n, a'_n… *таких, что последовательность* a_n *— ограничена, а по-*

следовательность $(a_n - a'_n)$ *входит в состав вещественного числа* $0_{\text{вещ}}$. Обозначение следующее:

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a'_n. \tag{1}$$

Числа (1) будем называть также конечными или ограниченными числами, a_n будем считать приближением α, а α — пределом последовательности a_n. Определения ограниченности a_n и числа $0_{\text{вещ}}$ сохраняются прежними: последовательность a_n — ограничена, если существует натуральное M такое, что $|a_n| < M$ для любого n; число $0_{\text{вещ}}$ — это класс эквивалентности последовательностей a_n таких, что для любого рационального $\varepsilon > 0$ существует натуральное $N(\varepsilon)$ такое, что $|a_n| < \varepsilon$ при $n > N$.

Теперь необходимо остановиться на корректности обозначения (1), так как символ lim уже использовался для обозначения вещественных чисел. Корректность очевидна. Если последовательность $\{a_n\}$ является фундаментальной, то вещественное число $\lim a_n$ совпадает с числом в смысле (1). Если же последовательность $\{a_n\}$ не фундаментальна, то вещественного числа $\lim a_n$ не существует, в то время как число в смысле (1) существует также и в этом случае. Например, вещественного числа $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ не существует. Однако в смысле (1) число $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ существует и представляет собой класс эквивалентности последовательностей

$$\{(-1)^n\};\ \left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\right\};\ \left\{(-1)^n + \frac{1+n}{n^{10}}\right\};\ \ldots .$$

Арифметические операции с числами (1) определим через их приближения:

$$\lim a_n \pm \lim b_n = \lim(a_n \pm b_n),\quad \lim a_n \cdot \lim b_n = \lim a_n b_n,$$

$$\frac{\lim a_n}{\lim b_n} = \lim\frac{a_n}{b_n},\quad b_n \neq 0.$$

Аналогично определим модуль и целую часть

$$|\lim a_n| = \lim|a_n|,\quad [\lim a_n] = \lim[a_n].$$

Определение 23.2. *Будем считать, что числа*

$$\alpha = \lim a_n,\ \ \beta = \lim b_n$$

находятся в отношении $\alpha \le \beta$ $(\beta \ge \alpha)$, *если начиная с некоторого номера* N *выполняются неравенства*

$$a_n \le b_n.$$

Если $\alpha \ne \beta$ *и* $\alpha \le \beta$, *то примем, что* $\alpha < \beta$ $(\beta > \alpha)$.

Легко доказать, что указанные отношения не зависят от выбора конкретных последовательностей из соответствующих классов эквивалентности. Следовательно, определения корректны.

Сопоставим теперь свойства вещественных чисел и неординарных вещественных чисел из области (1).

1^0. В области (1) определены операции сложения и умножения. Данные операции а) коммутативны; б) ассоциативны; в) дистрибутивны.

2^0. Области (1) принадлежат числа $0_{\text{вещ}}$, $\pm\, n_{\text{вещ}}$, $r_{\text{вещ}}$. Роль нуля и единицы играют числа $0_{\text{вещ}}$ и $1_{\text{вещ}}$. Вещественные числа являются частным случаем чисел (1) и входят в числовую область (1) как составная часть.

3^0. Определены операции вычитания и деления. Операция деления определена не для всех конечных чисел.

4^0. Среди чисел (1) отсутствуют мнимая и дуальная единицы, т.е. числа i и J такие, что $i^2 = -1$ и $J^2 = 0$ при $J \neq 0$.

5^0. Область чисел (1) является частично упорядоченной.

6^0. Среди чисел (1) есть делители нуля. Среди чисел (1) есть неограниченное число двойных единиц. Это числа, приближения которых равны +1 и −1 с произвольным их чередованием.

7^0. Среди чисел (1) отсутствуют актуальные бесконечно малые числа.

Проще говоря, если относительно числа α области (1) известно, что $|\alpha| < \varepsilon$ для любого рационального $\varepsilon > 0$, то $\alpha = 0_{\text{вещ}}$. Последнее означает, что система чисел (1) удовлетворяет Первой аксиоме разрешения:

если относительно двух неординарных вещественных чисел α и β известно, что

$$|\alpha - \beta| < \varepsilon$$

для любого рационального $\varepsilon > 0$, то числа α и β между собой не различаются, т.е. $\alpha = \beta$ или $\alpha - \beta = 0_{\text{вещ}}$.

Последние утверждения дают основание для того, чтобы числовую систему (1) отнести к архимедовой системе, хотя она упорядочена только частично.

Таким образом, область (1) имеет ряд общих черт с областью вещественных чисел. Есть и отличия. Главное отличие состоит в том, что система обычных вещественных чисел линейно упорядочена. Можно сказать, что вещественные числа — это заурядные (или ординарные) числа, т.е. числа, стоящие в ряду подобных им. Числа же (1) неупорядочены, т.е. в общем случае они являются «из ряда вон выходящими», неординарными. Такая характеристика дала основание для того, чтобы числа (1) были названы неординарными вещественными числами.

Словом «вещественные» мы подчеркиваем то обстоятельство, что для чисел (1) так же, как и для обычных вещественных чисел, имеет место Первая аксиома разрешения. Фигурально выражаясь, можно сказать, что число (1) представляет собой настолько крупное скопление последовательностей рациональных чисел, что это скопление проявляется на вещественном масштабном уровне.

Для неограниченных последовательностей удобно ввести «более крупные» объекты, чем те, которые определяются эквивалентностью типа $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - a'_n) = 0_{\text{вещ}}$. Проще всего это сделать таким образом. Возьмем совокупность последовательностей, которые определяют число $0_{\text{вещ}}$. Исключим из них те последовательности, в которых встречается нуль. Перейдем теперь к последовательностям обратных величин. Их совокупность обозначим через ∞ и будем называть бесконечностью в области неординарных вещественных чисел. Отметим, что совокупности последовательностей ∞ принадлежит совокупность $+\infty$ и совокупность $-\infty$ (они вводились в области вещественных чисел). О каждой из них можно говорить как об одном из путей, ведущих в точку ∞.

Пойдем дальше. Обратимся теперь к делителям нуля. Пусть α — один из делителей нуля и

$$\alpha = \lim_n a_n.$$

Из совокупности последовательностей, входящих в состав числа α, исключим те, в состав которых входит нуль. Возьмем теперь последовательности, обратные к указанным, т.е. последовательности $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$, где $a_n \neq 0$. Их совокупность обозначим через α^{-1}. Возьмем число β и точно так же образуем совокупность последовательностей β^{-1}.

Определение 23.3. *Если* $\alpha \cdot \beta = 0_{\text{вещ}}$ *и* $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, *то объекты* α^{-1}, β^{-1} *будем называть числами, обратными делителям нуля.*

Это очень интересные объекты. Они имеют двойственную природу. Нестрого можно сказать так: одна их часть принадлежит области конечного, а другая часть — области бесконечного.

Например, пусть α определяется классом последовательностей, в который входит последовательность

$$1, r_1;\ 1;\ r_2, 1,\ r_3 \ldots 1,\ r_n;\ \ldots;\ \lim r_n = 0,$$

например, $r_n = \dfrac{1}{n},\ \dfrac{1}{n^2},\ \dfrac{(-1)^n}{n^3}, \ldots$.

Тогда в состав объекта α^{-1} будут входить последовательности

$$\{1, n\};\ \{1, n^2\};\ \{1, (-1)^n n^3\}, \ldots .$$

Здесь на первом месте указаны нечетные приближения, на втором — четные. Числа, обратные к делителям нуля, и бесконечность также будем относить к области неординарных вещественных чисел.

Таким образом, область неординарных вещественных чисел является бесконечномерной. Именно это ее свойство можно рассматривать как модель бесконечной размерности неархимедовой области существенных чисел. Каждое измерение в области неординарных чисел имеет свой аналог в существенной числовой области. (Обратное, конечно, неверно.) Данное соответствие можно продемонстрировать на примере двойной единицы. Возьмем последовательность из абсолютных единиц $\pm 1_{\text{абс}}$ и обозначим ее как

$$j_{\text{абс}} = \{1, -1, 1, -1, \ldots\}.$$

Если мы допустим, что в данной последовательности можно «испортить» любое конечное число членов, то придем к элементарному числу

$$j_{\text{эл}} = \operatorname*{Lim}_{n \to \omega} (-1)^{n+1}. \tag{2}$$

Дальше делаем еще один шаг и допускаем изменение всех членов последовательности путем добавления к ним чисел из состава вещественного числа $0_{\text{вещ}}$. В результате получаем неординарное вещественное число

$$j_{\text{вещ}} = \lim_{n \to \infty} (-1)^{n+1}.$$

Таким образом, мы пришли к двойной единице и соответствующим делителям нуля:

$$j^2_{\text{вещ}} = 1_{\text{вещ}};\ \frac{j_{\text{вещ}} + 1}{2} \cdot \frac{j_{\text{вещ}} - 1}{2} = 0_{\text{вещ}}.$$

Обратимся теперь к объектам анализа-2. Образуем из элементарных чисел (2) стационарную несчетную последовательность порядкового типа 2:

$$\begin{matrix} j_{\text{эл}}, & j_{\text{эл}}, \ldots & j_{\text{эл}}, \ldots & j_{\text{эл}} \ldots \\ 1 & 2 \ldots & \omega, \ldots & v, \ldots . \end{matrix}$$

Допустим теперь изменение любого числа членов последовательности с использованием чисел из совокупности, которая была ранее обозначена как $0_{\text{сущ}}$. Проще говоря, образуем объект

$$j_{\text{сущ}} = \operatorname*{limit}_{v \to \infty} j_{\text{эл}}.$$

В области существенных чисел построенный объект описывает одно из измерений данной области. Объект представляет собой не что иное, как двойную единицу и приводит к делителям нуля:

$$j^2_{\text{сущ}} = 1_{\text{сущ}}; \quad \frac{j_{\text{сущ}} + 1}{2} \cdot \frac{j_{\text{сущ}} - 1}{2} = 0_{\text{сущ}}.$$

Ясно, что все это можно проделать с любой заданной последовательностью абсолютных рациональных чисел r_n. С одной стороны, данная последовательность порождает неординарное вещественное число $\alpha_{\text{н.в.}}$, с другой — число неархимедова анализа-2:

$$\alpha_{\text{н.в.}} = \lim_{n\to\infty} r_n; \quad \sigma = \operatorname*{limit}_{\nu\to\infty} \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} r_n.$$

Введем оператор перехода

$$\Re\left[\operatorname*{limit}_{\nu\to\infty} \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} r_n\right] = \lim_{n\to\infty} r_n.$$

Оператор является однозначным, в то время как обратный оператор — бесконечнозначным — числовая область анализа-2 гораздо богаче области неординарных вещественных чисел. Тем не менее главное свойство — многомерность обеих числовых систем — на указанной аналогии прослеживается.

В данных пространствах можно построить базисы, которые сводятся либо к делителям нуля, либо к двойным и обычным единицам $1_{\text{вещ}}$ или $1_{\text{сущ}}$. Попытка вычисления $\operatorname{Ln}(-j)/\pi\omega$ естественно приводит к мнимой единице *i*. Таким образом, мы неизбежно приходим к многомерным числовым системам гиперкомплексных чисел [16, 111–113]. Подобные числа используются в геометрии и физике (см. [114] и другие статьи в журнале «Гиперкомплексные числа в геометрии и физике»). В [14, 16] с помощью двойных чисел описывались объекты, которые можно рассматривать как пределы непрерывных кривых, имеющих неограниченное количество изломов.

На базе неординарных вещественных чисел можно развить свой математический анализ. Основные его понятия будем рассматривать как модель неархимедова анализа, построенного для многомерной системы существенных чисел.

§ 24. Моделирование иерархии масштабных уровней неархимедовой прямой

Уровни доступности на обычной действительной прямой. Неархимедова прямая является объектом более сложным, чем вещественная прямая. Поэтому на вещественной прямой можно промоделировать только некоторые свойства неархимедовой прямой. Выберем одно свойство, которое является наиболее важным, — свойство многомасштабности. Более того, вместо полной неархимедовой прямой мы возьмем упрощенный ее вариант — прямую с купюрами:

$$X = x_{-\mu}\omega^{\mu} + \ldots + x_{-1}\omega + x_0 + \frac{x_1}{\omega} + \ldots + \frac{x_{\nu-1}}{\omega^{\nu-1}} + \frac{\bar{x}_{\nu}}{\omega^{\nu}}, \qquad (1)$$

где по-прежнему $x_{-\mu}, \ldots x_{\nu-1}$ — ядра вещественных чисел. Примем, что переменная $\bar{x}_{\nu}$ принципиально отличается от переменных $x_{-\mu}, \ldots x_{\nu-1}$ тем, что $|\bar{x}_{\nu}| \leq M$, где M — конечное натуральное число и, кроме того, $\bar{x}_{\nu}$ может быть любым существенным числом из указанного диапазона. Проще говоря, $|\bar{x}_{\nu}| \leq M$ — это отрезок неархимедовой прямой без купюр. Именно это обстоятельство подчеркивается чертой в обозначении $\bar{x}_{\nu}$. Таким образом, числовая область (1) обладает иерархией масштабных уровней. Ей принадлежит вещественный масштабный уровень x_0, мегауровни $x_{-1}\omega, \ldots$, микроуровни $x_1\mathrm{E}, \ldots$.

Многомасштабность прежде всего ассоциируется с понятием доступности в том смысле, что чем бóльший номер имеет мега- или микроуровень, тем более сложные инструменты необходимы для их исследования. Поэтому введем и на действительной прямой иерархию уровней доступности. Данные уровни будут моделировать масштабным уровням неархимедовой прямой.

Поступим следующим образом. Обычно числовую ось изображают так, как показано на рис. 6.1, *а*. Однако ничто не мешает изобразить ее и так, как показано на рис. 6.1, *б*.

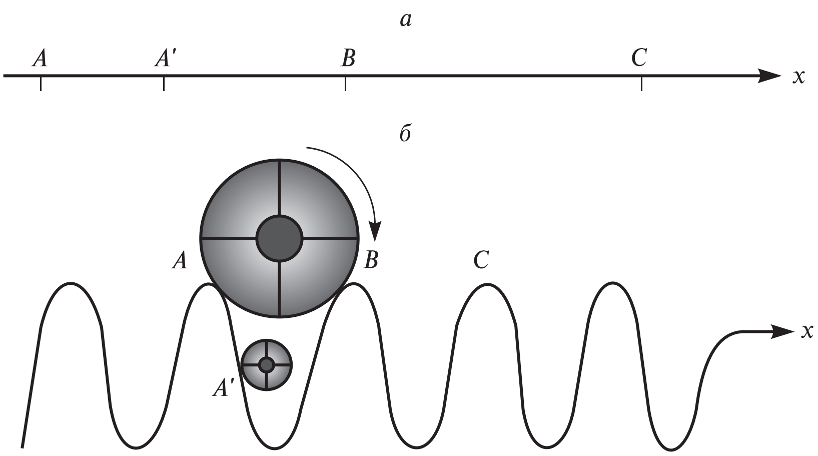

Рис. 6.1.

Представим теперь, что по этой прямой (как по дороге с неровностями) мы передвигаемся на колесном экипаже с диаметром колеса, равным *d*. Ясно, что, располагая таким способом передвижения, мы можем достичь (коснуться) только точек A, B, $C \ldots$.

Достичь, например, точки A' таким способом уже невозможно. Для этого мы должны в точке A взять экипаж с меньшим диаметром колеса.

Таким образом, у нас появляются основания для того, чтобы некоторые точки прямой объединить в один уровень доступности (например, в уровень доступности для колеса диаметром *d*), другие точки — в другой уровень доступности и т.д. Ясно, что подобных уровней можно ввести сколько угодно.

Теперь — формальное описание. Предположим, что точки A, B... располагаются на оси с шагом, равным N^*. Координаты этих точек будем обозначать x_0. Данный уровень доступности будем считать базовым (нулевым) и рассматривать как уровень, аналогичный вещественному уровню неархимедовой прямой. Все уровни доступности с меньшим или бóльшим шагом можно считать аналогами микро- и мегауровней неархимедовой прямой. Пусть точки на остальных уровнях расположены также равномерно и переход с одного уровня на другой управляется константой N^*, где N^* — возможно, очень большое, но конечное и вполне определенное натуральное число. Пусть $x \geq 0$, x_0 — координата точки A. Тогда координаты точек первого уровня равны $x_0 + \dfrac{x_1}{N^*}$, где $x_1 = 0, 1, 2, \ldots, N^* - 1$; координаты точек второго уровня равны

$$x_0 + \frac{x_1}{N^*} + \frac{x_2}{(N^*)^2},$$

где x_0, x_1 — зафиксированы, а $x_2 = 0, 1 \ldots N^* - 1$ и т.д. Таким образом, вся информация о структуре аргумента x дается его разложением в системе счисления с основанием N^*:

$$x = x_{-m}(N^*)^m + \ldots + x_0 + \frac{x_1}{N^*} + \ldots + \frac{x_k}{(N^*)^k} + \ldots . \tag{2}$$

В моделях реальных процессов есть смысл рассматривать только ограниченное число уровней доступности. Поэтому оборвем запись (2) на знаке k:

$$x = x_{-m}(N^*)^m + \ldots + x_0 + \frac{x_1}{N^*} + \ldots + \frac{x_{k-1}}{(N^*)^{k-1}} + \frac{\bar{x}_k}{(N^*)^k}.$$

Переменные $x_{-m},\ldots x_{k-1}$ принимают дискретные значения, равные $0, 1,\ldots N^* - 1$, а переменная $\bar{x}_k$ меняется непрерывно от 0 до N^*. Именно это обстоятельство подчеркивается чертой в обозначении $\bar{x}_k$.

В самом простом варианте $m = 0$, $k = 1$, $N^* = 10$. Здесь выделяются только два уровня доступности: базовый уровень целых чисел и уровень дробных чисел. Для этого случая будем использовать обозначения без индексов:

$$x_0 = [x] = z,\ \bar{x}_1 = \{x\} = \bar{\tau},\ x = z + \bar{\tau}, \tag{3}$$

$z, \bar{\tau}$ — целая и дробные части x. Черта в обозначении $\bar{\tau}$ подчеркивает то обстоятельство, что область значений переменной является непрерывной. Если речь будет идти о двух уровнях доступности, то черту будем опускать: $\bar{\tau} = \tau$.

Как осуществляется переход аргумента с одного масштабного уровня на другой? В математическом анализе можно обойтись без постановки данного вопроса. Нам достаточно знать, что каждому значению x из области (2) соответствует свое значение y из той же области. А как происходит переход от одного значения x к другому — этот вопрос стоит уже вне математического анализа. Однако если x — это время, а y — пройденный путь, то функцию $y = f(x)$ мы представляем себе как описание процесса, который разворачивается постепенно. Любое углубление в эту тему приводит к парадоксам Зенона. Полностью они не разрешены до сих пор. В «рабочих вариантах» теорий считается, что если у нас есть одномерный континуум, то проблема непрерывного движения уже как-то решена. Например, пусть $y = x^2$, где y и x — безразмерные скорость и время. Тогда пройденный путь равен

$$\int_0^{\alpha} x^2 dx = \frac{\alpha^3}{3}. \tag{4}$$

Результат нас вполне устраивает без обсуждения проблемы, каким же образом увеличивается аргумент, проходя при этом бесконечное число шагов. Главное, что существует предел некоторых выражений, которые мы и принимаем за результат (4).

В неархимедовом анализе также есть класс функций, для которых имеют место результаты вида (4). Например, ниже будет показано, что

$$\int_0^{\sigma} \mathrm{X}^2 d\mathrm{X} = \frac{\sigma^3}{3}.$$

Причем данная формула одинаково пригодна как при значении верхнего предела $\sigma = \mathrm{E}$ или E^{ω}, так и при $\sigma = 10^{23}$, ω или ω^{ω}. В данном случае на технике интегрирования номер масштабного уровня никак не сказывается. Поэтому и вопрос о переходе σ с одного масштабного уровня на другой можно не рассматривать.

Нетрудно понять, что такая возможность является следствием непрерывности функции на стыках различных масштабных уровней (Lim — непрерывность, или непрерывность типа 1). Для Lim-разрывных функций такой возможности уже нет, поэтому вопрос о процедуре перехода аргумента от одного масштабного уровня к другому становится актуальным уже и в техническом отношении.

Например, пусть в (1)

$$\mathrm{X} = x_{-1}\omega + x \tag{5}$$

и переменная X увеличивается от нуля. Вначале она проходит вещественный уровень неархимедовой прямой, т.е. уровень $x_{-1} \equiv 0$, $\mathrm{X} = x$. Возникает вопрос: как, двигаясь подобным образом, можно попасть, например, в точку $\mathrm{X} = 0{,}1\omega$?

Вполне может оказаться, что на новом масштабном уровне действуют и новые законы, управляющие изменением переменных. Поэтому проблему перехода к новому масштабу можно соотнести с общей проблемой перехода количественных изменений в качественные. Если посмотреть на данный вопрос шире, то можно вспомнить немало примеров, когда переходы подобного рода совершаются обязательно скачком. По крайней мере, переход от $\mathrm{X} = 1, 2, 3, 4\ldots$ к $\mathrm{X} = 0{,}1\omega$ должен обязательно содержать в себе скачок даже формально. Имеется в виду то, что переход от значений $x = 1, 2, 3\ldots$, скажем, к значению $x = 10^{23}$ также содержит скачок, хотя такой переход и можно совершать, двигаясь по шагам, т.е. формально — без скачка. Следовательно, например в случае (5), по вещественному масштабному уровню мы можем двигаться только до некоторой точки $x = L$. Затем скачком происходит перемещение в некоторую точку мегауровня.

В модели, которую мы строим на обычной действительной прямой, данный переход (скачок) можно описать таким образом. Примем, что функция определена только при $0 \le \tau \le \Theta < 1$. В частности, в окрестности нулевой точки имеем $0 \le x \le \Theta < 1$. Переход же функции от точки $x = \Theta$ к точке $x = 1$ должен описываться отдельной процедурой. Точку перехода (скачка) к новому уровню естественно назвать точкой горизонта. Положим $\Theta = 0{,}9$. Тогда процесс увеличения аргумента x можно представить себе так. При старте от $x = 0$ вначале аргумент увеличивается до $x = 0{,}9$. При достижении $x = 0{,}9$ аргумент скачком переходит к значению $x = 1$. Далее опять идет «постепенное» увеличение x до $x = 1{,}9$ и происходит скачок к точке $x = 2$ и т.д.

Рассмотрим теперь «постепенное» изменение переменной на участке $0 \leq x \leq 0{,}9$. Введем на этом участке расстояние до своей точки горизонта. Пусть при старте от $x = 0$ аргумент увеличивается «постепенно» до $x = 0{,}09$. Затем x скачком переходит к значению $x = 0{,}1$. После этого от 0,1 до 0,19 идет «постепенный» рост и опять качественный скачок в точку $x = 0{,}2$ и т.д. Ясно, что «вглубь» подобную процедуру можно продолжить сколько угодно раз. В результате мы получим некоторый фрактал того же типа, что и пыль Кантора [115].

При $\Theta = 1/3$ фрактал строится таким образом. Исходный интервал делится на три части и выбрасывается не средний интервал, как при построении множества Кантора, а правый. Каждый из оставшихся интервалов делится на три части, правая часть отбрасывается снова и т.д. Движение точки вдоль полученного фрактала состоит только из скачков различных масштабов. Это и будет моделью движения точки вдоль бесконечномасштабной неархимедовой прямой.

В реальных задачах нет необходимости углубляться в микроуровни с неограниченными номерами. Достаточно будет ограничиться некоторым конечным номером. Для модели это означает, что мы останавливаем процесс образования фрактала на M-м шаге. Теперь у нас точка движется по совокупности непрерывных интервалов длиной $(0{,}9)^M$. После прохождения одного интервала происходит скачок того или иного масштаба. В результате мы попадаем в начало следующего интервала и т.д. Вопрос о механизме движения вдоль интервала уже не ставится. Задается только некоторый закон движения вдоль каждого интервала. Точно так же задаются свои законы для преодоления разрывов различных масштабов. Применение данной модели рассмотрено в § 39.

§ 25. Моделирование неархимедовых функций

Моделирование функций. Вначале обсудим данный вопрос неформально. Пусть функция $\mathrm{Y} = F(\mathrm{X})$ задана в числовой области (1) § 24. Будем представлять себе F как некоторое устройство, которое перерабатывает значение X в значение Y. Есть устройства, которые воспринимают аргумент X как единое целое и после определенных операций с ним преобразуют его в значение Y. Например,

$$\mathrm{Y} = \mathrm{X}^2; \quad \mathrm{Y} = \sin\mathrm{X}.$$

В других случаях устройство F «расщепляет» аргумент X на отдельные составляющие и каждую из них обрабатывает по своим законам. Например,

$$\begin{aligned} F(\ldots + x_1\mathrm{E} + x_0 + x_{-1}\omega + \ldots) = f(x_1\mathrm{E},\, x_0,\, x_{-1}\omega) = \\ = (x_1\mathrm{E})^2 + x_1 \sin x_0 + (x_{-1}\omega)^3. \end{aligned} \tag{1}$$

Именно это свойство попытаемся промоделировать на обычных функциях действительного переменного. Есть основания надеяться, что различные варианты дифференцирования и интегрирования подобных функций, включая определенное интегрирование, будут моделировать аналогичные операции для неархимедовых функций. Тогда полученные ниже формулы можно будет рассматривать как некоторый материал для обобщений на неархимедову числовую область. Главным здесь является то обстоятельство, что все полученные формулы будут представлять собой не что иное, как обычные формулы классического анализа, только записанные в некотором специальном виде. Такая исходная посылка, кроме всего прочего, дает дополнительное обоснование соответствующих построений в неархимедовой области.

Пусть теперь $y = F(x)$ — действительная функция обычного действительного переменного x. Для наших целей необходимо найти такой способ «расщепления» аргумента x, который был бы похож на расщепление аргумента в формуле (1).

Воспользуемся для этого уровнями доступности, рассмотренными в § 24. В случае двух уровней имеем представление (3) § 24. Пусть $x \geq 0$. Переменная z в (3) § 24 не ограничена, но может принимать только дискретные значения. Переменная τ ограничена, но может меняться непрерывно, т.е.

$$z = 0, 1, 2, 3, \ldots; \;\; 0 \leq \tau < 1.$$

Таким образом,

$$y = F(x) = F(z + \tau) = f(z, \tau). \tag{2}$$

Например,

$$F(x) = f(z, \tau) = (\tau + z)^2 = x^2, \tag{3}$$

или

$$F(x) = f(z, \tau) = z^3 + \tau^2. \tag{4}$$

В первом случае аргумент «воспринимается» функцией как единое целое, во втором — расщепляется на отдельные составляющие.

Продолжение функции с одного уровня прямой на другой ее уровень. Как отмечалось, функция $f(z, \tau)$ определена только при целых z. Будем считать, что ее можно продолжить на все значения z. Например, если функция задана аналитическим выражением, которое имеет смысл не только для целых z, то ее продолжение можно определять тем же аналитическим выражением. Аналогично считаем, что для любого z функция $f(z,\tau)$ может быть продолжена в область значений $\tau < 0$, $\tau \geq 1$.

Таким образом, теперь мы располагаем функцией двух переменных, определенной на плоскости $0z\tau$. Примем, что функция имеет все интегралы и производные, которые нам потребуются в дальнейшем.

Рассмотрим подробнее связь (2). В общем случае даже для гладкой функции $f(z,\tau)$ функция $F(x)$ при целых x будет разрывной. Разрыв равен

$$[F(x)] = F(x+0) - F(x-0) = f(z+1,0) - f(z,1),$$

где $x = z$ — целое (рис. 6.2).

Проведем теперь на плоскости (z,τ) прямую

$$\tau = -z + x^0, \quad x^0 = \text{const}.$$

Все точки этой прямой соответствуют одной и той же точке на оси Ox — точке $x = x^0$. Таким образом, в общем случае мы имеем беско-

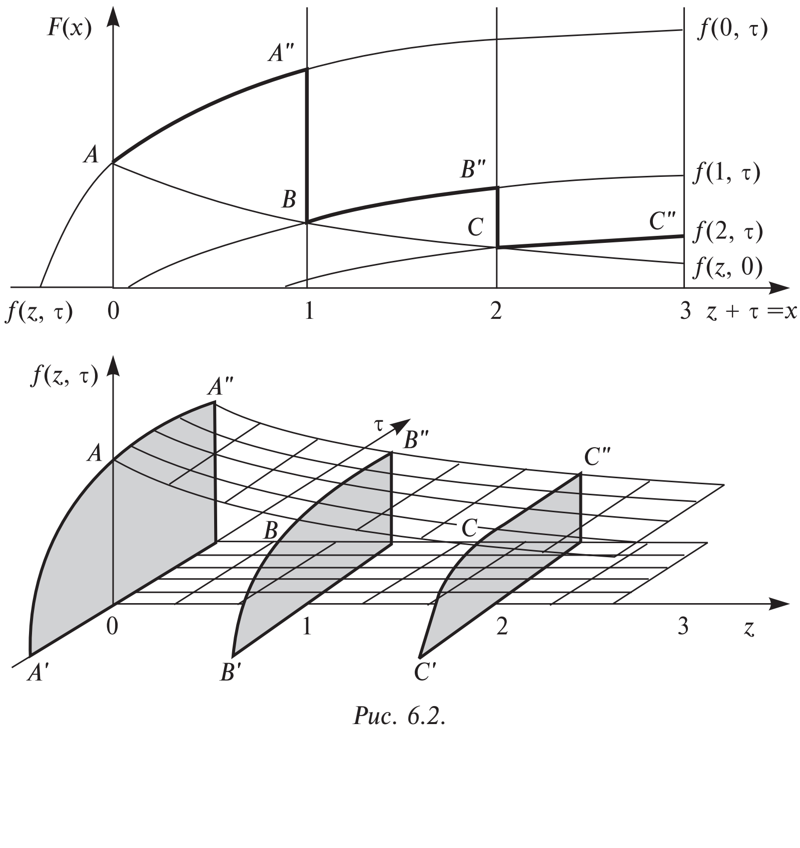

Рис. 6.2.

нечно много различных значений $f(z, -z+x^0)$, которые относятся к точке $x = x^0$. Только одно из этих значений при $z = [x^0]$ равно значению самой функции F в точке x^0, остальные значения равны значениям различных продолжений $F(x)$. В дальнейшем для нас бóльшее значение будет иметь продолжение функции $F(x)$, равное $f(z, 0)$. Фактически это есть продолжение функции с макроуровня на микроуровни. Если нас не интересуют значения $F(x)$ при дробном x или эти значения нам недоступны, то $f(z, 0)$ дает представление о поведении $F(x)$ в целом. Продолжение функции с микроуровня на макроуровень имеет совсем другой смысл. Например, функция $f(0, \tau)$ при $0 \le \tau < 1$ характеризует локальное поведение $F(x)$ в точке $x = 0$. При увеличении τ та же функция $f(0, \tau)$ дает экстраполяцию локального поведения на макроуровень.

Итак, совокупность всевозможных продолжений $F(x)$ в точку $x = x^0$ описывается значениями $f(z, -z+x^0)$. Если для некоторых значений аргументов имеют место равенства

$$f(z, -z+x^0) = F(x^0), \tag{5}$$

то можно говорить о непрерывности соответствующего продолжения функции в точке x^0. В противном случае непрерывности не будет и можно вычислить разрыв. Здесь возможно чрезвычайно много самых различных вариантов. В самом простом варианте непрерывность будет иметь место во всех точках и для любых продолжений. Тогда равенство (5) становится тождеством и достаточное условие непрерывности приобретает вид

$$\frac{\partial f(z, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial f(z, \tau)}{\partial z}. \tag{6}$$

В данном случае функция $f(z, \tau)$ сводится к функции одной переменной:

$$F(x) = F(\tau + z) = f(z, \tau) = f(\tau + z).$$

Здесь уместно вернуться к рассуждениям о том, что функция $F(x)$ может воспринимать свой аргумент либо «целиком», либо расщеплять его на отдельные части. Легко заметить, что данное свойство зависит от списка операций, которые допускаются для функции F. Если в операциях, связывающих x и $F(x)$, мы допустим предельные переходы, то грань между функциями типа (3) и (4) стирается. Например,

$$\lim_{n\to\infty} \cos^{2n} \pi x = \begin{cases} 1 \text{ для } & \text{целого } x, \\ 0 \text{ для } & \text{дробного } x. \end{cases}$$

Таким образом, рассуждения п. 1 можно рассматривать только как наводящие. При строгих формулировках мы должны рассматривать только условия типа (5), (6).

§ 26. Моделирование производных и неопределенных интегралов

Итак, в качестве исходной нам задана функция $y = F(x)$. В типичном случае данная функция будет разрывной в целочисленных точках x и гладкой между этими точками. В принципе, для ее исследования можно использовать все методы классического анализа, в том числе и понятия производных и интегралов. Однако в нашей модели мы учитываем некоторые новые обстоятельства, в частности уровни доступности точек на прямой.

Предположим, что масштаб нашего непосредственного восприятия гораздо больше единицы масштаба, выбранного на оси Ox. Например, единице масштаба на оси Ox соответствует 10^{-33} см. В этой ситуации переменная, которая пробегает только дискретные значения $0, 1, 2, 3, \ldots$, воспринимается нами как непрерывная переменная. Пусть, например,

$$f(z,\tau) = z^2 + 10^{-5}\sin\tau.$$

Ясно, что, сопоставляя каждому наблюдаемому целому значению $x = z$ его квадрат, мы приходим к выводу, что график функции — это квадратная парабола. О том, что есть какие-то промежуточные точки $\tau \neq 0$, мы вообще можем не знать. Так же, как можем не знать о самой величине масштаба, т.е. о величине 10^{-33} см. Поэтому при изображении параболы мы считаем, что график функции представляет собой гладкую кривую, которой отвечает своя производная. Таким образом, если доступны только целочисленные значения аргумента, то говорить об обычной производной функции смысла нет.

Рассмотрим теперь различные конструкции, которые можно будет использовать для исследования функций с учетом указанных ограничений. Классическая производная — это приращение функции, отнесенное к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента неограниченно уменьшается. Идеи данного раздела сводятся к следующим:

а) если отношение приращений нельзя подсчитать для самой функции, то можно подсчитать его для различных продолжений функции и затем перейти к производным;

б) если обозначена граница уменьшения приращения аргумента, то можно ввести такие определения, в которых данная граница учитывалась бы явно.

Перейдем к описанию конкретных вариантов.

1. Пусть нам доступны значения $F(x)$ только при целых $x = 0;\ 1;\ldots i,\ldots N$. Первое, что здесь можно сделать, — это взять в качестве характеристики функции отношение $\Delta y / \Delta x$ при $\Delta x = 1$. Функция разрывна в целочисленных значениях аргумента, поэтому для выбора значений $F(i)$ есть различные варианты.

2. Ничто не мешает ввести в аппарат обычные производные:

$$\frac{\partial f(z,0)}{\partial z},\ \frac{\partial f(z,1)}{\partial z}.$$

Любому фиксированному целому z производной

$$\frac{\partial f(z,\tau)}{\partial \tau}$$

отвечает производная самой функции $F(x)$, если $0 \le \tau < 1$, и производная от продолжения функции, если $\tau < 0$ или $\tau \ge 1$. Функцию f по отношению к своим производным естественно считать соответствующим неопределенным интегралом.

3. В случае необходимости можно использовать также производные вида

$$\frac{\partial f(z,\tau)}{\partial z},\ \frac{\partial f(z,\tau)}{\partial \tau},\ \frac{\partial^2 f(z,\tau)}{\partial z \partial \tau},\ldots$$

и соответствующие им интегралы. Здесь переменная z уже может быть и не целым числом. Аналогично можно рассмотреть любое число уровней доступности на действительной прямой.

§ 27. Моделирование определенных интегралов

Пусть по-прежнему

$$y = F(x) = f(z,\tau),\ z = [x],\ \tau = \{x\},\ x = z + \tau.$$

Функция определена на оси Ox. Ось Ox — обычная действительная прямая, но мы ее изображаем так, как показано на рис. 6.1, *б*. Рисунок иллюстрирует разные уровни доступности точек оси.

Функция $f(z,\tau)$ предполагалась гладкой по обоим своим аргументам. Следовательно, $F(x)$ может быть разрывной только при целых x, причем разрывы будут только первого рода. Поэтому функция

$F(x)$ является интегрируемой по Риману и интеграл от нее определяется обычным образом:

$$\Phi(x) = \int_0^x F(x)dx = \int_0^x f([x], \{x\})\, dx. \qquad (1)$$

Однако для моделирования неархимедова случая такая форма записи ничего не дает. Для построения модели мы должны учесть наличие различных уровней доступности на оси. При записи (1) мы предполагали, что нам известен как сам масштаб уровня $\{x\}$, так и поведение функции на этом уровне. Ниже рассмотрим остальные возможности.

Как и прежде, предположим, что масштаб нашего непосредственного восприятия много больше единицы. Точнее, если на оси Ox оставить только целые значения x, то ось по-прежнему будет нами восприниматься как сплошная линия. Есть смысл рассмотреть следующие варианты.

Пусть мы располагаем значениями функции при целых $x = z$ и

1^0. Ничего не подозреваем о существовании масштаба $\{x\}$ и о возможности иных законов поведения функции на этом масштабе.

2^0. Не известна величина масштаба $\{x\}$, но известно поведение функции при дробных x.

3^0. Известен сам масштаб $\{x\}$, но не известно поведение функции при дробном x.

4^0. Известен сам масштаб $\{x\}$ и поведение функции на этом масштабе.

Рассмотрим в качестве примера функцию

$$f(z, \tau) = z^2 + 10^{-5}\sin\tau. \qquad (2)$$

Вариант 1^0. График функции (2) воспринимается как квадратная парабола

$$f(z, 0) = z^2. \qquad (3)$$

Так как о масштабе $\{x\} = \tau$ ничего не известно, то принимаем, что равенство (3) верно при любом сколь угодно малом приращении z. Отсюда для определенного интеграла получаем формулу

$$J_1 = \int_0^z f(z, 0)dz = \frac{z^3}{3}.$$

Вариант 2^0. Здесь мы не знаем величины масштаба $\{x\}$. Это значит, что мы не знаем до каких пор можно уменьшать Δz в формуле (3). С другой стороны, мы знаем, что помимо зависимости (3) есть зависимость (2). Поэтому нам ничего не остается, как принять следующее: в каждой точке z есть еще одно измерение τ «вглубь». Вдоль этого измерения действует свой закон изменения f. Например, если f — это распределенная масса, то можно считать, что около каждой точки z вдоль измерения τ распределена дополнительная, скрытая масса. В такой постановке для оценки общей массы можно использовать повторный интеграл

$$J_2 = \int_0^z dz \int_0^\tau f(z,\tau)d\tau.$$

В случае необходимости можно привлечь также криволинейные интегралы обоих типов:

$$\int_{s_1}^{s_2} f(z(s),\tau(s))\sqrt{(\tau')^2 + (z')^2}\,ds,$$

$$\int_{AB} f(z,\tau)d\tau; \int_{AB} f(z,\tau)dz, \int_{AB} f(z,\tau)\,d\tau + f(z,\tau)\,dz.$$

Здесь $\tau(s)$, $z(s) s_1 \le s \le s_2$ — параметризация кривой AB в плоскости $Oz\tau$. Вопрос о применении последнего интеграла рассмотрим ниже.

Вариант 3^0. Как и прежде, предположим, что известно поведение функции при $\tau = 0$, т.е. известны значения $f(z,0)$. Пусть известен также факт наличия масштаба $\{x\}$. Для примера (3) это означает, что хотя график функции и воспринимается как квадратная парабола, но тем не менее известно, что закон (3) имеет место только для конечного шага по z, равного 1. В этом случае в качестве интеграла можно вычислять сумму по дискретному набору значений аргумента z:

$$J_3 = \sum_{i=0}^{i=z} f(i,0).$$

Вариант 4^0. Предположим, что известны и величина масштаба $\{x\}$, и поведение функции на этом масштабе. Классическое выражение для интеграла дается формулой (1). Здесь же мы рассмотрим эквивалентный способ вычисления интеграла Римана, который можно интерпретировать как некоторую модель неархимедова случая.

Пусть требуется найти интеграл от $F(x)$ по интервалу $[0, x^0]$. Значение интеграла по интервалу $[\alpha, \beta]$ обозначим как $G(\alpha, \beta)$. Пусть z^0 и τ^0 — целая и дробная части $x^0 : x^0 = z^0 + \tau^0$. На прямой Ox выделим два уровня доступности. Разобьем интервал интегрирования на субинтервалы

$$[0,1],\ [1,2], \ldots [z^0 - 1,\ z^0];\ \ [z^0,\ z^0 + \tau^0]. \tag{4}$$

Теперь задача интегрирования свелась к решению двух задач: 1) вычислению интеграла по каждому из субинтервалов и 2) суммированию полученных значений.

Задача 1. Пусть $x = \Theta$ — точка горизонта на интервале $[0, 1]$ ($\Theta = 0{,}9$, например). Интеграл от нуля до $x = 0{,}9$ вычисляется обычным образом. В зоне перехода $[0{,}9; 1]$ могут иметь место особые условия, которые должны учитываться при подсчете интеграла. Необходимо предположить, что перечень таких условий задан и достаточен для вычисления величины $G(0{,}9; 1)$. Аналогичная ситуация будет и на других субинтервалах. Таким образом, можно считать, что интегралы по интервалам $[z, z + 1]$ вычислены и равны

$$\int_0^{\Theta} f(z,\tau)d\tau + G(z + \Theta,\ z + 1).$$

Для последнего интервала из списка (4) имеем: $\int_0^{\tau^0} f(z^0,\tau)d\tau$, если $\tau^0 \le \Theta$. Если $\tau^0 > \Theta$, то к указанному интегралу добавляется слагаемое $G(z^0 + \Theta,\ z^0 + \tau^0)$.

Задача 2. Суммирование по интервалам (4) равносильно решению разностного уравнения

$$G(0,\ z + 1) - G(0,\ z) = \int_0^{\Theta} f(z,\tau)d\tau + G(z + \Theta,\ z + 1).$$

Правая часть и начальное условие $G(0, 0) = 0$ известны. Если в зоне перехода особых условий не ставится, т.е. имеет место равенство вида

$$G(z + \Theta,\ z + 1) = \int_{\Theta}^{1} f(z,\tau)d\tau,$$

то описанный выше интеграл совпадает с интегралом Римана. Подробнее этот вопрос рассмотрен в работе [18]. Таким образом, для вычисления интеграла Римана достаточно найти интегралы по субинтервалам и просуммировать их путем решения соответствующего разностного уравнения. Именно в такой форме процедура интегрирования допускает обобщение на неархимедов случай.

При построении неархимедовых интегралов можно будет использовать еще одно истолкование интеграла Римана. Мы хотели бы «расщепить» одномерную область интегрирования по x на два измерения z и τ, каждое из которых соответствует своему масштабу аргумента x. Тогда интеграл Римана по $x = z + \tau$ можно будет свести к криволинейному интегралу в плоскости (z, τ). Последнее открывает новые возможности для дальнейших построений.

Итак, пусть интервал интегрирования $[0, a]$ разбит на интервалы точками

$$x_0 = 0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = a. \tag{5}$$

Возьмем внутри каждого интервала некоторую точку x_i' и образуем интегральную сумму

$$J_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i')\Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $x_{i-1} \le x_i' \le x_i$. Разложим значения аргумента на целую и дробную части:

$$x_i = z_i + \tau_i, \; x_i' = z_i' + \tau_i', \;\; \Delta x_i = \Delta z_i + \Delta\tau_i.$$

В этом случае интегральная сумма приобретает следующий вид:

$$J_n = \sum_{i=1}^{n} \left[f(z_i', \tau_i')\Delta z_i + f(z_i', \tau_i')\Delta\tau_i \right]. \tag{6}$$

Изобразим разбиение (5) точками на плоскости (z, τ) (рис. 6.3).

Соединим две соседние точки $A(z_{i-1}, \tau_{i-1})$ и $B(z_i, \tau_i)$ отрезком и рассмотрим положение точки $B'(z_i', \tau_i')$ относительно этого отрезка. Здесь возможны три типа интервалов: 1^0) если $z_{i-1} = z_i$, то отрезок AB вертикален и, значит, промежуточная точка всегда лежит на этом отрезке; 2^0) между точками AB нет ни одной прямой $z = \text{const}$, пересекающей AB. Следовательно, точки A, B лежат на соседних прямых $z = \text{const}$. Для этого случая в качестве точки B' всегда будем брать либо точку A, либо точку B. И наконец, последний случай: 3^0) отрезок AB не вертикален и таков, что найдется хотя бы одна прямая $z = \text{const}$, пересекающая отрезок AB между точками A и B. Если промежуточная точка B' не совпадает с указанной точкой пересечения, то отбросим ее и заменим точкой пересечения так, как это показано на рис. 6.3.

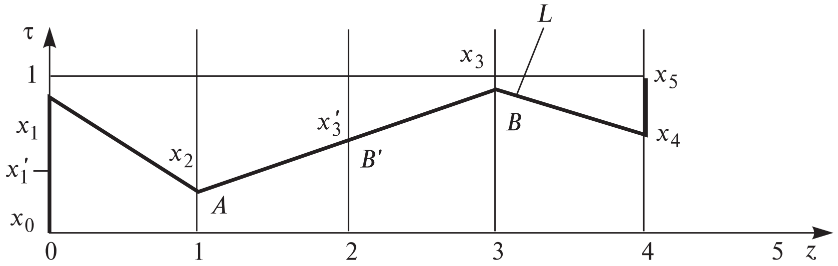

Рис. 6.3.

Что означает сумма (6) в указанных условиях? Очевидно, что это по-прежнему интегральная сумма. Единственное ее отличие от той суммы, которая фигурирует в определении интеграла Римана, состоит в том, что в ней промежуточные точки могут зависеть от способа разбиения интервала на части. Если интеграл существует (а именно это везде предполагается), то указанное ограничение на конечном результате никак не скажется. Будем теперь уменьшать максимальную длину интервалов (5). Это приведет к тому, то на плоскости (z, τ) интервалы типа 3^0 исчезнут и останутся только интервалы 1^0 и 2^0 типов.

При этом длины интервалов первого типа будут стремиться к 0, а длины интервалов типа 2^0 — стремиться к $\sqrt{2}$. Например, пусть $x_i = 1 - 10^{-n}$, $x_{i+1} = 1 + 10^{-n}$. На оси Ox длина интервала равна $2 \cdot 10^{-n} \to 0$ при $n \to \infty$, а на плоскости $Oz\tau$ точка x_i стремится к точке C с координатами $z = 0, \tau = 1$, а точка x_{i+1} — к точке D с координатами $z = 1, \tau = 0$ (рис. 6.4).

Расстояние между ними стремится к $\sqrt{2}$. Это обстоятельство не позволяет трактовать сумму (6) как интегральную, соответствующую криволинейному интегралу. Поэтому разобьем все наклонные отрезки типа CD на свои интервалы. Выберем внутри этих интервалов промежуточные точки и добавим соответствующие слагаемые в сумму (6). Вместе с указанными слагаемыми сумма (6) теперь будет являться приближением криволинейного интеграла

$$\int\limits_L f(z, \tau)\, dz + f(z, \tau)\, d\tau.$$

При уменьшении длины интервалов угол наклона звеньев типа CD стремится к $\pi / 4$. Следовательно, вдоль CD имеем $dz + d\tau = 0$. Поэтому криволинейный интеграл по отрезкам типа CD равен нулю и предельное значение (6) совпадает со значением интеграла Римана. Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

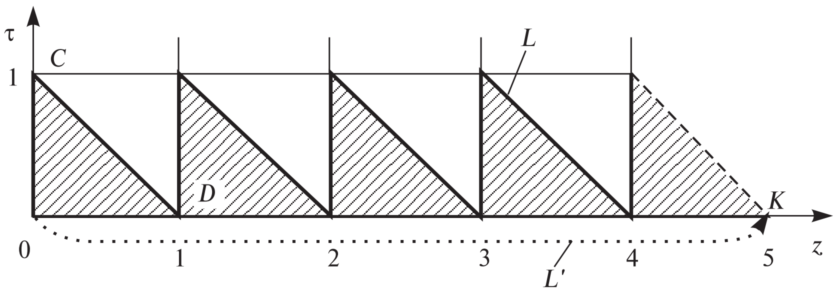

Рис. 6.4.

Теорема 27.1. *Интеграл Римана от функции $F(x)$ по отрезку $[0, a]$ совпадает с криволинейным интегралом второго типа по пути L в плоскости (z, τ), где z, τ — целая и дробная части x и путь L представляет собой ломаную, состоящую из вертикальных отрезков и отрезков, наклоненных к осям под углом, равным $\pi/4(dz + d\tau = 0)$:*

$$\int_0^a F(x)\,dx = \int_L f(z,\tau)\,dz + f(z,\tau)\,d\tau. \qquad (7)$$

Теорема, в сущности, является очевидной, но, тем не менее, имеет ряд полезных следствий. Во-первых, интересно рассмотреть другие пути, соединяющие те же начальную и конечную точки. Если эти пути имеют вертикальные участки, то криволинейный интеграл по ним — это интеграл Римана от самой функции $F(x)$. На всех остальных участках интеграл относится к различным продолжениям $F(x)$. Например, для пути L' (см. рис. 6.4), состоящего из одного горизонтального отрезка OK, имеем

$$\int_0^{a+1} f(z,0)\,dz. \qquad (8)$$

Здесь во внимание принимаются только значения функции при целых x, которые затем продолжаются во все промежуточные точки. Для любых путей имеет место формула Грина:

$$\int_C f(z,\tau)dz + f(z,\tau)\,d\tau = \iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \tau}\right) dz\,d\tau, \qquad (9)$$

где C — замкнутый контур, ограничивающий область D. Замкнутый контур можно рассматривать как совокупность двух путей между одними и теми же начальной и конечной точками. Интеграл не зависит от пути, если

$$\frac{\partial f(z,\tau)}{\partial z} \equiv \frac{\partial f(z,\tau)}{\partial \tau}.$$

Выше это же условие было получено исходя из требования непрерывности функции на стыке различных масштабных уровней прямой. Если условие непрерывности не выполняется, то правая часть равенства (9) позволяет дать расчет в разнице криволинейных интегралов, взятых по разным путям. Например, отличие интеграла (8) от интеграла (7) определяется суммой двойных интегралов по заштрихованным областям, показанным на рис. 6.4.

Глава 7

Производные и неопределенные интегралы

В классическом анализе есть только один тип бесконечно малых, поэтому и производные относятся только к одному типу. В неархимедовом анализе есть два типа бесконечно малых. В соответствии с этим возможны и два типа производных и неопределенных интегралов. Перейдем к их описанию.

Пусть $\mathrm{Y} = F(\mathrm{X})$ — некоторая функция переменной X. Образуем новую функцию двух переменных

$$\rho(\mathrm{X}, \mathrm{X}^0) = \frac{F(\mathrm{X}^0) - F(\mathrm{X})}{\mathrm{X}^0 - \mathrm{X}}, \quad \mathrm{X} \neq \mathrm{X}^0.$$

Различные пределы данной функции при $\mathrm{X} \to \mathrm{X}^0$ будем называть производными $F(\mathrm{X})$ в точке X^0, дополняя это название соответствующими указаниями на характер предела.

§ 28. Производные типа 2 — локальные производные. Неопределенные интегралы типа 2

Производные типа 2. Пусть X^0 — фиксированная точка области определения функции $F(\mathrm{X})$ и $\operatorname*{limit}_{v\to\infty} \mathrm{X}_v = \mathrm{X}^0$.

Определение 28.1. *Если существует предел*

$$\operatorname*{limit}_{v\to\infty} \rho(\mathrm{X}_v, \mathrm{X}^0)$$

и его значение одинаково для любых несчетных последовательностей $\mathrm{X}_v \to \mathrm{X}^0$, *то будем говорить, что функция* $F(\mathrm{X})$ *имеет в точке* X^0 *производную типа 2, или функция локально-дифференцируема* (limit-*дифференцируема*) *в точке* X^0. *Значение предела будем называть локальной производной* $F(\mathrm{X})$ *по* X *в точке* X^0, *или производной типа 2, и обозначать как*

$$F'(\mathrm{X}^0), \quad F'_{\mathrm{X}}(\mathrm{X}^0), \quad \frac{dF(\mathrm{X}^0)}{d\mathrm{X}}. \qquad (1)$$

Операцию отыскания производной назовем дифференцированием.

Как отмечалось, предел в смысле limit аналогичен пределу lim классического анализа. Такая же аналогия будет и для производной (1). Это означает, что в неархимедову область переносятся все формулы дифференцирования и, более того, весь аппарат классического дифференциального исчисления. Различие будет состоять только в том, что теперь в формулах может фигурировать символ ω.

Примеры:

$$(\mathrm{X}^2)' = 2\mathrm{X};\ (\mathrm{X}^{\omega})' = \omega \mathrm{X}^{\omega-1},$$
$$(\sin\omega\mathrm{X})' = \omega\cos\omega\mathrm{X}.$$

Неопределенные интегралы типа 2.

Определение 28.2. *Если функция* Φ(X) *такова, что*

$$\frac{d\Phi(\mathrm{X})}{d\mathrm{X}} = F(\mathrm{X}),$$

то Φ(X) *будем называть первообразной типа 2 от* F(X)*. Совокупность первообразных будем называть неопределенным интегралом типа 2 и обозначать как*

$$\Phi(\mathrm{X}) = (2)\int F(\mathrm{X})d\mathrm{X}.$$

Везде в скобках перед знаком интеграла указываются символы, уточняющие смысл интеграла. Там, где возможно, данные символы опускаются. Так как производная (1) аналогична производной классического анализа, то аналогия будет иметь место и для интегралов типа 2.

Примеры:

$$\int \mathrm{X}^2 d\mathrm{X} \equiv \frac{\mathrm{X}^3}{3} + C;\ \int \mathrm{X}^{\omega} d\mathrm{X} = \frac{\mathrm{X}^{\omega+1}}{\omega + 1} + C,$$
$$\int (\sin\omega\mathrm{X})\, d\mathrm{X} = -\,\mathrm{E}\cos\omega\mathrm{X} + C,\ \ C = \mathrm{const}.$$

§ 29. Производные типа 1 — производные на стыке двух масштабных уровней. Неопределенные интегралы типа 1

Определение производной типа 1. Пусть $\mathrm{X}^0 = \omega$ и $\mathrm{X}_n = n$. Следовательно, X^0 будет предельной точкой X_n в смысле Lim, т.е. $\omega = \mathrm{Lim}\, n$:

$$\mathrm{X}^0 = \mathrm{Lim}\mathrm{X}_n.$$

Подсчитаем среднюю скорость изменения функции на интервале (n, ω). Его длина равна $\Delta X_n = X^0 - X_n = \omega - n$. Средняя скорость

$$\frac{F(X^0) - F(X_n)}{X^0 - X_n} = \frac{F(\omega) - F(n)}{\omega - n}. \tag{1}$$

Видно, что интервал ΔX_n покрывает зону перехода от вещественного масштабного уровня прямой до ее первого мегауровня. Чем больше величина n, тем длина этой зоны меньше. Но в любой фиксированный момент n длина $(\omega - n)$ — бесконечно велика. Есть только единственный способ свести зону перехода к зоне контакта — это применить к равенству (1) операцию предельного перехода Lim. Пусть по-прежнему ΔX_n и ΔY_n — приращения аргумента и функции:

$$\Delta X_n = X^0 - X_n, \quad \Delta Y_n = F(X^0) - F(X_n).$$

Запишем два равенства:

$$\operatorname{Lim} \Delta X_n = 0, \quad \operatorname{Lim} \Delta Y_n = 0. \tag{2}$$

Если из первого равенства следует второе, то $F(X)$ является функцией, непрерывной в точке X^0 по пути X_n на стыке двух масштабных уровней. Для таких функций можно ввести характеристику, имеющую смысл скорости изменения функции на стыке двух масштабных уровней.

Определение 29.1. *Если* $X^0 = \operatorname{Lim} X_n$ *и предел счетной последовательности существует*

$$\operatorname*{Lim}_n \rho(X_n, X^0) = \left.\frac{DF}{DX}\right|_{X_n}, \tag{3}$$

то будем его называть производной типа 1 от $F(X)$ *в точке* X^0 *по пути* X_n, *или производной на стыке масштабных уровней* X_n *и* X^0, *или* Lim-*производной*.

Указание на путь и характер производной будем иногда опускать. Операцию взятия производной назовем диффенцированием типа 1, или дифференцированием в зоне перехода между масштабными уровнями. Производная (3) представляет собой скорость изменения функции при переходе с масштабного уровня переменной X_n в точку масштабного уровня X^0. На этом основании о величине (3) можно говорить как о скорости перехода с уровня X_n на уровень X^0 либо как о скорости изменения функции на стыке двух масштабных уровней.

Определение 29.2. *Если производная типа 1 в точке* X *не зависит от пути* X_n, *ведущего точку* X, *то будем говорить о производной типа 1 от* F(X) *в точке* X.

Здесь нет указания на путь X_n.

Свойства производных типа 1. В теории функций вещественного переменного производная вводится как предел отношения

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

При этом выполняются два равенства:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Большинство теорем дифференциального исчисления доказывается исходя только из указанных равенств и арифметических свойств предела lim. Для Lim-производных имеют место те же самые арифметические свойства предела, что и для lim и, кроме того, те же самые равенства (2).

Поэтому на производные типа 1 переносятся все соответствующие свойства обычных производных. Например, возьмем производную от произведения функции F(X), G(X):

$$\operatorname*{Lim}_{n \to \omega} \frac{(F + \Delta F_n)(G + \Delta G_n) - F \cdot G}{\Delta X_n} = F \frac{DG}{DX} + G \frac{DF}{DX} + \operatorname*{Lim}_{n \to \omega} \frac{\Delta F_n \Delta G_n}{\Delta X_n}.$$

Далее,

$$\operatorname*{Lim}_{n \to \omega} \frac{\Delta F_n}{\Delta X_n} \frac{\Delta G_n}{\Delta X_n} \Delta X_n = \frac{DF}{DX} \frac{DG}{DX} \operatorname*{Lim}_{n \to \omega} \Delta X_n = 0.$$

Таким образом, мы приходим к обычной формуле для производной произведения.

Неопределенные интегралы типа 1. Пусть F(X) и Φ(X) — две функции, определенные в области существенных чисел, и пусть X_n — некоторая счетная последовательность, сходящаяся к точке X: $\operatorname{Lim} X_n = X$. Предположим, что функция Φ(X) имеет Lim-производную в точке X по пути X_n.

Определение 29.3. *Если производная типа 1 от* Φ(X) *в точке* X *по пути* X_n *равна* F(X), *то* Φ(X) *называется первообразной типа 1 от функции* F(X) *по пути* X_n*:*

$$\operatorname*{Lim}_{n} \frac{\Phi(X) - \Phi(X_n)}{X - X_n} = F(X). \tag{4}$$

Пусть $F(X) \equiv 0$. Тогда

$$\Phi(X_n) = \Phi(X) = \text{const}.$$

Следовательно, первообразная вычисляется с точностью до функции, принимающей постоянное значение в точках последовательности X_n, а также в предельной точке X данной последовательности. В остальных отношениях данная функция может быть совершенно произвольной.

Определение 29.4. *Совокупность первообразных* (4) *будем называть неопределенным интегралом типа 1 от* $F(X)$ *в точке* X *по пути* X_n, *или интегралом на стыке соответствующих масштабных уровней. Обозначение следующее*:

$$\Phi(X) = (X_n,\ X)\int F(X)\,DX.$$

§ 30. Производные и неопределенные интегралы вдоль фиксированного масштабного уровня неархимедовой прямой

Рассмотренные выше производные и неопределенные интегралы типа 2 полностью аналогичны производным и неопределенным интегралам классического анализа. В противоположность этому производные и интегралы типа 1 аналогов в классическом анализе не имеют. Они связаны исключительно с многомасштабностью неархимедовой прямой и служат инструментом для описания связей между различными масштабными уровнями неархимедова пространства. Однако для постановки и решения конкретных задач данных инструментов исследования еще недостаточно. В настоящем параграфе рассмотрим ряд новых понятий, которые существенно расширяют возможности теории.

Существо дела лучше всего пояснить на примере. Пусть $y = f(x)$ — обычная функция действительного переменного. Используя идею построения функции Дирихле, положим

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \text{ рациональном,} \\ 1 + x^3 & \text{при } x \text{ иррациональном.} \end{cases}$$

Ясно, что производной этой функции не существует нигде. Более того, функция в каждой точке является разрывной. Конечно, никакой реальный процесс такая функция описывать не может. Но можно допустить некоторую воображаемую ситуацию, где эта функция все же имеет смысл. Нетрудно допустить также существование двух разных наблюдателей, для первого из которых доступны наблюдения только в рациональных точках, а для второго — только в иррациональных точках. Тогда первый наблюдатель констатирует равноускоренный рост функции со скоростью $2x$. Второй же наблюдатель констатирует скорость $3x^2$. Наша задача состоит в том, чтобы найти формальные процедуры для получения подобных характеристик. Ясно, что вначале необходимо непрерывно продолжить функцию f с рациональных точек на все остальные точки. Затем продолжить функцию по непрерывности с иррациональных точек. В результате получим двузначную функцию, причем каждая из ее ветвей будет функцией гладкой. Дифференцируя ветви, получим необходимый результат.

Для функций, заданных на обычной действительной прямой, такая задача выглядит довольно искусственной. Ее искусственность связана с одномасштабностью прямой. Если x — это время и некоторый наблюдатель живет на вещественном масштабном уровне времени, то для него все точки (рациональные и иррациональные) являются одинаково доступными. Напротив, при переходе к неархимедовой прямой мы попадаем в область, содержащую иерархию масштабных уровней.

Например, пусть

$$\mathrm{X}(\mathrm{T}) = 2t_{-1}\omega + t_0^2 - t_1^2\mathrm{E}^2 \tag{1}$$

— смещение точки, а $\mathrm{T} = t_{-1}\omega + t_0 + t_1\mathrm{E}$ — неархимедово время. Причем $t_{-1}\omega$ — это время масштаба типа галактического года (геологический масштаб времени), t_0 — вещественный масштабный уровень времени, а $t_1\mathrm{E}$ — первый микроуровень. Наличие наблюдателя, который живет на вещественном масштабном уровне и не воспринимает галактическое и микровремя, представляется довольно естественным. Именно такая ситуация соответствует реальному положению вещей. Точнее, предположим, что нам непосредственно доступен только вещественный масштабный уровень времени и пространства, а о галактическом или о микровремени мы можем судить только косвенно. Поэтому основная задача теории состоит в том, чтобы посмотреть, как законы, скрытые на мега- и микроуровнях, могут проявляться на вещественном масштабном уровне.

Для этого нам понадобятся процедуры, которые позволили бы констатировать, что движение (1) на мегауровне времени является равномерным, на вещественном уровне — равноускоренным, а на микроуровне — равнозамедленным.

Выделим явно масштабные уровни аргумента X:

$$\begin{gathered} \mathrm{X} = \eta_\mu + \eta_{\mu-1} + \ldots + \eta_1 + x + \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_æ + \ldots, \\ \eta_\mu = x_{-\mu}\omega^\mu, \ \ldots \ \eta_1 = x_{-1}\omega, \ x = x_0, \ldots \ \xi_æ = x_æ\mathrm{E}^æ, \ldots . \end{gathered} \tag{2}$$

Как и прежде, ограничимся случаем, когда все переменные $x_{-\mu}, \ldots\ x_\nu, \ldots$ представляют собой ядра вещественных чисел. Возьмем теперь некоторую несчетную последовательность приращений аргумента

$$\Delta X_1,\ \Delta X_2,\ \ldots \Delta X_\omega,\ \ldots \Delta X_\nu \ldots, \tag{3}$$

которая сходится к нулю:

$$\operatorname*{limit}_{\nu\to\infty} \Delta X_\nu = 0.$$

Вместо последовательности (3) можно говорить о несчетной последовательности значений $X_\nu = X - \Delta X_\nu$

$$X_1,\ X_2, \ldots X_\omega, \ldots X_\nu, \ldots$$

такой, что

$$\operatorname*{limit}_{\nu\to\infty} X_\nu = X,\quad X_\nu \neq X.$$

При подсчете производной типа 2 нас интересовал предел функции

$$\frac{F(X) - F(X - \Delta X_\nu)}{\Delta X_\nu} = \frac{F(X) - F(X_\nu)}{X - X_\nu}$$

при $\Delta X_\nu \to 0$, или $X \to X_\nu$. Но что значит $\Delta X_\nu \to 0$? Это значит, что с увеличением ν мы должны переходить к значениям ΔX_ν, по модулю меньшим, чем 10^{-1}, $10^{-2}, \ldots 10^{-n}, \ldots$ E, E^ω и т.д. То есть мы должны переходить все время к новым масштабным уровням неархимедовой прямой. В техническом плане это означает следующее. Запишем выражение для ΔX_ν, которое следует из (2) (индекс ν временно опустим):

$$\Delta X = \Delta\eta_\mu + \Delta\eta_{\mu-1} + \ldots + \Delta\eta_1 + \Delta x + \Delta\xi_1 + \ldots + \Delta\xi_{æ} + \ldots,$$

$$\Delta\eta_\mu = \omega^\mu \Delta x_{-\mu},\quad \Delta\eta_1 = \omega\Delta x_{-1},$$

$$\Delta x = \Delta x_0,\quad \Delta\xi_1 = E\Delta x_1, \ldots \Delta\xi_{æ} = E^{æ}\Delta x_{æ}, \ldots .$$

С уменьшением ΔX вначале зануляется приращение $\Delta\eta_\mu$, затем зануляется приращение $\Delta\eta_{\mu-1}$ и т.д. до приращений $\Delta\xi_1$, $\Delta\xi_2 \ldots \Delta\xi_{æ}, \ldots$. Это с одной стороны. С другой стороны, у нас есть основания считать, что на разных масштабных уровнях пространства и времени действуют различные законы, управляющие изменением тех или иных функций. Для описания указанных законов необходимо располагать производными, в которых приращение аргумента оставалось бы все время на одном и том же масштабном уровне. Ясно, что это не могут быть производные типа 2, рассмотренные выше.

Смысл новых определений удобнее пояснить на примере. Пусть

$$F(X) = x^2 + (\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{æ} + \ldots)^3.$$

Положим $\Delta X = \Delta x$ и вычислим

$$\frac{F(X) - F(X - \Delta X)}{\Delta X} = 2x - \Delta x. \tag{4}$$

Очевидно, что корректная процедура для вычисления производной на вещественном масштабном уровне должна привести к значению производной, равному $2x$. Поэтому необходимо выбрать последовательность значений Δx такую, чтобы ее предел в смысле limit был равен нулю. Формально это невозможно, так как x и Δx — это переменные вещественного масштабного уровня. Следовательно, $|\Delta x|$ может быть меньше $1/n$ для $n = 1, 2, 3\ldots$, но добиться условия $|\Delta x| < \mathrm{E}, \mathrm{E}^2, \ldots$ на вещественном масштабном уровне невозможно. Здесь возникает следующая идея: найти формальные основания для применения оператора limit к переменной Δx так, чтобы в результате был нуль и при этом сохранить структуру выражения (4).

Рассмотрим реализацию данной идеи. Вместо переменной ΔX_v будем использовать переменную $X_v = X^0 - \Delta X_v$, X^0 — предельная точка. (Индекс «0» подчеркивает, что речь идет о некоторой фиксированной точке.) Вместо $\rho(X_v, X)$ для общности возьмем некоторую функцию $F(X)$. Затем ее можно будет заменить на $\rho(X_v, X)$.

Прежде всего уточним исходную постановку задачи. Пусть функция $Y = F(X)$ определена на некоторой совокупности точек D, принадлежащих области существенных чисел. Пусть некоторая точка X^0 также принадлежит области D. Вполне может оказаться ситуация, когда в области D нельзя будет найти последовательность X_v, которая стремится к X^0 в смысле limit:

$$\operatorname*{limit}_{v \to \infty} X_v = X^0, \quad X_v \in D.$$

Эту ситуацию можно обрисовать следующим образом. Последовательность, сходящаяся в смысле limit, обязательно должна быть несчетной:

$$X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots X_\omega, \ldots X_v, \ldots .$$

Если несчетная последовательность сходится, то она является фундаментальной. Следовательно, она обязательно будет охватывать неограниченное число масштабных уровней. Можно сказать так: несчетные последовательности являются настолько длинными, что размещаются только на неограниченном числе масштабных уровней области существенных чисел. Поэтому если функция определена на ограниченном числе масштабных уровней, то мы заведомо не можем говорить о ее пределе в смысле limit.

Итак, пусть область D не настолько богата, чтобы в ее рамках можно было размещать несчетные последовательности, но, тем не менее, все необходимые счетные последовательности она в себе содержит. Пусть

$$X_1,\ X_2,\dots X_n,\dots \tag{5}$$

— одна из таких последовательностей. Продолжим ее по непрерывности до несчетной последовательности

$$X_1,\ X_2,\dots X_\omega = \operatorname*{Lim}_n X_n,\ \ X_{\omega+1} = \operatorname*{Lim}_n X_{n+1},\dots\ . \tag{6}$$

Аналогично продолжим последовательность значений функции $F(X_n)$:

$$F(X_1),\ F(X_2),\dots \operatorname*{Lim}_n F(X_n),\dots\ .$$

Таким образом, по определению

$$F(X_\omega) = \operatorname*{Lim}_n F(X_n),\dots,\ F(X_{\omega+1}) = \operatorname*{Lim}_n F(X_{n+1}),\dots\ . \tag{7}$$

Подберем теперь счетную последовательность (5) так, чтобы несчетная последовательность (6) сходилась к точке X^0. Тогда предел последовательности продолжения функции (7), если он существует, будем называть частным пределом функции $F(X)$. Подведем итог в виде следующего определения.

Определение 30.1. *Если счетная последовательность* $X(n)$ *такова, что*

$$\operatorname*{limit}_{v\to\infty}\ \operatorname*{Lim}_{m\to\omega} X(v(m)) = X^0$$

и существует предел

$$\operatorname*{limit}_{v\to\infty}\ \operatorname*{Lim}_{m\to\omega} F(X(v(m))) = Q[X^0,\ X_1,\ X_2\dots X_n\dots],$$

то данный предел будем называть частным пределом функции $F(X)$ *при* $X\to X^0$ *по пути со стартовой последовательностью* $X(n)$.

Будем использовать также различные вариации и сокращения данного названия. Типичной является ситуация, когда частные пределы будут одинаковыми для различных стартовых последовательностей из некоторой очерченной их совокупности. В этом случае будем говорить о частном пределе с тем или иным указанием на данную совокупность. Например, можно говорить о пределе при старте с вещественного масштабного уровня либо о пределе со стартом с первого микроуровня и т.д. Короче, в подобных случаях будем говорить о пределе на вещественном уровне области либо о пределе на первом микроуровне области и т.д.

Ясно, что вопрос о частных пределах можно ставить также и в тех случаях, когда область D содержит в себе несчетные последовательности, сходящиеся к X^0. Здесь открывается множество самых различных вариантов, когда для некоторых стартовых последовательностей частный предел совпадает с $\underset{X \to X^0}{\text{limit}} F(X_v)$, для других стартовых последовательностей — не совпадает и т.д.

В случае, когда функция не определена в точке X^0, ее можно доопределить значением ее частного предела. Тогда можно говорить о непрерывном продолжении функции в точку X^0 с известной стартовой последовательности.

Определение 30.2. *Если существует частный предел* $\rho(X_v, X^0)$ *при* $X_v \to X^0$ *по пути со стартовой последовательностью* X_n, *то будем называть его частной производной* $F(X)$ *в точке* X^0 *по пути со стартовой последовательностью* X_n. *Обозначение следующее*:

$$\left.\frac{\partial F(X)}{\partial X}\right|_{X_1,\dots X_n,\dots X^0}.$$

Там, где возможно, указание на стартовую последовательность будем опускать или давать в сокращенном виде. Процедуру вычисления производных будем называть дифференцированием, добавляя к этому названию соответствующие уточнения (дифференцирование по пути X_v, частное дифференцирование со стартовой последовательностью X_n и т.д.).

Обратные операции будем называть интегрированием с соответствующими уточнениями.

Определение 30.3. *Функцию* Φ, *частная производная которой в точке* X^0 *по пути со стартовой последовательностью* X_n *равна* $F(X)$, *будем называть частной первообразной, а их совокупность — частным неопределенным интегралом от* $F(X)$ *в точке* X^0 *по пути со стартовой последовательностью* X_n:

$$\Phi(X) = (X_1, \dots X_n, \dots X^0) \int F(X)\, dX.$$

В случаях, когда стартовые последовательности принадлежат, например, вещественному уровню, будем говорить о производных и интегралах на вещественном уровне; если стартовые последовательности принадлежат к первому микроуровню, то будем говорить о производных и интегралах на первом микроуровне и т.д.

Примеры.

Пусть

$$X = x_{-1}\omega + x_0 + x_1 E = \eta + x + \xi,$$

где

$$\eta = x_{-1}\omega,\ x = x_0,\ \xi = x_1 E,$$

x_{-1}, x_0, x_1 — переменные, принимающие значения, равные ядрам вещественных чисел.

Функция одного переменного X сводится к функции трех переменных

$$Y = F(X) = f(\eta, x, \xi).$$

Пусть вначале X пробегает значения вещественного масштабного уровня прямой, т.е. $X = x$, $\eta, \xi \equiv 0$. Следовательно,

$$F(X) = f(0, x, 0).$$

Продолжим функцию на микроуровни. Тогда подсчет ее локальной производной даст выражение

$$\frac{\partial f(0, x, 0)}{\partial x}.$$

То же можно сделать и при ненулевых фиксированных значениях η и ξ. В результате получим

$$\frac{\partial f(\eta, x, \xi)}{\partial x}.$$

Аналогично для других аргументов имеем

$$\frac{\partial f(\eta, x, \xi)}{\partial \eta},\ \frac{\partial f(\eta, x, \xi)}{\partial \xi},\ \frac{\partial^2 f(\eta, x, \xi)}{\partial x \partial \xi}, \ldots .$$

Глава 8

Определенные интегралы

Вопрос об определенном интеграле является наиболее сложным. Основные трудности связаны с многомасштабностью неархимедовой прямой. Есть, однако, класс функций, для которых многомасштабность значения не имеет. Это функции, непрерывные по типу 1, в частности непрерывные функции, например, $Y = X^2$. Ясно, что неархимедовы интегралы от подобных функций должны совпадать с римановыми интегралами от аналогичных функций, заданных на обычной прямой. Указанное условие можно назвать условием согласованности.

Теперь о функциях, которые являются разрывными на стыке различных масштабных уровней, т.е. разрывными по типу 1. Здесь возможны различные конструкции интегралов, которые будут удовлетворять условию согласованности. Определенный интеграл — это инструмент для решения задач. Следовательно, выбор конструкций интеграла должен диктоваться потребностями приложений и теории.

Сформулируем общую концепцию определенного интеграла.

§ 31. Концепция определенного интеграла

Концепция. В качестве отправной возьмем концепцию интеграла по Риману. Согласно данной концепции, определенный интеграл представляет собой предел специальных сумм, в которых фигурируют значения заданной функции в различных точках, принадлежащих интервалу интегрирования. В результате показывается, что данный предел сводится к разнице значений первообразной от заданной функции (формула Ньютона — Лейбница).

Указанную цепь рассуждений можно обратить. Формулу Ньютона — Лейбница можно взять в качестве исходной посылки и затем уже дать ей интерпретацию как формуле для вычисления пределов специальных сумм. Именно в таком обращенном виде классическую концепцию интеграла можно перенести на многомасштабную неархимедову прямую.

Пусть X и Y — переменные, принадлежащие существенной прямой, а $Y = \Phi(X)$ — некоторая функция. Наряду с функцией $\Phi(X)$ будем использовать еще одну функцию, зависящую от двух переменных:

$$J(X, X') = \Phi(X') - \Phi(X).$$

Функция $J(X, X')$ представляет собой приращение Φ на отрезке $[X, X']$.

Пусть α, β — две фиксированные точки в области определения функции. Разбиением $\Re(n)$ назовем совокупность *n* точек

$$\Re(n) = \{X_0(n),\ X_1(n), \ldots X_n(n)\} \tag{1}$$

таких, что для любого *n*

$$X_0(n) = \alpha,\ X_n(n) = \beta,\ X_0 < X_1 < X_2 \ldots < X_n.$$

Запишем следующее алгебраическое тождество:

$$J(\alpha, \beta) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = [\Phi(X_n) - \Phi(X_{n-1})] + \ldots +$$
$$+ [\Phi(X_{i+1}) - \Phi(X_i)] + \ldots + [\Phi(X_1) - \Phi(X_0)].$$

Здесь все слагаемые, кроме первого и последнего, взаимно уничтожаются. Каждую из разностей $\Phi(X_{i+1}) - \Phi(X_i)$ умножим и разделим на одно и то же число, например на число $X_{i+1} - X_i$. В результате получим

$$\begin{gathered} J(\alpha, \beta) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = \frac{\Phi(X_n) - \Phi(X_{n-1})}{X_n - X_{n-1}}(X_n - X_{n-1}) + \\ + \ldots + \frac{\Phi(X_{i+1}) - \Phi(X_i)}{X_{i+1} - X_i}(X_{i+1} - X_i) + \ldots + \frac{\Phi(X_1) - \Phi(X_0)}{X_1 - X_0}(X_1 - X_0). \end{gathered} \tag{2}$$

Левая часть тождества от числа *n* и от вида разбиения (1) не зависит. Ее предел — это предел стационарной последовательности. Значит, в любых смыслах (Lim, limit и любой их комбинации) предел всегда будет равен $\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$.

Некоторые слагаемые в тождестве (2) можно записать в виде

$$\frac{\Phi(X_{i+1}) - \Phi(X_i)}{X_{i+1} - X_i}(X_i - X_i) = \Phi(X_{i+1}) - \Phi(X_i) = J(X_{i+1}, X_i). \tag{3}$$

Тогда при

$$|X_{i+1} - X_i| \to 0,\ X_i \to \gamma,\ X_{i+1} \to \gamma$$

данное слагаемое будет стремиться к разрыву (скачку) функции Φ в точке $X = \gamma$. Имеет смысл также случай, когда слагаемое записано в форме (3), но разность $|X_{i+1} - X_i|$ к 0 не стремится. Например,

$$X_i \to \gamma,\ X_{i+1} \to \delta,\ \gamma \neq \delta.$$

В этом случае слагаемое (2) будет стремиться к скачку функции Ф при переходе аргумента от точки γ к точке δ:

$$J(\gamma, \delta) = \Phi(\delta) - \Phi(\gamma).$$

В промежуточных точках функция может быть и не определена. Главным здесь является то обстоятельство, что тождество (2) будет верным во всех случаях.

Суммы вида (2) будем называть интегральными. Пусть число слагаемых в правой части (2) неограниченно увеличивается. Тогда предельное значение суммы будем рассматривать как определенный интеграл от соответствующей функции.

Не будем исключать также случаи, когда число слагаемых в правой части задано из дополнительных условий. Здесь уже само значение интегральной суммы будем рассматривать как определенный интеграл.

Таким образом, мы принимаем следующую концепцию определенного интеграла.

Концепция определенного интеграла.

Определенным интегралом будем называть левую часть тождества вида (2) при условии, что количество слагаемых в правой части либо задано, либо неограниченно увеличивается. При этом каждое из слагаемых стремится либо к производной в том или ином смысле, либо к некоторому скачку (разрыву) функции. Выбор типов предельных переходов и свободных параметров, фигурирующих в тождествах, определяется из дополнительных соображений прикладного или иного характера. Данный выбор определяет интерпретацию тождества. Интерпретация — это соглашение о том, что тождество представляет собой формулу для вычисления определенного интеграла от некоторой функции.

Принятая концепция означает, что при построении любых конструкций определенных интегралов мы всегда будем стоять на твердой почве заведомо верных тождеств. Поэтому у нас всегда будет выполняться формула, аналогичная формуле Ньютона — Лейбница.

Таким образом, проблема определенного интегрирования свелась к следующему:

1^0. Выбору подходящего класса функций, для которых возможна та или иная конструкция определенного интеграла.

2^0. Выбору разбиения области определения функции на интервалы, для которых слагаемые в интегральной сумме записываются в виде

$$\frac{\Phi(X_{i+1}) - \Phi(X_i)}{X_{i+1} - X_i}(X_{i+1} - X_i).$$

3^0. Выбору точек в области определения функции, для которых слагаемые записываются в виде

$$\Phi(X_{i+1}) - \Phi(X_i). \tag{4}$$

4^0. Выбору типа предельного перехода: limit, Lim либо их комбинации.

5^0. Вычислению функции $\Phi(X)$ на основе данных о пределе отношения

$$\frac{\Phi(X_{i+1}) - \Phi(X_i)}{X_{i+1} - X_i},$$

а также данных о слагаемых вида (4).

6^0. Вычислению значения определенного интеграла и интерпретации полученного результата.

Основное тождество. Введем обозначения, которые позволяют упростить запись тождеств вида (2). Прежде всего предположим, что разбиение интервала является равномерным:

$$\Delta X_n = \Delta X(n) = \frac{\beta - \alpha}{n}, \quad X_i = \alpha + i\Delta X_n, \quad i = 0, 1, 2, \ldots n.$$

Будем использовать также упрощенные обозначения:

$$\Delta X(n) = \Delta X_n = \Delta X.$$

В неархимедовом анализе необходимо принять, что функция Φ в тождестве (2) может зависеть не только от аргумента X, но и от приращения аргумента ΔX:

$$\Phi = \Phi(X, \Delta X).$$

Следовательно, приращение Φ будет зависеть уже от трех аргументов:

$$J(X, X', \Delta X) = \Phi(X', \Delta X) - \Phi(X, \Delta X).$$

Тождество остается, конечно, верным и в этом случае.

Пусть теперь $F(X, \Delta X)$ — некоторая функция, заданная на отрезке $[\alpha, \beta]$ и зависящая от ΔX (или, что то же самое, от n) как от параметра (рис. 8.1). Возьмем равномерное разбиение отрезка и вычислим значения функции в серединах отрезков, т.е. при

$$X = \alpha + \frac{\Delta X}{2}, \ \alpha + \frac{3}{2}\Delta X, \ldots \alpha + \left(i - \frac{1}{2}\right)\Delta X, \ \ldots \ \beta - \frac{\Delta X}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots n. \tag{5}$$

Образуем их сумму, умноженную на ΔX. Для знака суммы позаимствуем обозначение интеграла. Ниже будет видно, что это удобно и

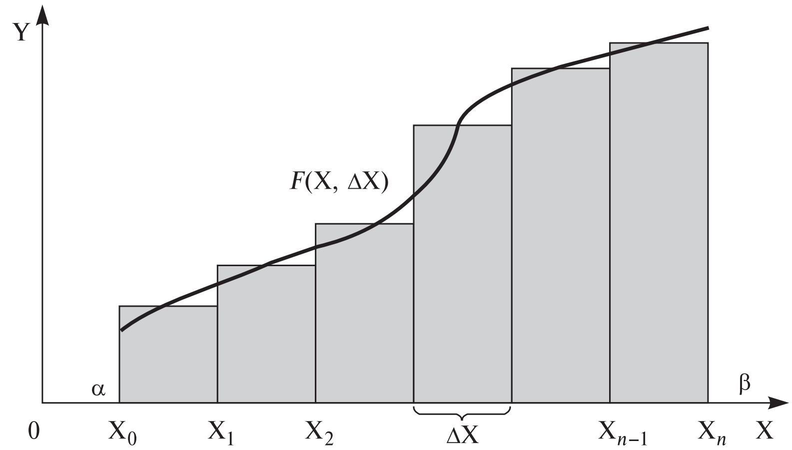

Рис. 8.1.

вполне оправданно. Для идентификации суммы необходимо указать вид функции F и три параметра α, β и n.

Определение 31.1. *Примем по определению, что*

$$(n)\int_{\alpha}^{\beta} F(\mathrm{X},\Delta\mathrm{X})\Delta\mathrm{X} = F\left(\alpha + \frac{\Delta\mathrm{X}}{2}, \Delta\mathrm{X}\right)\Delta\mathrm{X} + F\left(\alpha + \frac{3\Delta\mathrm{X}}{2}, \Delta\mathrm{X}\right)\Delta\mathrm{X} + \ldots + F\left(\beta - \frac{\Delta\mathrm{X}}{2}, \Delta\mathrm{X}\right)\Delta\mathrm{X}, \tag{6}$$

где $\Delta\mathrm{X} = (\beta - \alpha)/n$, n *— число натуральное.*

В случаях, когда величина $\Delta\mathrm{X}$ известна из контекста, указание на параметр n можно опускать. Если же роль n необходимо подчеркнуть, то вместо $\Delta\mathrm{X}$ будем писать $\Delta\mathrm{X}(n)$. Перед знаком интеграла (в данном случае он обозначает сумму) вместо n допускаем также указание на длину интервала $\Delta\mathrm{X}$.

Из определения видно, что параметры α, β и $\Delta\mathrm{X}$ не произвольны, но связаны следующим условием: число $(\beta - \alpha)/\Delta\mathrm{X}$ должно быть обязательно натуральным. Коль скоро сумма (6) зависит от натурального n, то можно рассмотреть ее предел в смысле Lim при $n \to \omega$. Пусть

$$l = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} \Delta\mathrm{X}(n) = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} \frac{\beta - \alpha}{n}.$$

Тогда по определению

$$(l)\int_{\alpha}^{\beta} F(\mathrm{X},\Delta\mathrm{X})\Delta\mathrm{X} = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega}(n)\int_{\alpha}^{\beta} F(\mathrm{X},\Delta\mathrm{X})\,\Delta\mathrm{X}.$$

Основное тождество. Если $\Delta X = (\beta - \alpha)/n$, n — натуральное число и две функции $F(X, \Delta X)$, $\Phi(X, \Delta X)$ связаны условием

$$\frac{\Phi\left(X + \frac{\Delta X}{2},\ \Delta X\right) - \Phi\left(X - \frac{\Delta X}{2},\ \Delta X\right)}{\Delta X} = F(X, \Delta X), \tag{7}$$

которое имеет место в серединах субинтервалов (5), либо, что то же самое, связаны условием

$$\frac{\Phi(X + \Delta X,\ \Delta X) - \Phi(X,\ \Delta X)}{\Delta X} = F\left(X + \frac{\Delta X}{2}, \Delta X\right), \tag{8}$$

где

$$X = X_0 = \alpha,\ X_1,\ X_2, \ldots X_{n-1} = \beta - \Delta X,$$

то

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} F(X, \Delta X)\Delta X = \Phi(\beta,\ \Delta X) - \Phi(\alpha,\ \Delta X). \tag{9}$$

• Доказательство. При подстановке (7) или (8) в (6) все слагаемые, кроме первого и последнего, взаимно уничтожаются.

Таким образом, если задана функция $F(X, \Delta X)$ и требуется найти сумму (6), то для этого достаточно решить уравнения (7) или (8) и записать результат в форме (9).

Замечание. Возможно, что функции $F(X, \Delta X)$, $\Phi(X, \Delta X)$ определены не только в серединах и концах отрезков ΔX, но и при любых X, ΔX. Тогда выполнение (7) без ограничений (5) также гарантирует выполнение (9).

Если функция Φ_1 решает задачу для F_1, а функция Φ_2 — для F_2, то функция $\Phi = C_1\Phi_1 + C_2\Phi_2$ решает задачу для $F = C_1F_1 + C_2F_2$. Далее,

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} F(X,\ \Delta X)\,\Delta X = -\int\limits_{\beta}^{\alpha} F(X,\ \Delta X)\Delta X.$$

Здесь в правой части $\Delta X = (\beta - \alpha)/n$, в левой части $\Delta X = (\alpha - \beta)/n$. Функция $\Phi(X,\ \Delta X)$ имеет ясный смысл. Если Φ есть решение уравнений (8) или (7), то $\Phi + \text{const}$ есть также решение. Постоянную можно выбрать так, чтобы имело место равенство

$$\Phi(\alpha,\ \Delta X) = 0.$$

Тогда

$$\int\limits_{0}^{X'} F(X,\ \Delta X)\Delta X = \Phi(X',\ \Delta X),$$

где $X'/\Delta X$ — целое число.

Ниже в качестве рабочего варианта будем использовать запись уравнения в форме (8).

Подведем итог.

1^0. Если функция $\Phi(X,\,\Delta X)$ такова, что

$$\frac{\Phi(X+\Delta X, \Delta X)-\Phi(X,\,\Delta X)}{\Delta X}=F\left(X+\frac{\Delta X}{2},\,\Delta X\right) \qquad (10)$$

при

$$X=X_0=\alpha,\,X_1,\,X_2,\ldots X_{n-1}=\beta-\Delta X,$$

то

$$(n)\int\limits_{\alpha}^{\beta}F(X,\Delta X)\Delta X=F\left(\alpha+\frac{\Delta X}{2},\,\Delta X\right)\Delta X+F\left(\alpha+\frac{3}{2}\Delta X,\,\Delta X\right)+$$

$$+\ldots+F\left(\beta-\frac{\Delta X}{2},\,\Delta X\right)\Delta X=\Phi(\beta,\,\Delta X)-\Phi(\alpha,\,\Delta X).$$

2^0. Разностный оператор и оператор суммирования являются взаимно обратными:

$$(n)\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{\Phi\left(X+\frac{\Delta X}{2},\,\Delta X\right)-\Phi\left(X-\frac{\Delta X}{2},\,\Delta X\right)}{\Delta X}\Delta X=\Phi(\beta,\Delta X)-\Phi(\alpha,\Delta X).$$

Примеры.

1. Функция $F(X,\Delta X)=F(\Delta X)$ оператором (6) воспринимается как постоянная:

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}F(\Delta X)\Delta X=F(\Delta X)(\beta-\alpha).$$

В частности, $\int\limits_{\alpha}^{\beta}\Delta X=\beta-\alpha,\ \int\limits_{\alpha}^{\beta}(\Delta X)\Delta X=\Delta X(\beta-\alpha),$

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}(\Delta X)^2\Delta X=(\Delta X)^2(\beta-\alpha).$$

2. $\int\limits_{\alpha}^{\beta}3X^2\Delta X=X^3-\frac{1}{4}X(\Delta X)^2\Big|_{\alpha}^{\beta},$

3. $\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[3X^2+\frac{1}{4}(\Delta X)^2\right]\Delta X=X^3\Big|_{\alpha}^{\beta},$

где, как обычно, $f(X)\Big|_{\alpha}^{\beta}=f(\beta)-f(\alpha).$

§ 32. Определенные интегралы от непрерывных функций

Рассмотрим класс функций, которые являются непрерывными.

Пусть v — некоторое число из продолженного натурального ряда, $v(n)$ — приближение v; $v(n)$ — обычное натуральное число. Например, если $v = \omega^{\omega}$, то $v(n) = n^{n}$. Если промежуток $[\alpha, \beta]$ можно разбить на n частей, то его, конечно, можно разбить и на $v(n)$ частей. Тогда

$$\Delta\mathrm{X} = \Delta\mathrm{X}(v(n)) = \frac{\beta - \alpha}{v(n)}.$$

Перейдем к пределу Lim при $n \to \omega$. Предел обозначим как

$$\Delta\mathrm{X}(v) = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} \Delta\mathrm{X}(v(n)) = \frac{\beta - \alpha}{v}.$$

Теперь можно воспользоваться инструментом предельного перехода limit при $v \to \infty$. Ясно, что

$$\operatorname*{limit}_{v\to\infty} \Delta\mathrm{X}(v) = \operatorname*{limit}_{v\to\infty} \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} \Delta\mathrm{X}(v(n)) = \operatorname*{limit}_{v\to\infty} \frac{\beta - \alpha}{v} = 0.$$

Более краткая запись следующая: $\Delta\mathrm{X} \to 0$.

Определение 32.1. *Если при $\Delta\mathrm{X} \to 0$ предел суммы (6) § 31 существует, то данный предел будем обозначать как*

$$\operatorname*{limit}_{v\to\infty} \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} \int_{\alpha}^{\beta} F(\mathrm{X}, \Delta\mathrm{X})\Delta\mathrm{X}(v(n)) = \int_{\alpha}^{\beta} F(\mathrm{X})\, d\mathrm{X} \qquad (1)$$

и называть интегралом от $F(\mathrm{X})$.

Здесь под $F(\mathrm{X})$ понимается предел

$$\operatorname*{limit}_{\Delta\mathrm{X}\to 0} F(\mathrm{X}, \Delta\mathrm{X}) = F(\mathrm{X}).$$

Аналогично считается, что

$$\operatorname*{limit}_{\Delta\mathrm{X}\to 0} \Phi(\mathrm{X}, \Delta\mathrm{X}) = \Phi(\mathrm{X}).$$

Предполагается, что все указанные пределы существуют. Кроме того, предположим, что существует предел левой части (7) § 31 и что он равен $\Phi'(\mathrm{X})$. В результате получим

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(\mathrm{X}) d\mathrm{X} = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha), \qquad (2)$$

где

$$\frac{d\Phi(\mathrm{X})}{d\mathrm{X}} = F(\mathrm{X}).$$

То есть мы пришли к формуле Ньютона — Лейбница.

Отметим, что выше мы оперировали только равномерными разбиениями интервала интегрирования и фиксированным способом выбора точек (5) § 31, фигурирующих в формулах для интегральных сумм. В определении же интеграла Римана вводится условие о независимости предела от способа разбиения области интегрирования на интервалы, а также условие независимости от выбора соответствующих точек внутри интервалов. В случае необходимости все рассмотренные определения и формулы можно дополнить аналогичными указаниями.

Таким образом, принятые процедуры построения определенного интеграла условию согласованности удовлетворяют. Для класса функций, которые фактически совпадают с функциями классического анализа, имеет место формула Ньютона — Лейбница. На данный класс функций переносится вся техника интегрирования [116], включая процедуры перехода к несобственным интегралам от $-\infty$ до $+\infty$. Отличие состоит только в том, что во всех выкладках наряду с конечными числами теперь могут фигурировать числа ω и $\mathrm{E} = 1/\omega$.

Примеры. Прежде всего сделаем предельные переходы в примерах § 31:

$$\int_{\alpha}^{\beta} d\mathrm{X} = \beta - \alpha; \quad \int_{\alpha}^{\beta} 3\mathrm{X}^2 d\mathrm{X} = \mathrm{X}^3\Big|_{\alpha}^{\beta}.$$

Второй пример совпал с третьим.

Далее,

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{X}^{\omega} d\mathrm{X} = \frac{\mathrm{X}^{\omega+1}}{\omega+1}\Big|_{\alpha}^{\beta}, \quad \int_{1}^{\omega} \frac{d\mathrm{X}}{\mathrm{X}} = \ln\omega, \quad \int_{1}^{\infty} \frac{d\mathrm{X}}{\mathrm{X}} = \infty.$$

§ 33. Определенные интегралы от непрерывных продолжений разрывных функций

Предположим, что при переходе с одного масштабного уровня на другой функция может быть разрывной. Рассмотрим различные непрерывные продолжения функции. Данные продолжения будут уже функциями непрерывными. Интегралы от них можно вычислять по формуле (2) § 32. В некоторой степени данные интегралы характеризуют исходную функцию и могут быть полезными.

Пусть функция $Y = F(X)$ задана при

$$X = x_{-\mu}\omega^{\mu} + \ldots + x_{-1}\omega + x_0 + x_1 E + x_2 E^2 + \ldots .$$

Здесь по-прежнему координаты

$$x_{-\mu}, \ldots x_{-1}, x_0, x_1, x_2 \ldots \tag{1}$$

представляют собой ядра вещественных чисел. Наряду с переменными (1) удобно использовать также следующие переменные:

$$\begin{aligned} &\eta_{\mu} = x_{-\mu}\omega^{\mu}, \ldots \eta_1 = x_{-1}\omega, \; x = x_0, \\ &\xi_1 = x_1 E, \; \xi_2 = x_2 E^2, \ldots . \end{aligned} \tag{2}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &X = \eta_{\mu} + \ldots + \eta_1 + x + \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{\omega} + \ldots, \\ &F(X) = f(\eta_{\mu}, \ldots \eta_1, x, \xi_1, \ldots \xi_{\omega}, \ldots). \end{aligned} \tag{3}$$

Там, где возможно, индексы будем опускать, полагая

$$\eta_1 = \eta, \; \xi_1 = \xi.$$

Таким образом, одна скалярная функция одного скалярного аргумента X свелась к функции многих переменных (2). Диапазон изменения каждой из переменных (2) строго ограничен. Поэтому для любого набора аргументов (2) их сумма (3) будет давать единственное значение переменной X.

Дальше воспользуемся аналогией, описанной в § 25. Продолжим функцию по каждой из переменных. По этим переменным функция непрерывна, и каждая из переменных может принимать любые значения, т.е. продолжение функции — это снятие ограничений на диапазон изменения компонент (3). Следовательно, на прямой OX продолженная функция становится бесконечнозначной. Например, значению $F(1)$ соответствуют любые значения $F(X)$ при X из набора

$$X = \eta_{\mu} + \ldots + \eta_1 + x + \xi_1 + \ldots = 1.$$

В многомерном пространстве переменных $(\eta_{\mu}, \ldots x, \xi_1 \ldots)$ данная функция будет, конечно, однозначной. Примем, что функция является достаточно гладкой так, что интегралы от нее существуют.

Рассмотрим основные варианты.

1^0. Положим $x_1 = x_2 = \ldots = x_{\omega} = \ldots = 0$ и зафиксируем значения $x_{-\mu}, \ldots x_{-1}$. Теперь F — это функция одного аргумента x. Интеграл от нее $\int\limits_{\alpha}^{\beta} F(x_{-\mu},\ldots x_{-1},\, x,\, 0,\, 0\ldots)dx$ вычисляется по формуле Ньютона — Лейбница. Значения $x_{-\mu},\ldots x_1$ играют роль параметров. Аналогично вводятся интегралы по любой из переменных микро- или мега-уровня.

2^0. Возьмем теперь функцию двух переменных, например переменных η и x. Все остальные аргументы зафиксируем и будем относить их к заданным параметрам. Функция F является непрерывной по x и η. По образцу § 32 в данной плоскости $Ox\eta$ можно ввести двойные и криволинейные интегралы

$$\iint\limits_{D} Fdx\, d\eta,\ \int\limits_{AB} Fdl,\ \int\limits_{AB} Fdx + Fd\eta,$$

где D — область интегрирования, AB — дуга в области D, l — параметр дуги.

3^0. Аналогично можно ввести тройные и поверхностные интегралы, а также многократные и гиперповерхностные интегралы.

4^0. Так как число переменных неограниченно велико, нетрудно построить интегралы кратности $\omega,\ \omega + 1,\ldots\ \omega^2,\ \ldots\omega^{\omega},\ \ldots\ \nu\ \ldots$.

Таким образом можно строить сколько угодно конструкций. Ясно, что выбор конкретных вариантов должен диктоваться соображениями, связанными с потребностями теории и приложениями.

Итак, мы видим, что методы классического анализа вычисления интегралов можно использовать и в неархимедовом анализе. Однако это возможно только для весьма узкого класса функций, а именно функций, которые фактически совпадают с функциями, заданными на обычной архимедовой прямой. Формальный признак таких функций состоит в том, что они являются непрерывными при переходе аргумента с одного масштабного уровня прямой на ее другие уровни, т.е. непрерывными по типу 1 (Lim-непрерывными). Этот случай рассмотрен в § 32. Интегрирование непрерывных продолжений функции также возможно в рамках классической техники. Данный случай рассмотрен в настоящем параграфе. Однако основной целью для нас является интегрирование самих функций, а не их продолжений. Причем типичной будет ситуация, когда непрерывность типа 1 уже не имеет места. Для таких случаев необходима разработка специальных методов интегрирования. Следующие три параграфа (§ 34–36) посвящены их описанию.

§ 34. Сведение задачи определенного интегрирования к решению двух вспомогательных задач

Теорема 34.1. *Пусть некоторый интервал разбит на субинтервалы. Тогда вычисление интеграла по интервалу сводится к решению двух задач.*

Задача А. Вычисление интегралов по субинтервалам.

Задача В. Решение разностного уравнения с известным краевым условием.

• Доказательство. Пусть $G(\alpha, \beta)$ — значение интеграла по промежутку (α, β). Способ вычисления интеграла пока не известен. Однако ясно, что для любой конструкции интеграла должно выполняться условие аддитивности: если $0 < \gamma < \beta$, то

$$G(\alpha, \beta) = G(\alpha, \gamma) + G(\gamma, \beta).$$

Пусть интервал $[\alpha, \beta]$ разбит точками $X_1, X_2, \dots X_{n-1}$ на субинтервалы длиной ΔX. Тогда

$$G(\alpha, \beta) = G(\alpha, X_1) + G(X_1, X_2) + \dots + G(X_{n-1}, \beta), \tag{1}$$

$$G(\alpha, \alpha) = 0,\ G(\alpha, X + \Delta X) - G(\alpha, X) = G(X, X + \Delta X), \tag{2}$$

где

$$\Delta X = \frac{\beta - \alpha}{n},\ X = X_1, X_2, \dots X_{n-1}.$$

Таким образом, задача интегрирования по интервалу $[\alpha, \beta]$ свелась к интегрированию по субинтервалам и суммированию полученных результатов. Вычисление суммы (1) равносильно решению уравнения (2) при заданном краевом условии [117]. Теорема доказана. ■

В сущности, теорема является очевидной. Однако в дальнейшем она будет иметь большое значение. Ниже более удобными будут следующие обозначения. Для идентификации субинтервала достаточно указать его центр и длину. Положим

$$\begin{aligned} &G(X, X + \Delta X) = F\left(X + \frac{\Delta X}{2}, \Delta X\right)\Delta X, \\ &X = X_0, X_1, \dots, X_{n-1}. \end{aligned} \tag{3}$$

Функция F имеет смысл среднего значения интеграла по субинтервалу $(X, X + \Delta X)$. Краевое условие и уравнение (2) запишутся так:

$$G(X_0, X_0) = 0, \quad \frac{G\left(X_0,\, X + \dfrac{\Delta X}{2}\right) - G\left(X_0,\, X - \dfrac{\Delta X}{2}\right)}{\Delta X} = F(X, \Delta X), \tag{4}$$

где

$$X = X_0 + \frac{\Delta X}{2} = \alpha + \frac{\Delta X}{2}, \ldots, X_{n-1} + \frac{\Delta X}{2} = \beta - \frac{\Delta X}{2}$$

— середины субинтервалов. В обозначениях, которые приняты выше, можно записать

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} F(X, \Delta X)\Delta X = G(\alpha, \beta).$$

Подведем итог. Задача вычисления интеграла по интервалу $[\alpha, \beta]$ сводится к вычислению интегралов (3) по субинтервалам и решению разностного уравнения (4) при известном краевом условии. Типичным будет случай, когда решение уравнения будет зависеть от длины субинтервала ΔX. (Этот аргумент функции G явно не указан.) Формула Ньютона — Лейбница укладывается в данную схему как частный случай, при котором длина субинтервала стремится к нулю и разностное уравнение переходит в дифференциальное.

§ 35. Исчисление актуальных бесконечно малых

В классическом анализе проблема определенного интегрирования сводится к поиску функции по ее заданной производной. Данная задача относится к исчислению бесконечно малых.

В неархимедовом анализе более типична ситуация, когда искомую функцию необходимо восстановить не из дифференциального, а из разностного уравнения вида (10) § 31. Здесь можно использовать методы исчисления конечных разностей [117]. Специфика рассматриваемого уравнения состоит в том, что искомое решение может зависеть от длины интервала ΔX. Кроме того, как правило, аргументы X и ΔX будут принадлежать к различным масштабным уровням прямой. Основным для нас является случай, когда X принадлежит к вещественному уровню, а ΔX — к первому микроуровню неархимедовой прямой. В этом случае ΔX будет актуальной бесконечно малой величиной и процедуру решения уравнения данного типа можно отнести к исчислению актуальных бесконечно малых.

Для определенности возьмем бесконечно малую ΔX порядка E и введем обозначение $\Delta X = \rho$. Придадим уравнению (10) § 31 следующий вид:

$$\frac{\Phi(x+\rho,\rho)-\Phi(x,\rho)}{\rho} = f(x,\rho).$$

где функция $f(x,\rho)$ задана.

Перейдем к решению. Предположим, что правую часть уравнения можно представить в виде суммы

$$f(x,\rho) = \sum_i \lambda_i(\rho)\, g_i(x).$$

Тогда

$$\Phi(x,\rho) = \sum_i \lambda_i(\rho)\, \Psi_i(x,\rho),$$

где $\lambda_i(\rho)$ известно, а функция Ψ_i удовлетворяет уравнению

$$\frac{\Psi(x+\rho,\rho)-\Psi(x,\rho)}{\rho} = g(x). \tag{1}$$

Индекс i опущен. Данное уравнение уже проще, чем исходное.

Предположим, что функции $\Psi(x,\rho)$, $g(x)$ являются достаточно гладкими и Ψ может быть представлена в виде сходящегося несчетного ряда

$$\begin{aligned}\Psi(x,\rho) = a_0(x) + a_1(x)\rho + a_2(x)\rho^2 + \ldots + a_n(x)\rho^n + \ldots \\ + a_\omega(x)\rho^\omega + \ldots + a_v(x)\rho^v + \ldots .\end{aligned} \tag{2}$$

Продолжая по непрерывности формулу Тейлора на несчетный ряд, получим

$$\begin{aligned}\frac{a_0(x+\rho)-a_0(x)}{\rho} = a_0'(x) + \frac{\rho}{2!}a_0'' + \frac{\rho^2}{3!}a_0''' + \ldots + \frac{\rho^{n-1}}{n!}a_0^{(n)}(x) + \ldots \\ + \frac{\rho^{\omega-1}}{(\omega-1)!}a_0^{(\omega)} + \ldots .\end{aligned} \tag{3}$$

Для коэффициентов $a_1(x)\ldots a_\omega(x)\ldots$ формулы будут такими же.

Подставим (2) в (1), сделаем замену (3) и сгруппируем слагаемые с одинаковыми степенями ρ. В результате получим

$$\begin{aligned}a_0'(x) + \rho\left[\frac{a_0''}{2!} + \frac{a_1'}{1!}\right] + \rho^2\left[\frac{a_0'''}{3!} + \frac{a_1''}{2!} + \frac{a_2'}{1!}\right] + \\ + \rho^3\left[\frac{a_0^{(4)}}{4!} + \frac{a_1'''}{3!} + \frac{a_2''}{2!} + \frac{a_3'}{1!}\right] + \ldots = g(x).\end{aligned}$$

Функция в правой части от ρ не зависит. Следовательно, все выражения в квадратных скобках должны равняться нулю. Отсюда

$$\begin{aligned} &a_0(x) = \int g(x)dx + c_0; \qquad a_1(x) = -\frac{a_0'}{2!} + c_1; \\ &a_2(x) = -\frac{a_1'}{2!} - \frac{a_0''}{3!} + c_2; \quad a_3(x) = -\frac{a_2'}{2!} - \frac{a_1''}{3!} - \frac{a_0'''}{4!} + c_3, \ldots, \end{aligned} \tag{4}$$

где $c_0, c_1, \ldots$ — постоянные интегрирования. Постоянные дают вклад в разложение (2) в виде произвольной функции ρ:

$$C(\rho) = c_0 + c_1\rho + c_2\rho^2 + \ldots .$$

Таким образом, $\Psi(x, \rho)$ определяется с точностью до аддитивной функции от ρ. Это вытекает непосредственно из структуры (1). Более того, из (1) видно, что решение определяется с точностью до любой функции с периодом ρ:

$$C(x + \rho,\ \rho) = C(x,\ \rho).$$

Функция $C(\rho)$ включена в $C(x, \rho)$, поэтому ниже положим $c_0 = c_1 = \ldots = 0$ и обратимся к системе (4). Ее замечательная особенность состоит в том, что в каждом из равенств все члены между собой подобны. Последнее означает очень многое. Коэффициенты, которые собираются в правых частях после приведения подобных членов, носят универсальный характер и от вида функции $g(x)$ не зависят:

$$\begin{aligned} &a_0(x) = k_0 \int g(x)dx, \\ &a_1(x) = k_1 \cdot g(x); \ a_2(x) = k_2 \cdot g'(x), \ a_3(x) = k_3 \cdot g''(x), \ldots, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} k_0 &= 1, \\ k_1 &= -\frac{k_0}{2!}, \\ k_2 &= -\frac{k_1}{2!} - \frac{k_0}{3!}, \\ k_3 &= -\frac{k_2}{2!} - \frac{k_1}{3!} - \frac{k_0}{4!}, \\ k_4 &= -\frac{k_3}{2!} - \frac{k_2}{3!} - \frac{k_1}{4!} - \frac{k_0}{5!}, \\ k_5 &= -\frac{k_4}{2!} - \frac{k_3}{3!} - \frac{k_2}{4!} - \frac{k_1}{5!} - \frac{k_0}{6!}, \ldots . \end{aligned} \tag{5}$$

Таким образом, окончательное решение уравнения принимает вид

$$\begin{aligned}\Psi(x,\rho) = k_0\int g(x)dx + k_1\cdot\rho\cdot g(x) + k_2\cdot\rho^2\cdot g'(x) + \ldots \\ + k_{n+1}\rho^{n+1}g^{(n)}(x) + \ldots + k_{\omega+1}\rho^{\omega+1}\cdot g^{(\omega)}(x) + \ldots + C(x,\rho).\end{aligned} \tag{6}$$

Коэффициенты $k_0, k_1, k_2, \ldots$ представляют собой не что иное, как числа Эйлера [117]. Известно, что

$$k_3 = k_5 = k_7 = \ldots = 0$$

и

$$\frac{k_{2n+2}}{k_{2n}} \to -\frac{1}{4\pi^2} \approx -0{,}0253303\ldots$$

при увеличении *n.*

Итак, число масштабных уровней (степеней ρ) в решении (6) зависит от числа ненулевых производных, которыми обладает функция $g(x)$. При этом переход с одного масштабного уровня на другой управляется универсальной постоянной, равной 0,0253303... . Именно к этой постоянной стремится модуль отношения соседних коэффициентов в разложении (6).

Замечание 1. С точностью до обозначений полученное решение можно использовать для стыка любых пар масштабных уровней неархимедовой прямой.

Замечание 2. Во всех случаях вопрос о сходимости рядов должен рассматриваться отдельно.

Вычислим коэффициенты (5) и подведем итог. Решение уравнения

$$\frac{\Phi(x+\rho,\rho) - \Phi(x,\rho)}{\rho} = \sum_i \lambda_i(\rho)g_i(x)$$

имеет вид

$$\Phi(x,\rho) = \sum_i \lambda_i(\rho)\Psi_i(x,\rho),$$

где

$$\begin{aligned}\Psi_i(x,\rho) = \int g_i(x)dx - \frac{1}{2}\rho g_i(x) + \frac{1}{12}\rho^2 g_i'(x) - \\ -\frac{1}{720}\rho^4 g_i'''(x) + 3{,}307\cdot 10^{-5}\rho^6 g_i^{(5)}(x) - \\ -8{,}267\cdot 10^{-7}\rho^8 g_i^{(7)}(x) + 2{,}088\cdot 10^{-8}\rho^{10} g_i^{(9)}(x) - \\ -5{,}284\cdot 10^{-10}\rho^{12} g_i^{(11)}(x) + 1{,}338\cdot 10^{-11}\rho^{14} g_i^{(13)}(x) - \\ -3{,}390\cdot 10^{-13}\rho^{16} g_i^{(15)}(x) + \ldots + C_i(x,\rho).\end{aligned}$$

Здесь $C_i(x, \rho)$ — произвольная функция с периодом ρ:

$$C_i(x + \rho, \rho) = C_i(x, \rho).$$

Отношения соседних коэффициентов в данном разложении равны:

$$\frac{k_2}{k_0} = 8{,}333 \cdot 10^{-2}; \ \frac{k_4}{k_2} = -1{,}667 \cdot 10^{-2}; \ \frac{k_6}{k_4} = -2{,}381 \cdot 10^{-2};$$

$$\frac{k_8}{k_6} = -2{,}500 \cdot 10^{-2}; \ \frac{k_{10}}{k_8} = -2{,}525 \cdot 10^{-2}; \ \frac{k_{12}}{k_{10}} = -2{,}531 \cdot 10^{-2}.$$

Примеры.

1^0. $$\frac{\Phi(x + \rho, \rho) - \Phi(x, \rho)}{\rho} = \lambda(\rho),$$

$$\Phi(x, \rho) = \lambda(\rho)x + C(x, \rho).$$

2^0. $$\frac{\Phi(x + \rho, \rho) - \Phi(x, \rho)}{\rho} = \lambda(\rho) \cdot x,$$

$$\Phi(x, \rho) = \lambda(\rho)\left[\frac{x^2}{2} - \frac{\rho}{2}x\right] + C(x, \rho).$$

3^0. $$\frac{\Phi(x + \rho, \rho) - \Phi(x, \rho)}{\rho} = \lambda(\rho) \cdot x^2,$$

$$\Phi(x, \rho) = \lambda(\rho)\left[\frac{x^3}{3} - \frac{\rho}{2}x^2 + \frac{\rho^2}{6}x\right] + C(x, \rho).$$

4^0. $$\frac{\Phi(x + \rho, \rho) - \Phi(x, \rho)}{\rho} = \lambda(\rho) \cdot x^3,$$

$$\Phi(x, \rho) = \lambda(\rho)\left[\frac{x^4}{4} - \frac{\rho}{2}x^3 + \frac{\rho^2}{4}x^2\right] + C(x, \rho).$$

Итак, выше в § 34, 35 рассмотрены вспомогательные формулы, которые потребуются для вычисления интегралов от функций, разрывных на стыке различных масштабных уровней. Далее рассмотрим еще одно вспомогательное понятие — понятие точки горизонта.

§ 36. Концепция точки горизонта

В обычной жизни точка горизонта — это точка, где «небо смыкается с землей». Наши наблюдения «земли» простираются только до точки горизонта. А что дальше? Логично было бы считать, что раз «небо смыкается с землей», то дальше начинается новая реальность, именуемая «небом». И эта новая реальность для наблюдений с «земли» — закрыта.

Когда мы размышляем о проблемах бесконечности, то сталкиваемся с нечто подобным. Пусть область конечных вещественных чисел — это «земля» и нам доступно любое конечное число. Но ведь на прямой есть и точка «бесконечность»! Она является вполне реальной и создана из того же самого материала, что и конечные вещественные числа. Как можно представить себе переход от конечных чисел к бесконечности? Реальный опыт учит нас, что любой переход в новое качество, в новую реальность всегда совершается скачком. Например, переход «гусеница — кокон — бабочка». Этот переход совершается в интервале, который и для гусеницы, и для бабочки является точкой горизонта, разделяющей реальности разного плана. Можно предположить, что подобная точка разделяет также и области конечного и бесконечного.

Концепция точки горизонта.

Точка горизонта — это точка, где смыкаются области конечного и бесконечного. Точка горизонта относится к области конечного, если она рассматривается из области конечного; точка горизонта относится к области бесконечного, если она рассматривается из области бесконечного (рис. 8.2).

Это, конечно, не определение, а именно концепция. Но она дает вполне конкретный вклад в аппарат математического анализа. Отсюда нетрудно дать и определение точки горизонта как инструмента исследований.

Определение 36.1. *Точкой горизонта будем называть обозначенный интервал, границы которого принадлежат к различным масштабным*

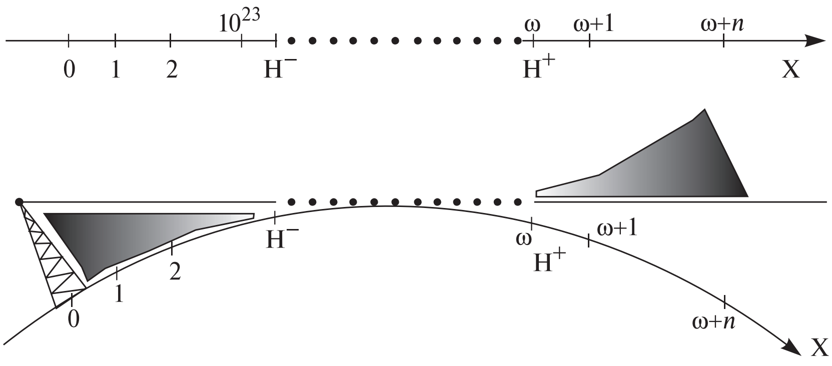

Рис. 8.2.

уровням числовой области. Выбор границ интервала зависит от специфики поставленной задачи.

Согласно определению, точка горизонта — это интервал. Обозначим его как $(\mathrm{H}^-,\ \mathrm{H}^+)$ и будем называть также зоной перехода между масштабными уровнями. Границы интервала можно выбирать из различных соображений. Например, может оказаться, что представляют интерес только приращения функции при переходе ее через данный интервал. При этом внутри интервала функция может быть даже не определена. Ничто не мешает также рассмотреть некоторую последовательность точек горизонта $(\mathrm{H}_n^-,\ \mathrm{H}_n^+)$. Наибольший интерес представляет случай, когда H_n^- и H_n^+ выбираются так, чтобы

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\omega}(\mathrm{H}_n^+ - \mathrm{H}_n^-) = 0.$$

В этом случае можно говорить как о точке горизонта, так и о зоне контакта или контакте между различными масштабными уровнями.

Из определения видно, что понятие точки горизонта не является однозначно заданным. Но такое же обстоятельство имеет место и в реальной жизни. Горизонт, который мы наблюдаем с высоты собственного роста, — это одно, а горизонт с высоты птичьего полета — это совсем другое.

Рассмотрим для примера точку горизонта, которая разделяет вещественный масштабный уровень и первый мегауровень (рис. 8.3).

Пусть мы находимся в точке $\mathrm{X} = 0$ неархимедовой прямой OX. Предположим, что при движении в положительном направлении точка горизонта достигается на расстоянии q от нуля. Ради общности предположим, что при движении в отрицательном направлении точка горизонта может оказаться на другом расстоянии от нуля. Обозначим данное расстояние через p. Если $p = q$, то можно сказать, что прямая в этом смысле является изотропной. В противном случае мы имеем анизотропную прямую, например прямую с параметрами $q = 100, p = 50$.

Начнем по такой прямой движение вправо из точки $\mathrm{X} = 0$. Достигнув значения $x = 100$, мы затем пересекаем точку горизонта и попадаем на первый мегауровень, например в точку $\mathrm{X} = 2\omega - 50$. По-прежнему считаем, что средство нашего передвижения по оси

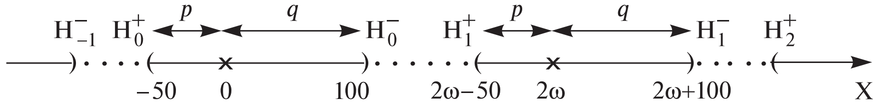

Рис. 8.3.

OX позволяет смещаться на расстояния, равные ядрам конечных вещественных чисел. Кроме того, мы непосредственно воспринимаем только конечные расстояния. Таким образом, область доступности теперь простирается от точки $X = 2\omega - 50$ до $X = 2\omega + 100$. При $X = 2\omega + 100$ мы пересекаем новую точку горизонта и т.д. Аналогичную картину будем иметь и при движении в отрицательном направлении вдоль оси OX.

В заключение отметим, что вопрос о контакте областей конечного и бесконечного уже поднимался в § 15. Там было показано, что контакта, который представлял бы собой точную грань, не существует. В настоящем параграфе тот же результат сформулирован позитивно: точной грани нет, но вместо нее есть точка горизонта, которая представляет собой определенный интервал. Данный интервал и есть контакт областей с разными масштабными уровнями, например контакт между вещественным и первым мегауровнем (это области конечного и бесконечного), между первым и вторым мегауровнями, между вещественным и первым микроуровнем и т.д.

Введенное понятие точки горизонта (его модель изложена в п. 2 § 24) близко к аналогичному понятию альтернативной теории множеств П. Вопенки [62]. В альтернативной теории множеств понятие горизонта является ключевым. В неархимедовом анализе оно с необходимостью появляется в теории определенного интеграла.

§ 37. Определенные интегралы от функций, разрывных на стыке двух масштабных уровней неархимедовой прямой

Постановка задачи. Рассмотрим теперь основной случай, когда непрерывность функции между различными масштабными уровнями нарушается. В классическом анализе аналога такого рода разрывов нет. Поэтому по аналогии действовать нельзя и необходим поиск специальных методов. Предположим, что функция $Y = F(X)$ определена только на первом мегауровне, вещественном уровне и любых микроуровнях. Например, F определена при $|X| \leq 10\omega$. Это значит, что второй и последующие мегауровни можно не рассматривать. Пусть

$$X = x_{-1}\omega + \bar{x} = \eta + \bar{x}, \ \eta = x_{-1}\omega. \tag{1}$$

Здесь по-прежнему x_{-1} — ядра вещественных чисел, а $\bar{x}$ — переменная, которая пробегает ядра вещественных чисел и все промежуточные микроуровни. В техническом отношении это означает, что приращение $|\Delta\bar{x}|$ может быть сколь угодно малой величиной. Например, возможно, что $|\Delta\bar{x}| < \mathrm{E}, \ldots \mathrm{E}^{\omega}, \ldots$ и вообще $|\Delta\bar{x}| < 1/\nu$, где ν — любое число из продолженного натурального ряда. (Ниже черту в обозначении $\bar{x}$ будем опускать.) Напротив, приращение $|\Delta x_{-1}|$ может быть меньше, чем $1/n$, где n — любое число из обычного натурального ряда 1, 2, 3... . Однако меньше, чем $\mathrm{E}, \mathrm{E}^2 \ldots$, приращение $|\Delta x_{-1}|$ быть уже не может. Значит, возможно, что $|\Delta\eta| < \omega/n$ для любого n, но $|\Delta\eta| < 1$, E, $\mathrm{E}^2, \ldots$ уже невозможно.

Если обратиться к модели, изложенной в гл. 6, то можно сказать, что представление аргумента в форме (1) похоже на представление обычного вещественного числа $x_{\text{вещ}}$ в виде суммы целой и дробной частей:

$$x_{\text{вещ}} = [x_{\text{вещ}}] + \{x_{\text{вещ}}\} = z + \tau.$$

Приращение $|\Delta z|$ должно быть не меньше единицы, приращение $|\Delta\tau|$ может быть сколь угодно малым, но сама величина $\tau < 1$.

Теперь о функции $F(\mathrm{X})$. Предположим, что функция является локально-непрерывной, т.е. непрерывной по типу 2. Предположим также, что функция непрерывна на сопряжениях любых пар масштабных уровней, кроме сопряжения вещественного и первого мегауровня. Следующие два равенства дают примеры подобных функций:

$$F(\mathrm{X}) = ax + b\eta,$$

$$F(\mathrm{X}) = x^2 + 2kx\eta + \eta^2.$$

Обе функции являются локально-непрерывными, т.е. непрерывными по типу 2. Если $a = b$ и $k = 1$, то функции будут непрерывными также и по типу 1, т.е. непрерывными на стыке любых пар масштабных уровней. Если же $a \neq b, k \neq 1$, то при переходе с вещественного уровня на мегауровень будет наблюдаться разрыв. Задача состоит в том, чтобы построить определенные интегралы от подобных функций.

Можно указать ряд естественных требований, которым должен удовлетворять искомый интеграл.

1^0. Интеграл от суммы функций должен быть равен сумме интегралов от каждого из слагаемых; умножение функции на константу должно приводить к умножению интеграла на ту же константу.

2^0. Интеграл по промежутку $[\alpha, \beta]$ должен быть равен сумме интегралов по $[\alpha, \gamma]$ и $[\gamma, \beta]$. В частности, интеграл по $[\alpha, \beta]$ равен минус интегралу по $[\beta, \alpha]$. Определенный интеграл должен обладать свойствами согласованности, а именно: если подынтегральная функция является непрерывной или промежуток интегрирования является таким, что наличие разрывов между масштабами никак не проявляется, то неархимедов интеграл должен переходить в интеграл Римана.

Для указанных выше примеров последние требования означают следующее:

3^0. Если $a = b$ или $k = 1$, то должны иметь место следующие формулы:

$$\begin{gathered}\int_{\alpha}^{\beta}(ax + a\eta)\,dX = a\left(\frac{\beta^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2}\right),\\ \int_{\alpha}^{\beta}(x^2 + 2x\eta + \eta^2)dX = \frac{\beta^3}{3} - \frac{\alpha^3}{3}.\end{gathered} \tag{2}$$

4^0. Если длина интервала $\beta - \alpha$ представляет собой конечное число, то функция непрерывна и интеграл от нее вычисляется по правилам, рассмотренным выше. Например, если $\alpha = 2\omega$, $\beta = 2\omega + 1$, то

$$\begin{gathered}\int_{2\omega}^{2\omega+1}(ax + b\eta)\,dX = \int_0^1\big(ax + b\cdot 2\omega\big)dx = a\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 + 2\omega\cdot bx\bigg|_0^1,\\ \int_{2\omega}^{2\omega+1}(x^2 + 2k\eta x + \eta^2)dX = \int_0^1[x^2 + 2k\cdot 2\omega x + (2\omega)^2]\,dx =\\ = \left[\frac{x^3}{3} + 2k\omega x^2 + 4\omega^2\right]\bigg|_0^1.\end{gathered} \tag{3}$$

В приведенных примерах величина $\eta = 2\omega$ представляет собой фиксированный параметр, а x играет роль переменной интегрирования. Например, если под $X = 2\omega + x$ понимать время, то $\eta = 2\omega$ — это номер геологической эпохи, а x — наблюдаемое время на вещественном уровне. В пределах интервала $[2\omega, 2\omega + 1]$ возможность смены геологических эпох никак не проявляется, поэтому интеграл сводится к интегралу по переменной x. При $a = b$, $k = 1$ значения интегралов (3) переходят в значения (2). Если же непрерывности по типу 1 нет (т.е. $a \neq b$, $k \neq 1$), то для вычисления интеграла необходимо ввести специальную процедуру. Перейдем к ее описанию.

Определенные интегралы. Обычная процедура разложения интервала $[\alpha, \beta]$ на отрезки состоит в том, что выбираются точки

$$\alpha = X_0 < X_1 < \ldots < X_{n-1} < X_n = \beta, \tag{4}$$

которые принимаются за границы отрезков. Каждая точка (4) характеризуется парой координат (x_i, η_i): $X_i = x_i + \eta_i$, $i = 0, \ldots n$. Поэтому естественно перейти в плоскость (x, η) и разложение (4) изобразить

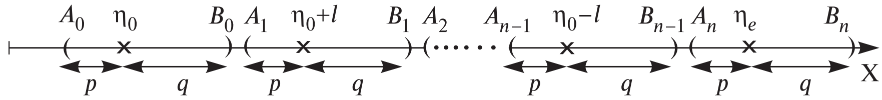

Рис. 8.4.

как $(n+1)$ точку на данной плоскости. Возможности, которые открываются на этом пути, будут рассмотрены в следующем подразделе. Сейчас ограничимся только одномерным анализом. Вначале уточним процедуру разложения. Пусть $\alpha = \eta_0 + x_0$; $\beta = \eta_e + x_e$; $\eta_0 < \eta_e$ и

$$\eta_0 < \eta_1 < \ldots < \eta_i < \ldots < \eta_n = \eta_e; \ \ i = 0, \ldots n. \tag{5}$$

О точках η_i будем говорить, что они попали в поле нашего зрения (рис. 8.4). Возьмем какую-нибудь точку $X_i = \eta_i$ и будем двигаться от нее вправо по оси OX по вещественному масштабному уровню. При этом мы будем проходить точки с координатами $X = \eta_i + x$. Ясно, что перейти к точке с бóльшим значением $\eta > \eta_i$ таким образом невозможно. Действительно, точки (5) принадлежат к мегауровню и расстояние между любыми двумя из них является актуальным бесконечно большим числом. Например, $\eta_2 - \eta_1 = 0{,}1\omega$. Поэтому переход к бóльшему значению η от $X = \eta + x$ возможен только путем пересечения точки горизонта.

Обозначим расстояние до точки горизонта через q. Точно так же расстояние до точки горизонта при движении в отрицательном направлении обозначим через p (см. § 36). Соответствующий отрезок обозначим через $A_i B_i$ (см. рис. 8.4). Он имеет длину $l = p + q$. Будем считать, что данный отрезок также находится в поле нашего зрения. Предположим, что значения p и q от координаты η не зависят. Данное ограничение не является принципиальным и облегчает только техническую сторону дела.

Таким образом, мы пришли к разложению интервала интегрирования на отрезки двух родов. Отрезки первого рода — это отрезки $A_0B_0, \ldots A_nB_n$. В пределах каждого из них значение η_i постоянно. Данные отрезки находятся в поле нашего зрения. Напротив, отрезки $B_0A_1, \ldots B_{n-1}A_n$ представляют собой точки горизонта, или зоны контакта между масштабными уровнями. В их пределах значение η возрастает.

Дальше будем действовать согласно принятой концепции определенного интеграла. Введем функцию $\Phi(X) = \Phi(\eta, x)$ и запишем тождество

$$\Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = [\Phi(B_0) - \Phi(A_0)] + [\Phi(A_1) - \Phi(B_0)] + \ldots + [\Phi(B_n) - \Phi(A_n)].$$

Выберем некоторое число $v = \operatorname{Lim}\limits_{m \to \omega} v(m)$ из продолженного натурального ряда. Разобьем отрезки $A_0B_0, \ldots, A_nB_n$ на $v(m)$ частей, образуем суммы вида (1) § 32 и перейдем к пределу limit при $v \to \infty$. В каждом из указанных отрезков величина η фиксирована (это главное), поэтому в пределе получим

$$\Phi(B_i) - \Phi(A_i) = Q(\eta_i) = \int_{-p}^{q} f(\eta_i, x)\, dx,$$

где

$$f(\eta, x) = \frac{\partial \Phi(\eta, x)}{\partial x}.$$

В искомый интеграл по исходному интервалу $[\alpha, \beta]$ должна войти сумма интегралов $Q(\eta_i)$ ко всем i от 1 до n. Поэтому можно сказать так: проблема интегрирования по участкам общей длины, равной $n \cdot l$, решилась. Длина же всего интервала интегрирования равна $\beta - \alpha$. Следовательно, неизвестным пока остается значение интеграла по участкам B_iA_{i+1} общей длиной $(\beta - \alpha - l \cdot n)$. Естественно рассмотреть процедуру предельного перехода, в результате которой указанная длина должна стремиться к нулю.

Рассмотрим процедуру такого перехода. Вначале отметим, что числа $(\beta - \alpha)$ и l принадлежат к различным масштабным уровням прямой. Например, возможно, что

$$l = 100, \quad \beta - \alpha = 200\omega + 100. \tag{6}$$

Предельный переход, который позволит полностью заполнить интервал $\beta - \alpha$ отрезками длиной l, может принадлежать только к типу Lim. При этом должны выполняться некоторые ограничения. Во-первых, на интервале $[\alpha, \beta]$ должно укладываться целое число отрезков l. Во-вторых, сам закон дробления интервала на части должен быть несколько изменен. Выше мы приняли, что интервал разбивается на n отрезков. Значит, имеется в виду, что разбиение осуществляется по следующему закону: $n = 1, 2, 3, 4\ldots$. Для предельных переходов в смысле Lim данный закон $(n \to \omega)$ значение имеет. Для наших целей необходима бóльшая свобода в выборе закона дробления. Пусть на первом шаге интервал разбивается на $m(1)$ отрезков, на втором шаге — на $m(2)$ отрезков, на шаге n — на $m(n)$ отрезков; $m(n)$ — известная функция. Предположим, что $\beta - \alpha = k\omega + h$, где k и h — числа вещественного масштабного уровня. Интервал интегрирования будет исчерпан отрезками l, если

$$\operatorname{Lim}_{n \to \omega} [k\omega + h - m(n)l] = 0, \tag{7}$$

отсюда

$$m(n) = \frac{k}{l}n + \frac{h}{l}.$$

Предположим, что $\alpha < \beta$. Расстояние до точки горизонта в положительном направлении равно q, в отрицательном — p. Поэтому должно быть

$$\alpha = \eta_0 - p,\ \beta = \eta_e + q,\ \eta_0 < \eta_e, \tag{8}$$

а значит, $h = l$ и, кроме того, k/l — должно быть числом натуральным. В примере (6) данные условия выполняются. А как быть, если число k/l не является натуральным, например

$$q = 60,\ p = 40,\ l = 100;\ \alpha = \omega - 10,\ \beta = 3\omega + 50,$$

и, значит, $k/l = 0{,}02$? Во-первых, ясно, что с отрезками на концах интервала проблем нет. По отрезку $[\omega - 40,\ \omega - 10]$ интеграл вычисляется при фиксированном значении $\eta = \omega$. Вычитая полученное значение из интеграла по области (8), получим необходимый результат. То же самое можно сделать и для другого конца интервала. Поэтому далее достаточно ограничиться случаем (8). Вопрос с отношением $k / l = 0{,}02$ несколько сложнее.

Для его решения предпримем следующее. Возьмем отрезок $[\omega, 3\omega]$ и периодически продолжим функцию вправо до точки 101ω. В результате функция будет определена на интервале $[\omega, 101\omega]$. Расширим интервал до $[\omega - 40,\ 101\omega + 60]$. (Интегралы по добавленным отрезкам известны.) Теперь $k / l = 1$ — число натуральное. Если вычислить интеграл по данной области, то, пользуясь периодичностью, легко подсчитать интеграл и для исходной области.

Далее, исходное значение $k / l = 0{,}02$ — число рациональное и это обстоятельство в данном случае существенно. Нетрудно дать обоснование подобной процедуры и для иррациональных k / l. Таким образом, теперь можно считать, что концы области интегрирования всегда лежат в точках (8), а условие о том, что k / l — число натуральное, можно снять.

Подводя итог, можно сказать, что предельный переход (7) приводит к тому, что все зоны контакта между масштабными уровнями интервала $[\alpha, \beta]$ вырождаются в точки контакта. Предположим вначале, что и сумма интегралов по указанным зонам контакта стремится к нулю. Это значит, что проблема интегрирования свелась к суммированию интегралов по отрезкам $A_i B_i$. В каждом из слагаемых фигурирует параметр η. Если расстояния до точки горизонта в положительном и отрицательном направлениях различны, то значение η берется не в середине отрезка интегрирования. Для охвата подобных случаев несколько обобщим принятое в § 31 определение 31.1.

Пусть функция $F(\mathrm{X})$ определена при $\mathrm{X} \in [\alpha, \beta]$. Возьмем равномерное разбиение на отрезки длиной $\Delta\mathrm{X}_n = p_n + q_n = (\beta - \alpha)/n$.

Определение 37.1. *Примем, что*

$$(p_n,\ q_n)\int_{\alpha}^{\beta} F(\mathrm{X}, \Delta\mathrm{X}_n)\Delta\mathrm{X}_n = F(\alpha + p_n,\ \Delta\mathrm{X}_n)\Delta\mathrm{X}_n + \\ + F(\alpha + p_n + \Delta\mathrm{X}_n,\ \Delta\mathrm{X}_n)\Delta\mathrm{X}_n + \ldots + F(\beta - q_n,\ \Delta\mathrm{X}_n)\Delta\mathrm{X}_n. \tag{9}$$

Указание $(p_n,\ q_n)$ перед интегралом допускается либо опускать, либо заменять на равносильное.

Теорема 37.1. *Если*

$$\frac{\Phi(\mathrm{X} + \Delta\mathrm{X}_n,\ \Delta\mathrm{X}_n) - \Phi(\mathrm{X},\ \Delta\mathrm{X}_n)}{\Delta\mathrm{X}_n} = F(\mathrm{X} + p_n,\ \Delta\mathrm{X}_n), \tag{10}$$

то

$$(p_n,\ q_n)\int_{\alpha}^{\beta} F(\mathrm{X},\ \Delta\mathrm{X}_n)\Delta\mathrm{X}_n = \Phi(\beta,\ \Delta\mathrm{X}_n) - \Phi(\alpha,\ \Delta\mathrm{X}_n). \tag{11}$$

Везде предполагается, что $(\beta - \alpha)/\Delta\mathrm{X}_n$ — число натуральное.

• **Доказательство** теоремы тривиально. Подставляем равенства (10) в (9) и получаем (11). ■

Таким образом, равенство (11) (при условии выполнения (10)) — это просто тождество, в котором для группы слагаемых введено специальное обозначение с использованием символа интеграла. Коль скоро (11) — это тождество и число n — его параметр, то ничто не мешает применить к обеим его частям оператор предельного перехода Lim при $n \to \omega$:

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\omega}\left[(p_n, q_n)\int_{\alpha}^{\beta} F(\mathrm{X}, \Delta\mathrm{X}_n)\Delta\mathrm{X}_n\right] = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega}[\Phi(\beta, \Delta\mathrm{X}_n) - \Phi(\alpha, \Delta\mathrm{X}_n)]. \tag{12}$$

Если

$$p = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} p_n,\ \ q = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} q_n,\ \ l = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega}(p_n + q_n),$$

то более коротко равенство (12) будем записывать так:

$$(p, q)\int_{\alpha}^{\beta} F(\mathrm{X}, \Delta\mathrm{X})\Delta\mathrm{X} = \Phi(\beta, \Delta\mathrm{X}) - \Phi(\alpha, \Delta\mathrm{X}). \tag{13}$$

Запись (13) легко отличить от записи типа (9), даже если в последней опустить индекс n. В (9) отношение длины интервала интегрирования к длине субинтервала равно конечному натуральному числу n, а в (13) это отношение есть актуально бесконечно большое число. На этом основании будем говорить, что в (13) произведено разбиение интервала интегрирования на субинтервалы длиной l и число их является бесконечно большим.

Резюмируем сделанные выше построения в виде теоремы.

Теорема 37.2. *Пусть* $F(\mathrm{X}) = f(\eta, x)$ *— функция, заданная на двух масштабных уровнях неархимедовой прямой:* $\mathrm{X} = \eta + x = x_{-1}\omega + x$. *Тогда определенный интеграл от нее по интервалу* $[\alpha, \beta]$ *равен*

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} F(\mathrm{X})d\mathrm{X} = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(\eta, x)dx,$$

если $\alpha = \eta + x_1$, $\beta = \eta + x_2$, *и равен*

$$(p,q)\int\limits_{\alpha}^{\beta} F(\mathrm{X})d\mathrm{X} = (p,q)\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[\frac{1}{l}\int\limits_{-p}^{q} f(\eta, x)dx\right]\Delta\eta = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha), \tag{14}$$

если

$$\alpha = \eta_0 - p,\ \beta = \eta_e + q,\ \eta_0 > \eta_e.$$

Функция $\Phi(\eta)$ *определяется уравнением*

$$\frac{\Phi(\eta + l) - \Phi(\eta)}{l} = \frac{1}{l}\int\limits_{-p}^{q} f(\eta + p, x)dx, \tag{15}$$

p, q *и* $l = p + q$ *— параметры интеграла — названы расстояниями до точки горизонта в положительном и отрицательном направлениях оси* OX. Если учесть, что

$$\frac{1}{l}\int\limits_{-p}^{q} f(\eta,\, x)\, dx = \frac{\varphi(\eta,\, q) - \varphi(\eta,\, -p)}{l},\ \frac{\partial\varphi(\eta, x)}{\partial x} = f(\eta,\, x), \tag{16}$$

то формуле (14) можно придать следующий вид:

$$(p,q)\int\limits_{\alpha}^{\beta} F(\mathrm{X})d\mathrm{X} = (p,q)\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{\varphi(\eta,\, q) - \varphi(\eta,\, -p)}{l}\Delta\eta = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

Здесь функция $\Phi(\eta)$ определяется уравнением

$$\frac{\Phi(\eta + l) - \Phi(\eta)}{l} = \frac{\varphi(\eta + p,\, q) - \varphi(\eta + p,\, -p)}{p + q},$$

или, что то же самое,

$$\frac{\Phi(\eta + q) - \Phi(\eta - p)}{l} = \frac{\varphi(\eta,\ q) - \varphi(\eta,\ -p)}{l}. \tag{17}$$

(Второй аргумент l у функции Φ не выписан.)

Построенная конструкция удовлетворяет всем перечисленным выше требованиям. Линейность очевидна. Для доказательства согласованности необходимо предположить, что функция непрерывна по типу 1, т.е.

$$\frac{\partial f(\eta,\ x)}{\partial \eta} = \frac{\partial f(\eta,\ x)}{\partial x},$$

и, значит, $f(\eta, x) = f(\eta + x)$. То есть функция фактически зависит не от двух, а только от одного аргумента. Опираясь на этот факт, необходимо доказать, что интеграл, вычисленный по формуле (14), от величины параметров p, q не зависит. Из (16) следует, что $\varphi(\eta,\ x) = \varphi(\eta + x)$. В этом случае разностное уравнение (17) сразу приводит к следующему решению: $\Phi(\eta) \equiv \varphi(\eta)$. Таким образом, в рассматриваемом случае интеграл (14) от параметров p, q не зависит. Данный результат становится практически очевидным, если обратиться к теореме 34.1.

Принципиально новый момент состоит в том, что в общем случае интеграл оказывается зависимым не только от интервала интегрирования и вида функции, но также и от расстояний до точек горизонта, т.е. еще от двух свободных параметров, которые должны выбираться из дополнительных соображений. Рассмотрим подробнее степень данной зависимости и ее природу.

Использование криволинейных интегралов. Будем опираться на аналогию, изложенную в § 27. Пусть по-прежнему $\alpha = \eta_0 - p$, $\beta = \eta_e + q$, $\eta_0 < \eta_e$. Возьмем теперь несколько более произвольное разбиение интервала на части:

$$\alpha = X_0 < X_1 < \ldots < X_{n-1} < X_n = \beta.$$

Образуем сумму

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} F(X'_i)\Delta X_i, \tag{18}$$

где

$$\Delta X_i = X_i - X_{i-1} = \Delta\eta_i + \Delta x_i,$$
$$\Delta\eta_i = \eta_i - \eta_{i-1},\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

и X'_i — точка внутри или на границе интервала $[X_{i-1},\ X_i]$. Данную точку будем считать произвольной, но только до известной степени.

Предположим, что в плоскости $Ox\eta$ точка X_i' лежит на прямолинейном отрезке, соединяющем точки X_i и X_{i-1}. В остальных отношениях данная точка может быть произвольной.

В рассматриваемой задаче независимая переменная X свелась к двум переменным η и x. Следовательно, функцию $F(X)$ также можно рассматривать как функцию двух переменных:

$$F(X) = f(\eta, x).$$

Продолжим данную функцию с уровня переменной η на вещественный уровень и все микро- и промежуточные уровни. Обозначение для аргумента η оставим прежним.

Перепишем интегральную сумму (18) в виде

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i, x_i)(\Delta\eta_i + \Delta x_i). \tag{19}$$

Данная сумма представляет собой не что иное, как приближение криволинейного интеграла. Выберем в плоскости $O\eta x$ некоторый путь из точки α в точку β (рис. 8.5).

Будем рассматривать такие разбиения отрезка $[\alpha, \beta]$, при которых все точки разбиения лежат на выбранном пути. Заменим в сумме (19) число отрезков с n на $\nu(n)$, где $\nu(n)$ — приближение числа ν из продолженного натурального ряда. Перейдем к пределу $\underset{n}{\mathrm{Lim}}$ при $n \to \omega$ и затем к пределу $\underset{\nu}{\mathrm{limit}}$ при $\nu \to \infty$. Предположим, что длины всех отрезков стремятся к нулю и, кроме того, предел суммы (19) существует и не зависит от способа разбиения и выбора точек X_i'. Дан-

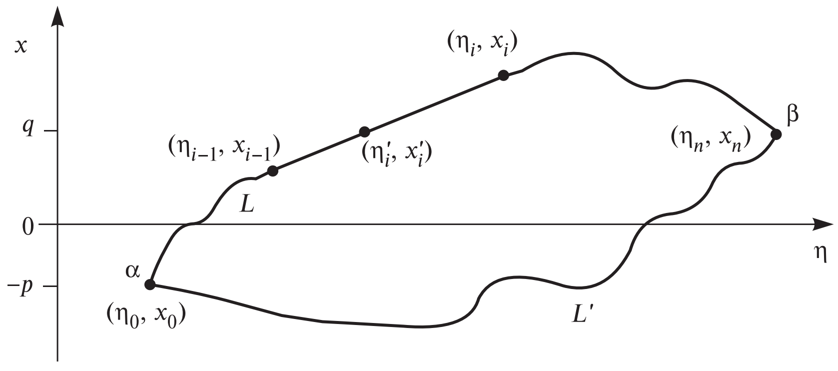

Рис. 8.5.

ный предел представляет собой криволинейный интеграл, для которого будем использовать стандартное обозначение

$$J = \int\limits_{\alpha L \beta} f(\eta, x) d\eta + f(\eta, x) dx. \tag{20}$$

Для исследования интеграла (20) можно использовать все методы классического анализа. Главное, что надо будет потом учесть, так это то, что значения η и x принадлежат «на самом деле» не плоскости, а линейно-упорядоченной неархимедовой прямой. Поэтому, например, значение f в точке $\eta = 2\omega$, $x = 10$ — это действительно значение самой функции $F(\mathrm{X})$, а значение f в точке $\eta = 10$, $x = 2\omega$ — значение продолжения функции F. Отличить одну ситуацию от другой не представляет труда.

Возьмем теперь другой путь $\alpha L'\beta$ и подсчитаем для него интеграл (20). Если D — область, ограниченная путями L и L', то различие в криволинейных интегралах по разным путям можно подсчитать по формуле Грина

$$\int\limits_C f(\eta, x)\, dx + f(\eta, x)\, d\eta = \iint\limits_D \left[\frac{\partial f(\eta, x)}{\partial \eta} - \frac{\partial f(\eta, x)}{\partial x} \right] d\eta dx, \tag{21}$$

где C — контур, ограничивающий D. Условие независимости интеграла от пути имеет вид

$$\frac{\partial f(\eta, x)}{\partial \eta} \equiv \frac{\partial f(\eta, x)}{\partial x}. \tag{22}$$

По-видимому, это центральное место данных построений. Ведь другой путь из α в β означает другой способ разбиения отрезка неархимедовой прямой на части. Значит, если условие (22) не выполняется, то предел интегральной суммы зависит от способа разбиения интервала интегрирования на части. Данную ситуацию необходимо обсудить подробнее. Во-первых, что означает условие (22)? Оно означает, что функция двух переменных $f(\eta, x)$ фактически сводится к функции только одной переменной от аргумента $\eta + x$. Последнее, в свою очередь, означает, что функция $F(\mathrm{X})$ является непрерывной при переходе с вещественного уровня прямой на первый мегауровень.

Таким образом, криволинейный интеграл (20) не зависит от пути только для функций, непрерывных на стыке различных масштабных уровней. Для функций, разрывных на стыке масштабных уровней, предел интегральной суммы от пути интегрирования зависит и, значит, зависит от способа разбиения интервала интегрирования на части.

Похожие ситуации встречаются и в классическом анализе. Действительно, независимость предела интегральной суммы от способа разбиения интервала на части имеет место для непрерывных функций, а также для функций, которые являются разрывными, но «не слишком» разрывными. Например, функция Дирихле уже неинтегрируема по Риману. Однако этот факт не является препятствием для поиска интегралов. Требуется только изменить само понятие интеграла.

В настоящем разделе мы столкнулись с аналогичной ситуацией. Зависимость интеграла от способа разбиения означает, что функция, разрывная на стыке двух уровней, для интегрирования в классическом смысле также является «слишком разрывной». Можно указать три варианта преодоления данной трудности. Первый — объявить, что при нарушении условия (22) интеграла не существует. Этот вариант неприемлем по следующей причине. Как указывалось, основное свойство неархимедовой прямой состоит в ее многомасштабности. А многомасштабность проявляется только для функций, которые зависят именно от двух, а не от одного аргумента. Иными словами, только для функций, которые ограничению (22) не подчиняются.

Второй вариант сводится к следующему. Коль скоро интеграл зависит от пути L, то можно взять все возможные пути и в качестве интеграла ввести некоторое среднее значение по всем путям. В квантовой механике эта идея принадлежит Фейнману и приводит к успеху [118]. В рассматриваемой ситуации потребности именно в такой интерпретации интеграла в настоящее время не видно.

Третий вариант представляется наиболее естественным. Если интеграл зависит от пути, то, может быть, среди всех путей есть один избранный путь L^* такой, который выделяется из всех остальных как настоящий, действительно реализуемый. Тогда интеграл по этому пути и должен быть принят в качестве интеграла по отрезку $[\alpha,\beta]$. Рассмотрим данную возможность подробнее. Вещественный масштабный уровень будем представлять себе как уровень, доступный нам непосредственно. Движение по данному уровню происходит в условиях, когда параметры всех мегауровней зафиксированы (подобно тому, как в пределах нашей жизни зафиксирован номер геологической эпохи). В плоскости (x,η) это соответствует движению по вертикальному отрезку $\eta = \text{const}$. Опыт показывает, что ни один процесс не может продолжаться неограниченно ни в пространстве, ни во времени. Максимум он может продолжаться до некоторой особой точки, после достижения которой наступают качественные изменения и вступают в действие какие-то новые законы и правила, так что дальнейшая судьба процесса определяется уже новыми законами. Выше эта точка была определена как точка горизонта. Примем, что по достижении точки горизонта мы вступаем в особую переходную область и в конце концов попадаем в новую точку на мегауровне $\eta + \Delta\eta$.

Каков путь перехода в данную точку? Обратимся к криволинейному интегралу. Структура подынтегрального выражения однозначно выделяет один из путей интегрирования — путь, для которого $dx + d\eta \equiv 0$. Для такого пути интеграл по нему будет всегда тождественным нулем для любой функции $f(x,\eta)$ (если у функции нет особенностей). Отсюда следует, что $d\eta = -dx$ и, значит, $\Delta\eta = l$. Однако число l принадлежит к вещественному масштабному уровню, а число $\Delta\eta$ — к первому мегауровню. Поэтому добиться выполнения условия $\Delta\eta = l$ можно только с помощью процедуры предельного перехода Lim. Таким образом, путь L^* должен состоять из прямолинейных горизонтальных и наклонных (под углом $\pi/4$ при $\Delta\eta \to l$) отрезков (рис. 8.6). Формула Грина (21) позволяет оценить степень зависимости криволинейного интеграла от пути и, в частности, степень зависимости величины интеграла от параметров задачи p и q. На рис. 8.7 показаны два крайних случая: первый $p = l$, $q = 0$ (сплошная ломаная $L_1^*: A_1B_1 \ldots C_1K_1$) и второй $p = 0$, $q = l$ (штриховая ломаная $L_2^*: B_1B_2 \ldots K_1K_2$).

Различие в интегралах определяется двойным интегралом (21) по затонированной области плюс разницей интегралов по отрезкам A_1B_1, B_1B_2 и K_1C_1, K_1K_2. Главным является следующее обстоятельство: зависимость интеграла от расстояния до точек горизонта связана исключительно с разрывностью функции на стыке двух масштабных уровней. Степень разрывности определяется разностью производных f по η и x. В классическом анализе такого рода разрывности нет, поэтому необходимости и в понятии точки горизонта не возникает.

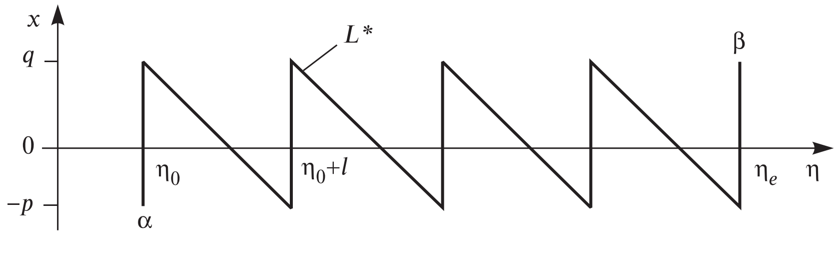

Рис. 8.6.

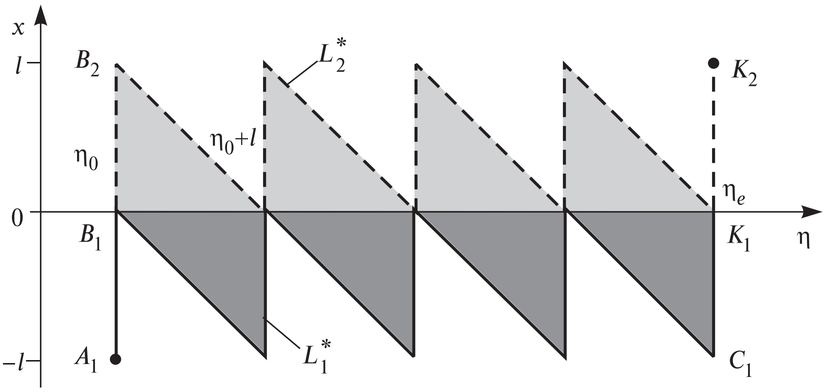

Рис. 8.7.

В заключение рассмотрим предельный случай, когда горизонт суживается до точки. Для этого в формулах (14), (15) необходимо сделать предельный переход в смысле limit при $p \to 0, q \to 0$ и, значит, $l \to 0$. Ясно, что

$$\operatorname*{limit}_{l\to 0} \frac{1}{l} \int_{-p}^{q} f(\eta, x)dx = f(\eta, 0); \quad \frac{\partial \Phi(\eta)}{\partial \eta} = f(\eta, 0).$$

Таким образом, в случае неограниченного суживания горизонта интеграл по неархимедовой переменной X переходит в римановский интеграл от продолжения функции с первого мегауровня:

$$\operatorname*{limit}_{p,q\to 0}(p,\ q)\int_{\alpha}^{\beta} f(\eta,\ x)d\mathrm{X} = \int_{\alpha}^{\beta} f(\eta,\ 0)\, d\eta.$$

§ 38. Примеры вычисления определенных интегралов

Интегралы от функций, заданных на вещественном уровне прямой и ее первом мегауровне. Вначале задается функция

$$F(\mathrm{X}) = f(\eta, x); \ \ \mathrm{X} = \eta + x = x_{-1}\omega + x$$

и расстояния до точек горизонта q и p, $l = q + p$. Задаются пределы интегрирования $\alpha = \eta_0 + x_0$, $\beta = \eta_e + x_e$.

1^0. Если интервал интегрирования таков, что $\eta_0 = \eta_e$, то

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(\mathrm{X})d\mathrm{X} = \int_{x_0}^{x_e} f(\eta_0, x)\, dx = \Phi(\eta_0,\ x_e) - \Phi(\eta_0,\ x_0), \tag{1}$$

где

$$\frac{\partial \Phi(\eta,\, x)}{\partial x} = f(\eta, x).$$

2^0. Если же $\eta_0 < \eta_e$, то, пользуясь формулой (1), можно добиться того, чтобы $\alpha = \eta_0 - p$, $\beta = \eta_e + q$. Тогда

$$(p,q)\int\limits_{\alpha}^{\beta} F(\mathrm{X})\, d\mathrm{X} = (p,q)\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[\frac{1}{l}\int\limits_{-p}^{q} f(\eta,x)\, dx\right]\Delta\eta = \Phi(\beta,\, l) - \Phi(\alpha,\, l),$$

где

$$\frac{\Phi(\eta + l,\, l) - \Phi(\eta,\, l)}{l} = \frac{1}{l}\int\limits_{-p}^{q} f(\eta + p, x)dx.$$

В случае 1^0 интегралы вычисляются по формулам классического анализа. Переменная η входит в формулы как параметр. Приводить примеры для этого случая необходимости нет.

Рассмотрим примеры для случая 2^0.

Пример 1. $F(\mathrm{X}) = f(\eta,x) = b\eta + ax$, b, $a = \mathrm{const}$.

1^0. Вычисляем интеграл

$$\frac{1}{l}\int\limits_{-p}^{q} (b\eta + ax)dx = b\eta + \frac{a}{2}(q - p).$$

2^0. Записываем разностное уравнение

$$\frac{\Phi(\eta + l,\, l) - \Phi(\eta,\, l)}{l} = b(\eta + p) + \frac{a}{2}(q - p).$$

3^0. Записываем решение разностного уравнения, пользуясь формулами § 35:

$$\Phi(\eta,\, l) = b\frac{\eta^2}{2} + (b - a)(p - q)\frac{\eta}{2}.$$

4^0. Окончательный результат

$$(p,q)\int\limits_{\alpha}^{\beta}(b\eta + ax)\, d\mathrm{X} = \left[b\frac{\eta^2}{2} + (b - a)(p - q)\frac{\eta}{2}\right]\Bigg|_{\alpha}^{\beta}. \tag{2}$$

Обсудим данный результат. Функция является непрерывной по типу 2 (локально-непрерывной). По типу 1 функция разрывна. В точках горизонта разрыв равен

$$R(\eta + q) = f(\eta + l, -p) - f(\eta,\, q).$$

В данном случае имеем

$$R(\eta + q) = (b - a)(p + q).$$

При $b = a$ разрыв исчезает, функция становится непрерывной по типу 1. Интеграл (2) перестает зависеть от p, q и переходит в классический.

Пример 2. $F(\mathrm{X}) = f(\eta, x) = f(x)$, т.е. функция от переменной мегауровня $\eta = x_{-1}\omega$ не зависит.

1^0. Записываем разностное уравнение

$$\frac{\Phi(\eta + l, l) - \Phi(\eta, l)}{l} = \frac{1}{l}\int_{-p}^{q} f(x)dx.$$

2^0. Решение имеет вид

$$\Phi(\eta,\ l) = \frac{\eta}{l}\int_{-p}^{q} f(x)dx.$$

3^0. Окончательный результат

$$(p, q)\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, d\mathrm{X} = \frac{\beta - \alpha}{l}\int_{-p}^{q} f(x)dx.$$

В частности,

$$(p, q)\int_{\alpha}^{\beta} x^2 d\mathrm{X} = \frac{p^2 - pq + q^2}{3}(\beta - \alpha).$$

Результат имеет ясный смысл. Первый сомножитель $(\beta - \alpha)/l$ — это число отрезков длины l (в пределе Lim), которое укладывается на интервале интегрирования $(\beta - \alpha)$. Это актуально бесконечно большое и вполне конкретное число. Второй сомножитель — это значение интеграла по одному отрезку, т.е. от одной точки горизонта $(\eta - p)$ до другой точки $(\eta + q)$. Так как значение интеграла для всех отрезков одинаково, то их сумма сводится к умножению одного слагаемого на число отрезков.

Пример 3. $F(\mathrm{X}) = f(\eta, x) = \eta x$.

1^0. Вычисляем интеграл

$$\frac{1}{l}\int_{-p}^{q} x\eta dx = \frac{q - p}{2}\eta.$$

2^0. Записываем разностное уравнение

$$\frac{\Phi(\eta + l,\ l) - \Phi(\eta,\ l)}{l} = \frac{q - p}{2}(\eta + p).$$

3^0. По формулам § 35 находим

$$\Phi(\eta, l) = \frac{q - p}{4}[\eta^2 - (q - p)\eta]\ .$$

4^0. Окончательно имеем

$$(p, q)\int_{\alpha}^{\beta} \eta x dX = \frac{q - p}{4}\left[\eta^2 - (q - p)\eta\right]\Big|_{\alpha}^{\beta}.$$

Пример 4. $F(X) = f(\eta, x) = \eta^2$.

1^0. Вычисляем интеграл

$$\frac{1}{l}\int_{-p}^{q} \eta^2 dx = \eta^2.$$

2^0. Записываем разностное уравнение

$$\frac{\Phi(\eta + l, l) - \Phi(\eta, l)}{l} = (\eta + p)^2 = \eta^2 + 2\eta p + p^2.$$

3^0. По формулам § 35 находим

$$\Phi(\eta, l) = \frac{\eta^3}{3} - \frac{q - p}{2}\eta^2 + \frac{p^2 - 4pq + q^2}{6}\eta.$$

4^0. Окончательно имеем

$$(p, q)\int_{\alpha}^{\beta} \eta^2 dX = \Phi(\beta, l) - \Phi(\alpha, l).$$

Пример 5. $F(X) = \eta^2 + 2k\eta x + x^2,\ \ k = \mathrm{const}.$

Из линейной комбинации уже рассмотренных интегралов получаем

$$(p, q)\int_{\alpha}^{\beta} (\eta^2 + 2k\eta x + x^2)\, dX = \left\{\frac{\eta^3}{3} + \frac{k - 1}{2}(q - p)\left[\eta^2 - (q - p)\eta\right]\right\}\Big|_{\alpha}^{\beta}.$$

Подсчитаем разрыв функции в точках горизонта:

$$R(\eta + q) = 2(1 - k)(p + q)(\eta + p).$$

При $k = 1$ функция становится непрерывной. В этом случае интеграл переходит в классический и зависимость от точек горизонта исчезает. Отметим, что для сокращения везде указана зависимость Φ от l, а не от p, q.

§ 39. Интегрирование функций, разрывных на произвольном числе масштабных уровней

Пусть функция $Y = F(X)$ определена на ряде масштабных уровней:

$$X = \eta_m + \eta_{m-1} + \ldots + \eta_1 + x + \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_k + \ldots,$$

$$\eta_m = x_{-m}\omega^m, \ldots \eta_1 = x_{-1}\omega,\ \xi_1 = x_1 \mathrm{E}, \ldots \xi_k = x_k \mathrm{E}^k, \ldots . \qquad (1)$$

Как и прежде, координаты $x_{-m}, \ldots x, \ldots x_k, \ldots$ — это ядра вещественных чисел. Функция от одного аргумента X сводится к функции многих переменных от аргументов (1)

$$F(X) = f(\eta_m, \ldots x, \ldots \xi_k, \ldots).$$

Задача состоит в том, чтобы указать способ вычисления определенного интеграла от $F(x)$:

$$J = (\Re)\int_{\alpha}^{\beta} f(\eta_m, \ldots x,\ \xi_k, \ldots)\, dX \qquad (2)$$

при условии, что функция $F(X)$ при переходе от одного масштабного уровня к другому может быть разрывной. Через $(\Re)$ обозначена совокупность условий, уточняющих смысл интеграла.

Будем опираться на результаты предыдущего параграфа. Неформально данные результаты можно описать таким образом. Промежуток интегрирования $[\alpha, \beta]$ разбивается на равные части длиной $\Delta\eta$ (см. рис. 8.3, 8.4). Число частей равно $(\beta - \alpha)/\Delta\eta$. Интеграл по каждой отдельной части (за вычетом области перехода) мы вычислять умеем. После их вычисления производится суммирование $(\beta - \alpha)/\Delta\eta$ слагаемых. Затем осуществляется переход к пределу Lim при $\Delta\eta \to l$. В результате получается значение интеграла от α до β. Нетривиальность всей процедуры состоит в том, что число частей $(\beta - \alpha)/l$ становится актуальным бесконечно большим. Это значит, что длина всего отрезка интегрирования $(\beta - \alpha)$ и длина его части l — числа разных масштабных уровней. Поэтому суммирование и переход к пределу приводят к тому, что, зная интегралы по отрезкам одного масштабного уровня, мы приходим к интегралу по отрезку бóльшего масштабного уровня.

Та же задача возникает при вычислении интеграла (2). Отличие состоит только в том, что теперь потребуется целый ряд таких переходов. Опишем алгоритм их осуществления. В качестве образца возьмем рассмотренный выше алгоритм в следующей форме:

1^0. По заданной функции $f(\eta, x)$ вычисляется функция $\varphi(\eta, x)$ такая, что

$$\frac{\partial\varphi(\eta, x)}{\partial x} = f(\eta, x).$$

2^0. По известной функции $\varphi(\eta, x)$ определяется функция $\Phi(\eta)$ из уравнения (17) § 37:

$$\frac{\Phi(\eta + q) - \Phi(\eta - p)}{l} = \frac{\varphi(\eta, q) - \varphi(\eta, -p)}{l}.$$

3^0. а) интеграл получаем как разность $\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$, если $\alpha = \eta^0 - p$; $\beta = \eta^e + q$, $\eta^0 > \eta^e$;

б) если $\alpha = \eta^0 + x^0$; $\beta = \eta^0 + x^e$, то интеграл равен $\varphi(\eta^0, x^e) - \varphi(\eta^0, x^0)$;

в) общий случай сводится к указанным двум.

Перейдем теперь к задаче (2). Во-первых, необходимо предположить, что существует некоторый стартовый масштабный уровень, интеграл по которому мы вычислять умеем. Пусть это будет микроуровень с номером k: $\mathrm{X} = \xi_k = x_k \mathrm{E}^k$. Предположим, что детали поведения функции на уровнях меньших масштабов неизвестны либо не представляют интереса. Тогда функция F с микроуровня номер k продолжается на микроуровни $(k + 1)$, $(k + 2)$ и др. по непрерывности:

$$F(\mathrm{X}) = f(\eta_m, \dots x, \xi_1, \dots \overline{\xi}_k).$$

Пусть $[\alpha_k, \beta_k]$ некоторый промежуток на уровне $\overline{\xi}_k$. Это значит, что при переходе от α_k к β_k меняется только аргумент $\overline{\xi}_k$, а все остальные аргументы $\xi_{k-1}, \dots \eta_m$ остаются неизменными. Это обстоятельство подчеркнем введением индекса k в обозначение функции Φ, которая дает значение интеграла по отрезку $[\alpha_k, \beta_k]$:

$$\Phi_k(\eta_m, \dots x, \dots \xi_{k-1}, \beta_k) - \Phi_k(\eta_m, \dots x, \dots \xi_{k-1}, \alpha_k) =$$
$$= \int_{\alpha_k}^{\beta_k} F(\eta_m, \dots x, \dots \xi_{k-1}, \overline{\xi}_k)\, d\overline{\xi}_k.$$

Функция F по аргументу $\overline{\xi}_k$ непрерывна, поэтому интеграл от нее вычисляется по обычной формуле Ньютона — Лейбница. Это значит, что функция Φ_k может быть найдена из решения дифференциального уравнения

$$\frac{\partial \Phi_k(\eta_m, x \ldots \xi_{k-1}, \overline{\xi}_k)}{\partial \overline{\xi}_k} = F(\eta_m, \ldots x_1 \ldots \xi_{k-1}, \overline{\xi}_k).$$

Пусть p_k, q_k — расстояния до точки горизонта на масштабном уровне $\overline{\xi}_k$, $l_k = p_k + q_k; \ldots p_{-m}$, q_{-m} — расстояния до точки горизонта на уровне η_m, $l_{-m} = p_{-m} + q_{-m}$. Тогда

$$\frac{\Phi_{k-1}(\eta_m, \ldots \xi_{k-1} + q_k) - \Phi_{k-1}(\eta_m, \ldots \xi_{k-1} - p_k)}{l_k} =$$

$$= \frac{\Phi_k(\eta_m, \ldots \xi_{k-1};\ q_k) - \Phi_k(\eta_m, \ldots \xi_{k-1}; -p_k)}{l_k}.$$

Правая часть известна. Из решения уравнения определяем функцию $\Phi_{k-1}(\eta_m, \ldots, \xi_{k-1})$. Данная функция позволяет определить интеграл по интервалу следующего масштабного уровня, т.е. по уровню переменной ξ_{k-1}. Нас интересует интеграл по интервалу $-p_{k-1} \le \xi_{k-1} \le q_{k-1}$. На данном интервале все остальные переменные $\eta_m, \ldots \xi_{k-2}$ зафиксированы и играют роль параметров. Если

$$p_{k-1} = \xi^0_{k-1} - p_k,\ q_{k-1} = \xi^e_{k-1} + q_k, \tag{3}$$

то следующее по цепочке уравнение имеет вид

$$\frac{\Phi_{k-2}(\eta_m, \ldots \xi_{k-2} + q_{k-1}) - \Phi_{k-2}(\eta_m, \ldots \xi_{k-2} - p_{k-1})}{l_{k-1}} =$$

$$= \frac{\Phi_{k-1}(\eta_m, \ldots \xi_{k-2};\ q_{k-1}) - \Phi_{k-1}(\eta_m, \ldots \xi_{k-2};\ -p_{k-1})}{l_{k-1}}.$$

Правая часть известна. Если условия (3) не выполняются, то к правой части добавляются слагаемые, которые легко вычисляются. (Условия вида (3), а также данная оговорка подразумеваются и для следующих уравнений.)

Повторяя указанные процедуры, мы приходим к цепочке уравнений вплоть до последнего интересующего нас уравнения

$$\frac{\Phi_{-m}(\eta_m + q_{-m+1}) - \Phi_{-m}(\eta_m - p_{-m+1})}{l_{-m+1}} =$$

$$= \frac{\Phi_{-m+1}(\eta_m;\ q_{-m+1}) - \Phi_{-m+1}(\eta_m,\ -p_{-m+1})}{l_{-m+1}}.$$

Окончательный результат получаем в следующем виде:

$$(\Re)\int_{\alpha_{-m}}^{\beta_{-m}} F(\mathrm{X})d\mathrm{X} = \Phi_{-m}(\beta_{-m}) - \Phi_{-m}(\alpha_{-m}),$$

где

$$\alpha_{-m} = \eta_m^{(0)} - p_{-m},\ \ \beta_{-m} = \eta_m^{(e)} + q_{-m},\ \eta_m^{(0)},\ \eta_m^{(e)} \text{ заданы.}$$

Рассмотрим предельный случай, когда расстояния до точек горизонта становятся исчезающе малыми. В результате вместо разностных уравнений получим цепочку дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial\Phi_k(\eta_m,\ldots\xi_{k-1},\ \xi_k)}{\partial\xi_k} = f(\eta_m,\ldots\xi_{k-1},\ \xi_k);$$

$$\frac{\partial\Phi_{k-1}(\eta_m,\ldots x,\ \xi_{k-1})}{\partial\xi_{k-1}} = \frac{\partial\Phi_k(\eta_m,\ldots\xi_{k-1},0)}{\partial\xi_k};$$

$$\frac{\partial\Phi_{k-2}(\eta_m,\ldots,\xi_{k-2})}{\partial\xi_{k-2}} = \frac{\partial\Phi_{k-1}(\eta_m,\ldots\xi_{k-2},0)}{\partial\xi_{k-1}};\ \ldots$$

$$\frac{\partial\Phi_0(\eta_m,\ldots x)}{\partial x} = \frac{\partial\Phi_1(\eta_m,\ldots x,0)}{\partial\xi_1};$$

$$\frac{\partial\Phi_{-1}(\eta_m,\ldots\eta_1)}{\partial\eta_1} = \frac{\partial\Phi_0(\eta_m,\ldots\eta_1,0)}{\partial x},\ldots$$

$$\frac{\partial\Phi_{-m}(\eta_m)}{\partial\eta_m} = \frac{\partial\Phi_{-m+1}(\eta_m,\ 0)}{\partial\eta_{m-1}}.$$

Отсюда сразу следует, что

$$\frac{\partial\Phi_k(\eta_m,\ldots\xi_{k-1},\ \xi_k)}{\partial\xi_k} = f(\eta_m,\ldots\xi_{k-1},\ \xi_k);$$

$$\frac{\partial\Phi_{k-1}(\eta_m,\ldots\xi_{k-1})}{\partial\xi_{k-1}} = f(\eta_m,\ldots\xi_{k-1},0);$$

$$\frac{\partial\Phi_{k-2}(\eta_m,\ldots\xi_{k-2})}{\partial\xi_{k-2}} = f(\eta_m,\ldots\xi_{k-2},0,0);\ldots$$

$$\frac{\partial\Phi_0(\eta_m,\ldots x)}{\partial x} = f(\eta_m,\ldots x,0,\ldots 0);$$

$$\frac{\partial\Phi_{-1}(\eta_m,\ldots\eta_1)}{\partial\eta_1} = f(\eta_m,\ldots\eta_1,0,\ldots 0),\ldots$$

$$\frac{\partial\Phi_{-m}(\eta_m)}{\partial\eta_m} = f(\eta_m,0,\ldots 0).$$

Замечание 1. Рассмотренные формулы позволяют охватить любое конечное число масштабов. В случае необходимости можно рассмотреть и бесконечное число масштабов. Для этого потребуются либо данные о стыке некоторого масштабного уровня с конечным номером и уровня с бесконечным номером, либо данные о предельном переходе Lim от уровней с конечными номерами к уровню с бесконечным номером.

Замечание 2. Значение интеграла зависит от расстояний до точек горизонта. Этот феномен связан только с разрывностью функций типа 1. Как отмечалось, аналога подобной разрывности на обычной вещественной прямой — нет. Если же функция на стыке различных масштабных уровней непрерывна, то зависимость от расстояния до горизонта исчезает. По-другому можно сказать так: при этом типе непрерывности пересечение точек горизонта происходит незаметно. Именно поэтому везде имеет место переход к классическим интегралам.

Замечание 3. Выше предполагалось, что при переходе через точки горизонта интеграл приращения не получает. В некоторых случаях это не так, например при вычислении длины кривой с учетом вертикальных отрезков в точках разрыва функции. Подобные интегралы будут рассмотрены ниже.

§ 40. Основные формулы для вычисления определенных интегралов

Выше предполагалось, что расстояния до точек горизонта p, q и $l = p + q$ являются величинами постоянными. В общем случае необходимо принять, что p, q и, значит, l зависят от соответствующих координат. Например, если функция задана на вещественном и первом мегауровне, т.е. $X = \eta + x$, то p, q и l могут зависеть от координаты η. Если же речь идет о вещественном и первом микроуровне $X = x + \xi$, то в общем случае

$$p = p(x),\ q = q(x),\ l = p(x) + q(x) = l(x).$$

1. Интегрирование по частям

Смысл формулы интегрирования по частям хорошо известен. Пусть требуется найти интеграл от функции, заданной на обычной (архимедовой) прямой. Оператор интегрирования является обратным к оператору дифференцирования. Если подынтегральную функцию удалось представить как производную некоторой функции, то интеграл вычисляется сразу:

$$\int_a^b \varphi'(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a). \tag{1}$$

Чаще всего подобная задача решается «по частям». Предположим, что мы выделили из подынтегральной функции аддитивное слагаемое, равное производной некоторой функции. Тогда интеграл от этого слагаемого определяется как (1), а вычисление интеграла от второго слагаемого — это уже новая задача. Во многих случаях новая задача является уже более простой, чем исходная. Если исходную функцию удается представить в виде произведения $u(x)\,v'(x)$, то аддитивное слагаемое равно $(uv)'$, а новая задача состоит в интегрировании функции $u'(x)\,v(x)$:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Такова формула интегрирования по частям классического анализа.

Идея данного подхода может быть использована и в неархимедовом анализе. Во-первых, если неархимедова функция является непрерывной между масштабными уровнями аргумента, то вся классическая техника интегрирования переносится сюда без изменений:

$$\int_\alpha^\beta U(\mathrm{X})\,V'(\mathrm{X})d\mathrm{X} = U(\mathrm{X})V(\mathrm{X})\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta U'(\mathrm{X})V(\mathrm{X})d\mathrm{X}. \tag{2}$$

В выкладках появляются символы ω и E, но на технике интегрирования это обстоятельство никак не сказывается.

Гораздо более важен случай, когда непрерывности между масштабными уровнями нет. В этом случае поиск интеграла сводится к реализации алгоритма, описанного в § 37. Интегрирование по частям может быть использовано на двух этапах реализации данного алгоритма: при интегрировании функции на стартовом масштабном уровне и при суммировании интегралов стартового и последующих уровней прямой. Для иллюстрации достаточно рассмотреть два масштабных уровня, например вещественный и первый мегауровень. Пусть

$$p = q = l/2,\quad \mathrm{X} = \eta + x,\quad F(\mathrm{X}) = f(\eta, x).$$

Если длина отрезка интегрирования охватывает мегауровень прямой, то интеграл по нему равен

$$(\Im)\int_{\alpha}^{\beta} F(\mathrm{X})d\mathrm{X} = \operatorname*{Lim}_{\Delta\eta\to l}\int_{\alpha}^{\beta}\left[\frac{1}{\Delta\eta}\int_{-l/2}^{l/2} f(\eta,x)dx\right]\Delta\eta.$$

Интегрирование по частям внутреннего интеграла осуществляется по формуле (2). Предположим, что внутренний интеграл вычислен и равен

$$\mathrm{P}(\eta,\Delta\eta) = \frac{1}{\Delta\eta}\int_{-l/2}^{l/2} f(\eta,x)dx.$$

Теперь требуется найти сумму

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{P}(\eta,\ \Delta\eta)\,\Delta\eta. \tag{3}$$

Здесь также можно использовать «суммирование по частям». Оператор, обратный к оператору (3), имеет вид

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\Phi\left(\eta+\frac{\Delta\eta}{2},\ \Delta\eta\right)-\Phi\left(\eta-\frac{\Delta\eta}{2},\ \Delta\eta\right)}{\Delta\eta}\Delta\eta = \Phi(\beta,\ \Delta\eta)-\Phi(\alpha,\ \Delta\eta). \tag{4}$$

Поэтому, если функцию Р удалось представить в виде

$$P(\eta,\ \Delta\eta) = \frac{\Phi\left(\eta+\frac{\Delta\eta}{2},\ \Delta\eta\right)-\Phi\left(\eta-\frac{\Delta\eta}{2},\Delta\eta\right)}{\Delta\eta}, \tag{5}$$

то решение задачи дается формулой (4). «Частичное» решение задачи (5) состоит в том, чтобы представить функцию P в виде произведения

$$\mathrm{P}(\eta,\Delta\eta) = u\left(\eta+\frac{\Delta\eta}{2},\ \Delta\eta\right)\frac{v\left(\eta+\frac{\Delta\eta}{2},\ \Delta\eta\right)-v\left(\eta-\frac{\Delta\eta}{2},\ \Delta\eta\right)}{\Delta\eta}.$$

Тогда

$$\int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{P}(\eta,\ \Delta\eta)\,\Delta\eta = u(\eta,\ \Delta\eta)v(\eta,\ \Delta\eta)\Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} Q(\eta,\ \Delta\eta)\Delta\eta, \tag{6}$$

где

$$Q(\eta,\,\Delta\eta) = v\left(\eta - \frac{\Delta\eta}{2},\,\Delta\eta\right)\frac{u\left(\eta + \frac{\Delta\eta}{2},\,\Delta\eta\right) - u\left(\eta - \frac{\Delta\eta}{2},\,\Delta\eta\right)}{\Delta\eta}.$$

Здесь использовано следующее тождество, известное из теории разностных уравнений [117]:

$$u\left(\eta + \frac{\Delta\eta}{2}\right)\frac{v\left(\eta + \frac{\Delta\eta}{2}\right) - v\left(\eta - \frac{\Delta\eta}{2}\right)}{\Delta\eta} =$$

$$= \frac{u\left(\eta + \frac{\Delta\eta}{2}\right)v\left(\eta + \frac{\Delta\eta}{2}\right) - u\left(\eta - \frac{\Delta\eta}{2}\right)v\left(\eta - \frac{\Delta\eta}{2}\right)}{\Delta\eta} -$$

$$-v(\eta - \Delta\eta)\frac{u\left(\eta + \frac{\Delta\eta}{2}\right) - u\left(\eta - \frac{\Delta\eta}{2}\right)}{\Delta\eta}.$$

Второй аргумент $\Delta\eta$ нигде не выписан.

Полученная формула (6) — это и есть формула интегрирования по частям функций, заданных на многомасштабной, неархимедовой прямой.

2. Замена переменных

Пусть требуется вычислить интеграл от функции, заданной на вещественном масштабном уровне и первом микроуровне неархимедовой прямой: $F(\mathrm{X}) = F(x + \xi) = f(x, \xi)$,

$$(p,q)\int_{\alpha}^{\beta} F(\mathrm{X})\,d\mathrm{X} = (p,q)\int_{\alpha}^{\beta}\left[\frac{1}{l}\int_{-p}^{q} f(x,\xi)d\xi\right]\Delta x. \tag{7}$$

Здесь p, q и $l = p + q$ — известные функции координаты x. Мы хотели бы упростить вычисление интеграла путем замены переменных. Прежде всего отметим, что для вычисления внутреннего интеграла можно пользоваться всем арсеналом средств классического анализа, включая сюда, конечно, и замену переменной ξ. Новые моменты возникают при замене переменной x. Символ Δx (в пределе имеем $\Delta x = l$) не есть дифференциал, поэтому технику замены переменных необходимо изложить, не прибегая к понятию дифференциала. За образец возьмем процедуру замены переменной в классическом анализе. Ее можно изложить таким образом. Пусть требуется вычислить интеграл $\int_a^b \varphi(x)dx$. Если найти функцию $\Phi(x)$ такую, что

$$\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} = \varphi(x), \tag{8}$$

то интеграл равен $\Phi(b) - \Phi(a)$. Ничто не мешает представить искомую функцию $\Phi(x)$ как сложную функцию $\Phi(x) = \Psi(\sigma(x))$, где $\sigma(x)$ — подходящая функция аргумента x. Тогда имеем

$$\frac{\partial \Psi(\sigma(x))}{\partial \sigma(x)} = \frac{\varphi(x)}{\sigma'(x)}.$$

Часто функцию $\sigma(x)$ можно подобрать так, чтобы правая часть свелась к некоторой достаточно простой функции ψ от $\sigma(x)$: $\psi = \psi(\sigma(x))$. Тогда новое уравнение

$$\frac{\partial \Psi(\sigma)}{\partial \sigma} = \psi(\sigma)$$

может быть гораздо проще, чем исходное уравнение (8).

Обратимся теперь к задаче (7). Роль уравнения (8) в данной задаче играет уравнение

$$\frac{\Phi(x + l(x)) - \Phi(x)}{l(x)} = \frac{1}{l(x)} \int_{-p(x)}^{q(x)} f(x + p(x), \xi)\, d\xi = \varphi(x), \tag{9}$$

где $\Phi(x)$ — искомая функция. Будем искать решение как сложную функцию $\Phi(x) = \Psi(\sigma(x))$, где $\sigma(x)$ можно выбрать по своему усмотрению. В этом случае уравнение (9) перепишем следующим образом:

$$\frac{\Psi(\sigma(x) + \gamma(\sigma(x))) - \Psi(\sigma(x))}{\gamma(\sigma(x))} = \frac{l(x)}{\sigma(x + l(x)) - \sigma(x)}\varphi(x),$$

где $\gamma(\sigma(x)) = \sigma(x + l(x)) - \sigma(x)$. Пусть

$$\psi(\sigma(x)) = \frac{l(x)}{\sigma(x + l(x)) - \sigma(x)}\varphi(x).$$

Тогда новая задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\Psi(\sigma + \gamma(\sigma)) - \Psi(\sigma)}{\gamma(\sigma)} = \psi(\sigma). \tag{10}$$

Таким образом, процедура замены переменной x на σ приводит к замене задачи (9) на задачу (10). Если $l(x) \to 0$, то вся процедура переходит в классическую.

3. Формула для вычисления первого приближения интеграла

Основная трудность задачи интегрирования связана с решением разностного уравнения (9). Рассмотрим приближенное решение, связанное с заменой разностного уравнения на дифференциальное. Разложим левую часть (9) в несчетный ряд Тейлора:

$$\frac{\Phi(x + l(x)) - \Phi(x)}{l(x)} = \Phi'(x) + \frac{1}{2}\Phi''(x)\, l(x) + \ldots .$$

(Значения производных на микроуровнях получены непрерывным продолжением с вещественного уровня прямой.) Отбросим в правой части все слагаемые, кроме первого. В результате получим

$$\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} = \frac{1}{l(x)} \int\limits_{-p(x)}^{q(x)} f(x + p(x),\, \xi)\, d\xi. \tag{11}$$

Интеграл, вычисленный по данной формуле, т.е.

$$J = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{1}{l(x)} \int\limits_{-p(x)}^{q(x)} f(x + p(x),\, \xi) d\xi \right] dx, \tag{12}$$

назовем первым приближением интеграла (7). Для его вычисления можно использовать все методы классического анализа. Первое приближение (11), (12) легко обобщается на случай двойных, тройных и многократных интегралов.

Глава 9

Введение в неархимедову геометрию

В основу геометрических построений положим понятие числа. Понятие числа будем считать первичным по отношению к понятиям точки, прямой и плоскости. Это значит, что все геометрические объекты будем вводить как объекты, представляющие собой либо отдельные числа, либо их определенные совокупности. Следовательно, геометрию будем рассматривать как область математического анализа, в которой вводятся специальные классы эквивалентности и специальная терминология, имеющая своим источником определенные пространственные представления. Именно такой подход используется в аналитической, дифференциальной и других геометриях, построенных над полем вещественных чисел. Задача состоит в том, чтобы провести аналогичные построения в пространстве, осями координат которого являются неархимедовы прямые.

В качестве первого шага примем следующее определение: совокупность абсолютных рациональных чисел будем называть (абсолютной) рациональной прямой. Между рациональными числами есть линейный порядок. Именно данное свойство дает основание для того, чтобы указанную совокупность назвать прямой. Рациональную прямую можно дополнить до существенной прямой и затем до вещественной прямой. Данные прямые могут выступать в качестве координатных осей в двумерном, трехмерном или многомерном пространстве. Пусть K — размерность этого пространства. Значит, точка пространства — это некоторый набор K координат. С другой стороны, каждое вещественное число, если на него посмотреть с разрешением, которое дает неархимедов анализ, представляет собой образование бесконечной размерности. Пусть N — некоторая аппроксимация данной размерности. Ясно, что размерности указанных двух пространств имеют различную природу. Первое из указанных пространств (размерности K) будем называть внешним, а второе (размерности N) — внутренним. Данные пространства относятся к разным уровням математической реальности. Тем не менее одно из измерений у них является общим. Именно через данное измерение процессы, которые происходят во внутреннем пространстве, могут проявлять себя во внешнем пространстве.

Например, пусть $N = 2$. В качестве базиса внутреннего пространства возьмем два делителя нуля:

$$j_1 = \underset{v}{\text{limit}}\ \underset{n}{\text{Lim}}(1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0\ldots),$$

$$j_2 = \underset{v}{\text{limit}}\ \underset{n}{\text{Lim}}(0,\ 1,\ 0,\ 1\ldots).$$

Отсюда $j_1 + j_2 \equiv 1$. Следовательно, направление, которое можно назвать биссектрисой между осями Oj_1, Oj_2, совпадает с направлением координатной оси внешнего пространства. Данное направление будем называть магистральным. Подробнее роль этого направления рассмотрим в гл. 11. В настоящей главе ограничимся только геометрическими построениями во внешнем пространстве при $K = 2$, т.е. плоским случаем.

§ 41. Геометрические объекты на неархимедовой плоскости

Напомним основные посылки аналитической геометрии на плоскости. Пусть x, y — переменные, принимающие вещественные значения. Пары чисел (x_1, y_1), (x_2, y_2),... называются точками. Число, равное

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

называется расстоянием между точками (x_1, y_1), (x_2, y_2). Совокупности точек $(x, 0)$, $(0, y)$, (x, y) — это оси декартовых координат Ox, Oy и плоскость Oxy. Совокупности точек

$$ax + by = c,\ (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R^2,\ \ y = ax^2$$

называются прямой, окружностью и параболой. Все параметры a, b, c, R — некоторые вещественные числа. Аналогично вводятся и другие геометрические объекты. Далее исследуются их свойства и отношения между различными объектами [119], т.е. строится определенная геометрическая теория над полем вещественных чисел.

Что нового может дать переход к неархимедовой числовой системе? Будем действовать по аналогии. Пусть X, Y — переменные, принимающие существенные значения. Пары чисел $(\mathrm{X}_1, \mathrm{Y}_1)$, $(\mathrm{X}_2, \mathrm{Y}_2)\ldots$ будем называть точками, а число, равное

$$\sqrt{(\mathrm{X}_1 - \mathrm{X}_2)^2 + (\mathrm{Y}_1 - \mathrm{Y}_2)^2},$$

— расстоянием между точками $(\mathrm{X}_1, \mathrm{Y}_1)$, $(\mathrm{X}_2, \mathrm{Y}_2)$. Совокупность точек (X, Y) будем называть неархимедовой (или существенной) плоскостью, а совокупности точек (X,O), (O,Y) — осями декартовых координат в плоскости OXY.

Определение 41.1. *Геометрическим объектом будем называть класс эквивалентности совокупностей точек* (X,Y). *Совокупность может задаваться различными условиями типа равенств, неравенств, процедурами предельного перехода и т.д. Эквивалентными считаются совокупности, которые отображаются друг на друга с сохранением расстояний между точками.*

Неархимедова плоскость содержит в себе бесконечно много масштабных уровней. Поэтому для построения различных геометрических объектов открывается достаточно много различных возможностей. Рассмотрим некоторые из них.

Перенос геометрических объектов с обычной вещественной плоскости на неархимедову плоскость. Отметим значения X и Y, которые соответствуют ядрам вещественных чисел. Обозначим их через x^*, y^*. Совокупность точек (x^*, y^*) назовем вещественной решеткой (или каркасом) на неархимедовой плоскости.

Соотношение между архимедовой и неархимедовой плоскостями можно проиллюстрировать следующим образом. Пусть Oxy — обычная архимедова плоскость с декартовыми осями координат Ox, Oy. Отметим на плоскости все точки с целочисленными координатами (рис. 9.1). Эти точки образуют каркас, который погружен в пространство пар вещественных чисел. Мы можем построить некоторые геометрические образы, составленные из точек с целочисленными координатами. Ясно, что ничто не мешает рассматривать их как образы, принадлежащие и к плоскости Oxy. При этом возникает большой произвол в продолжении построенных образов на точки с нецелочисленными координатами.

Рис. 9.1 можно использовать для представления связи между точками неархимедовой и обычной архимедовой плоскости. Теперь отмеченные точки — это точки архимедовой плоскости, а вся плоскость — это уже неархимедова плоскость. При этом под вещественными числами необходимо понимать ядра вещественных чисел (x^*, y^*), т.е. вещественную решетку.

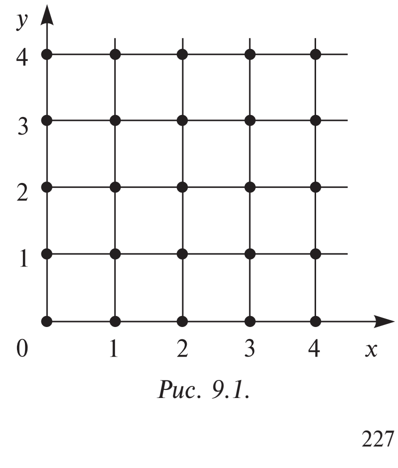

Рис. 9.1.

Аналогия, конечно, грубая, так как целочисленный каркас анизотропный. Он выделяет на плоскости Oxy избранные направления. Реальное же пространство изотропное. Изотропными являются и его арифметические модели. Поэтому в рассмотренной модели целочисленные координаты лучше заменить рациональными координатами. Тогда изотропия восстанавливается и мы имеем следующую цепочку: пространство точек с рациональными координатами образует каркас в архимедовом (вещественном) пространстве; архимедово пространство, в свою очередь, образует каркас в неархимедовом пространстве.

Целочисленная решетка покрывает плоскость подобно сети с ячейками определенного размера. Внутри данных ячеек можно поместить неограниченное число подобных решеток, которые не будут иметь между собой общих точек. Например, можно поместить решетки с координатами $(n_1 + a; n_2 + b)$, где n_1, n_2 — целые, а $0 < a, b < 1$ — дробные числа.

С другой стороны, вещественная решетка (x^*, y^*) покрывает неархимедову плоскость как сеть с размером ячеек, который можно оценить любым актуальным бесконечно малым числом. В промежутки между узлами сети можно поместить сколько угодно подобных решеток. Например, решетки $(x^* + \alpha, y^* + \beta)$, где $0 < \alpha, \beta \leq E$. Поле ядер вещественных чисел изоморфно полю вещественных чисел. Поэтому все результаты геометрических теорий, построенных над полем вещественных чисел, переносятся без изменений на вещественную решетку неархимедовой плоскости.

Новый момент возникает только в понимании данных результатов. Раньше (на вещественной плоскости Oxy) мы считали, что, например, окружность $x^2 + y^2 = 1$ представляет собой сплошную кривую (рис. 9.2). Это значит, что нельзя было пройти по

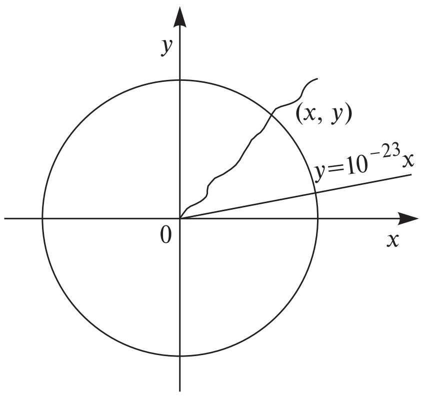

Рис. 9.2.

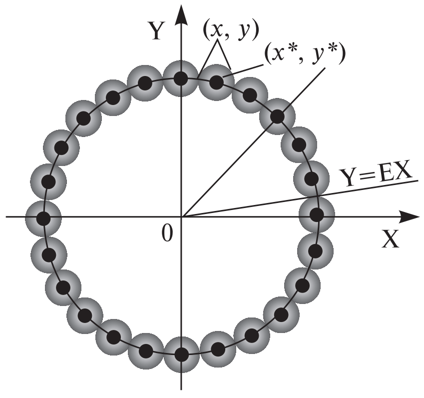

Рис. 9.3.

непрерывному пути из центра во внешние точки к окружности без пересечения самой окружности. Если окружность — препятствие на пути, то это было непреодолимое (непроницаемое) препятствие.

Теперь мы посмотрели на это препятствие с разрешением, которое дает анализ-2. Мы увидели, что каждая точка препятствия представляет собой ядро (x^*, y^*) и окружающий его ореол (рис. 9.3). На неархимедовой плоскости от вещественных чисел мы оставили только их ядра. Поэтому препятствие стало представлять собой совокупность точек (x^*, y^*), для которых

$$(x^*)^2 + (y^*)^2 = 1. \tag{1}$$

Это уже вполне проницаемое препятствие (рис. 9.4). Из центра во внешние точки можно попасть по многим непрерывным путям, например по лучам $\mathrm{Y} = (1 + \mathrm{E})\mathrm{X}$, $\mathrm{Y} = \mathrm{E}^{\omega}\mathrm{X}$. Все эти пути не задевают препятствие (1).

Любые геометрические отношения, построенные на вещественном каркасе, можно так или иначе продолжить на микро- и мегауровни неархимедова пространства. Здесь открывается чрезвычайно много возможностей. Некоторые из данных возможностей рассмотрим в подразделах 2–4 данного параграфа.

В заключение рассмотрим вопрос о полном переносе геометрических объектов с вещественной плоскости на неархимедову плоскость OXY. Имеется в виду, что переносятся не только объекты, соответствующие ядрам вещественных чисел, но и ореолы

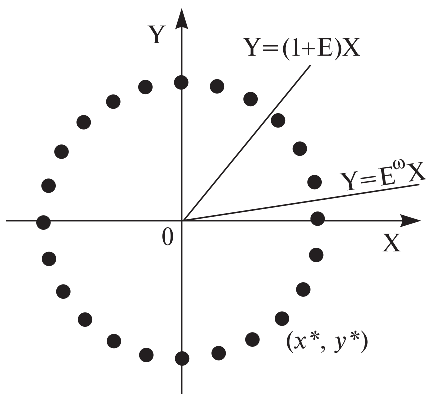

Рис. 9.4.

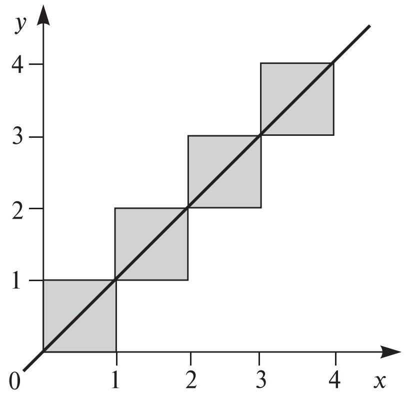

Рис. 9.5.

этих чисел. Обратимся к рис. 9.4 и уравнению (1). Заменим его на следующее:

$$(st\mathrm{X})^2 + (\mathrm{stY})^2 = 1. \tag{2}$$

Здесь $st\mathrm{X}$ — стандартная часть числа X: $st(3 + \mathrm{E}) = 3$, $st(3 + \omega) = \infty$, $st\mathrm{E} = 0$ (см. § 7). Объект (2) достаточно интересен. Здесь промежутки между точками каркаса заполнены не линией («мостом» между точками), а целой двумерной областью (см. рис. 9.3).

Представление о ней дает модель, которую можно изобразить на обычной вещественной плоскости. Пусть $y = f(x)$ — некоторая кривая на плоскости Oxy. Поставим ей в соответствие объект, координаты которого удовлетворяют уравнению $[y] = f([x])$. Если уравнение $y = f(x)$ не имеет целочисленных решений, то указанного объекта не существует. Но зато любому целочисленному решению отвечает полностью заполненный единичный квадрат, который принадлежит нашему объекту (рис. 9.5, $f(x) = x$).

«Графиком» «кривой» (2) будет «окружность», изображенная на рис. 9.3 «График» включает в себя не только ядра вещественных чисел, но и их ореолы. На плоскости OXY это будет полоса с размытой, неопределенной внешней границей. Точнее сказать, что ширина данной полосы измеряется в единицах E и является неопределенно большой (равна диаметру вещественного числа). В общем случае любая кривая $y = f(x)$ на плоскости OXY при переносе на неархимедову плоскость выглядит как $st\mathrm{Y} = f(st\mathrm{X})$. В результате мы получаем геометрию с линиями некоторой толщины. Самое интересное состоит в том, что наличие толщины не вносит в геометрию каких-либо осложнений. Например, если на плоскости вместо прямой мы имеем полосу шириной d, то пересечение двух таких полос под углом α должно дать «точку» площадью $d^2 / \sin\alpha$ (рис. 9.6).

Площадь не зависит от угла пересечения прямых только для двух крайних случаев: либо когда $d \to 0$, либо когда d неограниченно велико (крайности сходятся). В рассматриваемой ситуации мы имеем второй случай. Ясно, что внутри таких линий «с толщиной» можно поместить сколько угодно неархимедовых геометрических объектов, один из размеров которых имеет порядок актуальной бесконечно малой величины.

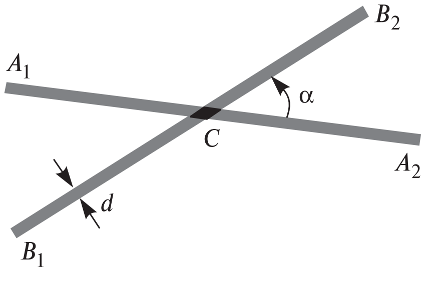

Рис. 9.6.

Интересно поставить вопрос: что вообще представляет собой евклидова геометрия (рассматриваемая как аналитическая геометрия над полем вещественных чисел), если на нее посмотреть с разрешением, которое дает анализ-2? Например, евклидова прямая есть геометрическое место точек, удовлетворяющее уравнению

$$a_{\text{вещ}} x_{\text{вещ}} + b_{\text{вещ}} y_{\text{вещ}} = c_{\text{вещ}}. \tag{3}$$

Индекс подчеркивает тот факт, что параметры и переменные суть вещественные числа. Точка «бесконечность» в состав прямой не включена. На неархимедовой плоскости OXY «размазанность» объекта (3) удобно зафиксировать явно, например путем представлений вида $a_{\text{вещ}} = a^* + \theta$, где $a^* = st(a_{\text{вещ}})$ — ядро числа $a_{\text{вещ}}$, а θ — числа ореола $a_{\text{вещ}}$. Фактически $\theta = 0_{\text{вещ}}$ или, точнее, θ — переменная, принимающая любые бесконечно малые значения.

Проведем в пространстве OXY сферу (окружность) радиусом ω. Можно утверждать, что все прямые (3) целиком находятся внутри данной сферы. Здесь же находятся и другие объекты евклидовой геометрии. Иными словами, весь мир евклидовой геометрии ограничен сферой радиуса ω.

Согласно аксиоме Евклида, через две точки проходит только одна прямая. Возьмем точки

$$A(0_{\text{вещ}}, 0_{\text{вещ}}) \text{ и } B(0_{\text{вещ}}, 1_{\text{вещ}}). \tag{4}$$

Через данные точки проходит единственная евклидова прямая

$$y_{\text{вещ}} = 0_{\text{вещ}}. \tag{5}$$

С другой стороны, через точки (4) можно провести сколько угодно (пучок) неархимедовых прямых. Возьмем две характерные прямые из этого пучка:

$$\mathrm{Y} = 0_{\text{сущ}} \text{ и } \mathrm{Y} = \mathrm{E} \cdot \mathrm{X}. \tag{6}$$

Если данные прямые наблюдать со степенью разрешения, принятой в анализе-1, то в области конечных чисел (заведомо внутри сферы радиуса ω) прямые (6) не различаются между собой и не отличается от евклидовой прямой (5). Однако при бо́льшем удалении от начала координат начинают проявляться качественно новые эффекты: прямая (5) вдруг исчезает из поля зрения (она заканчивается раньше), а различие между прямыми (6) становятся заметными. Например, при $\mathrm{X} = \omega$ ординаты прямых (6) отличаются на 1, при $\mathrm{X} = \omega^2$ отличие в ординатах равно ω и т.д. Становится очевидным, что через точки *A* и *B* проходит бесконечно много прямых, образующих пучок. Ограничимся указанными замечаниями и перейдем к рассмотрению других классов геометрических объектов на неархимедовой плоскости.

Продолжение по непрерывности. Отметим, что на самом вещественном каркасе может быть задана евклидова метрика или различные варианты неевклидовых метрик. Наиболее простой вариант состоит в том, чтобы данные метрики продолжить на микро- и мегаобласти «по непрерывности». Выше мы остановились на евклидовой метрике. Обсудим вопрос о непрерывном продолжении. Пусть $y = f(x)$ — уравнение некоторой кривой на обычной плоскости Oxy. На плоскости OXY ей соответствует совокупность точек вещественной решетки $y^* = f(x^*)$. Определим новый геометрический объект $\mathrm{Y} = F(\mathrm{X})$ на плоскости OXY так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$F(x^*) = f(x^*);$$

если $\mathrm{X} = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} x_n^*$, то положим

$$F(\mathrm{X}) = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} F(x_n^*)\ ;$$

если $\mathrm{X} = \operatorname*{limit}_{v\to\infty} \mathrm{X}(v)$, где $\mathrm{X}(v) = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} x_n^*(v)$, то положим

$$F(\mathrm{X}) = \operatorname*{limit}_{v\to\infty} F(\mathrm{X}(v)).$$

Считаем, что все пределы существуют и принадлежат прямым OX или OY. Об объекте, построенном по указанным правилам, будем говорить, что он является непрерывным продолжением объекта $y = f(x)$ с вещественной плоскости на неархимедову плоскость. Например, непрерывным продолжением окружности (1) является окружность (рис. 9.7 $R = 1$)

$$\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 = 1.$$

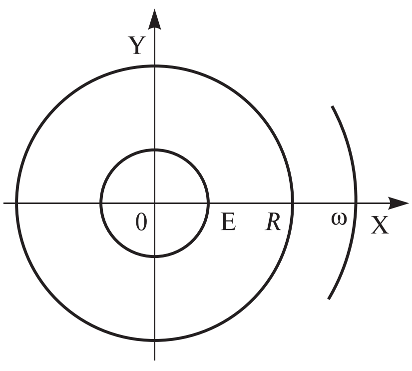

Рис. 9.7.

Последняя является уже непроницаемым препятствием для любых непрерывных путей, ведущих из начала координат во внешние к кругу точки. Все результаты, полученные в геометрии над полем вещественных чисел, переносятся без изменений на неархимедовы объекты, продолженные по непрерывности. Следовательно, условие согласованности для неархимедовой геометрии выполняется: в неархимедовой геометрии есть класс геометрических объектов, для которых все результаты архимедовых теорий сохраняются без изменений.

Геометрические объекты с параметрами, равными бесконечно большим или бесконечно малым числам. Обратимся к объектам, которые получены непрерывным продолжением с вещественного масштабного уровня. Все параметры, которые фигурируют в их описании, могут быть числами только вещественного уровня. Ничто, однако, не мешает рассмотреть аналогичные объекты с параметрами, принадлежащими другим уровням неархимедовой прямой. Например, прямая

$$\mathrm{Y} = 1 + k\mathrm{X}$$

при k, равном ядру вещественного числа, это непрерывное продолжение прямой $y^* = 1 + kx^*$. Однако если $k = (-\mathrm{E})$ или $(-\mathrm{E}^{\omega})$, то это уже новые объекты, а именно прямые

$$\mathrm{Y} = 1 - \mathrm{EX},\ \mathrm{Y} = 1 - \mathrm{E}^{\omega}\mathrm{X}. \tag{7}$$

Данные объекты достаточно интересны. Мы рассматриваем евклидову геометрию, поэтому параллельно прямой OX через точку (0, 1) можно провести только одну прямую. Это будет прямая Y = 1. Все остальные прямые $\mathrm{Y} = 1 - k\mathrm{X}$ при $k \neq 0$ пересекают ось OX. Аналогичная ситуация имеет место и на архимедовой плоскости Oxy. Однако в неархимедовом случае в вопросе о параллельных появляется новое обстоятельство. Все прямые, не параллельные OX, естественным образом разбиваются на два качественно различных класса (рис. 9.8). Первый класс — прямые, пересекающие ось OX в конечных точках, например прямые Y = 1 – 2X или $\mathrm{Y} = 1 - 10^{-23}\mathrm{X}$. Второй класс — прямые, которые пересекают ось в бесконечно удаленных точках, например прямые (3).

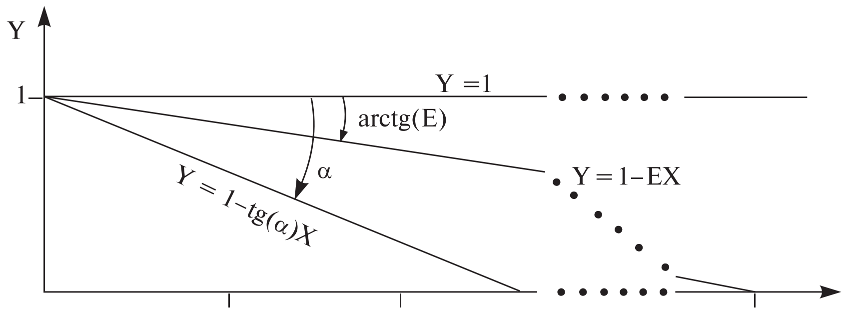

Рис. 9.8.

Другой пример — это окружности бесконечно малого или бесконечно большого радиуса (см. рис. 9.7):

$$\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 = \mathrm{E}^2, \;\; \mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 = \omega^2.$$

Данные объекты размещаются либо на микромасштабных уровнях плоскости, либо на ее мегауровнях. Нетрудно доказать, что на все подобные объекты переносятся все теоремы, полученные в геометрии над полем вещественных чисел. Отличие будет состоять только в том, что там, где раньше в результатах фигурировали только вещественные параметры, теперь могут фигурировать также числа E, ω и др.

Разрывные продолжения. Следующие классы объектов можно получать путем постепенного ослабления условий непрерывности. Возьмем, например, эллипс, построенный на вещественном каркасе:

$$\frac{(x^*)^2}{a^2} + \frac{(y^*)^2}{b^2} = 1. \tag{8}$$

Его непрерывным продолжением будет эллипс

$$\frac{\mathrm{X}^2}{a^2} + \frac{\mathrm{Y}^2}{b^2} = 1. \tag{9}$$

Однако можно построить и сколько угодно разрывных продолжений, например

$$\frac{(st\mathrm{X})^2}{a^2} + \frac{\mathrm{Y}^2}{b^2} = 1, \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{X}^2}{a^2} + \frac{(st\mathrm{Y})^2}{b^2} = 1. \tag{11}$$

Во всех примерах при значениях $\mathrm{X} = x^*$, $\mathrm{Y} = y^*$ имеем эллипс (8). В случае (9) промежутки между точками каркаса (8) заполнены непрерывным продолжением эллиптической кривой. Поэтому все свойства эллипса сохраняются и на любых микроуровнях. В случае (10) промежутки заполнены горизонтальными отрезками, т.е. локально «эллипс» представляет собой набор горизонтальных отрезков. Аналогично объект (11) представляет собой набор вертикальных отрезков.

Геометрические объекты фрактального типа. Следующие классы геометрических объектов можно получить, используя их описание через соответствующие функции, в частности функции вида

$$\mathrm{Y} = F(\mathrm{X}) = f(\eta_m, \ldots x, \xi_1, \ldots \xi_\nu \ldots),$$

где

$$X = \eta_m + \ldots + x + \xi_1 + \ldots + \xi_\nu + \ldots .$$

Например, можно положить

$$F(X) = \eta_\omega^2 + \ldots + x^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_\nu^2 + \ldots . \tag{12}$$

На любом фиксированном масштабном уровне график (12) представляет собой квадратичную параболу. Однако от параболы

$$Y = X^2 \tag{13}$$

парабола (12) отличается принципиально. Локально парабола (13) выглядит как прямая (локально как прямая выглядит любая гладкая кривая). Кривая же (12) является параболой на любом масштабном уровне. В связи с этим функции вида (12) можно назвать функциями фрактального типа.

В неархимедовом пространстве можно использовать все методы, которые применяются для построения фракталов на обычной (т.е. архимедовой) плоскости. Кроме того, здесь появляются дополнительные возможности, связанные с многомерностью и многомасштабностью неархимедовых переменных. Большие возможности связаны также с использованием пределов в смысле Lim. В частности, для описания факторов можно использовать итерационные процессы, реализованные для любого актуально бесконечного числа шагов. Например, пусть X, Y принадлежат многомерной области существенных чисел. Их декартово произведение образует пространство (X, Y). Пусть A_0 — некоторая точка этого пространства с координатами (X_0, Y_0). Предположим, что мы располагаем некоторым оператором F с достаточно широкой областью определения. Оператор F переводит точку A_0 в точку A_1, затем в точку A_2 и т.д. На шаге номер n имеем

$$A_n = F^n A_0 = F A_{n-1},$$

где F^n — n-я степень оператора F. Если F соответствует одной итерации, то в неархимедовом анализе можно рассматривать как завершенный результат любого актуально бесконечно большого числа итераций. Например, через ω итераций придем к конкретной точке

$$A_\omega = \operatorname*{Lim}_{n\to\omega} F^n A_0 = F^\omega A_0 .$$

Характеристики точек A_ω можно использовать для выделения определенных множеств стартовых точек A_0. Для весьма широкого класса операторов F и условий на A_ω выделенное множество точек A_0 будет иметь фрактальную структуру. Для подтверждения достаточно сослаться на множества Жюлиа комплексного квадратичного отображения [115].

Действительно, исключим вначале все эффекты, связанные с многомерностью области существенных чисел. Пусть X, Y принадлежат неархимедовой прямой, а точки $A_0,\ldots A_\omega\ldots$ — к неархимедовой плоскости OXY (это ограничение относится уже к оператору F). Положим $\mathrm{Z} = \mathrm{X} + i\mathrm{Y}$ и зададим оператор F условием

$$\mathrm{Z}_{n+1} = \mathrm{Z}_n^2 + C, \;\; C = \mathrm{const}, \; n = 0, 1\ldots \omega,\ldots \tag{14}$$

В классическом анализе заполненное множество Жюлиа определяется как множества стартовых точек, для которых итерации (14) остаются ограниченными при $n \to \infty$. В неархимедовом анализе то же самое условие сводится к требованию ограниченности конечным числом модуля $|Z_\omega|$.

Многомасштабность неархимедовой переменной позволяет строить свои фракталы на каждом из масштабных уровней. Возьмем два уровня:

$$\mathrm{X} = x + \xi; \;\; \mathrm{Y} = y + \eta, \tag{15}$$

где x, y — ядра вещественных чисел, ξ, η — актуальные бесконечно малые. Пусть оператор F задается двумя функциями четырех переменных:

$$\begin{aligned} x' + \xi' &= f(x, \xi, y, \eta), \\ y' + \eta' &= g(x, \xi, y, \eta). \end{aligned} \tag{16}$$

Штрихами обозначен образ точки (15). Если

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial \xi} = 0, \;\; \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, \\ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial \xi} = 0, \;\; \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial \eta} = 0, \end{aligned} \tag{17}$$

то функции зависят не от четырех, а только от двух аргументов. Поэтому многомасштабность фактически не проявляется. Преобразование (14) относится именно к этому типу. Ослабим условия (17). Пусть

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y), \tag{18}$$

$$\xi' = \varphi(x, y, \xi, \eta), \quad \eta' = \varphi(x, y, \xi, \eta). \tag{19}$$

Согласно (18), реперные точки с координатами, равными ядрам вещественных чисел, переходят в реперные же точки. Следовательно, в качестве (18) можно взять преобразование (14) или любые другие преобразования, которые строятся на обычной (архимедовой) плоскости. Для преобразования ореолов (19) можно использовать преобразование того же типа, что и для вещественной решетки (18). Однако ничто не мешает рассмотреть и более общие случаи, когда берутся преобразования других типов. Здесь появляется слишком много возможностей. Для упрощения можно поставить условие «неперемешивания ореолов и стандартных частей за любое конечное число итераций». Имеется в виду следующее. Если стандартная часть координат (X, Y) преобразуется по правилу (18), т.е. точка (x, y) переходит в точку (x', y'), то ореол точки (x, y) должен переходить в ореол точки (x', y'). Возьмем за основу комплексное квадратичное отображение (14). Тогда условию «неперемешивания за конечное число шагов» будет удовлетворять следующее отображение (19):

$$\xi' = \omega(\xi^2 - \eta^2) + \mathrm{E} \cdot P(x, y),$$
$$\eta' = 2\omega\xi \cdot \eta + \mathrm{E} \cdot Q(x, y),$$

где $P + iQ = C$ — параметр, возможно зависящий от положения реперной точки (x, y), P, Q — ядра вещественных чисел.

Таким образом, в неархимедово пространство можно перенести любые фракталы, которые возможны в обычном архимедовом пространстве. Кроме того, здесь открываются качественно новые возможности, связанные с наличием бесконечного числа масштабов и измерений самих неархимедовых осей координат.

§ 42. Измерение углов касания

Пусть x, y — обычные вещественные переменные и Oxy — обычная (т.е. архимедова) плоскость. Пусть $y = f(x)$, $g(x)$ — графики двух гладких функций, которые проходят через начало координат. Предположим, что существует рациональное число $\delta(g, f) > 0$ такое, что при $0 < x < \delta$ знак $f(x) - g(x)$ не меняется. Значит, при $0 < x < \delta$ либо $f(x) > g(x)$, либо $f(x) < g(x)$. Область между графиками функций при $0 < x < \delta$ называется углом, точка (0, 0) — его вершиной, а графики $f(x)$, $g(x)$ — сторонами угла.

Проблема состоит в том, чтобы найти меру подобных углов. Обозначим меру через $\alpha(g, f)$. Величина окрестности δ значения не имеет, поэтому параметр δ в обозначении меры не фигурирует. Везде имеется в виду то, что мы работаем в пределах δ-окрестности. Мера углов должна удовлетворять условиям:

1^0. $\alpha(g, f) = -\alpha(f, g)$. Если $f(x) > g(x)$, то $\alpha(g, f) > 0$.

2^0. Расширим понятие угла на случай, когда $f(x) \equiv g(x)$. Положим по определению, что $\alpha(f, f) = 0$.

3^0. Мера угла должна удовлетворять также условию согласованности:

для угла, образованного двумя лучами

$$g(x) \equiv 0,\ f(x) = \mathrm{tg}\beta \cdot x, \tag{1}$$

мера должна давать общепринятое значение, т.е. величину β:

$$\alpha(0;\ \mathrm{tg}\beta x) = \beta. \tag{2}$$

4^0. Кроме того, мера должна удовлетворять условию аддитивности: если $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ — три функции, удовлетворяющие указанным выше условиям, то

$$\alpha(h,g) + \alpha(g,f) = \alpha(h,f).$$

Таким образом, для прямолинейных углов решение задачи дается формулой (2). Проблема, как известно, возникает, когда стороны угла в вершине имеют общую касательную. Ниже достаточно ограничиться случаем, когда $g(x) \equiv 0$ и $f(x) \geq 0$.

Например, пусть $f(x) = x^2$ (рис. 9.9). Такой угол (угол касания, или роговидный угол) меньше угла вида (1) для любого вещественного числа $\beta > 0$. Значит, его величина — это некоторое актуальное бесконечно малое число. Какое именно?

Теперь у нас все готово для того, чтобы дать ответ на этот вопрос, восходящий к [1]. Прежде всего заменим все вещественные числа их ядрами и перенесем измеряемый угол в неархимедову плоскость (рис. 9.10). Конечно, вместе с углом в неархимедову плоскость

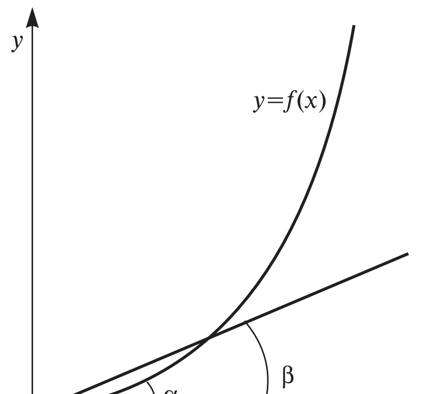

Рис. 9.9.

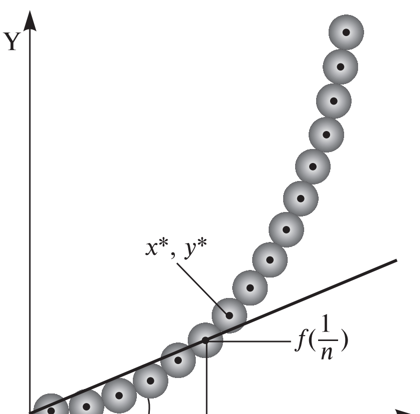

Рис. 9.10.

OXY мы переносим и всю архимедову плоскость Ox^*y^* в качестве каркаса, или реперной «сетки». Теперь стороны угла уже не выглядят как сплошные линии. Возьмем счетную последовательность значений аргумента $X_n = \frac{1}{n}$. Значения аргумента и функции являются безразмерными. В качестве меры угла примем значение

$$\alpha = \operatorname*{Lim}_{n \to \omega} \operatorname{arctg} n \cdot f\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3}$$

Мера (3) удовлетворяет всем указанным выше условиям.

Посмотрим теперь, что она дает в конкретных случаях. Во-первых, определим угол, который имеет меру, равную эталонному бесконечно малому числу E. Из уравнения $\alpha = \mathrm{E}$, или

$$\operatorname{arctg} n f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

сразу получаем, что $f(x) = x\operatorname{tg}x$. Далее, пусть $y = kx^2$. Тогда

$$\alpha = \operatorname*{Lim}_{n \to \infty} \operatorname{arctg} n \frac{k}{n^2} = \operatorname{arctg}(k \cdot \mathrm{E}). \tag{4}$$

Меньшему (положительному) значению k соответствует меньший угол. Но при любом $k > 0$ углы (4) будут всегда больше углов, образованных осью $y = 0$ и кривой $y = m \cdot x^3$. Здесь имеем

$$\alpha = \operatorname{arctg}(m \cdot \mathrm{E}^2)$$

и т.д. Интересно посмотреть угол между осью $y = 0$ и окружностью радиусом R:

$$(y - R)^2 + x^2 = R^2.$$

Именно об этом угле речь идет в «Началах» Евклида [1]. Формула (3) дает

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{R}{\mathrm{E}}\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\mathrm{E}}{R}\right)^2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\mathrm{E}}{2R} + \frac{\mathrm{E}^3}{8R^3} + \ldots\right). \tag{5}$$

Таким образом, мы сталкиваемся с новым феноменом. Оказывается, величина угла становится зависимой от масштаба длины. Причем если мы имеем углы типа (1), то масштаб длины в формуле (3) сокращается. Однако если углы, например, являются углами касания, то мера угла становится зависимой от масштаба длины. Таким образом, если угол образован прямолинейными лучами, то изотропное растяжение плоскости величину угла не меняет. Однако в общем случае (3) это не так: изотропное растяжение плоскости приводит к уменьшению углов касания (роговидных углов).

Итак, формула (3) дает решение проблемы измерения роговидных углов. Их величины являются неархимедовыми. Они упорядочены между собой. Например, формула (5) показывает, что с уменьшением радиуса окружности угол увеличивается. Но до каких пределов можно уменьшать радиус окружности? В исходной постановке задачи мы рассматриваем углы, заданные в обычной архимедовой плоскости. Следовательно, радиус окружности — это любое положительное вещественное число. Это и есть ответ на поставленный вопрос. И формула (5) для любого $R > 0$, принадлежащего вещественному масштабному уровню, дает вполне адекватный результат.

А что она даст, если формально применить ее, например, к углу, образованному прямой и окружностью бесконечно малого радиуса $R = \mathrm{E}$? Из формулы сразу следует, что $\alpha = \pi / 4$. Смысл результата виден из рис. 9.11.

Поясним его. Если мы допускаем значения $R = \mathrm{E}$, то значит рассматриваем графики неархимедовых функций. Их графики располагаются на неархимедовой плоскости. Поэтому и исходную задачу необходимо сформулировать уже именно для этого случая. Итак, пусть $\mathrm{Y} = F(\mathrm{X})$ — график неархимедовой функции, заданной на существенной прямой OX. График получен непрерывным продолжением с архимедовой плоскости:

$$F(\mathrm{O}) = 0, \;\; F(\mathrm{X}) > 0 \quad \text{при} \quad \mathrm{X} > 0. \tag{6}$$

На неархимедовой плоскости формула (3) означает не что иное, как определение угла наклона секущей линии к графику $F(\mathrm{X})$. Именно секущей, проходящей через начало координат и точку $(\mathrm{E}, F(\mathrm{E}))$.

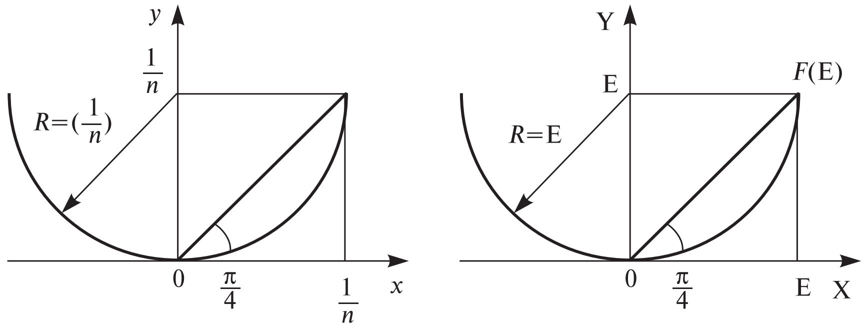

Рис. 9.11.

Ясно, что такая секущая угол в целом уже не характеризует. Попытки поиска адекватной характеристики показывают, что в рамках неархимедова анализа со степенью разрешения 2 это невозможно. Необходим переход к неархимедову анализу с более высокой степенью разрешения (см. гл. 13), т.е. к анализу-3. В рамках анализа-3 можно измерить углы (6). Однако если угол (6) продолжить по непрерывности на неархимедову плоскость-3, то для измерения таких углов необходимо будет построить анализ-4. И так далее до бесконечной степени разрешения, затем — к анализу со степенью разрешения на единицу больше и т.д. — до теорий, степень разрешения которых уже не поддается никакому воображению.

Таким образом, проблема измерения роговидных углов приобретает какой-то совершенно особый смысл. Для своего разрешения она все время требует перехода к математической реальности все более высокого плана.

Действительно, вначале мы располагаем обычной вещественной прямой и геометрией Евклида на обычной архимедовой плоскости. На ней есть прямые, окружности, а также углы, образованные окружностями и касательными к ним прямыми. При этом радиус окружности — положительное вещественное число. Когда мы разглядываем чертеж, нам кажется, что теоретически угол, образованный окружностью и касательной прямой, является «бесконечно» острым. Но что значит «теоретически»? Эта теория имеет разрешающую способность 1 и относится к архимедовой плоскости. Если мы переходим к неархимедовой (существенной) плоскости, то видим, что то, что мы считали точкой, т.е. объектом, «не имеющим частей», теперь превратилось в туманности. В центре ее находится ядро. Ядро окружено ореолом с размытой внешней границей. Теперь на новой плоскости мы угол должны изобразить так, как показано на рис. 9.10. Здесь уже ни о какой «предельной» его остроте речи идти не может. Задача измерения таких углов не может быть решена в рамках архимедовой числовой системы, удовлетворяющей Первой аксиоме разрешения. Для измерения таких углов мы должны перейти к неархимедовой числовой системе, имеющей степень разрешения 2 (т.е. удовлетворяющей Второй аксиоме разрешения).

Новой числовой системе соответствует новая неархимедова плоскость — плоскость-2. На ней есть свои прямые, окружности и углы, образованные окружностями и касательными к ним прямыми. Что означает переход к прямым и окружностям в неархимедовой плоскости? Он означает, что мы отбрасываем все ореолы вещественного числа и оставляем только их ядра (см. рис. 9.10). От прежних непрерывных сторон угла на архимедовой плоскости остались только ядра и ничем не заполненные промежутки между ними. Выписывая уравнения типа (6), мы заполняем эти промежутки по непрерывности. (Могли бы заполнить и по-другому. Получили бы другие объекты.) Снова имеем угол, который выглядит как «предельно» острый. Для радиусов окружностей теперь допускаются значения, равные актуальным бесконечно малым числам из числовой системы 2. Например, $R = \mathrm{E} = 1/\omega$ или $R = \mathrm{E}^{\omega} = 1/\omega^{\omega}$ и т.д. Однако измерить такие углы в рамках неархимедовой числовой системы 2 невозможно. Необходим переход к теории со степенью разрешения 3 и т.д.

Таким образом, проблема измерения роговидных углов приобретает роль вечного стимула, требующего построения иерархии математических теорий, имеющих все большую разрешающую способность.

§ 43. Длина кривой

Пусть $\mathrm{Y} = F(\mathrm{X})$ — некоторая функция, заданная на неархимедовой плоскости $\mathrm{OXY}, \alpha \leq \mathrm{X} \leq \beta$. Совокупность пар точек $(\mathrm{X}, F(\mathrm{X}))$ на плоскости OXY будем называть графиком функции. График функции будем также называть линией или кривой. Можно поставить вопрос о длине этой линии. Под длиной будем понимать значения определенных интегралов, которые рассмотрим ниже. Интегралы зависят от дополнительных условий, обеспечивающих их существование и уточняющих их смысл. Будем считать, что данные условия уточняют также и принятое выше определение самой линии и определение ее длины.

График задан на вещественном и первом мегауровне неархимедовой прямой. Вначале рассмотрим случай, когда функция определена на вещественном и первом мегауровне неархимедовой прямой, т.е. при

$$\mathrm{X} = x_{-1}\omega + x = \eta + x, \; F(\mathrm{X}) = f(\eta, x).$$

Пусть интервал $[\alpha, \beta]$ целиком принадлежит одному масштабному уровню прямой, например $\alpha = 3\omega$, $\beta = 3\omega + 2$. Тогда под длиной кривой будем понимать значение интеграла

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + f_x^2(\eta, x)}\, dx. \qquad (1)$$

Здесь η — фиксированная величина, играющая роль параметра. Интеграл (1) является обычным интегралом для вычисления длины достаточно гладкой кривой [116]. Тот факт, что в выражениях (1), как правило, будут присутствовать числа ω и Ε, никаких трудностей ни в технике вычисления, ни в понимании результатов не вызывает.

Теперь мы хотим рассмотреть случай, когда отрезок интегрирования захватывает два масштабных уровня прямой. Положим

$$\alpha = \eta_\alpha + x_\alpha, \ \ \beta = \eta_\beta + x_\beta,$$

где $\eta_\beta > \eta_\alpha$. Формула (1) позволяет подсчитать интеграл по x при фиксированных значениях $\eta = \eta_\alpha, \eta_\beta$. Поэтому ниже можно считать, что $x_\alpha = -p$, $x_\beta = q$, где, как и прежде, p, q — расстояния до точки горизонта на вещественном уровне прямой, $l = p + q$. В этом случае под длиной кривой будем понимать значение интеграла

$$L = (p,q)\int\limits_\alpha^\beta \left[\frac{1}{l} \int\limits_{-p}^{q} \sqrt{1 + f_x^2(\eta, x)}\, dx \right] \Delta\eta. \qquad (2)$$

Остановимся на частном случае, когда

$$\frac{\partial f(\eta, x)}{\partial \eta} - \frac{\partial f(\eta, x)}{\partial x} \equiv 0. \qquad (3)$$

Условие (3) является достаточным для того, чтобы функция $F(\mathrm{X}) = f(\eta, x)$ была непрерывной при переходе аргумента с одного масштабного уровня на другой. Именно в этом случае формула (2) переходит в классическую формулу. Таким образом, условие согласованности построений здесь выполняется.

Предположим, что в силу каких-то причин горизонт стал сужиться до точки. Тогда имеем $p, q \to 0$ и в пределе получаем

$$L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{1 + f_x^2(\eta, 0)}\, d\eta. \qquad (4)$$

Формула (4) почти совпадает с привычной формулой для длины кривой. Отличие состоит только в том, что производная берется по переменной x, а интегрирование проводится по переменной η. Данное отличие является принципиальным. Это будет видно также из примеров, которые рассмотрены ниже.

График задан на вещественном и первом микроуровне неархимедовой прямой. Пусть функция $F(\mathrm{X})$ определена на вещественном и первом микроуровне неархимедовой прямой, т.е.

$$\mathrm{Y} = F(\mathrm{X}), \ \ \mathrm{X} = x + x_1\mathrm{E} = x + \xi, \ \ F(x + \xi) = f(x, \xi).$$

Все изложенные выше построения полностью переносятся на данную функцию, если переменные η, x заменить на x, ξ, а расстояния до точек горизонта p, q, l заменить на p_1, q_1, $l_1 = p_1 + q_1$. Запишем сразу окончательные формулы (индекс у параметров p_1, q_1, l_1 опущен). Длина кривой равна

$$L(l) = (p,q)\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[\frac{1}{l}\int\limits_{-p}^{q}\sqrt{1+f_{\xi}^{2}(x,\xi)}\,d\xi\right]\Delta x. \quad (5)$$

Если допускается переход к пределу $p,q \to 0$, то имеем

$$L = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+f_{\xi}^{2}(x,0)}dx. \quad (6)$$

Длина кривой с учетом вертикальных отрезков в точках разрыва. Выше длина кривой определялась без учета длины вертикальных отрезков, которые соответствуют скачкам функции в точках разрыва. Если кривую представить как линию, начертанную непрерывным движением карандаша, то при подсчете общей длины кривой ее вертикальные отрезки учитываться должны. Для такого учета есть еще одна причина. Длина кривой — это функционал, который задается на разрывной функции. В большинстве задач величины разрывов имеют определенный физический смысл и оказывают влияние на развитие того или иного процесса. Поэтому если описание процесса осуществляется на языке вариационных принципов, то соответствующие функционалы должны зависеть не только от самой функции и ее производных, но и от величин разрывов функции. Описание длины кривой с учетом длины вертикальных отрезков можно рассматривать как образец для конструирования функционалов, учитывающих скачки функций (см. гл. 10).

Итак, пусть кривая представляет собой график функции $\mathrm{Y} = F(\mathrm{X})$. В случае функции, разрывной по типу 2, формула (1) легко обобщается по той же процедуре, что и в классическом анализе. Данные разрывы аналогичны разрывам функции, заданной на обычной вещественной прямой.

Рассмотрим теперь разрывы нового типа, именно те, которые возникают на стыке различных масштабных уровней прямой.

Пусть функция задана на вещественном и первом мегауровне прямой: $F(\mathrm{X}) = f(\eta, x)$,

$$\alpha = \eta_0 - p \le \mathrm{X} \le \beta = \eta_e + q.$$

Примем во внимание разрывы, которые реализуются только на внутренних точках данного интервала при

$$\mathrm{X} = \eta_0 + q,\ \eta_0 + q + l, \ldots \eta_e - p. \quad (7)$$

Величина разрыва в точке $X = \eta_0 + q$ равна

$$R = f(A_1) - f(B_0) = f(\eta_0 + l, -p) - f(\eta_0, q).$$

Обозначим сумму модулей разрывов по всем внутренним точкам (7) через S:

$$S = \left|f(\eta_0 + l, -p) - f(\eta_0, q)\right| + \left|f(\eta_0 + 2l, -p) - f(\eta_0 + l, q)\right| + \ldots +$$

$$+\left|f(\eta_e, -p) - f(\eta_e - l, q)\right|.$$

Используя введенное выше обозначение, можно записать

$$S = (p, q)\int\limits_{\eta_0}^{\eta_e} \left|\frac{f(\eta + q, -p) - f(\eta - p, q)}{l}\right| \Delta\eta.$$

Если p, $q \to 0$, то

$$S = \int\limits_{\eta_0}^{\eta_e} \left|\frac{\partial f(\eta, 0)}{\partial \eta} - \frac{\partial f(\eta, 0)}{\partial x}\right| d\eta.$$

Таким образом, длина кривой, соответствующей графику функции $Y = f(\eta, x)$, с учетом вертикальных отрезков равна

$$L + S = (p, q)\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[\frac{1}{l}\int\limits_{-p}^{q}\sqrt{1 + f_x^2(\eta, x)}\, dx\right]\Delta\eta +$$

$$+(p, q)\int\limits_{\eta_0}^{\eta_e}\left|\frac{\partial f(\eta + q, -p) - f(\eta - p, q)}{l}\right| \Delta\eta.$$

При $p \to 0$, $q \to 0$ имеем

$$L + S = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1 + f_x^2(\eta, 0)}d\eta + \int\limits_{\eta_0}^{\eta_e}\left|\frac{\partial f(\eta, 0)}{\partial \eta} - \frac{\partial f(\eta, 0)}{\partial x}\right| d\eta.$$

Здесь

$$\alpha = \eta_0 - p, \ \beta = \eta_e + q.$$

Рассмотрим теперь функцию $F(X)$, определенную на вещественном масштабном уровне и первом микроуровне (рис. 9.12). Это

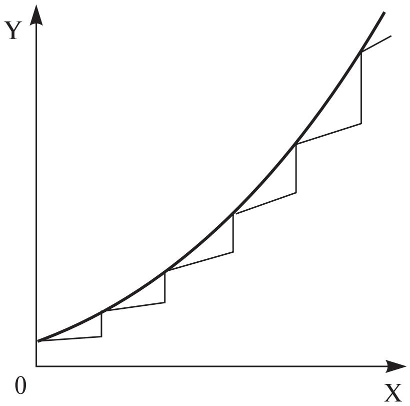

Рис. 9.12.

основной случай для приложений. Здесь

$$X = x + x_{-1}E = x + \xi;$$
$$F(X) = f(x, \xi),$$
$$\alpha = x_0 - p_1 \le X \le \beta = x_e + q_1.$$

Все рассмотренные построения переносятся сюда без изменений. Только переменная η заменяется на x, переменная x на ξ, а l, p, q на l_1, p_1, q_1 (индекс «1» будем опускать). Тогда длина вертикальных отрезков равна

$$S = (p, q)\int_{x_0}^{x_e}\left|\frac{f(x+q, -p) - f(x-p, q)}{l}\right|\Delta x. \qquad (8)$$

Если p, q, $l \to 0$, то

$$S = \int_{x_0}^{x_e}\left|\frac{\partial f(x,0)}{\partial x} - \frac{\partial f(x,0)}{\partial \xi}\right| dx.$$

Длина кривой с учетом вертикальных отрезков дается формулой

$$L + S = (p, q)\int_{\alpha}^{\beta}\left[\frac{1}{l}\int_{-p}^{q}\sqrt{1 + f_\xi^2(x, \xi)}d\xi\right]\Delta x +$$
$$+ (p, q)\int_{x_0}^{x_e}\left|\frac{f(x+q, -p) - f(x-p, q)}{l}\right|\Delta x.$$

Если p, q, $l \to 0$, то

$$L + S = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1 + f_\xi^2(x, 0)}dx + \int_{x_0}^{x_e}\left|\frac{\partial f(x,0)}{\partial x} - \frac{\partial f(x,0)}{\partial \xi}\right| dx.$$

Примеры. Рассмотрим примеры для графиков, заданных на вещественном уровне прямой и ее первом микроуровне.

Пример 1. Пусть

$$F(X) = F(x + x_1E) = F(x + \xi) = f(x, \xi) = g(x).$$

Это значит, что при фиксированном x и меняющемся ξ значения F не меняются. Значит, на микроуровне кривая $F(\mathrm{X})$ собрана из горизонтальных отрезков. По формуле (5)

$$L = (p, q)\int_{\alpha}^{\beta} \Delta x = \beta - \alpha. \tag{9}$$

Результат является предельно ясным. Он указывает на адекватность всех построений. Величина $\beta - \alpha$ представляет собой длину всех горизонтальных отрезков. Применяемый алгоритм интегрирования таков, что в результате предельных переходов длина интервала интегрирования исчерпывается полностью. Формула (9) оказалась независимой от параметра l. Поэтому при $l \to 0$ длина будет выражаться той же формулой. Интегрирование (6) приводит к тому же результату.

Рассмотрим теперь вертикальные отрезки. Пусть $g(x)$ — монотонно возрастающая функция. Тогда в (8) модуль можно отбросить. Отсюда сразу следует, что

$$S(l) = g(x_e) - g(x_0). \tag{10}$$

Смысл результата также ясен. Так как движение на микроуровне происходит по горизонтальным отрезкам, то любое увеличение значения $F(\mathrm{X})$ возможно только за счет движения по вертикальным отрезкам. Таким образом, приращение функции всегда совпадает с суммой ее скачков на разрывах. Именно это и показывает решение (10). От величины l результат не зависит. Общая длина кривой с учетом вертикальных отрезков равна

$$L + S = \beta - \alpha + g(x_e) - g(x_0).$$

Пример 2. Пусть функция на обоих масштабных уровнях является линейной:

$$F(\mathrm{X}) = F(x + \xi) = ax + b\xi,\ \ a, b = \mathrm{const}.$$

Тогда

$$L = \sqrt{1 + b^2}\,(\beta - \alpha).$$

Результат от l не зависит. Вычисление по предельной формуле дает то же самое выражение. Вертикальные отрезки определяем по формуле (8):

$$S = |a - b|(x_e - x_0).$$

Общая длина равна

$$L + S = \sqrt{1+b^2}\,(\beta - \alpha) + |a - b|(x_e - x_0).$$

При $a = b$ разрывов нет и последнее слагаемое равно 0.

Пример 3. Пусть

$$F(X) = g(x) + h(\xi). \tag{11}$$

Тогда

$$L = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{1}{l} \int\limits_{-p}^{q} \sqrt{1 + h_\xi^2(\xi)}\, d\xi \right] \Delta x.$$

Выражение в квадратных скобках от x не зависит, поэтому его можно вынести за знак интеграла. В результате получаем

$$L(l) = \frac{\beta - \alpha}{l} \int\limits_{-p}^{q} \sqrt{1 + h_\xi^2(\xi)}\, d\xi. \tag{12}$$

Данный результат имеет ясный смысл. Неформально его можно описать таким образом. При взгляде на график функции (11) невооруженным глазом мы видим кривую $g(x)$. Если же посмотреть на кривую (11) в микроскоп, то мы увидим, что вся она собрана из многократно повторенных кривых $h(\xi)$, $-p \le \xi \le q$. Второй сомножитель в формуле (12) представляет длину этой кривой, а первый — число данных кривых, «прикрепленных» к графику $g(x)$. Так как перенос кривой $h(\xi)$ как жесткого целого длину ее не меняет, то естественно, что в формулу (12) функция $g(x)$ не вошла. Оказалось, что длина кривой (11) от функции $g(x)$ вообще не зависит.

Если $l \to 0$, то формула (29) переходит в следующую:

$$L(0) = (\beta - \alpha)\sqrt{1 + h_\xi^2(0)}.$$

Видно, что при $l \to 0$ кривая $h(\xi)$ заменяется отрезком прямой, касательным к кривой в точке $\xi = 0$.

Вычислим длину вертикальных отрезков

$$S = (p, q) \int\limits_{x_0}^{x_e} \left| \frac{g(x+q) - g(x-p)}{l} + \frac{h(-p) - h(q)}{l} \right| \Delta x.$$

Ограничимся случаем, когда выражение под знаком модуля является положительным. Тогда

$$S = g(x_e) - g(x_0) + [h(-p) - h(q)]\frac{x_e - x_0}{l}.$$

Общая длина равна

$$L + S = \frac{\beta - \alpha}{l} \int_{-p}^{q} \sqrt{1 + h_{\xi}^{2}(\xi)}\, d\xi + g(x_e) - g(x_0) +$$

$$+ \frac{h(-p) - h(q)}{l}(x_e - x_0).$$

Если p, q, $l \to 0$, то

$$L + S = \sqrt{1 + h_{\xi}^{2}(0)} \cdot (\beta - \alpha) + g(x_e) - g(x_0) + h'_{\xi}(0) \cdot (x_e - x_0).$$

Результаты имеют ясный смысл.

Глава 10

Элементы вариационного исчисления

Длина кривой дает пример функционала от заданной функции. Представляет интерес исследование функционалов более общего вида, которые можно использовать для формулировки различных вариационных принципов.

Вариационные принципы играют фундаментальную роль во многих областях математики и физики. Хорошо известна их большая эвристическая ценность. При переходе к неархимедову пространству появляется проблема формулировки уравнений на различных масштабных уровнях. Вариационные подходы представляют собой мощное и достаточно универсальное средство для решения подобных проблем. Рассмотрим пример интегрального функционала.

§ 44. Условия стационарности интегрального функционала

Пусть некоторая функция u определена на вещественном и первом микроуровне $\xi = x_1 \cdot \mathrm{E}$ неархимедовой прямой OX. Предположим, что детали поведения функции на микроуровнях меньших масштабов значения не имеют. Продолжим функцию на данные масштабы по непрерывности с уровня $\mathrm{X} = \xi$. Теперь можно считать, что

$$\mathrm{X} = x + \xi, \quad u(\mathrm{X}) = u(x, \xi),$$

где x — переменная вещественного масштабного уровня, а переменная ξ пробегает значения как первого микроуровня, так и значения X меньших масштабов. Это означает, что производные функции $u(x, \xi)$ по аргументу ξ могут рассматриваться в смысле limit:

$$u_\xi = \frac{\partial u(x, \xi)}{\partial \xi} = \operatorname*{limit}_{\Delta\xi \to 0} \frac{u(x, \xi + \Delta\xi) - u(x, \xi)}{\Delta\xi},$$

где $\Delta\xi \to 0$ означает, как и прежде, что $\operatorname*{limit}_{v \to \infty} (\Delta\xi)_v = 0.$

Пусть

$$\Psi = \Psi(x,\ \xi,\ u(x,\xi),\ u_\xi(x,\xi))$$

— достаточно гладкая функция своих аргументов. Аргументы x, ξ будем опускать. Если $u(x,\xi)$ задано, то Ψ является функцией аргумента $\mathrm{X} = x + \xi$. Нас будут интересовать интегралы от данной функции (то есть интегральные функционалы)

$$(p,\ q)\int_\alpha^\beta \Psi \cdot d\mathrm{X},$$

где

$$\alpha = x_0 - p,\ \ \beta = x_e + q,$$

p, q — расстояния до точек горизонта, $l = p + q$. Уточнение $(p,\ q)$ перед знаком интеграла будем опускать. Интеграл можно записать таким образом:

$$\int_\alpha^\beta \Psi(u(\mathrm{X}),\ u_\xi(\mathrm{X}))d\mathrm{X} = \int_\alpha^\beta \left[\frac{1}{1}\int_{-p}^{q} \Psi(u(x,\xi),\ u_\xi(x,\xi))d\xi\right]\Delta x.$$

Если функция непрерывна на стыке вещественного и первого микроуровня, то мы попадаем в условия классического вариационного исчисления. Однако бóльший интерес представляет случай, когда между масштабными уровнями возможен разрыв. Разрывы реализуются в точках

$$\mathrm{X} = x_0 + q,\ x_0 + q + l,\ x_0 + q + 2l, \ldots, x_e - p \tag{1}$$

и равны по величине:

$$\begin{aligned} &u(x_0 + l, -p) - u(x_0,\ q);\\ &u(x_0 + 2l, -p) - u(x_0 + l,\ q);\ldots\\ &u(x_e, -p) - u(x_e - l,\ q). \end{aligned} \tag{2}$$

Подсчитаем вначале сумму разрывов (2) во внутренних точках (1). Мы хотели бы придать этой сумме вид интеграла (9) § 37. Согласно определению 37.1, для любой функции $R(x)$

$$(p,q)\int_{x_0}^{x_e} R(x)\Delta x = R(x_0 + p)\Delta x + R(x_0 + p + l)\Delta x + \ldots + R(x_e - q)\Delta x. \tag{3}$$

Для того чтобы сумма разрывов (2) совпала с правой частью (3), необходимо положить

$$R(x) = \frac{u(x + q, -p) - u(x - p, q)}{l}.$$

Величину $R(x)$ можно назвать нормированным разрывом. Он равен скачку функции, отнесенному к характерному расстоянию l. Пусть вклад разрыва R в функционал определяется величиной $l \cdot W(R)$, где W — заданная гладкая функция аргумента R. Предположим, что вклад в функционал от всех разрывов в точках (1) равен сумме вкладов от каждого из разрывов. В соответствии с обозначением (3) данную сумму можно записать следующим образом:

$$W(R(x_0 + p))\, l + W(R(x_0 + p + l))\, l + \ldots$$
$$+ \ldots W(R(x_e - q)) l = (p,q) \int_{x_0}^{x_e} W(R(x)) \Delta x$$

(здесь и выше в пределе $\operatorname{Lim} \Delta x = l$). Таким образом, мы приходим к следующей конструкции функционала:

$$\Pi = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{1}{l} \int_{-p}^{q} \Psi(u(x,\xi),\ u_{\xi}(x,\xi)) d\xi \right] \Delta x +$$
$$+ \int_{x_0}^{x_e} [W(R(x))] \Delta x + K_{\alpha} u(x_0, -p) - K_{\beta} u(x_e, q),$$

где K_{α}, K_{β} — заданные постоянные. Обозначим, как обычно, через $\delta u(x,\xi)$ малую вариацию функции $u(x,\xi)$, а индексами — производные функций Ψ и W по соответствующим аргументам. Вычислим вариацию функционала. Будем использовать упрощенные обозначения типа (см. рис. 8.4)

$$\Psi(u(x,\xi),\ u_{\xi}(x,\xi)) = \Psi(x,\xi),$$
$$u(x_0 + l, -p) - u(x_0,\ q) = u(A_1) - u(B_0),$$
$$\Psi(u(A_0),\ u_{\xi}(A_0)) = \Psi(A_0).$$

Легко видеть, что

$$\delta\Psi(u(x,\xi),\ u_{\xi}(x,\xi)) = \left[\Psi_u(x,\xi) - \frac{\partial}{\partial\xi} \Psi_{u_{\xi}} \right] \delta u + \frac{\partial}{\partial\xi} (\Psi_{u_{\xi}} \delta u). \qquad (4)$$

Вариация $\delta u(x,\xi)$ внутри промежутка $(\alpha,\ \beta)$ произвольна. Поэтому из условия $\delta\Pi = 0$ следует, что выражение в квадратных скобках должно равняться нулю. Это дает первое уравнение относительно неизвестной функции $u(x,\xi)$, которое выполняется при фиксированных значениях x и $-p < \xi < q$.

Далее, интегрирование по ξ последнего слагаемого в (4) даст два внеинтегральных слагаемых, относящихся к точкам $x - p$ и $x + q$.

Данный интервал лежит на микроуровне прямой. Значение x относится к вещественному уровню. Поэтому слагаемые дадут свой вклад в уравнения по x и краевые условия. Рассмотрим этот вопрос подробнее. Считая, что первое слагаемое в (4) уже равно нулю, можно записать

$$\delta\Pi = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{l}\Big[\Psi_{u_\xi}(x,q)\delta u(x,q) - \Psi_{u_\xi}(x,-p)\,\delta u(x,-p)\Big]\Delta x +$$

$$+\int_{x_0}^{x_e} W_R(R(x))\,\frac{\delta u(x+q,-p) - \delta u(x-p,q)}{l}\,\Delta x =$$

$$= \Psi_{u_\xi}(B_0)\delta u(B_0) - \Psi_{u_\xi}(A_0)\delta u(A_0) +$$

$$+\Psi_{u_\xi}(B_1)\delta u(B_1) - \Psi_{u_\xi}(A_1)\,\delta u(A_1) + \ldots +$$

$$+\Psi_{u_\xi}(B_{k-1})\delta u(B_{k-1}) - \Psi_{u_\xi}(A_{k-1})\delta u(A_{k-1}) +$$

$$+\Psi_{u_\xi}(B_k)\delta u(B_k) - \Psi_{u_\xi}(A_k)\,\delta u(A_k) +$$

$$+W_R\left(\frac{u(A_1) - u(B_0)}{l}\right)[\delta u(A_1) - \delta u(B_0)] +$$

$$+W_R\left(\frac{u(A_2) - u(B_1)}{l}\right)[\delta u(A_2) - \delta u(B_1)] + \ldots$$

$$+W_R\left(\frac{u(A_k) - u(B_{k-1})}{l}\right)[\delta u(A_k) - \delta u(B_{k-1})] +$$

$$+K_\alpha \delta u(\alpha) - K_\beta \delta u(\beta).$$

Точки A_0, B_k — это граничные точки $X = \alpha, \beta$. (На рис. 8.4 индекс k заменен на индекс n.) Для них имеем

$$\begin{aligned} &(\Psi_{u_\xi}(\alpha) - K_\alpha)\delta u(\alpha) = 0, \\ &(\Psi_{u_\xi}(\beta) - K_\beta)\delta u(\beta) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь имеется четыре возможности. Первая — функция $u(x,\xi)$ задана на обоих концах интервала:

$$u(\alpha) = u(x_0, -p) = u_\alpha,$$

$$u(\beta) = u(x_e, q) = u_\beta.$$

Тогда условия (5) обеспечиваются за счет отсутствия вариаций *u*: $\delta u(\alpha) = 0$, $\delta u(\beta) = 0$. Если же граничные значения функции *u* неизвестны и, значит, допускаются их вариации на границе, то

$$\Psi_{u_\xi}(\alpha) = \Psi_{u_\xi}(u(x_0, -p),\ u_\xi(x_0, -p)) = K_\alpha,$$
$$\Psi_{u_\xi}(\beta) = \Psi_{u_\xi}(u(x_e, q),\ u_\xi(x_e, q)) = K_\beta.$$

Возможны также смешанные варианты.

Для внутренних точек после приведения подобных членов имеем

$$\begin{aligned}
\delta\Pi = &\left[\Psi_{u_\xi}(B_0) - W_R\left(\frac{u(A_1) - u(B_0)}{l}\right)\right]\delta u(B_0) + \\
&+\left[\Psi_{u_\xi}(B_1) - W_R\left(\frac{u(A_2) - u(B_1)}{l}\right)\right]\delta u(B_1) + \ldots \\
&+\left[\Psi_{u_\xi}(B_{k-1}) - W_R\left(\frac{u(A_k) - u(B_{k-1})}{l}\right)\right]\delta u(B_{k-1}) + \\
&+\left[W_R\left(\frac{u(A_1) - u(B_0)}{l}\right) - \Psi_{u_\xi}(A_1)\right]\delta u(A_1) + \\
&+\left[W_R\left(\frac{u(A_2) - u(B_1)}{l}\right) - \Psi_{u_\xi}(A_2)\right]\delta u(A_2) + \ldots \\
&+\left[W_R\left(\frac{u(A_k) - u(B_{k-1})}{l}\right) - \Psi_{u_\xi}(A_k)\right]\delta u(A_k) = 0.
\end{aligned}$$

Внутри интервала вариации функции *u* отличны от нуля и независимы. Следовательно,

$$\Psi_{u_\xi}(B_0) = \Psi_{u_\xi}(A_1) = W_R\left(\frac{u(A_1) - u(B_0)}{l}\right),$$
$$\Psi_{u_\xi}(B_1) = \Psi_{u_\xi}(A_2) = W_R\left(\frac{u(A_2) - u(B_1)}{l}\right), \ldots$$
$$\Psi_{u_\xi}(B_{k-1}) = \Psi_{u_\xi}(A_k) = W_R\left(\frac{u(A_k) - u(B_{k-1})}{l}\right).$$

Таким образом, условия стационарности требуют, чтобы функция $\Psi_{u_\xi}(x, \xi)$ во внутренних точках горизонта сохраняла свою непрерывность (см. рис. 8.4). Причем ее значение должно определяться величиной скачка $u(x, \xi)$ в этих же точках.

Подведем итог. Из условия стационарности функционала

$$\Pi = \int_{\alpha}^{\beta}\left[\frac{1}{l}\int_{-p}^{q}\Psi(u(x,\xi),\ u_{\xi}(x,\xi))d\xi\right]\Delta x +$$

$$+\int_{x_0}^{x_e} W\left(\frac{u(x+q,\ -p)-u(x-p,\ q)}{l}\right)\Delta x + \tag{6}$$

$$+K_{\alpha}u(x_0-p)-K_{\beta}u(x_e,q)$$

следуют уравнения

$$\Psi_{u_\xi}(u(x,\xi),\ u_{\xi}(x,\xi))-\frac{\partial}{\partial\xi}\Psi_{u_\xi}(u(x,\xi),\ u_{\xi}(x,\xi))=0, \tag{7}$$

$$\Psi_{u_\xi}(u(x+l,-p),\ u_{\xi})=\Psi_{u_\xi}(u(x,q),\ u_{\xi})=W_R\left(\frac{u(x+l,\ -p)-u(x,q)}{l}\right) \tag{8}$$

и краевые условия

$$\Psi_{u_\xi}(u(x_0,-p),\ u_{\xi})=K_{\alpha},$$

$$\Psi_{u_\xi}(u(x_e,q),\ u_{\xi})=K_{\beta}.$$

Стационарное значение функционала (6) с отброшенными внеинтегральными слагаемыми достигается на решениях тех же уравнений, дополненных следующими краевыми условиями:

$$u(x_0,-p)=u_0,\ u(x_e,\ q)=u_e,$$

$u_0 u_e$ — заданы.

Краевые условия

$$u(x_0,-p)=u_0,\ \Psi_{u_\xi}(u(x_e,q),\ u_{\xi})=K_{\beta}$$

или

$$\Psi_{u_\xi}(u(x_0,-p),\ u_{\xi})=K_{\alpha},\ \ u(x_e,\ q)=u_e$$

отвечают функционалам, в которых отброшены либо первое, либо второе внеинтегральные слагаемые

Замечание. Неформально можно сказать, что уравнение (7) имеет место на интервалах $-p<\xi<q$ при $x=x_0,\ x_0+l,\ldots,x_e$; уравнения (8) имеют место только в точках горизонта, т.е. при

$$x=x_0,\ x_0+l,\ldots x_e-l,\ \ \xi=q,\ -p.$$

Смысл результатов легче понять, рассматривая конкретные примеры. Ограничимся двумя примерами: расширениями на неархимедов случай принципа минимума потенциальной энергии и принципа Гамильтона — Остроградского.

§ 45. Принцип минимума потенциальной энергии

Данный принцип может быть отнесен к системе «деформируемое тело — внешние нагружающие устройства». Из всех допустимых полей перемещений в действительности реализуется то, которое доставляет минимум потенциальной энергии системы [120]. В § 44 мы ограничились одномерным функционалом. Поэтому в качестве примера необходимо рассмотреть также одномерный процесс деформирования. Рассмотрим плоскопараллельный сдвиг сплошной среды, которая занимает вещественный уровень пространства и все его микроуровни. (С первого микроуровня осуществлено непрерывное продолжение на все последующие микроуровни.) Пусть $u(x,\xi)$ — горизонтальная компонента смещения, $X = x + \xi$ — вертикальная координата. Запишем функционал, имеющий смысл потенциальной энергии системы. Деформируемую среду можно представить как набор отдельных пластин, которые, испытывая упругий сдвиг, могут скользить друг по другу (рис. 10.1, отдельная пластина). В пределе Lim толщина пластины равна актуальной бесконечно малой величине l. Изменению переменной ξ от $-p$ до q при фиксированном x соответствует изменение координаты X в пределах одной пластины.

Рассмотрим вопрос об энергии, которая может быть запасена в отдельной пластине. Обозначим через σ касательное напряжение (то есть силу, отнесенную к площади; считаем, что пластина имеет размеры $1\times 1\times l$). Предположим, что величина сдвига $\partial u/\partial\xi$ связана с касательным напряжением линейной зависимостью

$$\sigma = \mu\frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \mu = \text{const}. \tag{1}$$

Тогда энергия, затраченная на сдвиг одной пластины, будет равна

$$\int_{-p}^{q} \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial u(x,\xi)}{\partial \xi}\right)^2 d\xi.$$

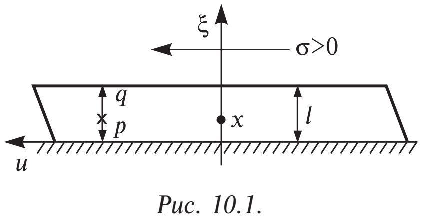

Рис. 10.1.

Рассмотрим условия на контакте между двумя пластинами. Имея в виду описание упругопластических сред, предположим, что при $\sigma > \sigma^*$ между пластинами возможно проскальзывание. Пороговое значение напряжения σ^* известно (случай, когда $\sigma^* = 0$ не исключается). Величина проскальзывания, отнесенная к толщине пластины l, равна

$$R(x+q) = \frac{u(x+l, -p) - u(x, q)}{l}.$$

Предположим, что для реализации проскальзывания между одной парой пластин необходимо затратить энергию, равную

$$l \cdot W\left(\frac{u(x+l, -p) - u(x, q)}{l}\right).$$

Из выражения для вариации

$$W_R(R)\left[\delta u(x+l, -p) - \delta u(x, q)\right]$$

следует, что касательное напряжение на контакте должно быть равно

$$\sigma(R) = W_R\left(\frac{u(x+l, -p) - u(x, q)}{l}\right).$$

В реальных твердых телах проскальзывание необратимо. Поэтому вариация δR должна быть того же знака, что и само проскальзывание R. Для наших целей это можно не учитывать и принять, что проскальзывание является таким же обратимым, как и сдвиг самих пластин. Таким образом, общая потенциальная энергия, запасенная в пластинах и на контактах между ними, равна

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left[\frac{1}{l}\int_{-p}^{q}\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 d\xi\right]\Delta x + \int_{x_0}^{x_e} W\left(\frac{u(x+l, -p) - u(x, q)}{l}\right)\Delta x\ .$$

Далее примем, что нижняя граница тела закреплена, т.е.

$$u(\alpha) = u(x_0, -p) = 0.$$

Предположим также, что некоторыми устройствами на верхней границе создается касательное напряжение $\sigma = \sigma_\beta$. Данное напряжение вызывает смещение

$$u(\beta) = u(x_e, q).$$

Это приводит к тому, что потенциальная энергия устройства нагружения уменьшается. При записи функционала информация о краевом условии вводится через слагаемое $-\sigma_\beta \cdot u(\beta)$. Для общности необходимо предположить, что наш образец нагружается также и по боковой поверхности. Пусть на элемент высотой $d\xi$ действует сила $Fd\xi$. Положительное направление $F > 0$ удобно выбрать так, как это показано на рис. 10.2.

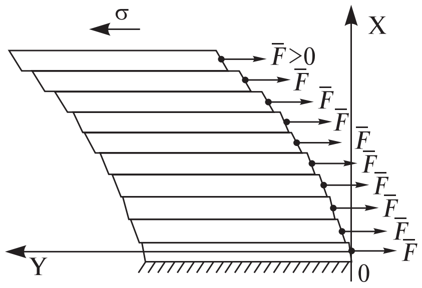

Рис. 10.2.

Тогда уравнение равновесия приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial \sigma(x,\xi)}{\partial \xi} - F = 0. \tag{2}$$

Перейдем к вариационному принципу. Ограничимся такими силами F, для которых существует потенциал $V(u)$:

$$F(u) = V_u(u).$$

Интегрируя потенциал $V(u(x,\xi))$ по ξ и затем суммируя по x, получим

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left[\frac{1}{l}\int_{-p}^{q} V(u(x,\xi))d\xi\right]\Delta x. \tag{3}$$

Направление силы $F>0$ противоположно направлению смещения $u>0$. Поэтому в функционал выражение (3) войдет со знаком «+»:

$$\begin{aligned}\Pi = (p,q)\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{l}\left\{\int_{-p}^{q}\left[\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 + V(u(x,\xi))\right]d\xi\right\}\Delta x \; + \\ + \int_{x_0}^{x_e} W\left(\frac{u(x+q,-p)-u(x-p,q)}{l}\right)\Delta x - \sigma_\beta\cdot u(x_e,q).\end{aligned} \tag{4}$$

Теперь все готово для того, чтобы выяснить смысл условий стационарности данного функционала. Они имеют следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\mu\frac{\partial u}{\partial \xi} - V_u(u) = 0, \tag{5}$$

$$\mu\frac{\partial u(x,q)}{\partial \xi} = \mu\frac{\partial u(x+l,-p)}{\partial \xi}, \tag{6}$$

$$\mu\frac{\partial u(x,q)}{\partial \xi} = W_R\left(\frac{u(x+l,-p)-u(x,q)}{l}\right), \tag{7}$$

$$u(x_0,-p)=0,\;\; \mu\frac{\partial u(x_e,q)}{\partial \xi} = \sigma_\beta, \tag{8}$$

где $x = x_0, x_0+l, \ldots x_e - l$.

Первое уравнение — это уравнение равновесия (2), записанное с учетом (1). Уравнения (6) требуют непрерывности касательных на-

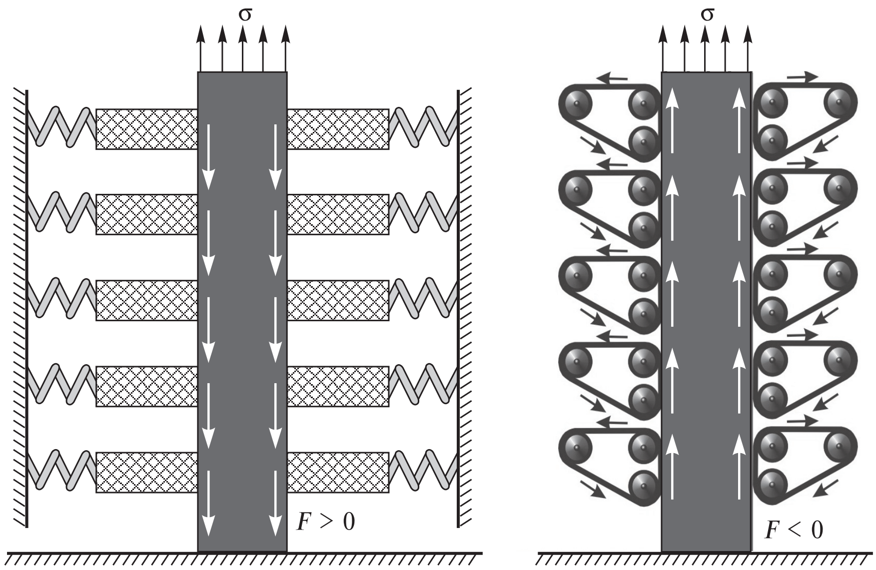

Рис. 10.3.

пряжений на контакте различных пластин. Уравнения (7) описывают поведение самого контакта и, наконец, условия (8) — это естественные краевые условия. Если на границе $x = \beta$ задается смещение $u(x_e, q) = u_\beta$, то последние условия (8) и слагаемое в (4) отбрасываются. Смещение $u(\beta)$ при этом не варьируется. Все уравнения имеют ясный механический смысл и указывают на адекватность сделанных построений.

Замечание. В некоторых случаях деформируемое тело удобнее представлять в виде стержня, который растягивается силой σ (сечение стержня — единичный квадрат). Силе $F > 0$ ($F < 0$) соответствуют боковые напряжения, которые препятствуют (способствуют) растяжению стержня (рис. 10.3). Разрывам R отвечают трещины на микроуровне. Берега трещин взаимодействуют между собой по закону, определяемому функцией W.

§ 46. Расширение принципа Гамильтона — Остроградского на неархимедово пространство и время

Из всех вариационных принципов принцип Гамильтона — Остроградского является наиболее универсальным [121]. Он успешно применяется как в классической, так и в релятивистской и квантовой механике, а также в ряде других областей. Попытаемся расширить его на случай движения материальной точки в неархимедовом пространстве и времени. Неархимедово время — это время, которое имеет много масштабных уровней. Ограничимся только двумя уровнями — вещественным и первым микроуровнем:

$$\mathrm{T} = t + t_1\mathrm{E} = t + \tau; \quad \tau = t_1\mathrm{E}.$$

Здесь, как и прежде, t и t_1 — ядра вещественных чисел. Движение точки будем считать одномерным, например движением вдоль оси OX:

$$\mathrm{X} = \mathrm{X(T)} = \mathrm{X}^0 + u(\mathrm{T}) = \mathrm{X}^0 + u(t, \tau), \tag{1}$$

X^0 — начальное положение точки, u — смещение. При построении функционала будем руководствоваться двумя условиями:

1^0. В случаях, когда неархимедовость пространства и времени не проявляется, функционал должен переходить в классический и

2^0. Из всех возможных конструкций функционала выбирается наиболее простая.

Вначале перечислим переменные, от которых может зависеть функция Лагранжа. (В данном случае это есть разность между кинетической и потенциальной энергией частицы.) Прежде всего это скорость частицы. В архимедовом случае скорость определяется как предел

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t},$$

t — вещественное время, u — смещение. Аналогичное определение в неархимедовом случае (1) имеет вид

$$v(\mathrm{T}) = \operatorname*{limit}_{\Delta \mathrm{T} \to 0} \frac{u(\mathrm{T} + \Delta \mathrm{T}) - u(\mathrm{T})}{\Delta \mathrm{T}} = \frac{\partial u(t, \tau)}{\partial \tau}. \tag{2}$$

В неархимедовом случае есть еще одна скорость, которую мы наблюдаем на вещественном масштабном уровне времени. Если мы находимся в точке $\mathrm{T} = t$, то примем, что промежутки времени до точек горизонта равны τ_p и τ_q ($\tau_p + \tau_q = \tau_l$). То есть точкам горизонта соответствуют моменты $\mathrm{T} = t - \tau_p$ и $\mathrm{T} = t + \tau_q$. Тогда видимая скорость на вещественном масштабном уровне будет равна

$$\lim_{\Delta t \to \tau_l} \frac{u(t + \Delta t,\ 0) - u(t, 0)}{\Delta t} = \frac{u(t + \tau_l, 0) - u(t, 0)}{\tau_l}. \tag{3}$$

Моменты времени, на которых определяется скорость (3) разделены между собой промежутком τ_l, т.е. (3) — это только видимая, а не «истинная» скорость. Посчитаем это достаточным основанием для того, чтобы скорость (3) в выражение для кинетической энергии не включать. С другой стороны, скорость (2) определяется на базе $\Delta \mathrm{T}$, которая становится меньше любого актуально бесконечно малого числа. Примем, что именно данная скорость и определяет кинетическую энергию частицы:

$$\frac{m}{2}\left(\frac{\partial u(t,\tau)}{\partial \tau}\right)^2,$$

где m — масса частицы.

Рассмотрим вопрос о потенциальной энергии. Ограничимся случаем, когда потенциальная энергия имеет аддитивную составляющую, зависящую только от положения частицы. Обозначим ее через $-V(u(t,\tau))$. Таким образом, в функционал должен войти интеграл

$$-\int_{\mathrm{T}_0}^{\mathrm{T}_e} V(\mathrm{T})\,d\,\mathrm{T} = -\int_{\mathrm{T}_0}^{\mathrm{T}_e}\left[\frac{1}{l}\int_{-\tau_p}^{\tau_q} V(u(t,\tau))d\tau\right]\Delta t.$$

Далее, главная проблема связана с разрывностью смещений на стыке разных масштабных уровней времени. Данные разрывы (с учетом нормировки) равны

$$\frac{u(t+\tau_l,\,-\tau_p)-u(t,\tau_q)}{\tau_l}, \tag{4}$$

где $t = t_0,\ t_0+\tau_l,\dots t_e-\tau_l$. Ясно, что для реализации подобных разрывов должны быть соответствующие причины силового и энергетического характера.

Рассмотрим самый простой вариант, когда существует некоторая функция $(-W)$ аргумента (4), которая описывает указанный фактор. В функционале должна фигурировать история преодоления частицей всех скачков за время от T_0 до T_e, т.е. в простейшем случае — величина

$$-\int_{t_0}^{t_e} W\left(\frac{u(t+\tau_q,\,-\tau_p)-u(t-\tau_p,\,\tau_q)}{l}\right)\Delta t.$$

Таким образом, мы приходим к следующему функционалу:

$$\int_{\mathrm{T}_0}^{\mathrm{T}_e}\left\{\frac{1}{l}\int_{-\tau_p}^{\tau_q}\left[\left(\frac{m}{2}\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2+V(u)\right]d\tau\right\}\Delta t+\int_{t_0}^{t_e} W\left(\frac{u(t+\tau_q,\,-\tau_p)-u(t-\tau_p,\,\tau_q)}{l}\right)\Delta t. \tag{5}$$

Запишем условия стационарности данного функционала:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial\tau} m \frac{\partial u}{\partial\tau} - V_u(u) = 0, \\
m \frac{\partial u(t, \tau_q)}{\partial\tau} = m \frac{\partial u(t + \tau_l, -\tau_p)}{\partial\tau}, \\
m \frac{\partial u(t, \tau_q)}{\partial\tau} = W_R\left(\frac{u(t + \tau_l, -\tau_p) - u(t, \tau_q)}{l}\right),
\end{gathered} \tag{6}$$

где $t = t_0,\ t_0 + \tau_l, \ldots t_e - \tau_l$.

Первое уравнение — это уравнение динамики: скорость изменения импульса частицы пропорциональна действующей силе. Второе уравнение утверждает, что на стыке двух масштабных уровней импульс частицы всегда сохраняет свою непрерывность даже в тех случаях, когда само перемещение испытывает разрыв. Третье уравнение показывает что при переходе с одного масштабного уровня времени на другой величина импульса определяет также и величину скачка перемещения.

Построенный функционал удовлетворяет необходимым условиям согласованности. Действительно, если

$$\frac{\partial u(t, \tau)}{\partial t} \equiv \frac{\partial u(t, \tau)}{\partial\tau}$$

и, значит, $u = u(t + \tau)$, то многомасштабность времени никак не проявляется. В этом случае разрывы отсутствуют и функционал переходит в классический. Первое уравнение (6) переходит в классическое уравнение динамики, второе уравнение удовлетворяется тождественно, необходимость в третьем уравнении — отпадает.

§ 47. Аналогия между неархимедовой динамикой материальной точки и упругопластическим сдвигом сплошной среды

Сравним два функционала — функционал полной потенциальной энергии (4) § 45 и функционал действия (5) § 46. Видно, что интегральные члены этих функционалов идентичны. Следовательно, между процессами, которые соответствуют данным функционалам, есть аналогия. Поэтому любые заключения относительно одного процесса, переносятся также и на второй процесс. Необходимо только изменить терминологию.

Опишем соответствие терминов. Прежде всего о независимой переменной. В первом случае — это пространственная переменная X, во втором — время T:

$$\mathrm{X} = x + \xi;\ \ \mathrm{T} = t + \tau.$$

При фиксированном значении x расстояния до точек горизонта на оси OX равны p и q, а на оси времени OT равны τ_p, τ_q. Параметры q, τ_q относятся к положительному направлению оси, параметры p, τ_p — к отрицательному. Таким образом, имеем следующее соответствие:

$$\mathrm{X} \leftrightarrow \mathrm{T};\ \ x \leftrightarrow t,\ \ \xi \leftrightarrow \tau;$$
$$p \leftrightarrow \tau_p,\ \ q \leftrightarrow \tau_q,\ \ p + q = l \leftrightarrow \tau_p + \tau_q = \tau_l.$$

Зависимая переменная в обоих случаях имеет смысл перемещения: $u(x,\xi)$ — перемещение деформируемого тела из точки (x,ξ); $u(t,\tau)$ — перемещение частицы к моменту времени (t,τ). Модулю упругого сдвига μ соответствует масса частицы m, касательному напряжению σ соответствует импульс

$$\sigma = \mu \frac{\partial u(x,\xi)}{\partial \xi} \leftrightarrow m \frac{\partial u(t,\tau)}{\partial \tau}.$$

Оба вида смещений $u(x,\xi)$ и $u(t,\tau)$ могут быть разрывными. В обоих случаях энергетическая характеристика разрыва обозначена одной и той же буквой W.

Таким образом, то, что было раньше профилем края пластин при их сдвигах и относительных скольжениях (см. рис. 10.2), теперь может рассматриваться как график перемещения точки во времени (рис. 10.4).

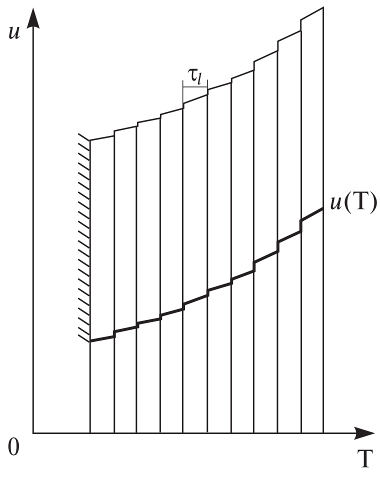

Рис. 10.4.

Далее, процесс деформирования твердых тел принято описывать в терминах «напряжения, сдвиги, энергия деформирования» и др. Динамика частицы описывается с помощью таких понятий, как скорость, импульс, кинетическая энергия и др. Аналогия позволяет перенести понятия из одной области в другую. При использовании такого переноса будем использовать кавычки.

Посмотрим, что дает указанная аналогия в двух простейших случаях: в случае свободного движения частицы и в случае ускоренного движения частицы под действием постоянной силы. Положим

$$W(R) = \frac{G}{2} R^2, \quad W_R(R) = G \cdot R,$$

где $G > 0$ — заданная постоянная.

1. Аналогия между движением частицы по инерции и однородным сдвигом сплошной среды

Рассмотрим сдвиг (или одноосное растяжение стержня) в условиях, когда $F = 0$. Из уравнения (5) § 45 имеем

$$\frac{\partial^2 u(x,\xi)}{\partial \xi^2} = 0; \quad \frac{\partial u(x,\xi)}{\partial \xi} = a(x); \quad u(x,\xi) = a(x)\xi + b(x).$$

Уравнения (6) § 45 дают $a(x) = a(x + l)$. Отсюда $a(x) = a = \text{const}$. Тогда уравнение (7) § 45 приобретает вид

$$\frac{b(x + l) - b(x)}{l} = \left(1 + \frac{\mu}{G}\right)a.$$

Его решение суть

$$b(x) = \left(1 + \frac{\mu}{G}\right)ax + c, \quad c = \text{const}.$$

Таким образом,

$$u(x,\xi) = a(x + \xi) + a\frac{\mu}{G}x + c.$$

Если $u(0, -p) = 0$, то $c = a \cdot p$. Окончательно

$$u(x,\xi) = a(x + \xi) + \frac{\mu}{G}ax + a \cdot p.$$

Сдвиг на микроуровне равен

$$\gamma = \frac{\partial u(x,\xi)}{\partial \xi} = a = \text{const}.$$

Макросдвиг тела, если его определить как

$$\Gamma = \frac{u(x + l, 0) - u(x, 0)}{l},$$

постоянен по x и равен

$$\Gamma = \left(1 + \frac{\mu}{G}\right)a.$$

Различие в указанных сдвигах $\Gamma - \gamma$ определяет величину проскальзывания

$$R = a\frac{\mu}{G}.$$

Постоянная a может быть определена из второго краевого условия. Пусть, например, на границе $x = \beta$ задано касательное напряжение σ_β. Тогда

$$\mu\frac{\partial u(x_e, q)}{\partial \xi} = \sigma_\beta; \quad a = \frac{\sigma_\beta}{\mu}.$$

Таким образом, в условиях, когда боковая поверхность от напряжений свободна, все пластины деформируются одинаково и проскальзывания между ними также одинаковы (т.е. осуществляется однородный сдвиг типа [46]).

Представляют интерес энергетические характеристики данного процесса. В рассматриваемом примере работу совершает только магистральное напряжение $\sigma(\beta) = \sigma(x_e, q)$ на перемещении $u(\beta) = u(x_e, q)$:

$$A_\sigma = \frac{1}{2}\sigma(x_e, q)\,u(x_e, q) = \frac{\mu a^2}{2}\left(x_e + p + q + \frac{\mu}{G}x_e\right). \tag{1}$$

Подсчитаем потенциальную энергию тела. Она складывается из двух частей: потенциальной энергии самих пластин Λ_u и энергии, запасенной (или диссипированной) на контактах между пластинами Λ_R. Легко видеть, что

$$\Lambda_u = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \sigma(X)\frac{\partial u(X)}{\partial \xi}dX = \frac{\mu a^2}{2}(x_e + q + p),$$

$$\Lambda_R = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_e} \sigma \cdot R\Delta x = \frac{\mu^2 a^2}{2G}x_e.$$

Следовательно,

$$A_\sigma = \Lambda_u + \Lambda_R$$

и каждое из слагаемых в равенстве (1) приобрело ясный смысл.

Рассмотрим теперь движение частицы в условиях, когда $F = 0$. Иными словами, рассмотрим движение частицы по инерции. Вследствие аналогии все выкладки будут такими же, как и в представленном выше примере. Поэтому выпишем сразу результаты.

Если $F = 0$ и

$$u(0, -\tau_p) = 0, \quad \frac{\partial u(0, -\tau_p)}{\partial \tau} = v_0,$$

то

$$u(t, \tau) = v_0(t + \tau) + \frac{m}{G} v_0 \cdot t + v_0 \tau_p.$$

Видимая скорость на вещественном уровне постоянна:

$$v_{\text{вещ}} = \left(1 + \frac{m}{G}\right) v_0.$$

Скачки перемещения также постоянны и равны

$$R = \frac{m}{G} v_0.$$

Импульс постоянен, непрерывен и равен по величине

$$m \frac{\partial u(t, \tau)}{\partial \tau} = m \cdot v_0.$$

«Работа», связанная с движением частицы между точками разрыва, равна

$$\Lambda_u = \frac{m v_0^2}{2} (t_e + \tau_q + \tau_p).$$

«Работа», которая пошла на преодоления разрывов, равна

$$\Lambda_R = \frac{m}{G} \frac{m v_0^2}{2} t_e.$$

Общая «работа» определяется выражением

$$\Lambda_u + \Lambda_R = \frac{m v_0^2}{2} \left(t_e + \tau_p + \tau_q + \frac{m}{G} t_e\right).$$

Следовательно, действие — это есть не что иное, как «работа», а «действие» — реальная работа, совершенная над сплошным телом в процессе его сдвига.

Таким образом, из расширенного вариационного принципа Гамильтона — Остроградского следует

Закон инерции в следующей форме:

1^0. Существует система координат, в которой материальная точка, свободная от внешних сил, сохраняет свой импульс неизменным в течение сколь угодно больших промежутков времени, или существует система координат, в которой импульс материальной точки, свободной от внешних сил, сохраняется неизменным как на промежутках времени, где смещения точки непрерывны, так и в моменты, когда смещения испытывают сильные разрывы на стыке различных масштабных уровней времени.

2^0. Величина импульса определяет величину скорости точки на промежутках, где смещение непрерывно, а также величину скачка перемещения в моменты реализации данных скачков.

Для деформируемого тела аналог закона инерции звучит так:

1^0. В одномерном твердом теле, боковая поверхность которого от напряжений свободна, магистральное напряжение передается без изменений сколь угодно далеко, или по-другому: магистральное напряжение остается неизменным как на участках, где смещения непрерывны, так и на поверхностях сильного разрыва смещений.

2^0. Величина магистрального напряжения определяет градиент смещения на участках непрерывности смещений, а также величину разрыва смещений на поверхностях разрыва.

Проще говоря, если взять стержень, закрепить его одним концом, а к другому приложить растягивающую силу σ, то эта сила без изменений будет передаваться в каждое сечение стержня при любой сколь угодно большой его длине. (Нагружение является квазистатическим.) Данная сила определяет как деформации стержня, так и величину раскрытия трещин. При плоскопараллельном сдвиге картина будет аналогичной.

Деформирование тела магистральным напряжением требует затрат энергии, которые пропорциональны размеру тела. Таким образом, для передачи напряжения σ на расстояние L требуется затратить энергию, пропорциональную L. С другой стороны, перемещение частицы по инерции на любое расстояние L не требует никаких затрат энергии. Однако величина действия в этом случае также пропорциональна L и это действие есть прямой аналог указанной выше работы. Таким образом, аналогия позволяет приписать действию определенный физический смысл: действие — это «работа» магистрального «напряжения».

2. Аналогия между движением частицы под действием постоянной силы и плоскопараллельным сдвигом сплошной среды

Пусть $F = \text{const}$ и, следовательно, $V(u) = F \cdot u$. Уравнение (5) § 45

$$\mu \frac{\partial^2 u(x,\xi)}{\partial \xi^2} = F$$

имеет следующее решение:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{F}{\mu}\xi + a(x), \quad u = \frac{F}{2\mu}\xi^2 + a(x)\,\xi + b(x).$$

Подстановка в (6) § 45 дает

$$\frac{a(x+l)-a(x)}{l}=\frac{F}{\mu}.$$

Следовательно,

$$a(x)=\frac{F}{\mu}x+c,\quad c=\mathrm{const},$$

поэтому

$$u=\frac{F}{2\mu}(x+\xi)^2+d(x)+c\xi, \tag{2}$$

где введено обозначение

$$d(x)=b(x)-\frac{F}{2\mu}x^2.$$

Подстановка (7) § 45 дает уравнение на функцию $d(x)$

$$\frac{d(x+l)-d(x)}{l}=\frac{F}{G}x+\frac{F}{G}q+\left(1+\frac{\mu}{G}\right)c.$$

Решение данного уравнения фактически содержится в примерах 1, 2 § 35. Подставляя данное решение в (2), получим следующий результат:

$$u(x,\xi)=\frac{F}{\mu}\frac{(x+\xi)^2}{2}+\frac{F}{G}\frac{x^2}{2}+\frac{F}{G}\frac{q-p}{2}x+c(x+\xi)+c\frac{\mu}{G}x+D; \tag{3}$$

$$\frac{\partial u(x,\xi)}{\partial\xi}=\frac{F}{\mu}(x+\xi)+c,$$

где c, D — две постоянные. Последнее равенство указывает на смысл постоянной c:

$$c=\frac{\partial u(0,0)}{\partial\xi}.$$

Постоянная D определяется краевым условием. Далее,

$$\sigma=F(x+\xi)+c\cdot\mu;\quad R=\frac{u(x+l,-p)-u(x,q)}{l}=\frac{F}{G}(x+q)+c\frac{\mu}{G}.$$

Величина среднего сдвига от x до $x+l$ равна

$$\Gamma=\frac{u(x+l,0)-u(x,0)}{l}=F\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{G}\right)\left(x+\frac{l}{2}\right)+\frac{F}{G}\frac{q-p}{2}+c\left(1+\frac{\mu}{G}\right).$$

Рассмотрим теперь соответствующее прямолинейное движение точки под действием постоянной силы. Пусть

$$u(0,0) = 0, \ \frac{\partial u(0,0)}{\partial \tau} = v_0.$$

Тогда решение системы (6) § 46 имеет следующий вид:

$$u(t,\tau) = \frac{F}{m}\frac{(t+\tau)^2}{2} + \frac{F}{G}\frac{t^2}{2} + \frac{F}{G}\frac{\tau_q - \tau_p}{2}t + v_0(t+\tau) + v_0\frac{m}{G}t; \tag{4}$$

$$m\frac{\partial u(t,\tau)}{\partial \tau} = F(t+\tau) + mv_0.$$

Отсюда видно, что импульс представляет собой функцию, непрерывную на стыке масштабных уровней времени. Данный импульс определяет и величины скачков смещения:

$$R = \frac{u(t+\tau_l, -\tau_p) - u(t,\tau_q)}{\tau_l} = \frac{F}{G}(t+\tau_q) + v_0\frac{m}{G}.$$

Видимая скорость на вещественном масштабном уровне равна

$$v = \frac{u(t+\tau_l, 0) - u(t,0)}{\tau_l} = F\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{G}\right)\left(t + \frac{\tau_l}{2}\right) + v_0\left(1 + \frac{m}{G}\right) + \frac{F}{G}\cdot\frac{\tau_q - \tau_p}{2}.$$

Обсуждение данного результата изложено в п. 3 § 51.

Глава 11

Многомерные пространство и время микромира

На макроуровне наше пространство является трехмерным, а время одномерным. Этот факт лежит в основе всех естественных наук. Будем теперь уменьшать масштабы длины и времени в $2, 3, 4, \ldots n \ldots$ раз. Что нас ждет на этом пути? Опыт показывает, что уменьшение масштаба рано или поздно приводит к качественным изменениям исходной субстанции. Не ожидает ли нас что-то подобное и для сущностей, которые мы называем пространством и временем? В настоящее время нет никаких сомнений в том, что ответ на этот вопрос является положительным: да, на микроуровне пространство и время существенно отличаются от того пространства и времени, которые мы наблюдаем на масштабах своего роста и своего пульса.

Обсуждению и исследованию проблем пространства и времени на микроуровне посвящена обширная литература. Здесь ограничимся ссылками на [122–127] и цитатой из монографии [128]: «...мы вовсе не обязаны считать, что математическое пространственно-временно́е представление о движении является физически осмысленным также и в случае произвольно малых пространственных и временных интервалов. ... Подобно тому, как при неограниченном пространственном дроблении вода перестает быть водой, при неограниченном дроблении движения также возникает нечто такое, что едва ли может быть охарактеризовано как движение».

Ясно, что в конечном счете вопрос о структуре пространства и времени может быть решен только на основании экспериментальных наблюдений. Ниже мы попытаемся ответить на этот вопрос, исходя только из арифметической концепции пространства и времени. Согласно данной концепции, точка пространства — это тройка вещественных чисел, а момент времени — одно вещественное число. В рамках любой теории, которая строится на основе классического математического анализа, точка представляется объектом неделимым: «точка — это то, что не имеет частей» [1]. Если же теперь увеличить разрешающую способность средств исследования (путем перехода к неархимедову анализу), то можно «заглянуть внутрь» точки пространства и «внутрь» момента времени. Если быть последовательным, то следует принять, что тот мир, который мы при этом увидим, и представляет собой пространство и время на микроуровне.

Такая точка зрения полностью отвечает концепции школы Пифагора, согласно которой сущностью всех вещей является число [129]. Продолжая данную посылку на наш вопрос, следует принять, что сущностью пространства и времени являются вещественные числа, а сущностью микромира — внутренняя структура вещественных чисел.

Таким образом, в качестве исходной посылки принимается, что структура пространства на микроуровне определяется внутренней структурой тройки вещественных чисел, а внутренняя структура момента времени — внутренней структурой одного вещественного числа. Иными словами, речь идет не о физическом пространстве и времени на микроуровне, а только о математическом пространстве и времени: коль скоро на макроуровне точка — это тройка вещественных чисел, а момент времени — одно вещественное число, то их внутренняя структура и есть внутренняя структура пространства и времени на микроуровне. Поэтому все результаты о внутренней структуре вещественных чисел, которые были получены выше, можно использовать здесь в полной мере.

§ 48. Гиперкомплексное пространство микромира

В гл. 1 было показано, что вещественное число представляет собой бесконечномерное пространство. Для того чтобы продвинуться дальше, рассмотрим конечномерное приближение данного пространства. Пусть N — размерность приближения, где N — сколь угодно большое, но конечное натуральное число. Выбор значения N определяется требованиями к соответствующей теории. Таким образом, одному вещественному измерению соответствует N-мерное пространство на микроуровне.

В качестве базиса в данном пространстве возьмем следующие числа:

$$\begin{aligned} j_1 &= \operatorname*{limit}_{v} \operatorname*{Lim}_{n}(1,0,0\ldots 0;\ldots), \\ j_2 &= \operatorname*{limit}_{v} \operatorname*{Lim}_{n}(0,1,0,\ldots 0;\ldots),\ldots, \\ j_N &= \operatorname*{limit}_{v} \operatorname*{Lim}_{n}(0,0,0,\ldots 1;\ldots). \end{aligned} \tag{1}$$

В приближениях числа j_1 на первом месте стоит единица, на следующих $(N-1)$ местах стоят нули. Дальше все повторяется с периодом N. Число j_2 устроено так же, только единица стоит на втором месте.

В j_3 единица стоит на третьем месте и так далее до j_N. Неформально можно сказать, что все числа выбраны такими, чтобы они находились как можно ближе к нулю: из N чисел последовательности под знаком Lim только одно число, отличное от нуля. Данный базис приводит к следующей таблице умножения:

$$j_1^2 = j_1, \ldots j_N^2 = j_N, \; j_m j_k = j_k j_m = 0, \; k \neq m, \; 1 \leq k, \; m \leq N. \tag{2}$$

Все числа j_k линейно независимы и неупорядочены относительно чисел оси OX. Если речь идет о структуре момента времени, то числа неупорядочены относительно оси времени OT. Каждому из чисел j_k отвечает свое измерение. Точки Z рассматриваемого пространства можно идентифицировать с помощью набора координат $\mathrm{X}_1, \ldots \mathrm{X}_N$:

$$Z = \mathrm{X}_1 j_1 + \ldots + \mathrm{X}_N j_N, \tag{3}$$

где значения X_k — принадлежат неархимедовой прямой. Аналогично для временно́й оси имеем

$$\Theta = \mathrm{T}_1 j_1 + \ldots \mathrm{T}_N j_N, \tag{4}$$

где T_k принадлежат оси неархимедова времени OT. Ниже достаточно ограничиться только пространством (3). Для (4) все результаты сохраняются без изменений. Из (1), (2) видно, что каждый базисный элемент является делителем нуля, а сумма всех базисных элементов составляет единицу:

$$j_1 + j_2 + \ldots + j_N = 1.$$

Кроме единицы, пространство (3) содержит ряд двойных единиц, т.е. чисел j, отличных от +1 и −1 и таких, что $j^2 = 1$:

$$j = \pm j_1 \pm j_2 \pm \ldots \pm j_N.$$

На этом основании пространство (3), (4) можно называть гиперкомплексным. То обстоятельство, что компоненты являются числами существенными, будем подчеркивать названием «гиперкомплексное пространство над полем существенных чисел». Ниже будет рассмотрен случай, когда компоненты могут быть комплексными числами.

Выбранный выше базис приводит к предельно простым правилам сложения, умножения и деления. Если

$$Z' = \mathrm{X}'_1 j_1 + \ldots + \mathrm{X}'_N j_N,$$

то

$$\begin{gathered} Z + Z' = (\mathrm{X}_k + \mathrm{X}'_k) j_k, \;\; Z \cdot Z' = \mathrm{X}_k \mathrm{X}'_k j_k, \\ \frac{Z}{Z'} = \frac{\mathrm{X}_k}{\mathrm{X}'_k} j_k, \;\; \frac{1}{Z} = \frac{1}{\mathrm{X}_1} j_1 + \frac{1}{\mathrm{X}_2} j_2 + \ldots + \frac{1}{\mathrm{X}_N} j_N. \end{gathered} \tag{5}$$

Везде по немому индексу идет суммирование; в последнем равенстве считаем, что все $X_k \neq 0$. Легко заметить, что если хотя бы одна из компонент $X_k = 0$, т.е. произведение

$$X_1 X_2 \ldots X_N = 0,$$

то число Z будет делителем нуля. Действительно, пусть $X_1 = 0$. Положим

$$Z = X_2 j_2 + \ldots + X_N j_N \neq 0,$$
$$Z' = X_1' j_1 \neq 0.$$

Отсюда $Z \cdot Z' = 0$. Таким образом, согласно (5), все числа, кроме делителей нуля и числа 0, имеют обратные. Ясно, что алгебра (5) является коммутативной, ассоциативной и представляет собой прямую сумму нескольких алгебр существенных чисел.

Введем понятие модуля числа Z. Примем по определению, что модуль представляет собой неотрицательное существенное число $|Z|$, которое удовлетворяет следующим требованиям:

$$|\alpha Z| = |\alpha||Z|, \quad |ZZ'| = |Z||Z'|,$$

где α — произвольное число на прямой OX. Указанным требованиям удовлетворяет следующая конструкция модуля:

$$\left|X_1 j_1 + \ldots + X_N j_N\right| = \left|X_1\right|^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot \left|X_N\right|^{\lambda_N}, \tag{6}$$

где λ_m — произвольные числа. Естественно, что понятие модуля должно удовлетворять условию согласованности. Иначе говоря, если число Z сводится к числу X, лежащему на оси OX, то модуль (6) должен совпадать с обычным модулем $|X|$. Число Z совпадает с X, когда для любого k имеем $X_k = X$. Отсюда

$$\left|X j_1 + \ldots + X j_N\right| = |X|^{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_N} = |X|.$$

Следовательно, должно выполняться равенство

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_N = 1.$$

Наиболее симметричным является вариант, когда

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_N = 1/N$$

и, значит,

$$\left|X_1 j_1 + \ldots + X_N j_N\right| = \sqrt[N]{|X_1 \ldots X_N|}.$$

Возможны, конечно, и другие определения модуля, которые в некотором смысле также можно отнести к естественным. Так, в [14, 16] было получено следующее сингулярное (при $N > 3$) выражение для модуля:

$$\left|X_1 j_1 + \ldots + X_N j_N\right| = \sqrt{\left|X_1\right|^{3-N}\left|X_2\right|\ldots\left|X_N\right|}.$$

§ 49. Функции гиперкомплексной переменной

Пусть значению переменной Z из области (3) § 48 соответствует некоторое вполне определенное значение W из этой же числовой области:

$$W = W(Z).$$

Числовая область является N-мерной. Поэтому одна гиперкомплексная функция сводится к N функциям от N переменных:

$$W = W(X_1 j_1 + \ldots + X_N j_N) =$$
$$= W_1(X_1, X_2, \ldots, X_N) j_1 + \ldots + W_N(X_1, \ldots X_N) j_N.$$

Здесь каждая из функций

$$\begin{aligned} Y_1 &= W_1(X_1, X_2 \ldots X_N), \\ Y_2 &= W_2(X_1, X_2 \ldots X_N), \ldots \\ Y_N &= W_N(X_1, X_2 \ldots X_N) \end{aligned} \tag{1}$$

представляет собой существенную функцию N существенных переменных. Поэтому все понятия, которые были рассмотрены выше для функций одной переменной (понятия непрерывности, производных и интегралов), можно перенести также на многомерный случай (1). По обычной схеме для функции W можно ввести понятие производной по аргументу Z. Предположим, что функции (1) обладают всеми свойствами гладкости, которые потребуются ниже. Пусть ΔZ, ΔW — приращения аргумента и функции. Тогда

$$\frac{\Delta W}{\Delta Z} = \frac{\Delta W_1 j_1 + \ldots + \Delta W_N j_N}{\Delta X_1 j_1 + \ldots + \Delta X_N j_N}.$$

С точностью до (ΔX_k) можно записать

$$\begin{aligned} \frac{\Delta W}{\Delta Z} = \left(\frac{\partial W_1}{\partial X_1} + \frac{\partial W_1}{\partial X_2}\frac{\Delta X_2}{\Delta X_1} + \ldots + \frac{\Delta W_1}{\partial X_N}\frac{\Delta X_N}{\Delta X_1}\right) j_1 + \ldots \\ + \left(\frac{\partial W_N}{\partial X_1}\frac{\Delta X_1}{\Delta X_N} + \ldots + \frac{\partial W_N}{\partial X_N}\right) j_N. \end{aligned} \tag{2}$$

Предел данного отношения не зависит от закона стремления ΔZ к 0, если

$$\frac{\partial W_k}{\partial \mathrm{X}_m} = 0,\ k \neq m,\ k,\ m = 1, \ldots, N. \tag{3}$$

Отсюда следует, что

$$W(Z) = W_1(\mathrm{X}_1)j_1 + W_2(\mathrm{X}_2)j_2 + \ldots + W_N(\mathrm{X}_N)j_N \tag{4}$$

и

$$\frac{dW}{dZ} = W_1'(\mathrm{X}_1)j_1 + W_2'(\mathrm{X}_2)j_2 + \ldots + W_N'(\mathrm{X}_N)j_N.$$

Здесь через dW/dZ обозначен предел (2) при $\Delta Z \to 0$, через $W_k'(\mathrm{X}_k)$ — производные W_k по X_k. Условия (3) аналогичны условиям Коши — Римана для функций комплексного переменного. Таким образом, для того, чтобы функция $W(Z)$ была дифференцируемой по Z, необходимо и достаточно выполнение условий (3) и существование производных $W_k(\mathrm{X}_k)$ по X_k. (Доказательство достаточности очевидно.)

Пусть функция W раскладывается в сходящийся ряд с коэффициентами из числовой области (3) § 48:

$$W(Z) = \sum_{\nu}(A_{\nu 1}j_1 + \ldots + A_{\nu N}j_N)Z^{\nu}. \tag{5}$$

Так как

$$Z^{\nu} = (\mathrm{X}_1 j_1 + \ldots + \mathrm{X}_N j_N)^{\nu} = \mathrm{X}_1^{\nu} j_1 + \ldots + \mathrm{X}_N^{\nu} j_N,$$

то

$$W(Z) = \sum_{\nu} A_{\nu 1}\mathrm{X}_1^{\nu} j_1 + \ldots + \sum_{\nu} A_{\nu N}\mathrm{X}_N^{\nu} j_N. \tag{6}$$

Из сопоставления (6) с (4) заключаем, что

$$W_1(\mathrm{X}_1) = \sum_{\nu} A_{\nu 1}\mathrm{X}_1^{\nu}, \ldots, W_N(\mathrm{X}_N) = \sum_{\nu} A_{\nu N}\mathrm{X}_N^{\nu}.$$

В частном случае, когда коэффициенты в разложении (5) являются существенными числами, т.е.

$$W(Z) = \sum_{\nu} A_{\nu} Z^{\nu}, \tag{7}$$

имеем

$$W(Z) = W(\mathrm{X}_1)j_1 + \ldots + W(\mathrm{X}_N)j_N.$$

В теории функций комплексного переменного большую роль играет тригонометрическая форма представления комплексного числа. Дадим аналогичное представление для чисел (3) § 48. Положим $W(Z) = e^z$. Тогда для $Z = \alpha_1 j_1 + \ldots + \alpha_N j_N$

$$e^{\alpha_1 j_1 + \ldots \alpha_N j_N} = e^{\alpha_1} j_1 + \ldots + e^{\alpha_N} j_N. \tag{8}$$

Коэффициенты в правой части всегда положительны. Следовательно, наперед заданное число $A_k j_k$ можно представить в форме (8), если все значения $A_k > 0$. Тогда

$$A_1 j_1 + \ldots + A_N j_N = e^{\ln A_1 j_1 + \ldots + \ln A_N j_N}. \tag{9}$$

Для представления чисел с отрицательными компонентами необходимо введение мнимой единицы i. Например, пусть $A_1 < 0$, $A_2 > 0 \ldots A_N > 0$. Тогда

$$A_1 j_1 + \ldots + A_N j_N = e^{(\ln(-A_1) + \pi i) j_1 + \ln A_2 j_2 + \ldots + \ln A_N j_N}. \tag{10}$$

Любое гиперкомплексное число содержит в себе обычную существенную составляющую. Однако в «извлечении» этой составляющей из числа есть некоторый произвол. Пусть

$$Z = A_1 j_1 + \ldots + A_N j_N. \tag{11}$$

Представим каждый из коэффициентов в виде

$$A_1 = A_1' + C, \ldots A_N = A_N' + C.$$

Тогда вместо (11) получим

$$Z = C + A_1' j_1 + \ldots + A_N' j_N. \tag{12}$$

Здесь C — аддитивная существенная составляющая числа (12). Данная составляющая аналогична вещественной составляющей комплексного числа $a + ib$. Отличие состоит только в том, что составляющая a в записи $(a + ib)$ определена однозначно, в то время как в (12) для выбора величины C необходимо дополнительное условие.

По-видимому, наиболее естественным является следующее условие:

$$A_1' + A_2' + \ldots + A_N' = 0.$$

Тогда

$$C = \frac{A_1 + A_2 + \ldots + A_N}{N}$$

и любое гиперкомплексное число z можно представить в виде суммы

$$A_1 j_1 + \ldots + A_N j_N = \frac{A_1 + \ldots + A_N}{N} + \left(A_1 - \frac{A_1 + \ldots + A_N}{N}\right) j_1 + \ldots + \left(A_N - \frac{A_1 + \ldots + A_N}{N}\right) j_N . \tag{13}$$

Первое слагаемое будем называть существенной частью гиперкомплексного числа.

Пусть $A_k > 0$. Выделим действительную часть из показателя экспоненты (9). Она равна $C = \ln \sqrt[N]{A_1, A_2 \ldots A_N}$. Следовательно,

$$Z = A_1 j_1 + \ldots + A_N j_N = \sqrt[N]{A_1, \ldots A_N}\, e^{(\ln A_1 - C) j_1 + \ldots + \ln A_n - C) j_N} . \tag{14}$$

В теории функций комплексного переменного коэффициент при экспоненте определяется как модуль числа. Здесь также примем, что модуль Z равен данному коэффициенту. Видно, что тот модуль, который был введен выше из соображений симметрии, совпал с модулем (14). Случай (10) приводит к тому же результату. Таким образом, предположения о модуле (7) и предположение о действительной части числа (13) эквивалентны между собой.

§ 50. Пространство над полем комплексных существенных чисел

Обратимся к представлению (10) § 49. Если некоторые компоненты гиперкомплексного числа отрицательны, то в тригонометрической форме числа неизбежно появляется мнимая единица i. Выше отмечалось, что введение в математический анализ бесконечно большого числа ω и двойной единицы j также неизбежно влечет за собой появление мнимой единицы i:

$$e^{\pi i \omega} = -j, \quad i^2 = -1, \quad j^2 = 1.$$

Указанные две посылки являются достаточными для того, чтобы с самого начала числовое пространство Z строить над полем комплексных чисел. Саму теорию комплексных чисел можно не излагать, так как она полностью совпадает с общепринятой. Необходимо только во всех выкладках вещественные числа x и y заменить на числа X и Y, принадлежащие неархимедовой прямой. Например, если модуль числа $x + iy$ равен $\sqrt{x^2 + y^2}$, то теперь

$$|\mathrm{X} + i\mathrm{Y}| = \sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2}.$$

Таким образом, мы приходим к следующей числовой системе:

$$
\begin{aligned}
&Z = Z_1 j_1 + \ldots + Z_N j_N;\\
&Z_1 = X_1 + iY_1, \ldots Z_N = X_N + iY_N,
\end{aligned} \tag{1}
$$

где все компоненты X_k, Y_k — некоторые существенные числа. Не повторяя обоснований, запишем сразу

$$|Z| = |Z_1|^{\lambda_1} \ldots |Z_N|^{\lambda_N},$$

где

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_N = 1.$$

Остановимся на варианте, когда

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_N = \frac{1}{N};\ |Z| = \sqrt[N]{|Z_1||Z_2|\ldots|Z_N|}.$$

Далее,

$$
\begin{aligned}
&\exp[(\alpha_1 + i\beta_1)j_1 + \ldots + (\alpha_N + i\beta_N)j_N] =\\
&= e^{(\alpha_1 + i\beta_1)} j_1 + \ldots + e^{\alpha_N + i\beta_N} j_N =\\
&= (A_1 + iB_1)j_1 + \ldots + (A_N + iB_N)j_N,
\end{aligned}
$$

где

$$\alpha_k = \ln\sqrt{A_k^2 + B_k^2},\ \operatorname{tg}\beta_k = B_k / A_k.$$

Данные формулы дают тригонометрическое представление для любого числа из области (1).

Рассмотрим теперь функцию $W(Z)$. Предположим, что значения аргумента и функции лежат в числовой области (1):

$$W = W(Z) = W_1(Z)j_1 + \ldots + W_N(Z)j_N, \tag{2}$$

где

$$
\begin{aligned}
&W_1 = W_1(Z_1, Z_2 \ldots Z_N),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&W_N = W_N(Z_1, Z_2 \ldots Z_N).
\end{aligned}
$$

Таким образом, одна функция (2) свелась к N комплексным функциям от N комплексных аргументов, или к $2N$ существенных функций от $2N$ существенных аргументов:

$$
\begin{aligned}
&P_k = P_k(X_1, Y_1, \ldots, Y_N),\\
&Q_k = Q_k(X_1, Y_1, \ldots, Y_N),
\end{aligned} \tag{3}
$$

где $k = 1, 2 \ldots N$,

$$P_k + iQ_k = W_k,\ X_k + iY_k = Z_k.$$

Рассмотрим условия аналитичности функции $W(Z)$. С точностью до $\Delta X_k, \Delta Y_k$ имеем

$$\frac{\Delta W}{\Delta Z}=\frac{\left[\frac{\partial P_1}{\partial X_1}\Delta X_1+\frac{\partial P_1}{\partial Y_1}\Delta Y_1+i\frac{\partial Q_1}{\partial X_1}\Delta X_1+i\frac{\partial Q_1}{\partial Y_1}\Delta Y_1+\frac{\partial P_1}{\partial X_2}\Delta X_2+\ldots\right]j_1+\ldots}{\left(\Delta X_1+i\Delta Y_1\right)j_1+\ldots+\left(\Delta X_N+i\Delta Y_N\right)j_k}= \tag{4}$$

$$=\frac{\frac{\partial P_1}{\partial X_1}\Delta X_1+\frac{\partial P_1}{\partial Y_1}\Delta Y_1+i\frac{\partial Q_1}{\partial X_1}\Delta X_1+i\frac{\partial Q_1}{\partial Y_1}\Delta Y_1+\frac{\partial P_1}{\partial X_2}\Delta X_2+\ldots}{\Delta X_1+i\Delta Y_1}j_1+\ldots .$$

Пусть $\Delta Z \to 0$. Предел отношения не зависит от закона стремления ΔZ к 0, если

$$\frac{\partial P_1}{\partial X_k}=0,\quad \frac{\partial P_1}{\partial Y_k}=0;\quad \frac{\partial Q_1}{\partial X_k}=0,\quad \frac{\partial Q_1}{\partial Y_k}=0 \tag{5}$$

при $k=2,3\ldots N$. Следовательно, функции P_1, Q_1 могут зависеть только от X_1, Y_1, функции P_2, Q_2 — только от X_2, Y_2 и т.д. Отсюда

$$W_1=W_1(Z_1),\ldots W_N=W_N(Z_N).$$

Кроме того, для каждой из функций должны выполняться условия Коши — Римана

$$\frac{\partial P_k}{\partial Y_k}+\frac{\partial Q_k}{\partial X_k}=0,\quad \frac{\partial P_k}{\partial X_k}-\frac{\partial Q_k}{\partial Y_k}=0,\quad k=1,2\ldots N. \tag{6}$$

Очевидно, что из (6), (5) следует существование предела (4). Таким образом, имеет место следующая

Теорема 50.1. *Для того чтобы гиперкомплексная функция W была дифференцируемой по гиперкомплексной переменной Z, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (5) *и, кроме того, для каждой комплексной компоненты $W_k(Z_k)$ выполнялись условия Коши — Римана* (6).

Иными словами, каждая из комплексных компонент должна быть дифференцируемой по собственному комплексному аргументу. Таким образом, среди всевозможных функций гиперкомплексной переменной Z дифференцируемые по Z функции составляют весьма узкий класс. Для описания более широких классов необходимо ослабить условия Коши — Римана, а также условия (5). Далее можно снимать ограничения, связанные с дифференцируемостью отдельных компонент (3). Учитывая тот факт, что каждый из аргументов $X_1,\ldots Y_N$ принадлежит к бесконечномасштабной неархимедовой прямой, мы видим, что рассматриваемый математический аппарат дает чрезвычайно много возможностей для построения теорий самого различного плана. Рассмотрим некоторые иллюстрации.

§ 51. Движение материальной точки в многомерном пространстве с течением многомерного времени

Пусть некоторая материальная точка движется под действием заданных сил. Материальную точку будем называть также частицей. В рамках классического математического анализа движение частицы описывается тремя скалярными функциями:

$$x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t).$$

Каждая из функций зависит от одного скалярного аргумента t. Значения функций и значения аргумента — обычные вещественные числа. Условно можно сказать, что в данной ситуации сама материальная точка имеет размер вещественного числа.

Теперь мы хотим уменьшить размер материальной точки до размера существенного числа. Какие возможности дает математический аппарат анализа-2 для описания движения подобной точки? Указанное уменьшение приводит к тому, что координаты x, y, z и время t превращаются в многомерные пространственные переменные и многомерное время. Введем для них обозначения $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$, $Z^{(3)}$ и Θ. Тогда формальный и общий ответ на поставленный вопрос состоит в следующем: движение материальной точки описывается тремя функциями:

$$Z^{(1)} = F(\Theta),\ Z^{(2)} = G(\Theta),\ Z^{(3)} = \mathrm{H}(\Theta), \tag{1}$$

где

$$\begin{aligned} &Z^{(i)} = \mathrm{X}_1^{(i)} j_1 + \ldots + \mathrm{X}_N^{(i)} j_N, \quad i = 1,2,3; \\ &\Theta = \mathrm{T}_1 j_1 + \ldots + \mathrm{T}_N j_N. \end{aligned} \tag{2}$$

Каждая из координат принадлежит многомасштабной неархимедовой прямой. Число координат в (2) и число масштабов для каждой из координат ничем не ограничено. Поэтому здесь открывается чрезвычайно много возможностей для описания самых различных движений. Рассмотрим некоторые частные случаи, которые укладываются в описание (1) и удовлетворяют тем или иным условиям гладкости функций. Так как в (1) фигурирует многомерное время, то вначале обсудим вопрос о неформальном представлении «течения» многомерного времени.

1. Как представить себе течение многомерного времени?

Принимая арифметическую концепцию пространства и времени, мы констатируем, что точка пространства — это тройка вещественных чисел, а момент времени — одно вещественное число, расположенное на вещественной оси $Ot_{\text{вещ}}$ (индекс будем опускать). Течение времени мы воспринимаем как движение точки вдоль оси Ot. Это одномерное движение и поэтому время, которое мы воспринимаем непосредственно, является одномерным.

С уменьшением масштаба наблюдения арифметическая концепция приводит к представлению о многомерном времени. Как представить себе его течение? Формально говоря, на подобные вопросы можно не только не отвечать, но даже не ставить их. Однако необходимость в их постановке все же есть, так как хорошо известно, что именно неформальные представления являются действительным источником многих математических построений. Попытаемся найти какую-то общую точку зрения на одномерное и многомерное время. Основное свойство одномерного времени связано с его линейной упорядоченностью. В многомерном случае упорядоченности нет. Поэтому необходимо найти другую основу для сопоставления.

Возможное решение вопроса подсказывается вариационным принципом Гамильтона — Остроградского. Пусть некоторая материальная точка движется вдоль оси Ox по закону $x = x(t)$, $t_1 \le t \le t_2$. Ничто не мешает изобразить график функции $x(t)$ в плоскости переменных x, t. В «действительности» процесс $x = x(t)$ никогда не предстает перед нами весь целиком. Мы сами живем во времени t и поэтому вначале наблюдаем положение точки $x(t_1)$, затем $x(t)$ при бо́льших t и в конце концов приходим к положению $x(t_2)$. Такому последовательному наблюдению отвечает и форма записи закона движения точки, например следующая:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g = \text{const}, \quad x(t_1) = \text{H}, \quad \frac{dx(t_1)}{dt} = 0.$$

Здесь мы стартуем из точки $x = \text{H}$. Затем переходим в новое положение при $t > t_1$ и т.д. до момента $t = t_2$. Закон движения записан через производные по времени и полностью отвечает нашему представлению о течении времени от меньших значений t к бо́льшим.

Однако тот же самый закон можно записать по-другому. Образуем функционал

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2 - gx(t) \right] dt \, .$$

Согласно принципу Гамильтона — Остроградского, действительное движение $x(t)$ доставляет функционалу стационарное значение. В данном законе значения $x(t)$ при всех t из диапазона $[t_1, t_2]$ фигурируют «одновременно» и, кроме того, в начальный и конечный момент времени значения $x(t)$ должны быть зафиксированы. Наличие интеграла по времени принципиально меняет наш взгляд на данный процесс и вообще на роль времени. Теперь можно считать, что сами мы находимся вне времени t и нам доступно созерцание процесса $x = x(t)$ всего целиком («одновременно» для всех t, $t_1 \le t \le t_2$). Теперь можно говорить не о процессе $x = x(t)$, а только о функции $x(t)$, которая приобрела почти тот же самый статус, что и, например, функция $\rho(x)$, где ρ — плотность стержня $0 \le x \le L$. Значение интеграла

$$\int_0^L \rho(x)\,dx$$

дает массу стержня. И вся масса стержня — это актуальный объект, который предстает перед нами одновременно весь целиком.

Таким образом, можно ставить вопрос не о процессе, который разворачивается с течением времени, а о некоторой функции $x(t)$, которая предстает перед нами вся целиком во всем диапазоне изменения своего аргумента. При таком взгляде на одномерное время вопрос о неформальном понимании многомерного времени трудностей не вызывает. Если в одномерном случае мы имеем дело с одной скалярной функцией одного скалярного аргумента, то в многомерном случае у нас будет N скалярных функций от N скалярных аргументов. Причем все N функций во всей многомерной области их определения мы имеем возможность наблюдать целиком («одновременно»).

Итак, общая точка зрения на одномерное и многомерное время состоит не в том, чтобы приписать какое-то «течение» многомерному времени, а напротив, отказаться от представления о течении одномерного времени. Вместо этого допускается «одновременное» созерцание всех состояний, которые приписываются различным значениям t в одномерном случае или созерцание всех состояний, которые приписываются различным компонентам времени $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \ldots$ в многомерном случае.

Указанная точка зрения является крайней. Принцип Гамильтона — Остроградского дает для нее некоторые основания, но вполне достаточными признать их все же нельзя. Все дело в условиях на $x(t)$, которые должны быть заданы. Функционал диктует для $x(t)$ не начальные условия $x(t_1)$, $x'(t_1)$, а условия на концах промежутка $[t_1, t_2]$, т.е. значения $x(t_1)$ и $x(t_2)$. Аналогичные краевые условия будут и в более сложной ситуации, когда речь пойдет не о движении отдельной точки, а о динамике деформирования сплошной среды [121]. Уравнения, описывающие динамику среды, относятся, как правило, к гиперболическому типу. Для них не должны ставиться условия, относящиеся к состоянию среды в конечный момент времени.

В связи с этим имеет смысл рассмотреть еще одну интерпретацию многомерного времени, которая совмещает в себе взгляд на функции от времени, с одной стороны, как на актуально заданный объект, а с другой — как на некоторый линейно упорядоченный процесс.

Как отмечалось, время $Ot_{\text{вещ}}$ является одномерным и линейно упорядоченным. Многомерность времени проявляется только тогда, когда моменты $t_{\text{вещ}}$ мы рассматриваем с разрешением, которое дает неархимедов анализ. Можно сказать, что неупорядоченность имеет место лишь локально, в пределах ореола ядра фиксированного вещественного числа $t_{\text{вещ}}$. Ясно, что теперь можно выделить существенную прямую времени OT и движение точки вдоль нее рассматривать как «течение времени» T. При этом все координаты ореола, которые соответствуют любому фиксированному моменту T, можно рассматривать как актуальную и целиком заданную окрестность момента времени T. На основании таких нестрогих рассуждений можно ожидать, что адекватные уравнения должны носить эволюционный характер по переменной T (например, относиться к гиперболическому типу), а по остальным компонентам многомерного времени можно допустить уравнения эллиптического типа. (Вопрос о выделении из многомерного времени компоненты T рассмотрен ниже.) Один из возможных подходов к описанию многомерного времени рассматривается в [130, 131].

2. Магистральные пространственные координаты и магистральная компонента многомерного времени

Мы должны исходить из того общепризнанного факта, что непосредственно наблюдаемые нами время является одномерным, а пространство — трехмерным. Поэтому прежде всего необходимо ответить на вопрос, как многомерные гиперкомплексные пространства (2) связаны с нашим трехмерным пространством и одномерным временем. Ответ на этот вопрос дается равенством

$$j_1 + j_2 + \ldots + j_N = 1. \tag{3}$$

Слева стоят гиперкомплексные базисные элементы, справа — обычная единица.

Равенство (3) задает в многомерном пространстве и многомерном времени одно особое направление, которое назовем магистральным. Неформально эту ситуацию можно пояснить следующим образом. Пусть Оx — вещественная пространственная ось. Глядя на нее с разрешением 1, мы видим прямую, о которой Евклид говорил, что это «длина без ширины». Если же посмотреть на ось Оx с разрешением 2, то мы увидим, что ось превратится в спицу OX и на нее, подобно бусинам, нанизаны вещественные числа. Каждая из бусин является бесконечномерной и имеет размытую внешнюю границу. Если мы находимся внутри нее, т.е. занимаем определенную точку

$$Z^{(1)} = \mathrm{X}_1^{(1)} j_1 + \mathrm{X}_2^{(1)} j_2 + \ldots + \mathrm{X}_N^{(1)} j_N, \tag{4}$$

то сама спица — пространственная ось OX — выглядит как прямая

$$\mathrm{X}_1^{(1)} = \mathrm{X}, \ldots \mathrm{X}_N^{(1)} = \mathrm{X}. \tag{5}$$

Двигаясь вдоль этой прямой, мы можем перейти в ореол другого вещественного числа. Данную прямую именно в этой роли, т.е. как особую (благодаря равенству (3)) прямую в пространстве (4), будем называть магистральной, а ее направление — магистральным. Остальные направления (как альтернативные магистральному) будем называть боковыми направлениями. Аналогичные определения введем и для оси времени.

Теперь можно дать формальное

Определение 51.1. *В гиперкомплексном пространстве* (*4*) *прямую* (*5*) *назовем магистральной пространственной осью, а ее направление — магистральным пространственным направлением. Проекцией точки* (*4*) *на магистральную пространственную ось будем считать число, равное*

$$\mathrm{X} = \frac{\mathrm{X}_1^{(1)} + \ldots + \mathrm{X}_N^{(1)}}{N}.$$

В представлении числа (*4*) *в виде*

$$Z^{(1)} = \mathrm{X} + (\mathrm{X}_1^{(1)} - \mathrm{X}) j_1 + \ldots + (\mathrm{X}_N^{(1)} - \mathrm{X}) j_N$$

значение X *будем считать магистральной компонентой числа, а* $(\mathrm{X}_1^{(1)} - \mathrm{X}), \ldots$ — *боковыми компонентами.*

Магистральная компонента совпадает с существенной частью гиперкомплексного числа (см. равенство (13) § 49).

Определение 51.2. *В гиперкомплексном пространстве многомерного времени*

$$\Theta = \mathrm{T}_1 j_1 + \ldots + \mathrm{T}_N j_N \tag{6}$$

прямую

$$\mathrm{T}_1 = \mathrm{T}, \ldots \mathrm{T}_N = \mathrm{T} \tag{7}$$

будем называть магистральной временнóй осью, а ее направление — магистральным временным направлением. Проекцией момента многомерного времени (6) *на ось* (7) *будем считать число, равное*

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{T}_1 + \ldots + \mathrm{T}_N}{N}.$$

В представлении

$$\Theta = \mathrm{T} + (\mathrm{T}_1 - \mathrm{T})j_1 + \ldots + (\mathrm{T}_N - \mathrm{T})j_N$$

значение T *будем считать магистральной компонентой времени, а компоненты* $(\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}), \ldots, (\mathrm{T}_N - \mathrm{T})$ — *боковыми компонентами времени.*

Таким образом, магистральные пространственные оси и магистральное время — это обычные (неархимедовы) измерения пространства и времени. При этом каждое из них рассматривается уже как одно из направлений в соответствующем гиперкомплексном пространстве. Об этом направлении можно сказать, что оно равнонаклонено ко всем координатным осям пространства.

3. Движение частицы при отсутствии боковых компонент времени и смещения. Описание «кинематографической реальности»

Пусть начальные условия и законы движения частицы таковы, что боковые компоненты ее координат и времени тождественно равны нулю. Тогда гиперкомплексные переменные в законе (1) сводятся к существенным переменным. Теперь вместо (1) имеем

$$\mathrm{X} = F(\mathrm{T}), \ \mathrm{Y} = G(\mathrm{T}), \ Z = \mathrm{H}(\mathrm{T}),$$

где $Z^{(1)}$ обозначено как X, $Z^{(2)}$ как Y и $Z^{(3)}$ как Z. Ограничимся одномерным движением точки вдоль оси OX:

$$\mathrm{X} = F(\mathrm{T}), \ \mathrm{Y} \equiv 0, \ Z \equiv 0,$$

где переменные X и T пробегают следующие значения:

$$\begin{aligned} \mathrm{X} &= x_0 + x_1\mathrm{E} + x_2\mathrm{E}^2 + \ldots, \\ \mathrm{T} &= t_0 + t_1\mathrm{E} + t_2\mathrm{E}^2 + \ldots . \end{aligned} \tag{8}$$

Все коэффициенты суть ядра вещественных чисел. Для удобства положим

$$x_1\mathrm{E} = \xi_1, \ x_2\mathrm{E}^2 = \xi_2, \ldots \ t_1\mathrm{E} = \tau_1, \ t_2\mathrm{E}^2 = \tau_2, \ldots .$$

Наибольший интерес представляют вещественный и первый микроуровни. Для них будем использовать обозначения без индексов:

$$t_0 = t,\ \ t_1\mathrm{E} = \tau,\ x_0 = x,\ x_1\mathrm{E} = \xi.$$

В (8) исключены мегауровни пространства и времени. В поле зрения остаются только вещественный уровень и микроуровни. Техника дифференцирования и интегрирования не позволяет ограничиться только конечным числом микроуровней. Число микроуровней должно быть бесконечно большим. Однако фактическое число степеней свободы является конечным. Даже когда речь идет о неограниченном числе степеней свободы, то всегда имеется в виду, что есть некоторый закон, который записывается с помощью конечного и обозримого числа символов и который охватывает все неограниченное число указанных степеней свободы. У нас самым естественным подобным законом является предположение о том, что, начиная с некоторого микроуровня номер M переход на уровни меньшего масштаба осуществляется по непрерывности. Тогда

$$\mathrm{T} = t + \tau + \ldots + \bar{\tau}_M.$$

Как и прежде, черту в обозначении будем опускать.

Непрерывные движения. Пусть $M = 1$. Рассмотрим движение по закону

$$\begin{gathered} \mathrm{X(T)} = \frac{g\mathrm{T}^2}{2} = \frac{g(t+\tau)^2}{2} = \frac{gt^2}{2} + gt\cdot\tau + \frac{g\tau^2}{2}, \\ \frac{\partial \mathrm{X}(t,\tau)}{\partial\tau} = g\tau + gt,\quad \frac{\partial \mathrm{X}(t,\tau)}{\partial t} = gt + g\tau, \\ \frac{\partial^2 \mathrm{X}(t,\tau)}{\partial\tau^2} = g,\quad \frac{\partial^2 \mathrm{X}(t,\tau)}{\partial t^2} = g,\quad \frac{\partial^2 \mathrm{X}}{\partial t\partial\tau} = g. \end{gathered} \tag{9}$$

В начальный момент времени $t = 0$, $\tau = 0$ мы находимся в точке $x = 0$, $\xi = 0$. После старта пошел отсчет времени на микроуровне τ. Этот отсчет идет при фиксированном значении t, равном 0 (т.е. в пределах вещественного момента времени $0_{\text{вещ}}$). Согласно (9), за это время точка может сместиться только в пределах второго микроуровня пространственной оси

$$\mathrm{X}(0,\tau) = \frac{g\tau^2}{2} = \frac{gt_1^2}{2}\cdot\mathrm{E}^2.$$

Движение на данном микроуровне является равноускоренным, ускорение равно g. Этот процесс может идти только до точки горизонта $\tau = \tau^*$. Через время τ^* мы вступаем в новую реальность. Она выражается в том, что мы переходим к бóльшим значениям t на вещественном масштабном уровне. По отношению к микроуровню это равносильно переходу в новую геологическую эпоху, номер которой становится новым параметром процесса. В равенствах (9) роль данного параметра играет величина t. При фиксированном значении t переменная τ опять увеличивается от нуля до τ^*. Движение по-прежнему является равноускоренным, скорость линейно растет с увеличением времени τ. Интересно отметить, что параметр t влияет на скорость через аддитивное слагаемое gt, а также на смещения. Из (9) видно, что теперь смещение происходит на первом и втором масштабном уровнях:

$$\mathrm{X} = \frac{gt^2}{2} + gt \cdot t_1 \cdot \mathrm{E} + \frac{gt_1^2}{2} \cdot \mathrm{E}^2.$$

Затем опять совершается переход через точку горизонта $\tau = \tau^*$, значение t увеличивается и т.д. Замечательной особенностью процесса (9) является то, что ни одна его характеристика не зависит от расстояния до точки горизонта τ^*. Данное обстоятельство есть прямое следствие непрерывности движения на стыке различных масштабных уровней пространства и времени.

Аналогично можно рассмотреть любые типы движения частицы, которые задаются на основе понятий о вещественных временнóй и пространственных осях. На данных осях нет масштабных уровней, поэтому перенося эти законы на неархимедовы оси, мы будем всегда получать движения, непрерывные на стыке различных масштабных уровней.

Разрывные движения. Описание «кинематографической реальности». Рассмотрим теперь класс движений, которые могут быть разрывными на стыке различных масштабных уровней. Ограничимся двумя масштабными уровнями времени: $\mathrm{T} = t + \tau$. Пусть

$$\begin{gathered}\mathrm{X}(t,\tau) = \frac{gt^2}{2}, \quad \frac{\partial \mathrm{X}(t,\tau)}{\partial \tau} \equiv 0, \quad \frac{\partial \mathrm{X}(t,\tau)}{\partial t} = gt, \\ \frac{\partial^2 \mathrm{X}(t,\tau)}{\partial \tau^2} \equiv 0, \quad \frac{\partial^2 \mathrm{X}(t,\tau)}{\partial t^2} = g.\end{gathered} \tag{10}$$

Старт осуществляется в начальный момент времени $t = 0$, $\tau = 0$. После старта начинается отсчет времени. Вначале τ растет от 0 до τ^* при постоянном $t = 0$. Из (10) видно, что на этом промежутке времени тело остается неподвижным. Затем скачком происходит переход в новое положение и опять какое-то время $0 \le \tau \le \tau^*$ сохраняется состояние покоя и т.д. Подобный характер движения соответствует кинематографической реальности. По-видимому, впервые идея о возможности такой реальности была высказана Клиффордом на заре создания кинематографа [50]. Позднее она не раз выдвигалась и обсуждалась во многих работах [51] (см. введение). Здесь подобная реальность достаточно просто описывается в рамках построенного математического аппарата. В самом простом варианте можно задать любую функцию $X = X(t)$, и она всегда будет соответствовать некоторой строго «кинематографической» кинематике. Действительно, $\partial X(t) / \partial \tau \equiv 0$. Следовательно, на микроуровне времени точка строго неподвижна и любое ее перемещение, видимое на вещественном уровне, — это всегда сумма скачков на стыке масштабных уровней.

Следует отметить, что здесь речь идет только о возможностях математического аппарата для описания подобной реальности. Для того чтобы говорить о действительном описании подобных процессов, необходимо привлечение динамических уравнений. Если предположить выполнение принципа Гамильтона — Остроградского, то мы придем к уравнениям § 46. Возьмем для примера решение (4) § 47 этих уравнений для точки, которая движется прямолинейно под действием постоянной силы F:

$$u(t,\tau) = \frac{F}{m}\frac{(t+\tau)^2}{2} + \frac{F}{G}\frac{t^2}{2} + \frac{F}{G}\frac{\tau_q - \tau_p}{2}t + v^0 \cdot (t+\tau) + v^0 \cdot \frac{m}{G}t + D. \qquad (11)$$

Здесь вместо координаты $X(t,\tau)$ используется перемещение $u(t,\tau)$. Постоянные D и v^0 имеют смысл начальных положения и скорости частицы. Из решения видно, что динамически чисто кинематографическая картина движения невозможна. Однако к ней можно приблизиться, если положить $v^0 = 0$ и неограниченно увеличивать массу m. В пределе получим

$$u(t,\tau) = \frac{F}{G}\frac{t^2}{2} + \frac{F}{G}\frac{\tau_q - \tau_p}{2}t.$$

Данные перемещения связаны только со скачками функции. Для равноускоренного движения появление квадратичного слагаемого по времени кажется естественным. А вот появление слагаемого, пропорционального первой степени времени, — довольно неожиданно. (Начальная скорость здесь — точный нуль.) По величине данное слагаемое является бесконечно малым по сравнению с первым слагаемым (за счет величин τ_p, τ_q). Однако в эффектах, связанных с возможностью необратимости неархимедова времени, роль данного слагаемого может стать принципиальной.

Второй предельный случай реализуется при $G \to \infty$. Здесь решение (11) принимает вид

$$u(t,\tau) = \frac{F}{m}\frac{(t+\tau)^2}{2} + v^0(t+\tau) + D.$$

Это есть не что иное, как классическое решение, описывающее равноускоренное движение точки:

$$u(\mathrm{T}) = \frac{F}{m}\frac{\mathrm{T}^2}{2} + v^0 \cdot \mathrm{T} + D,$$

где $\mathrm{T} = t + \tau$ — время. Действительная многомасштабность времени Т в данном случае не проявляется.

Эффект «мгновенного» перемещения частицы. Рассмотрим еще один принципиально новый класс (теоретически) возможных движений частицы. Пусть $\mathrm{X} = \mathrm{X}(t,\tau)$. Разложим данную функцию на компоненты, соответствующие смещениям на различных масштабных уровнях пространства:

$$\mathrm{X}(t,\tau) = \mathrm{X}_0(t,\tau) + \mathrm{X}_1(t,\tau)\mathrm{E} + \mathrm{X}_2(t,\tau)\mathrm{E}^2 + \ldots + \mathrm{X}_\omega(t,\tau)\mathrm{E}^\omega + \ldots .$$

Компоненты смещения на мегауровнях исключены, значения всех компонент $\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1 \ldots$ принадлежат к вещественному масштабному уровню. Зависимость компоненты X_0 от t является вполне естественной. Она означает, что изменение времени на вещественном масштабном уровне приводит к смещению также на вещественном масштабном уровне. В факте зависимости остальных компонент от t также нет ничего удивительного. Эти зависимости описывают роль t как параметра, либо описывают микросмещения, которые реализуются с течением времени t. Например, $\mathrm{X}(t,\tau) = \mathrm{E}^3 \cdot t$. Зависимость компонент $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2 \ldots$ от τ означает изменение микросмещений с течением времени на микроуровне.

Теперь главный вопрос — что означает возможная зависимость компоненты X_0 от τ. Величина X_0 — переменная вещественного уровня, $\tau = t_1 \cdot \mathrm{E}$ — переменная микроуровня. Например, пусть

$$\mathrm{X}(t,\tau) = 3 \cdot t + 4 \cdot t_1. \tag{12}$$

Пусть $t \geq 0$; $0 \leq t_1 \leq 1$, $t_1 = 1$, или $\tau = \mathrm{E}$ — точка горизонта. Равенство (12) означает, что при фиксированном t частица получает смещение, равное 4, за счет увеличения микровремени от 0 до Е. Для наблюдателя, который способен воспринимать только вещественный уровень пространства и времени, данное движение выглядит как мгновенное перемещение тела на расстояние, равное 4 единицам. Рассмотренный выше аппарат позволяет дать полное описание подобных явлений, если в этом возникнет необходимость.

4. Роль боковых компонент времени и пространства. Эффект одновременного присутствия частицы в различных точках пространства

Как и прежде, ограничимся одномерным движением материальной точки. Ее пространственная координата

$$Z = \mathrm{X}_1 j_1 + \mathrm{X}_2 j_2 + \ldots + \mathrm{X}_N j_N$$

зависит от времени

$$\Theta = \mathrm{T}_1 j_1 + \mathrm{T}_2 j_2 + \ldots + \mathrm{T}_N j_N,$$

т.е.

$$Z = Z(\Theta).$$

Данная функция сводится к N функциям от N независимых переменных

$$\begin{aligned} &\mathrm{X}_1 = F_1(\mathrm{T}_1, \ldots \mathrm{T}_N), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\mathrm{X}_N = F_N(\mathrm{T}_1, \ldots \mathrm{T}_N). \end{aligned} \tag{13}$$

Размерность N ничем не ограничена. Кроме того, каждая из указанных переменных может пробегать неограниченное число масштабных уровней неархимедовой прямой. Следовательно, класс возможных движений (13) является достаточно широким.

Роль боковой компоненты времени. Начнем с самого простого случая, когда учитывается только одна боковая компонента времени. Боковые компоненты пространства в расчет принимать пока не будем.

Итак, пусть $N = 2$; $F_1 \equiv F_2 \equiv F$, $\mathrm{X} = \dfrac{\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2}{2}$ — магистральная пространственная координата, а T_1, T_2 — компоненты двумерного времени Θ:

$$\Theta = \mathrm{T}_1 j_1 + \mathrm{T}_2 j_2$$

$$j_1 + j_2 = 1;\ \ j_1^2 = j_1;\ \ j_2^2 = j_2,\ \ j_1 j_2 = 0.$$

Отсюда магистральная Т и боковая компонента времени ϑ равны:

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2}{2},\ \ \vartheta = \frac{\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2}{2};\ \ \Theta = \mathrm{T} + \vartheta j,$$

$$j = j_1 - j_2;\ \ j^2 = 1.$$

Таким образом, мы приходим к следующей функции двух переменных:

$$X = F(T, \vartheta). \tag{14}$$

Функция описывает изменение координаты частицы с течением времени T. Все состояния по боковой компоненте времени ϑ можно считать (как это было показано выше) актуально заданными. Зафиксируем некоторый момент времени T и построим график X как функции от ϑ. Мы должны признать, что область значений данной функции — это область, в каждой точке которой изучаемая частица присутствует одновременно. Все сделанные построения приводят к этому выводу, каким бы необычным он ни казался. Но что значит необычным? Здесь мы пришли к такому выводу, рассматривая процесс движения материальной точки на микроуровне. Условно говоря, материальная точка имела размер существенного числа и движение ее рассматривалось внутри области, которая в архимедовом анализе называлась точкой (т.е. внутри вещественного числа). При этом «моменты» неархимедова времени находились внутри области, которой в архимедовом анализе соответствует некоторое вещественное число $t_{\text{вещ}}$. Это с одной стороны. С другой стороны, области малых масштабов пространства и времени изучаются методами квантовой механики. А в квантовой механике представление об одновременном пребывании частиц в различных точках пространства является вполне приемлемым. Указанных двух посылок вполне достаточно для того, чтобы продолжить изучение роли боковых компонент времени.

На этом пути сразу можно сделать одно обобщение. Исходные посылки были таковы, что значения переменной ϑ в (14) могут быть только бесконечно малыми величинами. Точно также и изменения координаты X при изменении ϑ должны быть бесконечно малыми. Именно эти два условия обеспечивают место исследуемой материальной точки внутри образований, которые называются вещественными числами. Указанные условия означают, что в гиперкомплексном многомерном пространстве мы всегда должны находиться в окрестности магистральных прямых OT и OX. Ничто, однако, не мешает нам снять это ограничение и рассмотреть более общую ситуацию, когда на малость компоненты $|\vartheta|$ и малость изменения $|X|$ никаких условий не накладывается.

Итак, вернемся к (14) и построим график X как функции боковой компоненты времени ϑ при фиксированном моменте магистральной компоненты T. Значения данной функции указывают на точки пространства, в которых находится частица в один и тот же момент времени T. Здесь возможен широкий диапазон различных состояний — от состояния вездесущности до полностью локализованного состояния. В первом случае материальная точка находится одновременно во всех точках оси OX. Например, если (рис. 11.1)

$$X(T, \vartheta) = \frac{gT^2}{2} + \mathrm{tg}\vartheta, \quad |\vartheta| < \frac{\pi}{2}. \tag{15}$$

Во втором случае — только в одной точке пространства. Например, при

$$X = \frac{gT^2}{2}, \quad 0 \le \vartheta \le 1, \quad g = \mathrm{const}. \tag{16}$$

(Предполагается, что везде сделан переход к безразмерным переменным, рис. 11.2.) В последнем случае координата X от боко-

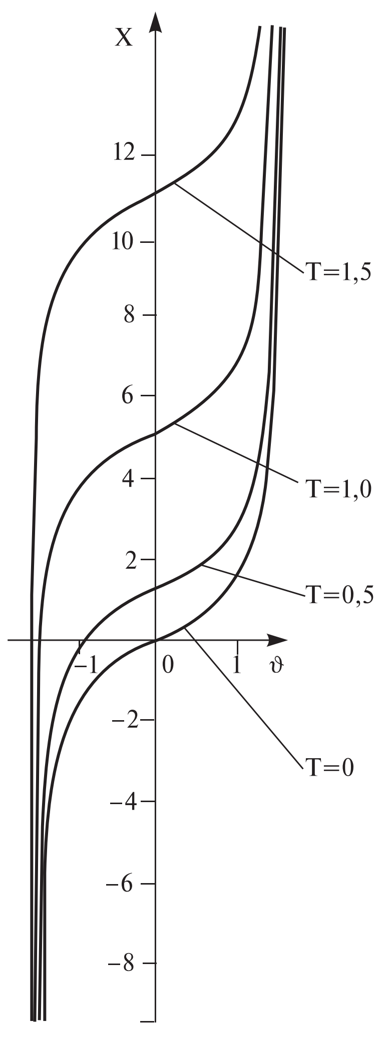

Рис. 11.1.

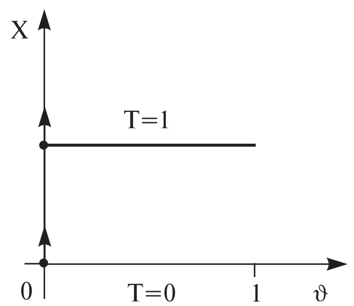

Рис. 11.2.

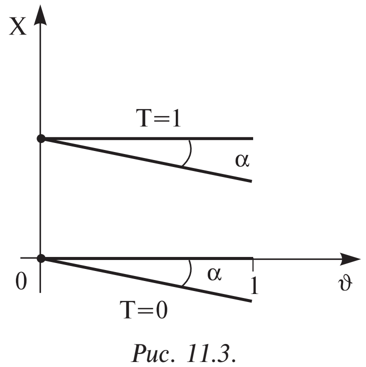

Рис. 11.3.

вой компоненты времени ϑ не зависит. Поэтому график (16) представляет собой отрезок прямой, параллельной оси $O\vartheta$. С течением времени T левый конец отрезка ($\vartheta = 0$) движется по определенному закону вдоль оси OX. При этом весь отрезок следует за данной точкой без отставания, т.е. перемещается, оставаясь все время строго параллельным оси $O\vartheta$. Нетрудно вообразить некоторую инерцию в движении данного отрезка. Тогда, например, получим (рис. 11.3)

$$X(T, \vartheta) = F(T) - \vartheta \cdot \mathrm{tg}\alpha,\ 0 \le \vartheta \le 1, \tag{17}$$

где $\mathrm{tg}\alpha$ имеет тот же знак, что и скорость dX / dT. Пусть существует производная dX / dT и

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{dX}{dT} > 0.$$

Согласно (17), частица движется так, что за ней тянется шлейф ее прежних положений. Причем частица присутствует в каждой точке указанного шлейфа, т.е. в точках пространственного интервала

$$F(T) - \frac{dX}{dT} \le X \le F(T). \tag{18}$$

Данную ситуацию можно представить как движение частицы, о котором можно судить только по фотоснимкам, сделанным с большой выдержкой. На каждом снимке видна не отдельная частица, а отрезок (18) (смазанное изображение). При этом с увеличением скорости степень нелокализованности частицы (длина отрезка (18)) увеличивается. Здесь открывается достаточно широкое поле для различных построений.

Вероятностная трактовка эффекта одновременного присутствия частицы в различных точках пространства. Если мы смотрим на мир со степенью разрешения, которую дает классический анализ, то и теорию вероятностей для событий, которые происходят в этом мире, мы строим с той же степенью разрешения. При этом сама вероятность представляет собой число из интервала [0, 1], принадлежащего вещественной прямой. Перейдем теперь к неархимедову анализу, увеличив тем самым разрешающую способность наших наблюдений. Это дает возможность увеличить разрешающую способность и теории вероятностей. Теперь вероятность будет измеряться числом из интервала [0, 1], принадлежащего уже неархимедовой прямой. (Например, вероятность может быть равна не только 0 или 0,5, но и E; $0{,}5 - E^2$ и т.д.) Такую теорию можно развить по той же схеме, что и классическую (т.е. архимедову) теорию вероятностей.

Вернемся к закону движения (15). При изменении боковой компоненты времени ϑ от $-\pi/2$ до $\pi/2$ функция (15) пробегает всю ось OX. Значит, частица является вездесущей. При увеличении T область присутствия частицы не меняется. По-прежнему частица присутствует во всех точках оси OX. Значит ли это, что в данном примере магистральное время T никакой роли не играет? Конечно, нет. Функция (16) зависит от магистрального времени существенно. Требуется только дать интерпретацию этой зависимости.

Интуитивно ясно, что точки в которых частица находится одновременно, все же как-то различаются между собой. Понять это различие можно, прибегнув к следующему приему. Зафиксируем момент магистрального времени $T = 0$ и рассмотрим боковую компоненту времени ϑ именно как текущее время. Пусть в законе (15) ϑ увеличивается («течет») от 0 до $\pi/2$, оставаясь меньше, чем $\pi/2$. Тогда наша частица будет двигаться (во времени ϑ) из точки $X = 0$ в область все больших значений X. Разобьем полуось $X \geq 0$ на одинаковые интервалы длиной ΔX. Частица будет проходить их с разными скоростями. Чем дальше интервал от начала координат, тем меньшее время частица пребывает в нем. Данное время пребывания может быть принято за меру несимметрии точек оси в смысле одновременного пребывания в них исследуемой частицы.

Здесь сама собой напрашивается идея воспользоваться интерпретацией функции Ψ в квантовой механике и дать вероятностную трактовку факта одновременного пребывания частицы в различных точках пространства. Время пребывания частицы в интервале ΔX можно объявить (после нормировки) вероятностью попадания частицы в интервал ΔX. Проведение соответствующих выкладок не представляет никаких трудностей. Для того чтобы не отвлекаться на несущественные детали, допустим, что боковое время ϑ может меняться от 0 до ϑ^* и функция $F(T, \vartheta)$ при этом монотонно возрастает от 0 до X^*. Образуем обратную функцию

$$\vartheta = \Phi(T, X).$$

Пусть X^0 — некоторое значение координаты X. Положим по определению, что

$$P(X^0, T) = \frac{1}{\vartheta^*}\Phi(T, X^0).$$

Функцию $P(X^0, T)$ назовем вероятностью того, что в момент времени T частица попадает в интервал $0 \leq X \leq X^0$. (Можно привести обоснования для такого названия.) Указанная интерпретация полностью снимает проблему «одновременности».

Можно, правда, сказать и по-другому: такая интерпретация придает понятию вероятности новое понимание — именно понимание того, что, например, с некоторым субъектом «одновременно» может совершаться цепь несовместимых между собою событий. Можно предположить, что именно такое понимание вероятности (конечно, в других образах) стоит за высказываниями типа «В чужих судьбах можно прочитать свою судьбу» или за известными строками Джона Донна.

Роль боковых пространственных компонент. Ограничимся одномерным движением частицы и случаем, когда вступает в действие только одна боковая компонента смещения и времени. Тогда

$$Z = F(\Theta), \quad Z = \mathrm{X}_1 j_1 + \mathrm{X}_2 j_2, \quad \Theta = \mathrm{T}_1 j_1 + \mathrm{T}_2 j_2$$

или

$$\begin{aligned} \mathrm{X}_1 &= F_1(\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2), \\ \mathrm{X}_2 &= F_2(\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2). \end{aligned} \tag{19}$$

Магистральная и боковая компоненты времени и пространственной переменной равны

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2}{2}, \quad \vartheta = \frac{\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2}{2},$$
$$\mathrm{X} = \frac{\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2}{2}, \quad æ = \frac{\mathrm{X}_1 - \mathrm{X}_2}{2}.$$

Поэтому вместо (19) можно записать

$$\begin{aligned} \mathrm{X} &= \Phi(\mathrm{T}, \vartheta), \\ æ &= \Psi(\mathrm{T}, \vartheta). \end{aligned} \tag{20}$$

Соотношения (20), хотя и являются простым вариантом общего случая (13), тем не менее содержат достаточно много различных возможностей. Для их классификации необходимы дополнительные принципы. Эти принципы могут диктоваться нашими представлениями о том, какие именно процессы реально возможны, а какие возможны только теоретически. Предположим, что прямым наблюдениям доступны только магистральные компоненты времени и смещения. Боковые компоненты непосредственным наблюдениям недоступны, но могут быть обнаружены по косвенным признакам.

Если уравнения движения и начально-краевые условия таковы, что можно определить первую функцию в (20), то необходимости в определении второй функции не возникает. Какой смысл заниматься ненаблюдаемыми переменными, если без них можно обойтись? Но вполне возможна и другая ситуация, когда боковые компоненты æ и ϑ должны фигурировать в самих законах движения. Тогда мы не можем получить первое равенство (20), не анализируя второго. Это можно показать на следующем примере.

Предположим, что из каких-то соображений нам удалось установить, что особый интерес представляют движения, которые описываются функциями, являющимися аналитическими. Тогда в соответствии с (5) § 50 имеем

$$\mathrm{X}_1 = F_1(\mathrm{T}_1), \ \ \mathrm{X}_2 = F_2(\mathrm{T}_2).$$

Следовательно,

$$\mathrm{X} = \frac{F_1(\mathrm{T} + \vartheta) + F_2(\mathrm{T} - \vartheta)}{2},$$

$$æ = \frac{F_1(\mathrm{T} + \vartheta) - F_2(\mathrm{T} - \vartheta)}{2}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \mathrm{T}} = \frac{\partial æ}{\partial \vartheta}, \ \ \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \vartheta} = \frac{\partial æ}{\partial \mathrm{T}}.$$

Таким образом, следствием аналитичности является тесная связь между скоростями изменения магистральной и боковой компонент смещения. Подобные и другие более общие связи могут следовать также из других принципов, которые управляют поведением частиц на микромасштабных уровнях. В подобных случаях также необходимо учитывать боковые пространственные перемещения.

Глава 12

Некоторые приложения

Областью приложений неархимедова анализа является круг задач, для решения которых разрешающей способности классического анализа недостаточно. Прежде всего, это задачи измерения углов касания, оптимального управления, теории пластичности, механики горных пород и др. Неархимедово пространство обладает иерархией масштабных уровней. Поэтому здесь сам математический аппарат приспособлен для описания процессов, которые реализуются на ряде масштабных уровней. В механике наиболее известными процессами такого рода являются турбулентные течения вязкой жидкости и процессы деформирования массива горных пород.

Вообще появление нового инструмента исследований всегда открывает и новые области приложений. Возможные приложения неархимедова анализа к теории пластичности и механике геоматериалов рассматривались в работах [20–30]. Далее ограничимся кратким описанием модели горной породы с двумя структурными уровнями.

§ 52. Математическая модель горной породы с двумя структурными уровнями

Пусть деформирование осуществляется в плоскости OX_1X_2, где OX_1, OX_2 — неархимедовы прямые. Предположим, что среда занимает определенную область на вещественном и последующих микроуровнях данной плоскости, т.е.

$$X_1 = x_1 + \xi_1 + \ldots, \quad X_2 = x_2 + \xi_2 + \ldots. \tag{1}$$

Здесь индекс указывает на номер пространственной координаты. Иными словами, в (1) и ниже x_1, x_2 — это числа вещественного уровня, а ξ_1, ξ_2 — числа первого микроуровня, т.е. оба числа ξ_1/E, ξ_2/E принадлежат к вещественному масштабному уровню. Предположим, что при описании процесса деформирования масштабные уровни с номерами 2, 3... можно не учитывать. Поэтому невыписанные аргументы включим в аргументы ξ_1 и ξ_2 и будем считать, что переход на микроуровни 2, 3... можно осуществлять по непрерывности с микроуровня 1.

Пусть $\overline{u}$ — вектор перемещений. В одномасштабной архимедовой плоскости вектор $\overline{u}$ мог зависеть только от двух вещественных переменных. Производные от компонент вектора определяли тензор деформаций и поворот. Теперь вектор перемещений зависит от четырех пространственных координат (и это по-прежнему в плоском случае):

$$\overline{u} = \overline{u}(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2). \tag{2}$$

Производные по переменным ξ_1, ξ_2 определяют компоненты микродеформаций, а производные по x_1, x_2 — компоненты макродеформаций. Из множества возможных вариантов остановимся на самом простом, когда переход с микроуровня на вещественный уровень можно описать с помощью производных от функций. Согласно (2), деформации среды на вещественном уровне и последующих микроуровнях описываются тензорами с компонентами

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \;\; e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i}\right), \;\; i,j = 1,\ 2.$$

Их разности (наряду с разностью поворотов) дают описание кинематики процессов, которые происходят на стыке разных уровней.

Вопрос о напряжениях гораздо сложнее. Ряд трудностей удается снять, если вместо тензора напряжений ввести функцию, имеющую смысл вектора внутренних усилий.

Процедуру введения данной функции можно пояснить, рассматривая деформирование в обычной архимедовой плоскости.

Пусть некоторое тело деформируется в плоскости Ox_1x_2 (рис. 12.1). Зафиксируем точку O, принадлежащую телу, и соединим ее с точкой A произвольной кривой OBA, также принадлежащей телу. Обозначим через $\overline{f} = \{f_1, f_2\}$ усилие, которое действует на контур OBA со стороны нормали, показанной на рис. 12.1. Если взять другой контур $OB'A$, то усилие будет таким же. (Нагружение

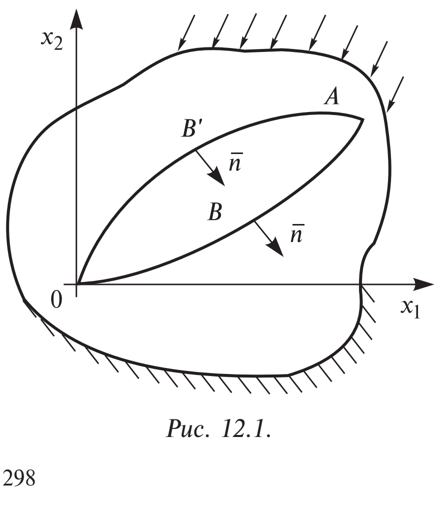

Рис. 12.1.

является квазистатическим, массовые силы отсутствуют.) Таким образом, функция $\bar{f}$ зависит только от координат точки A. Связь функции $\bar{f}$ с напряжениями дается формулами

$$\sigma_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \quad \sigma_{12} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \quad \sigma_{21} = -\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \quad \sigma_{22} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1}. \tag{3}$$

Условие парности касательных напряжений приводит к уравнению

$$\operatorname{div} \bar{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0. \tag{4}$$

Таким образом, во всех построениях вектор $\bar{f}$ может заменить тензор напряжений. При этом два уравнения равновесия относительно напряжений переходят в одно уравнение (4).

Предположим, что определяющие уравнения связывают компоненты напряжений с компонентами деформаций. Сделаем замену (3). В результате получим четыре уравнения первого порядка относительно компонент векторов $\bar{u}$ и $\bar{f}$. Во многих отношениях такая система более удобная и естественная, чем та, которая обычно используется, т.е. система из пяти уравнений относительно смещений и напряжений: два уравнения равновесия плюс три определяющих уравнения. В определенном смысле последняя система является патологической. Действительно, формально она представляет собой пять дифференциальных уравнений первого порядка, однако сводится к одному уравнению только четвертого порядка (в упругости — к бигармоническому уравнению относительно функции Эри). Далее, условия Коши для такой системы всегда будут зависимыми между собой и т.д. [16, 26]. Система же относительно переменных $\bar{u}$ и $\bar{f}$ от указанных недостатков свободна. Следует также отметить, что функция $\bar{f}$ с необходимостью появляется в формулах Колосова — Мусхелишвили. Причем ясно видна равноправность векторов $\bar{u}$ и $\bar{f}$: структура формул относительно $u_1 + i \cdot u_2$ и $f_1 + i \cdot f_2$ одинакова [132].

Вернемся теперь к неархимедовой плоскости (1). Здесь функция $\bar{f}$ зависит от четырех переменных: $f_1 = f_1(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2)$, $f_2 = f_2(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2)$. Ее производные по x_1, x_2 — это напряжения (3) вещественного масштабного уровня, производные по ξ_1, ξ_2 — напряжения микроуровня

$$t_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2}, \quad t_{12} = \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2}, \quad t_{21} = -\frac{\partial f_1}{\partial \xi_1}, \quad t_{22} = -\frac{\partial f_2}{\partial \xi_1}.$$

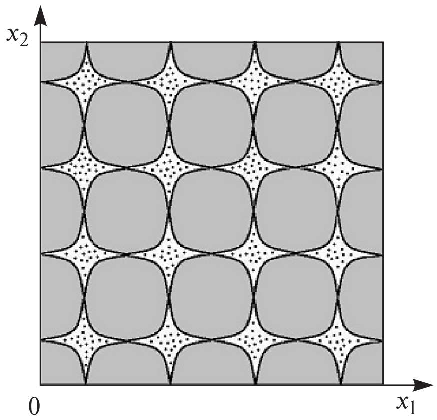

Рис. 12.2.

Отсюда сразу следуют условия совместности напряжений, которые получить другим способом было бы весьма затруднительно:

$$\frac{\partial t_{11}}{\partial x_2} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \xi_2}, \quad \frac{\partial t_{12}}{\partial x_2} = \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \xi_2},$$

$$\frac{\partial t_{21}}{\partial x_1} = \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \xi_1}, \quad \frac{\partial t_{22}}{\partial x_1} = \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \xi_1}.$$

Перейдем к определяющим уравнениям. Известно, что для их формулировки необходимо привлечение экспериментальных данных, гипотез о механизме деформирования среды и т.д. Будем исходить из упругопластической модели горной породы [9–11, 16].

Пусть эффективная регулярная упаковка несущих зерен ориентирована вдоль координатных осей (рис. 12.2). В неархимедовой плоскости (1) производным по координатам x_1, x_2 соответствуют осредненные деформации, взятые на базе, относящейся к центрам частиц. Производным по переменным ξ_1, ξ_2 соответствуют деформации самих частиц (микродеформации). Различия в данных производных описывают проскальзывания на контактах между частицами.

Рассмотрим структуру определяющих уравнений. Влиянием поровой среды пренебрежем. Отсюда следует, что $t_{ij} = \sigma_{ij}$, или

$$\frac{\partial f_i}{\partial \xi_j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}. \tag{5}$$

Нет большого смысла учитывать неоднородность деформаций и напряжений в пределах отдельных частиц. В [16] используются осредненные характеристики частиц и предположение об их упругом поведении. С учетом (3), (5) закон Гука для плоской деформации можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} = e_{11} = \frac{1-\nu}{2\mu} \cdot \frac{\partial f_1(x_1, x_2, 0{,}0)}{\partial \xi_2} + \frac{\nu}{2\mu} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1},\\
&\frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} = e_{22} = -\frac{1-\nu}{2\mu} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} - \frac{\nu}{2\mu} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2},\\
&\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} = 2e_{12} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2},
\end{aligned} \tag{6}$$

где ν, μ — упругие постоянные.

Перейдем теперь к вопросу об уравнениях для описания перехода с одного масштабного уровня на другой. Рассмотрим форму типичного уравнения для одномерного случая. Пусть $u = u(X) = u(x, \xi)$ — некоторая функция, зависящая от неархимедовой переменной и ρ — известный актуально бесконечно малый размер, который управляет переходом с одного масштабного уровня на другой. Предположим, что разрыв в точке $X = x + \rho$ известен:

$$u(x + \rho, 0) - u(x, \rho) = R. \tag{7}$$

Из (7) заключаем, что

$$u(x + \rho, 0) - u(x, 0) = \int_0^\rho \frac{\partial u(x, \xi)}{\partial \xi} d\xi + R. \tag{8}$$

Правая часть должна быть задана как функция от искомых переменных и координат. Поэтому (8) представляет собой уравнение в бесконечно малых разностях. В качестве первого приближения рассмотрим уравнение, которое получается из (8) предельным переходом при $\rho \to 0$. Данное уравнение относится уже к дифференциальным относительно производной $\partial u(x, 0) / \partial x$.

Аналогичные уравнения для проскальзываний между зернами имеют вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_1(x_1, x_2, 0, 0)}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1(x_1, x_2, 0, 0)}{\partial \xi_1}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2}, \\ &\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} = -\frac{1}{G_1} \frac{\partial f_1(x_1, x_2, 0, 0)}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} = -\frac{1}{G_2} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \end{aligned} \tag{9}$$

где G_1, G_2 — пластические модули. Первые два уравнения констатируют отсутствие дилатансии, последние два — описывают независимые проскальзывания на контактах из различных семейств (см. рис. 12.2).

Подведем итог. Получена система, которая включает в себя одно уравнение вида (4), четыре уравнения (5), три уравнения (6) и четыре уравнения (9), т.е. получено 12 уравнений относительно четырех неизвестных функций f_i, u_i, $i = 1, 2$. Система, тем не менее, переопределенной не является. Все дело в том, что каждая из функций зависит не от двух, а от четырех аргументов: $f_i = f_i(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2)$, $u_i = u_i(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2)$. Природа «дополнительных» уравнений связана именно с новыми пространственными переменными, которые появляются в неархимедовом случае. Эту ситуацию проще всего пояснить на самом простом примере линейно-упругого типа.

Пусть тело является линейно-упругим и на вещественном масштабном уровне. Этот факт описывается четырьмя уравнениями относительно u_1, u_2, f_1, f_2. Пусть, кроме того, известно, что имеет место непрерывность между вещественным и первым микроуровнем. Для описания этого факта требуется уже восемь уравнений:

$$\frac{\partial f_i(x_1 x_2, \xi_1 \xi_2)}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i}{\partial \xi_j}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j}. \tag{10}$$

Решение данных уравнений имеет вид

$$f_i = f_i(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2), \quad u_i = u_i(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2). \tag{11}$$

Таким образом, восемь уравнений (10) содержат только ту информацию, что компоненты векторов $\bar{f}$ и $\bar{u}$ в действительности зависят не от четырех, а только от двух пространственных переменных. В результате приходим к четырем уравнениям упругости относительно четырех функций (11). Каждая из функций зависит только от двух пространственных координат. Система замкнута, задача корректна.

В рассматриваемой пластической модели ситуация будет аналогичной. В [23, 24, 26, 27, 29] описана численная реализация данной модели и решен ряд задач о деформировании горного массива вокруг выработок.

Глава 13

Иерархия неархимедовых прямых и теорий, имеющих все бо́льшую разрешающую способность: анализ-1, 2, 3...

Отметим еще раз следующее. Математический анализ — это инструмент теоретического исследования. Как и любой инструмент, анализ обладает вполне определенной разрешающей способностью.

Разрешающая способность классического анализа (анализа-1) определяется Первой аксиомой разрешения:

если относительно двух вещественных чисел α и β известно, что

$$|\alpha - \beta| < \frac{1}{n}, \tag{1}$$

где n — любое число из натурального ряда

$$1,\ 2,\ 3, \ldots n, \ldots\ , \tag{2}$$

то числа α и β различить между собой невозможно: $\alpha = \beta$.

Разрешающая способность теории следующего уровня (анализа-2) определяется Второй аксиомой разрешения:

если относительно двух существенных чисел σ и τ известно, что

$$|\sigma - \tau| < \frac{1}{\nu}, \tag{3}$$

где ν — любое число из натурального ряда типа 2

$$1, 2, 3, \ldots n, \ldots \omega,\ \omega + 1, \ldots \nu, \ldots\ , \tag{4}$$

то числа σ и τ между собой не различаются: $\sigma = \tau$.

Степени разрешающей способности указанных теорий мы приписывали номера 1 и 2. Проблема измерения все «более острых» роговидных углов требует создание теорий с разрешением 3, 4 и выше. Следует отметить, что потребность в создании теории с разрешением 2 диктовалась не только проблемой измерения роговидных углов, но и рядом задач, указанных во введении. Для построения теорий с разрешением 3, 4... в настоящее время не видно ни одной задачи (за исключением «вечного стимула» — измерения роговидных углов). Поэтому мы ограничимся только кратким описанием алгоритма построения подобных теорий.

О разрешающей способности классического анализа коротко можно сказать так: разрешающая способность «определяется длиной натурального ряда (2)», понимая под этим выполнение условий (1) и (2). Точно так же можно принять, что разрешающая способность анализа-2 определяется «длиной продолженного натурального ряда (4)», понимая под этим выполнение условий (3), (4). Поэтому первый вопрос, который необходимо решить при построении теорий следующего уровня, это продолжение «натурального» ряда (4). Члены продолженного ряда будут играть роль номеров продолженных числовых последовательностей. Классы эквивалентности таких последовательностей образуют объекты, которые играют ту же роль, что и вещественные числа в классическом анализе. На данной основе можно строить понятия пределов, рядов, производных и интегралов, т.е. можно строить математический анализ со степенью разрешения 3 и выше.

Таков общий план. Перейдем к реализации первой его части.

§ 53. Алгоритм построения теорий с высшими степенями разрешения

В данный алгоритм должны вписываться способы построения анализа-1 и анализа-2. Несколько изменим принятую терминологию, введя в нее указание на соответствующие номера теорий. Изначально заданный натуральный ряд 1, 2, 3… назовем натуральным рядом типа 1 (блок 1, рис. 13.1). Соответствующие (абсолютные) рациональные числа назовем рациональными числами типа 1.

Последовательностями типа 1 назовем последовательности рациональных чисел типа 1, занумерованные натуральными числами типа 1.

Предположим, что мы располагаем пространством таких последовательностей (блок 2). Дальше возможны два пути. На первом мы переходим к блоку 3. Возьмем ограниченные последовательности и разобьем их на классы эквивалентности, используя следующее условие: две последовательности r_n и r'_n отнесем к одному классу, если для любого М найдется такое Р, что при $n > \mathrm{P}$ будем иметь $|r_n - r'_n| < 1/\mathrm{M}$. (Числа М, Р и все индексы принадлежат ряду 1, 2, 3... .) Данные совокупности назовем неординарными вещественными числами типа 1. На их основе можно построить неординарный математический анализ-1 (блок 4). Если дополнительно потребовать, чтобы последовательности были фундаментальными, то указанные

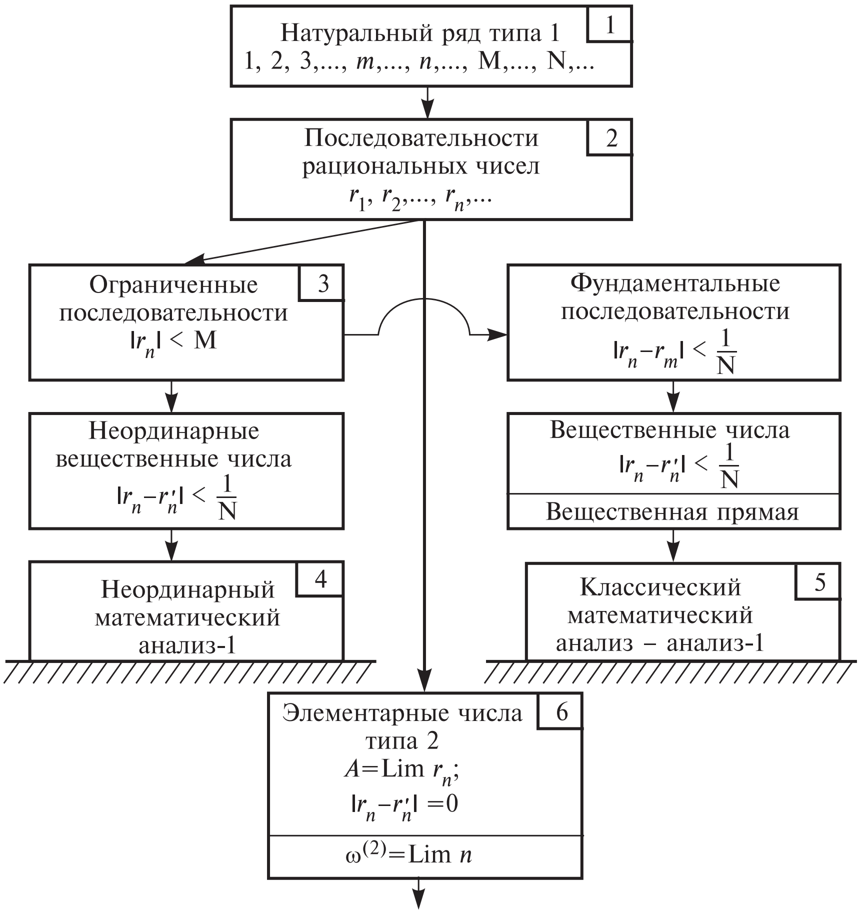

Рис. 13.1.

их совокупности будут представлять собой вещественные числа (по Кантору). Назовем их вещественными числами типа 1. На данной основе строится классический математический анализ (анализ-1) (блок 5).

Другой путь состоит в переходе от блока 2 сразу к блоку 6. Элементарным числом типа 2 назовем класс эквивалентности последовательностей r_n, которые могут отличаться только числом членов, равным некоторому натуральному числу типа 1. Обозначения следующие:

$$A = \text{Lim}\ r_n; \quad \omega = \omega^{(2)} = \text{Lim}\ n. \qquad (1)$$

Далее образуем ряд

$$1, 2, 3\ldots\omega^{(2)}, \omega^{(2)} + 1, \ldots \mu, \ldots, \nu, \ldots, \qquad (2)$$

который назовем натуральным рядом типа 2 (блок 7, рис. 13.2). Результаты арифметических операций с числами из данного ряда назовем рациональными числами типа 2. Числовым последовательностям, занумерованным числами из натурального ряда типа 2, будем также приписывать тип 2 (блок 8). Теперь такие последовательности могут состоять из элементарных чисел (1) и, в частности, из рациональных чисел типа 2. Рациональные числа r типа 1 отождествляются с рациональными числами типа 2 посредством процедуры $r \to \mathrm{Lim}\, r$ с сохранением обозначения $\mathrm{Lim}\, r = r$.

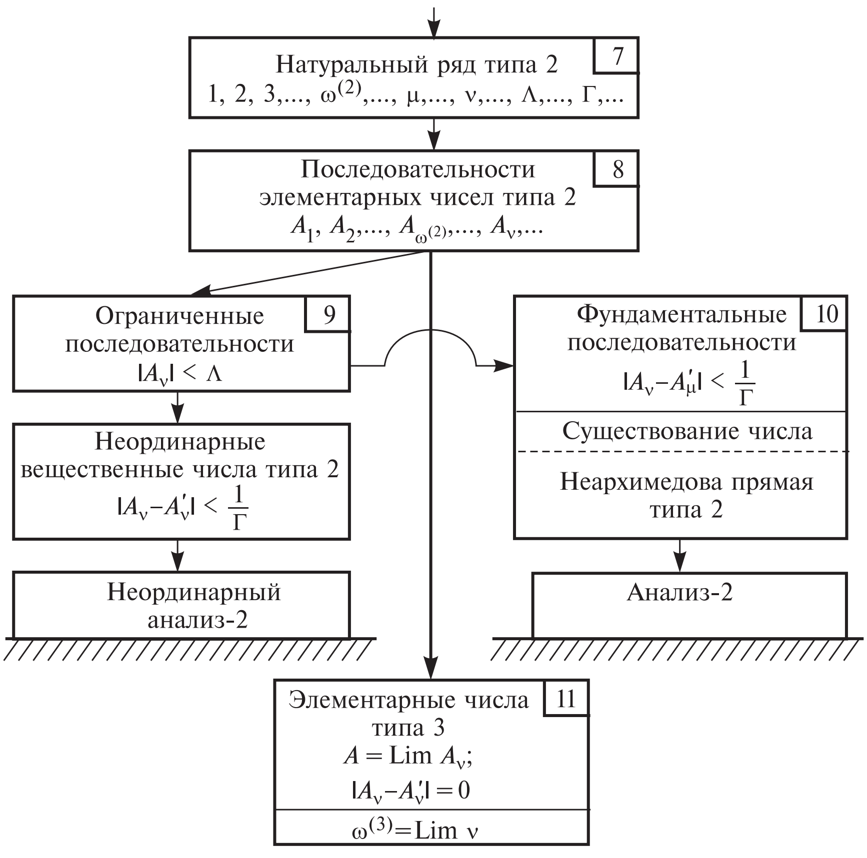

Рис. 13.2.

Для дальнейших построений снова есть два пути. Первый путь состоит в переходе к блоку 9. Берем ограниченные последовательности A_ν ($|A_\nu| < \Lambda$ для любого ν из (2); Λ — некоторое число из (2)). Относим последовательности A_ν и A'_ν к одному классу, если $|A_\nu - A'_\nu| < 1/\Gamma$ для любого Γ из (2) и $\nu > \lambda(\Gamma)$, λ — число из (2). Данные классы назовем неординарными вещественными числами типа 2. По-видимому, это слишком широкая числовая система. Поэтому вопрос о построении на ее основе неординарного анализа-2 не рассматривался и даже не ставился. Сузим данную числовую систему, потребовав дополнительно фундаментальность числовых последовательностей. В результате придем к многомерной системе вещественных чисел типа 2, т.е. к многомерной области существенных чисел. Следующий шаг состоит в том, чтобы из многомерной области выделить линейно упорядоченную одномерную подобласть. В результате придем к неархимедовой числовой прямой типа 2 (блок 10). На основе указанных систем строится анализ-2.

Вернемся теперь к блоку 8 (см. рис. 13.2). Второй путь движения от этого блока состоит в том, чтобы сразу перейти к блоку 11.

Элементарным числом типа 3 назовем класс эквивалентности последовательностей элементарных чисел типа 2 таких, что $|A_\nu - A'_\nu| = 0$ при $\nu > \Lambda$, где Λ — некоторое число из натурального ряда типа 2. Для случая, когда $A_\nu = \nu$, используем специальное обозначение

$$\omega^{(3)} = \mathrm{Lim}\, \nu.$$

Теперь можно сделать следующий шаг в продолжении натурального ряда типа 2:

$$1, 2, \ldots \omega^{(2)}, \ldots \omega^{(3)},\ \omega^{(3)} + 1, \ldots . \tag{3}$$

При построении ряда (3) необходимо использовать дополнительные условия такого же рода, что и при построении ряда (2) (п. 5 § 3).

Дальше переходим к следующим блокам, которые повторяют блоки 7–11 с прибавлением единицы к номеру типа и т.д. В результате мы приходим к натуральному ряду типа N:

$$1, 2, \ldots \omega^{(2)}, \ldots \omega^{(3)} \ldots,\ \omega^{(N)},\ \omega^{(N)} + 1, \ldots \tag{4}$$

и соответствующему математическому анализу-N. Здесь N — произвольное натуральное число типа 1.

Теперь все готово, чтобы перейти к числовым системам и теориям с качественно новой степенью разрешения. Возьмем последовательность (4) без ограничения величины N. Объединим (4) с другими последовательностями, которые совпадают с (4) начиная с некоторого фиксированного номера из (4). Для данного класса введем обозначение

$$\omega^{(æ)} = \mathrm{Lim}\ (1, 2, \ldots \omega^{(1)}, \ldots \omega^{(2)}, \ldots \omega^{(N)},\ \omega^{(N)} + 1, \ldots).$$

Возникает вопрос: какой смысл можно придать символу æ? По логике вещей æ — это указание на тип, бóльший любого фиксированного типа с номером N. У нас уже есть математический объект, который больше любого конечного натурального числа, — это число $\omega = \omega^{(2)}$. Казалось бы, æ = ω является подходящим обозначением для нового типа. Однако это не совсем так. Дело в том, что вполне ясный и конкретный смысл имеют числа как бóльшие, чем ω, так и меньшие ω. Например,

$$\omega + 1, \ldots e^{\omega}, \ldots \sqrt{\omega}, \ldots \frac{\omega}{10}, \ldots \omega - 2.$$

Символ же æ имеет природу трансфинитного порядкового числа [105, 133–135]. Построить объекты с номерами æ + 1, æ + 2... не составляет труда. А вот тип с номером æ – 1 и тем более с номерами $\sqrt{æ}$, $e^{æ}$ представить себе невозможно (по крайней мере, в рамках рассматриваемой здесь концепции).

Нетрудно, однако, заметить, что в идейном плане процедура построения новых последовательностей совпадает с процедурой построения новых классов Бэра разрывных функций [105, 133]. В классификации Бэра совокупность функции определенного класса порождает одну функцию следующего класса. Функции первого класса заданы. Так появляются функции, принадлежащие классам k_1, $k_2 \ldots k_N \ldots$. Совокупность указанных классов без ограничения N порождает класс, индекс которого обозначается в [133] через ω. У нас обозначение ω занято, поэтому вместо ω в смысле [133] используем символ æ. Функции классов Бэра $k_1, \ldots k_N \ldots k_{æ}$ порождают функции следующего класса, для которого берется обозначение (æ + 1) и т.д.

Точно так же, разворачивая натуральный ряд типа æ, можно прийти к числу типа æ + 1:

$$\omega^{(æ+1)} = \mathrm{Lim}\,(1, \ldots \omega^{(1)}, \ldots \omega^{(N)}, \ldots \omega^{(æ)},\ \omega^{(æ)} + 1, \ldots).$$

На основе данного числа и предыдущих чисел можно построить очередное продолжение натурального ряда.

В п. 5 § 3 рассматривалась аналогия между «натуральным» рядом, построенным на основе числа $\omega = \mathrm{Lim}\, n$, и вторым числовым классом [105, 135]. Если при построении следующих отрезков натурального ряда отказаться от использования чисел типа $\omega^{(3)} - 1, \omega^{(3)}!$, $\omega^{(3)} - \omega$ и других, подобных им, то можно сказать, что описанная выше процедура аналогична процедуре построения трансфинитных чисел, принадлежащих третьему и последующим числовым классам [105].

Таким образом, в результате мы приходим к неархимедовым прямым и соответствующим теориям с любыми трансфинитными номерами. Степень сложности данных прямых превосходит всякое воображение. По-видимому, она превосходит и любые теоретические, а тем более практические потребности. По крайней мере, сейчас не видно никаких предпосылок для построения математического анализа не только для прямой типа æ, но даже для прямой типа 3 (не считая задачи измерения углов касания).

§ 54. Операторы как исходный материал для построения теорий с высокой степенью разрешения

Выше разрешающая способность теории связывалась с порядковым типом последовательностей, классы эквивалентности которых образуют соответствующую числовую систему. Проще говоря, разрешающая способность связывалась с «длиной» натурального ряда соответствующего типа. Следует подчеркнуть, что каждый шаг в увеличении «длины» натурального ряда — это не количественное, а именно качественное усложнение его природы.

Факт качественного усложнения можно пояснить, если вместо последовательностей рассматривать иерархию соответствующих им операторов. Операторы вводятся как новые объекты, которые выражают определенные отношения между уже построенными объектами. В этом состоит одна из самых фундаментальных идей всей математики. Коль скоро система отношений является объектом, то можно рассмотреть отношения между отношениями. Это будут объекты следующего качественного уровня и т.д.

В реальной жизни ситуация в общем такая же. Об отношениях мы говорим как о вполне определенном реальном объекте: отношения строятся, дают трещину, укрепляются, разрушаются и т.д. Слова «дружба, любовь» и другие подобные им имеют такой же статус, как имена существительные, обозначающие вполне конкретные предметы, например дерево или авторучка.

Объекты 1, 2, 3... заданы изначально, причем заданы в своем естественном порядке. Функции, которые ставят в соответствие любому номеру *n* некоторые рациональные числа, назовем операторами первого ранга. Арифметические операции и частичный порядок между функциями введем естественным образом:

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n), \quad \frac{f}{g}(n) = \frac{f(n)}{g(n)}, \quad g(n) \neq 0$$

и т.д. Частичный порядок введем следующим условием: $f \leq g$, если $f(n) \leq g(n)$ для любого n.

Итак, теперь у нас есть набор различных функций. Поэтому можно ввести оператор, который устанавливает отношения между функциями: $\mathrm{H}f = g$. Присвоим такому оператору ранг 2. Под суммой двух операторов ранга 2 будем понимать оператор того же ранга такой, что

$$(\mathrm{H} + G)f = \mathrm{H}f + Gf.$$

Другие операции вводятся аналогично. Примем, что $\mathrm{H} \leq G$, если $\mathrm{H}f \leq Gf$ для любой f.

Таким образом, мы получили частично упорядоченную совокупность операторов второго ранга. Далее вводим операторы, которые переводят операторы второго ранга в операторы второго ранга. Вводим также арифметические операции и частичный порядок. Операторам данного вида присвоим ранг 3. Затем вводим операторы ранга 4 и т.д. Таким образом, мы можем продвинуться до операторов ранга N, где N — произвольное натуральное число.

Отметим одно обстоятельство. Любой оператор ранга k можно рассматривать как частный случай оператора более высокого ранга. Например, постоянную m можно рассматривать как функцию-константу $f(n) \equiv m$ для любого n. Такую функцию будем обозначать через m. Далее функцию-константу m можно рассматривать как оператор, который любую функцию $g(n)$ переведет в функцию-константу m. Для оператора оставим прежнее обозначение m и т.д. Указанное соответствие позволяет без труда ввести операции, включая операцию сравнения, между операторами разных рангов.

Теперь у нас все готово, чтобы перейти к операторам качественно нового ранга. Такие операторы ставят в соответствие операторам ранга N другие или те же самые операторы ранга $m \leq N$. Главное в этом определении состоит в том, что число N может быть любым из натурального ряда 1, 2, 3... . Таким образом мы приходим к операторам с трансфинитными номерами. На основе операторов с конечными и трансфинитными номерами можно строить неархимедовы числовые системы и соответствующие теории. Ясно, что данные построения будут эквивалентны тем, которые возможны по схеме, изложенной в § 53.

Глава 14

Замечания общего характера

§ 55. Вещественная решетка в неархимедовом пространстве и времени

Есть немало оснований для предположения о том, что природа реального пространства и времени является дискретной. Теория дискретного пространства и времени имеет богатую историю и восходит к древнегреческим философам [51]. Неархимедов анализ позволяет рассмотреть модель континуума, которую можно отнести к определенному приближению структуры дискретного пространства и времени.

Действительно, классический континуум (например, отрезок $[0,1]$) с точки зрения анализа-2 есть собрание ядер и ореолов вещественных чисел от 0 до 1. Отбросим ореолы и оставим только ядра вещественных чисел. Данное образование — это не что иное, как вещественный уровень отрезка $[0,1]$ неархимедовой прямой. При этом точки всех микроуровней из данного отрезка изъяты. Указанную совокупность сплошной назвать нельзя, хотя она и является изоморфной совокупности вещественных чисел от 0 до 1. Полученную совокупность можно использовать в модели дискретного пространства. Основное свойство дискретного пространства состоит в наличии фундаментальной длины ρ. Отсюда следует, что число точек на отрезке $[0,1]$ будет конечным и равным $1/\rho$. Соответственно число точек в единичном объеме равно $1/\rho^3$, а число мгновений на единичном отрезке времени — $1/\tau$ (τ — фундаментальное время). Неархимедов анализ приводит к аналогичным результатам. Отличие состоит только в том, что число точек является не конечным, а актуально бесконечно большим (но тем не менее не бесконечным).

Остановимся на обосновании последнего утверждения. Задача состоит в том, чтобы дать оценку количества ядер вещественных чисел на отрезке неархимедовой прямой $[0,1]$.

Начнем с более простого вопроса: сколько отдельных предметов находится в заданной их совокупности? Поиск ответа на этот вопрос приводит к понятию натурального числа. Понятие натурального числа, в свою очередь, приводит к понятию рациональных и вещественных чисел. На этой основе строится математический анализ-1. Далее строится неархимедова числовая система и математический анализ-2. Теперь мы хотим вернуться к исходному вопросу на новом уровне. Попытаемся использовать аппарат анализа-2 для подсчета совокупностей, которые, во-первых, нельзя назвать отдельными предметами и, во-вторых, нельзя сказать, что каждый из предметов непосредственно задан.

Инструмент подсчета должен удовлетворять условию согласованности. Это значит, что если применить его для подсчета количества отдельных и определенно заданных предметов, то мы должны получить в результате соответствующее натуральное число. Например, при подсчете числа нулей у функции

$$\mathrm{Y} = (\mathrm{X} - 0{,}5)(\mathrm{X} - 0{,}7)$$

в результате должно получиться число 2. По-видимому, самым подходящим инструментом для нашей цели является δ-функция Дирака [136, 137]. Располагая понятием интегрального функционала от функции, заданной на неархимедовой прямой, можно, следуя [136, 137], перенести в неархимедову область понятие обобщенной функции и, в частности, понятие δ-функции. Нетрудно также дать обоснование для рассмотренных ниже выкладок. Упрощая ситуацию, неформально можно сказать, что интегралы от δ-функции позволяют подсчитать число точек, в которых функция обращается в нуль. Например,

$$\int_0^1 \delta[(\mathrm{X} - 0{,}5)(\mathrm{X} - 0{,}7)]\,d\mathrm{X} = 2.$$

Следовательно, условие согласованности выполняется.

Рассмотрим поставленную выше задачу. Пусть неархимедова переменная пробегает следующие значения:

$$\mathrm{X} = x + \overline{\xi}, \quad 0 \le \mathrm{X} \le 1,$$

где $x = st\mathrm{X}$ — ядра вещественных чисел, а $\overline{\xi}$ — переменная, пробегающая значения по всем микроуровням. Положим $F(\mathrm{X}) = \delta(\mathrm{X} - x)$. Значит, $\mathrm{X} - x = 0$ в точках X, совпадающих с ядрами вещественных чисел $\mathrm{X} = st\mathrm{X}$. В остальных точках аргумент $(\mathrm{X} - x)$ отличен от нуля. Поэтому величина интеграла

$$\Xi = \int_0^1 \delta(\mathrm{X} - st\mathrm{X})\,d\mathrm{X} \qquad (1)$$

дает ответ на поставленный вопрос. Подсчет интеграла не представляет больших трудностей. Так как

$$\mathrm{X} - x = \overline{\xi}, \quad \int_{-p}^{q} \delta(\overline{\xi})\,d\overline{\xi} = 1,$$

то интеграл (1) равен

$$\Xi = (p,q)\int_0^1 \delta(\bar{\xi})\, dX = \int_0^1 \left[\frac{1}{l}\int_{-p}^{q} \delta(\bar{\xi})\, d\bar{\xi}\right]\Delta X = \int_0^1 \frac{1}{l}\Delta X = \frac{1}{l}. \qquad (2)$$

Здесь, как и прежде, $l = p + q$ — это расстояние до точки горизонта. Само число l принадлежит к первому микроуровню. Например, возможно, что l = Е. Тогда

$$\Xi = \omega. \qquad (3)$$

Если же l = 0,5Е или 3Е, то

$$\Xi = 2\omega;\ \frac{\omega}{3}, \ldots \qquad (4)$$

и т.д. То есть однозначного ответа интеграл не дает, но дает «порядок» величины.

Что означает полученный результат? Он означает, что подсчет числа точек с помощью арсенала средств анализа-2 приводит к результату (3), (4).

Его можно пояснить таким образом. Каждое вещественное число занимает определенную зону на существенной прямой (см. рис. 2.2). Следовательно, можно поставить вопрос о диаметре вещественного числа. Ясно, что при степени разрешения 1 диаметр вещественного числа равен нулю. Точнее, он равен вещественному числу $0_{\text{вещ}}$. При разрешении степени 2 диаметр вещественного числа можно оценить любым актуальным бесконечно малым числом. Например, можно утверждать, что диаметр вещественного числа оценивается величиной Е. Отсюда в определенном смысле можно заключить, что число самих вещественных чисел на отрезке $[0,1]$ оценивается величиной, равной $1/\mathrm{E} = \omega$. Такая оценка совпадает со значениями интеграла (2), (3).

Итак, количество вещественных чисел на отрезке $[0,1]$ можно оценить любым актуально бесконечным числом, например числом ω. (Остановимся именно на этой оценке.)

Число ω — это класс эквивалентности последовательностей, в который входит последовательность натуральных чисел 1, 2, 3... . Поэтому ω ассоциируется прежде всего со счетной мощностью. Мощность же множества вещественных чисел — континуум — больше, чем счетная. Как соотнести полученную выше оценку с этим фактом? Прежде всего отметим, что ω — это не количественное, а только порядковое число. Можно утверждать только, что ω больше, чем 1, 2,... *n*... и не более того. Число (ω – 1) тоже больше, чем 1, 2, 3..., но меньше, чем ω, и т.д. Попытаемся придать числу ω некоторый количественный смысл. Обратимся опять к опыту пересчета отдельных пределов. Пусть имеем последовательность 0, 1, 2, 3, 4. Число 4 — порядковое. Если придать смысл числу чисел, меньших 4, то этот количественный смысл можно будет приписать и порядковому числу 4. Ясно, что в данном подсчете мы должны потребовать, чтобы разность чисел, участвующих в подсчете, была не меньше, чем 1. Поступим так же и с числом ω. Пусть α^* — ядра вещественных чисел из отрезка $[0, 1]$. Мы имеем континуум чисел $\alpha^*\omega$, меньших, чем ω: $0 < \alpha^*\omega < \omega$. С другой стороны, любая пара из указанных чисел отличается между собой больше, чем на единицу: если $\alpha^* < \beta^*$, то $\alpha^*\omega + 1 < \beta^*\omega$. Таким образом порядковому числу ω можно приписать количественный смысл, оценивающий континуум «отдельных» объектов, отличающихся друг от друга больше чем на единицу. Конечно, данное рассуждение строгим назвать нельзя, но оно, по крайней мере, позволяет «примириться» с полученной выше оценкой.

Получение строгого результата трудностей не представляет. Для этого достаточно формализовать изложенные выше представления о диаметре вещественного числа и количестве вещественных чисел.

Определение 55.1. *Сумму расстояний до точек горизонта $l = p + q$, которое фигурирует в формуле для вычисления определенного интеграла* (*1*), *будем называть диаметром вещественного числа.*

Основанием для такого названия служит формула (2), согласно которой общее число вещественных чисел, расположенных на отрезке $[0,1]$, равно $1/l$. Точнее было бы данный результат сформулировать в виде отдельного определения и теоремы.

Определение 55.2. *Значение интеграла* (*1*) *будем называть числом или количеством вещественных чисел на отрезке* $[0,1]$ *в смысле интеграла от δ-функции.*

Теорема 55.1. *Число вещественных чисел на отрезке* $[0,1]$ *в смысле интеграла от δ-функции равно $1/l$, где l — диаметр вещественного числа.*

Итак, выше была рассмотрена решетка на отрезке $[0,1]$. Теперь можно перейти к решетке на пространственных осях OX_i, $i = 1,2,3$, и временнóй оси OT. В результате придем к определенной пространственно-временной решетке с шагом l по пространству и шагом τ по времени. Формулу (1) нетрудно распространить на пространственный случай. В результате получим, что в единичном кубе количество точек с вещественными координатами равно $1/l^3$, а моментов времени на единичном интервале — $1/\tau$.

Таким образом, данная модель сопоставима с известными концепциями дискретного пространства и времени [51]. Следует подчеркнуть, что построенная решетка является изотропной в отличие от дискретных решеток, которые строятся на обычных вещественных осях. Как уже отмечалось, в неархимедовом анализе параметры решетки l и τ — это актуальные бесконечно малые числа, в теориях же дискретного пространства и времени аналогичные параметры представляют собой хотя и очень малые, но конечные числа. Насколько принципиально это различие? Определенный ответ на этот вопрос подсказывается идеями работы [93]. Изложим его в отдельном параграфе.

§ 56. Неархимедов анализ и проблема «догмата натурального ряда»

В 1973 г. появилась статья П.К. Рашевского «О догмате натурального ряда» [93]. В качестве эпиграфа там приведено высказывание Кронекера: «Целые числа создал Господь Бог, все остальное — дело рук человеческих».

Натуральные числа

$$1, 2, \ldots, 11, 12, \ldots, 10^{23}+1, 10^{23}+2, \ldots$$

заданы изначально. Считается, что все числа в натуральном ряде имеют одинаковый статус. Например, пара чисел $11, 12$ является по статусу точно такой же, как и пара чисел $10^{23}+1$ и $10^{23}+2$. Однако если говорить о прикладной математике, то любому специалисту в этой области ясно, что статус чисел $10^{23}+1$, $10^{23}+2$ является совсем не таким же, как чисел $11, 12$. Основная идея статьи [93] состоит в том, что данное различие должно быть введено и в теоретическую математику. По-видимому, можно утверждать, что построения, которые сделаны выше, в определенном смысле выполнены в направлении, указанном П.К. Рашевским.

Вернемся к натуральному числу 10^{23}, которое означает порядок числа молекул газа в закрытой трехлитровой емкости. Каким образом физик «добрался» до этого числа? Его путь можно представить себе таким. Вначале было число 1. Например, изучалось поведение одной молекулы газа в закрытой емкости. Затем было число 2 — изучалось столкновение двух молекул между собой и со стенками емкости. Затем были, может быть, числа 3 и 4. И затем был совершен скачок сразу к числу 10^{23}. Есть все основания считать, что в результате этого мы перешли к новой реальности. Раньше это были отдельные молекулы, теперь — это объемы газа в литрах. В этой новой реальности говорить о числах $10^{23}+1$, $10^{23}+2$ уже нет никакого смысла. Но в новой реальности вполне определенный смысл имеют числа $0{,}5\cdot 10^{23}$, $3\cdot 10^{23}$ и т.д. То есть мы видим, что в новой реальности число 10^{23} превратилось в масштаб этой реальности.

Нетрудно заметить, что все эти обстоятельства имеют место также и на неархимедовой прямой. Единственное отличие состоит только в том, что вместо числа 10^{23} мы ввели число ω.

Весь накопленный опыт показывает, что переход к новому масштабу всегда совершается скачком. Невозможно представить себе, чтобы переход от чисел 1, 2, 3, ... к числу 10^{23} был совершен без знака пробела. Хотя формально здесь можно было бы обойтись без пробела, выписывая шаг за шагом все числа от 1 до 10^{23}. В неархимедовом анализе такой возможности нет даже формально: ряд 1, 2, 3, ...ω всегда должен содержать знак пробела — многоточие. Проблема описания функций, их производных и интегралов в области определения, обозначенной знаками пробелов, — это одна из основных проблем неархимедова математического анализа. Выше она была решена путем введения концепции точки горизонта.

После перехода через точку горизонта мы попадаем в новую реальность с новым масштабом. Например, при переходе на первый мегауровень число ω выступает как масштаб этой реальности. Это хорошо видно из определения производных типа

$$\frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta}=\frac{\partial f(x_{-1}\omega)}{\partial (x_{-1}\omega)}=\operatorname*{limit}_{\omega\Delta x_{-1}\to 0}\frac{f(\omega x_{-1}+\omega\Delta x_{-1})-f(\omega x_{-1})}{\omega\Delta x_{-1}}. \tag{1}$$

Подводя итог, можно сказать, что есть основания для констатации определенных параллелей между идеями неархимедова математического анализа и идеями относительно «догмата натурального ряда» [93].

В неархимедовом математическом анализе

1^0. Процесс перехода от вещественных чисел 1, 2, 3... к числу мегауровня ω совершается скачком, путем пересечения точки горизонта.

2^0. После пересечения горизонта число ω выступает как масштаб новой реальности. Это значит, что в аппарате на первый план выходят понятия типа (1) и, значит, переменные, пропорциональные величине ω.

С другой стороны, согласно [93], для достаточно больших натуральных чисел должен начаться процесс принципиального «сбивания со счета»:

1^0. Речь идет о «сбивании со счета» типа

$$10^{23}+1,\ 10^{23}+2,\ 10^{23}+3,\ldots,$$

но никак не со счета типа

$$1,\ 2,\ 3, \ldots \tag{2}$$

или

$$0{,}1 \cdot 10^{23};\ 0{,}2 \cdot 10^{23};\ 0{,}3 \cdot 10^{23}, \ldots . \tag{3}$$

Далее, из контекста [93] ясно (хотя там об этом прямо не говорится), что

2^0. Переход от счета типа (2) к счету типа (3) может совершаться только скачком, так как даже если и допустить переход без скачка, то еще задолго до подхода к масштабу (3) в ряде (2) начнется «сбивание со счета».

В заключение можно вернуться к вопросу, поставленному в конце § 56. Изложенное позволяет принять, что реперная решетка в пространстве, которую дают ядра вещественных чисел и которая имеет шаг, равный актуальному бесконечно малому числу l, может рассматриваться как модель дискретной решетки с малым, но конечным шагом [51]. Это значит, что при известных обстоятельствах эталонное число ω неархимедова анализа можно рассматривать как модель числа 10^{23} или другого аналогичного числа, которое устанавливает масштаб реальности нового уровня.

Далее, если принять гипотезу об ограниченности реального мира, то предположение о его дискретности влечет за собой существование конечной оценки числа элементов этого мира. Последнее дает основание для постановки вопроса о построении теории, в которой натуральный ряд был бы ограничен конечным числом N^*. Если число ω можно рассматривать как модель конечного масштаба типа 10^{23}, то границу «натурального» ряда L^* (см. § 3) можно рассматривать как модель указанной конечной границы N^*.

§ 57. Формула $e^{\pi i \omega} = -j$ как символ неархимедова математического анализа

Хорошо известно высказывание А.Н. Крылова о формуле Эйлера

$$e^{\pi i} = -1,$$

в которой он видел символ единства всей математики: «1 — представляет арифметику, i — алгебру, π — геометрию и e — анализ» [138].

В неархимедовом анализе появляется качественно новое число — число ω, которое является актуальным бесконечно большим числом: $\omega = \mathrm{Lim}\, n$. Введение числа ω неизбежно влечет за собой появление еще одного качественно нового числа, которое является двойной единицей ($j^2 = 1$):

$$e^{\pi i \omega} = -j. \qquad (1)$$

Двойная единица неупорядочена относительно чисел неархимедовой прямой. Значит, повышая разрешающую способность теории до различия актуальных бесконечно больших чисел и, следовательно, различия актуальных бесконечно малых чисел, мы обязаны допустить и нарушение линейного порядка.

О формуле (1) можно сказать так: если неперово число символизирует классический (т.е. архимедов) анализ, то неперово число вместе с числом ω символизируют неархимедов анализ. Поэтому как символ формула (1) связывает воедино геометрию (число π), неархимедов математический анализ (числа e и ω) и теорию гиперкомплексных функций (числа i и j). Следовательно, если математический анализ действительного переменного продолжает теория функций комплексного переменного, то неархимедов анализ должна продолжать теория функций гиперкомплексного переменного. В данной теории наряду с мнимой единицей содержатся двойные единицы и, значит, содержатся делители нуля.

Формуле (1) как символу можно придать также определенный физический смысл (естественно, только в рамках арифметической концепции пространства и времени). Число ω указывает на существование бесконечной иерархии масштабных уровней пространства и времени. Причем данная иерархия неограниченно простирается как в область мегамасштабных уровней, так и в область исчезающе малых масштабов — в микромир. Формула (1) показывает, что появление масштабов ω и $\mathrm{E} = 1/\omega$ обязательно должно сопровождаться появлением двойной единицы и, значит, нарушением линейного порядка, по крайней мере на микроуровнях пространства и времени. Следовательно, формулу (1) можно также истолковать как определенный символ единства микро- и мегамира.

Библиографический список

1. **Начала** Евклида: книги I–VI / пер. с греч. — М.; Л.: ОГИЗ, 1948. — 447 с.
2. **Клейн Ф.** Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. 1: Арифметика. Алгебра. Анализ. — М.: Наука, 1987. — 432 с.
3. **Клейн Ф.** Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. 2: Геометрия. — М.: Наука, 1987. — 416 с.
4. **Ревуженко А.Ф., Шемякин Е.И.** К вопросу о плоском деформировании упрочняющихся и разупрочняющихся пластических материалов // ПМТФ. — 1977. — № 3. — С. 157–173.
5. **Ревуженко А.Ф.** О деформировании сыпучей среды. Ч. 1: Плоская модель // ФТПРПИ. — 1980. — № 3. — С. 3–16.
6. **Ревуженко А.Ф.** О деформировании сыпучей среды. Ч. 2: Исследование плоской модели // ФТПРПИ. — 1981. — № 5. — С. 3–13.
7. **Ревуженко А.Ф.** О деформировании сыпучей среды. Ч. 3: Условия на границе // ФТПРПИ. — 1982. — № 4. — С. 13–21.
8. **Ревуженко А.Ф.** О деформировании сыпучей среды. Ч. 4: Микровращения // ФТПРПИ. — 1983. — № 6. — С. 8–17.
9. **Ревуженко А.Ф.** Горная порода — среда с внутренними источниками и стоками энергии. Сообщ. 1 // ФТПРПИ. — 1990. — № 4. — С. 14–21.
10. **Ревуженко А.Ф.** Горная порода — среда с внутренними источниками и стоками энергии. Сообщ. 2 // ФТПРПИ. — 1990. — № 5.
11. **Ревуженко А.Ф.** Горная порода — среда с внутренними источниками и стоками энергии. Сообщ. 3. // ФТПРПИ. — 1991. — № 5. — С. 20–26.
12. **Ревуженко А.Ф.** Функции со структурой — математические объекты для описания пластической деформации твердых тел // Изв. вузов. Физика. — 1995. — № 11. — С. 70–85.
13. **Ревуженко А.Ф.** О математическом аппарате для описания структурных уровней геосреды // ФТПРПИ. — 1997. — № 3. — С. 22–36.
14. **Ревуженко А.Ф.** Гиперкомплексные числа в механике сред со структурой // Физ. мезомеханика. — 1998. — Т. 1, № 1. — С. 119–127.
15. **Ревуженко А.Ф.** О методах нестандартного анализа в механике твердого тела // Физ. мезомеханика. — 1999. — Т. 2, № 6. — С. 51–62.
16. **Ревуженко А.Ф.** Механика упруго-пластических сред и нестандартный анализ. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 2000. — 426 с.
17. **Ревуженко А.Ф.** Об одном общем подходе к обоснованию вещественных, гипервещественных и гиперкомплексных чисел // Проблемы механики

неупругих деформаций: сб. статей к 70-летию Д.Д. Ивлева. — М.: Физматлит, 2001. — С. 267–280.
18. **Ревуженко А.Ф.** Теория пластичности и математический анализ на неархимедовой прямой // Физ. мезомеханика. — 2001. — Т. 4, № 3. — С. 73–83.
19. **Ревуженко А.Ф.** Механика сыпучей среды. — Новосибирск: Изд-во ЗАО ИПП «Офсет», 2003. — 373 с.
20. **Ревуженко А.Ф.** Об использовании в механике твердого тела концепции пространства, наделенного иерархией структурных уровней // Физ. мезомеханика. — 2003. — Т. 6, № 4. — С. 73–83.
21. **Ревуженко А.Ф.** Неархимедовое пространство как основа математического аппарата геомеханики // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород: сб. статей к 75-летию Е.И. Шемякина. — М.: Физматлит, 2006. — С. 605–626.
22. **Revuzhenko A.F.** Mechanics of Granular. — Berlin; Heidelberg: Media Springer-Verlag, 2006. — 308 p.
23. **Лавриков С.В., Микенина О.А., Ревуженко А.Ф.** Моделирование процессов деформирования массива горных пород с использованием методов неархимедова анализа // ФТПРПИ. — 2008. — № 1. — С. 3–16.
24. **Лавриков С.В., Микенина О.А., Ревуженко А.Ф., Шемякин Е.И.** Концепция неархимедова многомасштабного пространства и модели пластических сред со структурой // Физ. мезомеханика. — 2008. — Т. 11, № 3. — С. 45–60.
25. **Механика** — от дискретного к сплошному. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008. — 344 с.
26. **Лавриков С.В., Микенина О.А., Ревуженко А.Ф.** Описание плоской деформации неупругих тел с использованием вектора внутренних усилий и неархимедового математического анализа // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния: К 80-летию Г.К. Михайлова. — 2009. — № 1 (6). — С. 160–171.
27. **Ревуженко А.Ф.** Принцип возможных перемещений в неархимедовом пространстве // Труды XXI Всерос. конф., 30 июня — 2 июля, 2009 г., Кемерово / под ред. акад. В.М. Фомина. — Новосибирск: Параллель, 2009. — С. 195–203.
28. **Лавриков С.В., Микенина О.А., Ревуженко А.Ф.** Об использовании в механике горных пород методов неархимедова анализа. Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики // Сб. трудов Междунар. конф. — Воронеж: Изд.-полигр. центр ВГУ, 2010. — С. 221–226.
29. **Ревуженко А.Ф.** Об использовании в теории пластичности методов неархимедова анализа // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. — 2010. — № 2 (8). — С. 439–451.
30. **Lavrikov S.V., Mikenina O.A., Revuzhenko A.F.** A non-Archimedean number system to characterize the structurally inhomogeneous rock behavior nearby a

tunnel // J. Rock Mechanics and Geotechn. Engineering. — 2011. — N 3 (2). — P. 153–160.
31. **Кротов В.Ф., Бровман М.Я.** Экстремальные процессы пластического деформирования металлов // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. — 1962. — № 3. — С. 148–153.
32. **Кротов В.Р., Букреев В.З., Гурман В.И.** Новые методы вариационного исчисления в динамике полета. — М.: Машиностроение, 1969. — 288 с.
33. **Кротов В.Р., Гурман В.И.** Методы и задачи оптимального управления. — М.: Наука, 1973. — 117 с.
34. **Янг Л.** Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. — М.: Мир, 1974. — 488 с.
35. **Кунин И.А.** Теория упругих сред с микроструктурой. — М.: Наука, 1975. — 416 с.
36. **Введение** в микромеханику / пер. с япон. П.Д. Баева под ред. М. Онами, Г.Я. Гуна. — М.: Металлургия, 1987. — 279 с.
37. **Эриксен Дж.** Исследования по механике сплошных сред. — М.: Мир, 1977. — 246 с.
38. **Диман Е.Н.** Три мезоуровня в геологии // Физ. мезомеханика. — 2004. — Т. 7, № Спец. 1. — С. 120–123.
39. **Каштанов А.В., Морозов Н.Ф., Петров Ю.В.** Фрактальная модель разрушения упругой плоскости с угловыми вырезами // Докл. АН. — 1999. — Т. 367, № 2. — С. 194–196.
40. **Кочарян Г.Г., Спивак А.А.** Динамика деформирования блочных массивов горных пород. — М.: ИКЦ «Академкнига», 2003. — 423 с.
41. **Мельников С.В., Пантелеев И.А.** Компьютерное моделирование процессов самоорганизации в структурно-неоднородных материалах в рамках концепции неархимедового пространства // Физ. мезомеханика. — 2004. — Т 7, № Спец. 1. — С. 35–38.
42. **Морозов Н.Ф., Петров Ю.В.** «Квантовая» природа и двойственный характер динамики разрушения твердых тел // Докл. АН. — 2002. — Т. 382, № 2. — С. 206–209.
43. **Нелинейная** механика геоматериалов и геосред / отв. ред. Л.Б. Зуев. — Новосибирск: Изд-во «Гео», 2007. — 235 с.
44. **Панин В.Е., Гриняев Ю.В., Данилов В.И. и др.** Структурные уровни пластической деформации и разрушения. — Новосибирск: Наука, 1990. — 255 с.
45. **Панин В.Е., Лихачев В.А., Гриняев Ю.В.** Структурные уровни деформации твердых тел. — Новосибирск: Наука, 1985. — 225 с.
46. **Ревуженко А.Ф., Стажевский С.Б., Шемякин Е.И.** О механизме деформирования сыпучего материала при больших сдвигах // ФТПРПИ. — 1974. — № 3. — С. 130–133.
47. **Садовский М.А.** Естественная кусковатость горной породы //ДАН СССР. — 1979. — Т. 247, № 4. — С. 829–831.

48. **Физическая** мезомеханика и компьютерное конструирование материалов. В 2 т. / под ред. В.Е. Панина. — Новосибирск: Наука, 1995. — Т. 1. — 298 с.; Т. 2. — 320 с.
49. **Альбеверио С., Фенстад Й., Хуэнг-Крон Р., Линдстрем Т.** Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике. — М.: Мир, 1990. — 616 с.
50. **Clifford W.** On Theories of the physical forces: Lectures and Essays. — L., 1901. — Vol. 1. — P. 120–138.
51. **Вяльцев А.Н.** Дискретное пространство — время. — М.: Наука, 1965. — 398 с.
52. **Лейбниц Г.В.** Избранные философские сочинения // Труды Моск. психол. о-ва. — М.: Типо-литогр. т-ва И.Н. Кушнерев и К°, 1908. — Вып. 4. — 364 с.
53. **Эйлер Л.** Дифференциальное исчисление. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1949. — 580 с.
54. **Эйлер Л.** Введение в анализ бесконечно малых. — М.; Л.: ОНТИ, 1936. — Т. 1. — 352 с.
55. **Veronese G.** Sull postulato della continuita // Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., e natur. Ser. 2. — 1897. — Vol. 6, pt 2. — P. 161–168.
56. **Veronese G.** Postulates de la geometrie dans l,enseignement // C.r/ II Congr. intem., math. Paris, 12 août 1900: Proces-verbaux et commun. — P.: Gauthier–Villars, 1902. — P. 433–450.
57. **Флоренский П.А.** Мнимости в геометрии. — М.: Лазурь, 1992. — 96 с.
58. **Гильберт Д.** Основания геометрии. — М.; Л.: ОГИЗ, 1948. — 488 с.
59. **Лурье С.Я.** Теория бесконечно малых у древних атомистов. — М.; Л.: Изд. АН СССР, 1935. — 197 с.
60. **Медведев Ф.А., Лузин Н.Н.** О неархимедовом времени // Историко-математические исследования. — М.: Наука, 1993. — Вып. 34. — С. 103–128.
61. **Гордон Е.И., Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С.** Инфинитезимальный анализ. Ч. 1. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2001. — 315 с.
62. **Вопенка П.** Альтернативная теория множеств. Новый взгляд на бесконечность / пер. с англ. под ред. Н.В. Белякина. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2004. — 612 с.
63. **Robinson A.** Non-standard analyse // Proc. Conf. Ned. Akad. wetens. Ser. A. Math. Sci. — 1961. — Vol. 64, N 3. — P. 432–440.
64. **Robinson A.** Non-standard Analysis. — North-Holland, Amsterdam, 1966. — 293 p.
65. **Робинсон А.** Введение в теорию моделей и математику алгебры. — М.: Наука, 1967. — 355 с.
66. **Lutz R., Goze M.** Lecture Notes in Mathematics. — Springer-Verlag, 1981.
67. **Bernstein A.R., Robinson A.** Solution of invariant subspace problem of K.T. Smith and P.R. Halmos // Pacific. J. Math. — 1966. — Vol. 16, N 3. — P. 421–431.
68. **Keisler H.J.** Foundations of infinitesimal calculus. — Prindle: Weber & Schmidt, 1976.

69. **Luxemburg W.A.J.** Non-standard analysis: Lectures on A. Robinson,s theory of infinitesimals and infinitely large numbers. — Pasadena (Calif.): Math. Dep. Calif. Inst. Technol., 1962.
70. **Schmieden C., Laugwitz D.** Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung // Math. Ztschr. — 1958. — Bd 69, H. 1. — S. 1–39.
71. **Stroyan K.D.** Luxemburg W. A.Y. introduction to the theory of infinitesimals. — Acad. Press, 1976.
72. **Белякин Н.В., Одинцов С.П.** Нестандартный анализ и аксиома детерминированности // Алгебра и логика. — 1993. — Т. 32, № 6. — С. 607–617.
73. **Ватолин Д.Ю.** Аксиомы неархимедовой прямой. — www.sibmathnet.narod.ru — 2009. — 23 с.
74. **Девис М.** Прикладной нестандартный анализ. — М.: Мир, 1980. — 236 с.
75. **Драгалин А.Г.** Конструктивная теория доказательств и нестандартный анализ. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 544 с.
76. **Кановей В.Г.** О корректности эйлерова метода разложения синуса в бесконечное произведение // Успехи мат. наук. — 1988. — Т. 43, вып. 4 (262). — С. 57–81.
77. **Ловягин Ю.Н.** Гиперрациональные числа как основа математического анализа // Вестн. Сыктывкар. ун-та. — 2007. — Сер. 1, вып. 7. — С. 17–34.
78. **Нельсон Э.** Радикально элементарная теория вероятностей / пер. с англ. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1995. — 124 с.
79. **Непейвода Н.Н.** Прикладная логика: учеб. пособие. — 2-е изд. — Новосибирск: Изд. Новосиб. ун-та, 2000. — 521 с.
80. **Парменов-Зингер М.Я.** Основы сверхстандартного анализа. — СПб.: Изд-во Лита, 1992. — 67 с.
81. **Праздникова Е.В.** Моделирование вещественного анализа в рамках аксиоматики для гипернатуральных чисел // Вестн. Сыктывкар. ун-та. — 2007. — Сер. 1, вып. 7. — С. 41–66.
82. **Успенский В.А.** Что такое нестандартный анализ? — М.: Наука, 1987. — 128 с.
83. **Энгелер Э.** Метаматематика элементарной математики / пер. с нем. — М.: Мир, 1987. — 128 с.
84. **Владимиров В.С., Волович И.В., Зеленов Е.И.** p-Адический анализ и математическая физика. — М.: Физматлит, 1994. — 352 с.
85. **Коблиц Н.** p-Адические числа, p-адический анализ и дзета-функции. — М.: Бибфизмат, 1997. — 192 с.
86. **Хренников А.Ю.** Неархимедов анализ и его приложения. — М.: Физматлит, 2003. — 216 с.
87. **Хренников А.Ю.** Суперанализ. — 2-е. изд. — М.: Физматлит, 2005.
88. **Котович Н.В., Хренников А.Ю., Борзистая Е.Л.** Сжатие изображений с помощью представления p-адическими отображениями и аппроксимации полиномами Малера // Докл. АН. — 2004. — Т. 396, № 3. — С. 305–308.
89. **Агуайо Х., Сааведра М., Валлас М.** Притягивающие и отталкивающие точки аналитических динамических систем нескольких переменных в

неархимедовой постановке // Теоретическая и математическая физики. — 2004. — Т. 140, № 2. — С. 329–336.

90. **Гвишиани А.А., Агаян С.М., Трусов А.В.** Элементы неархимедова анализа. — М.: Изд-во МГУ, 1979. — 65 с.
91. **Хренников А.Ю.** Моделирование процессов мышления в p-адических системах координат. — М.: Физматлит, 2004. — 296 с.
92. **Пуанкаре А.** О науке / пер. с франц. под ред. Л.С. Понтрягина. — 2-е изд. — М.: Наука. Физматгиз, 1990. — 736 с.
93. **Рашевский П.К.** О догмате натурального ряда // Успехи мат. наук. — 1973. — Т. 28, вып. 4.
94. **Ведепова Е.Г.** Граница континуум и число // Число: сб. статей. — М.: МАКС Пресс, 2009. — С. 79–89.
95. **Векшенов С.А.** Математика и физика пространственно-временного континуума // Основания физики и геометрии. — М.: РУДН, 2008. — С. 89–118.
96. **Зенкин А.А.** Эпистемология и мифология числа // Число: сб. статей. — М.: МАКС Пресс, 2009. — С. 193–211.
97. **Зенкин Александр А., Зенкин Антон А.** Насквозь дырявый континуум: От языка абстракций к языку образов. И обратно // Языки науки — языки искусства: сб. науч. тр. — М.: Изд-во «Прогресс-Традиция», 2000. — С. 172–179.
98. **Кантор Г.** Обобщение одной теоремы из теории тригонометрических рядов // Непрерывность функций и числовых областей: Б. Больцано, Л.О. Коши, Р. Дедекинд, Г. Кантор. — Новосибирск: Артель «Напрасный труд», 1998. — 68 с.
99. **Букреев Б.Я.** Учение об иррациональных числах с точки зрения Г. Кантора и Э. Гейне. — Киев, 1911. — 67 с.
100. **Немыцкий В., Слудская М., Черкасов А.** Курс математического анализа. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1940. — Т. 1. — 459 с.
101. **Маркушевич А.И.** Действительные числа и основные принципы теории пределов. — М.; Л.: Изд-во Акад. пед. наук РСФСР, 1948. — 98 с.
102. **Шилов Г.Е.** Математический анализ. Функции одного переменного. Ч. 1, 2. — М.: Наука, 1969. — 528 с.
103. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.: Наука, 1966. — Т. 1. — 607 с.
104. **Физический** энциклопедический словарь / гл. ред. А.М. Прохоров. — М.: БРЭ, 1995. — 928 с.
105. **Лузин Н.Н.** Теория функций действительного переменного. — 2-е изд. — М.: Учпедгиз, 1948. — 317 с.
106. **Дедекинд Р.** Непрерывность и иррациональные числа / пер. с нем. С.О. Шатуновского. — 4-е изд. — Одесса, 1923. — 44 с.
107. **Ландау Э.** Основы анализа. Действия над целыми, рациональными, иррациональными, комплексными числами. — М.: ИЛ, 1947.
108. **Арнольд И.В.** Теоретическая арифметика. — 2-е изд. — М.: Учпедгиз, 1939.
109. **Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.** Математический анализ. Начальный курс. — 2-е изд. — М.: МГУ, 1985. — 662 с.

110. **Лузин Н.Н.** Дифференциальное исчисление. — 6-е изд. — М.: Сов. наука, 1958. — 473 с.
111. **Кантор И.Л., Солодовников А.С.** Гиперкомплексные числа. — М.: Наука, 1973. — 144 с.
112. **Розенфельд Б.А.** Неевклидовы геометрии. — М.: ГИТТЛ, 1955. — 434 с.
113. **Смирнова Л.И.** Обобщенные пространства Аппеля эллиптического типа. Неевклидова геометрия и теория чисел: межвуз. темат. сб. — Калинин: Калинин. гос. ун-т, 1978. — С. 44–54.
114. **Гарасько Г.И., Павлов Д.Г.** Геометрия невырожденных поличисел // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. — 2007. — Т. 4, № 1 (7). — С. 3–25.
115. **Шредер М.** Фракталы, хаос, степенные законы. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. — 528 с.
116. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.: Физматгиз, 1962. — Т. 2. — 807 с.
117. **Гельфонд А.О.** Исчисление конечных разностей. — 4-е изд. — М.: КомКнига, 2006. — 376 с.
118. **Фейнман Р.** Статистическая механика. — 2-е изд. — М.: Мир, 1978. — 407 с.
119. **Моденов П.С.** Аналитическая геометрия. — М.: Изд-во МГУ, 1969. — 698 с.
120. **Демидов С.П.** Теория упругости. — М.: Высш. шк., 1979. — 432 с.
121. **Бердичевский В.Л.** Вариационные принципы механики сплошной среды. — М.: Наука. Физматлит, 1983. — 448 с.
122. **Гейзенберг В.** Физика и философия. — М.: ИЛ, 1963. — 203 с.
123. **Бом Д.** Причинность и случайность в современной физике. — М.: ИЛ, 1959. — 248 с.
124. **Блохинцев И.Д.** Пространство и время в микромире. — 2-е изд. — М.: Наука. Физматлит, 1982. — 349 с.
125. **Дэвис П.** Суперсила. Поиски единой теории природы. — М.: Мир, 1989. — 272 с.
126. **Жарков В.И.** Непрерывно-дискретное пространство и время микрообъектов. — Новосибирск: Наука, 1971. — 166 с.
127. **Панченко А.И.** Континуум и физика. — М.: Наука, 1975. — 119 с.
128. **Гильберт Д., Бернайс П.** Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. — М.: Наука. Физматлит, 1979. — 557 с.
129. **Щетников А.И.** Пифагорейское учение о числе и величине. — Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та. — 1997. — 52 с.
130. **Павлов Д.Г.** Хронометрия трехмерного времени // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. — 2004. — Т. 1, № 1. — С. 20–32.
131. **Павлов Д.Г.** Четырехмерное время // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. — 2004. — Т. 1, № 1. — С. 33–42.
132. **Мусхелишвили Н.И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука. Физматгиз, 1966. — 707 с.

133. **Бэр Р.** Теория разрывных функций. — М.; Л.: Гостехтеориздат, 1932. — 135 с.
134. **Куратовский К., Мостовский А.** Теория множеств. — М.: Мир, 1970. — 416 с.
135. **Натансон И.П.** Теория функций вещественной переменной. — 2-е изд. — М.: Гостехтеориздат, 1957. — 552 с.
136. **Владимиров В.С.** Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука. Физматлит, 1976. — 280 с.
137. **Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р.** Теория обобщенных функций: Секвенциальный подход. — М.: Мир, 1976. — 311 с.
138. **Крылов А.Н.** Леонард Эйлер / доклад академика А.Н. Крылова, прочитанный на торжественном заседании Академии наук СССР 5 октября 1933 г. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — 39 с.

1—686 2—686 3—686 4—686 5—686 6—686 7—686

8—686 9—686 10—686 11—686 12—686 13—686 14—686

15—686 16—686 17—686 18—686 19—686 20—686 21—686

2 Заказ № 686 3 Заказ № 686 4 Заказ № 686 5 Заказ № 686 6 Заказ № 686 7 Заказ № 686

8 Заказ № 686 9 Заказ № 686 10 Заказ № 686 11 Заказ № 686 12 Заказ № 686

13 Заказ № 686 14 Заказ № 686 15 Заказ № 686 16 Заказ № 686 17 Заказ № 686

18 Заказ № 686 19 Заказ № 686 20 Заказ № 686 21 Заказ № 686

Научное издание

Ревуженко Александр Филиппович

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФУНКЦИЙ НЕАРХИМЕДОВОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Специализированный математический аппарат для описания структурных уровней геосреды

Редактор *М.Б. Успенская*
Художественный редактор *Л.В. Матвеева*
Художник *Н.А. Горбунова*
Технический редактор *Н.М. Остроумова*
Корректоры *И.Л. Малышева, Л.А. Анкушева*
Оператор электронной верстки *Р.Г. Усова*

Сдано в набор 19.10.12. Подписано в печать 17.12.12. Бумага ВХИ. Формат 60×90 1/16. Офсетная печать. Гарнитура Times ET. Усл. печ. л. 20,5+0,1 вкл. на мел. бум. Уч.-изд. л. 15,7. Тираж 400 экз. Заказ № 686.

Сибирская издательская фирма «Наука» АИЦ «Наука» РАН.
630007, Новосибирск, ул. Коммунистическая, 1.
Сибирское предприятие «Наука» АИЦ РАН. 630077, Новосибирск, ул. Станиславского, 25.