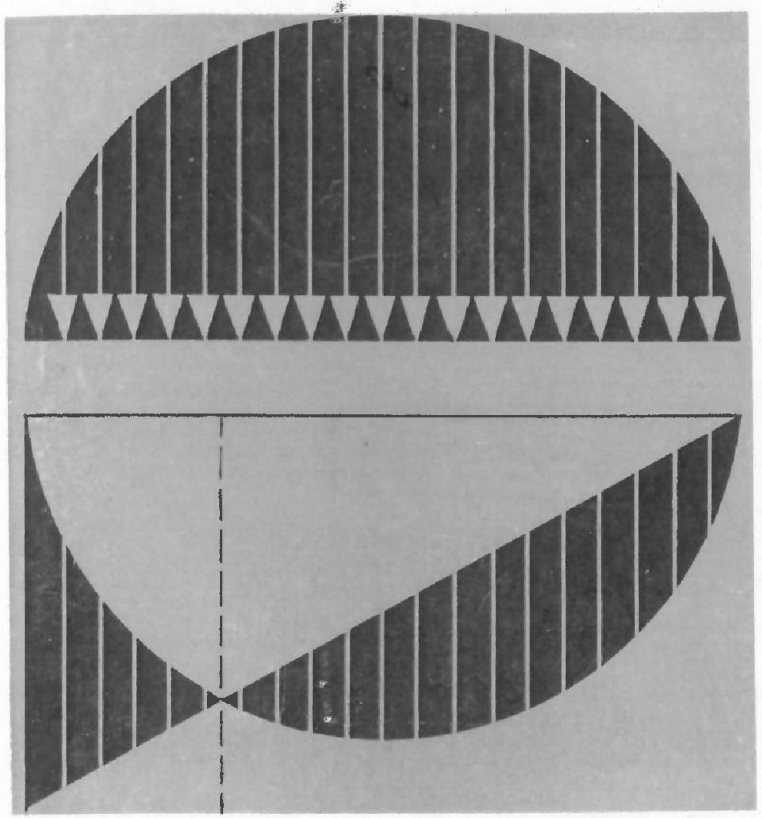
Ю. А. Радциг А. Н. Колупаев

ЗЕРКАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ



Ю. А. Радциг, А. Н. Колупаев

ЗЕРКАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Москва
Стройиздат
1980

УДК 624.04 : 517.5

Печатается по решению секции литературы по строительной физике и конструкциям редакционного совета Стройиздата.

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В. А. Киселев

Радциг Ю. А., Колупаев А. Н. Зеркальные функции и их применение при решении задач строительной механики. — М.: Стройиздат, 1980. — 168 с.

Приведены основные положения теории зеркальных функций, численные методы линеаризации зеркальных форм и программирования. Дано обоснование расчета сооружений на базе применения теории зеркальных функций. Рассмотрено использование зеркальных функций в строительной механике и технике.

Книга предназначена для научных и инженерно-технических работников научно-исследовательских и проектных организаций.

Табл. 24, ил. 18, список лит.: 165 назв.

Р $\frac{30205-641}{047(01)-80}$ 118—79. 3202000000 © Стройиздат, 1980

ВВЕДЕНИЕ

В Основных направлениях развития народного хозяйства СССР на 1976—1980 годы, утвержденных XXV съездом КПСС, предусмотрено обеспечение дальнейшего развития фундаментальных и прикладных научных исследований в области общественных, естественных и технических наук. В новой Конституции СССР отмечено, что государство обеспечивает планомерное развитие науки и подготовку научных кадров, организует внедрение результатов научных исследований в народное хозяйство.

Генеральный секретарь ЦК КПСС, Председатель Президиума Верховного Совета СССР товарищ Л. И. Брежнев в беседе с партийно-хозяйственным активом Новосибирской области подчеркнул, что ученые должны активно участвовать в решении вопросов соединения науки с практикой и тем самым способствовать росту производительных сил страны.

При решении современных задач строительной механики, базирующихся на применении счетно-электронных машин, пришлось столкнуться с необходимостью обоснования соответствующего аппарата счета, который оказалось бы удобно применять. Таким аппаратом счета, выдвинутым для использования его при применении на ЭЦВМ, и явилась теория зеркальных функций, возникшая, по свидетельству И. М. Рабиновича, раньше линейного программирования [78].

Этот аппарат счета, в отличие от математического аппарата предшествующего периода, применявшегося при решении задач строительной механики, содержал в

себе простейшие операции с прерывистыми функциями и их производными.

Использование прерывистых форм при решении отдельных задач строительной механики можно встретить у ряда ученых XIX и даже XX века.

Так, в работах Эйлера (Euler L.) встречаются всем известные разрывы непрерывности в значениях критической силы, которая может принимать значения, только пропорциональные квадратам целых чисел натурального ряда [143].

В курсе механики Пуассона (Poisson S. D.) встречаются интегралы, принимающие разрывные значения в зависимости от четного или нечетного аргумента, стоящего под тригонометрическим знаком [161].

В теории упругости Клебша (Clebsch A.) также упоминаются интегралы разрывного типа [135].

К концу XIX столетия относится также и появление первых работ по операционному исчислению. В 1892 г. была опубликована монография М. Е. Ващенко-Захарченко [13], а в период с 1892 по 1913 г. появляется ряд известных работ Хивесайда (Heaviside O.) [150].

В 1900 г. опубликована работа Дирихле (Dirichlet P. G. L.), которая имела большое принципиальное значение при обосновании приемов расчета [142].

Почти в это же время была опубликована классическая монография Бэра (Baire R.), в которой была дана классификация разрывных функций. Наряду с этим Бэр отмечает, что с точки зрения приложений опубликованной им монографии было бы преждевременно ставить вопрос о возможности практического значения проводимого им исследования [129].

В 1912 г. опубликована строительная механика корабля И. И. Бубнова [11]. И. И. Бубнов предлагал при записи дифференциальных уравнений прогибов балки и их интегралов, имеющих различную форму на различных участках, ограничиться записью одного универсального уравнения и его интегралов, отделяя каждый раз чертой те слагаемые, которые не соответствуют границам предшествующих участков балки.

Значительный вклад в изучение рассматриваемых вопросов был внесен А. Н. Крыловым. В его курсе дифференциальных уравнений математической физики уделяется много внимания вопросам математического счета. Он изучает разрывные функции ступенчатого и ломаного

типа, встречающиеся при решении задач строительной механики [74].

В другой своей монографии, посвященной расчету балок на упругом основании, А. Н. Крылов записывает кусочные разрывные функции с помощью однотипных формул, а также устанавливает формулу для записи сосредоточенной силы, рассматривая последнюю как предел равномерно распределенной нагрузки, действующей на бесконечно малом интервале длины балки [73]. В этих работах вычисление разрывных функций производилось с помощью непрерывных функций. При этом разрывная функция изображалась как предел непрерывных функций.

На практическое значение применения разрывных функций в строительной механике впервые было обращено внимание в 1931 г. Петцольдом (Petzold), который в качестве оператора предложил ввести функцию остатков, получающихся при делении чисел одних на другие [160]. Тем не менее приемы, изложенные в работе Петцольда, не получили дальнейшего распространения.

В 1933 г. Н. М. Герсеванов впервые ввел в практику инженерных расчетов прерывистую единицу — функциональный прерыватель Герсеванова [23]. Прерыватель этот имел вид

$$\Gamma_a = \frac{1}{\pi} \lim \operatorname{arctg} \frac{\eta}{x-a} \text{ при } \eta < a \text{ и } \eta \to 0$$

и принимал значения: при $x < a$ $\Gamma_a = 0$, при $x = 0$ $\Gamma_a = 1/2$, при $x > a$ $\Gamma_a = 1$.

В работе [23], а также в работах [24]—[28] Н. М. Герсеванов устанавливает приемы и правила оперирования с величинами, включающими в себя прерывистые формы для различных нагрузок, действующих на балку, и применяет разработанные им приемы к расчету балок на упругом основании.

Продолжение направления, заложенного в работах Н. М. Герсеванова, нашло место в работах К. С. Завриева [38], [39] и И. А. Симвулиди [111]—[113].

Дальнейшее изучение вопросов применения различных функций к решению задач строительной механики оказалось, однако, связанным с необходимостью линеаризации форм. Функция $\operatorname{arctg} x$, предложенная Н. М. Герсевановым, практически оказалась слишком

сложной для оперирования и в силу этого мало пригодной для решения практических задач строительной механики.

Первые шаги по изучению математических форм, применяемых при решении задач строительной механики, были предприняты одним из авторов настоящей монографии [79—83]. На базе этих исследований разработан новый счетный аппарат — теория зеркальных функций и алгоритмы ее реализации на ЭЦВМ.

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ЗЕРКАЛЬНЫХ ФУНКЦИ

§ 1.1. Формулировка вопроса

1.1.1. В основу построения излагаемой в настоящей книге теории зеркальных функций был положен прерыватель вида

$$\Phi(a) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{|x-a|}{x-a}\right]. \tag{1.1}$$

Прерыватель (1.1) обладает свойствами простой геометрической интерпретации, а потому является весьма удобным при решении различных технических задач.

Следует также отметить, что прерыватель (1.1) лишь констатирует факт разрыва непрерывности функции при $x=a$. Таким образом прерыватель (1.1) в основу определения функции ставит понятие скачка, разрыва непрерывности и в дальнейшем дает возможность рассматривать всякую непрерывную функцию как предел конечно-разрывных функций.

Отметим некоторые свойства прерывателя (1.1).

1. $$[\Phi(a)]^n = \Phi(a) \tag{1.2}$$

при любом целом и положительном значении.

2. $$\left.\begin{aligned} &\text{При } a_2 > a_1\ \Phi(a_1)\cdot\Phi(a_2) = \Phi(a_2);\\ &\text{при } a_1 > a_2\ \Phi(a_1)\cdot\Phi(a_2) = \Phi(a_1). \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

Последнее свойство (1.3) вытекает из определения формы (1.1).

3. Если $f(x)$ представляет собой некоторую непрерывную на всем рассматриваемом нами интервале функцию и если $\Phi(a)$ лежит также в указанном интервале, то получим формулы:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dx} f(x)\cdot\Phi(a) = \Phi(a)\ \frac{df(x)}{dx} + f(x)\ \frac{d\Phi(a)}{dx};\\ &\int \frac{d}{dx}\Phi(a)\, f(x)\, dx = \Phi(a)\, f(x) + c. \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

4. При алгебраических операциях сложения, вычитания, умножения и деления с функциями, включающими прерыватель (1.1), всегда будут получаться формы, линейные относительно $\Phi(a)$.

С помощью прерывателя (1.1) всегда можно без особого труда выразить любую цепь непрерывных функций, имеющих на заданном интервале любое, конечное число разрывов непрерывности.

Если бы мы имели ряд кусочно-непрерывных функций $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x)$, имеющих конечные разрывы непрерывности в точках $a_1 a_2, \ldots, a_n$, как это показано на рис. 1, то все эти функции можно было бы изобразить общим уравнением

$$f(x) = f_0(x)\,[\Phi(0) - \Phi(a_1)] + f_1(x)\,[\Phi(a_1) - \Phi(a_2)] + \ldots + f_{n-1}(x)\,[\Phi(a_{n-1}) - \Phi(a_n)] + f_n(x)\,\Phi(a_n), \quad (1.5)$$

причем последнее слагаемое в формуле (1.5) не ограничено разрывом непрерывности на своей правой границе.

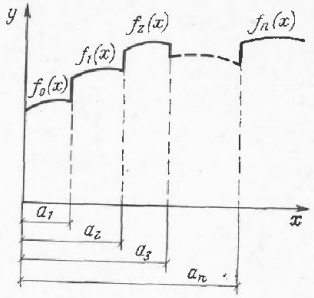


Рис. 1.

Если ввести обозначения

$$\left.\begin{aligned} f_0(x) &= \varphi_0(x); \\ f_1(x) &= f_0(x) + \varphi_1(x); \\ f_2(x) &= f_1(x) + \varphi_2(x); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x) &= f_{n-1}(x) + \varphi_n(x) \end{aligned}\right\} \quad (1.6)$$

и если заметить, что на всем рассматриваемом интервале от $x=0$ до a_{n-1} прерывистая форма $\Phi(0)=1$, то после несложных алгебраических преобразований функции $f(x)$ может быть придан вид

$$f(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \Phi(a_i)\,\varphi_i(x)$$

или, после внесения вместо $\Phi(a_i)$ его значения по формуле (1.1), будем иметь:

$$f(x) = \varphi_0(x) + \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(x)}{x - a_i}\,|x - a_i|\right]. \quad (1.7)$$

В заключение отметим, что с помощью прерывателя (1.1) весьма просто может быть изображена любая нагрузка $q(x)$, действующая на балку. Так, если мы имеем балку, изображенную на рис. 2, то:

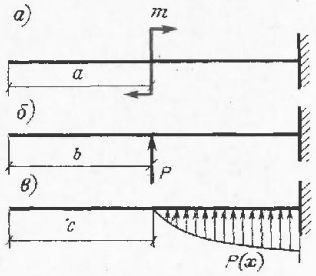


Рис. 2.

1) при действии на балку сосредоточенного момента (рис. 2, *а*)

$$M(x) = m\,\Phi(a);$$

$$q(x) = \frac{d^2M(x)}{dx^2} = m\,\frac{d^2\Phi(a)}{dx^2}; \quad (1.8)$$

2) при действии сосредоточенной силы P (рис. 2, *б*)

$$Q(x) = P\,\Phi(b);$$

$$q(x) = \frac{P\,d\Phi(b)}{dx}; \quad (1.9)$$

3) при действии сплошной нагрузки $q(x)$ (рис. 2, *в*)

$$q(x) = P(x)\,\Phi(c). \quad (1.10)$$

При изображении нагрузок с помощью формул (1.8)—(1.10) легко решается задача об определении прогибов и углов наклона касательной для любой балки.

1.1.2. Из определения (1.1) следует, что

$$|x-a| = \Sigma\,[2\,\Phi\,(a)-1]\,(x-a) \qquad (1.11)$$

и

$$\frac{|x-a|}{x-a} = [2\,\Phi\,(a)-1].$$

Форма (1.11) графически может быть изображена в виде луча, отраженного от некоторой плоскости, как показано на рис. 3, *а*. Поэтому эту форму мы будем в дальнейшем называть зеркальной формой.

Всякая зеркальная форма вида (1.11) всегда будет характеризоваться неизменностью своего алгебраического знака при переходе от значений $x<a$ к значениям $x>a$.

Учитывая последнее обстоятельство, мы будем причислять к зеркальным формам также и формы, полученные умножением выражения (1.9) на множитель $(x-a)^{2n}$, где n — любое целое число.

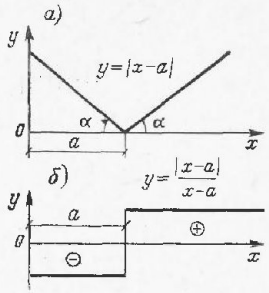


Рис. 3.

Форму (1.10) графически можно изобразить в виде ступенчатой прямой, как показано на рис. 3, *б*. Эту форму мы будем в дальнейшем называть смешанно-зеркальной формой.

Всякая смешанно-зеркальная форма (1.10) всегда будет характеризоваться изменением своего алгебраического знака при переходе от значений $x<a$ к значениям $x>a$.

Поэтому мы будем причислять к смешанно-зеркальным формам также и формы, полученные умножением выражения (1.10) на множитель $(x-a)^{2n}$, где n — любое целое число.

При интегрировании и дифференцировании всякая зеркальная форма вида (1.9) переходит в смешанно-зеркальную форму вида (1.10) и обратно — всякая смешанно-зеркальная форма переходит в зеркальную:

$$\int (x-a)^{2n}\,|x-a|\,dx = \frac{(x-a)^{2n-2}}{2n+2}\cdot\frac{|x-a|}{x-a} + c; \qquad (1.13)$$

$$\int (x-a)^{2n}\,\frac{|x-a|}{x-a}\,dx = \frac{|x-a|^{2n+1}}{2n+1} + c. \qquad (1.14)$$

Таким образом, при последовательных интегрированиях и дифференцированиях мы будем иметь чередование зеркальных и смешанно-зеркальных форм.

Графически такое чередование форм приводит к чередованию симметрии и обратной симметрии в эпюрах. Наглядно это можно видеть, например, на случае расчета балки, изображенной на рис. 4, *а—д*.

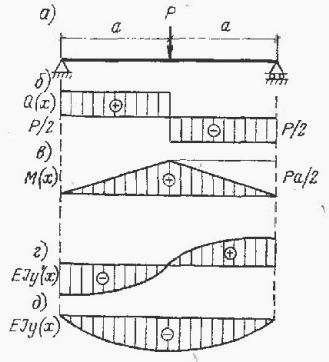


Рис. 4.

Последовательно будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}
Q\,(x) &= -\frac{P}{2}\,\frac{|x-a|}{(x-a)};\\
M\,(x) &= \frac{Pa}{2} - \frac{P}{2}\,|x-a|;\\
EJy'\,(x) &= \frac{Pa}{2}x - \frac{Pa^2}{2} - \frac{P}{4}\,\frac{|x-a|^3}{(x-a)};\\
EJy\,(x) &= \frac{Pa}{2}x^2 - \frac{Pa^2}{2}x + \frac{Pa^3}{n} -\\
&\quad - \frac{P}{n}\,|x-a|^3.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.15)$$

Система уравнений (1.15) с чередующимися в ее строках зеркальными и смешанно-зеркальными формами на-

ходится в полном соответствии с эпюрами, изображенными на рис. 4.

1.1.3. Суммированием простейших зеркальных форм (1.11) можно получить сложную зеркальную форму

$$y_1(x)=\sum_{i=1}^{n} b_i|x-a_i|=\sum_{i=1}^{n}|c_i+b_i x|, \qquad (1.16)$$

где $c_i=-a_i b_i$.

Аналогично суммированием смешанно-зеркальных форм вида (1.12) можно получить сложную смешанно-зеркальную форму

$$y_2(x)=\sum_{i=1}^{n} b_i\frac{|x-a_i|}{x-a_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{|c_i+b_i x|}{c_i+b_i x}, \qquad (1.17)$$

где $c_i=-a_i b_i$.

Остановимся несколько подробнее на интерпретации только что образованной формы (1.16).

Отметим, что при положительном значении угловых коэффициентов при модулярных слагаемых формы (1.16) графически ей будет соответствовать ломаный многоугольник, всегда обращенный выпуклостью в сторону оси ox, как показано на рис. 5, *а*.

При отрицательных значениях угловых коэффициентов b_i изломы ломаного многоугольника будут менять свою направленность по отношению к оси ox, как показано на рис. 5, *б*.

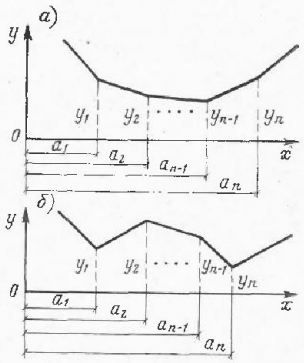


Рис. 5.

Между угловыми коэффициентами b_i зеркальной формы (1.16) и ординатами точки излома y_i, изображенными на рис. 5, *а*, может быть установлена определенная связь.

Каждый излом модулярной функции (1.16) будет характеризоваться изменением аглебраического знака в подмодулярном выражении у одного из слагаемых этой формы при переходе его через нулевое значение. Однако благодаря знаку модуля окончательный алгебраический знак слагаемого меняться не будет, и оно, лишь изменив свой угловой коэффициент на обратный, снова начнет возрастать.

Когда будет пройдена вся область изломов, то, очевидно, знаки угловых коэффициентов в подмодулярных выражениях у всех слагаемых формы (1.16) окажутся измененными на обратные, причем самый вид функции останется таким же, каким он был в начальной области до наступления изломов.

То же самое можно сказать и в отношении алгебраических знаков в подмодулярных слагаемых у свободных членов.

Для определения $2n$ коэффициентов формы (1.16) мы будем иметь следующие $2n$ условий:

n условий для каждого из изломов:

$$c_t+b_t x=0 \text{ при } t=1, 2, \ldots, n.$$

n условий, определяющих ординаты n точек излома:

$$-\sum_{i=1}^{t-1} c_i+\sum_{i=t+1}^{n} c_i+\left[-\sum_{i=1}^{t-1} b_i+\sum_{i=t+1}^{n} b_i\right]x_t=y_t,$$

где через x_t, y_t обозначены соответствующие координаты точки излома.

После подстановки первой группы условий во вторую и после некоторых упрощений мы получим систему уравнений, служащую для определения угловых коэффициентов интересующей нас формы (1.16), решая которую относительно угловых коэффициентов мы найдем для них следующие значения:

$$\left.\begin{aligned}
b_1&=-\frac{1}{2}\left[\frac{y_1+y_n}{x_n-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right];\\
b_2&=-\frac{1}{2}\left[\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right];\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
b_i&=-\frac{1}{2}\left[\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}-\frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right];
\end{aligned}\right\} \qquad (1.18)$$

$$\left.\begin{array}{l} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n-1} = -\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} - \dfrac{y_{n-1} - y_{n-2}}{x_{n-1} - x_{n-2}}\right]; \\ b_n = -\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{y_1 + y_n}{x_n - x_1} - \dfrac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}\right]; \end{array}\right|$$

после чего зеркальной форме может быть придан окончательный вид:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i |x - x_i|. \qquad (1.19)$$

На формулу (1.19) можно смотреть и с другой точки зрения. Ее можно рассматривать как формулу, дающую возможность приближенного представления непрерывной функции с помощью линейного зеркального ряда, что имеет особенно существенное значение при решении синтетических задач строительной механики.

При графическом изображении смешанно-зеркальной формы (1.17) также может быть поставлен вопрос о записи ее уравнения по заданным ординатам на ее отдельных участках. Форма, изображенная на рис. 5, *а*, может быть записана в виде

$$y(x) = b_1 \frac{|x - a_1|}{x - a_1} + b_2 \frac{|x - a_2|}{x - a_2} + \ldots + b_n \frac{|x - a_n|}{x - a_n}. \qquad (1.20)$$

Для определения коэффициентов формы (1.20) будем иметь условия:

при $0 < x < a_1$, $-b_1 - b_2 - \ldots - b_n = y_1$;

при $a_1 < x < a_2$, $+b_1 - b_2 - \ldots - b_n = y_2$;

. . . . . .

при $a_{n-1} < x < a_n$, $+b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} + b_n = y_n$,

откуда легко определить, что при

$$b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{2} \qquad (1.21)$$

и

$$b_n = -\frac{y_1 - y_n}{2}.$$

При отрицательном значении ординат y_i следует производить соответствующие изменения алгебраических

знаков. Представление непрерывных функций с помощью смешанно-зеркальных форм (1.17) было достаточно полно освещено в работе [89], и мы на нем здесь поэтому останавливаться не будем.

§ 1.2. Решение зеркальных уравнений и определение наименьшего значения зеркальной функции одной переменной

1.2.1. Пусть мы имеем зеркальное уравнение вида

$$b_1 |x - a_1| + b_2 |x - a_2| + \ldots + b_n |x - a_n| = c. \qquad (1.22)$$

Для определения корней этого уравнения (1.22) воспользуемся выражением зеркальной формы (1.11) через единично-прерывистую форму (1.1). Будем иметь

$$|x - a_i| = [2\Phi(a_i) - 1](x - a_i). \qquad (1.23)$$

Вставляя далее значения биномов (1.23) в уравнение (1.22) и решая полученное уравнение относительно x, после проведения элементарных вычислений получим:

$$x = \frac{c + \sum_{i=1}^{n} 2 a_i b_i \Phi(a_i) - \sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i (x - a_i)[2\Phi(a_i) - 1]}. \qquad (1.24)$$

Дальнейший путь решения поставленной задачи заключается в использовании ряда проб путем установления значения x при

$$\left.\begin{array}{r} x < a_1; \\ a_1 < x < a_2; \\ \cdots\cdots \\ a_{n-1} < x < a_n; \\ a_n < x. \end{array}\right\} \qquad (1.25)$$

Вслед за этим производится отбор корней, удовлетворяющих условиям (1.25).

Если бы в заданном уравнении наряду с зеркальными формами оказались бы также смешанно-зеркальные, то последние пришлось бы заменить с помощью формулы (1.12). В остальном порядок решения был бы полностью сохранен. Если бы в отношении неизвестного переменного получалась неопределенность, то это указывало бы

на бесчисленное множество корней, лежащих в определенном интервале.

Пример. Решить зеркальное уравнение вида

$$|x+2|-2\frac{|x-1|}{x-1}-|x-2|=2. \qquad (1.26)$$

Применяя формулы (1.11) и (1.12), будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} |x+2| &= [2\Phi(-2)-1](x+2);\\ \frac{|x-1|}{x-1} &= [2\Phi(+1)-1];\\ |x-2| &= [2\Phi(+2)-1](x-2). \end{aligned}\right\} \qquad (1.27)$$

Вставляя найденные нами значения слагаемых по формулам (1.27) в заданное уравнение (1.26), после несложных алгебраических преобразований будем иметь:

$$x=\frac{4-4\Phi(-2)+4\Phi(+1)-4\Phi(-2)}{2[\Phi(-2)-\Phi(+2)]}. \qquad (1.28)$$

Результаты решения уравнения (1.26) даны в табл. 1.

Таблица 1

Предел значения	Вычисление значения x по формуле	Заключение
$x<-2$	$x=+4/0=+\infty$	Корень отсутствует
$-2<x<+1$	$x=\frac{4-4}{0}=0$	Корень реален
$+1<x<+2$	$x=4/2=+2$	То же
$+2<x$	$x=\frac{4-4+4-4}{2(1-1)}=\frac{0}{0}$	Бесчисленное множество корней при $x>2$

Таким образом, уравнение (1.26), кроме двух реальных корней при $x=0$ или $x=+2$, будет иметь бесчисленное множество корней в интервале $+2<x<+\infty$. Действительно, нетрудно убедиться простыми вычислениями, что уравнение (1.26) будет также удовлетворяться, например, при всех целых числах $x=3, 4, \ldots, +\infty$.

1.2.2. Общий вид линейных функций, содержащих конечно-разрывные формы, может быть представлен формулой

$$y(x)=\sum_{i=1}^{m} a_i x\,\Phi(b_i)+\sum_{i=1}^{n} c_i x+\sum_{i=1}^{p} d_i\Phi(g_i)+\sum_{i=1}^{q} h_i, \qquad (1.29)$$

причем слагаемые, стоящие под знаками сумм, могут быть как положительными, так и отрицательными.

Отметим, что решение поставленной задачи мы будем рассматривать лишь в некотором ограниченном интервале, а именно — в той области независимого переменного x, которая ограничена крайними полюсами разрыва непрерывности функции (1.29). Без этого ограничения задача не имела бы смысла, так как наименьшее значение линейной функции, очевидно, лежало бы в бесконечности.

Отметим далее, что при решении поставленного вопроса определения наименьшего значения функции (1.29) мы, строго говоря, будем решать задачу о таких значениях независимого переменного x, для которых оказывается возможным обращение в нуль первой производной функции.

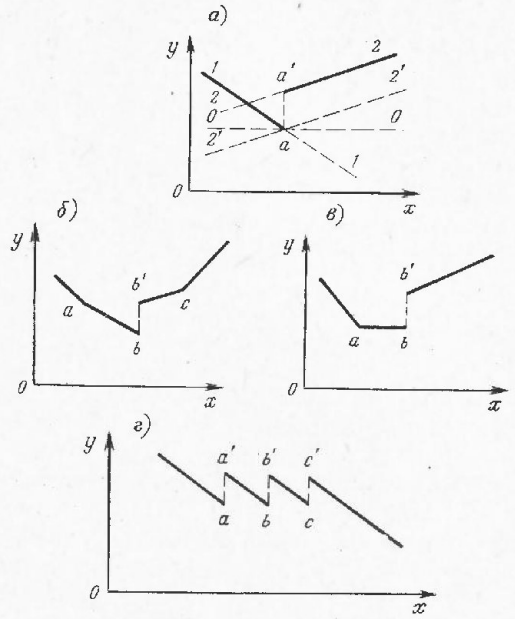


Рис. 6.

Следует отметить, что первая производная функции (1.29), как правило, в точке разрыва непрерывности функции (1.29) будет меняться скачкообразно, как показано на рис. 6, *а*, переходя от направления *1—1* к направлению *2—2* и проходя, несмотря на разрыв непрерывности, через нулевое значение.

Вместе с тем следует отметить возможность и такого случая, когда до прохождения полюса разрыва непрерывности и после его прохождения первая производная будет оставаться постоянной, несмотря на разрыв непрерывности самой функции. В этом случае, очевидно, рассматриваемая функция будет иметь условно наименьшее значение в полюсах разрыва непрерывности. Такой случай изображен на рис. 6, *г*.

Важно также отметить, что обращение в нуль первой производной следует производить лишь для тех значений независимого переменного, которые будут соответствовать полюсам разрыва непрерывности функции (1.29) или ее производной. Это следует из того, что для всякой ломаной прямой, имеющей разрывы непрерывности производной в ряде точек, значения ординат между полюсами разрывов могут быть только двух видов: либо линейно возрастающими или убывающими (рис. 6, *б*), либо сохраняющими постоянное значение, как это показано на рис. 6, *в*.

Также следует отметить, что первая производная функции (1.29) далеко не всегда обращается в нуль. В самом деле, дифференцирование выражения (1.29) и приравнивание к нулю первой производной приводят к условию:

$$\frac{dy(x)}{dx}=\sum_{i=1}^{m} a_i \Phi(b_i)+\sum_{i=1}^{n} c_i=0. \qquad (1.30)$$

Условие (1.30) показывает, что осуществление наименьшего значения функции (1.29) не будет связано с величиной слагаемых, включающих в себя в качестве множителя переменное x, и что для осуществления наименьшего значения функции (1.29) непременно надо иметь среди слагаемых правой части уравнения (1.30) как положительные, так и отрицательные величины.

Однако даже при этом условии уравнение (1.30) иногда может привести к противоречию, если не будут подобраны соответствующим образом численные значения a_i, $\Phi(b_i)$, c_i, входящие в это уравнение.

Следует также отметить, что поскольку в полюсах разрыва непрерывности функции (1.29) ее первая производная также может претерпевать разрыв непрерывности, то критерий второй производной, обычно определяющий для непрерывных функций конкретное наличие максимума или минимума, здесь окажется неприемлемым.

На практике выяснять наибольшее или наименьшее значение функции (1.29) приходится простым вычислением значений ее первой производной до и после точки полюса разрыва непрерывности этой функции.

Поэтому можно сказать, что после получения уравнения (1.30) дальнейшая практическая сторона задачи об установлении наименьшего значения функции (1.29) приводится к частичному установлению корней уравнения (1.30) для полюсов разрыва непрерывности.

Корни для полюсов разрыва непрерывности устанавливают на основе методов решения линейных зеркальных уравнений, изложенных нами в п. 1.2.2.

1.2.3. Определение наименьшего значения линейных зеркальных функций с одной переменной величиной можно рассматривать как частный случай изложенного в п. 1.2.2. Однако этот вопрос имеет настолько распространенное и существенное значение в задачах строительной механики, что на нем следует особо остановиться.

Пусть мы имеем линейную зеркальную форму вида

$$y(x)=\sum_{i=1}^{n} |c_i+b_i x|. \qquad (1.31)$$

Графически такая форма, как мы видим, всегда может быть изображена в виде ломаной прямой, причем для каждой из точек излома хотя бы одно из слагаемых функции (1.31) непременно обратится в нуль.

Условимся под однократным наименьшим значением зеркальной функции (1.31) или под наименьшим значением первого рода понимать такое значение функции $y(x_0)$, для которого удовлетворяется неравенство

$$y(x_k)>y(x_0)<y(x_{k+1}), \qquad (1.32)$$

где $y(x_k)$ и $y(x_{k+1})$ — два такие последовательные значения функции (1.31), разность по модулю между которыми может быть сделана меньше любого, произвольно взятого числа ε,

$$|y(x_{k+1})-y(x_k)|<\varepsilon.$$

Совершенно очевидно, что удовлетворить требованию однократного наименьшего значения функции (1.31) можно только для одной из ее точек излома, потому что если бы мы взяли любую другую произвольную точку, расположенную в интервале между двумя изломами, для которых значения функции были бы соответственно равны $y(x_k)$ и $y(x_{k+1})$, то для такой точки излома всегда можно было бы удовлетворить одному из следующих трех условий:

$$\begin{aligned} &1)\ y(x_k) < y(x) < y(x_{k+1});\\ &2)\ y(x_k) > y(x) > y(x_{k+1});\\ &3)\ y(x_k) = y(x) = y(x_{k+1}). \end{aligned} \tag{1.33}$$

Но так как очевидно, что ни одно из условий (1.33) не соответствует требованию (1.32), то такая точка, лежащая в интервале между двумя изломами, не может соответствовать наименьшему значению функции (1.31).

Графически наименьшее значение первого рода для зеркальной функции (1.31) изображено на рис. 7, *а*.

Условимся далее под многократным наименьшим значением или под наименьшим значением второго рода функции (1.31) понимать такое значение функции $y(x)$, для которого удовлетворяется неравенство

$$y(x_k) > y(x_0) = y(x_1) = y(x_2) = \ldots = y(x_m) < y(x_{k+1}), \tag{1.34}$$

причем $y(x_k)$ и $y(x_{k+1})$ здесь определяются так же, как и для неравенства (1.32).

В случае наименьшего значения второго рода требованию, соответствующему условию 3 (1.33), будет удовлетворять бесчисленное множество точек, расположенных между двумя точками излома, как показано на рис. 7, *б*.

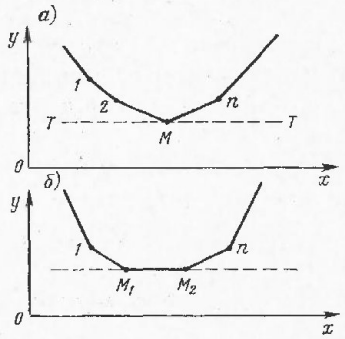


Рис. 7.

На практике можно дать достаточно простой и быстрый критерий, позволяющий безошибочно установить наименьшее значение функции (1.31).

Обозначим корни подмодулярных слагаемых, расположенные в порядке их последовательного возрастания, для функции (1.31) через x_1; $x_2 \ldots x_n$. Тогда в случае наименьшего значения первого рода в точке излома знак производной для прямых ломаного многоугольника должен непременно измениться на обратный.

В случае же наименьшего значения второго рода производная в точке излома с наименьшим значением функции обратится в нуль.

1.2.4. Перейдем к установлению практического способа определения наименьшего значения зеркальной функции одной независимой переменной. Предположим, что рассматриваемая функция достигает наименьшего значения при обращении в нуль ее модулярного слагаемого $c_m + b_m x$ и, следовательно, при значении $x = x_m$. Тогда в соответствии с изложенным мы можем написать:

при $x_{m-1} < x < x_m$ $|b_1| + |b_2| + \ldots + |b_{m-1}| + |b_m| - \ldots - |B_{n-1}| - |b_n| \leqslant 0$;

при $x_m < x < x_{m+1}$ $|b_1| + |b_2| + \ldots + |b_{m-1}| + |b_m| - \ldots - |b_{n-1}| - |b_n| > 0$.

Если далее через $|B|$ обозначить сумму всех угловых коэффициентов подмодулярных слагаемых функции (1.31), взятых по модулю, т. е. если принять

$$\sum_{i=1}^{n} |b_i| = B,$$

то только что написанные неравенства можно было бы представить в виде

$$\left.\begin{aligned} &|b_1| + |b_2| + \ldots + |b_{m-1}| \leqslant B/2,\\ \text{но}\ &|b_1| + |b_2| + \ldots + |b_{m-1}| + |b_m| > B/2, \end{aligned}\right\} \tag{1.35}$$

причем знак $<$, стоящий в первой из формул (1.35), будет указывать на наличие наименьшего значения первого рода, а знак $=$ на наличие наименьшего значения второго рода.

На основании изложенного порядок определения наименьшего значения линейной зеркальной функции (1.31) следующий.

1. Определяются все алгебраические корни для подмодулярных слагаемых функции (1.31).

2. Найденные корни располагаются в порядке их последовательного возрастания.

3. Слагаемые зеркальной функции (1.31) переставляются в соответствии с найденным порядком корней.

4. Находится B — сумма всех угловых коэффициентов функции (1.31), взятых по модулю.

5. Последовательно складываются угловые коэффициенты зеркальной формы (1.31), взятые по модулю до тех пор, пока найденная таким образом сумма не превысит B/2.

Корень, соответствующий такому превышению, и определит наименьшее значение зеркальной функции (1.31).

Если сумма угловых коэффициентов, взятых по модулю, равна $B/2$, то это будет указывать на наименьшее значение второго рода.

Для иллюстрации рассмотрим пример такого определения наименьшего значения зеркальной функции.

Пример. Определить наименьшее значение зеркальной функции

$$y(x)=5|x|+7|x-1|+2|x+3|+$$
$$+3|x+2|+3|x-4|.$$

Расчет производим в следующем порядке.

1. Определяем корни подмодулярных слагаемых заданной функции в порядке расположения этих слагаемых:

$$x=0;\ x=1;\ x=-3;\ x=-2;\ x=4.$$

2. Переставляем этот порядок корней в соответствии с их возрастанием и присваиваем им порядковые номера:

$$x_1=-3;\ x_2=-2;\ x_3=0;\ x_4=+1;\ x_5=4.$$

3. Вносим множители, стоящие перед знаками модулей в слагаемых зеркальной формы, под знаки модуля и выписываем угловые коэффициенты, взятые по модулю, располагая их в соответствии с порядком возрастания корней:

$$|b_1|=2;\ |b_2|=3;\ |b_3|=5;$$
$$|b_4|=7;\ |b_5|=3.$$

4. Находим сумму и полусумму угловых коэффициентов, взятых по модулю:

$$|B|=2+3+5+7+3=20;\ |B|/2=10.$$

5. Последовательно складываем угловые коэффициенты, взятые по модулю, до тех пор, пока не превысим найденную полусумму $|B|/2$:

$$2<10;\ 2+3=5<10;\ 2+3+5=10.$$

Следовательно, при угловом коэффициенте, взятом по модулю, $b_3=5$, и при соответствующем ему $x_3=0$ мы получим наименьшее значение заданной зеркальной функции. Оно и будет наименьшим значением второго рода.

6. Вычисляем наименьшее значение зеркальной функции, вставляя в ее начальное значение $x=0$:

$$\text{Н. ЗН. } y(x)=0+7+6+6+12=31.$$

Отметим, что для всех значений x, лежащих в пределах $0\leqslant x\leqslant 1$ найденное нами наименьшее значение $y(x)=31$ будет сохраняться.

§ 1.3. Специальные зеркальные формы — аут-формы и ограничители

1.3.1. При многовариантных задачах весьма удобно записать их условия с помощью зеркальных аут-форм.

Под линейной зеркальной аут-формой с одной переменной величиною мы будем подразумевать форму вида

$$y(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{|c_1^{(i)}+b_1^{(i)}x|}{\overline{|c_2^{(i)}+b_2^{(i)}x|}}\ \overline{\overline{\cdots\cdots}}\ \overline{\overline{|c_m^{(i)}+b_m^{(i)}x|}}\quad \text{при } n>1, \qquad (1.36)$$

которая читается так: «аут-функция $y(x)$ равна либо $|c_1^{(i)}+b_1^{(i)}x|$, либо $|c_2^{(1)}+b_2^{(1)}x|$, либо и т. д., сложенной либо с величиной $|c_1^{(2)}+b_1^{(2)}x|$, либо с величиной $|c_2^{(2)}+b_2^{(2)}x|$ и т. д.».

При этом самый выбор величин, стоящих в строках аут-формы, подчинен требованию, чтобы эти величины имели наибольшие значения и притом такие, чтобы было обеспечено наименьшее значение функции $y(x)$. Графи-

ческое изображение аут-формы (1.36) показано на рис. 8, *а*.

Рассмотрим некоторые частные случаи раскрытия аут-форм.

Первым таким случаем будет случай равенства угловых коэффициентов в строках аут-формы, т. е. когда

$$b_1^{(i)} = b_2^{(i)} = b_3^{(i)} = \ldots = b_n^{(i)}. \qquad (1.37)$$

Этот случай графически изображен на рис. 8, *б*.

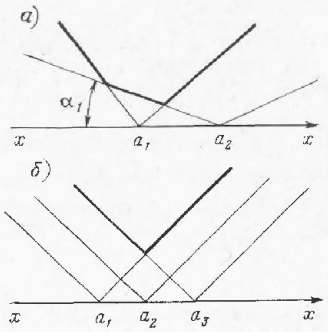


Рис. 8.

Для раскрытия рассматриваемого нами случая аут-формы необходимо расположить свободные члены $c_1^{(i)}$; $c_2^{(i)} \ldots c_n^{(i)}$ в каждой из строк в порядке их последовательного возрастания, т. е. чтобы $c_1^{(i)} < c_2^{(i)} < \ldots < c_n^{(i)}$

В изучаемом нами случае, как нетрудно видеть на рис. 8, *б*, аут-форма может быть заменена простой зеркальною формой, имеющей полюс разрыва непрерывности первой производной в точке пересечения крайних строк аут-формы и дополненной расстоянием указанной точки пересечения до оси *xx*.

Произведя соответствующие вычисления, мы придем в итоге к формуле весьма простого вида

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[\left| \frac{c_1^{(i)} + c_n^{(i)}}{2} + b^{(i)} \cdot x \right| + \frac{c_1^{(i)} + c_n^{(i)}}{2} \right. . \qquad (1.38)$$

Другой, часто встречающийся в практике случай раскрытия двухстрочной аут-формы вида

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{|c_1^{(i)} + b_1^{(i)} x|}{|c_2^{(i)} + b_2^{(i)} x|}. \qquad (1.39)$$

Аут-форма (1.39) может быть раскрыта по формуле

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \left| (c_1^{(i)} + c_2^{(i)}) + (b_1^{(i)} + b_2^{(i)}) x \right| +$$

$$+ \frac{1}{2} \left| (c_1^{(i)} - c_2^{(i)}) + (b_1^{(i)} - b_2^{(i)}) x \right|. \qquad (1.40)$$

С доказательством этого простого случая раскрытия аут-формы (1.39) можно ознакомиться в работе [89], с. 7—9.

1.3.2. Более сложным является общий случай раскрытия зеркальной аут-формы общего вида (1.36). Такое раскрытие приходится производить попарным анализированием строк аут-формы (1.36). Этот прием приводит к решению ряда зеркальных уравнений, получаемых при сравнении строк, которые позволят определить все точки пересечения зеркальных форм этих строк и получить сначала новую зеркальную форму, заменяющую собою первую и вторую строки заданной аут-формы (1.36), потом зеркальную форму, заменяющую первую, вторую и третью строки аут-формы (1.36) и т. д. Таким образом производится полное раскрытие заданной зеркальной аут-формы. Описанный прием раскрытия аут-формы достаточно трудоемок, но он может быть хорошо программирован для счетно-электронных машин в силу повторяемости операций.

В частном случае в строках аут-формы могут оказаться и постоянные числа. Наибольшее из этих постоянных чисел будет, очевидно, представлять из себя предел, ниже которого результирующая зеркальная форма не может иметь значений своих ординат. Поэтому такое наибольшее постоянное число называют ограничителем аут-формы.

Рассмотрим практический пример раскрытия аут-формы.

Пример. Пусть требуется определить наименьшее значение зеркальной аут-формы

$$y(x) = \frac{|6+2x|}{|x|} + \frac{|1+x|}{|2-2x|} + \frac{|3-x|}{|2+2x|}.$$

Это случай аут-формы вида (1.39), который легко раскрывается с помощью формулы (1.40):

1) для первого слагаемого

$$y_1=\frac{3}{2}|2+x|+\frac{1}{2}|6+x|;$$

2) для второго слагаемого

$$y_2=\frac{1}{2}|3-x|+\frac{1}{2}|1-3x|;$$

3) для третьего слагаемого

$$y_3=\frac{1}{2}|5+x|+\frac{1}{2}|1-3x|.$$

Таким образом, результирующая зеркальная аут-форма будет иметь вид

$$y(x)=\frac{3}{2}|2+x|+\frac{1}{2}|6+x|+$$
$$+\frac{1}{2}|3-x|+|1-3x|+\frac{1}{2}|5+x|.$$

Минимизируя последнюю результирующую аут-форму в соответствии с приемами, изложенными в п. 1.24, найдем окончательное наименьшее значение заданной аут-формы:

$$\text{Н. ЗН. } y(x)=24;$$

наступит оно при $x=3$ и будет наименьшим значением первого рода.

§ 1.4. Определение наименьшего значения зеркальной функции многих переменных величин

1.4.1. По аналогии с установленной нами ранее единично-прерывистой формой функциональной зависимости (1.1) мы можем установить аналогичную форму и для случая многих переменных величин.

Условимся под единично-прерывистой формой многих переменных величин понимать форму

$$\Phi(a_1a_2\ldots a_n)=\frac{1}{2}\left[1+\right.$$
$$\left.+\frac{|a_1a_2\ldots a_nx_1+a_1a_2\ldots a_nx_2+\ldots+a_1a_2\ldots a_n\,x_n-a_1a_2\ldots a_n|}{a_1a_2\ldots a_nx_1+a_1a_2\ldots a_nx_2+\ldots+a_1a_2\ldots a_n\,x_n-a_1a_2\ldots a_n}\right]. \tag{1.41}$$

Если в форме (1.41) последовательно положить:

$$\left.\begin{array}{l}
1)\ x_2=x_3=\ldots=x_n=0,\ x_1\neq0;\\
2)\ x_1=x_3=\ldots=x_n=0,\ x_2\neq0;\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
n)\ x_1=x_2=\ldots=x_{n-1}=0,\ x_n\neq0,
\end{array}\right\} \tag{1.42}$$

то получим ряд единично-прерывистых форм с одной переменной величиной каждая:

$$\left.\begin{array}{l}
\Phi(a_1)=\frac{1}{2}\left[1+\frac{|x_1-a_1|}{x_1-a_1}\right];\\
\Phi(a_2)=\frac{1}{2}\left[1+\frac{|x_2-a_2|}{x_2-a_2}\right];\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Phi(a_n)=\frac{1}{2}\left[1+\frac{|x_n-a_n|}{x_n-a_n}\right].
\end{array}\right\} \tag{1.43}$$

Если далее положить:

$a_1a_2\ldots a_n=-c_0;$

$a_2a_3\ldots a_n=b_1;$

$\ldots\ldots\ldots$

$a_1a_2\ldots a_{n-1}=b_n,$

то форму (1.41) легко можно привести к форме

$$\Phi(a_1a_2\ldots a_n)=\frac{1}{2}\left[1+\frac{|b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_n\,x_n+c_0|}{b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_n\,x_n+c_0}\right]. \tag{1.44}$$

Нетрудно видеть, что форма (1.44) принимает значение, равное нулю в том случае, если соблюдается неравенство

$$b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_n\,x_n+c_0<0,$$

и значение, равное единице при соблюдении неравенства

$$b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_n\,x_n+c_0>0.$$

Форма (1.44) становится неопределенной, если

$$b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_n\,x_n+c_0=0.$$

Единично-прерывистая форма (1.44) по аналогии с единично-прерывистою формой одной переменной величины также обладает рядом таких же свойств, связан-

ных с возведением ее в целую, положительную степень, с ее дифференцированием и интегрированием, на которых мы здесь останавливаться не будем.

Наконец, из формы (1.44) также можно выделить зеркальную и смешанно-зеркальную формы многих переменных величин. Эти формы будут иметь вид:

$$y_1\ (x_1x_2\ldots x_n)=|b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_n\ x_n+c_0|; \quad (1.45)$$

$$y_2\ (x_1x_2\ldots x_n)=\frac{|b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_n\ x_n+c_0|}{b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_n\ x_n+c_0}. \quad (1.46)$$

1.4.2. Рассмотрим некоторые свойства линейной зеркальной функции со многими независимыми переменными, которые помогут нам установить особенности определения ее наименьшего значения.

Пусть мы имеем зеркальную форму

$$y\ (x_1x_2\ldots x_n)=\sum_{i=1}^{m}|b_1^{(i)}\ x_1+b_2^{(i)}\ x_2+\ldots+b_n^{(i)}\ x_n+c_0|=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}|\sum_{k=1}^{n}b_k^{(i)}\ x_k+c_0^{(i)}|. \quad (1.47)$$

Выделим из формы (1.47) отдельно взятые слагаемые, каждое из которых будет иметь вид

$$y_1\ (x_1x_2\ldots x_n)=|\sum_{k=1}^{n}b_k^{(i)}\ x_k+c_0^{(i)}|,\ \text{при}\ i=1,2\ldots m. \quad (1.48)$$

Формы вида (1.48), из которых состоит форма (1.47), мы в дальнейшем будем называть элементарными зеркальными формами многих переменных величин.

Каждое из слагаемых вида (1.48) можно рассматривать как некоторую линейную n-мерную гиперплоскость в $n+1$-мерном пространстве Эвклида, которая отражается от n-мерной координатной гиперплоскости. При $y_1\ (x_1x_2\ldots x_n)=0$ получим след на n-мерной координатной гиперплоскости в виде линейной гиперплоскости n—1-го измерения.

Если бы все коэффициенты $b_k^{(i)}$ в элементарных зеркальных формах (1.48) были бы пропорциональны друг другу, то все соответствующие им гиперплоскости n-го измерения были бы параллельны друг другу. А отсюда мы могли бы определить наименьшее значение функции (1.48), аналогично тому, как мы его определили для случая одной независимой переменной, разобранном в п. 1.3.1.

В действительности, однако, ввиду отсутствия в общем случае такой пропорциональности между коэффициентами $b_k^{(i)}$ образование функции (1.47) будет более сложным, так как каждая элементарная форма (1.48) будет иметь свой наклон к координатной гиперплоскости n-го измерения и свое направление пересечения с этой гиперплоскостью.

Спроектируем теперь линейную гиперплоскость, определяемую формулой (1.47) на любую двумерную плоскость $n+1$-мерного пространства, перпендикулярную к основной координатной гиперплоскости n-го измерения (т. е. плоскость 2-го измерения, образованную осями yx_t). При таком проектировании мы пришли бы к выражению

$$y_t\ (x_t)=\sum_{i=1}^{m}|b_k^{(i)}\ x+c_0|. \quad (1.49)$$

Нетрудно видеть, что каждая из ломаных прямых, полученных таким образом и определяемых формулами вида (1.49), будет всегда обращена выпуклостью в одну и ту же сторону, а поэтому и всю гиперплоскость вида (1.47) можно рассматривать как выпуклую гиперплоскость, обращенную своею выпуклостью в сторону основной координатной гиперплоскости.

1.4.3. Остановимся теперь более подробно на минимизировании зеркальной формы (1.47). Выделяя из этой формы (1.47) модулярные слагаемые вида (1.48) и обращая в нуль n из указанных слагаемых, мы получим в результате пересечения гиперплоскостей (1.48) вполне определенную точку $n+1$-мерного пространства Эвклида. Область $n+1$-мерного пространства, выделенную из области (1.47) и определяемую равенством

$$y_0\ (x_1x_2\ldots x_n)=\sum_{i=1}^{n}y_1\ (x_1x_2\ldots x_n),\ \text{при}\ i=1,2,\ldots n,$$

мы будем в дальнейшем называть областью частных наименьших значений зеркальной формы (1.47). Очевидно, что число таких областей будет равно числу сочетаний из общего числа участвующих в рассмотрении элементов и числа возможных областей, т. е. равно C_m^n.

Ту область или те области многомерного пространства, которые будут содержать в себе самые наименьшие значения формы (1.47), будем называть областью абсо-

лютных наименьших значений формы (1.47) и обозначать наим. зн. $y_0\ (x_1x_2\ldots x_n)$.

При этом может оказаться, что при выделении из областей (1.47) двух областей каждая из последних областей в совокупности с остальными $n-1$ областями определит абсолютное наименьшее значение формы (1.47). В этом случае мы будем иметь абсолютное наименьшее значение второго рода или линейное абсолютное наименьшее значение.

Может оказаться, что абсолютное наименьшее значение формы (1.47) будет определяться двумя, тремя и т. д. областями многомерного пространства Эвклида. В этом случае мы будем получать наименьшие значения третьего, четвертого и т. д. рода. Получение таких наименьших значений является особенно выгодным для практики, так как дает возможность широкого использования сортамента применяемого при подборе профилей стержней.

При определении абсолютного наименьшего значения функции (1.47) следует также иметь в виду, что в силу модулярности всех ее составляющих слагаемых она будет представлять из себя выпуклую функцию, выпуклость которой всегда будет обращена в сторону выбранной нами координатной гиперплоскости многомерного пространства Эвклида. Более полные указания по этому вопросу можно найти в [99].

Это последнее обстоятельство позволяет осуществлять последовательное непрерывное приближение к точке или к области абсолютного наименьшего значения функции (1.47) по специально разработанному для этой цели методу выравнивания.

Наряду с изложением метода выравнивания остановимся и на признаках, позволяющих с уверенностью сделать заключение о достижении нами такой точки или области абсолютных наименьших значений зеркальной функции (1.47).

§ 1.5. Метод выравнивания

1.5.1. Основным методом, на котором базируются и другие методы определения зеркальной функции переменных величин (1.47), является **метод выравнивания, основанный на том, что функция (1.47) по всем направлениям**, идущим к точке или точкам (при наименьшем

значении второго, третьего и т. д. рода) наименьших значений, будет только убывать.

Поэтому выберем на гиперплоскости (1.47) некоторое направление и будем следовать этому направлению до тех пор, пока не найдем на нем точки, соответствующей наименьшему значению функции. Найдя такую точку, выберем новое направление, проходящее через эту точку, и будем опять двигаться по нему до тех пор, пока не найдем некоторого нового наименьшего значения зеркальной функции, и т. д.

Указанные направления, однако, удобнее брать не произвольно, а идти в некоторой последовательности, которая и определяет собой метод выравнивания.

1. Определим начальное значение функции (1.47), положив все $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$, и получим

$$y\ (x_1x_2\ldots x_n)=y_0\ (0).$$

2. Переходим к первому варианту расчета. Полагаем $x_2=x_3=\ldots=x_n=0$ и по методу, изложенному в п. 1.2.4, находим $x_1=x_1^{(1)}$, при котором наступает наименьшее значение $y_1\ (x_1)$.

3. Принимаем далее $x_1=x_1^{(1)}$; $x_3=x_4=\ldots=x_n=0$ и аналогично предыдущему находим $x_2=x_2^{(1)}$ при котором наступает наименьшее значение $y_1\ (x_1x_2)$.

4. Затем принимаем $x_1=x^{(1)}$; $x_2=x_2^{(1)}$; $x_4=x_5=\ldots=x_n=0$ и при некотором значении $x_3=x_3^{(1)}$ находим новое наименьшее значение $y_1\ (x_1x_2x_3)$.

Продолжаем этот процесс до тех пор, пока не будут перебраны все независимые переменные. В конце первого варианта расчета мы получим наименьшее значение $y_1\ (x_1x_2\ldots x_n)$.

При этом всегда в соответствии с выпуклостью зеркальной формы (1.47) мы будем иметь:

$$y_0\ (0)>y_1\ (x_1)>y_1\ (x_1x_2)>y_1\ (x_1x_2x_3)\ldots>y_1\ (x_1x_2\ldots x_n). \tag{1.50}$$

Далее мы переходим ко второму варианту расчета. Теперь мы полагаем в функции (1.47) $x_2=x_2^{(1)}$; $x_3=x_3^{(1)}\ldots x_n=x_n^{(1)}$ и определяем значение $x_1=x_1^{(1)}$, при котором наступает наименьшее значение $y_2\ (x_1)$.

Продолжаем прием до тех пор, пока не будут перебраны все независимые переменные. В конце второго варианта расчета получим наименьшее значение $y_2\ (x_1x_2\ldots x_n)$.

При этом всегда будет иметь место система неравенств:

$$y_0(x_1x_2\ldots x_n) \geqslant y_1(x_1x_2\ldots x_n) \geqslant y_2(x_1x_2\ldots x_n) \geqslant$$
$$\geqslant \ldots y_m(x_1x_2\ldots x_n). \qquad (1.51)$$

Если при определении частных наименьших значений будут встречаться кратные корни, то их необходимо определять каждый в отдельности, так как через них будут проходить следы изломов.

1.5.2. Остановимся на установлении критерия определения глобального наименьшего значения зеркальной функции многих переменных.

Только что рассмотренный путь определения наименьших значений надо продолжать до тех пор, пока частные наименьшие значения при двух последовательных вариантах расчета не достигнут между собой достаточно близких значений и не сделают совершенно очевидной картину стремления к нулю каких-либо модулярных слагаемых зеркальной формы (1.47).

По выяснении этой картины мы выбираем указанные слагаемые из суммы (1.47) и решаем единственную систему линейных алгебраических уравнений, из которой определяем точные значения всех координат найденной точки или соответствующих линейных многообразий наименьшего значения формы (1.47).

Только что найденное этим способом решение, однако, всегда необходимо проверять, удовлетворяет ли оно требованиям глобального наименьшего значения функции (1.47) и не является ли одним из частных наименьших значений этой функции.

Для осуществления такой проверки достаточно убедиться в том, что функция (1.47) будет возрастать по всем направлениям одномерных, линейных следов, проходящих через найденную точку. А для этого необходимо продифференцировать каждое из уравнений, которым определяется след функции по каждой переменной и найти выражения производных для всех других переменных через эту единственную переменную.

Вставив найденные значения производных во все другие слагаемые функции (1.47), необходимо убедиться в том, что функция (1.47) будет возрастающей при прямом и при обратном дифференциальном перемещении по следу от точки или от области найденного наименьшего значения.

При этом необходимо отметить, что те слагаемые зеркальной функции (1.47), которые будут иметь подмодулярные выражения положительные, возрастают при положительном значении и убывают при отрицательном значении какой-либо производной от входящих в состав этого слагаемого переменных. И наоборот, у слагаемых, имеющих отрицательные подмодулярные выражения, будет наблюдаться обратный процесс.

Практически при этом можно руководствоваться следующим правилом для окончательного значения величины производной: необходимо все слагаемые с положительными подмодулярными выражениями продифференцировать и сложить с суммой продифференцированных слагаемых с отрицательными подмодулярными выражениями, у которых алгебраический знак изменен на обратный.

При этом самое отнесение того или иного слагаемого к категории положительных или отрицательных значений будет всецело определяться тем знаком, который получит подмодулярное значение данного слагаемого после вставки в него вместо текущих переменных координат найденной точки наименьшего значения.

Нетрудно видеть, что если функция, определяемая указанным образом не будет обращаться в нуль, то найденное значение производной может оказаться положительным и отрицательным в зависимости от направления перемещения по следу многообразия.

Далее необходимо отдельно рассмотреть одно или несколько слагаемых, не принадлежащих данному одномерному следу и не обращающихся в нуль в найденной точке наименьшего значения функции (1.47). Сумму их производных надо подсчитать особо и сравнить по модулю эту сумму с суммой, взятой по модулю предшествующих знакопеременных производных. Такое превышение будет являться вполне достаточным признаком возрастания данной зеркальной функции по обе стороны следа относительно найденной точки наименьшего значения.

Изложенный путь проверки сохраняется и при наличии наименьшего значения второго, третьего и т. д. рода. В этом случае только возрастание функции при удалении от точки наименьшего значения должно быть заменено в отдельных случаях ее неубыванием.

Отметим также, что такое решение поставленной задачи будет иметь выгодный вариант для суммы с боль-

шим числом зеркальных слагаемых, но с малым числом зеркальных слагаемых внутри каждой суммы, что практически соответствует требованиям многих задач строительной механики.

1.5.3. Пусть требуется определить наименьшее значение зеркальной функции многих переменных величин, имеющей вид

$$v=|6-2x-5y+z|+|12+x-3y-2z|+ \\ +|30-3x+y+z|+|24-x-y-3z|+|16-2x+ \\ +2y-z|+|6+x+2y+2z|. \qquad (1.52)$$

Расчет производим в соответствии с изложенным планом.

1. Полагаем сначала $x=y=z=0$. Находим начальное значение функции (1.52)

$$v_0=6+12+30+24+16+6=94.$$

2. Первый вариант расчета. Полагаем $y=z=0$, функция (1.52) примет вид

$$v_1=|6-2x|+|12+x|+|30-3x|+|24-x|+ \\ +|16-2x|+|6+x|. \qquad (1.53)$$

Определяя наименьшее значение функции (1.53), находим, что оно наступает при $x=8$, и

$$v_1=10+20+6+16+0+14=66<94.$$

Весь дальнейший процесс выравнивания функции (1.52) производим в соответствии с планом, изложенным в пп. 1.4.4 и 1.4.5. Не приводя подробно дальнейших вычислений, запишем лишь их результаты с помощью табл. 2.

Из табл. 2 ясно стремление к нулю 1-го, 4-го и 5-го слагаемых. Поэтому взяв из правой части формулы (1.52) эти слагаемые и приравняв их нулю, находим точные значения неизвестных, при которых наступит наименьшее значение заданной нам функции. Значения неизвестных будут:

$$x=5{,}26;\ y=0{,}33;\ z=6{,}14, \qquad (1.54)$$

после чего значение функции (1.52)

$$v=|0|+|3{,}99|+|20{,}69|+|0|+ \\ +|0|+|24{,}2|=48{,}88. \qquad (1.55)$$

Переходим далее к проверке найденного решения.

Таблица 2

Вариант		Значение переменных			Значение подмодулярных слагаемых						v
		x	y	z	1	2	3	4	5	6	
0	0	0	0	0	6	12	30	24	16	6	94
	1	8	0	0	−10	20	6	16	0	14	66
1	2	8	−2	0	0	26	4	18	−4	20	62
	3	8	−2	6	6	14	10	0	−10	22	62
2	1	8	−2	6	6	14	10	0	−10	22	62
	2	8	−0,8	6	0	10,4	11,2	−1,2	−7,6	24,4	54,8
	3	8	−0,8	5,6	0,4	11,2	10,8	0	−7,2	23,6	53,2
3	1	7,8	−0,8	5,6	0	11,0	11,4	0,2	−6,8	23,4	52,8
	2	7,8	−0,8	5,6	0	11,0	11,4	0,2	−6,8	23,4	52,8
	3	7,8	−0,8	5,6	0	11,0	11,4	0,2	−6,8	23,4	52,8

Исследование 1-го следа. Приравнивая к нулю производные по x у 1-го и 4-го слагаемых и решая полученные уравнения, найдем, что

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{7}{16}; \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{3}{16}. \qquad (1.56)$$

Так как из формулы (1.55) видно, что 2-е, 3-е и 6-е слагаемые, не обратившиеся в нуль, имеют подмодулярные выражения одного и того же знака, то непосредственно дифференцируем выражения этих слагаемых в формуле (1.52) и складываем результаты. Будем иметь после упрощения и вставки производных из формул (1.56) — $^{19}/_{16}$.

Отдельно берем 5-е слагаемое и, продифференцировав его по x и вставив найденные значения производных (1.56), найдем, что по модулю $\left|-\frac{43}{16}\right| > \left|-\frac{19}{16}\right|$, т. е. большее значение, чем предыдущее.

Аналогично исследуем значения производных и для других следов нашей функции. В итоге убеждаемся, что значение функции, равное 48,88, является наименьшим из всех других. Итак, найденное нами наименьшее значение функции, равное 48,88, будет глобальным.

ГЛАВА 2. ОБОСНОВАНИЯ МЕТОДОВ РАСЧЕТА СООРУЖЕНИЙ НА БАЗЕ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ЗЕРКАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 2.1. Аналитические и графические приемы исследований с использованием теории зеркальных функций

2.1.1. Если остановиться на некоторых периодах истории развития методов проектирования сооружений, то следует отметить, что еще в начале XIX в. и в более ранние периоды разработка принципиальных положений строительной механики шла параллельно с совершенствованием вычислительных методов.

Так, после изложения расчета трехопорной неразрезной балки Л. М. Навье (Navier L. M. H.) в 1826 г. в своем знаменитом курсе сопротивления материалов [157], в 1855 и в 1857 гг. Берто (Bertot) и Б. П. Клапейрон (Klapeyron B. P.) обосновывали метод расчета неразрезных балок при любом числе опор с помощью доказанной ими теоремы о трех моментах [131], [153], а в 1865 г. Ж. А. Бресс (Bresse J. A.) произвел дальнейшую разработку метода расчета неразрезных балок и обосновал метод фокусов [132].

Однако даже прекрасно разработанный Ж. А. Бессом метод фокусов, по-видимому, не смог полностью удовлетворить инженеров, и поэтому в конце XIX в. делается новая попытка использовать вместо счетной техники всевозможные графические приемы расчета сооружений. Такое использование графики мы находим в классическом курсе Г. Мюллера-Бреслау (Muller-Breslau G.), изданном в 1887 г. [156].

В начале XX в. принципиальные позиции в расчетах сооружений изменились мало. Наряду с практиковавшимися аналитическими и графическими методами расчета сооружений на службу технике пришли многочисленные таблицы, облегчающие процессы счета.

И, наконец, в период развития счетно-электронной техники и счетно-электронных машин потребовалось обоснование совершенно новых методов и приемов расчета, существенно отличных от старых. К их числу и принадлежит метод, базирующийся на применении теории зеркальных функций.

Отличительными особенностями и преимуществами этого нового метода при его графической интерпретации являются: 1) графическое изображение зеркальной формы в виде линейного многоугольника с рядом изломов; 2) выпуклый характер этого многоугольника с выпуклостью, обращенной в сторону координатной оси. Эти свойства сохраняются и при наличии многих переменных, т. е. могут быть распространены на многомерное пространство Эвклида.

Впрочем, требование выпуклости, строго говоря, не является обязательным при решении некоторых задач строительной механики, так как при модулярных слагаемых могут быть и знаки вычитания. В последнем случае происходит только значительное сложение с отысканием для таких функций глобального наименьшего значения.

Только те из графических приемов, которые не приводят к построению веревочных многоугольников, не могут быть изображены с помощью теории зеркальных функций. К таким приемам, на наш взгляд, можно было бы отнести определение усилий в стержнях статически определимой фермы по методу Кремоны.

Кроме перечисленных в п. 1.1.1 свойств зеркальных функций, применение их дает возможность универсально изображать загрузки на сооружение и его элементы.

Лежащие в основе теории особенности и свойства зеркальных функций позволяют успешно использовать модулярную формализацию при решении различных задач строительной механики, перечень которых приводится в § 5.4.

§ 2.2. Расчет статически неопределимых ферм наименьшего объема

Если мы имеем внешне или внутренне статически неопределимую ферму, то усилие в любом из ее стержней может быть выражено формулой

$$s^{(i)} = s_0^{(i)} + \sum_{k=1}^{n} s_{1k}^{(i)} \; x_k, \qquad (2.1)$$

где $s_0^{(i)}$ — усилие в i-м стержне статически определимой фермы, образованной из заданной путем удаления лишних связей; $s_{1k}^{(i)}$ — усилие от единичной загрузки, заменяющей k-ую связь; x_k — неизвестное усилие в лишнем

стержне или неизвестная реакция лишней опоры с номером k.

В рассматриваемом случае объем фермы может быть выражен формулой

$$v = \sum_{i=1}^{n} \left| s_0^{(i)} + \sum_{k=1}^{n} s_{1k}^{(i)} \; x_k \right| \frac{l^{(i)}}{[\sigma^{(i)}]}, \qquad (2.2)$$

где $[\sigma^{(i)}]$ — допускаемое напряжение; $l^{(i)}$ — длина стержня.

Дальнейшее определение наименьшего объема статически неопределимой фермы сводится к минимизированию формы (2.2) с помощью приемов, изложенных в п. 1.2.4 для случая одной переменной величины и в п. 1.4.4 — для случая многих переменных величин.

Поясним это определение наименьшего объема фермы несложными примерами, иллюстрирующими сказанное. (Расчет многократно статически неопределимой фермы на многовариантное загружение см. в § 4.3.)

Пример 1. Определить наименьший объем внешне статически неопределимой фермы (рис. 9, *а*). Допускаемые напряжения во всех стержнях принять равными $[\sigma]$.

Вспомогательные статически определимые фермы, необходимые при решении данной задачи, даны на рис. 9, *б*, *в*.

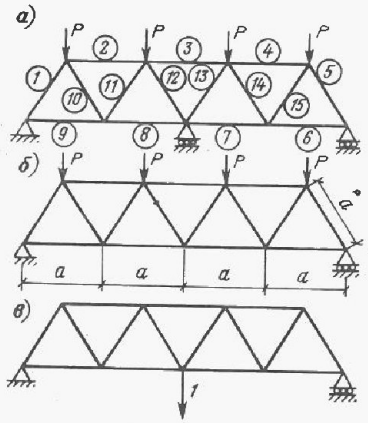


Рис. 9.

Усилия в стержнях заданной фермы приведены в табл. 3.

Таблица 3

№ стержня	$s_0^{(i)}$	$s_1^{(i)}$
1,5	$-8\dfrac{P\sqrt{3}}{6}$	$-2\dfrac{\sqrt{3}}{6}$
2,4	$-6\dfrac{P\sqrt{3}}{6}$	$-2\dfrac{\sqrt{3}}{6}$
3	$-8\dfrac{P\sqrt{3}}{6}$	$-4\dfrac{\sqrt{3}}{6}$
6,9	$+4\dfrac{P\sqrt{3}}{6}$	$+1\dfrac{\sqrt{3}}{6}$
7,8	$+8\dfrac{P\sqrt{3}}{6}$	$+3\dfrac{\sqrt{3}}{6}$
10,15	$+4\dfrac{P\sqrt{3}}{6}$	$+2\dfrac{\sqrt{3}}{6}$
11,14	$-4\dfrac{P\sqrt{3}}{6}$	$-2\dfrac{\sqrt{3}}{6}$
12,13	0	$+2\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

После некоторых несложных упрощений выражение объема заданной формы может быть записано в виде

$$v=\{6|\overset{1}{4}\overset{5}{P}+\overset{6}{x}\overset{9}{|}+4|\overset{2}{3}\overset{4}{P}+x|+12|\overset{3}{2}\overset{11}{P}\overset{14}{+}\overset{10}{x}\overset{15}{|}+$$

$$+2|\overset{7}{8}\overset{8}{P}+3x|+\overset{12}{4}\overset{13}{|}x|\}\frac{\sqrt{3}}{6[\sigma]}a, \qquad (2.3)$$

а для ясности сверху слагаемых проставлены номера соответствующих им стержней.

Минимизируя форму (2.3) в соответствии с изложенным нами методом в п. 1.2.4, получим при

$$-2\frac{2}{3}P\leqslant x\leqslant -2P$$

$$v=\frac{28P\sqrt{3}}{6[\sigma]}a. \qquad (2.4)$$

Наименьшее значение объема будет наименьшим значением второго рода.

Пример 2. Определить наименьший объем внутренне статически неопределимой фермы (рис. 10, *а*) при одинаковом допускаемом напряжении во всех стержнях, равном [σ].

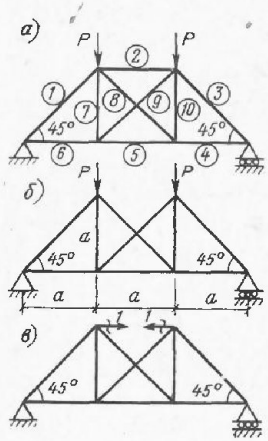


Рис. 10.

Вспомогательные статически определимые фермы, необходимые при решении данной задачи, изображены на рис. 10, *б*, *в*.

Усилия в стержнях заданной фермы приведены в табл. 4.

Таблица 4

№ стержня	Длина	$s_0^{(i)}$	$s_1^{(i)}$
1,3	$a\sqrt{2}$	$-P\sqrt{2}$	0
4,6	a	$+P$	0
8,9	$a\sqrt{2}$	$-P\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
7,10	a	$+P$	$+1$
5	a	$+2P$	$+1$
2	a	0	$+1$

После некоторых несложных упрощений выражение объема заданной фермы может быть записано в виде

$$v=[\overset{1}{6}|\overset{3}{P}|\overset{4}{a}+\overset{6}{6}|\overset{8}{P}+\overset{9}{x}|\overset{7}{a}+|\overset{10}{2P}+\overset{5}{x}|a+|x|a]\ \frac{1}{[\sigma]}; \qquad (2.5)$$

сверху слагаемых также проставлены номера соответствующих стержней.

Минимизируя аналогично предыдущему форму (2.5), при $x=-P$ получим

$$\text{Н. зн. } v=[6a+0+a+a]\ \frac{P}{[\sigma]}=8\frac{Pa}{[\sigma]}. \qquad (2.6)$$

2.2.2. Рассмотрим связь между наименьшим значением объема и наименьшим значением потенциальной энергии для статически неопределимой фермы.

Выражение объема v для многократно статически неопределимой фермы в соответствии с формулой (2.2) записывается в форме

$$v=\sum_{i=1}^{n}\left|s_0^{(i)}+\sum_{k=1}^{m}s_{ik}^{(i)}\ x_k\right|\ \frac{l^{(i)}}{[\sigma^{(i)}]} \qquad (2.7)$$

Форма (2.1) — зеркальная, со многими переменными. Назовем выражение $\left|s_0^{(i)}+\sum_{k=1}^{m}s_{ik}^{(i)}\ x_k\right|$ ядром этой формы.

Наименьшее значение зеркальной функции со многими переменными может быть достигнуто при обращении в нуль m ее зеркальных слагаемых [91].

Предположим, что определено наименьшее значение формы (2.7). Предположим далее, что это наименьшее значение оказалось точечным, т. е. наименьшим значением первого рода, и что в силу этого зеркальная функция, с помощью которой выражается объем фермы v, будет возрастающей по всем направлениям многомерного пространства ее координат $x_1, x_2, \ldots, x_m$ от точки, которой определяется ее наименьшее значение.

Если мы теперь перенесем начало координат в точку, для которой определялось наименьшее значение v, изменив, следовательно, отсчет координат $x_1, x_2, \ldots, x_m$, то новый объем фермы может быть записан в таком виде:

$$v=\sum_{i=1}^{n-m}\left|\frac{s_0^{(i)}+\sum_{k=1}^{m}s_k^{(i)}\ x_k}{[\sigma^{(i)}]}\right|\ l^{(i)}+\sum_{i=n-m+1}^{n}\left|\frac{\sum_{k=1}^{m}s_k^{(i)}\ x_k}{[\sigma^{(i)}]}\right|\ l^{(i)}, \qquad (2.8)$$

т. е. m зеркальных слагаемых формы (2.8) одновременно будут обращены в нули при $x_1=x_2=\ldots=x_m=0$.

Если бы мы спроектировали значение объема на двумерные координатные плоскости vox_1, $vox_2, \ldots, vox_m$, то на всех этих плоскостях мы получили бы ломаные многоугольники, соответствующие зеркальным функциям с одной переменной величиной с наименьшим значением в точке, соответствующей началу координат. Предположим, что слагаемые этих зеркальных функций с одной переменной величиной каждая расположены в порядке возрастания корней их подмодулярных выражений. Тогда условие наименьшего значения объемной формы (2.8) может быть приведено к системе равенств

$$\sum_{i=1}^{t_k}\left|\frac{s_k^{(i)}\ l^{(i)}}{[\sigma^{(i)}]}\right|>\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left|\frac{s_k^{(i)}\ l^{(i)}}{[\sigma^{(i)}]}\right|,$$

при $k=1, 2, \ldots, m$, (2.9)

причем через t_k обозначен номер такого слагаемого, для которого наступает наименьшее значение v.

Потенциальная энергия многократно статически неопределимой фермы может быть записана в виде

$$v=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left|s_0^{(i)}+\sum_{k=1}^{m}s_k^{(i)}\ x_k\right|}{2EF^{(i)}}\ l^{(i)}, \qquad (2.10)$$

где $F^{(i)}$ — площадь i-го стержня; E — модуль упругости материала, принятый одинаковым для всех стержней фермы.

Поскольку

$$F^{(i)}=\frac{\left|s_0^{(i)}+\sum_{k=1}^{m}s_k^{(i)}\ x_k\right|}{[\sigma^{(i)}]},$$

то выражение (2.10) легко может быть приведено к виду

$$u=\frac{1}{2E}\sum_{i=1}^{n}\left|[\sigma^{(i)}]\left[s_0^{(i)}+\sum_{k=1}^{m}s_k^{(i)}\ x_k\right]\right|\ l^{(i)}, \qquad (2.11)$$

Форма (2.11) — зеркальная. Ее ядро $\left|s_0^{(i)}+\sum_{k=1}^{m}s_k^{(i)}\ x_k\right|$ будет тождественно с ядром формы (2.7).

Форма (2.11), так же как форма (2.8), будет иметь наименьшее значение при одновременном обращении в нуль m ее зеркальных слагаемых.

Предположим теперь, что допускаемые напряжения во всех стержнях фермы одинаковы, т. е.

$$[\sigma^{(i)}]=\sigma. \tag{2.12}$$

В этом случае, так как ядро формы (2.11) тождественно с ядром формы (2.7), наименьшее значение формы (2.11) будет наступать при обращении в нуль тех же самых модулярных слагаемых, что и при наименьшем значении формы (2.7).

Отсюда также вытекает, что если наименьшее значение формы (2.7) по всем координатным направлениям было наименьшим значением первого рода, то и наименьшее значение формы (2.11) по всем координатным направлениям будет наименьшим значением первого рода, т. е. будет точечным.

Перенося начало координат в ту же самую точку многомерного пространства, что и в предыдущем случае, мы выражение потенциальной энергии для формы можем записать в форме

$$y=\frac{1}{2E}\sum_{i=1}^{n-m}\left|[\sigma^{(i)}]\left[s_0^{(i)}+\sum_{k=1}^{m}s_k^{(i)}\ x_k\right]\right|l^{(i)}+$$

$$+\frac{1}{2E}\sum_{i=n-m+1}^{m}\left|[\sigma^{(i)}]\sum_{k=1}^{m}s_k^{(i)}\ x_k\right|l^{i}. \tag{2.13}$$

В последней форме (2.13) m зеркальных слагаемых этой формы будут обращены в нуль при $x_1=x_2=\ldots=\ldots=x_m=0$.

При проектировании функции y на двумерные координатные плоскости мы получили бы картину изменения ее составляющих, во всем аналогичную рассмотренному выше случаю объемной функции v.

Поэтому принимая во внимание, что порядок корней подмодулярных выражений зеркальных функций с одной переменной в этом случае был бы таким же, как и в объемной форме, и располагая модулярные слагаемые указанных зеркальных функций в порядке возрастания корней подмодулярных выражений, мы могли бы написать

$$\sum_{i=1}^{t\,k}\left|[\sigma^{(i)}]\,s_k^{(i)}\ l_k^{(i)}\right|>\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left|[\sigma^{(i)}]\ s_k^{(i)}\ l^{(i)}\right|$$

при $k=1, 2, \ldots, m$. (2.14)

Условия (2.9) и (2.14) относятся к той единственной точке, для которой одновременно наступает наименьшее значение v и y.

В данном случае связность деформаций будет неустойчива, так как при любом ничтожно малом изменении величины лишних неизвестных она нарушается. Такая связность деформаций не может быть допущена в реальной ферме при проектировании. Очевидно, что фермы с наименьшим объемом в форме меньшего рода, чем $n+1$, следует отнести к этой же категории.

Чтобы сделать связность деформаций устойчивой, необходимо запроектировать преобразование наименьшего значения потенциальной энергии рассматриваемой фермы в наименьшее значение потенциальной энергии $n+1$-го рода по принципам работы [99]. Равнонапряженное проектирование фермы в данном случае становится невозможным.

Если наименьший объем фермы имеет форму $n+1$-го рода, то в силу изложенного выше наименьшее значение потенциальной энергии фермы будет характеризоваться формой $n+1$-го рода. Условия (2.9) и (2.13) запишутся в форме равенств и будут выполняться для конечных интервалов изменения лишних неизвестных. Таким образом, эти условия могут отвечать некоторой, вполне определенной реальной ферме. Здесь мы будем иметь случай проектирования фермы, указанный Морисом Леви [155].

§ 2.3. Расчет статически неопределимых балок наименьшего объема

2.3.1. При проектировании балок наименьшего объема должны быть выполнены два условия: условие наименьшего объема и условие связности деформаций.

Если обозначить объем балки через v, площадь поперечного сечения балки для некоторого сечения x через $F(x)$, момент сопротивления того же сечения через $W(x)$, момент и радиус инерции через $J(x)$ и $r(x)$, высоту балки через $h(x)$, изгибающий момент через $M(x)$ и постоянное для всех сечений максимальное напряжение через $[\sigma]$, то

$$v=\int_l F(x)\,dx=\int_l\frac{l(x)}{r^2(x)}dx=\int_l\frac{W(x)\,h(x)}{2\,r^2(x)}dx=$$

$$=\frac{1}{2[\sigma]}\int_l\frac{|W(x)|\,h(x)}{r^2(x)}dx. \tag{2.15}$$

Условие наименьшего объема может быть получено минимизированием выражения (2.15).

Как известно, выражение потенциальной энергии балки при изгибе без учета сдвигающих сил определяется по формуле

$$y=\int_l \frac{|M(x)|^2 dx}{2EJ(x)} = \int_l \frac{|M(x)|\,|M(x)|\,dx}{2EW(x)\,\frac{h(x)}{2}} =$$

$$=\frac{[\sigma]}{E}\int_l \frac{|M(x)|}{h(x)}dx. \qquad (2.16)$$

Условие связности деформаций получается дифференцированием выражения (2.16) по тем же переменным, что и дифференцирование выражения (2.10) при составлении условия наименьшего объема с последующим приравниванием производных к нулю, что приведет к идентичным формам, когда будет выполнено условие

$$h^2(x)=kr^2(x) \text{ или } h(x)=kr(x), \qquad (2.17)$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Если будет соблюдено условие (2.17), то условие наименьшего объема окажется отождествленным с условием связности деформаций, и при обосновании практических методов расчета балок можно будет исходить из формул (2.15) и (2.16).

Существенно, что такое совпадение условий (2.15) и (2.16) будет характерно для балок:

1) с постоянной высотой сечения;

2) сплошного прямоугольного профиля, а также для балок прямоугольного пустотелого профиля, у которых отношение внутренних размеров ширины и высоты b и h к внешним размерам B и H будет сохраняться постоянным, т. е. $b/B=h/H=k$;

3) любого профиля с постоянной шириной сечения и моментом инерции

$$J=kh^2(x).$$

Для общего случая балок с переменной высотой и, в частности, для пустотелых и тонкостенных балок с постоянной толщиной стенки при переменной высоте сечения отождествление условий (2.15) и (2.16) становится невозможным, и такие балки могут быть спроектированы лишь как балки приближенно наименьшего объема.

Приведенная далее методика расчета балок с постоянной высотою сечения применима поэтому и для балок других типов.

Принципы, лежащие в основе построения практических методов расчета балок наименьшего объема, могут быть обоснованы либо в направлении непосредственного использования условия (2.15) с последующим отождествлением его с условием (2.16) в результате изменения допускаемого напряжения $[\sigma]$ в различных сечениях балки, либо в направлении непосредственного удовлетворения условия (2.16) с последующим использованием условия (2.15) и с получением при этом лишь приближенно наименьшего объема балки.

Для статически неопределимых ферм всегда бывает выгоднее идти по первому пути, так как увязка деформаций в фермах представляет сравнительно простую операцию и поэтому основным является удовлетворение объемного требования [86], [99].

Совершенно иная картина наблюдается при расчете балочных конструкций. В ряде случаев удовлетворить условию связности деформаций в балках бывает вообще невозможно. Кроме того, могут появиться случаи разрыва непрерывности прогибных функций, требующие применения ограничителей [20].

2.3.2. Если мы имеем балку с постоянной высотой сечения, то условия наименьшего объема и связности деформаций будут всегда удовлетворены.

Начнем решение с выполнения условий связности деформаций для двухопорной статически неопределимой балки. Удобнее всего использовать дифференциальное уравнение прогибов балки. Для балки с постоянной высотой h

$$E\frac{|M(x)|h}{2[\sigma]}\cdot y''(x)=M(x).$$

Или если обозначить через $\alpha=\frac{Eh}{2[\sigma]}$, то

$$\alpha y''(x)=\frac{M(x)}{|M(x)|}. \qquad (2.18)$$

С помощью единично-прерывистой формы (1.1) уравнение (2.18) можно записать так:

$$\alpha y''(x)=-\Phi(0)+2\Phi(x_1)-2\Phi(x_2)+\ldots\pm 2\Phi(x_k). \qquad (2.19)$$

Интегрируя уравнение (2.19), получим:

$$\alpha y'(x) = -\Phi(0)\cdot x + 2\Phi(x_1)(x-x_1) - \ldots \pm 2\Phi(x_k)(x-x_k) + c_1,$$

$$\alpha y(x) = -\Phi(0)\frac{x^2}{2} + \Phi(x_1)(x-x_1)^2 - \ldots \pm 2\Phi(x_k)(x-x_k) + c_1 x + c_2. \qquad (2.20)$$

В состав уравнений (2.20) входят две константы интегрирования, k абсцисс точек перемены знака функции.

При дальнейшем решении задачи возможны два случая.

1. Число абсцисс точек переменных знака k равно степени статической неопределимости балки n. Здесь мы всегда можем составить $k+2$ уравнения, из которых найдем все k точек переменных знака и две константы интегрирования.

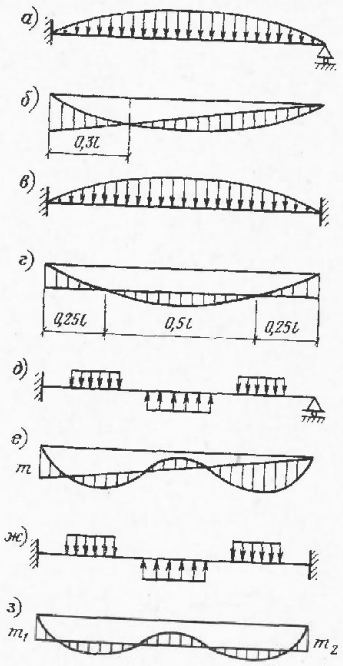


Рис. 11.

Для балки с одним защемленным и другим шарнирным концом (рис. 11, *а, б*), чтобы определить абсциссы точки перемены знака, будем иметь условие

$$-\frac{l^2}{2} + (l-x_1)^2 = 0, \qquad (2.21)$$

отсюда

$$x_1 = l\frac{2-\sqrt{2}}{2} \cong 0{,}3\,l.$$

Для балки с двумя защемленными концами (рис. 11, *в, г*) будем иметь два концевых условия в форме

$$\left.\begin{aligned} &-l + 2(l-x_1) - 2(l-x_2) = 0,\\ &-\frac{l^2}{2} + (l-x_1)^2 - (l-x_2) = 0,\end{aligned}\right\} \qquad (2.22)$$

откуда

$$x_1 = (1/4)\,l;\ x_2 = (3/4)\,l.$$

Положения найденных нами точек перемены знака не будут зависеть от внешнего загружения.

2. Число точек перемены знака эпюры моментов больше степени статической неопределимости балки. В этом случае определения абсцисс точек перемены знака становится уже недостаточным использование одних концевых условий. К ним должны быть добавлены условия, связывающие абсциссы точек перемены знака с опорными моментами балки, которые могут быть составлены без особого труда. Так, для балки с шарнирно-защемленными концами (рис. 11, *д, е*) мы могли бы написать:

$$\frac{z_1}{m} = \frac{l-x_1}{l};$$

$$\frac{z_2}{m} = \frac{l-x_2}{l};$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{z_k}{m} = \frac{l-x_k}{l},$$

откуда, замечая, что $z_1, z_2, \ldots, z_k$ представляют собой значения изгибающих моментов статически определимой балки для сечений, отстоящих от левого края балки соответственно на $x_1, x_2, \ldots, x_k$, можем найти все абсциссы точек перемены знака:

$$x_1 = l\left(1 - \frac{z_1}{m}\right);$$

$$x_2 = l\left(1 - \frac{z_2}{m}\right);$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad (2.23)$$

$$x_k = l\left(1 - \frac{z_k}{m}\right).$$

Выразив все абсциссы точек перемены знака через опорный момент, найдем его, применяя концевое условие к системе (2.30). Аналогично для двоякозащемленной балки (рис. 11, *ж, з*) мы могли бы записать следующую систему формул, позволяющих выразить все абсциссы точек перемены знака через опорные изгибающие моменты:

$$x_1 = l\frac{m_1 - M(x_1)}{m_1 - m_2};$$

$$x_2 = l\frac{m_1 - M(x_2)}{m_1 - m_2};$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_k = l\frac{m_1 - M(x_k)}{m_1 - m_2}. \qquad (2.24)$$

Выразив все точки перемены знака через опорные моменты m_1 и m_2, найдем их из концевых условий, накладываемых на систему (2.20). При этом важно отметить, что поскольку теперь точки перемены знака будут выражаться через переменные по значению изгибающие моменты, их положение будет зависеть от внешнего загружения и не будет постоянным, как в первом случае.

2.3.3. В качестве примера приведем расчет балки, изображенной на рис. 12, *а*. При различных численных значениях коэффициента β, определяющего среднюю из приложенных сил, возможны различные случаи пересечения эпюры внешних сил статически определимой балки при том же загружении с эпюрой опорных моментов и, следовательно, возможно различное число точек перемены знака. В силу симметрии балки и симметрии загружения будем в дальнейшем рассматривать только одну половину балки.

1. При двух точках перемены знака эпюры и моментов в левой половине балки:

$$\alpha y''(x) = -\Phi(0) + 2\Phi(x_1) - 2\Phi(x_2),$$

$$\alpha y'(x) = -\Phi(0)\cdot x + 2\Phi(x_1)\ (x - x_1) - 2\Phi(x_2)\ (x - x_2),$$

$$\alpha y(x) = -\Phi(0)\frac{x^2}{2} + \Phi(x_1)\ (x - x_1)^2 - \Phi(x_2)\ (x - x_2)^2. \qquad (2.25)$$

Замечая, что при $x = 2a$, $y'(2a) = 0$, будем иметь

$$-2a + 2\ (2a - x_1) - 2\ (2a - x_2) = 0 \qquad (2.26)$$

или

$$x_2 - x_1 = a.$$

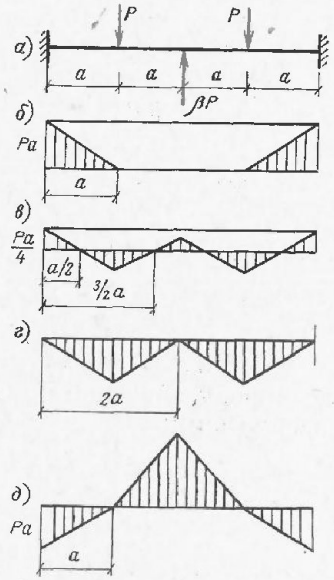


Рис. 12.

2. При одной точке перемены знака в левой половине балки:

$$\alpha y''(x) = -\Phi(0) + 2\Phi(x_1);$$

$$\alpha y'(x) = -\Phi(0)\cdot x + 2\Phi(x_1)\ (x - x_1);$$

$$\alpha y(x) = -\Phi(0)\frac{x^2}{2} + \Phi(x_1)\ (x - x_1)^2. \qquad (2.27)$$

Налагая условие $x = 2a$, $y'(2a) = 0$, получим

$$-2a + 2\ (2a - x_1) = 0$$

или

$$x_1 = a. \qquad (2.28)$$

Положение точки перемены знака для последнего случая сделается постоянным.

Выразим значение абсцисс точек перемены знака для каждого из рассмотренных случаев через опорные изгибающие моменты. Для случая 1:

$$\left(P-\frac{\beta}{2}P\right)x_1-m,\quad \left(P-\frac{\beta}{2}P\right)x_2-P\,(x-a)=m,$$

откуда

$$x_1=\frac{2\,m}{P\,(2-\beta)},\quad x_2=\frac{2\,aP-2\,m}{\beta\,P},$$

и из (2.22)

$$m=\frac{Pa\,(2-\beta)^2}{4}.$$

Для случая 2, так как $x_1=a$,

$$m=\frac{Pa\,(2-\beta)}{2}.$$

Объединяя оба случая, мы могли бы с помощью единично-прерывистых форм значение момента m и абсциссы x_1 выразить формулами:

$$m=\frac{Pa}{4}(2-\beta)^2\Phi\,(2)+\frac{Pa\,(2-\beta)}{2}[\Phi\,(-\infty)-\Phi\,(2)]; \tag{2.29}$$

$$x_1=\frac{a\,(2-\beta)}{2}[\Phi\,(-\infty)-\Phi\,(2)]+a\Phi\,(2). \tag{2.30}$$

Результаты вычислений даны на рис. 12, *б—д*, соответственно для значений $\beta=0, 1, 2, 4$.

2.3.4. В месте образования упругих шарниров в эпюре изгибающих моментов балки размеры поперечного сечения теоретически должны были бы обратиться в нуль. Однако практически им при этом придают минимальные размеры, подобранные из конструктивных соображений.

При обосновании практического метода расчета балок будем исходить, так же как и до сих пор, из обычного дифференциального уравнения прогибов балки, с той лишь разницей, что теперь будем предполагать, что вблизи обращения в нуль изгибающего момента сечение балки сохраняет постоянное значение.

Обозначим абсциссу некоторой нулевой точки эпюры изгибающих моментов балки через x, а абсциссы точек эпюры изгибающих моментов, соответствующие началу и концу избранного нами постоянного участка балки

вблизи нулевой точки эпюры моментов, соответственно через ε_1 и ε_2; при этом пусть $\varepsilon_1<x_1<\varepsilon_2$.

Тогда дифференциальные уравнения прогибов для соответствующих участков балки, расположенных вблизи нулевой точки эпюры изгибающих моментов, будут иметь вид:

при $x\leqslant x_1-\varepsilon_1$ $\alpha\,y''\,(x)=\pm 1$; (2.31)

при $x_1-\varepsilon_1\leqslant x\leqslant x_1$ $\alpha\,M\,(x_1-\varepsilon_1)\,y''\,(x)=\pm M\,(x)$; (2.32)

при $x_1\leqslant x\leqslant x_1+\varepsilon_2$ $\alpha\,M\,(x_1-\varepsilon_1)\,y''\,(x)=\pm M\,(x)$; (2.33)

при $x_1+\varepsilon_2\leqslant x$ $\alpha\,y''=\pm 1$. (2.34)

Заметим, что в уравнениях (2.31) — (2.34) мы ставили двойной знак, не зная заранее, в каком порядке происходит переход эпюры изгибающих моментов вблизи нулевой точки от положительного к отрицательному значению или наоборот.

Если в уравнениях (2.32), (2.33) постоянную величину перенести в правую часть, то уравнения (2.31)—(2.34) могут быть объединены с помощью единично-прерывистой формы (1.1) и представлены одним уравнением

$$\alpha\,y''(x)=\pm 1\,[1-\Phi\,(x_1-\varepsilon_1)]\pm\frac{M\,(x)}{M\,(x-\varepsilon_1)}[\Phi(x-\varepsilon_1)-$$
$$-\Phi(x_1)]\pm\frac{M\,(x)}{M\,(x_1-\varepsilon_1)}[\Phi(x_1)-\Phi(x-\varepsilon_2)]\pm 1\,[\Phi(x+\varepsilon_2)]$$

или после упрощения

$$\alpha\,y''(x)=\pm 1\pm\left[1-\frac{M\,(x)}{M\,(x_1-\varepsilon_1)}\right]\Phi\,(x_1-\varepsilon_1)\pm 2\times$$
$$\times\frac{M\,(x)}{M\,(x_1-\varepsilon_1)}\Phi\,(x_1)\pm\left[\frac{M\,(x)}{M\,(x_1-\varepsilon_1)}-1\right]\Phi\,(x+\varepsilon_2). \tag{2.35}$$

2.3.5. Ограничим рассмотрение вопроса о проектировании балок наименьшего объема с переменной высотой сечения балками прямоугольного профиля. Оптимальное проектирование начнем с использования условия связности деформаций.

Дифференциальное уравнение прогибов аналогично (2.19)

$$\beta\,y''\,(x)=-\Phi\,(0)+2\,\Phi\,(x_1)-\ldots\pm 2\Phi\,(x_k), \tag{2.36}$$

где

$$\beta=\frac{E}{2\,[\sigma]}$$

Решение уравнения (2.36) будет идентично решению уравнения (2.14).

Однако после определения моментов во всех сечениях балки возникает вопрос о приближенном удовлетворении требованию наименьшего объема. По установлении максимального момента M_0 мы можем подобрать максимальную высоту сечения по формуле

$$\frac{bh^2_0}{6} = \frac{|M_0|}{[\sigma]}, \quad h_0 = \sqrt{\frac{6\,|M|}{[\sigma]\,b}}$$

при заданном значении ширины b.

Закон изменения высоты сечения определится по формуле

$$h\,(x) = \sqrt[3]{h^2_0\,\frac{|M\,(x)|}{|M_0|}} \quad \text{или} \quad h\,(x) = \sqrt[3]{\frac{6\,|M\,(x)|}{b\,[\sigma]}}\,.$$

После определения высоты сечения с учетом увеличения размеров балки в местах упругих шарниров необходимо проверить соблюдение требования наименьшего объема, найденный объем балки необходимо сравнить с некоторым эталоном. Таким эталоном будет идеальный объем рассматриваемой балки, определенный по формуле

$$v = \int_l F\,(x)\,dx = \int_l \frac{W\,(x)\,\frac{h\,(x)}{2}}{r^2\,(x)}\,dx = \int_l \frac{|M\,(x)|}{2\,[\sigma]\,r^2\,(x)}\,dx. \qquad (2.37)$$

Для прямоугольного профиля формула (2.37) примет вид

$$v = \int_l \sqrt{\frac{6\,b^2\,|M\,(x)|}{[\sigma]}}\,dx.$$

Аналогичный метод применяется и в общем случае при расхождении условий (2.15) и (2.16).

2.3.6. Проектирование балок наименьшего веса постоянного поперечного сечения связано с рациональным перераспределением ее изгибающих моментов. Перераспределение изгибающих моментов достигается дополнительным нагружением (предварительным напряжением) балки. В общем случае вопрос о дополнительном нагружении будет зависеть от конкретной схемы балки, ее нагрузки и решающими будут, по-видимому, экономические соображения. Ограничимся здесь только вопросом преобразования эпюр.

Рассмотрим в качестве примера несложную статически неопределимую балку постоянного сечения (рис. 13, *а*). Поставим цель — спроектировать ее как балку наименьшего веса. Обозначим опорные моменты на опорах *А* и *Д* через *М*.

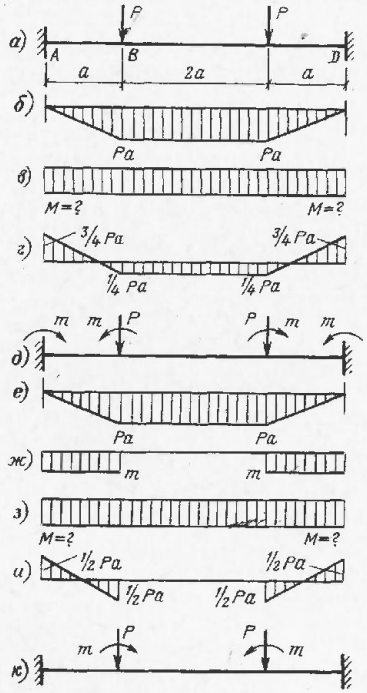


Рис. 13.

На основе графоаналитического метода, используя эпюры опорных и пролетных моментов (рис. 13, *б*, *в*), можно записать:

$$2\,aM + \left(\frac{1}{2}\,Pa^2 + Pa^2\right) = 0. \qquad (2.38)$$

Откуда определится опорный момент

$$M = -\,\frac{3}{4}\,Pa.$$

Нетрудно видеть, что найденный опорный момент по своему численному значению будет значительно больше

изгибающего момента под силой в точке B (рис. 13, *г*), равного:

$$M_B = -\frac{3}{4}Pa + Pa = \frac{1}{4}Pa \qquad (2.39)$$

Чтобы выравнить моменты M и M_B, необходимо рассматриваемой балке придать новую нагрузку, вызывающую дополнительный пролетный момент (такая нагрузка может быть создана предварительным напряжением участков балки). Балка, загруженная основной и дополнительной нагрузкой, изображена на рис. 13, *д*; эпюры опорных и пролетных моментов — на рис. 13, *е—д*. Опорный момент определится из выражения

$$2aM + \left(\frac{1}{2}Pa^2 + Pa^2\right) + ma = 0. \qquad (2.40)$$

Отсюда

$$M = -\frac{3}{4}Pa - \frac{m}{2}.$$

Изгибающий момент у заделки за внешним моментом m

$$M_{изг} = -\frac{3}{4}Pa - \frac{m}{2} + m =$$

$$= -\frac{3}{4}Pa + \frac{m}{2}. \qquad (2.41)$$

Изгибающий момент под силой P, левее ее:

$$M_B = \frac{Pa}{4} - \frac{m}{2} + m = \frac{Pa}{4} + \frac{m}{2}. \qquad (2.42)$$

Приравнивая (2.41) и (2.42), получим:

$$\left|-\frac{3}{4}Pa + \frac{m}{2}\right| = \left|\frac{Pa}{4} + \frac{m}{2}\right| \qquad (2.43)$$

или

$$\frac{3}{4}Pa - \frac{m}{2} = \frac{Pa}{4} + \frac{m}{2}.$$

Отсюда

$$m = \frac{Pa}{2}.$$

Результирующая эпюра изгибающих моментов при $m = \frac{Pa}{2}$ дана на рис. 13, *и*. К такому же результату приведет загрузка балки по схеме, данной на рис. 13, *к*.

ГЛАВА 3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МИНИМИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ МОДУЛЯРНЫХ ФОРМ

§ 3.1. Общие идеи численных методов минимизации модулярных форм

Теория расчета сложных статически неопределимых конструкций трактует операции количественного сравнения альтернатив оптимальности системы как задачу минимизации модулярных (зеркальных) форм большой размерности. Применение ЭЦВМ в последние десятилетия способствовало развитию эффективных методов численного анализа больших систем, успешно используемых при проектировании.

Рассматриваются конечные и бесконечные численные методы оптимизации [21], [102], [103], [106]. Первая группа представлена методами на основе исключений Жордана-Гаусса, вторая — методами случайного поиска. Методы частичного улучшения, используемые в работе, не имеют самостоятельного значения и применяются как вспомогательные [67]. Набор методов не претендует на полноту и универсальность, а отражает один из возможных вариантов математического обеспечения ЭЦВМ для решения модулярных форм.

3.1.1. Методы оптимизации на основе исключений Жордана-Гаусса, наиболее распространенные в вычислительной практике, относятся к группе конечных детерминированных методов, т. е. дают возможность найти точное решение задачи за конечное число шагов. Каждый из этих шагов состоит в нахождении нового решения, которому соответствует меньшее значение минимизируемой функции. Процесс повторяется до тех пор, пока не будет получено оптимальное решение. Конечность числа шагов с учетом того, что само их число во многих случаях не очень велико, обеспечили широкую популярность этих методов.

Методы решают задачу определения экстремальных точек выпуклого многогранника, заданного системой линейных форм. Операция оптимизации осуществляется преобразованием системы координатных плоскостей с помощью исключений Жордана-Гаусса.

Суть исключений заключается в следующем. Пусть задана система m линейных форм с n независимыми переменными:

$$y_i = a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + \ldots + a_{in}\, x_n,\ i = 1, \ldots, m, \qquad (3.1)$$

и требуется заменить координатную плоскость $x_s = 0$ новой плоскостью $y_r = 0$. Т. е. требуется решить уравнение

$$y_r = a_{r1}\, x_1 + a_{r2}\, x_2 + \ldots + a_{rs}\, x_s + \ldots + a_{rn}\, x_n \qquad (3.2)$$

относительно x_s и подставить его во все остальные уравнения системы (3.1).

Допустим, что $a_{rs} \neq 0$. Разделим r-е уравнение из (3.1) на a_{rs} и вычтем его из остальных уравнений, умножая на соответствующие коэффициенты a_{is}, в результате чего переменная x_s исключается из всех уравнений, кроме s-го.

Преобразованная система имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}
&y_1 = a'_{11} x_1 + a'_{12} x_2 + \ldots + a'_{1,s-1}\, x_{s-1} + \\
&+ a'_{1s}\, y_r + a'_{1,s+2}\, x_{s+2} + \ldots + a'_{1n}\, x_n;\\
&y_2 = a'_{21} x_1 + a'_{22} x_2 + \ldots + a'_{2,s-1}\, x_{s-1} + \\
&+ a'_{2s}\, y_r + a'_{2,s+2}\, x_{s+2} + \ldots + a'_{2n}\, x_n;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_{r-1} = a'_{r-1,1}\, x_1 + a'_{r-1,2}\, x_2 + \ldots + a'_{r-1,s-1} \times \\
&\times x_{s-1} + a'_{r-1,s}\, y_r + a'_{r-1,s+2}\, x_{s+2} + \\
&+ \ldots + a'_{r-1,n}\, x_n;\\
&x_s = a'_{r1} x_1 + a'_{r2} x_2 + \ldots + a'_{r,s-1}\, x_{s-2} + \\
&+ a'_{rs}\, y_r + a'_{r,s+2}\, x_{s+2} + \ldots + a'_{rn}\, x_n;\\
&y_{r+1} = a'_{r+1,1}\, x_1 + a'_{r+1,2}\, x_2 + \ldots + a'_{r+1,s-1} \times \\
&\times x_{s-1} + a'_{r+1,s}\, y_r + a'_{r+1,s+2}\, x_{s+2} + \\
&+ \ldots + a'_{r+1,n}\, x_n;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_m = a'_{m1} x_1 + a'_{m2} x_2 + \ldots + a'_{m,s-1}\, x_{s-1} + \\
&+ a'_{ms}\, y_r + a'_{m,s+2}\, x_{s+2} + \ldots + a'_{mn}\, x_n.
\end{aligned}\right\} \qquad (3.3)$$

Таблица 5

i	y_1	y_2	...	y_r	...	y_m	...	x_1	x_2	...	x_s	...	x_n
1	1	0	...	0	...	0	...	a_{11}	a_{12}	...	a_{1s}	...	a_{1n}
2	0	1	...	0	...	0	...	a_{21}	a_{22}	...	a_{2s}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
r	0	0	...	1	...	0	...	a_{r1}	a_{r2}	...	a_{rs}	...	a_{rn}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
m	0	0	...	0	...	1	...	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{ms}	...	a_{mn}

Таблица 6

i	y_1	y_2	$\dots$	y_r	$\dots$	y_m	x_1	x_2	$\dots$	x_s	$\dots$	x_n
1	1	0	$\dots$	a'_{1r}	$\dots$	a'_{1m}	a'_{11}	a'_{12}	$\dots$	0	$\dots$	a'_{1n}
2	0	1	$\dots$	a'_{2r}	$\dots$	a'_{2m}	a'_{21}	a'_{22}	$\dots$	0	$\dots$	a'_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
s	0	0	$\dots$	a'_{sr}	$\dots$	a'_{sm}	a'_{s1}	a'_{s2}	$\dots$	1	$\dots$	a'_{sn}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
m	0	0	$\dots$	a'_{mr}	0	a'_{mm}	a'_{ms}	a'_{m2}	$\dots$	0	$\dots$	a'_{mn}

Представим системы (3.1) и (3.3) в виде таблиц (5, 6).

Преобразование табл. 5 в табл. 6 составляет шаг исключений Жордана-Гаусса и сводится к следующим операциям:

1) заменить разрешающий элемент a_{rs} единицей;

2) разделить остальные элементы разрешающей строки на a_{rs};

3) вычислить остальные элементы таблицы для $i \neq r$ по формуле

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{is}\ a_{rj}}{a_{rs}}\ . \tag{3.4}$$

Особенность реализации методов на основе исключений Жордана-Гаусса заключается в следующем. Во-первых, в них в той или иной форме строится обратная матрица, так что даже в случаях когда исходная матрица содержит много нулевых элементов и может быть компактно записана, обратная матрица этим свойством не обладает и запись ее требует большого объема машинной памяти. Во-вторых, время счета для задачи большого размера все же значительно. Поэтому конечные методы реализуются преимущественно на вычислительных машинах большой и средней мощности.

3.1.2. Методы случайного поиска относятся к группе бесконечных недетерминированных методов. Это также шаговые методы. Однако они обеспечивают лишь приближенное решение с заданной наперед точностью.

Методы случайного поиска применяются для отыскания экстремума функции многих переменных при любых ограничениях, накладываемых на последние [102]. Методы устойчивы к ошибкам округления и не накапливают погрешностей в процессе вычислений.

Изменение значения оптимизируемой функции осуществляется с помощью n-мерного случайного вектора $\Xi = (\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n)$, $-1 \leqslant \Xi_i \leqslant 1$, отдельные реализации которого равновероятно распределены в пространстве переменных. Для формирования случайного вектора используется цифровой генератор случайной последовательности, выполняемый на сдвиговом регистре ЭЦВМ [152], [162]. Выходные сигналы k-разрядного сдвигового регистра после обработки при помощи цифровой логической схемы снова вводятся в регистр. Замкнутая таким

образом цепь рециркуляции генерирует периодические последовательности двоичных сигналов.

Максимальная длительность периода, которую можно получить, используя линейную цепь обратной связи (сумматор по модулю 2), составляет $2_k - 1$ периодов, соответствующих частоте тактовых импульсов.

Различают две основные разновидности метода случайного поиска: слепой и последовательный. Слепой случайный поиск осуществляется следующим образом. При каждом шаге поиска за вектор переменных принимается случайный вектор $X = a\{\Xi_1; \Xi_2; \ldots, \Xi_n\}$, где a — вектор масштаба, определяемый возможными пределами изменения вектора переменных. После набора достаточно большого числа шагов из всего множества численных значений минимизируемой функции выбирают наименьшее, которое и принимается за искомый минимум. Применение слепого случайного поиска во многопараметрических модулярных задачах оптимизации неэффективно из-за значительных потерь времени.

Последовательный случайный поиск использует идею последовательного улучшения решения. Этот вид поиска имеет более высокую скорость сходимости вследствие того, что на каждом шаге определяется его удачность. Удачным шагом считается такой, при котором численное значение функции оказывается меньшим, чем на предыдущем удачном шаге, в противном случае шаг считается неудачным. Определяющим является то, что все случайные шаги совершаются из последнего удачного состояния.

Методы случайного поиска обладают простотой и универсальностью. Они могут быть реализованы на различных вычислительных машинах. Однако большой объем вычислений делает предпочтительным их использование на ЭЦВМ большой мощности.

3.1.3. Методы частичного улучшения решают задачу оптимизации по группам переменных. Задана непрерывная функция n переменных $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для которой ищется точка минимума. Все переменные разбиваются на k групп $n_1 + n_2 + \ldots + n_n = n$. Пусть точка начального приближения задана $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$.

Рассмотрим функцию n_1 переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n_1+1}, \ldots, x_n)$, в которой фиксированы все переменные, кроме переменных первой группы, и определим ее минимум каким-либо способом. Пусть эта точка имеет координаты $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}\ x_{n+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$. Точка даст первое частичное улучшение первого ранга $X_1^{(1)}$.

Рассмотрим теперь функцию $f(x_1^{(1)}, x_2^{(1)} \ldots, x^{(1)}, x_{n_1+1}^{(0)}, \ldots, x_{n_1+n_2+1}^{(0)} \ldots x_n^{(0)})$ n_2 переменных $x_{n_1+1}, \ldots, x_{n_1+n_2}$ и найдем минимум этой функции, в результате чего получим точку $X_1^{(2)}(x_1^{(1)}, \ldots, x_{n_1}^{(1)}\ x_{n_1+1}^{(1)}, \ldots x_{n_1+n_2}^{(1)}, x_{n_1+n_2+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, являющуюся вторым частичным улучшением.

Проведя аналогичную операцию последовательно для всех переменных, придем к точке $X^{(1)}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)} \ldots, x^1{}_n)$, которая будет полным приближением первого ранга искомой точки минимума функции $y = f(x_1 x_2 \ldots x_n)$. Описанный итерационный процесс можно повторять до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность. Теоремы сходимости методов частичного улучшения даны в работе [32].

В этой главе методы частичного улучшения представлены методами покоординатного спуска. Методы успешно реализуются на вычислительных машинах большой, средней и малой мощности.

§ 3.2. Минимизация суммы модулей линейных функций

Центральная задача теории модулярных функций состоит в минимизации суммы модулей линейных функций:

$$\min \sum_{i=1}^{m} \left| a_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j \right|. \qquad (3.5)$$

Здесь a_i и a_{ij} — постоянные коэффициенты; ищется вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Минимизируемая функция кусочно-линейна и выпукла. Простота структуры функции позволяет применить для ее минимизации ряд численных методов на основе исключений Жордана-Гаусса, случайного поиска и покоординатного спуска различных по степени общности.

Следует указать также на изящный алгоритм М. Крейна, основанный на механических аналогиях, ко-

торый не рассматривается здесь в связи с ограниченной его применимостью ($n \leqslant 3$) [6].

3.2.1. Исключения Жордана-Гаусса положены в основу методов решения общей задачи линейного программирования, включающих в себя задачу (3.5) как частный случай.

Общая задача линейного программирования заключается в отыскании вектора $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, минимизирующего линейную форму

$$c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_j\ x_j+\ldots+c_n\ x_n \tag{3.6}$$

при условиях, когда

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j=a_i,\ i=1, m; \tag{3.7}$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0, \tag{3.8}$$

где a_{ij}, a_i, c_j — заданные постоянные коэффициенты $m<n$.

Считаем все коэффициенты a_i неотрицательными, так как в противном случае соответствующее уравнение можно всегда умножить на -1.

Представим задачу (3.7)—(3.8) в векторной форме

$$\min\ CX \tag{3.9}$$

при условии, что

$$x_1A_1+x_2A_2+\ldots+x_n\ A_n=A_0 \tag{3.10}$$

и

$$x_i \geqslant 0. \tag{3.11}$$

Задача (3.10)—(3.11) обладает следующими свойствами [21].

Множество ее решений, заданное линейными формами условий, представляет собой выпуклый многогранник.

Оптимальное решение задачи есть одна из вершин этого многогранника, наименее уклоняющаяся от плоскости $CX=0$.

Каждой вершине соответствует m линейно независимых векторов из данной системы $A_1, A_2, \ldots, A_n$, образующих базис.

Коэффициенты $x_i>0$, входящие в разложение $A_0=\sum_{i=1}^{n} x_i A_i$ по векторам базиса, составляют опорное решение.

Поскольку в данной системе n векторов содержится не более C_n^m систем, каждая из которых состоит из m линейно независимых векторов, значение C_n^m является верхней границей числа опорных решений задачи.

При больших m и n было бы трудно отыскивать оптимальное решение, перебирая все опорные решения. Упорядоченный переход от одного опорного решения к другому составляет вычислительную схему симплексного метода, предложенного Д. Ж. Данцигом [139, 140].

Допустим, что известно опорное решение, соответствующее m векторам A_j. Будем считать, что это первые m векторы из системы $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Тогда

$$X=(x_1, x_2, \ldots, x_m,\ 0, \ldots, 0)=(a_1,\ a_2, \ldots, a_m, 0, \ldots, 0) \tag{3.12}$$

и

$$x_1A_1+x_2A_2+\ldots+x_m\ A_m=A_0, \tag{3.13}$$

где все $x_i \geqslant 0$.

Перейдем от вектора X к новому опорному решению. Каждый из данных n векторов можно выразить в виде линейной комбинации векторов базиса

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\ A_i=A_j,\ j=1, \ldots, n. \tag{3.14}$$

Пусть для некоторого вектора, не входящего в базис, допустим A_{m+1} хотя бы один из коэффициентов $a_{i,\,m+1}$ в выражении

$$a_{1,\,m+1}\ A_1+a_{2,\,m+1}A_2+\ldots+a_{m,\,m+1}\ A_m=A_{m+1} \tag{3.15}$$

положителен. Умножим обе части равенства (3.15) на $\alpha>0$ и вычтем результат из (3.13):

$$(a_1-\alpha\, a_{1,\,m+1})\ A_1+(a_2-\alpha\, a_{2,\,m+1})\ A_2+\ldots+(a_m-\alpha\, a_{m,\,m+1})\ A_m+\alpha A_{m+1}=A_0. \tag{3.16}$$

Вектор

$$X^{(1)}=(a_1-\alpha\, a_{1,\,m+1};\ a_2-\alpha\, a_{2,\,m+1}; \ldots; a_m-\alpha\, a_{m,\,m+1};\ \alpha) \tag{3.17}$$

в случае неотрицательности своих компонент является решением. Нулевые компоненты вектора здесь опущены. Требуется определить такое α, чтобы

$$a_i-\alpha\ \alpha_{i,\,m+1} \geqslant 0, \tag{3.18}$$

для всех $a_{i,\,m+1}>0$.

Опорное решение не может содержать $m+1$ положительных компонент. Поэтому по крайней мере одну из компонент $X^{(1)}$ следует обратить в нуль, т. е.

$$\alpha=\alpha_0=\min\frac{a_i}{a_{i,\,m+1}}, \tag{3.19}$$

для всех $a_{i,\,m+1}>0$.

Допустим, что эта компонента стоит на первом месте:

$$\alpha_0=\min\frac{a_i}{a_{i,\,m+1}}=\frac{a_1}{a_{1,\,m+1}}.$$

Тогда

$$x_2^{(1)}A_2+x_3^{(1)}A_3+\ldots+x_m^{(1)}A_m+x_{m+1}^{(1)}A_{m+1}=A_0,$$

где $x^{(1)}_i=a_i-\alpha_0 a_{i,\,m+1}$; $i=2-, m$;

$$x'_{m+1}=\alpha_0.$$

Можно показать, что система векторов $A_2,\ldots,A_{m+1}$ линейно независима [21].

Для продолжения процесса получения новых опорных решений необходимо представить любой вектор, не входящий в новый базис $A_2, A_3,\ldots,A_{m+1}$ в виде линейной комбинации векторов этого базиса. Из (3.15)

$$A_1=\frac{1}{a_{1,\,m+1}}(A_{m+1}-a_{2,\,m+1}A_2-\ldots-a_{m,\,m+1}A_m). \tag{3.20}$$

И кроме того:

$$A_j=a_{1j}A_1+a_{2j}A_2+\ldots+a_{mj}A_m. \tag{3.21}$$

Подставив (3.20) в последнее выражение, будем иметь:

$$A_j=\left(a_{2j}-\frac{a_{1j}}{a_{1,\,m+1}}\cdot x_{2,\,m+1}\right)A_2+\left(a_{3j}-\frac{a_{1j}}{a_{1,\,m+1}}\times\right.$$

$$\left.\times a_{3,\,m+1}\right)A_3+\ldots+\left(a_{mj}-\frac{a_{1j}}{a_{1,\,m+1}}a_{m,\,m+1}\right)A_m+$$

$$+\frac{a_{1j}}{a_{1,\,m+1}}\cdot A_{m+1}. \tag{3.22}$$

Совершенно очевидно, что преобразование (3.22) эквивалентно преобразованию исключений Жордана-Гаусса.

Предположим теперь, что задача линейного программирования имеет решения и одним из них пусть будет $X=(x_1, x_2,\ldots,x_m)$.

Тогда

$$A_0=x_1A_1+x_2A_2+\ldots+x_mA_m \tag{3.23}$$

и

$$z_0=x_1c_1+x_2c_2+\ldots+x_mc_m, \tag{3.24}$$

где все $x_i\geqslant 0$.

Здесь через z_0 обозначено значение линейной формы, соответствующее данному решению.

Аналогично

$$A_j=a_{1j}A_1+a_{2j}A_2+\ldots+a_{mj}A_m;\ j=\overline{1,n} \tag{3.25}$$

и соответственно

$$z_j=a_{1j}c_1+a_{2j}c_2+\ldots+a_{mj}c_m;\ j=\overline{1,n} \tag{3.26}$$

Умножая (3.25) и (3.26) на некоторое число $\alpha>0$ и вычитая результаты из (3.23) и (3.24) соответственно, получим

$$(a_1-\alpha a_{1j})A_1+(a_2-\alpha a_{2j})A_2+\ldots+(a_m-\alpha a_{mj})A_m+$$
$$+\alpha A_j=A_0; \tag{3.27}$$

$$(a_1-\alpha a_{1j})c_1+(a_2-\alpha a_{2j})c_2+\ldots+(a_m-\alpha a_{mj})c_m+$$
$$+\alpha c_j=z_0-\alpha(z_j-c_j). \tag{3.28}$$

В выражении (3.26) к обоим частям, кроме того, добавлена величина αc_j. Если все коэффициенты при векторах $A_1, A_2,\ldots,A_m, A_j$ в (3.25) неотрицательны, получаем новое решение, которому соответствует значение линейной формы

$$z=z_0-\alpha(z_j-c_j). \tag{3.29}$$

Полагая $z_j-c_j>0$, имеем

$$z=z_0-\alpha(z_j-c_j)<z_0, \tag{3.30}$$

т. е. значение линейной формы уменьшится.

Допустим, что мы перешли к новому решению. Если теперь снова одна из разностей $z_j-c_j>0$ и соответствующее $a_{ij}>0$, можно перейти к другому решению, связанному с еще меньшим значением линейной формы. Процесс можно продолжить до тех пор, пока все разности z_j-c_j станут неположительными либо для неко-

торой разности $z_j - c_j$ окажутся неположительными все a_{ij}.

Если все $z_j - c_j \leqslant 0$, процесс закончен, решение является оптимальным.

Если на некотором шаге для какого-либо j разность $z_j - c_j > 0$ и все $a_{ij} \leqslant 0$, то α не имеет верхней границы и линейная форма может быть сделана как угодно малой. Таким образом, начав с исходного опорного решения задачи, можно получить последовательность новых опорных решений, завершающуюся оптимальным решением, или установить, что оптимального решения не существует.

Следует заметить, что решаемая задача предполагается не вырожденной, т. е. все ее опорные решения содержат m положительных компонент. Предположение о невырожденности обеспечивает возможность достижения оптимального решения за конечное число шагов. Если не делать такого предположения, то может оказаться, что среди m компонент опорного решения одна или несколько равны нулю. Тогда α может оказаться равным нулю и значение линейной формы при переходе к новому опорному решению не изменится. При повторении этой ситуации возможен возврат к старому базису. В этом случае в симплексной процедуре получается цикл.

Существует ряд методов [21], [133], [141] устранения вырожденности. Однако опыт вычислений не оправдывает их включения в симплексный алгоритм, так как из множества решенных задач линейного программирования цикл был обнаружен лишь в единичных случаях.

Сформулируем теперь кратко алгоритм симплексного метода. Будем предполагать, что матрица нашей задачи содержит m векторов, из которых может быть составлена единичная матрица порядка m. Для начала симплексного процесса матрицу задачи расположим в виде таблицы.

После составления таблицы отдельная итерация вычисляется в следующей последовательности.

1. Просматривается значение разностей $z_j - c_j$ и определяется, не является ли оптимальным решение, т. е. не выполняется ли для всех j неравенство $z_j - c_j \leqslant 0$.

2. Если для некоторого j значение $z_j - c_j > 0$, выбирается вектор, подлежащий вводу в базис; обычно берется индекс j, отвечающий $\max\limits_j (z_j - c_j)$.

Таблица 7

i	Базис	c	A_0	c_1	c_2	…	c_r	…	c_m	c_{m+1}	…	c_j	…	c_s	…	c_n
				A_1	A_2	…	A_r	…	A_m	A_{m+1}	…	A_j	…	A_s	…	A_n
1	A_1	c_1	a_1	1	0	…	0	…	a	$a_{1,m+1}$	…	a_{1j}	…	a_{1s}	…	a_n
2	A_2	c_2	a_2	0	1	…	0	…	0	$a_{2,m+1}$	…	a_{2j}	…	a_{2s}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
r	A_r	c_r	a_r	0	0	…	1	…	0	$a_{r,m+1}$	…	a_{rj}	…	a_{rs}	…	a_{rn}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
m	A_m	c_m	a_m	0	0	…	0	…	1	$a_{m,m+1}$	…	a_{mj}	…	a_{ms}	…	a_{mn}
$m+1$			z_0	0	0	…	0	…	0	$z_{m+1} - c_{m+1}$	…	$z_j - c_j$	…	$z_s - c_s$	…	$z_n - c_n$

3. Выбирается вектор, подлежащий исключению из базиса. Пометим его индексом r. Этот вектор соответствует $\min (a_i/a_{is})$ для всех $a_{is} > 0$. Здесь s — индекс вектора, выбранного в п. 2. Если все $a_{is} \leqslant 0$, линейная форма задачи не ограничена.

4. После выделения направляющей строки и направляющего столбца таблица, соответствующая старому решению, преобразуется в новую таблицу по формулам:

$$\left.\begin{aligned} &a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{rj}}{a_{rs}}\, a_{is}, \quad i \neq r \\ &a'_{rj} = \frac{a_{rj}}{a_{rs}}; \\ &a'_i = a'_{i0}; \\ &z'_0 = a_{m+1,\,0}; \\ &z'_j - c_j = a'_{m+1,\,j}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.31)$$

В табл. 8 представлены результаты первой итерации.

Продолжая процесс, приходим к оптимальному решению либо убедимся в неограниченности линейной формы.

Решаемая задача может и не содержать единичной матрицы. В таких случаях удобно использовать метод искусственного базиса [139].

Рассмотрим расширенную задачу, связанную с минимизацией линейной формы

$$c_1x_1 + \ldots + c_n x_n + \beta x_{n+1} + \beta x_{n+2} + \ldots + \beta x_{n+m} \qquad (3.32)$$

при условии, что

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n} x_n + x_{n+1} = a_1 \\ &a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n} x_n + x_{n+2} = a_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn} x_n + x_{n+m} = a_m \end{aligned}\right\} \qquad (3.33)$$

$$x_j \geqslant 0, \; j = 1, \ldots, n, \; n+1, \ldots, n+m.$$

Здесь β предполагается достаточно большим положительным числом. Векторы $A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots, A_{n+m}$ образуют базис, называемый искусственным. Если первоначальная задача обладает хотя бы одним решением, то оно является также решением и для расширенной

Таблица 8

i	Базис	c	A_0	c_1	c_2	…	c_r	…	c_m	…	c_{n+1}	…	c_j	…	c_s	…	c_n
				A_1	A_2	…	A_r	…	A_m	…	A_{m+1}	…	A_j	…	A_s	…	A_n
1	A_1	c_1	a'_1	1	0	…	a'_{1r}	…	0	…	$a'_{1,\,m+1}$	…	a'_{1j}	…	0	…	a'_{1n}
2	A_2	c_2	a'_2	0	1	…	a'_{2r}	…	0	…	$a'_{2,\,m+1}$	…	a'_{2j}	…	0	…	a'_{2r}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
r	A_r	c_r	a'_r	0	0	…	a'_{rr}	…	0	…	$a'_{r,\,m+1}$	…	a'_{rj}	…	1	…	a'_{rn}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
m	A_m	c_m	a_m	0	0	…	1	…	0	…	$a'_{m,\,m+1}$	…	a_{mj}	…	0	…	a'_{mn}
$m+1$			z'_0	0	0	…	$z'_r - c_r$	…	0	…	$z'_{n+1} - c_{m+1}$	…	$z'_j - c_j$	…	0	…	$z'_n - c_n$

задачи. Применение симплексного метода к расширенной задаче обеспечивает построение решения, в котором каждая из искусственных переменных x_{n+i} равна нулю.

Если первоначальная задача не обладает решениями, то решение расширенной задачи будет содержать, по крайней мере, одно $x_{n+i} > 0$.

Вектор

$$X = (x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}) = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \qquad (3.35)$$

принимается за исходное решение расширенной задачи. При этом значение линейной формы равно

$$z_0 = \sum_{i=1}^{m} a_i . \qquad (3.36)$$

Аналогично

$$X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{mj}) = (a_{1j} \quad a_{2j}, \ldots, a_{mj}) \qquad (3.37)$$

и

$$z_j = \beta \sum_{i=1}^{m} a_{ij}. \qquad (3.38)$$

Сведем результаты вычислений в табл. 9. Для каждого j в $(m+1)$-ю и $(m+2)$-ю строки помещаются соответственно коэффициенты при 1 и β из выражения

$$z_j - c_j = \beta \sum_{i=1}^{m} a_{ij} - c_j. \qquad (3.39)$$

Значение β при вычислениях может не фиксироваться.

Эта таблица обрабатывается так же, как и табл. 8, за исключением того, что вектор, вводимый в базис, связывается теперь с наибольшим положительным элементом $(m+2)$-й строки.

В первой итерации в базис вводится вектор, соответствующий $\max_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$. Элементы $(m+2)$-й строки преобразуются в соответствии с формулами (3.31). Искусственный вектор, исключенный из базиса, в дальнейшем не вводится ни в один из последующих базисов и, следовательно, преобразование m последних столбцов таблицы излишне.

Таким образом, руководствуясь элементом $(m+2)$-й строки как критерием, продолжаем отбирать вектор для введения в базис до тех пор, пока все искусственные векторы не будут исключены из базиса либо $(m+2)$-я

Таблица 9

i	Базис	c	A_0	c_1	c_2	$\ldots$	c_s	$\ldots$	c_n	β	$\ldots$	β	$\ldots$	β
				A_1	A_2		A_s		A_n	A_{n+1}		A_{n+2}		A_{n+m}
1	A_{n+1}	β	a_{n+1}	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1s}	$\ldots$	a_{1n}	1	$\ldots$	0	$\ldots$	0
2	A_{n+2}	β	a_{n+2}	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2s}	$\ldots$	a_{2n}	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
r	A_{n+r}	β	a_{n+r}	a_{r1}	a_{r2}	$\ldots$	a_{rs}	$\ldots$	a_{rn}	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
m	A_{n+m}	β	a_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{ms}	$\ldots$	a_{mn}	0	$\ldots$	0	$\ldots$	1
$m+1$			0	$-c_1$	$-c_2$	$\ldots$	$-c_s$	$\ldots$	$-c_n$	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0
$m+2$			$\sum a_{n+i}$	$\sum a_{i1}$	$\sum a_{i2}$	$\ldots$	$\sum a_{is}$	$\ldots$	$\sum a_{in}$	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0

строка не будет больше содержать положительных элементов в столбцах с номерами от 1 до $(n+m)$.

В первом случае соответствующий базис отвечает некоторому опорному решению первоначальной задачи, и в дальнейшем применяется обычный симплексный алгоритм.

Во втором случае задача не имеет решения.

Вернемся к исследуемой модулярной задаче (3.5). Несложными преобразованиями она всегда может быть сведена к задаче линейного программирования. Введем дополнительные переменные и представим задачу (3.5) в виде задачи минимизации с ограничениями

$$\min \sum_{i=1}^{m} |x_{n+i}| \tag{3.40}$$

при условии, что

$$x_{n+i} = a_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j,\ i=\overline{1, m}. \tag{3.41}$$

Заменяем переменные

$$x'_{n+i} = \begin{cases} x_{n+i} \text{ при } x_{n+i} \geqslant 0; \\ 0 \text{ при } x_{n+i} < 0; \end{cases}$$

$$x''_{n+i} = \begin{cases} 0 \text{ при } x_{n+i} \geqslant 0; \\ x_{n+i} \text{ при } x_{n+i} < 0, \end{cases}$$

т. е.

$$x_{n+i} = x'_{n+i} - x''_{n+i}; \tag{3.42}$$

$$x'_{n+i};\ x''_{n+i} \geqslant 0. \tag{3.43}$$

Аналогично

$$x'_j = \begin{cases} x_j \text{ при } x_j \geqslant 0; \\ 0 \text{ при } x_j < 0; \end{cases}$$

$$x''_j = \begin{cases} 0 \text{ при } x_j \geqslant 0; \\ x_j \text{ при } x_j < 0, \end{cases}$$

т. е.

$$x_j = x'_j - x''_j; \tag{3.44}$$

$$x'_j;\ x''_j \geqslant 0. \tag{3.45}$$

Задача принимает вид

$$\min \sum_{i=1}^{m} (x'_{n+i} + x''_{n+i}) \tag{3.46}$$

при условиях

$$x'_{n+i} - x''_{n+i} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,(x'_j - x''_j) = a_i;\ i=\overline{1, m}. \tag{3.47}$$

$$x'_{n+i};\ x''_{n+i};\ x'_j;\ x''_j \geqslant 0,\ i=\overline{1, m};\ j=\overline{1, n}. \tag{3.48}$$

Эта задача линейного программирования, решаемая симплексным методом.

Очевидно, парные векторы условий задачи (3.46)—(3.48) всегда линейно зависимы и, следовательно, не могут одновременно войти в один и тот же базис при решении. Поэтому в любом решении задачи (3.46)—(3.48) в общем случае отличной от нуля будет только одна из пары переменных x'_{n+i}; x''_{n+i} и одна из другой пары x'_j и x''_j, что соответствует положительному или отрицательному значению переменных.

3.2.2. На основе исключений Жордана-Гаусса построен специальный метод для решения задачи (3.5) [42]. Используем представление задачи в виде (3.40)—(3.41):

$$\min \sum_{i=1}^{m} |x_{n+i}| \tag{3.49}$$

при условии, что

$$x_{n+i} = a_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j,\ i=\overline{1, m}. \tag{3.50}$$

Система условий дана в табл. 10.

Единичные векторы в таблице соответствуют переменным

$$x_{n+i};\ i=\overline{1, m}.$$

Если ранг матрицы коэффициентов условий (3.50) при x_j $(j=\overline{1, n})$ равен n, то с помощью n последовательных шагов исключений Жордана-Гаусса можно перевести все x_j, $j \leqslant n$ из верхней строки табл. 10 в ее левый столбец и на их место поставить соответствующие x_j, $j > n$. При этом никаких ограничений на разрешающие элементы не накладывается, лишь бы они были отличны от нуля.

Для удобства записи будем считать, что в верхнюю строку таблицы переведены $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n}$ и получена табл. 11.

Выражения для замененных $x_1, \ldots, x_n$ понадобятся лишь после получения решения, чтобы выразить его в

Таблица 10

i	Базис	A_0	A_1	A_2	...	A_n	A_{n+1}	A_{n+2}	...	A_{n+m}
$n+1$	A_{n+1}	a_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	1	0	...	0
$n+2$	A_{n+2}	a_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	0	1	...	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n+m$	A_{n+m}	a_{n+m}	$a_{n+m,1}$	$a_{n+m,2}$	...	$a_{n+m,n}$	0	0	...	1

Таблица 11

i	Базис	A_0	A_1	...	A_n	A_{n+1}	A_{n+2}	...	A_{2n}	A_{2n+1}	A_{2n+2}	...	A_{n+m}
1	A_1	a'_1	1	...	0	$a'_{1,n+1}$	$a'_{1,n+2}$	...	$a'_{1,2n}$	0	0	...	0
2	A_2	a'_2	0	...	0	$a'_{2,n+1}$	$a'_{2,n+2}$	...	$a'_{2,2n}$	0	0	...	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	A_n	a'_n	0	...	1	$a'_{n,n+1}$	$a'_{n,n+2}$	...	$a'_{n,2n}$	0	0	...	0
$2n+1$	A_{2n+1}	a'_{2n+1}	0	...	0	$a'_{2n+1,n+1}$	$a'_{2n+1,n+2}$	...	$a'_{2n+1,2n}$	1	0	...	0
$2n+2$	A_{2n+2}	a'_{2n+2}	0	...	0	$a'_{2n+2,n+1}$	$a'_{2n+2,n+2}$	...	$a'_{2n+2,2n}$	0	1	...	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n+m$	A_{n+m}	a'_{n+m}	0	...	0	$a'_{n+m,n+1}$	$a'_{n+m,n+2}$	...	$a'_{n+m,2n}$	0	0	...	1

старых координатах. Поэтому они выписываются отдельно:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a'_{1,n+1}\, x_{n+1} + a'_{1,n+2}\, x_{n+2} + \\ &+ \ldots + a'_{1,n+m}\, x_{n+m}; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= a'_{n,n+1}\, x_{n+1} + a'_{n,n+2}\, x_{n+2} + \\ &+ \ldots + a'_{n,n+m}\, x_{n+m} \end{aligned}\right\} \qquad (3.51)$$

и в дальнейшем используется лишь оставшаяся часть (табл. 12).

В вершине $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_{2n} = 0$ значение минимизируемой функции

$$z = \sum_{i=2n+1}^{n+m} |a'_i|. \qquad (3.52)$$

Если в табл. 12 все свободные члены отличны от нуля то из этой вершины выходят n ребер, каждое из которых образуется в пересечении $n-1$ из рассматриваемых n плоскостей $x_{n+1} = 0$, $x_{n+2} = 0 \ldots x_{2n} = 0$. Эти ребра называют верхними.

Если же некоторые из свободных членов в табл. 12 равны нулю, то соответствующие плоскости также проходят через рассматриваемую вершину. Т. е. через вершину кроме n верхних ребер проходят еще ребра, в образовании которых участвует хотя бы одна из плоскостей $x_j = 0$, $j > 2n$ и $a_i = 0$. Эти последние ребра называют боковыми.

Найдем условия убывания функции z при движении вдоль верхнего ребра.

Рассмотрим, например, ребро $x_{n+1} = \Theta$, $x_{n+2} = \ldots = x_{2n} = 0$. Любая точка этого ребра, образованного пересечением плоскостей $x_{n+2} = 0, \ldots, x_{2n} = 0$, определяется значением параметра Θ. Для достаточно малого Θ можно записать:

$$z = \sum_{i=2n+1}^{n+m} |a'_i| = |\Theta| + \sum_{i=2n+1}^{n+m} |a'_{i,n+1}\Theta + a'_i| = |\Theta| +$$

$$+ |\Theta| \sum_{i \in J_2} (|a'_{i,n+1}| + \sum_{i \in J_2} |a'_i| + \Theta \sum_{i \in J_2} \operatorname{sign} a'_i\, a'_{i,n+1} =$$

$$= \sum_{i \in J_2} |a'_i| + |\Theta| \{ 1 + \sum_{i \in J_1} |a'_{i,n+1}| +$$

$$+ \operatorname{sign} \Theta \sum_{i \in J_2} \operatorname{sign} a'_i \cdot a'_{i,n+1} \}, \qquad (3.53)$$

Таблица 12

i	Базис	A_0	A_{n+1}	A_{n+2}	...	A_{2n}	A_{2n+1}	A_{2n+2}	...	A_{n+m}
$2n+1$	A_{2n+1}	a'_{2n+1}	$a'_{2n+1,n+1}$	$a'_{2n+1,n+2}$	...	$a'_{2n+1,2n}$	1	0	...	0
$2n+2$	A_{2n+2}	a'_{2n+2}	$a'_{2n+2,n+1}$	$a'_{2n+2,n+2}$	...	$a'_{2n+2,2n}$	0	0	...	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$n+m$	A_{n+m}	a'_{n+m}	$a'_{n+m,n+1}$	$a'_{n+m,n+2}$	...	$a'_{n+m,2n}$	0	0	...	1

где множество J_1 включает все $i \geqslant 2n+1$, для которых $a'_i = 0$, а множество J_2 — все $i \geqslant 2n+1$ для $a'_i \neq 0$.

Очевидно, при выполнении условий

$$\left|\sum_{i \in J_2} \operatorname{sign} a'_i \, a_{i,\, n+1}\right| > 1 + \sum_{i \in J_1} |a'_{i,\, n+1}| \tag{3.54}$$

и

$$\operatorname{sign} \Theta = -\operatorname{sign} \sum_{i \in J_2} \operatorname{sign} a'_i \cdot a'_{i,\, n+1}, \tag{3.55}$$

получим

$$z < \sum_{i=2n+1}^{n+m} |a'_i|. \tag{3.56}$$

Т. е. если рассматриваемое ребро удовлетворяет условию (3.54), а знак Θ — условию (3.55), то увеличивая $|\Theta|$, можно уменьшить z.

Значение $|\Theta|$ можно увеличивать до тех пор, пока это ребро не встретится с какой-нибудь из плоскостей, не проходящей через рассматриваемую вершину, т. е. пока какое-нибудь из $x_{n+1}, \ldots, x_m$ со свободным членом, отличным от нуля, не обратится в нуль.

Чтобы найти эту новую вершину, просматриваем отношения

$$\operatorname{sign}\left(\frac{a'_i}{a'_{i,\, n+1}}\right) \text{ при } a'_{i,\, n+1} \neq 0,$$
$$i = 2n+1, \ldots, n+m; \tag{3.57}$$

отбираем из них те, для которых

$$\operatorname{sign}\left(\frac{a'_i}{a'_{i,\, n+1}}\right) = \operatorname{sign} \sum_{i \in J_2} \operatorname{sign} a'_i \, a_{i,\, n+1},$$

и выбираем наименьшее по абсолютной величине; соответствующий коэффициент $a_{i,\, n+1}$ берем в качестве разрешающего и производим один шаг исключений Жордана—Гаусса.

С полученной вершиной поступаем так же, т. е. отыскиваем верхнее ребро, удовлетворяющее условию убывания, и двигаемся по нему, уменьшая z, и т. д. Процесс продолжается до получения таблицы с верхними ребрами, не удовлетворяющими условию убывания.

Если все свободные члены в таблице отличны от нуля, то полученное значение z есть абсолютный минимум задачи.

Если среди свободных членов в таблице есть равные нулю, необходимо проверить, не убывает ли функция z по боковым ребрам.

Путем шага исключений Жордана—Гаусса переводим наверх одно из x_i, свободный член которого равен нулю, и проверяем на условия убывания полученные верхние ребра. Если условия удовлетворяются, уменьшаем функцию z, в противном случае делаем новый шаг исключений, переводя наверх еще одно x_i, свободный член которого равен нулю, и т. д.

После конечного числа шагов получаем вершину, все ребра которой не удовлетворяют условиям убывания. Эта вершина есть абсолютный минимум задачи (3.45). В общем случае, когда ν свободных членов таблицы равно нулю, число испытаний на условие убывания не превышает $C_{n+\nu}^{\nu+1}$ [42].

3.2.3. Задача (3.5) может быть решена методом последовательного случайного поиска [102], [103], [104].

Последовательный случайный поиск использует информацию, которую несет значение минимизируемой функции для оценки удачности процесса оптимизации.

Пусть расстояние между двумя точками $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ в n-мерном пространстве есть $r^{(1,\,2)}$. Выпуклость и непрерывность функции в задаче (3.5) позволяет связать расстояние $r^{(1,\,2)}$ с изменением этой функции при переходе из $X^{(1)}$ в $X^{(2)}$.

$$|f(X^{(2)}) - f(X^{(1)})| < c r^{(1,\,2)}, \tag{3.58}$$

где c — некоторая постоянная, причем неравенство имеет место в некоторой области параметров X. Очевидно, что чем меньше расстояние между точками $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$, тем меньше изменяется функция качества. При малых значениях $r^{(1,\,2)}$ значения градиента функции $f(X)$ в точках $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ близки и можно воспользоваться оценкой:

$$\operatorname{grad} f(X^{(1)}) \approx \operatorname{grad} f(X^{(2)}), \tag{3.59}$$

т. е. судить достаточно достоверно о поведении функции $f(X)$ в точке $X^{(1)}$ по данным точки $X^{(2)}$. Возможность такой экстраполяции поведения функции $f(X)$ позволяет

построить эффективные алгоритмы последовательного случайного поиска.

Разобьем процесс поиска на этапы, причем на каждом этапе поставим собственную цель. Таким образом процесс достижения цели $f(X^{(*)})$ разбивается на этапы с подцелями. Цель поиска на этапе заключается в отыскании такого $X^{(i+1)}$, для которого

$$f(X^{(i+1)})<f(X^{(i)}),$$

т. е. приращение функции $\Delta f^{(i)}$ должно быть отрицательным:

$$\Delta f^{(i)}=f(X^{(i+1)})-f(X^{(i)})<0.$$

Естественно, что новую точку следует искать в районе $X^{(i)}$ и, следовательно, случайность нужно вводить как изменение состояния, достигнутого на предыдущем этапе поиска:

$$X^{(i+1)}=X^{(i)}+\Delta X^{(i+1)}.$$

Т. е. алгоритм поиска должен определять выбор приращения ΔX, а не сам вектор X:

$$\Delta X^{(i+1)}=\begin{cases}\Xi \text{ при } \Delta f^{(i)}\geqslant 0;\\ \Delta X^{(i)} \text{ при } \Delta f^{(i)}<0,\end{cases} \qquad (3.60)$$

где случайные пробы Ξ достаточно малы по модулю, чтобы вероятность достижения подцели была достаточно большой.

Смысл этого алгоритма следующий. Делаются случайные шаги в пространстве параметров, пока не будет найден такой шаг, который приведет к уменьшению функции $f(X)$. Такой шаг повторяется до тех пор, пока функция $f(X)$ не начнет увеличиваться, что вызовет случайные пробы новых направлений, и т. д.

Эффективность такого алгоритма гарантируется условием (3.59), которое утверждает, что успех в $X^{(1)}$ может повторяться в $X^{(2)}$, если расстояние между $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ не очень велико.

3.2.4. Задача (3.5) может быть решена методом покоординатного спуска квадратичными приближениями [75].

Фиксируя переменные, кроме одной $j=s$, получаем плоское сечение задачи (3.5):

$$\min \sum_{i=1}^{m} |a'_i+a_{is}\ x_s|. \qquad (3.61)$$

Здесь

$$a'_i=a_i+\sum_{j=1}^{s-1} a_{ij}\ x_j+\sum_{j=s+2}^{n} a_{ij}\ x_j;$$

x_j — фиксированные переменные.

Модулярная форма (3.61) может быть записана в виде квадратичной функции аргументов x_s и $x_s^{(0)}$,

$$y(x_s\ x_s^{(0)})=\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{|a'_i+a_{is}\ x_s^{(0)}|}(a'_i+a_{is}\ x_s)^2, \qquad (3.62)$$

где $x_s^{(0)}$ — некоторое приближение решения задачи (3.61).

Очевидно, что при $x_s=x_s^{(0)}$,

$$y(x_s^{(0)}\ x_s)=\sum_{i=1}^{m} |a'_i+a_{is}\ x_s^{(0)}|. \qquad (3.63)$$

Обозначим через $x_s^{(1)}$ значение аргумента, при котором функция (3.63) достигает минимума, тогда

$$y(x_s^{(1)},\ x_s^{(0)})\leqslant y(x_s^{(0)},\ x_s). \qquad (3.64)$$

Рассмотрим теперь выражение

$$\sum_{i=1}^{m} |a'_i+a_{is}\ x_s)^2=x_s^2\sum_{i=1}^{m} a^2_{is}+2x_s\sum_{i=1}^{m} a_{is}\ a'_i+$$
$$+\sum_{i=1}^{m}(a'_i)^2\geqslant 0.$$

Так как полученное выражение всегда больше нуля или равно нулю, дискриминант этого выражения больше нуля или равен ему:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a^2_{is}\right)\left(\sum_{i=1}^{m}(a'_i)^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{m} a_{is}\ a'_i\right)^2\geqslant 0. \qquad (3.65)$$

Преобразуем выражение

$$\sum_{i=1}^{m} |a'_i + a_{is}\ x_s^{(1)}| + \sum_{i=1}^{m} \frac{|a'_i + a_{is}\ x_s^{(1)}|\ |a'_i + a_{is}\ x_s^{(0)}|^{0,5}}{|a'_i + a_{is}\ x_s^{(0)}|^{0,5}} =$$

$$= \left[\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{|a'_i + a_{is}\ x_s^{(1)}|\ |a'_i + a_{is}\ x_s^{(0)}|^{0,5}}{|a'_i + a_{is}\ x_s^{(0)}|^{0,5}} \right)^2 \right]^{0,5}.$$

Применяя к выражению, стоящему в квадратных скобках, неравенство (3.65), получим

$$\sum_{i=1}^{m} (a'_i + a_{is}\ x_s^{(1)}| \leqslant$$

$$\leqslant \left[\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{|a'_i + a_{is}\ x_s^{(1)}|^2}{|a'_i + a_{is}\ x_s^{(0)}|} \right) \left(\sum_{i=1}^{m} a'_i + a_{is}\ x_s^{(0)} \right) \right]^{0,5} =$$

$$= [y(x_s^{(1)}, x_s^{(0)}) \cdot y(x_s^{(0)}, x_s^{(0)})]^{0,5}.$$

По определению минимума

$$y(x_s^{(1)}, x_s^{(0)}) = \min_{x_s} y(x_s, x_s^{(0)}) \leqslant y(x_s^{(0)}, x_s^{(0)}),$$

поэтому

$$\sum_{i=1}^{m} |a'_i + a_{is}\ x_s^{(1)}| \leqslant$$

$$\leqslant [y(x_s^{(1)}, x_s^{(0)}) \cdot y(x_s^{(0)}, x_s^{(0)})]^{0,5} \leqslant$$

$$\leqslant y(x_s^{(0)}, x_s^{(0)}) = \sum_{i=1}^{m} |a'_i + a_{is}, x_s^{(0)}|. \qquad (3.66)$$

Так как точку минимума квадратичного выражения (3.62) можно легко получить, то

$$\tilde{x}_s = -$$

$$-\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{a'_i\ a_{is}}{|a'_i - a_{is}\ x_s^{(0)}|} \right) \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{a^2_{is}}{|a'_i + a_{is}\ x_s^{(0)}|} \right), \qquad (3.67)$$

следовательно, всегда можно указать точку, в которой значение минимизируемой функции в (3.61) будет меньше, чем в точке $x_s^{(0)}$. Используя точку $\tilde{x}_s$ в качестве нового приближения, вновь можно провести минимизацию и т. д.

Можно показать, что неравенство (3.66) носит строгий характер всюду, за исключением искомой точки минимума. Для ликвидации затруднений при доказательстве соотношений (3.66), связанных с невозможностью вычисления значений

$$\frac{1}{|a'_i + a_{is}\ x_s^{(0)}|} \quad \text{при } a'_i = -a_{is}\ x_s^{(0)},$$

целесообразно функции в (3.62) записать следующим образом:

$$y(x_s, x_s^{(0)}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{|a'_i + a_{is}\ x_s^{(0)}| + \varepsilon} (a'_i + a_{is}\ x_s)^2, \qquad (3.68)$$

где

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon, \text{ если } a'_i = -a_{is}\ x_s,\ \varepsilon > 0,\ i \in J_1; \\ 0, \text{ если } a'_i \neq -a_{is}\ x_s;\ i \in J_2. \end{cases}$$

Учитывая, что $x_s^{(1)}$ обращает в минимум $y(x_s, x_s^{(0)})$, можно записать

$$y(x_s^{(1)}\ x_s^{(0)}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{|a'_i + a_{is}\ x_s^{(0)}| + \varepsilon} (a'_i + a_{is}\ x_s^{(1)})^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{|a'_i + a_{is}\ x_s^{(0)}| + \varepsilon} [|a'_i + a_{is}\ x_s^{(0)}| + \delta_i]^2 =$$

$$= y(x_s^{(0)}, x_s^{(0)}) +$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^{m} \frac{\delta_i}{|a'_i + a_{is}\ x_s^{(0)}| + \varepsilon} |a'_i + a_{is}\ x_s^{(0)}| +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \frac{\delta^2_i}{|a'_i + a_{is}\ x_s^{(0)}| + \varepsilon},$$

но

$$y(x_s^{(0)}, x_s^{(0)}) > y(x_s^{(1)}, x_s^{(0)}).$$

Следовательно,

$$2\sum_{i=1}^{m}\frac{\delta_i}{|a'_i+a_{is}\ x_s^{(0)}|+\varepsilon}\ |a'_i+a_{is}\ ,\ x_s^{(0)}|+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{\delta_i}{|a'_i+a_{is}\ x_s^{(0)}|+\varepsilon}<0$$

или

$$\sum_{i\in J_2}\left(2\delta_i+\frac{\delta_i^2}{|a'_i+a_{is}\ x_s^{(0)}|}\right)+\sum_{i\in J_1}\frac{\delta_i}{\varepsilon}<0. \qquad (3.69)$$

Так как

$$\frac{(\delta_i-\varepsilon)}{\varepsilon}=\frac{\delta^2_i+\varepsilon^2-2\delta_i\ \varepsilon}{\varepsilon}\geqslant 0,$$

то

$$\frac{\delta_i}{\varepsilon}\geqslant 2\delta_i-\varepsilon.$$

Тогда подставив последнее выражение в (3.69) и учитывая, что

$$\sum_{i\in J_2}\frac{\delta^2_i}{|a'_i+a_{is}\ x_s^{(0)}|}>0,$$

получим

$$\sum_{i=1}^{m}\delta_i-\frac{t}{2}\varepsilon<0,$$

где t — число точек в J_1. Отсюда, так как

$$\sum_{i=1}^{m}|a_i+a_{is}\ x_s^{(1)}|=\sum_{i=1}^{m}(|a'_i+a_{is}\ x_s^{(0)}|+\delta_i)=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}|a'_i+a_{is}\ x_s^{(0)}|+\sum_{i=1}^{m}\delta_i-$$

$$-\frac{t}{2}\varepsilon\leqslant\sum_{i=1}^{m}|a'_i+a_{is}\ x_s^{(0)}|,$$

следует, что

$$\sum_{i=1}^{m}|a'_i+a_{is}\ x_s^{(1)}|-\frac{t}{2}\varepsilon\leqslant\sum_{i=1}^{m}|a'_i+a_{is}\ x_s^{(0)}|. \qquad (3.70)$$

Очевидно, в данном случае возможны два варианта:

$$\sum_{i=1}^{m}|a'_i+a_{is}\ x_s^{(0)}|\leqslant\sum_{i=1}^{m}|a'_i+a_{is}\ x_s^{(1)}| \qquad (3.71)$$

при любом ε
и

$$\sum_{i=1}^{m}|a'_i+a_{is}\ x_s^{(0)}|>\sum_{i=1}^{m}|a'_i+a_{is}\ x_s^{(1)}| \qquad (3.72)$$

при некотором ε.
Из первого варианта следует, что среди множества значений аргумента x_s, удовлетворяющих соотношению

$$y\ (x_s^{(0)};\ x_s^{(0)})>y\ (x_s;\ x_s^{(0)}),$$

не существует таких, которые удовлетворяли бы соотношению

$$\sum_{i=1}^{m}|a'_i+a_{is}\ x_s^{(0)}|>\sum_{i=1}^{m}|a'_i+a_{is}\ x_s^{(1)}|. \qquad (3.73)$$

Но среди множества значений x_s, принадлежащих достаточно малой окрестности, удовлетворяющих соотношению

$$y\ (x_s^{(0)},\ x_s^{(0)})<y\ (x_s,\ x_s^{(0)}), \qquad (3.74)$$

также не существует значений $x_s^{(1)}$, для которых выполняется соотношение (3.73).

В самом деле, если удовлетворяется соотношение (3.74), то

$$\sum_{i\in J_2}2\delta_i+\sum_{i\in J_1+J_2}\frac{\delta^2_i}{|a'_i+a_{is}\ x_s^{(0)}|+\varepsilon}>0,$$

и в достаточно малой окрестности $x_s^{(0)}$ первое слагаемое по абсолютной величине больше второго. Поэтому для

выполнения указанного неравенства необходимо, чтобы $\sum_{i=1}^{m} \delta_i > 0$, откуда следует

$$\sum_{i=1}^{m} |a'_i + a_{is} \quad x_s^{(0)}| > \sum_{i=1}^{m} |a'_i + a_{is} \quad x_s^{(1)}|. \qquad (3.75)$$

Отсюда следует, что в первом варианте точка $x_s^{(0)}$ является точкой минимума для формы $\sum_{i=1}^{m} |a'_i + a_{is} \quad x_s|$, в противном случае для некоторого подходящего значения ε получим соотношение (3.75).

Алгоритм метода квадратичных приближений заключается в следующем:

1) задаемся приближением $x^{(k)}$;

2) вычисляем значение x_s^{k+1} по формуле (3.67); в том случае, если $|a'_i - a_{is}, x_s^{(k)}| = 0$, заменяем соответствующее выражение величиной $\varepsilon > 0$;

3) если $x_s^{(k)} \neq x_s^{(k+1)}$, принимаем $x_s^{(k+1)}$ за новое приближение и вычисляем по формуле (3.67) $x_s^{(k+2)}$. и т. д. В противном случае вычисления заканчиваются, последнее $x_s^{(*)}$ есть решение задачи (3.61).

3.2.5. Методы покоординатного спуска достаточно просты, однако они не дают гарантии достижения абсолютного наименьшего значения, так как линейная модулярная функция в общем случае может не убывать ни по одному из координатных направлений и убывать по некоторому промежуточному направлению. Такая ситуация возникает в случае, если линии уровня минимизируемой функции не пересекают ни одной из координатных осей. Если в процессе вычислений расчетная точка совпадает с одной из таких линий уровня, процесс счета оборвется, не достигнув минимума. Поэтому методы покоординатного спуска необходимо комбинировать с приемом смещения координат [54].

Сущность этого приема состоит в следующем. При остановке процесса вычислений перед каждым спуском одной из координат x_s дается смещение на малую величину $\pm\delta$. Если в каждой двумерной плоскости, образуемой координатной x_s с остальными координатными x_j, $j \neq s$ при таком двойном сдвиге метод покоординатного спуска не даст уменьшения значения минимизируемой функции — это значит, что функция в данной плоскости не убывает ни по одному из возможных направлений.

Сформулируем критерий окончания счета для n-мерного пространства переменных.

Так как каждая координата x_s образует с остальными $(n-1)$ двумерную плоскость, следовательно, для каждой координаты нужно сделать $2(n-1)$ просчетов. Отсюда общее число просчетов для всех координат при абсолютном минимуме равно $2(n-1)n$.

Основным достоинством приема смещения координат является простота реализации и возможность применения с любым из методов покоординатного спуска.

Следует отметить также, что сходимость алгоритмов покоординатного спуска улучшается с помощью методов конфигурации и вращения координат [108], [120]. Эти методы более сложны, но могут дать выигрыш в скорости счета.

§ 3.3. Минимизация суммы модулей максимальных уклонений систем несовместных линейных уравнений

Аут-форма

$$y = \left\langle \begin{array}{l} \left\| a_i^{(1)} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \quad x_j^{(1)} \right\| \\ \left\| a_i^{(2)} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \quad x_j^{(2)} \right\| \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left\| a_i^{(p)} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \quad x_j^{(p)} \right\| \end{array} \right\rangle_{i=1}^{m} \qquad (3.76)$$

означает суммирование m слагаемых по максимальным значениям модулярных функций из p входящих в каждое слагаемое строк [91]. Здесь $a_i^{(1)}, a_i^{(2)}, \ldots, a_i^{(p)}$ и a_{ij} — постоянные коэффициенты. Минимизация выражения (3.76) заключается в отыскании вектора $X = (x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}, \ldots, x_1^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)})$, при котором эта сумма принимает наименьшее значение. Математически последняя задача представляет собой минимизацию суммы модулей максимальных уклонений систем несовместных линейных уравнений.

Вопросы практического решения задачи (3.76) исследовались в работах Ю. А. Радцига в связи с применением

методов покоординатной оптимизации [91], [99]. Ряд работ посвящен частным случаям проблемы. Исследования Ж. Б. Фурье связаны с решением чебышевской задачи минимизации несовместной системы линейных уравнений, т. е. с задачей (3.76) при $m=1$ [144], [145]. Любопытно, что при геометрической интерпретации задачи Ж. Б. Фурье ввел в рассмотрение $(n+1)$-мерную полиэдральную поверхность, составленную из кусков наклонных плоскостей, которая нашла широкое применение в теории модулярных функций [3]. Следует отметить работу С. И. Зуховицкого, в которой дается n-мерная интерпретация чебышевской задачи, позволяющая внести элементы графического расчета в исследование особенностей задачи, а также монографию Б. Я. Ремеза, посвященную численным методам чебышевских приближений [106], [107].

Структура функции суммы модулей максимальных уклонений принципиально не отличается от структуры функции суммы модулей линейных функций. Поэтому всегда можно либо преобразовать методы § 3.2 для решения задачи (3.76), либо задачу (3.76) преобразовать для решения ее методами § 3.2.

Универсальность метода случайного поиска позволяет не останавливаться на его применении к минимизации аут-форм. Далее рассматриваются вопросы применения к этой задаче методов на основе исключений Жордана—Гаусса и покоординатного спуска.

3.3.1. Группа методов минимизации на основе исключений Жордана—Гаусса представлена здесь симплексным методом. Задача (3.76) с помощью несложных преобразований сводится к задаче линейного программирования.

Введем новые переменные:

$$\left.\begin{array}{l} -x_i \leqslant a_i^{(1)} + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \quad x_j^{(1)} \leqslant x_i, \\ -x_i \leqslant a_i^{(2)} + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \quad x_j^{(2)} \leqslant x_i, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -x_i \leqslant a_i^{(p)} + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \quad x_j^{(p)} \leqslant x_i; \end{array}\right\} \quad i=\overline{1,m};$$

$$x_i \geqslant 0; \qquad i=\overline{1,m}$$

и произведем замену переменных:

$$x_j^{(t)} = x'^{(t)}_j - x''^{(t)}_j, \quad j=\overline{1,n}, \quad t=\overline{1,p};$$

$$x'^{(t)}_j, \; x''^{(t)}_j \geqslant 0, \quad j=\overline{1,n}, \quad t=\overline{1,p}.$$

Теперь задачу минимизации выражения (3.76) можно представить в виде

$$\min \sum_{i=1}^{m} x_i \tag{3.77}$$

при условии, что

$$\left.\begin{array}{l} -x_i \leqslant a_i + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \; (x'^{(1)}_j - x''^{(1)}_j) \leqslant x_i; \\ -x_i \leqslant a_i + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \; (x'^{(2)}_j - x''^{(2)}_j) \leqslant x_i; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -x_i \leqslant a_i + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \; (x'^{(p)}_j - x''^{(p)}_j) \leqslant x_i; \end{array}\right\} \quad i=\overline{1,m}; \tag{3.78}$$

$$x_i \geqslant 0; \quad i=\overline{1,m}; \tag{3.79}$$

$$x'^{(t)}_j, \; x''^{(t)}_j \geqslant 0; \quad j=\overline{1,n}; \quad t=\overline{1,p}, \tag{3.80}$$

или после расчленения условий в виде:

$$\min \sum_{i=1}^{m} x_i \tag{3.81}$$

$$\left.\begin{array}{l} -x_i - \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \quad (x'^{(1)}_j - x''^{(1)}_j) \leqslant a_i^{(1)}; \\ x_i - \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \quad (x'^{(1)}_j - x''^{(1)}_j) \geqslant a_i^{(1)}; \\ -x_i - \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \quad (x'^{(2)}_j - x''^{(2)}_j) \leqslant a_i^{(2)}; \\ x_i - \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \quad (x'^{(2)}_j - x''^{(2)}_j) \geqslant a_i^{(2)}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -x_i - \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \quad (x'^{(p)}_j - x''^{(p)}_j) \leqslant a_i^{(p)}; \\ x_i - \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \quad (x'^{(p)}_j - x''^{(p)}_j) \geqslant a_i^{(p)}; \end{array}\right\} \quad i=\overline{1,m}; \tag{3.82}$$

$$x'_j{}^{(t)},\ x''_j{}^{(t)} \geqslant 0;\ j=\overline{1,\ n};\ t=\overline{1,\ p}; \qquad (3.83)$$

$$x_i \geqslant 0;\ i=\overline{1,\ m}. \qquad (3.84)$$

Очевидно, что это задача линейного программирования решается по программе симплексного метода. Так же как в задачах п. 3.2.1, здесь переменные, в силу линейной зависимости, входят в решение либо с одним, либо с двумя штрихами, что соответствует их положительному или отрицательному значению.

3.3.3. При покоординатной оптимизации аут-формы в соответствии с общей схемой метода, вычисление ведется последовательно по каждой из попеременных аут-формы (3.76).

Интервалы, содержащие оптимальное значение переменной $x_j{}^{(t)*}$ для фиксированных значений $j=s$ и $t=\kappa$, вычисляются из соотношений

$$x_s{}^{(\kappa)*} \in [\min x_{s(i)}{}^{(\kappa)},\ \max x_{s(i)}{}^{(\kappa)}], \qquad (3.85)$$

где

$$x^{(\kappa)}_{s(i)} = -\frac{c^{(\kappa)}_{s(i)}}{a_{is}};\ i=\overline{1,\ m}, \qquad (3.86)$$

и

$$c^{(\kappa)}_{s(t)} = \sum_{i=1}^{m} a_i{}^{(\kappa)} + \sum_{j=1}^{s-1} a_{ij}\ x_i{}^{(\kappa)} + \sum_{j=\kappa+1}^{n} a_{ij}\ x_j{}^{(\kappa)};$$

$$i=\overline{1,\ m}. \qquad (3.87)$$

Таким образом, требуется определить минимум недифференцируемой выпуклой функции на заданном интервале. Для решения этой задачи применим метод оптимального поиска по Фибоначчи [8], [19].

3.3.4. Метод Фибоначчи применяется для минимизации унимодальных функций на заданном интервале изменения переменной. Функция $y=f(x)$ унимодальна на интервале $[0;\ b]$, если существует значение x_0, $0 \leqslant x_0 \leqslant b$, при котором $f(x)$ или строго возрастает при $x \leqslant x_0$ и строго убывает при $x > x_0$, или строго возрастает при $x < x_0$ и строго убывает при $x \geqslant x_0$. Очевидно, что выпуклые функции унимодальны. Пусть функция $y=f(x)$ является унимодальной на интервале $0 \leqslant x \leqslant L_n$. Предположим, что L_n есть число, обладающее тем свойством, когда точка, в которой $f(x)$ достигает минимума, может быть локализована внутри интервала единичной длины путем взаимного сравнения не более n значений $f(x)$. Если ввести

$$d_n = \sup L_n, \qquad (3.88)$$

то

$$d_n = d_{n-1} + d_{n-2} \quad \text{при } n \geqslant 2 \qquad (3.89)$$

и

$$d_0 = d_1 = 1, \qquad (3.90)$$

где d_n — число Фибоначчи.

Чтобы показать это, воспользуемся методом математической индукции. Очевидно, что $d_0=1$ и $d_1=1$, так как единственное значение унимодальной функции не дает никакой дополнительной информации относительно точки минимума.

Фиксируем $n \geqslant 2$ и вычисляем $y_1=f(x_1)$ и $y_2=f(x_2)$, где x_1 и x_2 — две точки из интервала $(0;\ L_n)$ и $x_1<x_2$. Если $y_1>y_2$, то точка минимума находится в интервале $[x_1;\ L_n]$; если $y_2>y_1$, то точка минимума лежит в интервале $[0;\ x_2]$. Если $y_1=y_2$, то выбираем любой из этих интервалов. Теперь мы имеем подынтервал интервала $[0;\ L_n]$ и значение $f(x)$ в одной из его внутренних точек.

Для $n=2$, $L_2=2-\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ мало, можно выбрать $x_1=1-\varepsilon$; $x_2=1$. Это показывает, что $\sup L_2 \geqslant 2$. С другой стороны, $\sup L_2 < 2+\varepsilon$ и, следовательно, $\sup L_2 \leqslant 2$. Таким образом, $d_2=2=d_1+d_0$. Предположим теперь, что $d_\kappa = d_{\kappa-1} + d_{\kappa-2}$ для $\kappa=2, \ldots, n-1$. Основываясь на этом предположении, покажем, что $d_n = d_{n-1} + d_{n-2}$. Допустим, что мы вычислили $f(x)$ в двух точках x_1 и x_2 интервала $[0,\ L_n]$.

Если $y_1<y_2$, то $x_2<d_{n-1}$, так как мы можем выбрать только $n-2$ точек, поскольку первый выбор из $n-1$ возможных точек пал на x_1. Кроме того, $x_1<d_{n-2}$, так как минимум должен находиться на интервале $[0;\ x_2]$ и есть возможность выбрать только $n-2$ точек. Аналогично, если $y_1>y_2$, имеем $L_n - x_1 < d_{n-1}$. Таким образом,

$$L_n < x_1 + d_{n-1} < d_{n-1} + d_{n-2},$$

откуда

$$d_n = \sup L_n \leqslant d_{n-1} + d_{n-2}. \qquad (3.91)$$

Остается получить обратное неравенство. Положим

$$L_n = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)(d_{n-1} + d_{n-2});$$

$$x_1 = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) d_{n-2};$$

$$x_2 = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) d_{n-1}.$$

Так как ε можно выбрать произвольно малым, то

$$d_n \geqslant d_{n-1} + d_{n-2}. \qquad (3.92)$$

Из двух неравенств (3.91) и (3.92) следует требуемое равенство

$$d_n = d_{n-1} + d_{n-2}. \qquad (3.92)$$

Кроме того, отсюда получаем для любого малого ε оптимальную процедуру поиска. Сравнив $f(x_1)$ и $f(x_2)$, получаем интервал $L_{n-1} = (1 - \frac{\varepsilon}{2}) d_{n-1}$ и значение функции в первой точке внутри меньшего интервала. Продолжая таким же образом, имеем $L_\kappa = (1 - \frac{\varepsilon}{2}) d_\kappa$ для $2 < \kappa < n$. Наконец, $L_2 = (1 - \frac{\varepsilon}{2}) d_2 = 2 - \varepsilon$, так что последний интервал имеет единичную длину. Определим аналитический вид d_n. Решение уравнений

$$d_n = d_{n-1} + d_{n-2};$$

$$d_0 = d_1 = 1 \qquad (3.94)$$

представим в виде геометрической прогрессии

$$1,\ d,\ d^2 \ldots\ldots$$

Необходимо, чтобы при всяком n выполнялось сотношение

$$d^{n-2} + d^{n-1} = d^n;$$

или, сокращая на d^{n-2}:

$$1 + d = d^2. \qquad (3.95)$$

Корни этого уравнения равны $(1 \pm \sqrt{5})/2$. Следовательно, если положим

$$d_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

то, подобрав соответствующим образом c_1 и c_2, получим решение (3.94). Из системы

$$\begin{cases} 1 = c_1 + c_2; \\ 1 = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases} \qquad (3.96)$$

имеем

$$c_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}; \qquad (3.97)$$

$$c_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}. \qquad (3.98)$$

Так как $(\sqrt{5}+1)/2 > 1$ и $(\sqrt{5}-1)/2 < 1$, очевидно, что при больших n значение d_n равно $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ с большой точностью.

Отсюда следует, что ценой дополнительных вычислений небольшого объема можно получить экспоненциальное возрастание точности. Отношение d_n/d_{n-1} стремится к $(\sqrt{5}+1)/2$, что приближенно равно 1,62. Следовательно, первые два значения x_1 и x_2 следует взять на расстоянии 0,62 от концов интервала. Такая политика поиска минимума является оптимальной.

ГЛАВА 4. ОСОБЕННОСТИ МИНИМИЗАЦИИ СЛОЖНЫХ МОДУЛЯРНЫХ ФОРМ

§ 4.1. Минимизация модулярных форм с дискретностью

Реальные проблемы оптимального проектирования конструкций приводят к дискретной и нелинейной формулировке ограничений и целевых функций модулярных задач (см. § 4.3). Естественно, что введение дополнительных связей в задачу усложняет ее. Если число таких связей невелико или они несущественны, размеры задачи и объем вычислений увеличатся незначительно. Тогда решение проблемы заключается в построении соответствующего машинного алгоритма и программы, позволяющей решить задачу. В противном случае дополнительные усложнения могут привести к непреодолимым трудностям. В любой конкретной ситуации необходимо в должной перспективе рассмотреть требуемую размерность и сложность задачи.

В этой главе задачи решаются методами на основе исключений Жордана—Гаусса и методами последовательного случайного поиска с модификациями, учитывающими дискретность и нелинейность.

Методы частичного улучшения могут быть использованы в сочетании с двумя предыдущими методами как средство уменьшения размеров задачи разделением переменных.

4.1.1. Модулярные формы с дискретностью представляют собой дискретные неоднородные функции. Область допустимых решений задачи невыпукла и несвязна. Решение в общем случае будет локальным.

Задача минимизации аут-формы с дискретностью формулируется следующим образом:

$$\min \sum_{i=1}^{m} c_i \; b_{i(\psi)}; \tag{4.1}$$

$$\begin{array}{l} \left| a_i^{(1)} + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \; x_j^{(1)} \right| + A_i^{(1)} \; \Phi_i^{(1)} \\ \hline\hline \left| a_i^{(2)} + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \; x_j^{(2)} \right| + A_i^{(2)} \; \Phi_i^{(2)} \\ \hline\hline \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \hline\hline \left| a_i^{(p)} + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \; x_j^{(p)} \right| + A_i^{(p)} \; \Phi_i^{(p)} \end{array} \leqslant b_i \qquad i=\overline{1,\, m}; \tag{4.2}$$

$$b_i \in \{b_\psi\}, \; i=\overline{1,\, m}; \tag{4.3}$$

$$\Phi_i^{(t)} = \begin{cases} 0 \text{ при } a_i^{(t)} + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \; x_j^{(t)} \geqslant 0, \\ 1 \text{ при } a_i^{(t)} + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \; x_j^{(t)} < 0, \; t=\overline{1,\, p}; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i=\overline{1,\, m}. \end{cases} \tag{4.4}$$

Здесь выражение $b_i \in \{b_\psi\}$ означает, что $b_{i(\psi)}$ выбирается из упорядоченного дискретного ряда

$$b_1 < b_2 < \ldots < b_{\psi-1} < b_\psi < \ldots < b_\nu$$

по соотношению;

$$\text{если } b_{\psi-1} < b_i \leqslant b_\psi, \text{ то } b_{i(\psi)} = b_\psi.$$

$a_i^{(1)}, a_i^{(2)}, \ldots, a_i^{(p)}, A_i^{(1)}, A_i^{(2)}, \ldots, A_i^{(p)}, c_i, a_{ij}$ — постоянные коэффициенты. Ищется вектор $X = (x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}, \ldots, x_1^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)})$.

Задача имеет модулярную структуру с разрывными функциями и дискретными переменными. Тем не менее она разрешима принятыми методами.

Задача выпадает из рамок линейного программирования, однако введением дополнительных целочисленных

переменных ее удается свести к частично целочисленной задаче линейного программирования.

Найдем величину

$$\tau = \min \left\langle \begin{array}{l} |a_i^{(1)}| + \Phi_i^{(1)} A_i^{(1)} \\ \hline\hline |a_i^{(2)}| + \Phi_i^{(2)} A_i^{(2)} \\ \hline\hline \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \hline\hline |a_i^{(p)}| + \Phi_i^{(p)} A_i^{(p)} \end{array} \right._{i=1}^{m} . \qquad (4.5)$$

Очевидно

$$\tau \geqslant \min \left\langle \begin{array}{l} (|a_i^{(1)} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(1)}| + \Phi_i^{(1)} A_i^{(1)}) \\ \hline\hline (|a_i^{(2)} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(2)}| + \Phi_i^{(2)} A_i^{(2)}) \geqslant \\ \geqslant |a_i^{(t)} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(t)}| + \Phi_i^{(t)} A_i^{(t)} . \\ \hline\hline \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \hline\hline (|a_i^{(p)} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(p)}| + \Phi_i^{(p)} A_i^{(p)}) \end{array} \right._{i=1}^{m} \qquad (4.6)$$

Рассмотрим задачу

$$\min \sum_{i=1}^{m} c_i b_{i(\psi)} \qquad (4.7)$$

при условии, что

$$\left.\begin{array}{l} -A_i^{(1)} u_i^{(1)} - b_i \leqslant a_i^{(1)} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(1)} \leqslant b_i ; \\ -A_i^{(2)} u_i^{(2)} - b_i \leqslant a_i^{(2)} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(2)} \leqslant b_i ; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -A_i^{(p)} u_i^{(p)} - b_i \leqslant a_i^{(p)} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(p)} \leqslant b_i ; \end{array}\right\} \quad i = \overline{1, m}. \qquad (4.8)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_i^{(t)} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(t)} < \tau (1 - u_i^{(t)}) ; \\ -a_i^{(t)} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(t)} \leqslant \tau u_i^{(t)} ; \\ u_i^{(t)} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \end{array}\right\} \quad t = \overline{1, p}, \ i = \overline{1, m}. \qquad (4.9)$$

$$b_i \in \{b_\psi\} \equiv \{b_1, b_2 \ldots b_\nu\}, \ i = \overline{1, m}. \qquad (4.10)$$

Частично целочисленная задача (4.7)—(4.10) эквивалентна задаче (4.1)—(4.4). Действительно, для $i = \overline{1, m}$ $t = \overline{1, p}$ при $u_i^{(t)} = 0$ $a_i^{(t)} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(t)} < \tau$ и $a_i^{(t)} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(t)} \geqslant 0$, а при $u_i^{(t)} = 1$ $a_i^{(t)} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(t)} < 0$ и $-(a_i^{(t)} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(t)}) \leqslant \tau$ и, наоборот, при $a_i^{(t)} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(t)} \geqslant 0$ $u_i^{(t)}$ может быть равным только нулю, а при $a_i^{(t)} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(t)} < 0$ $u_i^{(t)}$ может быть равным только единице. Неравенства, содержащие τ, всегда удовлетворяются в силу выражения (4.6) и на решение не влияют.

Вводя переменные $z_{i\psi}$, $i = \overline{1, m}$; $\psi = \overline{1, \nu}$ получим:

$$\min \sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{\psi=1}^{\nu} b_\psi z_{i\psi} . \qquad (4.11)$$

$$\left.\begin{array}{l} -A_i^{(1)} u_i^{(1)} - \sum_{\psi=1}^{\nu} b_\psi z_{i\psi} \leqslant a_i^{(1)} + \\ + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(1)} \leqslant \sum_{\psi=1}^{\nu} b_\psi z_{i\psi} ; \\ -A_i^{(2)} u_i^{(2)} - \sum_{\psi=1}^{\nu} b_\psi z_{i\psi} \leqslant a_i^{(2)} + \end{array}\right|$$

$$
\left.\begin{array}{l}
+\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j^{(2)} \leqslant \sum\limits_{\psi=1}^{\nu} b_\psi\ z_{i\psi}\ ; \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
-A_i^{(p)}\ u_i^{(p)} - \sum\limits_{\psi=1}^{\nu} b_\psi\ z_{i\psi} \leqslant a_i^{(p)} + \\
+\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j^{(p)} \leqslant \sum\limits_{\psi=1}^{\nu} b_\psi\ z_{i\psi}.
\end{array}\right\} i=\overline{1,\ m}. \qquad (4.12)
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
a_i^{(t)} + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j^{(t)} < \tau\ (1-u_i^{(t)})\ ; \\
-a_i^{(t)} - \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j^{(t)} \leqslant \tau\ u_i^{(t)}; \\
0 \leqslant u_i^{(t)} \leqslant 1,
\end{array}\right\} t=\overline{1,\ p},\ i=\overline{1,\ m}. \qquad (4.13)
$$

$u_i^{(t)}$ — целое.

$$
\left.\begin{array}{l}
\sum\limits_{\psi=1}^{\nu} z_{i\psi} = 1; \\
z_{i\psi} \geqslant 0;
\end{array}\right\} \psi=\overline{1,\ \nu},\ i=\overline{1,\ m}, \qquad (4.14)
$$

$z_{i\psi}$ — целое.

И производя замену переменных

$$
\left.\begin{array}{l}
x_j^{(t)} = x'^{(t)}_j - x''^{(t)}_j, \\
x'^{(t)}_j,\ x''^{(t)}_j \geqslant 0,
\end{array}\right\} \quad i=\overline{1,\ n},\ t=\overline{1,\ p},
$$

приходим к частично целочисленной задаче линейного программирования:

$$
\min \sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{\psi=1}^{\nu} b_\psi\ z_{i\psi}\ ; \qquad (4.15)
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
-A_i^{(1)}\ u_i^{(1)} - \sum\limits_{\psi=1}^{\nu} b_\psi\ z_{i\psi} - \\
-\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\ (x'^{(1)}_j - x''^{(1)}_j) \leqslant a_i^{(1)}; \\
\sum\limits_{\psi=1}^{\nu} b_\psi\ z_{i\psi} - \\
-\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\ (x'^{(1)}_j - x''^{(1)}_j) \geqslant a_i^{(1)}\ ; \\
-A_i^{(2)}\ u_i^{(2)} + \sum\limits_{\psi=1}^{\nu} b_\psi\ z_{i\psi} - \\
-\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\ (x'^{(2)}_j - x''^{(2)}_j) \leqslant a_i^{(2)}; \\
\sum\limits_{\psi=1}^{\nu} b_\psi\ z_{i\psi} - \\
-\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\ (x'^{(2)}_j - x''^{(2)}_j) \geqslant a_i^{(2)}; \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
-A_i^{(t)}\ u_i^{(t)} - \sum\limits_{\psi=1}^{\nu} b_\psi\ z_{i\psi} - \\
-\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\ (x'^{(p)}_j - x''^{(p)}_j) \leqslant a_i^{(p)}; \\
\sum\limits_{\psi=1}^{\nu} b_\psi\ z_{i\psi} - \\
-\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\ (x'^{(p)}_j - x''^{(p)}_j) \geqslant a_i^{(p)}.
\end{array}\right\} i=\overline{1,\ m}; \qquad (4.16)
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\ (x'^{(p)}_j - x''^{(p)}_j) + \tau\, u_i^{(t)} < \tau - a_i^{(t)}\ ; \\
-\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\ (x'^{(p)}_j - x''^{(p)}_j) - \tau\, u_i^{(t)} \leqslant a_i^{(t)}, \\
u_i^{(t)} \leqslant 1; \\
u_i^{(t)} \geqslant 0;
\end{array}\right\} \begin{array}{l} i=\overline{1,\ m}, \\ t=\overline{1,\ p}. \end{array} \qquad (4.17)
$$

$u_i^{(t)}$ — целое.

$$x'^{(p)}_j,\ x''^{(p)}_j \geqslant 0,\ j=\overline{1,\ n}. \tag{4.18}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \sum\limits_{\psi=1}^{\nu} z_{i\psi}=1; & \\ z_{i\psi}\geqslant 0, & z_{i\psi} \text{ — целое} \end{array}\right| \psi=\overline{1,\ \nu},\ i=\overline{1,\ m}. \tag{4.19}$$

4.1.2. Идея дискретной оптимизации заключается в регуляризации задачи, получаемой погружением исходной области допустимых решений в объемлющую ее выпуклую область, т. е. временным отбрасыванием условий дискретности. К полученной таким образом задаче применяются стандартные методы оптимизации. Если решение удовлетворяет требуемым условиям дискретности, задача решена: если же это не так, то требуется дальнейший переход к дискретному решению. Этот переход и составляет сущность модификаций.

Применение к дискретным задачам оптимизации методов на основе исключений Жордана—Гаусса впервые было дано в работе Данцига [138]. Свою реализацию эти методы получили в работах Гомори [147]—[149]. Частично целочисленная задача линейного программирования имеет вид:

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j\ x_j \tag{4.20}$$

при условии, что

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j = a_i,\ i=\overline{1,\ m}; \tag{4.21}$$

$$x_j \geqslant 0,\ j=\overline{1,\ n}; \tag{4.22}$$

$$x_j \text{ — целое},\ j=\overline{1,\ n_1},\ n_1<n. \tag{4.23}$$

Будем называть целой частью числа наибольшее целое число, не превышающее его. Дробную часть числа обозначим γ:

$$\gamma \geqslant 0. \tag{4.24}$$

Отбросим условие целочисленности в задаче (4.20)—(4.23) и найдем решение задачи линейного программирования.

Для произвольного базисного решения X выполняется равенство

$$x_r = a_r - \sum_{j\in J} a_{rj}\ x_j, \tag{4.25}$$

где J — номера векторов, не входящих в базис; r — номер компоненты вектора X.

Если компонента вектора X — целое число, то

$$\gamma_r - \sum_{j\in J} a_{rj}\ x_j = n_r \text{ — тоже целое число.} \tag{4.26}$$

Пусть J_1 составляется из индексов $j \in J$, для которых a_{rj} положительное число, а J_2 из тех же индексов, для которых a_{rj} отрицательно.

Если

$$\sum_{j\in J} a_{rj}\ x_j = \sum_{j\in J_1} a_{rj} + \sum_{j\in J_2} a_{rj}\ x_j \geqslant 0, \tag{4.27}$$

то в равенстве

$$\sum_{j\in J_1} a_{rj}\ x_j + \sum_{j\in J_2} a_{rj}\ x_j = \gamma_r - n_r, \tag{4.28}$$

вытекающем из (4.26), целое число n_r не может быть положительным, так как в противном случае правая часть (4.28) станет отрицательной. Следовательно, учитывая неотрицательность компонент x_j, получаем

$$\sum_{j\in J_1} a_{rj}\ x_j \geqslant \sum_{j\in J_1} a_{rj}\ x_j + \sum_{j\in J_2} a_{rj}\ x_j \geqslant \gamma_r. \tag{4.29}$$

Если же

$$\sum_{j\in J} a_{rj}\ x_j = \sum_{j\in J_1} a_{rj}\ x_j + \sum_{j\in J_2} a_{rj}\ x_j < 0, \tag{4.30}$$

то в равенстве (4.28) целое число n_r должно быть положительным, поскольку только в этом случае правая часть (4.26) становится отрицательной. Следовательно:

$$\sum_{j\in J_2} a_{rj}\ x_j \leqslant \sum_{j\in J_1} a_{rj}\ x_j + \sum_{j\ni J_2} a_{rj}\ x_j \leqslant \gamma_r - 1$$

или

$$-\frac{\gamma_r}{1-\gamma_r} \sum_{j\in J_2} a_{rj}\ x_j \geqslant \gamma_r. \tag{4.31}$$

Итак, для любого решения задачи X, имеющего целочисленную компоненту, должно выполняться либо (4.29), либо (4.31).

Учитывая неотрицательность левых частей неравенств (4.29) и (4.31), можно записать неравенство

$$\sum_{j \in J_1} a_{rj} \; x_j - \frac{\gamma_r}{1-\gamma_r} \sum_{j \in J_2} a_{rj} \; x_j \geqslant \gamma_r, \qquad (4.32)$$

справедливое для любого вектора X, имеющего целочисленную компоненту.

Предположим, что $k \in J$, т. е. принадлежит внебазисной переменной. В этом случае соотношение (4.32) останется справедливым, если вместо a_{rk} подставить любое число a'_{rk}, отличающееся от a_{rk} на целое число. Рассуждая, как при выводе неравенства (4.32), получим условие, отличающееся от (4.32) только коэффициентом δ_{rk} при переменной x_k.

В данном случае

$$\delta_{rk} = \begin{cases} a'_{rk}, \text{ если } a'_{rk} \geqslant 0; \\ \dfrac{\gamma_r}{1-\gamma_r} \; a'_{rk}, \text{ если } a'_{rk} < 0. \end{cases} \qquad (4.33)$$

Поскольку цель состоит в построении возможно более сильного ограничения, коэффициент при x_k желательно сделать как можно меньшим. Если a'_{rr} выбирать неотрицательным, то согласно (4.32) оптимальным значением будет γ_{rk} — дробная часть a_{rk}. Если же a'_{rk} искать среди отрицательных чисел, то по той же причине следует положить $a'_{rk} = \gamma_{rk} - 1$, т. е. максимальному отрицательному числу, отличающемуся от x_k на целое число.

Итак, δ_{rk} можно сделать равным либо γ_{rk}, либо $\frac{\gamma_r}{1-\gamma_r}(1-\gamma_{rk})$. Естественно в качестве этого коэффициента взять

$$\min \left\{ \gamma_{rk} = \frac{\gamma_r}{1-\gamma_r}(1-\gamma_{rk}) \right\} = \begin{cases} \gamma_{rk}, \text{ если } \gamma_{rk} \leqslant \gamma_r, \\ \dfrac{\gamma_r}{1-\gamma_r}(1-\gamma_r), \\ \text{если } \gamma_{rk} > \gamma_r. \end{cases} \qquad (4.34)$$

Эти соображения относятся к любому целочисленному переменному x_j при $j \in J$.

Поэтому условие (4.32) может быть заменено более сильным ограничением

$$\sum_{j \in J} \delta_{rj} \; x_j \geqslant \gamma_r \qquad (4.35)$$

где

$$\delta_{rj} = \begin{cases} a_{rj}, \text{ если } j > n_1; \; a_{rj} \geqslant 0; \\ -\dfrac{\gamma_r}{1-\gamma_r} \; a_{rj}, \text{ если } j > n_1; \; a_{rj} < 0; \\ \gamma_{rj}, \text{ если } j \leqslant n_1; \; \gamma_{rj} \leqslant \gamma_r; \\ \dfrac{\gamma_r}{1-\gamma_r}(1-\gamma_{rj}), \text{ если } j \leqslant n_1; \; \gamma_{rj} > \gamma_r. \end{cases}$$

Неравенство (4.35) с коэффициентами δ_{rj} является дополнительным ограничением.

Будучи записано в эквивалентной форме

$$-\gamma_r = -\sum_{j \in J} \delta_{rj} \; x_j + x_{n+1}, \; x_{n+1} \geqslant 0, \qquad (4.36)$$

оно присоединяется к имевшимся ранее линейным ограничениям.

Каждая большая итерация, т. е. решение задачи линейного программирования, завершается одним из двух исходов.

1. В первом столбце табл. 8 предыдущей итерации все элементы, отвечающие переменным с ограничением целочисленности, являются целыми числами.

2. В первом столбце табл. 8 предыдущей итерации среди элементов, отвечающих x_j при $j \leqslant n$, имеются дробные.

Первый исход фиксирует окончание процесса счета. Второй случай требует перехода к следующей большой итерации. Для этого выбирается строка r табл. 8 предыдущей итерации, которая отвечает переменной, ограниченной требованием целочисленности, и содержит дробное число a_r. По r-ой строке формируется дополнительное ограничение (4.36). В результате табл. 7 окаймляется строкой из элементов δ_{ij} и единичным столбцом с

единицей в последней позиции, отвечающей новой дополнительной переменной.

Далее следует симплексная итерация. Если на одном из шагов какая-то дополнительная переменная становится базисной, то соответствующая строка и столбец вычеркиваются.

Конечность метода частично целочисленного программирования гарантируется, если минимизируемая линейная форма ограничена сверху и снизу, причем множество решений задачи без условий целочисленности выпукло. Кроме того, линейная форма должна зависеть только от первых n_1 переменных, на которые наложены ограничения целочисленности.

В случае когда линейная форма зависит от некоторых переменных, не подчиненных требованиям целочисленности, не исключена возможность образования бесконечной последовательности решений [30].

Очевидно, метод можно применить к задаче (4.15)—(4.19), однако без гарантии его конечности, так как минимизируемая функция зависит не только от целочисленных переменных, т. е. в общем случае метод даст лишь приближенное решение задачи (4.1)—(4.4).

4.1.3. Методы случайного поиска решают задачу дискретной оптимизации непосредственно без регуляризации. Специфическая структура этих задач позволяет применять достаточно мотивированные эвристические подходы. С применением случайного поиска к задачам дискретной оптимизации связаны работы Пятецкого—Шапиро И. И., Волконского В. А., Левиной Л. В. и Поманского А. А. [76].

Минимизируемая функция задачи (4.1)—(4.4) не обладает свойствами (3.58) и (3.59), т. е. свойствами непрерывности. Поэтому в данном случае алгоритм последовательного случайного поиска имеет вид:

$$\Delta X^{(i+1)} = \begin{cases} \Xi \text{ при } \Delta f^{(i)} \leqslant 0; \\ \varphi(\Delta X^{(i)}) \text{ при } \Delta f^{(i)} > 0. \end{cases} \tag{4.37}$$

Случайный шаг в алгоритме делается при уменьшении функции качества. Если же приращение минимизируемой функции не отрицательно, то неудачный шаг исправляют, после чего снова делается случайный шаг. Таким образом, работоспособность алгоритма поиска осуществляется благодаря исправлению ошибок, допущенных в процессе случайных проб.

Наиболее эффективен последовательный адаптивный поиск, когда случайный шаг делается из предыдущей удачной точки с учетом информации о поведении функции $f(X)$ на предшествующих шагах. Эта информация используется в двух направлениях в перестройке вероятностных характеристик, определяющих направление случайного шага в пространстве переменных и изменении масштаба шага.

Адаптация начинается в обстановке равновероятного поиска. В процессе накопления опыта алгоритм приобретает информацию об объекте в виде каких-то вероятностных гипотез о наилучшем продвижении в пространстве параметров. По мере возрастания опыта дисперсность этих гипотез должна уменьшаться, и в пределе алгоритм выбирает вектор наилучшего направления с определенной, достаточно большей вероятностью.

Таким образом, процесс адаптации перестраивает вероятностные свойства поиска так, что алгоритм становится неслучайным.

Пусть n-мерный вектор $W=(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ характеризует состояние адаптации алгоритма, т. е. определяет вероятностные свойства поиска. Причем при $w_i=0$ $(i=1, \ldots, n)$ поиск должен быть равновероятным.

Тогда направление шага удобно представить в виде некоторой векторной функции

$$\Delta X = a\chi(\Xi; W), \tag{4.38}$$

где a — модуль шага; χ — некоторая непрерывная векторная функция двух переменных Ξ и W.

Для различных алгоритмов эта функция χ может быть различной, но при этом она должна удовлетворять следующим свойствам: при нулевом значении вектора W поиск должен быть равновероятным

$$\chi(\Xi; 0) = \Xi,$$

где $0=(0, 0, \ldots, 0)$;

математическое ожидание направления случайного шага должно совпадать с направлением вектора адаптации

$$M[\chi(\Xi, W)] = \frac{W}{|W|};$$

дисперсия случайного шага $D[\chi(\Xi; W)]$ должна быть обратно пропорциональной модулю вектора W.

При выполнении этих условий функция χ характеризует пространственное распределение случайного шага, которое может целесообразно изменяться по мере накопления опыта работы алгоритма.

§ 4.2. Минимизация модулярных форм с нелинейными связями

Аут-форма с нелинейными связями имеет вид:

$$\min \sum_{i=1}^{m} c_i \, b_{i(\psi)}; \tag{4.39}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{1}{R_i \mu_i^{(1)}} \left| a_i^{(1)} + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_j^{(1)} \right| + \mu_i^{(1)} A_i \, \Phi_i \, R_i \\
\hline
\dfrac{1}{R_i \mu_i^{(2)}} \left| a_i^{(2)} + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_j^{(2)} \right| + \mu_i^{(2)} A_i \, \Phi_i \, R_i \\
\hline
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\hline
\dfrac{1}{R_i \mu_i^{(p)}} \left| a_i^{(p)} + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_j^{(p)} \right| + \mu_i^{(p)} A_i \, \Phi_i \, R_i
\end{array}\right\} \leqslant b_i, \quad i=\overline{1, m}; \tag{4.40}$$

$$b_i \in \{b_\psi\}, \; i=\overline{1, m}; \tag{4.41}$$

$$0 < \mu_i^{(t)} \leqslant 1, \; t=\overline{1, p}; \tag{4.42}$$

$$\Phi_i^{(t)} = \begin{cases} 0 \text{ при } a_i^{(t)} + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_j^{(t)} \geqslant 0, & i=\overline{1, m}, \\ 1 \text{ при } a_i^{(t)} + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_j^{(t)} < 0, & t=\overline{1, p}; \end{cases} \tag{4.43}$$

$$g_\xi^{(t)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i^{(t)} + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_j^{(t)}}{b_{i(\psi)}} \, a_{i\xi} \, c_i \, f_{\xi i} \leqslant 0,$$

$$\xi=\overline{1, x}, \; t=\overline{1, p}; \tag{4.44}$$

$$l_j^{(t)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i^{(t)} + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_j^{(t)}}{b_{i(\psi)}} \, a_{ij} \, c_i = 0;$$

$$j=\overline{1, n}; \; t=\overline{1, p}. \tag{4.45}$$

Здесь $a_i^{(1)}, a_i^{(2)}, \ldots, a_i^{(p)}, A_i^{(1)}, A_i^{(2)}, \ldots, A_i^{(p)}, c_i, a_{ij}, f_{\xi i}, R_i$ — постоянные коэффициенты. Находится вектор $(X\mu) = (x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}, \ldots, x_1^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)} \mu_1^{(1)}, \ldots, \mu_m^{(1)}, \mu_1^{(2)}, \ldots, \mu_m^{(2)}, \ldots, \mu_1, \ldots, \mu_m)$.

Особенности решения задачи (4.39)—(4.45), связанные с ее нелинейностью, не затрагивают модулярных преобразований пп. гл. 3 и 4, которые выполняются по тем же схемам. Поэтому в дальнейшем внимание сосредоточено на преодолении их нелинейности.

4.2.1. Методы решения нелинейной задачи оптимизации определяются ее структурой, которая может быть выпуклой и невыпуклой.

Особенность оптимизации выпуклой задачи заключается в том, что ее локальные экстремумы совпадают с глобальным экстремумом. Выпуклая задача — одноэкстремальна и решение ее не представляет принципиальных трудностей.

В невыпуклых задачах локальные экстремумы не совпадают с глобальными. Может оказаться, что полученный вариант решения является оптимальным, однако установить это можно, лишь вычислив значения показателя качества во всех других, подозреваемых на глобальный экстремум, точках и сравнив их со значением функции качества решения для исследуемого варианта, т. е. решение невыпуклых задач связано с неупорядоченным перебором подозреваемых на экстремум вариантов.

Трудности, стоящие на пути анализа многоэкстремальных задач, заставляют ориентироваться не на оптимальные решения, не на глобальный экстремум, а на приближенное решение, на некоторый локальный экстремум.

В настоящее время разработаны методы решения общих и частных выпуклых задач оптимизации, а также частных невыпуклых задач [37], [40], [108], [118],

[120], [123], [164], [165]. Методы исследования задач нелинейной оптимизации оказываются тем эффективней, чем уже класс задач и, следовательно, чем больше априорной информации о поведении функции качества и о структуре области определения задачи.

4.2.2. Оптимизация нелинейных модулярных задач осуществима методом нелинейного программирования на основе исключений Жордана—Гаусса [164].

Метод нелинейного программирования решает задачу оптимизации нелинейной функции на нелинейном множестве ограничений

$$\min f(X) \tag{4.46}$$

при условии, если

$$g_i(X) \leqslant 0, \ i=1, \overline{m}; \tag{4.47}$$

$$X \geqslant 0. \tag{4.48}$$

Здесь $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — n-мерный вектор. Предполагается, что функции $f(X)$ и $g(X)$ дифференцируемы в требуемой области.

Метод решения строится в виде последовательных приближений [164]. Если дано r-ое приближение $X^{(r)}$, то $(r+1)$-ое приближение $X^{(r+1)}$ вычисляется следующим процессом.

Используется разложение в ряд Тейлора функций $g_i(X)$ по $X^{(r)}$, с последующей линеаризацией их путем пренебрежения членами высоких степеней.

Пусть уже линеаризованная форма будет $G^{(r)}(X) \leqslant 0$. Ищем минимум $f(X)$, подчиненный линейным ограничениям

$$G^{(r)}(X) \leqslant 0, \ i=1, \overline{m}; \tag{4.49}$$

$$X \geqslant 0. \tag{4.50}$$

Полученное решение принимаем за $(r+1)$-ое приближение. Продолжением процесса можно получить $\min f(X)$.

Рассмотрим возможные случаи.

1. Пусть функции $g_i(X)$ линейны. Тогда, предполагая, что начальное решение X^0 дано, минимизируем функцию

$$\left(\frac{\partial f(X)}{\partial x_1}\right)_0 x_1 + \left(\frac{\partial f(X)}{\partial x_2}\right)_0 x_2 + \ldots + \left(\frac{\partial f(X)}{\partial x_n}\right)_0 x_n. \tag{4.51}$$

Используя симплексный метод, получаем решение X на границе области существования X. Если $f(X^{(0)}) > f(X^{(1)})$, рассматриваем $X^{(1)}$ как первое приближение. Если $f(X^{(0)}) < f(X^{(1)})$, минимальная точка должна быть на отрезке $X^{(0)}X^{(1)}$. Эту точку можно получить методом множителей Лангранжа и рассматривать ее как новое приближенное значение. Обозначим это значение через $X^{(1*)}$

$$f(X^{(1*)}) < f(X^{(0)}). \tag{4.52}$$

Теперь, используя $X^{(1*)}$ аналогичным образом, получаем следующее приближение. Процесс продолжается до тех пор, пока $X^{(r)}$ не сойдет к $X^{(\infty)}$.

Если функция $f(X)$ выпукла, то $X^{(\infty)}$ будет глобальной минимальной точкой.

Если функция $f(X)$ не выпукла, $X^{(\infty)}$ может быть локальной точкой или точкой седловины.

Сходимость метода может быть показана как сходимость метода наискорейшего спуска или метода релаксаций.

2. Пусть теперь все функции $g(X)$ вогнутые. Разлагаем $g_i(X)$ в окрестности $X^{(r)}$, используя ряд Тейлора:

$$g_i(X) = g_i(X^{(r)}) + (X - X^{(r)}) \left(\frac{\partial g_i(X)}{\partial X}\right)_r + \ldots,$$

$$i=1, \overline{m}. \tag{4.53}$$

Определим $G_i^{(r)}(X)$ как

$$G_i^{(r)}(X) = g_i(X^{(r)}) + (X - X^{(r)}) \left(\frac{\partial g_i(X)}{\partial X}\right)_r,$$

$$i=1, \overline{m}. \tag{4.54}$$

Область определения X есть

$$G_i^{(r)}(X) \leqslant 0, \ i=\overline{1, m}; \tag{4.55}$$

$$X \geqslant 0. \tag{4.56}$$

В силу вогнутости $g(X)$ каждое возможное решение на (4.55), (4.56) будет возможным решением на (4.47), (4.48). Используем метод последовательных приближений. В этом случае $X^{(\infty)}$ может быть локальным минимумом или точкой седловины.

3. Рассмотрим случай, когда все функции $g_i\ (X)$ выпуклы. Пусть область определения X есть:

$$G_i^{(r)}\ (X) \leqslant 0,\ i=\overline{1,\ m}; \tag{4.57}$$

$$X \geqslant 0. \tag{4.58}$$

Каждое возможное решение на (4.47), (4.48) является решением на (4.57), (4.58) в силу выпуклости $g_i\ (X)$, т. е. $X^{(r+1)}$ не всегда будет решением (4.57), (4.58). Если $X^{(r+1)}$ есть возможное решение (4.46), (4.47), то оно рассматривается как $(r+1)$-е приближение. В противном случае $(r+1)$-е приближение может быть получено из следующих соображений.

В $(n+1)$-мерном пространстве существует, по крайней мере, одна функция $g_i\ (X)$, такая, что отрезок $(X^{(r)},\ g_i(X^{(r)}))$, $(X^{(r+1)}\ g\ (X^{(r+1)}))$ пересечется с плоскостью

$$z=g_i\ (X)=0.$$

А так как для такой функции

$$g_i(X^{(r)}) \leqslant 0$$

$$\text{и } g_i\ (X^{(r+1)}) \geqslant 0,$$

то

$$X^{(r+1)*}=X^{(r)}\ -$$

$$-(X^{(r+1)}-X^{(r)})\ \max\left\{\frac{g_i\ (x^{(r)})}{g_i\ (x^{(r+1)})-g_i\ (x^{(r)})}\right\}. \tag{4.59}$$

Здесь предполагается, что $X^{(0)}$ — внутренняя точка и, следовательно, $X^{(0)}$ должно быть также задано внутренней точкой.

Особым случаем является задача с нелинейными ограничениями в виде равенств. Представляется возможным сведение ее к задаче (4.46)—(4.48).

Пусть ограничения задачи имеют вид

$$g_i\ (X)=0,\ i=\overline{1,\ m}. \tag{4.60}$$

Запишем новые ограничения:

$$g_i\ (X) \leqslant \varepsilon,\ i=\overline{1,\ m}; \tag{4.61}$$

$$-g_i\ (X) \leqslant \varepsilon,\ i=\overline{1,\ m}; \tag{4.62}$$

$$\varepsilon > 0. \tag{4.63}$$

Неравенства (4.61)—(4.63) описывают область, включающую в себя допустимые точки (4.60). Погрешность решения при замене (4.60) на (4.61)—(4.63) определяется величиной ε.

4.2.3. Нелинейные ограничения (4.44), (4.45) задачи (4.39)—(4.45) могут быть при решении учтены штрафными функциями, сведением проблемы к задаче безусловной оптимизации. Идеи метода принадлежат Р. Курант [136].

Безусловная оптимизация использует преобразование задачи с ограничениями в последовательность задач минимизации без ограничений. Это преобразование выполняется построением соответствующей вспомогательной функции, которая выражается через функции задачи и определяет новую целевую функцию, линейно зависимую от весовых параметров ограничений. Постепенно меняя параметры и тем самым увеличивая влияние ограничений на вспомогательную функцию, можно получить последовательность задач без ограничений, решения которых сходятся к решению исходной задачи. Оптимизация в процессе приближений ведется последовательным адаптивным случайным поиском.

Преобразуем задачу (4.39)—(4.45). Введем нелинейные ограничения $g_{\xi t}$ и e_{jt} в критерий задачи. В результате получаем преобразованную задачу

$$\min\ [\sum_{i=1}^{m} c_i\ b_{i(\psi)} + \sum_{\xi=1}^{x}\sum_{t=1}^{p} \Gamma_{\xi t}\ g_{\xi t}^{(2)}\ \Phi_{\xi}^{(t)} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{p} \Gamma_{jt}\ e^2_{jt}\ ] \tag{4.64}$$

$$\frac{1}{R_i\ \mu_i^{(1)}}\ |a_i^{(1)} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j^{(1)}| + \mu_i^{(1)}\ A_i\ \Phi_i\ R_i$$

$$\frac{1}{R_i\ \mu_i^{(2)}}\ |a_i^{(2)} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j^{(2)}| + \mu_i^{(2)}\ A_i\ \Phi_i\ R_i \leqslant b_i,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{R_i\ \mu_i^{(p)}}\ |a_i^{(p)} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j^{(p)}| + \mu_i^{(p)}\ A_i\ \Phi_i\ R_i$$

$$i=\overline{1,\ m}; \tag{4.65}$$

$$b_i \in \{b_\psi\},\ i=\overline{1,\ m}; \tag{4.66}$$

$$0<\mu_i^{(t)} \leqslant 1,\ i=\overline{1,\ m},\ t=\overline{1,\ p}\ ; \tag{4.67}$$

$$\Phi_i^{(t)}=\begin{cases} 0 \text{ при } a_i^{(t)}+\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^{(t)}\ x_j^{(t)} \geqslant 0, & i=\overline{1,\ m}, \\ 1 \text{ при } a_i^{(t)}+\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^{(t)}\ x_i^{(t)} <0, & t=\overline{1,\ p}; \end{cases} \tag{4.68}$$

$$\Phi_\xi^{(t)}=\begin{cases} 0 \text{ при } g_{\xi t}<0, \\ 1 \text{ при } g_{\xi t} \geqslant 0, \end{cases} \quad \xi=\overline{1,\ \varkappa},\ t=\overline{1,\ p}; \tag{4.69}$$

где $\Gamma_{\xi t}$ и Γ_{jt} — положительные коэффициенты.

При вычислении минимизируемой функции влияние какой-либо связи, заданной неравенством, исключается, если уравнение связи удовлетворяется, и растет, если оно нарушается.

Нарушение равенств и неравенств в процессе счета штрафуется возрастанием критерия качества на величину, пропорциональную квадрату невязки. При достаточно больших положительных $\Gamma_{\xi t}$ и Γ_{jt} решение задачи (4.64)—(4.69) будет стремиться к желаемому решению задачи (4.39)—(4.45).

Выбор значений $\Gamma_{\xi t}$ и Γ_{jt} должен делаться по степени приближения к уравнениям и неравенствам связей. Из работы [44] следует, что отклонения от ограничений изменяются обратно пропорционально коэффициентам $\Gamma_{\xi t}$ и Γ_{jt}. В качестве величины, характеризующей необходимость увеличения или уменьшения текущих значений коэффициентов, может быть принято отношение отклонения к допустимому отклонению.

Использование штрафных функций хорошо сочетается с процессом последовательных приближений. Для машинных решений возможно сравнение степени нарушения ограничений в конце каждого шага спуска, причем в случае необходимости коэффициенты $\Gamma_{\xi t}$ и Γ_{jt} для следующего шага могут изменяться соответствующим образом.

§ 4.3. Модулярная формализация и расчет статически неопределимых ферм

Статически неопределимые фермы широко применяются в промышленном и гражданском строительстве. Возможность варьирования усилий в стержнях статически неопределимых ферм делает эти системы очень гибкими, так как позволяет наивыгоднейшим образом перераспределять материал в конструкции с учетом экономических, технологических и эксплуатационных требований. Вместе с тем современная теория расчета ферм в модулярной формулировке дает достаточно надежные способы их оптимального решения и создает реальные предпосылки для снижения веса ферм (объема).

4.3.1. Рассмотрим задачу оптимального расчета статически неопределимой фермы.

Сформулируем исследуемую задачу физически. По заданному очертанию и длинам стержней статически неопределимой фермы, при заданных действующих на ферму постоянных и временных нагрузках, приложенных в ее узлах, требуется определить размеры площадей сечений стержней. При этом требуется, чтобы ни в одном из стержней напряжения не превосходили допускаемых и чтобы объем спроектированной фермы был оптимальным.

При решении поставленной задачи принят ряд ограничений.

Предполагается, что величины и направления действующих сил вполне определенны, и ферма имеет конкретные опорные закрепления.

Поперечные сечения стержней фермы ограничиваются некоторыми предельными размерами из предположения, что конструктивно нельзя назначить в стержне меньшую площадь.

Возможность возникновения продольного изгиба учитывается снижением напряжения в сжатых стержнях. Форма сечений стержней предполагается заданной.

Влияние динамических нагрузок на ферму не учитывается, а действие внешних нагрузок всюду предполагается статическим.

Материал фермы — сталь.

При решении задачи исходим из недеформированного состояния конструкции, пренебрегая размером деформации при определении усилий в стержнях.

Сформулируем задачу математически. Минимизируется функция объема фермы на множестве ограничений, включающих в себя условия прочности, устойчивости и дискретности, условия жесткости и совместности деформаций.

Задача нелинейна и невыпукла. Метод ее решения — последовательные приближения. Многоэкстремальность задачи накладывает жесткие требования на последовательность приближений, так как в общем случае решение приводит к одному из локальных минимумов в зависимости от выбора начальной точки.

Приближения строятся на сужающейся области ограничений, с постепенным введением ограничений в порядке возрастания их сложности по отношению к критерию качества или определяющим его свойствам. Исследуемая задача распадается на ряд задач, в каждой из которых решается лишь часть общей проблемы, а полученное решение используется как приближение последующей задачи с большим числом ограничений. Такой процесс вычислений позволяет изолировать наиболее отдаленные локальные минимумы и удержать решение в оптимальной области.

Перейдем к детальной формализации задач приближений.

Из теоремы М. Леви следует, что наименьший объем имеет равнопрочная ферма [155]. Распределение материала в такой ферме наивыгоднейшее.

В статически неопределимых фермах равнопрочность осуществима лишь в частных случаях. Однако в силу принятого критерия минимизации желательно получить решение поставленной задачи как можно ближе к решению равнопрочной фермы наименьшего объема. Поэтому представляется естественным принять за основу подразделения прочностные ограничения, а остальные расценивать как поправочные к ним.

Выделим задачу первого приближения, включающую только прочностные ограничения,

$$\min \left\{ \begin{array}{c} \left| s_i^{(1)} + \sum\limits_{j=1}^{n} s_{ij} \quad x_j^{(1)} \right| \\ \hline\hline \left| s_i^{(2)} + \sum\limits_{j=1}^{n} s_{ij} \quad x_j^{(2)} \right| \\ \hline\hline \cdots\cdots\cdots \\ \hline\hline \left| s_i^{(p)} + \sum\limits_{j=1}^{n} s_{ij} \quad x_j^{(p)} \right| \end{array} \right\}_{i=1}^{m} \frac{l_i}{R_i} \qquad (4.70)$$

Здесь p — число независимых загружений фермы. Многострочная аут-форма под знаком суммы означает, что усилие в стержне меняется по закону строки с максимальным значением; $s_i^{(t)}$ и s_{ij} — усилия в стержнях фермы соответственно от внешнего нагружения и единичных лишних неизвестных; l_i — длина стержней; R_i — расчетные сопротивления в стержнях; m — число стержней; n — число лишних неизвестных; $x_j^{(t)}$ — усилия в лишних стержнях, $j=\overline{1, n}$; $t=\overline{1, p}$.

Задачи второго и третьего приближений строятся введением в задачу (4.70) ограничений с сепарабельными связями по прочности. Локальность по прочности одного из стержней в этих задачах не отражается на прочности остальных стержней.

Задача второго приближения получается из первой включением условий устойчивости, являющихся односторонними ограничениями прочности отдельных стержней.

Сформулируем задачу второго приближения, используя зависимости учета устойчивости стержней по А. Ш. Арсланову [5]:

$$\min \left\{ \begin{array}{c} \left| s_i^{(1)} + \sum\limits_{j=1}^{n} s_{ij} \quad x_j^{(1)} \right| \cdot \frac{1}{R_i} + A_i R_i l_i \frac{\Phi_i^{(1)}}{\kappa} \\ \hline\hline \left| s_i^{(2)} + \sum\limits_{j=1}^{n} s_{ij} \quad x_j^{(2)} \right| \cdot \frac{1}{R_i} + A_i R_i l_i \frac{\Phi_i^{(2)}}{\kappa} \\ \hline\hline \cdots\cdots\cdots \\ \hline\hline \left| s_i^{(p)} + \sum\limits_{j=1}^{n} s_{ij} \quad x_j^{(p)} \right| \cdot \frac{1}{R_i} + A_i R_i l_i \frac{\Phi_i^{(p)}}{\kappa} \end{array} \right\}_{i=1}^{m} \cdot l_i,$$

если

$$\Phi_i^{(t)} = \begin{cases} 1 \text{ при } (s_i^{(t)} + \sum_{j=1}^{n} s_{ij} \quad x_j^{(t)}) < 0, \\ 0 \text{ при } (s_i^{(t)} + \sum_{j=1}^{n} s_{ij} \quad x_j^{(t)}) \geqslant 0, \end{cases} \quad i = \overline{1, m}, \; t = \overline{1, p}. \tag{4.72}$$

Здесь κ — коэффициент формы сечения, равный отношению квадрата радиуса инерции сечения к его площади r^2/F. Для спаренных углов по ГОСТ 8509—72, 8510—72 коэффициент, обработанный методом средних, равен: для равнополочных уголков — $0{,}552^2$; для уголков с общей длинной полкой — $0{,}667^2$; для уголков с общей короткой полкой — $0{,}383^2$. Коэффициент

$$A_i \quad \frac{0{,}4\, l^2_i}{2{,}1}.$$

Как только в стержне появится сжимающее усилие, для него требуется дополнительный объем во избежание потери устойчивости — в этом сущность методики учета устойчивости стержней. Включение дополнительного объема вместе с основным объемом при различных значениях сжимающего усилия и есть введение соответствующего коэффициента продольного изгиба.

Структура задачи (4.71), (4.72) — линейно модулярная, с фиксированными добавками, т. е. близка к структуре задачи первого приближения [5].

Задача третьего приближения получается из задачи (4.71), (4.72) включением условий дискретности сортамента, которые можно расценивать как двусторонние ограничения прочности отдельных стержней.

Выбор площадей поперечных стержней при проектировании во многих случаях производится не из непрерывного множества, а из определенного ряда дискретных значений, определяемых либо ГОСТом сортамента, либо экономическими и технологическими соображениями; возникает задача оптимизации по дискретному множеству.

Практически такие задачи решают, допуская непрерывное изменение переменных. Однако подобное сглаживание может оказать серьезное влияние на точность решения. Поэтому дискретность переменных надо учитывать в процессе приближений.

Сформулируем задачу третьего приближения:

$$\min \sum_{i=1}^{m} F_{i(\psi)}\, l_i \tag{4.73}$$

при условии, если

$$\left| s_i^{(1)} + \sum_{j=1}^{n} s_{ij} \quad x_j^{(1)} \right| \cdot \frac{1}{\mu_i^{(1)} R_i} + A_i \; R_i \; \mu_i^{(1)} \; l^2_i \; \frac{\Phi_i^{(1)}}{\kappa}$$

$$\left| s_i^{(2)} + \sum_{j=1}^{n} s_{ij} \quad x_j^{(2)} \right| \cdot \frac{1}{\mu_i^{(2)} R_i} + A_i \; R_i \; \mu_i^{(2)} \; l^2_i \; \frac{\Phi_i^{(2)}}{\kappa} \leqslant F_i, \; i = \overline{1, m};$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\left| s_i^{(p)} + \sum_{j=1}^{n} s_{ij} \quad x_j^{(p)} \right| \cdot \frac{1}{\mu_i^{(p)} R_i} + A_i \; R_i \; \mu_i^{(p)} \; l^2_i \; \frac{\Phi^{(p)}}{\kappa} \tag{4.74}$$

$$\Phi_i^{(t)} = \begin{cases} 1 \text{ при } (s_i^{(t)} + \sum_{j=1}^{n} s_{ij} \quad x_j^{(t)}) < 0, \\ 0 \text{ при } (s_i^{(t)} + \sum_{j=1}^{n} s_{ij} \quad x_j^{(t)}) \geqslant 0, \end{cases} \quad i = \overline{1, m}, \; t = \overline{1, p}; \tag{4.75}$$

$$F_i \in \{F_\psi\}, \; i = \overline{1, m}; \tag{4.76}$$

$$0 \leqslant \mu_i^{(t)} \leqslant 1, \; i = \overline{1, m}, \; t = \overline{1, p}. \tag{4.77}$$

Здесь $F_{i(\psi)}$ — площадь поперечного сечения стержня, выбираемая из ряда сортамента

$$F_1, F_2, \ldots, F_{\psi-1}, F_\psi, \ldots, F_\nu$$

по соотношению если

$$F_{\psi-1} < F_i < F_\psi \text{, то } F_{i(\psi)} = F_\psi .$$

$\mu_i^{(t)}$ — коэффициент снижения напряжений в стержнях.

Структура задачи (4.73)—(4.77) — модулярная, с фиксированными добавками, ступенчатая, т. е. близка к структуре задачи второго приближения.

Задачи четвертого и пятого приближений строятся введением многосвязных нелинейных ограничений.

Задача четвертого приближения получается из третьей введением ограничений жесткости, являющихся нестрогими ограничениями прочности групп стержней. Нестрогие ограничения, как правило, шире строгих ограничений аналогичной структуры.

Сформулируем задачу четвертого приближения:

$$\min \sum_{i=1}^{n} F_{i(\psi)}\, l_i \tag{4.78}$$

при условии, что

$$\left|s_i^{(1)} + \sum_{j=1}^{n} s_{ij}\, x_j^{(1)}\right| \cdot \frac{1}{\mu_i^{(1)} R_i} + A_i R_i \mu_i^{(1)} l_i^2 \frac{\Phi_i^{(1)}}{\kappa}$$

$$\left|s_i^{(2)} + \sum_{j=1}^{n} s_{ij}\, x_j^{(2)}\right| \cdot \frac{1}{\mu_i^{(2)} R_i} + A_i R_i \mu_i^{(1)} l_i^{(2)} \frac{\Phi_i^{(1)}}{\kappa} \leqslant F_i,\ i=\overline{1,m}; \tag{4.79}$$

. . . . . .

$$\left|s_i^{(p)} + \sum_{j=1}^{n} s_{ij}\, x_j^{(p)}\right| \cdot \frac{1}{\mu_i^{(p)} R_i} + A_i R_i \mu_i^{(r)} l_i^2 \frac{\Phi_i^{(r)}}{\kappa}$$

$$\Phi_i^{(t)} = \begin{cases} 1 \text{ при } \left(s_i^{(t)} + \sum_{j=1}^{n} s_{ij}\, x_j^{(t)}\right) < 0, & i=\overline{1,m}, \\ 0 \text{ при } \left(s_i^{(t)} + \sum_{j=1}^{n} s_{ij}\, x_j^{(t)}\right) \geqslant 0, & t=\overline{1,p}, \end{cases} \tag{4.80}$$

$$F_i \in \{F_\psi\},\ i=\overline{1,m}; \tag{4.81}$$

$$0 < \mu_i^{(t)} \leqslant 1,\ i=\overline{1,m},\ t=\overline{1,p}; \tag{4.82}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \left(s_i^{(t)} + \sum_{j=1}^{n} s_{ij}\, x_j^{(t)}\right) \frac{1}{F_{i(\psi)}}\, s_{i\xi}\, l_i \leqslant f_\xi,\ \xi=\overline{1,\varkappa},\ t=\overline{1,p}. \tag{4.83}$$

Здесь $s_{i\xi}$ — усилие от единичной нагрузки по направлению ограничения перемещения; $\varkappa$ — число ограничений на перемещения.

Задача пятого приближения получается из задачи (4.78)—(4.83) введением ограничений совместности деформаций, являющихся строгими нелинейными ограничениями прочности групп стержней, т. е. наиболее сложными ограничениями исследуемой задачи.

Сформулируем задачу пятого приближения:

$$\min \sum_{i=1}^{m} F_{i(\psi)}\, l_i \tag{4.84}$$

при условии, что

$$\left|s_i^{(1)} + \sum_{j=1}^{n} s_{ij}\, x_j^{(1)}\right| \cdot \frac{1}{\mu_i^{(1)} R_i} + A_i \mu_i^{(1)} R_i l_i^2 \frac{\Phi_i^{(1)}}{\kappa}$$

$$\left|s_i^{(2)} + \sum_{j=1}^{n} s_{ij}\, x_j^{(2)}\right| \cdot \frac{1}{\mu_i^{(2)} R_i} + A_i \mu_i^{(1)} R_i l_i^{(2)} \frac{\Phi_i^{(1)}}{\kappa} \leqslant F_i,\ i=\overline{1,m};$$

. . . . . .

$$\left|s_i^{(r)} + \sum_{j=1}^{n} s_{ij}\, x_j^{(r)}\right| \cdot \frac{1}{\mu_i^{(p)} R_i} + A_i \mu_i^{(p)} R_i l_i^{(p)} \frac{\Phi_i^{(p)}}{\kappa} \tag{4.85}$$

$$\Phi_i^{(t)} = \begin{cases} 1 \text{ при } (s_i^{(t)} + \sum_{j=1}^{n} s_{ij} \; x_j^{(t)}) < 0, \\ 0 \text{ при } (s_i^{(t)} + \sum_{j=1}^{n} s_{ij} \; x_j^{(t)}) \geqslant 0, \end{cases} \quad i=\overline{1, m}, \; t=\overline{1, p}; \tag{4.86}$$

$$F_i \in \{F_\psi\}, \; i=\overline{1, m}; \tag{4.87}$$

$$0 < \mu_i^{(t)} \leqslant 1, \; i=\overline{1, m}, \; t=\overline{1, p}; \tag{4.88}$$

$$\sum_{i=1}^{m} (s_i^{(t)} + \sum_{j=1}^{n} s_{ij} \; x_j^{(t)}) \; \frac{1}{F_{i(\psi)}} \; s_{i\xi} \; l_i \leqslant$$

$$\leqslant f_\xi, \; \xi=\overline{1, x}, \; t=\overline{1, p}; \tag{4.89}$$

$$\sum_{i=1}^{m} (s_i^{(t)} + \sum_{j=1}^{n} s_{ij} \; x_j^{(t)}) \; \frac{1}{F_{i(\psi)}} \; s_{ij} \; l_i = 0,$$

$$j=\overline{1, n}, \; t=\overline{1, p}. \tag{4.90}$$

Задача (4.84)—(4.90) — достаточно общая проблема расчета фермы в терминах модулярных форм.

Каждая из задач приближений составляет самостоятельную задачу минимизации модулярных форм, а способы ее решения зависят от размеров задачи и применяемых вычислительных средств.

4.3.2. Конкретизируем задачу в виде расчета стропильной ферменной конструкции, изображенной на рис. 14. Пролет фермы 18 м. Статическая нагрузка состоит из неравномерной нагрузки покрытия по верхнему поясу, составляющей 500 кН, и собственной массы фермы. К нижнему поясу крепятся пути для трехопорной кран-балки, дающей четыре комбинации временных нагрузок, действующих на ферму.

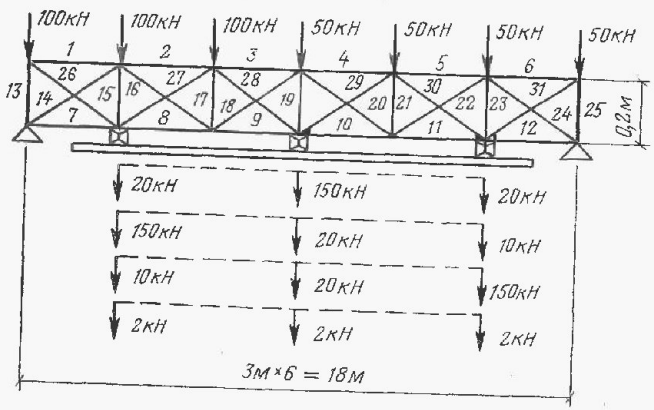


Рис. 14.

Максимальный допустимый прогиб посредине фермы принят равным 1/600 пролета. Сечения стержней подбираются из сортамента равнополочных уголков ГОСТ 8509—72. Профиль сечения выполняется в виде тавра из двух уголков. Расчетное сопротивление $R=2{,}1$ Н/м², конструктивный коэффициент равен 1,22. Предельные гибкости для сжатых стержней поясов, опорных стоек и раскосов приняты равными 120, для прочих сжатых элементов фермы — 150, для растянутых стержней поясов — 400, для остальных растянутых стержней гибкости не ограничивались.

Задача решалась в терминах модулярных форм на ЭЦВМ М-220. Метод решения — последовательный адаптивный случайный поиск с использованием штрафных функций.

Программа составлена на языке «АЛГОЛ-60» и позволяет рассчитывать фермы с параметрами $m\,n\,t\,p \leqslant 810$.

Операторы программы составлены как функции исходных данных: констант и массивов, приведенных на с. 148—153, позволяющих изменять схему фермы и схему нагрузки. Программа предусматривает также модификации схемы фермы вследствие отбрасывания лишних стержней, описание изменений при модификациях дано на с. 156.

ПРОГРАММА

```
begin comment минимизация объема статически неопределимой
фермы;
real СОСТ, ZY, DZ, Ш, GGH, KGG, EEH, Z, EEI, GGI, 31, W, ФИ,
СЛ, Q1;
real Q2, DQ, M1, M2, DM, MMM, EE, GG, UU, EEH, UUH, C, VR;
real DELTAX, DELTAY, WI, AIK, AC;
integer I, J, K, N, M, P, T, S, ПСИ, КНИХ, ПРНПР, ЮI, ПALFA,
ПГЕ, РАЗН;
integer H, КИ, НК, Ю, КИХ, КНИУ;
integer Ф1, Ф2;
integer ПР;
boolean Ф, Ф3;
comment при каждом новом варианте необходимо менять следую-
щую строку (M, E, N, M, P, T, S, E, VR);
Ю := 0;
```

```
Ю1 : =1;
M2 : =10^8;
M : =31; T : =1; S : =75; C : =2,1; N : =6; P : =4; VR : =60;
MMM:=10^5;
HK:=M—N—3;
W:=KGG:=1;
P00042 (КИ, КИХ);
P1147 (ФИ);
begin array АП [1 : HK+1, 1 : HK+P];
P0042 (АП); P1024 (1, АП);
P0737 (true, 1, АП) end;
begin array РП [1 : HK, 1 : P], ДП [1 : HK, 1 : M];
P0042 (РП, ДП);
for H : =1 step 1 until HK do
for 1 : =1 step 1 until M do begin ДП [H, 1] : =ДП [H, 1]×4.72_10—4;
comment строки *, **, *** заполняются при изменении структуры
фермы путем отбрасывания стержней;
*
end;
P1024 (1, РП, ДП);
P0737 (true, 2, РП); P0737 (true, 3, ДП);
end;
begin array YI [1 : M, 1 : P], XI [1 : N, 1 : P], DHOB [1: M];
array DY2 [1 : M];
array EY [1 : P, 1 : N], GY [1 : P, 1 : T];
array BETA [1 : M, 1 : P];
array Ы [1 : N, 1 : P];
array ABX [1 : M, 1 : P];
for J : =1 step 1 until N do
for K : =1 step 1 until P do Ы [J, K] : =0;
begin array Y2 [1 : M, 1 : P], X2 [1 : N, 1 : P], D [1 : S], L [1 : M];
array NN [1 : M, 1 : 2], B [1 : M, 1 : N];
array BB [1 : M, 1 : T], AA [1 : M];
P0042 (B, AA, BB, L, D, NN);
**
***
P1024 (1, B, AA, BB, L, D, NN);
for 1 : =1 step 1 until S do D [1] : =D [1]×2;
for 1 : =1 step 1 until M do
for K : =1 step 1 until P do
begin Y2 [1, K] : =Y1 [1, K] : =1 end;
for J : =1 step 1 until N do
for K : =1 step 1 until P do
X1 [J, K] : =X2 [J, K] : =0;
for 1 : =1 step 1 until M do DHOB [1] : =D [1];
P0737 (true, 4, D); P0737 (true, 5, L); P0737 (true, 6, NN);
P0737 (true, 7, BB); P0737 (true, 8, AA); P0737 (true, 9, B);
end БЛОК 2;
comment начало циклической части;
НАЧМИН:;
begin array AP [1 : HK, 1 : P];
begin array РП [1 : HK, 1 : P], ДП [1 : HK, 1 : M];
P0737 (false, 2, РП); P0737 (false, 3, ДП);
for K : =1 step 1 until P do
for H : =1 step 1 until HK do
```



```
begin 31 : =0;
for 1 : =1 step 1 until M do 31 : =31+ДП [H, 1]×DHOB [1];
AP [H, K] : =РП [H, K]+31.
end H;
end;
begin
array A [1 : HK+1, 1 : HK+P];
P0737 (false, 1, A);
for H : =1 step 1 until HK do
for K : =1 step 1 until P do
A [H, HK+K] : =AP [H, K];
P1052 (HK+P, HK, A);
for K : =1 step 1 until P do
for H : =1 step 1 until HK do
begin P0105 (054, 0101, A [H, HK+K], A [H, HK+K]);
P0105 (054, 0077, A [H, HK+K], A [H, HK+K]) end;
for I : =1 step 1 until HK do
for J : =1 step 1 until P do
AP [I, J] : =A [I, HK+J];
end БЛОК 4;
begin array Y2 [1 : M, 1 : P], X2 [1 : N, 1 : P], D [1 : S], L [1 : M],
E [1 : P, 1 : N];
array G [1 : P, 1 : N], NN [1 : M, 1 : 2], BB [1 : M, 1 : T], B [1 : M, 1 : N],
AA [1 : M];
real procedure Q;
begin real SUM, MAX, SUMQ, F, 31;
SUMQ : =0;
begin
MAX:=—10^8;
for K : =1 step 1 until P do
begin SUM : =0;
for J : =1 step 1 until N do
SUM : =SUM+B [I, J]×X2 [J, K];
31 : =Y2 [I, K];
AIK : =if I>M—N then 0 else AP [I, K]; AC : =AIK+SUM;
F : =ABS (AC)/31/C+AA [I]×31×ПALFA (if AC не меньше 0
then 0 else 1);
if MAX<F then MAX : =F;
end;
SUMQ : =SUMQ+MAX×L [I]
end;
Q : =SUMQ;
end;
real procedure MM;
begin real DMAX, SUM, 31, 32, F, 33, SUM2, 34,
integer ALFA, I, J, K, ПСИ;
comment вычисление Z;
Z : =0; 33 : =D [I];
for I : =1 step 1 until M do
begin 32 : =AA [I];
DMAX : =—10^18;
for K : =1 step 1 until P do
begin SUM : =if I>M—N then 0 else AP [I, K];
for J : =1 step 1 until N do
```

```
SUM : =SUM+B [I, J]×X2 [J, K];
BETA [I, K] : =SUM;
31 : =Y2 [I, K];
ALFA : =if SUM не меньше 0 then 0 else;
F : =ABS (SUM)/C/31+ALFA×32×31;
if F не больше NN [I, 2—ALFA] then F : =NN [I, 2—ALFA];
if DMAX<F then DMAX : =F;
end K;
for ПСИ : =1 step 1 until S do
begin 31 : =D [ПСИ];
if DMAX не больше 31 then
begin DMAX : =31; go to SUMZ end
end ПСИ;
for ПСИ : =D [S], ПСИ+33 while ПСИ<10^16 do
if DMAX не больше ПСИ then
begin DMAX : =ПСИ; go to SUMZ end;
P0165 (1, EQV'50F велико //////××');
stop;
SUMZ : Z : =Z DMAX×L [I];
DHOB [I] : =DMAX;
end I;
comment вычисление EE
SUM2 : =0; EE : =0;
for K : =1 step 1 until P do
for J : =1 step 1 until N do
begin SUM : =0;
for I : =1 step 1 until M do
begin 31 : =BETA [I, K];
SUM : =SUM+31/DHOB [I]×L [I]×B [I, J];
end I;
E [K, J] : =SUM;
if ABS (SUM)<10^—3 then SUM : =sign (SUM)×10^—3;
EE : =EE+W×QI×SUM×SUM/(N×P+P×T)×ПГЕ;
end J;
comment вычисление GG;
SUM2 : =0; GG : =0;
for K : =1 step 1 until P do
for R : =1 step 1 until T do
begin SUM : =—VR;
for I : =1 step 1 until M do
begin 31 : =BETA [I, K];
SUM : =SUM+31/DHOB [I]×BB [I, R]×L [I];
end I;
G [K, R] : =SUM;
if ABS (SUM)<10^—3 then SUM : =sign (SUM)×10^—3;
GG : =GG+W×QI×SUM×SUM×(1+sign (SUM))/2/(N×P+P×
×T);
end R;
ПРНПР : =1;
comment вычисление MM;
KGG : =if GGI=0 then 1000 else KGG;
MM : =Z+EE+KGG×GG;
end procedure MM;
procedure ПЕРЕСЧЕТХ
begin integer K, J, JI: real SUM;
```



```
for J : =1 step 1 until N do
for K : =1 step 1 until P do
begin SUM : =0;
for JI : =1 step 1 until N do
SUM : =SUM+B [M—N+J, JI]×X2 [JI, K]; JI : =M—N+J;
if L [JI]=0 then X2 [J, K] : =0 else
X2 [J, K] : =—DY2 [JI]/B [JI, J]/L [JI]×(EY [K, J]—SUM×B [JI, J]×
×L [JI]/DY2 [JI]);
end K;
for J : =1 step 1 until N do
for K : =1 step 1 until P do
begin Ы [J, K] : =X2 [J, K]—X1 [J, K];
end.
Ш : =0;
end ПЕРЕСЧЕТХ;
for I : =1 step 1 until M do
for K : =1 step 1 until P do
Y2 [I, K] : =Y1 [I, K];
for J : =1 step 1 until N do
for K : =1 step 1 until P do X2 [J, K] : =X1 [J, K];
P0737 (false, 4, D); P0737 (false, 5, L); P0737 (false, 6, NN);
P0737 (false, 7, BB); P0737 (false, 8, AA); P0737 (false, 9, B);
ifЮ≠0 then go to ПОДГМИНУ;
ПALFA : =0; ПОДГМИНХ;
for J : =1 step 1 until N do
for K : =1 step 1 until P do X2 [J, K] : =X1 [J, K];
КНИХ : =0; ПР : =0; DELTAX : =1; Q1 : =Q;
comment минимизация по вектору X;
МИНХ : ;
for J : =1 step 1 until N do
for K : =1 step 1 until P do
begin P1147 (ФИ, СЛ);
Ы [J, K] : =X3 [J, K]—(X2 [J, K]—X1 [J, K])×sign (DQ);
if Ы [J, K]<—1 then Ы [J, K] : =—1;
if Ы [J, K]>1 then Ы [J, K] : =1;
X2 [J, K] : =X1 [J, K]+DELTAX×(sign (Ы [J, K]+(2×СЛ-1))) end;
Q2 : =Q;
DQ : =Q2—Q1;
if DQ<0 then
begin КНИХ : =0; ПР; =1; Q1 : =Q2;
for J : =1 step 1 until N do
for K : =1 step 1 until P do
X1 [J, K] : =X2 [J, K];
DELTAX : =DELTAX×Q2/(Q2+DQ); go to МИНХ
end;
if DQ>0 then
DELTAX : =if DELTAX>1 then DELTAX×Q2/(Q2+DQ) else 1;
КНИХ : =КНИХ+1;
if КНИХ<КИХ then go to МИНХ;
P0165 (1, EQV'50Q//××')
P1041 (Q1);
if ПALFA=0 then begin ПALFA : =1;
P0165 (1, FQV' 50ПALFA=0 / / / / ××';
```

```
go to ПОДГМИНХ end;
comment подготовка к минимизации по вектору Y;
ПГЕ : =0; ПОДГМИНУ : ;
ПРНПР : =0;
Ф3 : =true; Ш : =0;
ПР : =0;
for I : =1 step 1 until M do
for K : =1 step 1 until P do Y2 [I, K] : =Y1 [I, K];
for J : =1 step 1 until N do
for K : =1 step 1 until P do
X2 [J, K] : =X1 [J, K];
КНИУ : =0; DELTAY : =0.1; Ф : =falsh; Ф1 : =Ф2 : =0;
ifЮ=0 or ЮI=0 then begin
MI : =MM;
ZY : =Z;
EEI=EE; GGI : =GG;
for K : =1 step 1 until P do begin
for J : =1 step 1 until N do EY [K, J] : =E [K, J];
for R : =1 step 1 until T do GY [K, R] : =G [K, R];
end K;
for I : =1 step 1 until M do DY2 [I] : =DHOB [I];
end Ю;
comment минимизация по векторам X и Y;
MINY : ;
if Ф then begin
for I : =1 step 1 until M do
for K : =1 step 1 until P do
begin P1147 (ФИ, СЛ);
if GG : =0 then Y2 [I, K] : =Y2 [I, K]+DELTAY×sign ((Y1 [I, K]—
—Y2 [I, K])×sign (DM)+(2×СЛ—1)) else Y2 [I, K] : =Y1 [I, K]+
+DELTAY×sign ((Y1 [I, K]—Y2 [I, K])×sign (DM)+(2×СЛ—1)×
×Ш/(Ш+1)—DELTAY (1+sign (G [K, I]))/2×sign (BETA [I, K]/
DHOB [I]×BB [I, I]×L [I])/(Ш+1).
if Y2 [I, K]>1 then Y2 [I, K] : =1;
if Y2 [I, K]<0.2 then Y2 [I, K] : =0.2;
end;
Ш : =Ш+1;
Ф1 : =Ф1+1; go to ВЫЧМ2;
ifФ3 then Ш : =0;
for J : =1 step 1 until N do
for K : =1 step 1 until P do
begin P1147 (ФИ, СЛ); Ы [J, K] : =Ы [J, K]—(X2 [J, K]—X1 [J, K])×
×sing (DM)×Ш/(Ш+1); X2[J, K] : =X1 [J, K]+Ы [J, K]/(Ш+1)+
+DELTAX×sign (X3 [J, K]+(2×СЛ-1))×Ш/(Ш+1) end;
if Ы [J, K]<—1 then Ы [J, K] : =—1;
if Ы [J, K]>1 then Ы [J, K] : =1;
Ш : =Ш+1;
Ф2 : =Ф2+1;
Ф3 : =false;
ВЫЧМ2 : ;
M2 : =MM;
DM : =M2—M1;
if DM<0 then begin КНИУ : =0; ПР : =1; M1 : =M2;
EE1 : =EE; GG1 : =GG;
ZY : =Z
```



```
DELTAX : =if DELTAX>1 then DELTAX×M2/(M2+DM) else 1;
for J : =1 step 1 until N do
for K : =1 step 1 until P do X1 [J, K] : =X2 [J, K];
for I : =1 step 1 until M do
for K : =1 step 1 until P do
Y1 [I, K] : =Y2 [I, K];
for K : =1 step 1 until P do
begin for J : =1 step 1 until N do EY [K, J] : =E [K, J];
for R : =1 step 1 until T do GY [K, R] : =G [K, R];
end K;
for I : =1 step 1 until M do DY2 [I] : =DHOB [I];
go to MINY
end;
Ф : =notФ; ifФthen begin ifФ1≠1 or Ф2≠1 then
begin Ф1 : =Ф2 : =0; go to MIHY end end;
КНИУ : =КНИУ+1;
Ф1 : =Ф2 : =0;
if КНИУ<КИ then go to MIHY;
for I : =1 step 1 until M do
for K : =1 step 1 until P do
Y2 [I, K] : =Y1 [I, K];
for J : =1 step 1 until N do
for K : =1 step 1 until P do X2 [J, K] : =X1[J, K];
P0165 (1, //// EQV' 50MI Z EE GG //××');
P1041 (MI, ZY, EEI, GGI); P0165 (1,
EQV' 50EY GY //××'); P1041 (EY, GY);
P0165 (1, EQV' 50DY2 //××'); P1041 (DY2);
if ПГЕ=0 then begin ПГЕ : =1; P0165 (1,
EQV' 50ПГЕ=0 ////××');
go to ПОДГМИНУ end;
ПЕРЕСЧЕТХ;
P0165 (1, EQV' 50ABX //××');
for I : =1 step 1 until M do
for K : =1 step 1 until P do
begin ABX [I, K] : =if 1>M—N then 0 else AP [I, K];
for J : =1 step 1 until N do
ABX [I, K] : =ABX [I, K]+B [I, J]+X2 [J, K] end;
P1041 (ABX);
MMM : =MI;
ЮI : =1;
if EEI—EEII не меньше 0 then begin W : =W+0.2; ЮI : =0 end;
if (GGII≠0 or GGI≠0) and (GGI—GGII не меньше 0) then begin
KGG : =KGG+0 2; ЮI : =0 end;
P1041 (W, KGG); if ПГЕ≠0 and MI—Z не больше 0,1 then stop;
EEII : =EEI;
GGII : =GGI;
Ю : =1; go to НАЧМИН;
end БЛОК 5;
end
end;
end
```

Исходные данные.

Исходные данные представлены в обозначениях программы. Константы, соответствующие 16 строке программы;

$N=6$ — число лишних стержней. За лишние приняты 26, 27, 28, 29, 30, 31 стержни;

$M=31$ — число стержней фермы;

$T=1$ — число точек ограничения прогиба;

$P=4$ — число вариантов загружения;

$C=2{,}1$ — расчетное сопротивление на растяжение, Н/м²;

$S=75$ — число наименований сортамента;

$VR=60$ — коэффициент, соответствующий произведению допустимого прогиба на модуль продольной упругости материала.

Массивы (в квадратных скобках дано описание индексов): B [1 : 31; 1 : 6] — массив усилий в стержнях основной системы от единичных лишних неизвестных.

—0,832	0	0	0	0	0
0	—0,832	0	0	0	0
0	0	—0,832	0	0	0
0	0	0	—0,832	0	0
0	0	0	0	—0,832	0
0	0	0	0	0	—0,832
—0,832	0	0	0	0	0
0	—0,832	0	0	0	0
0	0	—0,832	0	0	0
0	0	0	—0,832	0	0
0	0	0	0	—0,832	0
0	0	0	0	0	—0,832
—0,554	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
—0,554	—0,554	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	—0,554	—0,554	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	—0,554	—0,554	0	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	—0,554	—0,554	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	—0,554	—0,554
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	—0,554
1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1

ВВ [1 : 31, 1 : 1] — массив усилий в стержнях по направлению ограничения прогибов.

0
—1,502
—1,502
—1,502
—1,502
0
0,751
0,751
2,253
2,253
0,751
0,751
0
—0,902
0
0,902
0
0,902
1
—0,902
0
0,902
0
—0,902
0
0
0
0
0
0
0
0

РП [1 : 28, 1 : 4] — массив узловых нагрузок

—10	—10	—10	—10
0	0	0	0
—10	—10	—10	—10
0	0	0	0
—10	—10	—10	—10
0	0	0	0
—10	—10	—10	—10
0	0	0	0
— 5	— 5	— 5	— 5
0	0	0	0
— 5	— 5	— 5	— 5
0	0	0	0
— 5	— 5	— 5	— 5
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
2	1	15	0,2
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
15	2	2	0,2
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
2	15	1	0,2
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

NN [1 : 31, 1 : 2] — массив допустимых гибкостей стержней		*L* [1 : 31] — массив длины стержней
21,2	2,86	3
21,2	2,86	3
21,2	2,86	3
21,2	2,86	3
21,2	2,86	3
21,2	2,86	3
21,2	2,86	3
21,2	2,86	3
21,2	2,86	3
21,2	2,86	3
21,2	2,86	3
21,2	2,86	3
7,72	2,26	2
5,3	2,26	3,6
5,3	2,26	2

NN [1 : 31, 1 : 2] — массив допустимых гибкостей стержней		*L* [1 : 31] — массив длины стержней
4,2	2,26	3,6
5,3	2,26	2
4,2	2,26	3,6
5,3	2,26	2
4,2	2,26	3,6
5,3	2,26	2
4,2	2,26	3,6
5,3	2,26	2
5,3	2,26	3,6
7,72	2,26	2
4,2	2,26	3,6
4,2	2,26	3,6
4,2	2,26	3,6
4,2	2,26	3,6
4,2	2,26	3,6
4,2	2,26	3,6

D [1 : 75] — массив площадей сечений сортамента

(начало)	(продолжение)
1,13	15,2
1,43	15,6
1,46	17,2
1,62	19,2
1,86	19,7
2,1	22,0
2,35	22,8
2,43	24,3
2,65	26,3
2,96	27,3
3,08	28,9
3,48	29,7
3,86	31,4
3,89	32,5
4,29	33,4
4,38	34,4
4,8	37,4
4,96	38,8
5,41	42,2
6,13	43,3
6,20	47,1
6,86	49,1
7,28	50,9
7,39	54,6
8,15	54,8
8,6	60,4
8,63	62,0
8,78	68,6
9,38	76,5
9,42	87,7
10,1	94,3
10,6	97,0
10,7	106,1
11,5	111,5
12,3	119,7
12,8	133,1
13,8	142,0
13,9	

AA [1 : 31] — массив фиксированных добавок площадей по условию устойчивости

11,8
11,8
11,8
11,8
11,8
11,8
11,8
11,8
11,8
11,8
11,8
11,8
5,24
4,25
5,24
4,25
5,24
4,25
5,24
4,25
5,24
4,25
5,24
4,25
4,25
4,25
4,25
4,25
4,25

Использовался транслятор *ТА-1М*, переводящий программу с языка «АЛГОЛ-60» в коды машины М-220.

Результаты получаются в следующем порядке:

MI *Z* *EE* *GG*
EY *GY*
DY2
ABX,

где *MI* — значение модифицированной функции качества;

АП [1 : 28, 1 : 28] — массив направлений стержней

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
—1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,554	1	0,554	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	—0,832	0	—0,832	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	—1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,554	1	0,554	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	—1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	—0,832	0	0,832	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	—1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,554	1	0,554	0	0	0	0
0	0	0	0	—1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	—0,832	0	—0,832	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,554	1	—1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,832	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	—1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,554	1	0,554	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	—1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	—0,832	0	0,832	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	—1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	—1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	—1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	—1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0,554	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	—1
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0,832	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

ДП [1 : 28, 1 : 31] — массив узловых характеристик

3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,6	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3,6	2	3,6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3,6	3,6	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3,6	2	3,6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	3,6	3,6	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3,6	2	3,6	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	3,6
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3,6	2	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	3,6	3,6
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	3,6	2	3,6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	3,6	3,6	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	3	3	0	0	0	0	0	0	3,6	2	3,6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	3	3	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3,6	3,6	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	2	3,6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Z — значение первого слагаемого функции *M1* (10^{-4} м^3) — объем фермы;

EE — значение второго слагаемого функции *M1* (м^2/2·10^6);

GG — значение третьего слагаемого функции *M1* (10^{-4} м^2);

EY — массив невязок условий совместимости деформаций (м/2·10^3);

GY — массив избыточной жесткости (10^{-2} м);

DY2 — массив поперечных сечений стержней (10^{-4} м^2);

ABX — массив усилий в стержнях (10 кН).

Учитывая сопоставимость стоимости затрат машинного времени на оптимизацию и выигрыша от снижения объема (веса) фермы, мы ограничиваем время поиска решения в оптимальной области получением первого локального минимума по задаче пятого приближения (4.84)—(4.90).

Просчитан ряд модификаций статически неопределимых ферм, получаемых из фермы, изображенной на рис. 14, удалением лишних стержней. Решения получены при принятых ограничениях на время поиска в оптимальной области. Общие затраты времени на решение каждой модификации не превышают двух часов.

Изменения для каждой модификации помещаются в *, **, *** строках программы. Например, для модификации с удаленными 26, 27, 28, 30, 31 стержнями эти строки заполняются следующим образом:

* **if** I=26 **or** I=27 **or** I=28 **or** I=30 **or** I=31 **then** DП [H, I] : =0;

** L [26] : =L [27] : =L [28] : =L [30] : =L [31] : =0;

*** **for** I : =1, 2, 3, 5, 6 **do for** J : =1 **step** 1 **until** M **do** B [J, I] : =0;

Схемы просчитанных модификаций представлены на рис. 15, соответствующие параметры по результатам машинных решений сведены в табл. 13—21.

Номер модификации	Объем фермы, м³	Схема модификации фермы
1	0,2916	
2	0,2936	
3	0,2955	
4	0,2974	
5	0,3020	
6	0,3029	
7	0,3036	
8	0,3176	
9	0,3256	

Рис. 15.

Таблица 13

Первая модификация (объем фермы 0,2916 м³)					
№ стержня	Площадь поперечного сечения, см²	Усилия в стержнях по вариантам нагружения, 10 кН			
		1	2	3	4
1	2,86	0,00	0,00	0,00	0,00
2	65,0	—73,47	—66,46	—59,45	—48,54
3	68,8	—75,60	—64,63	—59,68	—47,50
4	74,8	—68,46	—53,13	—59,08	—41,44
5	74,8	—65,96	—51,94	—58,95	—41,03
6	2,86	0,00	0,00	0,00	0,00
7	48,6	46,04	52,30	38,28	32,22
8	45,6	46,04	52,30	38,28	32,22
9	109,2	83,02	66,71	64,66	50,15
10	101,8	82,65	63,70	64,75	48,70
11	44,0	38,51	30,75	44,77	24,69
12	31,2	38,51	30,75	44,77	24,69
13	13,72	—10,01	—10,01	—10,01	—10,01
14	57,8	—55,34	—62,86	—46,01	—38,73
15	10,82	2,13	15,13	1,13	0,33
16	24,6	32,96	17,02	25,44	19,61
17	12,26	—11,63	— 9,00	—10,36	— 9,52
18	14,56	—11,48	— 0,29	— 6,25	— 1,93
19	20,2	12,20	2,72	2,06	0,90
20	24,6	—20,06	—14,12	— 6,97	— 9,21
21	8,58	6,87	— 5,99	— 5,29	— 5,48
22	27,6	32,99	25,47	17,05	19,63
23	7,72	2,12	1,12	15,12	0,32
24	48,6	—46,26	—36,96	—53,81	—29,68
25	7,72	— 5,01	— 5,01	— 5,01	— 5,01
26	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00
27	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00
28	5,3	2,55	— 2,20	0,26	— 1,24
29	4,2	3,00	1,42	0,15	0,49
30	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00
31	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00

Таблица 14

Вторая модификация (объем фермы 0,2936 м³)					
№ стержня	Площадь поперечного сечения, см²	Усилия в стержнях по вариантам нагружения, 10 кН			
		1	2	3	4
1	2,86	0,00	0,00	0,00	0,00
2	77,6	—71,35	—67,21	—57,80	—47,39
3	74,8	—83,26	—65,65	—64,31	—46,02
4	62,8	—72,84	—56,57	—60,06	—42,84
5	57,8	—66,17	—52,16	—59,16	—41,24
6	2,86	0,00	0,00	0,00	0,00
7	44,0	46,25	52,51	38,49	32,43
8	44,0	48,70	52,08	40,46	33,91
9	74,8	75,98	66,31	60,64	52,25
10	84,4	78,78	60,76	64,28	47,80
11	38,4	38,60	30,84	44,86	24,78
12	38,4	38,60	30,84	44,86	24,78
13	13,72	—10,01	—10,01	—10,01	—10,01
14	48,6	—55,59	—63,11	—46,26	—38,98
15	14,56	3,78	14,86	2,46	1,33
16	68,8	30,17	17,67	23,21	17,97
17	16,3	—14,99	— 9,84	—12,02	— 7,43
18	5,3	— 2,62	0,57	— 1,03	— 4,06
19	5,3	4,57	0,14	— 1,29	1,35
20	18,84	—15,14	—10,34	— 6,14	— 7,88
21	12,26	— 9,66	— 8,15	— 5,81	— 6,28
22	38,4	33,13	25,61	17,19	19,78
23	8,76	2,11	1,11	15,11	0,31
24	44,0	—46,40	—37,07	—53,92	—29,79
25	7,72	— 5,01	— 5,01	— 5,01	— 5,01
26	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00
27	5,92	— 2,94	0,51	— 2,37	— 1,77
28	27,6	11,37	— 1,36	5,44	— 3,42
29	12,26	8,01	5,30	1,07	1,92
30	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00
31	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00

Таблица 15

Третья модификация (объем фермы 0,2955 м³)					
№ стержня	Площадь поперечного сечения, см²	Усилия в стержнях по вариантам нагружения, 10 кН			
		1	2	3	4
1	2,86	0,00	0,00	0,00	0,00
2	65,0	—73,76	—66,75	—59,75	—48,83
3	62,8	—76,98	—62,23	—60,43	—48,00
4	52,6	—67,31	—52,27	—58,27	—40,93
5	74,8	—62,18	—48,92	—58,94	—38,57
6	2,86	0,00	0,00	0,00	0,00
7	38,4	46,21	52,47	38,45	32,40
8	48,6	46,21	52,47	38,45	32,40
9	101,8	82,23	66,70	64,49	50,23
10	94,2	84,34	65,09	66,10	49,74
11	38,4	42,66	34,14	45,15	27,53
12	34,4	38,64	30,88	44,90	24,83
13	13,72	—10,01	—10,01	—10,01	—10,01
14	62,8	—55,55	—63,07	—46,22	—38,94
15	7,72	2,13	16,13	1,13	0,33
16	45,6	33,11	17,16	25,58	19,75
17	12,26	—12,35	— 9,19	—10,66	— 9,66
18	9,6	—10,17	— 0,06	— 5,70	— 1,68
19	12,26	12,44	3,28	2,48	1,29
20	54,6	—21,80	—15,51	— 8,29	—10,18
21	6,96	— 3,28	— 3,10	— 4,44	— 3,19
22	30,34	28,28	21,68	16,87	16,51
23	10,82	4,80	3,29	15,29	2,12
24	48,6	—46,45	—37,12	—53,97	—29,84
25	7,72	— 5,01	— 5,01	— 5,01	— 5,01
26	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00
27	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00
28	4,7	3,86	— 1,83	0,82	— 0,99
29	4,2	1,33	0,01	— 1,10	— 0,40
30	6,96	— 4,83	— 3,91	— 0,29	— 3,24
31	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00

Таблица 16

Четвертая модификация (объем фермы 0,2974 м³)					
№ стержня	Площадь поперечного сечения, см²	Усилия в стержнях по вариантам нагружения, 10 кН			
		1	2	3	4
1	2,86	0,00	0,00	0,00	0,00
2	84,4	—73,82	—66,82	—59,81	—48,89
3	62,8	—76,48	—64,80	—60,18	—47,82
4	86,6	—66,22	—52,20	—59,21	—41,29
5	59,4	—66,22	—52,20	—59,21	—41,29
6	2,86	0,00	0,00	0,00	0,00
7	54,6	46,25	52,51	38,49	32,44
8	59,4	46,25	52,51	38,49	32,44
9	124,0	82,85	67,25	64,87	50,55
10	98,2	85,51	65,24	65,24	49,47
11	34,4	38,63	30,87	44,89	24,82
12	34,4	38,63	30,87	44,89	24,82
13	10,82	—10,01	—10,01	—10,01	—10,01
14	44,0	—55,59	—63,12	—46,27	—38,99
15	8,58	2,17	15,17	1,17	— 0,37
16	30,4	33,13	17,19	25,61	19,78
17	12,26	—11,99	— 8,88	—10,47	— 9,51
18	9,6	—10,85	— 0,52	— 6,08	— 1,98
19	24,6	13,57	3,68	2,09	1,25
20	17,56	—23,19	—15,67	— 7,24	— 9,83
21	7,72	— 5,22	— 5,22	— 5,22	— 5,22
22	38,4	33,15	25,63	17,21	19,79
23	10,82	2,10	1,10	15,10	0,30
24	48,6	—46,43	—37,11	—53,95	—29,83
25	7,72	— 5,01	— 5,01	— 5,01	— 5,01
26	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00
27	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00
28	5,3	3,19	— 2,41	0,44	— 1,29
29	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00
30	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00
31	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00

Таблица 17

Пятая модификация (объем фермы 0,3020 м³)					
№ стержня	Площадь поперечного сечения, см²	Усилия в стержнях по вариантам нагружения, 10 кН			
		1	2	3	4
1	2,86	0,00	0,00	0,00	0,00
2	98,2	—73,91	—66,90	—59,89	—48,98
3	84,4	—73,91	—66,90	—59,89	—48,98
4	84,4	—68,27	—53,19	—59,38	—41,73
5	84,4	—66,40	—52,44	—59,94	—41,53
6	2,86	0,00	0,00	0,00	0,00
7	44,0	46,28	52,54	38,52	32,46
8	30,4	46,28	52,54	38,52	32,46
9	86,6	85,70	65,42	65,42	49,65
10	109,2	83,88	64,67	65,49	49,45
11	44,0	38,79	31,03	45,05	24,97
12	39,4	38,79	31,03	45,05	24,97
13	10,82	—10,01	—10,01	—10,01	—10,01
14	44,0	—55,63	—63,15	—46,30	—39,02
15	9,6	21,20	15,12	1,12	— 0,32
16	27,6	33,20	17,25	25,68	19,84
17	10,82	—10,30	—10,30	—10,30	—10,30
18	13,72	—14,17	1,77	— 6,64	— 0,81
19	25,6	14,08	1,79	2,33	0,35
20	34,4	—20,94	—14,69	— 7,25	— 9,51
21	8,58	— 6,49	— 5,78	— 5,24	— 5,42
22	17,56	33,25	25,73	17,30	19,89
23	8,58	2,14	1,14	15,14	— 0,34
24	59,4	—46,63	—37,30	—54,15	—30,02
25	8,58	— 5,01	— 5,01	— 5,01	— 5,01
26	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00
27	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00
28	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00
29	4,2	2,18	0,90	— 0,07	0,24
30	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00
31	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00

Таблица 18

Шестая модификация (объем фермы 0,3029 м³)					
№ стержня	Площадь поперечного сечения, см²	Усилия в стержнях по вариантам нагружения, 10 кН			
		1	2	3	4
1	2,86	0,00	0,00	0,00	0,00
2	68,8	—67,81	—65,30	—54,87	—44,78
3	62,8	—76,56	—64,90	—60,30	—47,88
4	74,8	—66,35	—52,34	—59,34	—41,42
5	101,8	—66,35	—52,34	—59,34	—41,42
6	28,6	0,00	0,00	0,00	0,00
7	34,4	46,20	52,46	38,44	32,38
8	74,8	52,14	53,90	43,31	36,43
9	101,0	82,67	67,05	64,64	50,37
10	62,8	85,48	65,20	65,20	49,44
11	34,4	38,83	31,07	45,09	25,02
12	52,6	38,83	31,07	45,09	25,02
13	10,82	—10,01	—10,01	—10,01	—10,01
14	45,6	—55,53	—63,05	—46,20	—38,92
15	8,58	6,13	16,14	4,42	3,07
16	38,4	25,97	15,43	19,74	14,89
17	9,6	8,12	— 8,02	— 7,35	— 6,90
18	9,6	—10,72	— 0,36	— 5,89	— 1,86
19	24,6	13,37	3,47	1,86	1,06
20	2,02	—22,98	—15,46	— 7,04	— 9,63
21	7,72	— 5,32	— 5,32	— 5,32	— 5,32
22	57,8	33,07	25,55	17,13	19,71
23	7,72	2,13	1,13	15,13	0,33
24	52,6	—46,68	—37,35	—54,20	—30,07
25	7,72	— 5,01	— 5,01	— 5,01	— 5,01
26	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00
27	7,72	— 7,14	— 7,14	— 5,85	— 4,85
28	4,7	3,37	— 2,21	0,68	— 1,12
29	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00
30	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00
31	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00

Таблица 19

Седьмая модификация (объем фермы 0,3036 м³)					
№ стержня	Площадь поперечного сечения, см²	Усилия в стержнях по вариантам нагружения, 10 кН			
		1	2	3	4
1	2,86	0,00	0,00	0,00	0,00
2	65,0	—74,09	—67,08	—60,07	—49,16
3	84,4	—74,00	—67,08	—60,07	—49,16
4	62,8	—74,78	—56,95	—61,17	—44,19
5	77,6	—63,21	—49,90	—59,99	—39,47
6	2,86	0,00	0,00	0,00	0,00
7	30,4	46,37	52,63	38,61	32,55
8	52,6	46,37	52,63	38,61	32,55
9	124,0	85,79	65,52	65,52	49,75
10	74,8	77,49	61,03	63,82	47,11
11	39,4	42,12	33,65	44,59	27,11
12	45,6	38,85	31,09	45,11	25,03
13	12,26	—10,01	—10,01	—10,01	—10,01
14	62,8	—55,73	—63,25	—46,41	—39,13
15	8,58	2,12	15,12	1,12	0,32
16	38,4	33,31	17,37	25,79	19,96
17	12,26	—10,22	—10,22	—10,22	—10,22
18	13,72	—14,06	1,87	— 6,54	— 0,70
19	12,26	9,85	— 0,60	1,25	— 1,17
20	14,56	—13,23	—10,30	— 5,22	— 6,67
21	14,56	— 8,60	— 6,53	— 6,73	— 5,63
22	38,4	29,27	22,60	17,88	17,35
23	9,92	4,31	2,84	14,79	1,72
24	62,8	—46,70	—37,37	—54,22	—30,09
25	7,72	— 5,01	— 5,01	— 5,01	— 5,01
26	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00
27	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00
28	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00
29	10,82	9,97	5,39	2,04	3,17
30	6,96	— 3,92	— 3,07	0,62	— 2,49
31	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00

Таблица 20

Восьмая модификация (объем фермы 0,3178 м³)					
№ стержня	Площадь поперечного сечения, см²	Усилия в стержнях по вариантам нагружения, 10 кН			
		1	2	3	4
1	2,86	0,00	0,00	0,00	0,00
2	109,2	—69,40	—67,24	—56,75	—46,34
3	74,8	—80,22	—65,31	—62,73	—49,25
4	109,2	—73,05	—55,46	—60,17	—43,17
5	8,44	—62,18	—49,00	—58,75	—37,93
6	2,86	0,00	0,00	0,00	0,00
7	57,8	46,12	52,38	38,36	32,30
8	39,4	50,28	51,69	41,15	34,59
9	54,6	78,56	66,19	61,79	48,56
10	98,2	78,28	61,57	63,87	47,18
11	44,0	42,56	33,97	45,25	28,07
12	62,8	38,65	30,89	44,91	24,83
13	14,56	—10,01	—10,01	—10,01	—10,01
14	39,4	—55,44	—62,96	—46,11	—38,83
15	10,82	4,95	14,72	3,03	1,90
16	27,6	27,97	17,85	22,10	16,87
17	13,72	—11,96	— 9,93	—10,56	— 9,18
18	6,96	— 6,00	0,43	— 2,67	0,08
19	5,3	6,17	0,80	— 0,60	— 1,31
20	18,76	—14,63	—11,40	— 5,74	— 7,21
21	8,58	— 7,27	— 5,45	— 5,74	—44,29
22	44,0	28,28	21,76	16,63	15,74
23	13,72	4,76	3,21	15,38	2,51
24	57,8	—46,45	—37,13	—53,97	—29,85
25	9,6	— 5,01	— 5,01	— 5,01	— 5,01
26	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00
27	5,92	— 5,00	0,82	— 3,35	— 2,74
28	7,72	8,01	— 1,48	3,82	0,74
29	6,96	8,34	4,06	1,29	2,40
30	8,58	— 4,70	— 3,70	— 0,41	— 3,89
31	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00

Таблица 21

Девятая (исходная) модификация (объем фермы 0,3256 м³)					
№ стержня	Площадь поперечного сечения, см²	Усилия в стержнях по вариантам нагружения, 10 кН			
		1	2	3	4
1	2,12	— 2,15	— 2,84	— 1,68	— 1,32
2	101,8	—70,33	—66,55	—57,06	—46,72
3	54,6	—76,39	—65,47	—60,34	— 48,16
4	59,4	—69,05	—53,57	—59,01	—41,81
5	98,2	—63,60	—50,09	—60,03	—39,54
6	21,2	— 2,38	— 1,80	— 3,44	— 1,35
7	68,8	44,15	49,72	36,86	31,17
8	38,4	49,69	52,72	41,18	34,56
9	62,8	82,70	66,34	64,46	49,95
10	94,2	82,56	63,74	65,31	48,82
11	34,4	41,38	33,11	44,19	26,68
12	38,4	36,35	29,17	41,56	23,57
13	12,26	—11,48	—11,94	—11,17	—10,92
14	68,8	—53,06	—59,76	—44,30	— 37,46
15	18,76	3,03	13,42	— 8,90	— 8,44
16	30,4	—10,79	0,44	— 5,72	— 1,40
17	14,56	— 9,75	— 9,30	— 8,90	— 8,44
18	16,3	—10,79	0,44	— 5,72	— 1,40
19	17,2	11,60	2,18	1,97	0,53
20	21,2	—19,62	—13,85	— 7,31	— 9,03
21	7,72	—53,77	— 4,74	— 5,65	— 4,42
22	38,4	29,87	22,96	18,06	17,57
23	9,6	2,30	1,34	12,31	0,60
24	74,8	—43,70	—35,06	—49,96	—28,33
25	8,76	— 6,63	— 6,24	— 7,33	— 5,94
26	2,86	2,59	3,42	2,03	1,59
27	5,92	— 4,07	— 0,18	— 3,16	— 2,48
28	5,3	3,21	— 1,49	0,76	— 0,74
30	4,7	3,38	1,62	— 0,25	0,61
31	5,92	— 3,16	— 2,55	0,96	— 2,11
29	2,86	2,86	2,17	4,12	1,63

Машинное решение

						M1	*Z*	*EE*	*GG*
+++04	32568405			+++04	32567760				
						EY	*GY*		
++—02	24203485	++—02	30037219	+——02	41112491	++—02		60809658	
+——01	15606948	++—02	26256680	++—02	82225125	++—03		99836132	
++—01	13088606	++—02	22572514	++—02	19229458	+——02		11484339	
		+—+01	18765416	+—+01	14595431	+—+02		14022202	
						DY2			
+++02	21200000	+++03	10180000	+++02	54600000	+++02		59400000	
+++02	62800000	+++02	94200000	+++02	34400000	+++02		38400000	
+++02	14560000	+++02	16300000	+++02	17200000	+++02		21200000	
+++01	87600000	+++01	28600000	+++01	59200000	+++01		53000000	
						ABX			
+—+01	21582704	+—+01	28476687	+—+01	16892030	+—+01		13229050	
+—+02	76396380	+—+02	65470583	+—+02	60341613	+—+02		48169053	
+—+02	63601907	+—+02	50094603	+—+02	60035119	+—+02		39547815	
+++02	44152247	+++02	49720369	+++02	36861988	+++02		31171006	
+++02	82700927	+++02	66343933	+++02	64464479	+++02		49954969	
+++02	41381134	+++02	33112265	+++02	44197020	+++02		26688656	
+—+02	11484215	+—+02	11943262	+—+02	11171879	+—+02		10927974	
+++01	30364023	+++02	13422260	+++01	18467752	+++00		91272555	
+—+01	97574680	+——01	93041201	+—+01	89024509	+—+01		84417859	
+++02	11604269	+++01	21833361	+++01	19765393	+++00		53459129	
+—+01	53772570	+—+01	47459205	+—+01	56536325	+—+01		44257472	
+++01	23025303	+++01	13484710	+++02	12313921	+++02		60526966	
+—+01	68330858	+—+01	62478583	+—+01	73300295	+—+01		59471340	
+—+01	40734010	+——00	18333697	+—+01	31673309	+—+01		24851020	
+++01	33819628	+++01	16299352	+——00	25574480	+++00		61170610	
+++01	28687576	+++01	21734012	+++01	41267788	+++01		16305776	

Значения машинного решения читаются следующим образом. Первый знак обозначает признак числа, второй — знак числа, третий — знак порядка. Две первые цифры обозначают порядок числа, восемь последующих — мантиссу.

++—01	64573528			++—00	00000000		
++—02	92345931	++—02	11107118	++—02	25303864	++—02	16418377
++—02	22242445	++—02	13662253	+——02	84559338	++—02	82890582
+——01	16014484	++—02	31772067	++—02	86614749	++—02	10933300
+—+02	25868063						
+++02	98200000	+++02	21200000	+++02	68800000	+++02	38400000
+++02	12259999	+++02	68800000	+++02	18760000	+++02	30399999
+++01	77200000	+++02	38400000	+++01	96000000	++++02	74800000
+++01	47000000	+++01	59200000	+++01	28600000		
+—+02	70330307	+—+02	66558417	+—+02	57067310	+—+02	46721808
+—+02	69051412	+—+02	53576878	+—+02	59016415	+—+02	41816594
+—+01	23868063	+—+01	18082698	+—+01	34334800	+—+01	13566406
+++02	49699587	+++02	52720575	+++02	42186410	+++02	34561516
+++02	82564137	+++02	63747456	+++02	65316342	+++02	48825670
+++02	36358616	+++02	29177827	+++02	41569464	+++02	23572175
+—+02	53067604	+—+02	59760059	+—+02	44305274	+—+02	37465151
+++02	28869939	+++02	16815359	+++02	22254951	+++02	17100838
+—+02	10795132	++—00	44113047	+—+01	57234962	+—+01	14009084
+++02	19623219	+—+02	13854188	+—+01	73162822	+—+01	90360756
+++02	29875582	+++02	22966954	+++02	18067517	+++02	17570911
+—+02	43700260	+—+02	35069503	+—+02	49963298	+—+02	28331942
+++01	25940750	+++01	34226787	+++01	20302921	+++01	15900301
+++01	32175519	+—+01	14908297	+++00	76812953	+—+00	74562447
+—+01	31679223	+—+01	25554913	+++00	96865802	+—+01	21151923

Общие затраты времени на получение этого результата при принятых ограничениях на продолжительность поиска в оптимальной области около двух часов.

ГЛАВА 5. КОНКРЕТНОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЗЕРКАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ И ТЕХНИКЕ

§ 5.1. Расчет статически неопределимых ферм на многовариантное загружение

Практический путь решения задачи расчета статически неопределимой фермы при многовариантном загружении методами гл. 4 встречает определенные затруднения из-за увеличения размеров задачи.

Если число вариантов загружений велико, то может оказаться полезным переведение аут-форм из условий задачи оптимизации в целевую функцию.

Обозначая через $[\sigma]^{(i)}$ допускаемое напряжение в каком-либо m стержне фермы, через $s_0^{(i)}$ — усилие в i-м стержне от действия сил в избранной нами основной системе, через $s_1^{(i)}$, $s_2^{(i)}$ и т. д. — усилия в том же стержне от действия единичных сил, мы можем объем фермы v при m-кратной степени статической неопределимости и при n стержнях записать:

$$v=\sum_{i=1}^{m}\left|s_0^{(i)}+s_1^{(i)}x_1+s_2^{(i)}x_2+\ldots+s_m^{(i)}x_m\right|\frac{l^{(i)}}{[\sigma]^{(i)}}$$

или, вводя обозначения

$$\frac{s_0^{(i)}\,l^{(i)}}{[\sigma]^{(i)}}=b_0^{(i)};\qquad \frac{s_1^{(i)}\,l^{(i)}}{[\sigma]^{(i)}}=b_1^{(i)};$$

$$\frac{s_2^{(i)}\,l^{(i)}}{[\sigma]^{(i)}}=b_2^{(i)};\ \ldots\qquad \frac{s_m^{(i)}\,l^{(i)}}{[\sigma]^{(i)}}=b_m^{(i)}.$$

будем иметь

$$v=\sum_{i=1}^{m}\left|b_0^{(i)}+b_1^{(i)}x_1+b_2^{(i)}x_2+\ldots+b_m^{(i)}x_m\right|.$$

Если ферма подвергнута многовариантному загружению, то ее объем может быть выражен с помощью аут-формы в соответствии с § 1.3.

Вводя в буквенные выражения коэффициентов в формуле (5.1) вторые индексы, обозначающие номер варианта загружения фермы, можно написать при t вариантах:

$$v=\sum_{i=1}^{n}\begin{array}{c}\left|b_{01}^{(i)}+b_{11}^{(i)}x_1+b_{21}^{(i)}x_2+\ldots+b_{m1}^{(i)}x_m\right|\\ \hline\hline \left|b_{02}^{(i)}+b_{12}^{(i)}x_1+b_{22}^{(i)}x_2+\ldots+b_{m2}^{(i)}x_m\right|\\ \hline\hline \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \hline\hline \left|b_{0t}^{(i)}+b_{1t}^{(i)}x_1+b_{2t}^{(i)}x_2+\ldots+b_{mt}^{(i)}x_m\right|\end{array}\qquad(5.2)$$

Записанная аут-форма (5.2) раскрывается в соответствии с правилами § 1.3 попарным объединением строк при минимизировании аут-формы (5.2). Весь этот процесс может быть выполнен на ЭВМ.

Вопросы учета устойчивости, дискретности сортамента, жесткости и связности деформаций решаются методами гл. 4. Первые две проблемы могут быть формализованы как модулярные задачи с дискретностью, а две последние — как модулярные задачи с нелинейными связями.

§ 5.2. Предварительно напряженные фермы

5.2.1. Проектирование предварительно напряженных стальных ферм особенно актуально после прошедшей в 1971 г. в Ленинграде III Международной конференции по предварительно напряженным металлическим конструкциям.

Отметим, что впервые теория зеркальных функций была применена к расчету предварительно напряженных ферм С. Н. Клепиковым в 1958 г. [45]. В 1961 г. была опубликована работа [94], посвященная этому вопросу. Но особенно существенный вклад в этот вопрос был внесен проф. Б. А. Сперанским [116] и некоторыми другими авторами. На базе теории зеркальных функций эта методика нашла применение в Чехословакии [146].

Поясним идею расчета. Пусть мы имеем заданную в начале статически определимую ферму (рис. 16, *а*).

Пусть эту ферму требуется загрузить силой P, создав предварительное напряжение в стержнях фермы с помощью троса из высокопрочной стали, как показано на рис. 16, *б*. После введения такого троса ферма становится статически неопределимой.

Обычно ферму загружают этапами. Сначала создается частичное предварительное натяжение троса, потом частичное загружение фермы частью загрузки P, потом затяжка получает новое дополнительное натяжение и снова увеличивается загрузка P и т. д.

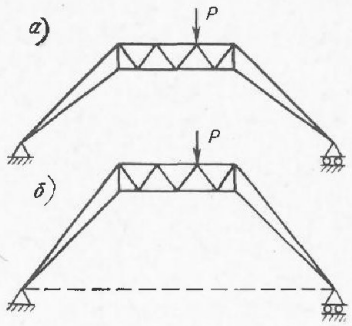


Рис. 16.

Если обозначить

$s_p^{(i)}$; $s'^{(i)}_p$; $s''^{(i)}_p$ и т. д. — напряжения в i-м стержне фермы при частичных загрузках ее силами P; z_1, z_2; z_3 и т. д. — частичные предварительные натяжения троса; $s_1^{(i)}$ — усилие от единичного загружения силами, поставленными вместо троса в i-м стержне; $[\sigma]^{(i)}$ — допускаемое напряжение в i-м стержне; $l^{(i)}$ — длину i-го стержня; $\lambda^{(i)}$ — приведенную длину того же стержня $\lambda^{(i)} = \dfrac{l^{(i)}}{[\sigma]^{(i)}}$; n — число стержней, то объем фермы может быть выражен с помощью зеркальной аут-формы

$$v = \sum_{i=1}^{n} \begin{array}{c} |s_p^{(i)} + s_1^{(i)} z_1| \lambda^{(i)} \\ \hline\hline |s'^{(i)}_p + s_1^{(i)} z_1 + s_1^{(i)} z_2| \lambda^{(i)} \\ \hline\hline |s'^{(i)}_p + s_1^{(i)} z_1 + s_1^{(i)} z_2 + s_1^{(i)} z_3| \lambda^{(i)} \\ \hline\hline |s''^{(i)}_p + s_1^{(i)} z_1 + s_2^{(i)} z_2 + s_1^{(i)} z_3| \lambda^{(i)} \end{array}. \qquad (5.3)$$

5.2.2. Аут-форма (5.3) легко может быть минимизирована, если зеркальную аут-форму (5.3) спроектировать

на двумерные координатные плоскости многомерного пространства Эвклида.

Произведя такое проектировнаие, мы получим проекции объема на двумерных плоскостях v_1, v_2, v_3 и т. д. Для случая (5.3) эти проекции объема будут иметь вид:

$$v_1 = \sum_{i=1}^{n} \begin{array}{c} |s_p^{(i)} + s_1^{(i)} z_1| \lambda^{(i)} \\ \hline\hline |s'^{(i)}_p + s_1^{(i)} z_1| \lambda^{(i)} \\ \hline\hline |s''^{(i)}_p + s_1^{(i)} z_1| \lambda^{(i)} \end{array}; \qquad (5.4)$$

$$v_2 = \sum_{i=1}^{n} \begin{array}{c} |s_p^{(i)} + s_1^{(i)} z_2| \lambda^{(i)} \\ \hline\hline |s_p^{(i)} + s_1^{(i)} z_2| \lambda^{(i)} \\ \hline\hline |s''^{(i)}_p + s_1^{(i)} z_2| \lambda^{(i)} \end{array}; \qquad (5.5)$$

$$v_3 = \sum_{i=1}^{n} \begin{array}{c} |s'^{(i)}_p + s_1^{(i)} z_3| \lambda^{(i)} \\ \hline\hline |s''^{(i)}_p + s_1^{(i)} z_3| \lambda^{(i)} \end{array}. \qquad (5.6)$$

Значение зеркальной аут-формы (5.3) будет наименьшим при наименьших значениях для составляющих аут-форм (5.4), (5.5) и (5.6).

Следует отметить, что так как абсолютное значение объемных слагаемых при возрастании внешней нагрузки в предположении соблюдения закона Гука может только возрастать, то

$$|s_p^{(i)}| < |s'^{(i)}_p| < |s''^{(i)}_p|. \qquad (5.7)$$

Но так как вторые слагаемые, стоящие под модулями в аут-формах (5.4), (5.5) и (5.6), одинаковы в каждой из этих аут-форм, то отсюда можно заключить, что

$$\text{Н. ЗН } v_3 \leqslant \text{Н. ЗН } v_2 = \text{Н. ЗН } v_1. \qquad (5.8)$$

Из сказанного ясно, что аут-формы (5.4), (5.5), (5.6) могут быть заменены аут-формами вида:

$$v_1 = v_2 = \sqrt[n]{\frac{|s_p^{(i)} + s_1^{(i)} z_1|\lambda}{|s''_p{}^{(i)} + s_1^{(i)} z_1|\lambda}}; \qquad (5.9)$$

$$v_3 = \sqrt[n]{\frac{|s'_p{}^{(i)} + s_1^{(i)} z_3|\lambda}{|s''_p{}^{(i)} + s_1^{(i)} z_3|\lambda}}. \qquad (5.10)$$

Раскрытие же аут-форм (5.9) и (5.10) легко может быть выполнено на основе формулы (1.38) § 1.3.

Такая методика расчета предварительно напряженных ферм в настоящее время является весьма распространенной [146].

§ 5.3. Синтез ферм

5.3.1. Задача о синтезе статически неопределимых конструкций была выдвинута И. М. Рабиновичем в 1933 г. [77]. Эта новая область строительной механики, как указывал И. М. Рабинович, должна включать в себя «все общие теоретические положения, которые составят основу изыскания оптимальных схем и типов сооружений».

За последние годы в СССР, особенно в связи с решениями последних съездов КПСС, началось интенсивное развитие этого направления, значительно опередившее зарубежные исследования.

Следует также отметить, что в результате многочисленных исследований, проведенных К. М. Хуберяном, К. Г. Протасовым, Н. А. Серовым, А. И. Виноградовым и многими другими учеными, до сих пор была решена только первая часть задачи, указанной И. М. Рабиновичем — задача проектирования конструкции наименьшего объема при заданном очертании конструкции и заданном расположении сил. Вторая же часть — задача о наивыгоднейшем очертании самой конструкции и о наивыгоднейшем распределении в ней внешних сил — осталась неразрешенной.

Большую неопределенность в вопросе синтетического проектирования конструкций вносит условность всех задач оптимального проектирования, требующая установления эталона сравнения, который также может быть только условным. Установить какой-либо универсальный критерий сравнения при проектировании таких конструкций невозможно, так как таким универсальным эталоном могла бы быть только математическая точка, на которую не действовали бы никакие силы.

А отсюда сопоставление выгодности решения той или иной синтетической задачи можно сделать только при строго определенном круге ограничений, которые мы накладываем на проектируемую конструкцию. И чем большее число варьируемых параметров, свободных от этих ограничений, мы оставляем проектировщику, тем более мы можем снизить объем или вес проектируемой конструкции.

Одна из первых попыток нахождения наивыгоднейшей схемы статически определимой фермы принадлежит Я. Ф. Козыреву [46].

В своей известной работе [70] А. А. Комаров отмечает, что выгодность проектирования конструкции зависит от передаваемых усилий и от длины путей, по которым происходит эта передача.

Дальнейшее развитие теория зеркальных функций в задачах синтеза сооружений получила в работах [47], [48], [50], [60], [61], [63], [67], [68], [69], [93], [98], [99].

5.3.2. Остановимся на классификации задач и методе синтетического проектирования ферм.

Отметим прежде всего, что основными параметрами, фигурирующими при решении любой синтетической задачи, являются:

1) линейные размеры сооружения (длина его элементов и площадь их поперечных сечений). Эти размеры могут быть ограничены, например, применением определенного сортамента, постоянством поперечных сечений элементов сооружения или их ступенчатым изменением и т. п.;

2) силы, действующие на сооружение. Эти силы также могут быть обусловлены, например, длительностью их действия, ограничением их направленности и т. п.;

3) опорные устройства сооружения и связь между его элементами (жесткая или шарнирная). Опорные устройства конструкции могут приводить к образованию статически определимой или неопределимой конструкции, могут быть внешними или внутренними и т. д.

Задачи синтетического проектирования ферм, на наш взгляд, можно привести к следующим основным типам:

1) к задачам предварительного напряжения ферм, которые были рассмотрены в § 5.2;

2) к задачам, связанным с рациональным использованием самой фермы при заданном ее очертании;

3) к задачам поиска оптимального очертания и стержневой структуры фермы;

4) к задачам, связанным с образованием конструкции наименьшего объема $n+1$-го рода в соответствии с п.п. 1.2.4 и 1.4.3.

Базируясь на изложенных положениях, можно рекомендовать для решения синтетических задач проектирования следующий путь: имея некоторую исходную конструкцию сооружения, необходимо образовать наисложнейшую статически неопределимую конструкцию, определить ее объем и найденное выражение объема проминимизировать.

5.3.3. Пусть требуется спроектировать статически определимую ферму наименьшего объема с тремя панелями по нижнему поясу на две силы P, к нему приложенные, с параллельным верхним поясом при заданной высоте фермы. Возьмем в качестве исходной статически определимую ферму по рис. 17, *а*.

Допускаемое напряжение во всех стержнях одинаково.

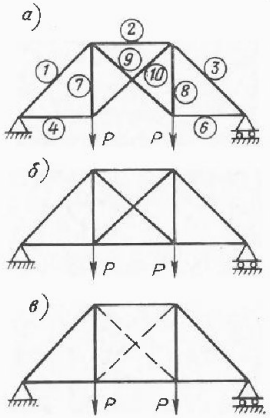


Рис. 17.

1. Определяем прежде всего усилия и объем принятой первоначально фермы. Усилия даны в табл. 22.

Таблица 22

Номер стержня	Усилие	Длина стержня	Произведение
1 и 3	$-P\sqrt{2}$	$a\sqrt{2}$	$2\,aP$
4 и 6	$+P$	a	aP
9 и 10	$+P\sqrt{2}$	$a\sqrt{2}$	$2\,aP$
7 и 8	0	a	0
2	$-2P$	a	$2\,aP$

$$\Sigma\, v\,[\sigma] = 12\,a\,P.$$

2. Преобразуем теперь первоначально принятую ферму в ферму статически неопределимую, как показано на рис. 17, *б*, и определим усилия в стержнях образованной нами статически неопределимой фермы. Результаты вычислений приведены в табл. 23.

Таблица 23

Номер стержня	Длина стержня	Усилие $s_0^{(i)}$	Усилие $s_1^{(i)}$	$\lvert s_0^{(i)}+s_1^{(i)}x\rvert\, l^{(i)}$
1 и 3	$a\sqrt{2}$	$-P\sqrt{2}$	0	$2\,2\,aP$
2	a	0	$+1$	$4\,aP$
4 и 6	a	$+P$	0	xa
5	a	$+2P$	$+1$	$2\,P+xa$
7 и 8	a	$+2P$	$+1$	$2\,2P+xa$
9 и 10	$a\sqrt{2}$	$-P\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$2\,2P+xa$

Объем в рассматриваемом нами случае $v\ [\sigma]=6aP+$

$$+3\ |2P+x|a+4|P+x|a+|x|a. \qquad (5.11)$$

Минимизируя объемную форму (5.11), найдем, что вновь найденное значение равно 10 aP и наступит при обращении в нуль усилий в стержнях № 9 и № 10 (рис. 17, *в*).

Для геометрической неизменности системы необходим один из этих стержней, которому придается наименьший размер профиля.

Дальнейшая часть расчета должна была бы практически включать в себя проверку устойчивости с соответствующим изменением размеров поперечных сечений стержней и дальнейшие попытки изменения высоты фермы или усиление ее степени статической неопределимости.

§ 5.4. Использование зеркальных функций в строительной механике и технике

Теория зеркальных функций, первоначально разработанная одним из авторов этой монографии, в период с 1941 по 1961 г. [79—85], [89—92] нашла свое развитие и применение прежде всего в работах казанских исследователей по оптимальному проектированию конструкций.

В 1959 г. она была применена А. И. Коршуновым к расчету балок равного сопротивления изгибу с учетом собственной массы [72]. В том же году она была применена С. Х. Гайнуллиной при ограничении площадей сечений балки вблизи нулевых значений моментов [20] и В. И. Борисовым — при расчете неразрезных балок и рам [10].

С 1961 г. в Казани опубликованы работы Н. С. Волковой, посвященные расчетам и обоснованию методов проектирования ферм наименьшего объема 2-го рода [16], [18].

В 1965 г. опубликованы первые работы Р. В. Челнокова, посвященные расчету арок наименьшего веса [125].

Одновременно с расчетом сплошных конструкций зеркальные функции в это же время находят применение и при расчете ферм. Публикуются оригинальные статьи Р. К. Сафина, в которых изучаются приемы проектирования ферм с учетом их работы в пластической области [109]. И. С. Гирфанов продолжает разработку зеркальных функций с использованием полученных результатов также при расчете ферм [29]. А. Ш. Арсланов [4] в диссертации дает практические методы расчета ферм наименьшего объема.

Ю. К. Сиразутдинов применил теорию зеркальных функций при обосновании вариационных методов проектирования конструкций наименьшего веса [114].

С 1968 г. Э. М. Васильева продолжила работы по расчету предварительно напряженных конструкций [12], начало которым было положено Б. А. Сперанским.

В это же время зеркальные функции используются А. М. Арасланов для проектирования конструкций при случайных загружениях [2].

Дальнейшие работы в области зеркальных функций всецело связаны с применением счетно-электронных машин.

Разработка этого направления принадлежит одному из авторов монографии [47]—[68]. Работы [54], [56], [57], [58], [59], [66] посвящены машинным алгоритмам оптимизации модулярных форм. В работах [49], [51], [52], [53], [55], [62], [63], [65], [98] даны практические методы расчета ферменных конструкций на вычислительных машинах. Методы синтеза и анализа структуры ферменных конструкций даны в работах [47], [48], [50], [60], [61], [64]. Работа [68] посвящена многокритериальным методам расчета и синтеза конструкции. В этом направлении работают и другие казанские ученые.

Г. М. Шром применяет модернизированную теорию зеркальных функций к расчету неразрезных балок [127], а Р. З. Сунгатуллин — к синтезу балок [117]. С 1971 г. выходят очень интересные работы, посвященные синтезу сооружений, Е. Н. Герасимова [22]. Наконец, Е. Г. Соловьев и Н. С. Аристова применяют ту же теорию при расчете ферм с учетом начальных напряжений [115].

В 1954 г. теорию зеркальных функций применил Н. А. Серов в Ленинграде при обосновании некоторых методов расчета статически неопределимых ферм [110], а в 1958 г. ее успешно применил в Киеве к расчету предварительно напряженных ферм С. Н. Клепиков [45]. Далее ее успешно применяет к расчету рам С. П. Фесик [122], а Л. И. Коршун в Минске на базе этой теории рассчитывает комбинированные системы [71].

В 1965 г. в Ленинграде Н. И. Абрамов высказал очень ценную мысль об успешном применении теории зеркальных функций к вопросам программирования [1], а в 1966 г. М. А. Духовный и Г. М. Михайличенко анализируют это использование в работе [34].

Теория зеркальных функций с успехом применялась В. А. Белоноговым при проектировании некоторых элементов тонкостенных конструкций подвижного состава [9], а И. А. Федоровым в Донбассе — к расчету шахтных копров [121].

В Чехословакии П. Ференчик и М. Тохачек (Ferjencik P., Tochácek M.) одну из глав своей книги посвящают изложению «широко распространенного метода линейных зеркальных функций» [146], а в Польской Народной Республике А. Ниемиерко (A. Niemierko) [158] и некоторые другие ученые с успехом применяют эту теорию в своих исследованиях. В ГДР П. Купфер (Hupfer P.) применяет эту теорию при рассмотрении современных методов оптимального проектирования конструкций [151].

В заключение отметим, что роль и значение работ казанских ученых в рассматриваемой области отмечены И. М. Рабиновичем в книгах «Строительная механика в СССР. 1917—1957». М., «Строительная механика 1917—1967», М., Стройиздат, 1969; в библиографии А. Брандта (A. Brandt) "Zestawienie bibliograficzne prac dotyczacych optymalizacji ksztatow konstrukcji». Metody optymalizacji ustrojów odksztacalnych, cz. 11. Polsca Akad. Nauk, 1964, а также в библиографическом указателе Т. Н. Дрияевой «Оптимальное проектирование конструкции». Под ред. М. Н. Рейтмана, М., 1969.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Абрамов Н. И.** О применении методов математического программирования к отысканию рациональных конструкций. Доклады на IV Всесоюзн. конф. по применению электронно-матем. методов в строит. механике, машиностроении и строит. производстве. Киев, 18—21 мая, 1965.

2. **Арасланов А. М.** Равнонапряженные конструкции при действии случайных нагрузок, представляющих собой стационарную векторную случайную функцию. — Труды/КАИ, Казань, 1968, вып. 101.

3. **Аристова Н. С.** Раскрытие аут-форм в задачах строительной механики. — Труды/КАИ, Казань, 1975, вып. 194.

4. **Арсланов А. Ш.** Прерывистые зеркальные функции и их приложение к расчету статически неопределимых ферм наименьшего веса с учетом устойчивости сжатых стержней. — Труды/Казанский инж.-строит. ин-т, 1968, вып. 7.

5. **Арсланов А. Ш.** Прямые практические методы расчета стальных статически неопределимых ферм наименьшего объема. — Автореф. на соискание учен. степени канд. техн. наук. Саратов, 1970.

6. **Ахиезер Н., Крейн М. О.** О некоторых вопросах теории моментов. ГОНТИ. Харьков, 1938.

7. **Ахмадалиев М.** Алгоритм расчета статически неопределимых ферм наименьшего объема на ЭЦВМ по методу Ю. А. Радцига. Вопросы кибернетики и вычислит. техники, 1966, вып. 1.

8. **Беллман Р., Дрейфус С.** Прикладные задачи динамического программирования. Наука, 1965.

9. **Белоногов В. А.** Рациональная форма криволинейных элементов тонкостенных конструкций подвижного состава. Канд. диссертация. Омск, 1969. Омский институт инж. жел.-дор. транспорта.

10. **Борисов В. И.** К расчету рам равного сопротивления изгибу.— Труды/КАИ, Казань, 1959, вып. 46.

11. **Бубнов И. И.** Строительная механика корабля. Часть 1. Главное Адмиралтейство, СПБ, 1912.

12. **Васильев З. М.** К определению оптимальной величины усилия в затяжке предварительно напряженной фермы. — Строит. мех. и расчет сооружений, 1967, № 2.

13. **Ващенко-Захарченко М. Е.** Символическое исчисление и приложение его к интегрированию дифференциальных уравнений. Киев, 1892.

14. **Виноградов А. И.** Вопросы расчета сооружений наименьшего веса. — Труды/Харьковский ин-т инж. жел.-дор. транспорта, вып. 25. М., Трансжелдориздат, 1955.

15. **Волкова Н. С., Радциг Ю. А., Хасаншин Н. Х.** К вопросу о расчете многократно статически неопределимых ферм наименьшего объема. — Труды/Казанский сельхоз. ин-т, Казань, 1960, т. III, вып. 42.

16. **Волкова Н. С.** О проектировании статически неопределимых ферм, имеющих наименьший объем II рода. — Труды/КАИ, Казань, 1961, вып. 62.

17. **Волкова Н. С., Радциг Ю. А., Хасаншин Н. Х.** К вопросу о расчете многократно статически неопределимых ферм наименьшего веса. — Строит. механика и расчет сооруж., 1961, № 4.

18. **Волкова Н. С.** Многократно статически неопределимые фермы наименьшего объема $n+1$-го рода. — Труды/КАИ, Казань, 1963, вып. 77.

19. **Воробьев Н. Н.** Числа Фибоначчи. — М., Наука, 1969.

20. **Гайнуллина С. Х.** К вопросу об ограничении площадей сечений вблизи нулевых значений изгибающих моментов. — Труды/КАИ, Казань, 1959, вып. 46.

21. **Гасс С.** Линейное программирование. М., Физматгиз, 1961.

22. **Герасимов Е. Н.** Оптимизация структур статически определимых ферм. — Труды/КАИ, Казань, 1971, вып. 139.

23. **Герсеванов Н. М.** Функциональные прерыватели в строительной механике и их применение к расчету ленточных фундаментов. — Сб. тр./ВИПС. Основания и фундаменты, 1933, № 1, 1934, № 2.

24. **Герсеванов Н. М.** Балка на упругом основании. Справочник инженера-проектировщика промсооружений, т. 2. Гос. науч.-техн. изд. М.—Л., 1934.

25. **Герсеванов Н. М.** Функциональные прерыватели и их применение в строительной механике. — Труды ВВИА им. Н. Е. Жуковского, М., 1935, вып. 9.

26. **Герсеванов Н. М.** Расчет балок на упругом основании без гипотезы Винклера-Циммермана. М., ОНТИ, 1937.

27. **Герсеванов Н. М.** Собрание сочинений. Том II, часть 1, М., АН СССР, 1948.

28. **Герсеванов Н. М., Польшин Д. Е.** Теоретические основы механики и их практические применения. М., Стройиздат, 1948.

29. **Гирфанов И. С.** Теоретическое исследование жестких стержневых систем оптимального объема. Строит. конструкции. Казань, Таткнигоиздат, 1966.

30. **Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б.** Новые направления в линейном программировании. М., Советское радио, 1966.

31. **Гомори Р. Е.** Полностью цельночисленный алгоритм цельночисленного программирования. — В кн.: Календарное планирование. М., Прогресс, 1965.

32. **Гутер Р. С.** Оптимизация методом частичного улучшения по группам переменных. — Сб. тр.: Математические методы решения экономических задач. М. Наука, 1969.

33. **Дрияева Т. Н.** Оптимальное проектирование конструкций./ ЦНИИЭПсельстрой. Библиогр. указатель под ред. М. И. Рейтмана, М., 1969.

34. **Духовный М. А., Михайличенко Г. М.** Применение линейного программирования к решению одной задачи строительной механики. Строит. механика и расчет сооруж., 1966, № 2.

35. **Евневич И. А.** Теория сопротивления материалов. Литогр. курс лекций, 1867, с. 267.

36. **Ермолаев Ю. М., Некрасов З. В.** О некоторых методах стохастической оптимизации. — Кибернетика, 1966, № 6.

37. **Ермолаев Ю. М., Шор Н. З.** О минимизации недифференцируемых функций. — Кибернетика, 1967, № 1.

38. **Завриев К. С.** Основы функционального прерывателя в строительной механике. — Труды/ТНИС, Тбилиси, 1936, вып. 28.

39. **Завриев К. С.** Основы теории функциональных прерывателей в строительной механике. — Труды/Тбилисский ин-т инж. жел.-дор. транспорта. Тбилиси, 1938, вып. 6.

40. **Зойтендейк Г.** Методы возможных направлений. М. ИЛ., 1963.

41. **Зуховицкий С. И.** Алгоритм для решения чебышевской задачи приближения в случае конечной системы линейных уравнений. ДАН, 1951, т. 79, № 4.

42. **Зуховицкий С. И.** О приближении несовместной системы линейных уравнений по принципу минимизации суммы модулей всех уклонений. — Доклады АН СССР, 1962, т. 143, № 5.

43. **Келли Г. Д.** Метод градиентов. — В кн.: Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета. Под ред. Дж. Лейтмана. М., Наука, 1965.

44. **Келли Г. Д.** Метод градиентов. — В кн.: Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета. Под ред. Дж. Лейтмана. М., Наука, 1965.

45. **Клепиков С. Н.** Расчет предварительно напряженных стальных ферм. — Изв. вузов. Сер. Стр-во и архитектура, 1958, № 1.

46. **Козырев Я. Ф.** К вопросу о теоретическом весе статически определимых ферм. — Труды/Казанский ин-т инж. строит. нефт. промышл., Казань, 1953, № 1.

47. **Колупаев А. Н.** Расчет и синтез ферм с применением методов математического программирования. Автореф. на соиск. учен. степени канд. техн. наук. Ростов-на-Дону, 1968.

48. **Колупаев А. Н.** Оптимальный поиск фермы наименьшего объема. — Труды/КАИ, Казань, 1968, вып. 101.

49. **Колупаев А. Н.** Расчет ферм методом нелинейного программирования. — Труды/КАИ, Казань, 1969, вып. 113.

50. **Колупаев А. Н.** К синтезу ферм при временном загружении с применением ЭЦВМ. — Труды/КАИ, Казань, 1969, вып. 113.

51. **Колупаев А. Н.** К расчету ферм с заданной жесткостью при временном загружении. Материалы республиканской конференции. Казань, 1969.

52. **Колупаев А. Н.** Применение ЭЦВМ к статически неопределимым задачам сопротивления материалов. Казань, 1971.

53. **Колупаев А. Н.** Практический метод расчета ферм с заданной жесткостью. Реф. информ./Тат ЦНТИ, Казань, 1971, лист. 2-71.

54. **Колупаев А. Н.** Минимизация модулярных функций. Реф. информ./Тат. ЦНТИ, Казань, 1971, лист № 3-71.

55. **Колупаев А. Н.** Расчет статически неопределимых ферм наименьшего веса. Реф. информ./Тат. ЦНТИ, Казань, 1972, лист № 239-72.

56. **Колупаев А. Н.** Минимизация аут-форм с дискретностью. Материалы республиканской конференции по оптимальному проектированию. Казань, 1972.

57. **Колупаев А. Н.** Минимизация линейной модулярной формы методом квадратичных приближений. Материалы республиканской конференции по оптимальному проектированию. Казань, 1971.

58. **Колупаев А. Н.** Метод минимизации аут-форм. Материалы республиканской конференции по оптимальному проектированию. Казань, 1974.

59. **Колупаев А. Н.** Алгоритмизация преобразования аут-форм. Материалы республиканской конференции по оптимальному проектированию. Казань, 1974.

60. **Колупаев А. Н.** Расчет оптимальной высоты фермы с учетом устойчивости. Материалы республиканской конференции по оптимальному проектированию. Казань, 1974.

61. **Колупаев А. Н.** О синтезе ферм наименьшего объема. — Труды/КАИ, Казань, 1974, вып. 168.

62. **Колупаев А. Н.** Алгоритм расчета фермы наименьшего объема. — Труды/КАИ, Казань, 1974, вып. 172.

63. **Колупаев А. Н.** Программирование решения синтетических задач оптимальных ферменных конструкций. Материалы Всесоюзной конференции/Проблемы оптимизации в механике твердого тела. Вильнюс, 1974.

64. **Колупаев А. Н.** Метод структурного анализа ферменных конструкций. Реф. информ./Тат. ЦНТИ, Казань, 1974, лист № 410-74.

65. **Колупаев А. Н.** Формализация и расчет оптимальных статически неопределимых ферм. Изв. вузов. Сер. Стр-во и архитектура, 1975, № 4.

66. **Колупаев А. Н.** Численные методы минимизации модулярных форм с приложениями к расчету статически неопределимых ферм наименьшего объема./КАИ, Учебн. пособие, Казань, 1975.

67. **Колупаев А. Н.** Проектирование стержневой структуры фермы. — Труды/КАИ, Казань, 1975, вып. 189.

68. **Колупаев А. Н.** Расчет статически неопределимых ферм при векторном критерии оптимальности. Сборник тезисов докладов зональной научно-технической конференции/Проблемы проектирования и внедрения рациональных строительных конструкций и сооружений в условиях Дальнего Востока и БАМа. Хабаровск, 1976.

69. **Колупаев А. Н.** Синтетическое проектирование ферменных систем. Сборник тезисов докладов второй Всесоюзной конференции по оптимальному управлению в механических системах. Казань, 1977.

70. **Комаров А. А.** Основы проектирования силовых конструкций. Куйбышевск. книжн. изд-во, 1955.

71. **Корщун Л. И.** Основы расчета комбинированных систем с применением смешанной задачи строительной механики. Сборник тезисов докладов XXI научной конференции/ЛИСИ, Л., 1963.

72. **Коршунов А. И.** Графоаналитический метод расчета балок равного сопротивления изгибу с учетом собственного веса. — Труды/КАИ, Казань, 1959, вып. 46.

73. **Крылов А. Н.** О работе балок, лежащих на упругом основании, 2-е изд. АН СССР, Л., 1931.

74. **Крылов А. Н.** О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики. 2-е изд. АН СССР, Л., 1932.

75. **Мудров Б. И., Кушко В. А.** Метод наименьших модулей. М., Знание, 1967.

76. Об одном итеративном методе решения задач целочисленного программирования./Пятецкий-Шапиро И. И., Волконский В. А., Левина Л. В., Поманский А. А. ДАН СССР, 1966, т. 169, № 6.

77. **Рабинович И. М.** К теории статически неопределимых ферм. М, Трансжелдориздат, 1933.

78. **Рабинович И. М.** Стержневые системы минимального веса. Механика твердого тела (отдельный оттиск). М., Наука, 1966, стр. 260.

79. **Радциг Ю. А.** Обобщенный метод фокальных отношений. — Труды/КАИ, Казань, 1934, вып. 2.

80. **Радциг Ю. А.** Преобразования канонических систем неразрезных балок. — Труды/КАИ, Казань, 1937, вып. 8.

81. **Радциг Ю. А.** Применение общих положений теории форм при расчете статически неопределимых систем строительной механики. — Труды/КАИ, Казань, 1940, № 10.

82. **Радциг Ю. А.** Обобщения метода Пирле—Гаусса в применении к расчету любых статически неопределимых систем. — Труды/КАИ, Казань, 1940, вып. 11.

83. **Радциг Ю. А.** Применение теоремы Клапейрона и метода фокусов к любым статически неопределимым системам. — Труды/КАИ, Казань, 1941, вып. 12.

84. **Радциг Ю. А.** Принцип оптимальности и основные задачи строительной механики. — Труды/КАИ, Казань, 1941, вып. 13.

85. **Радциг Ю. А.** Определение объема статически неопределимых ферм. — Труды/КАИ, Казань, 1946, вып. 17.

86. **Радциг Ю. А.** Зеркальные функции и их применение в вопросах строительной механики. — Труды/КАИ, Казань, 1948, вып. 20

87. **Радциг Ю. А.** Решение системы линейных алгебраических уравнений методами многомерной геометрии. — Труды/КАИ, Казань, 1949, № 23.

88. **Радциг Ю. А.** Симметрические свойства зеркальных функций. — Труды/КАИ, Казань, 1953, вып. 28.

89. **Радциг Ю. А.** Расчет статически неопределимых ферм при временном загружении. — Труды/КАИ, Казань, 1956, вып. 32.

90. **Радциг Ю. А.** Симметрические свойства зеркальных функций. — Труды/КАИ, Казань, 1958, вып. 28.

91. **Радциг Ю. А.** Основные положения теории зеркальных функций. — Труды/КАИ, Казань, 1958, вып. 33—34.

92. **Радциг Ю. А.** Особенности применения ограничителей размеров сечения при расчете статически неопределимых ферм. — Труды/КАИ, Казань, 1959, вып. 46.

93. **Радциг Ю. А.** К вопросу о синтезе ферм. — Труды/Казанский сель. хоз. ин-т, 1960, т. III, вып. 42.

94. **Радциг Ю. А.** К вопросу о расчете предварительно напряженных стальных ферм. — Труды/КАИ, Казань, 1961, вып. 62.

95. **Радциг Ю. А.** Об установлении наименьшего значения зеркальной функции многих независимых переменных. — Труды/КАИ, Казань, 1961, вып. 62.

96. **Радциг Ю. А.** Применение прерывистых форм при расчете на прочность сооружений наименьшего веса. Тезисы докладов второй научной конференции вузов Поволжья по техн. наукам./Саратов, 1964.

97. **Радциг Ю. А.** Зеркальные уравнения с одной неизвестной величиной, применяемые при решении задач строительной механики. — Труды/КАИ, Казань, 1966, вып. 91.

98. **Радциг Ю. А., Колупаев А. Н.** Программирование расчета статически неопределимых ферм. — В кн.: Применение ЭВМ в строительной механике. Киев, 1968.

99. **Радциг Ю. А.** Статически неопределимые фермы наименьшего веса. — Труды/Казанский гос. университет, Казань, 1969, часть I.

100. **Радциг Ю. А.** Методы синтетического проектирования ферм, базирующиеся на применении зеркальных функций. Arch. inzyn. Ladowej, Pan. wyd. naukowe, Warszawa, 1972, XVIII, zes. 3—4.

101. **Радциг Ю. А.** Применение теории зеркальных функций к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. — Труды/КАИ, Казань, 1974, вып. 172.

102. **Растригин Л. А.** Случайный поиск. Рига, Зинатне, 1965.

103. **Растригин Л. А.** Статические методы поиска. М., Наука, 1968.

104. **Растригин Л. А.** Случайный поиск с линейной тактикой. Рига, Зинатне, 1971.

105. **Ремез Е. Я.** О математических рукописях академика М. В. Остроградского. — В кн.: Историко-математические исследования, т. 4, ГТТИ, 1951.

106. **Ремез Е. Я.** Общие вычислительные методы чебышевского приближения задачи с линейно входящими вещественными параметрами. Киев, АН УССР, 1957.

107. **Ремез Е. Я.** Основы численных методов чебышевского приближения. Киев, Наукова думка, 1969.

108. **Розенброк, Сторн.** Вычислительные методы для инженеров-химиков. И. Л., 1968.

109. **Сафин Р. К.** Расчет статически неопределимых стальных ферм с учетом пластических деформаций. — В кн.: Строительные конструкции. Казань, Таткнигоиздат, 1966.

110. **Серов Н. А.** Методы расчета статически неопределимых ферм с обеспечением минимального веса. Диссертация на соиск. учен. степени канд. техн. наук. Л., 1954 (ЛИСИ).

111. **Симвулиди И. А.** Расчет балок, лежащих на сплошном упругом основании. — Труды/Моск. ин-т стали и сплавов. Металлургиздат, 1949, сб. 28.

112. **Симвулиди И. А.** Универсальная формула упругой линии балки. — Труды/Грузинский политехнический ин-т. Тбилиси, 1955, вып. № 4 (39). Инж. сборник.

113. **Симвулиди И. А.** Расчет балок на сплошном упругом основании. М, Советская наука, 1955.

114. **Сиразутдинов Ю. К.** О применении вариационного исчисления к расчету конструкций наименьшего объема. — Труды/КАИ, Казань, 1967, вып. 95.

115. **Соловьев Е. Г., Аристова Н. С.** Некоторые вопросы оптимальных ферм с учетом начальных напряжений. — Труды/КАИ, Казань, 1974, вып. 172.

116. **Сперанский Б. А.** Решетчатые металлические предварительно напряженные конструкции. М., Стройиздат, 1970, с. 104.

117. **Сунгатуллин Р. З.** К вопросу проектирования оптимальных балок переменной высоты. — Труды/КАИ, Казань, 1970, вып. 116.

118. **Тетерев А. Г.** Метод опорной плоскости в нелинейном программировании. Сборник докладов итоговой научной конференции Казанского гос. университета за 1963 г. Казань, 1964.

119. **Тимошенко С. П.** Устойчивость упругих систем. Изд. 2-ое, М., Гостехтеоретиздат, 1955.

120. **Уайлд Дж.** Методы поиска экстремума. И. Л., 1968.

121. **Федоров И. А.** Вопросы расчета надшахтных копров наименьшего веса. Диссертация на соискание учен. степени канд. техн. наук. Харьков, 1968 (Харьковский ин-т инж. ж.-д. транспорта).

122. **Фесик С. П.** О наименьшем весе однажды статически неопределимых рам. — Строит. механика и расчет сооруж., 1961. № 1.

123. **Фиакко А., Мак-Кормик Г.** Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации, 7. М., Мир, 1972.

124. **Финкельштайн Ю. Ю.** Об одном методе для решения задач целочисленного линейного программирования с булевыми переменными. — Доклады АН СССР, 1965, т. 164, 9, № 5.

125. **Челноков Р. В.** Расчет арок наименьшего веса, очерченных по веревочной кривой, с учетом их упругого обжатия. — Труды/КАИ, Казань, 1966, вып. 91.

126. **Чуев Ю. В., Спехова Г. П.** Технические задачи исследования операций. М., Советское радио, 1971.

127. **Шром Г. М.** Прямое проектирование рамных конструкций методом нелинейного программирования. — Труды/КАИ, Казань, 1970, вып. 118.

128. **Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г.** Задачи и методы линейного программирования. М., Советское радио, 1961.

129. **Baire R.** Leçons sur les fonctions discontinues. Paris, 1904.

130. **Brandt A. M.** Zestawienie bibliograficzne prac dotyczacych optymalizacji kształtow konstrukcji. Netody optymalizacji ustrojów odkształcalnych, cz. 11, Polsca Akad. Nauk, 1969.

131. **Bertôt.** Mém. soc. ing. civils, France, 1955, t. 8, p. 278.

132. **Bresse J. A.** Cours de mécanique appliquée, Paris, 1865, 3-me partie.

133. **Charnes A., Cooper W. W.** The stepping Stone Method of Explaining Linear Programming Calculations in Transportation Problemse Management Scincel, 1954—1955.

134. **Charnes A., Lemke C. E.** Nevel Res Logist I, 4, 1954.

135. **Clebsch A.** Theorie der Elasticität fester Körper. Leipzig, 1862. Имеется франц. перевод Théorie de l'élasticité des corps solides. Paris, Dunod, 1885.

136. **Courant R.** Variational methods for the solution of problems of equilibrues encastrees. Mem. pres. acad, sci France 2.33, № 4, 1968.

137. **Dalton R. E., Llewellyn R. W.** An extrension of the Gomory mixed-integer algorithm to mixed-discrete variables. Manag Sci. 1966, 12, № 7.

138. **Dantzing G. B.** Discrete-variable extremum problems. Operat Res., 1957, 5, № 2.

139. **Dantzing G. B.** Programming of intrdependent activities Mathematical model. Econometrica 17. 1949.

140. **Dantzing G. B.** Maximization of lihear function of variablis subjuct to lenear inqualities Astivity analysis of production and allocation ed T. S. Koopmans Cowets Commission Monograph 13 wiley New — York 1951.

141. **Dantzing G. B.** Orden and Wolfe P. Ceneralized simplex Method of Minimizing a Linear From under Linear Inequality Pestraints. RAND Report RM — 1264 The RAND Corporation, Santa Monica, Calif 1954.

142. **Dirichlet P. G. L.** Die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch und Cosinus — Reihen. Leipzig, 1900.

143. **Euler L.** Methodus inveniendi lineas curvas maximi minime proprietate, sive solutis problematis isoperimetrice latissimo sensu accepti. Additamentum de curvis elsticis, 1744.

144. **Fourier J. B. J.** Solution d'une question particuliere du calcul des inegalites Oluvres de Fourier t2, 1890/if deux extraits dans «Historre de l'Academie (Paris) pour 1824, et 1823.

145. **Foruier J. B. J.** Analyse des equation determinées. Paris 1830.

146. **Ferjencik P., Tochacek M.** Predpäté kovové konstrukcie. Slovenské Vydavat. Techn. Liter., Bratislava, 1966, str. 205.

147. **Gomory R. E.** Outline of an problems Proc. Nat. Acad. Sci. USA 1955, 53, № 2.

148. **Gomory R. E.** An algorithm for integer solution to linear problems. Princeton-IBM. Matematics Research Project, Technical Report Nol, November 17, 1958.

149. **Gomory R. E.** An algorithm for integer solution to linear programs. Recent Advances Mach Program. New-York-San Francisco-Toronto-London. Mc Craw-Hill Book Co, Inc, 1963.

150. **Heaviside O.** Electrical paper. London (New Vork), 1892, t. and t. II, см. также Electromagnitic theorie, 1893, 1913; t. I, t. II, t. III.

151. **Hupfer P.** Optimierug von Baukonstruktionen. Deutsche Demokrat. Republik, Berlin, 1970.

152. **Kepcke J. J. et al.** GEESE Techniques for Pseudonoise General Electric Co Rept. R 62 DSD 64, Syracuse, № 4, 1962.

153. **Klapeyron B. P. E.** Comtes rendus, 1857, t. 45, p. 1076.

154. **Land A. H.**, Doig A. G. An antomatic method of solving discrete programming problems. Econometrica 1960, 28, № 3.

155. **Levy M.** La statique qraphyque et ses application aux constructions. Paris, 1874.

156. **Müller-Breslau.** Die grafishe Statik der Baukonstruktionen, 1867. Имеется русский перевод: Графическая статика сооружений, СПБ, 1918, т. 2, ч. 2.

157. **Navier L. M. H.** Resumé des leçons données a l'école des ponts et chaussées. Ed. Didot pére et fils. Paris, 1826, part. I, p. 198.

158. **Niemierko A.** Ksztatowanie kratounie jako zagadnienie programouania liniowego. Arch. inzyn. Ladowej. Polskiej Akad. Nauk, 1972 Tom XVIII, zes. 3—4.

159. **Orden A.** Application of the simplex. Method to a Variety of Matrix Problems. Directorate of Management Analysis. DCS Comptroller, Headqnarters US AOR Force, Washington, D., C., April 1952.

160. **Petzold.** Die Restfunktionen und ihre Anwendungen auf Fragen der Baustatik. 1931.

161. **Poisson S. D.** Traité de Mecanique. J. G. Garnier; 1-er ed. 1829, 2-me ed. 1833, 3-me ed. 1838.

162. **Sterling J. T.** An Jntroduction to Psendo-noise Codes and Correlators General Electric Co, Rept. R 62, DSD 34, Syracuse № 4, 1962.

163. **Stiefel E.** Note of Jordan élinination Linear programming and Tchebycheff approximation Numerische Mathematic 2. 1960.

164. **Tokadi M.** On the Method of Solution of Nunlenear Programming. Bulletin of the Electrotechmical Laboratory.Vol 24, № 26, 1960.

165. **Wolfe Philip.** The prent status of non-linear programming University of California Press, Los Angelis, 1963.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

ВВЕДЕНИЕ 3

Глава 1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ЗЕРКАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ 7

§ 1.1. Формулировка вопроса 7
§ 1.2. Решение зеркальных уравнений и определение наименьшего значения зеркальной функции одной переменной 15
§ 1.3. Специальные зеркальные формы — аут-формы и ограничители 23
§ 1.4. Определение наименьшего значения зеркальной функции многих переменных величин 26
§ 1.5. Метод выравнивания 30

Глава 2. ОБОСНОВАНИЯ МЕТОДОВ РАСЧЕТА СООРУЖЕНИЙ НА БАЗЕ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ЗЕРКАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ 37

§ 2.1. Аналитические и графические приемы исследований с использованием теории зеркальных функций . . 37
§ 2.2. Расчет статически неопределимых ферм наименьшего объема 38
§ 2.3. Расчет статически неопределимых балок наименьшего объема 45

Глава 3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МИНИМИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ МОДУЛЯРНЫХ ФОРМ 57

§ 3.1. Общие идеи численных методов минимизации модулярных форм 57
§ 3.2. Минимизация суммы модулей линейных функций 63
§ 3.3. Минимизация суммы модулей максимальных уклонений систем несовместных линейных уравнений 89

Глава 4. ОСОБЕННОСТИ МИНИМИЗАЦИИ СЛОЖНЫХ МОДУЛЯРНЫХ ФОРМ 96

§ 4.1. Минимизация модулярных форм с дискретностью 96
§ 4.2. Минимизация модулярных форм с нелинейными связями 108
§ 4.3. Модулярная формализация и расчет статически неопределимых ферм 115

Глава 5. КОНКРЕТНОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЗЕРКАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ И ТЕХНИКЕ 148

§ 5.1. Расчет статически неопределимых ферм на многовариантное загружение 148
§ 5.2. Предварительно напряженные фермы 149
§ 5.3. Синтез ферм 152
§ 5.4. Использование зеркальных функций в строительной механике и технике 156

Список литературы 158

ЮРИЙ АНТОНОВИЧ РАДЦИГ, АЛЕКСАНДР НИКОЛАЕВИЧ КОЛУПАЕВ

ЗЕРКАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Редакция литературы по строительным материалам и конструкциям
Зав. редакцией П. И. Филимонов
Редактор А. В. Болотина
Технический редактор Н. В. Высотина
Мл. редактор З. М. Терентьева
Корректоры З. Г. Ляпорова, Н. С. Сафронова

Сдано в набор 19/X-79 г. Подписано в печать 4/XII-80 г.
Формат 81×108 1/32 д. л. Бумага тип. № 1 Гарнитура «Литературная»
Печать высокая Усл. печ. л. 8,82 Уч.-изд. л. 7,96 Тираж 1300 экз.
Изд. № AVIII-5193 Заказ 2412 Цена 1 р. 20 к.

Стройиздат, 101442, Москва, Каляевская, 23а
Ф-ка «Картолитография», ул. Зорге, 15